Н. А. Терешин

ПРИКЛАДНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Н. А. Терешин

ПРИКЛАДНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1990

ББК 74.262
Т35

Рецензенты:
заведующий кафедрой алгебры и геометрии МГЗПИ,
доктор педагогических наук А. Г. Мордкович;
заведующий учебно-методическим кабинетом МОИУУ Г. З. Генкин

Терешин Н. А.

Т35 Прикладная направленность школьного курса математики: Кн. для учителя.— М.: Просвещение, 1990.— 96 с.: ил.— ISBN 5-09-001300-4

В книге рассматриваются задачи построения математических моделей реальности. Особое внимание уделено прикладным задачам, решаемым при изучении в школе элементарных функций. Весьма полезными окажутся для учителя материалы по экономическому воспитанию учащихся.

Т $\frac{4306010000-598}{103(03)-90}$ 120—90 **ББК 74.262**

Учебное издание

Терешин Николай Алексеевич

ПРИКЛАДНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младший редактор *Л. И. Заседателева*
Художники *О. В. Гонтарь, В. В. Костин*
Художественный редактор *Ю. В. Пахомов*
Технический редактор *Л. М. Абрамова*
Корректор *О. В. Ивашкина*

ИБ № 12055

Сдано в набор 16.11.89. Подписано к печати 07.06.90. Формат 60 × 90[1]/16. Бум. офсетная № 2. Гарнит. литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 6. Усл. кр.-отт. 6,38. Уч.-изд. л. 6,20. Тираж 100 000 экз. Заказ № 677. Цена 15 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и массовой информации РСФСР. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства печати и массовой информации РСФСР. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ISBN 5-09-001300-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Прикладную направленность школьного курса математики мы рассматриваем с точки зрения двух важнейших взаимосвязанных, но вполне самостоятельных функций, которые она может реализовать: мировоззренческой и социально-педагогической. И это естественно.

Учителям известно, что *мировоззренческая функция* реализуется при использовании математики в других школьных учебных предметах, рассмотрении истории возникновения и эволюции математических понятий, их источника, а также при абстракциях различных уровней, знакомстве с элементами математического моделирования реальных состояний или процессов, конструирования и рассмотрения возникающих алгоритмов, программ и т. п.

Социально-педагогическая функция прикладной направленности школьного курса математики реализуется, например, при профессиональной ориентации школьников. Математические задачи могут способствовать экономическому и экологическому воспитанию учащихся. Изучение школьного курса включает в себя элементы программирования на ЭВМ, работу с микрокалькуляторами и т. д., предполагает решение практических задач, поставленных обществом перед школьным образованием на данном этапе. Вряд ли требуется подробно пояснять, что социальная значимость подобной работы учителя отнюдь не перегружает, а, наоборот, повышает эффективность учебного процесса.

Примеры реализации мировоззренческой и социально-педагогической функций прикладной направленности курса математики будут рассмотрены в данной книге.

В первой главе раскрываются некоторые особенности прикладной математики, требования, предъявляемые к составлению прикладной задачи, вводится понятие математического моделирования, так как до настоящего времени ни в программах, ни в учебниках практически не говорится о математических моделях, а учитель математики и учащиеся на каждом уроке оперируют с ними. Наряду с этим показан пример построения математической модели реальности, виды моделей, их дидактическая значимость, уделяется внимание отличию математического моделирования от моделирования в других, в частности естественных, науках.

Механизм построения математических абстракций и их связи с практикой показан на примере изучения линейной функции. Как продолжение идеи линеаризации выведены формулы интерполяции (представлено обоснование устройства математических таблиц) и аппроксимации алгебраической функции вблизи данного значения аргумента. При этом естественно возникают понятия дифференциала и производной, а также индуктивно выводится формула Тейлора, что находится в полном соответствии с историей возникновения и теми причинами, которые вызвали эволюцию этих понятий. Рассмотренный способ получения дифференциала и производной восходит к Даламберу и Эйлеру, дифференциальное исчисление которых К. Маркс назвал в «Математических рукописях» рациональным. Об этом подробнее можно прочитать в статье И. В. Давыдова и Н. А. Терешина «Ознакомление будущих учителей с математическими рукописями К. Маркса» в книге «Современные проблемы методики преподавания математики».

Во второй главе раскрываются воспитательные функции прикладной направленности школьного курса математики.

Известно, какое большое значение сейчас приобретает экономическое образование, причем оно имеет не только просветительный характер. Речь идет о практическом овладении каждым человеком элементарными методами решения экономических задач. Это касается не только тех, кто являются членами достаточно малых трудовых коллективов (бригадный подряд, семейный подряд и т. д.), но и тех, кто работают или будут работать на крупных предприятиях, ибо в настоящее время решающей силой во всех производственных делах является собрание трудового коллектива. А поскольку речь идет о переходе государственных предприятий и колхозов на хозрасчет, самофинансирование, то во главу всех хозяйственных расчетов ставятся прибыль, рентабельность, затраты. Поэтому в пособии этим понятиям уделено внимание, показана математическая зависимость между ними и приведены примеры решения реальных задач серьезной экономики методами школьной математики.

Так как большинство понятий классической математики обязано своим происхождением практике, один из разделов книги посвящен проблеме историзма в преподавании математики. На наш взгляд, следует излагать не только историю успехов мышления и получения математических результатов (что в определенной мере делается), но и историю процесса самого мышления с выявлением причин введения нового математического понятия, его трансформации в историческом развитии, создания различных трактовок в методической литературе (с соответствующими методологическими обоснованиями). Далее на примерах приложений дифференциала и интеграла сделана попытка формирования некоторых элементов стиля математического мышления. Заключительная глава дает некоторые рекомендации по реализации идей, изложенных в первых двух главах, раскрыты некоторые особенности межпредметных связей при изучении конкретных тем физики и математики на основе построения математических моделей физических процессов. Рассмотрены примеры внутрипредметных связей, осуществление которых способствует более прочному усвоению школьного курса математики.

С содержанием книги на протяжении пяти последних лет знакомились учителя математики на курсовых занятиях в Московском областном институте усовершенствования учителей, а также на курсах учителей математики при Орехово-Зуевском педагогическом институте.

Автор выражает искреннюю признательность члену-корреспонденту АПН СССР, доктору педагогических наук, профессору Ю. М. Калягину; доктору педагогических наук А. Г. Мордковичу; зав. кабинетом математики МОИУУ Г. З. Генкину; кандидату философских наук, доценту В. Н. Князеву; кандидату физико-математических наук, доценту А. Я. Блоху за помощь, ценные советы и замечания в период подготовки рукописи к печати.

Автор

ГЛАВА I. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ ПРИКЛАДНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ МАТЕМАТИКИ

В педагогических исследованиях *прикладная направленность математики* понимается как содержательная и методологическая связь школьного курса с практикой, что предполагает формирование у учащихся умений, необходимых для решения средствами математики практических задач. А так как в основе их решения лежит математическое моделирование, то для реализации прикладной направленности необходимо организовать обучение школьников элементам моделирования, которыми с дидактической точки зрения являются учебные действия, выполняемые в процессе решения задач.

Развитие у учащихся правильных представлений о характере отражения математикой явлений и процессов реального мира, роли математического моделирования в научном познании и в практике имеет большое значение для формирования диалектико-материалистического мировоззрения учащихся. Известно, что процесс математического моделирования состоит из трех этапов: 1) *формализации*, перевода предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов, т. е. построения математической модели задачи; 2) *решения задачи внутри модели*; 3) *интерпретации* полученного решения, т. е. перевода полученного результата (математического решения) на язык, на котором была сформулирована исходная задача.

Следует отметить, что в школе в основном уделяется внимание работе над вторым этапом моделирования, в то время как формализация и интерпретация остаются недостаточно раскрытыми. В последние годы предпринимаются большие усилия по привлечению в школьную практику электронно-вычислительной техники, что влечет за собой новые трудности. Ведь ЭВМ в школе может применяться опять-таки для решения задач лишь внутри математической модели, а ослабление внимания к проблеме *составления математической модели* может привести к нежелательным последствиям. Думается, исходя из этого, необходима организация обучения учащихся элементам моделирования, относящимся ко всем трем этапам. На наш взгляд, важным средством обучения элементам моделирования, относящимся к этапам формализации и интерпретации, являются сюжетные задачи. *Сюжетной задачей* называют задачу, описывающую реальную или приближенную к реальной ситуацию на неформально-математическом языке. С этой точки зрения любая задача, возникающая на практике, является сюжетной, однако часто она может не содержать достаточных для решения числовых данных. Такие задачи называют *задачами-проблемами.* Для построения их математической модели нужно найти достаточное количество числовых данных. Отметим, что школьные учебники почти не содержат задач-проблем. Учащимся, как правило, сразу предъявляется словесная модель задачи, поэтому представления о характере отражения математикой явлений, описываемых в сюжетных задачах, часто оказываются весьма примитивными. Это происходит вследствие того, что этап формализации при решении школьных сюжетных задач оказывается представлен слишком узко, т. е. нет условий для содержательного раскрытия деятельности, проходящей на этом этапе математического моделирования. Поэтому надо искать пути содержательного раскрытия и конкретизации этапов формализации и интерпретации математического моделирования. В частности, эта проблема может быть реализована на пути решения так называемых *прикладных задач.* Надо отметить, что четкого, единообразного определения этому понятию в методической литературе нет.

ПОНЯТИЕ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ. АЛГОРИТМ

В педагогической литературе понятие прикладной задачи трактуется по-разному. Одни исследователи (Г. Г. Маслова, Н. Л. Тихонов, С. С. Варданян, Г. М. Возняк, Нгуен Ван Чанг и др.) прикладной называют задачу, требующую перевода с естественного языка на математический. Другие исследователи (Н. Гайбуллаев, Я. А. Король, Г. М. Морозов и др.) считают, что прикладная задача должна быть по своей постановке и методам решения более близкой к задачам, возникающим на практике. Так, М. В. Крутихина под прикладной задачей понимает сюжетную задачу, сформулированную, как правило, в виде задачи-проблемы и удовлетворяющую следующим требованиям: 1) вопрос должен быть поставлен в таком виде, в каком он обычно ставится на практике (решение имеет практическую значимость); 2) искомые и данные величины (если они заданы) должны быть реальными, взятыми из практики.

По нашему мнению, *прикладная задача* — это задача, поставленная вне математики и решаемая математическими средствами.

Проблема формирования умений, необходимых для решения прикладных задач, исследовалась Г. М. Морозовым. Автор выделяет три основных умения, которые необходимы при построении математической модели прикладной задачи: 1) выделение системы основных характеристик задачи; 2) нахождение системы существенных связей между характеристиками; 3) нахождение системы необходимых ограничений, накладываемых на характеристики.

Методике решения прикладных задач уделено большое внимание в работах Ю. М. Калягина, В. В. Фирсова, Л. М. Фридмана и др.

В исследовании М. В. Крутихиной установлено, что если в общем приеме работы над сюжетной задачей конкретизировать этапы формализации и интерпретации путем введения действий, выявленных на основе анализа структуры процесса математического моделирования, и сформировать такой прием, то это обеспечивает более успешное решение школьниками сюжетных задач и усиливает прикладную направленность обучения при решении этих задач.

Исследование модели любого процесса связано с построением алгоритма этого процесса в форме, удобной для программирования, а это в свою очередь требует выработки у учащихся знаний и умений, определяющих алгоритмическую культуру. Можно выделить элементы, составляющие содержание понятия «алгоритмическая культура»[1], такие, как:

а) владение средствами и методами описания алгоритмов;

б) умение алгоритмически подойти к решению задач школьного типа;

в) знакомство с элементами программирования для ЭВМ.

Содержание школьной математики предоставляет большие возможности для ознакомления учащихся с основными свойствами алгоритма и различными способами его описания. В последние годы некоторое внимание уделяется и формализованному языку. Некоторые исследователи считают, что без введения формализованного языка нельзя надеяться на существенное усиление алгоритмической культуры.

Программный материал по математике позволяет выработать у учащихся четкие представления об алгоритме и следующих его свойствах.

Рациональность. Выбор более простого способа решения задачи из нескольких различных.

Массовость. Сравнение алгоритмов решения задач одного и того же класса (типа), возможность многократного использования алгоритма.

Результативность. Получение алгоритма за конечное число шагов.

Словесное описание, вычислительная схема, схема алгоритма позволяют описывать различные алгоритмические процессы. Наиболее простые из них — линейные, как правило, не вызывают у учащихся затруднений. Вторым по сложности является разветвляющийся процесс, к которому приводит решение логических задач. Так как словесное описание такого процесса громоздко, то, как правило, в этом случае применяются схемы алгоритмов.

Все средства описания алгоритмов могут применяться в курсе математики в различных сочетаниях. Приведем в качестве примера классический *алгоритм Евклида*: нахождение наибольшего общего делителя (НОД) двух целых положительных чисел a и b.

---

[1] См., например: Червочкина М. В. Некоторые вопросы повышения алгоритмической школьной культуры // Совершенствование преподавания общеобразовательных предметов.— М., 1976.

$$\langle a \neq b \rangle \longrightarrow \langle a > b \rangle \longrightarrow (a - b \Rightarrow a);\ (b - a \Rightarrow b);\ (a \Rightarrow \text{НОД}) \rightarrow$$

$\rightarrow$ (конец)

Словесное описание приведенного выше алгоритма Евклида может быть представлено следующими пятью пунктами:

п. 1. Сравнить числа a и b на совпадение. Если они не равны между собой, то перейти на п. 2, в противном случае перейти на п. 5.

п. 2. Проверить условие $a > b$. Если это условие выполняется, то перейти на п. 3, в противном случае перейти на п. 4.

п. 3. Найти разность $a - b$ и заменить ее значением значение a. Перейти на п. 1.

п. 4. Найти разность $b - a$ и заменить ее значением значение b. Перейти на п. 1.

п. 5. Принять НОД $(a, b) = a$ и прекратить процесс.

Особое внимание к конструированию алгоритмов стало проявляться с появлением ЭВМ, так как решение задачи на вычислительной машине начинается с составления алгоритма, под которым понимают точное предписание о порядке выполнения конечного числа некоторых операций, позволяющих получить по исходным данным решение самой задачи. Как видно, алгоритм составляется для внутримодельного решения задачи.

Сейчас, когда стало очевидным, что обучить всех учащихся «единой математике» практически невозможно (да и не нужно), когда дифференциация обучения математике стала применяться в самом широком смысле, идея алгоритмизации может пониматься и осуществляться двояко: одних учащихся нужно обучать лишь использованию, а других, более способных — как конструированию, так и использованию алгоритмов. Таким образом, алгоритм, выступая как дидактическое средство реализации межпредметных связей математики и информатики, несет на себе функции дифференцированного обучения в широком толковании этого понятия.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Существуют две противоположные точки зрения на правомерность употребления термина «прикладная математика». Первая из них отстаивает тезис *о единстве математической науки.*

Крупнейшие французские математики, объединившиеся в группу Н. Бурбаки, и их сторонники последовательно реализуют при построении основ математической науки этот тезис.

Тем не менее факты свидетельствуют о том, что широкое распространение получил не только сам термин «прикладная математика» в обыденном понимании. Так, под этим или аналогичными названиями издано много учебной и научной литературы, в которой дается методологическое обоснование прикладной математики, рассматриваются особенности применяемых в ней методов.

Очевидно, сущность прикладной математики, как и любой другой науки, может быть отчетливо осознана, если обратиться к историческим путям развития математики.

Один из этих путей можно условно назвать *внешним*, т. е. связанным с необходимостью решать задачи, лежащие вне математики. В этом смысле источником развития математики явились задачи практической деятельности человека (счет предметов, измерения площадей и объемов, задачи экономики, техники и т. д.).

Второй путь — *внутренний*, вытекающий из необходимости систематизации найденных математических фактов, обобщения их в теорию, развития этой теории по ее внутренним законам. Именно это и привело в свое время к выделению математики как науки из системы научных познаний человечества.

Два названных выше пути развития математики естественно назвать *прикладным* и *теоретическим*. Однако эти направления тесно связаны между собой, поэтому часто бывает бессмысленным ставить вопрос о том, к какому именно (теоретическому или прикладному) направлению принадлежит то или иное математическое понятие.

В соответствии с данным выше определением прикладных задач можно сказать, что *прикладная математика* — это наука об оптимальном решении математических задач, возникающих вне математики. Особенностью прикладных задач является то, что при их решении наряду с индуктивными умозаключениями и дедуктивной логикой используются также и *правдоподобные рассуждения*, утверждения, справедливые в типичных случаях, доводы, основанные на аналогии, на численном или физическом эксперименте, т. е. такие, которые неприемлемы в чистой (теоретической) математике, или служащие в ней лишь способом наведения учащихся на доказательство (см.: Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения.— М., 1957). Таковыми служат:

— рассуждения по аналогии;

— применение понятий вне рамок их первоначального определения;

— применение актуальной (практической) бесконечности, т. е. трактовка бесконечно малых и бесконечно больших величин как постоянных, но имеющих другой порядок, чем остальные величины;

— использование результатов приближенного решения при отсутствии точного решения.

При решении прикладной задачи правдоподобные рассуждения свойственны этапу формализации. Они связаны с выбором арсенала математических средств и определением соответствия (адекватности) математического аппарата рассматриваемому реальному явлению. Уже последнее обстоятельство делает решение прикладной задачи правдоподобным. Следует учесть, что, кроме этого, правдоподобные рассуждения используются и на этапе решения задачи внутри математической модели.

Следовательно, можно говорить о внешней и внутренней правдоподобности модели. *Внешняя правдоподобность* характеризует соответствие математической модели реальному явлению, а внутренняя правдоподобность — математическое соответствие полученных решений составленным уравнениям, неравенствам и т. д.

Между внешней и внутренней правдоподобностью наблюдаются два главных соотношения, а именно:

стремление к высокой внешней правдоподобности и в ряде случаев именно из-за этого получение громоздкой математической модели (например, довольно сложные уравнения, при решении которых вынужденно применяют приближенные способы, существенно понижающие уровень правдоподобности результата);

построение сравнительно простой математической модели, которой отвечает сравнительно невысокий уровень внешней правдоподобности и за счет высокой точности решения полученных уравнений (неравенств) повышается правдоподобность результата решения всей задачи.

При решении прикладных задач большую роль играет эксперимент. Он используется часто при построении математической модели и служит подтверждением доброкачественности выбранной математической теории.

Можно отметить несколько отличительных особенностей прикладной математики, важных для преподавания школьного курса (в сравнении с теоретической математикой):

1. *Существование математического объекта.* В прикладной математике он существует как математическая модель реального объекта, которая сконструирована самими исследователями, а в чистой математике он существует как идея, не противоречащая принятой системе аксиом.

2. *Отношение к числу.* Прикладная математика относится к числу как к порядковому индексу, как к количественной мере реальной дискретной совокупности (натуральное число) или непрерывной протяженности (вещественное число), а теоретическая (чистая) математика относится к числу как к логическому объекту.

3. *Трактовка функции.* В прикладной математике допускается различная трактовка функции, кроме трактовки на языке соответствий между элементами множеств. Действительно, определение функции как соответствия является аморфным, расплывчатым и часто неприемлемым для приложений. Приведем пример: «На автомобильном заводе в Тольятти ежедневно записывается число машин, выпущенных с первого числа текущего месяца, а в реке Москве в те же самые дни измеряется и записывается уровень воды. Получаются два ряда величин, между которыми по вполне определенному закону установлено однозначное соответствие, откуда следует, что уровень воды в реке Москве есть функция выпуска автомобилей в Тольятти». С точки зрения чистой математики данный пример ил-

люстрирует понятие функции, а с точки зрения естествоиспытателя, инженера, всегда имеющего дело с причинными связями, этот пример воспринимается как нелепость. Между тем с точки зрения чистой математики трактовка функции на языке соответствия между элементами двух множеств является наиболее приемлемой для логического построения курса математики. Другое дело, что эту концепцию трудно последовательно реализовать в курсе математики средней школы.

4. *Проблема бесконечности.* Как известно, чистая математика отвергает концепцию актуального бесконечно малого. Этому во многом способствовало введение О. Коши строгого определения предела на языке потенциального бесконечно малого. С тех пор доказательства на языке «ε-δ» нашли широкое применение в чистой математике и считаются достаточно строгими. В то же время все дифференциальные законы в прикладных дисциплинах выводятся и трактуются на уровне актуальных бесконечно малых. Действительно, строгий предельный переход при исследовании реальных процессов невозможен уже из-за квантовых и молекулярных свойств, в силу которых рассматривать физические величины, уменьшенные сверх некоторых разумных границ, вообще лишено смысла. В связи с этим физики, например, вводят «физически» или «практически» бесконечно малые величины, не давая этому понятию определения на языке чистой математики. Если, например, имеем формулу, выражающую плотность в точке неоднородного стержня: $\rho(A) = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$, то совершенно ясно, что реальное значение ΔV не должно безгранично уменьшаться; ее размеры должны быть существенно больше межмолекулярных расстояний. Тем не менее отсюда приходят к формулам $\rho = \frac{dm}{dV}$ и $dm = \rho dV$.

Аналогичные дифференциальные соотношения используются при исследовании зависимостей между дискретными экономическими категориями.

Очевидно, что объяснением этих явлений может служить положение о том, что поскольку упомянутые дифференциальные соотношения справедливы (как это доказано в теоретической математике) для бесконечно непрерывных процессов, то они могут использоваться как частные случаи на ограниченных множествах. Теоретическая математика допускает (и доказывает) существование бесконечных десятичных дробей. Тем не менее они лежат за пределами прикладной математики ввиду невозможности их практического использования.

ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ. ВИДЫ МОДЕЛЕЙ

С логической точки зрения методы аналогии и моделирования представляют собой способы расширения знания, перехода от знания одного объекта к познанию другого или других объектов. Особенность этого переноса знаний состоит в его вероятностном характере. Тем не менее эти методы получили широкое распространение и представляют интерес как специфические способы познавательной деятельности (и на эмпирическом, и на теоретическом уровне), а также как определенные средства и формы отражения объективного мира и его закономерностей. Обычно под *аналогией* понимают объективно существующее сходство между предметами в каких-либо признаках (свойствах, функциях, отношениях, структурах). Определенный вид рассуждения, умозаключения *по аналогии* — это вывод о свойствах одного предмета на основании его сходства с другим предметом.

Аналогия как сходство систем может обнаруживаться на различных уровнях: на уровне элементов, из которых состояли системы; отношений между элементами или структурами; их динамики и функции поведения и, наконец, на уровне результатов, производимых динамическими системами. При этом признаки и свойства берутся изолированно друг от друга. Рассуждения по аналогии можно описать так:

«Объект A обладает свойствами P_1, P_2, ..., P_k, P_{k+1}, а объект B обладает свойствами P_1, P_2, ..., P_k. Вероятно, в этом случае свойством P_{k+1} обладает и объект B».

Поскольку признаки, сходство или тождество которых является основанием для вывода по аналогии, могут браться в отвлечении от их существенности и несущественности и при этом вне их внутренней необходимой связи, то это показывает слабость и ненадежность аналогии как логического доказательства. Тем не менее индуктивные методы, к которым относится и метод аналогии, наряду со статистическими методами, методами моделирования, экспертных оценок и др. находят широкое применение.

Недостатки метода аналогии кроются прежде всего в отсутствии специального анализа границ, в рамках которых наблюдаемое сходство действительно имеет место. Преодоление же этих недостатков лежит на путях уточнения аналогии, а именно в выяснении: а) закона, лежащего в основе сходства или тождества отношений между элементами сопоставляемых систем; б) условий изоморфизма систем; в) условий гомоморфизма между ними (см.: Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения.— М., 1957.— С. 32, 47—49). Под *моделью* в данном случае понимается некоторая реально существующая или мысленно представляемая система, которая, замещая и отображая в познавательных процессах другую систему — оригинал, находится с ней в отношении сходства (подобия), благодаря чему изучение модели позволяет получить информацию об оригинале. Поэтому *моделирование* — это построение модели, воспроизводящей особенности структуры, поведения, а также свойства оригинала, и последующее ее экспериментальное или мысленное исследование.

Большую роль в успешности работы по математическому моделированию играет выявление *элементов математического моделиро-*

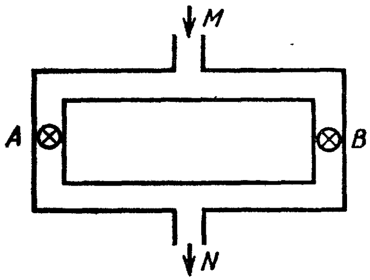

Рис. 1

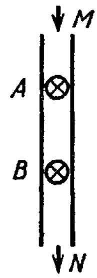

Рис. 2

вания. В. А. Стукалов выявляет следующие элементы: замена исходных терминов выбранными математическими эквивалентами; оценка полноты исходной информации и введение при необходимости недостающих числовых данных; выбор точности числовых значений, соответствующей смыслу задачи; выявление возможности получения данных для решения задачи на практике.

Моделирование как метод познания включает в себя:

1) построение, конструирование модели;

2) исследование модели (экспериментальное или мысленное);

3) анализ полученных результатов и их перенос на подлинный объект изучения.

По сути дела, мы проходим через три названных выше этапа, решая прикладные задачи.

Рассмотрим пример построения математической модели.

Пусть имеем разветвляющуюся на два параллельных направления систему водопровода с двумя кранами A и B (рис. 1). Кран может находиться лишь в двух положениях: открыт или закрыт. Соответственно положениям кранов система водопровода также может находиться в открытом или закрытом состоянии. Припишем открытому состоянию крана или системы цифру 1 и закрытому — 0. Теперь можно описать состояние системы в зависимости от состояния кранов с помощью принятых обозначений. (Заметим, что нас в данном случае интересует не количество воды, проходящее на участке MN, а лишь состояние самой системы.)

Состояние крана А	Состояние крана В	Состояние системы
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Теперь рассмотрим случай, когда краны A и B располагаются последовательно друг за другом (рис. 2), и с помощью принятых обозначений опишем состояние системы.

Состояние крана A	Состояние крана B	Состояние системы
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Первые три строки первой таблицы повторяют таблицу двоичного сложения, а четвертая строка не совпадает (так как $1+1=10$). Дело в том, что значения состояний системы получаются по законам логического сложения значений состояния кранов A и B, т. е. $A+B=C$ (C — состояние системы). Итак,

$$0+0=0$$
$$0+1=1$$
$$1+0=1$$
$$1+1=1$$

Содержание второй таблицы повторяет таблицу двоичного умножения, т. е.

$$A\times B=C$$
$$0\times 0=0$$
$$0\times 1=0$$
$$1\times 0=0$$
$$1\times 1=1$$

Мы получили важные выводы, а именно:

если краны в системе располагаются параллельно, то состояние системы описывается тождеством $C=A+B$;

если же краны в системе располагаются параллельно, то состояние системы описывается тождеством $C=A\times B$.

Полученные тождества применяются к описанию более сложных систем. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Описать состояние системы, изображенной на рисунке 3, можно так:

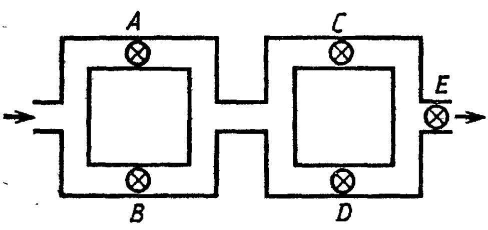

Рис. 3

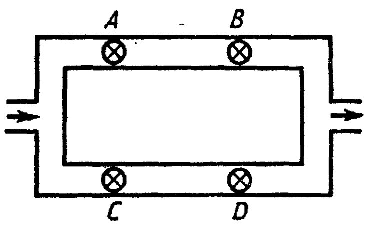

Рис. 4

$$(A+B)\times(C+D)\times E.$$

Задание. Проверьте правильность составленного выражения, если краны A, C, E закрыты, а краны B и D открыты.

Пример 2. Описать состояние системы, изображенной на рисунке 4, можно так:

$$(A\times B)+(C\times D).$$

Если от системы водопроводов перейти к электрическим системам проводов, где вместо кранов стоят выключатели-контакты, то приходят к понятию *алгебры контактных схем*, нашедшей широкое применение в практике.

Существуют два вида моделей: *материальные* и *мысленные* (или идеальные).

Первые конструируются из материальных элементов и функционируют по объективным законам природы. В этом случае изучаемый подлинный объект представлен моделью.

Напротив, мысленные модели и операции над ними конструируются в уме и последующие действия над ними носят мысленный характер и опираются на определенные логические средства, математический аппарат, специальные утверждения теории.

Сходство модели с моделируемым объектом (оригиналом) является обязательным условием моделирования, и оно различно в различных видах моделирования и определяется характером их отношений. Однако в отличие от простой аналогии сходство модели с оригиналом всегда ясно сформулировано. Так, в случае пространственного моделирования сходство между моделью и оригиналом основано на отношениях геометрического подобия между моделью и моделируемым объектом. В этом случае изоморфизм модели и объекта ограничивается пространственной упорядоченностью за счет отвлечения от всех других свойств и отношений (физическая природа элементов, временная последовательность процессов, скорость, энергия и т. п.). Здесь модель выступает пространственным образом пространственных отношений.

Но, вообще говоря, возможны и пространственные образы непространственных отношений и свойств, например временных, температурных и т. д. В этом смысле многомерные пространства и являются пространственными моделями непространственных отношений, если под словом «пространство» иметь в виду только трехмерное пространство.

В случае физического моделирования, т. е. когда модель и оригинал представляют собой системы, подчиняющиеся одним и тем же законам, и, следовательно, относятся к одной и той же форме движения материи, отношение сходства между моделью и натуральным объектом не исчерпывается лишь геометрическим подобием. Здесь необходимым является тождество законов данной формы и для определенных видов физического движения обосновывается теория подобия, требования которой необходимы при конструировании физических моделей. Суть ее состоит в том, что физически подобными являются не просто геометрически (или кинематически, или динамически) подобные системы, но такие системы, у которых отношение характеризующих их сходственных величин есть постоянное число, называемое константой подобия.

Возникающее и быстро развивающееся в последние десятилетия математическое моделирование, которое заключается в построении и экспериментальном исследовании моделей, отличающихся по своей физической природе от моделируемого объекта, позволило преодолеть ограниченные возможности физического моделирования.

При математическом моделировании отвлекаются от качественной разнородности модели и объекта, от принадлежности их к разным формам движения материи. Это обобщение принимает форму теории изоморфизма систем, приобретающего характер математического подобия. Сущность этого подобия порождается тождественностью математической формы законов природы, а именно: физические законы математически подобных систем разные, но математическая форма их выражения одна и та же (рис. 5).

Это означает, что современная математика изучает не объекты в их конкретном виде, а структуру отношений, в которых они выступают. Поэтому доказанные теоремы выражают некоторые свойства, присущие объектам различной природы, лишь бы эти объекты имели тождественную структуру отношений. Концепция изоморфиз-

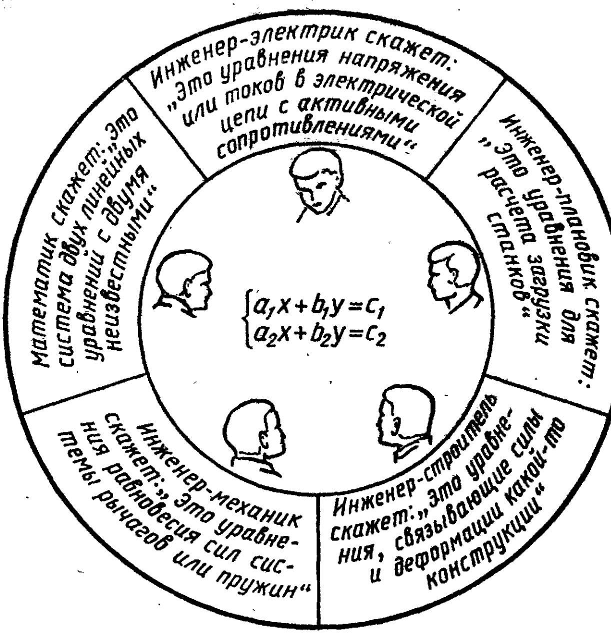

Рис. 5

ма вызвала к жизни задачу изучения общих свойств произвольных множеств — теорию множеств.

Структура взаимно-изоморфных совокупностей с точки зрения данной системы аксиом оказывается тождественной, и любые соотношения, выведенные из этих аксиом для объектов первой совокупности, автоматически переносятся и на соответствующие объекты второй.

Таким образом, в понятие изоморфизма вложена весьма плодотворная идея, расширяющая границы нашего познания, ибо она позволяет изучение большого числа взаимно изолированных совокупностей заменить изучением лишь какой-нибудь одной из них. Эта идея составляет сущность аксиоматического метода в математике. Поэтому в каждом разделе перед переходом к аксиоматическому изложению надо рассмотреть соответствующие конкретные модели. После этого абстрактные понятия и конструкции значительно теряют свою искусственность и будут рассматриваться как обобщение и развитие уже известных понятий и представлений.

Можно утверждать, что обязательным условием возможности переноса информации с модели на объект является наличие геометрического, физического или математического подобия. Этот перенос имеет достаточно большую степень вероятности.

Понятие о степени сходства модели и оригинала можно получить из следующего простого примера: когда говорят, что площадь некоторого участка земли равна 20 га, то пренебрегают тем, что реальный участок имеет небольшие углубления и возвышенности, и определяют его площадь, перемножая его длину и ширину так, как будто этот участок совершенно плоский, т. е. заменяют площадь реальной поверхности со сложной формой участка площадью плоского прямоугольника.

При условии, если на участке нет глубоких рвов и больших возвышенностей и его линейные размеры достаточно малы по сравнению с радиусом Земли, идеализированный участок приближенно отражает свойства реального. Подобные вопросы, как правило, на уроках математики не рассматриваются, так как в подавляющем большинстве учащиеся имеют дело с «хорошими» математическими моделями и потому, «что школьная математика до настоящего времени находится на позициях концепции полного детерминизма» (Гнеденко Б. В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике.— М., 1982.— С. 4).

По существу изучение почти любой темы школьного курса математики заканчивается построением некоторой математической модели, причем для этого используются как индуктивные, так и дедуктивные методы. Получая в результате рассуждения некоторую формулу, схему, график, чертеж, таблицу, алгоритм и т. п., мы тем самым имеем дело с моделированием.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Можно условно выделить следующие *дидактические функции математического моделирования:*

1. *Познавательная функция.* Методической целью этой функции является формирование познавательного образа изучаемого объекта. Это формирование происходит постоянно при переходе от простого к сложному.

Здесь мысль учащегося направляется по кратчайшим и наиболее доступным путям к целостному восприятию объекта. Заметим, что реализация познавательной функции не предопределяет процесса научного познания, ценность этой функции состоит в ознакомлении учащихся с наиболее кратчайшим и доступным способом осмысления изучаемого материала.

Например, при изучении определенной темы на уроках геометрии производят совместно с учащимися поэтапное построение чертежа, при исследовании функции на монотонность (или на экстремум) предваряют теоретическому обоснованию (построению аналитической модели) рассмотрение рисунка, на котором увязывается возрастание (убывание) или локальный максимум (минимум) функции с углами наклона касательных в соответствующих точках и далее со знаками (и значениями) производных в этих точках.

2. *Функция управления деятельностью учащихся.* Математическое моделирование предметно и потому облегчает ориентировочные, контрольные и коммуникационные действия. Ориентировочным действием может служить, например, построение чертежа, соответствующего рассматриваемому условию, а также внесение в него дополнительных элементов.

Контролирующие действия направлены на обнаружение ошибок при сравнении выполненного учащимися чертежа (схемы, графика) с помещенными в учебнике или на выяснение тех свойств, которые должны сохранить объект при тех или иных преобразованиях.

Коммуникационные действия отвечают той стадии реализации функции управления деятельностью учащихся, которая соответствует исследованию полученных ими результатов. Выполняя эти действия, учащийся в свете собственного опыта объясняет другим или хотя бы самому себе по построенной модели суть изучаемого явления или факта.

3. *Интерпретационная функция.* Известно, что один и тот же объект можно выразить с помощью различных моделей. Например, окружность можно задать с помощью пары объектов (центр и радиус), уравнением относительно осей координат, а также с помощью рисунка или чертежа. В одних случаях можно воспользоваться ее аналитическим выражением, в других — геометрической моделью. Рассмотрение каждой из этих моделей является ее интерпретацией; чем значимей объект, тем желательней дать больше его интерпретаций, раскрывающих познавательный образ с разных сторон.

Можно также говорить об *эстетических функциях моделирования*, а также о таких, как функция обеспечивания целенаправленного внимания учащихся, запоминания и повторения учащимися учебного материала и т. д.

Использование различных функций математической модели способствует наиболее плодотворному мышлению учащегося, так как его внимание легко и своевременно переключается с модели на полученную с ее помощью информацию об объекте и обратно. Такое переключение сводит к минимуму отвлечение умственных усилий учащихся от предмета их деятельности.

ОСОБЕННОСТИ ОТРАЖЕНИЯ МАТЕМАТИКОЙ РЕАЛЬНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ

Для развития материалистического мировоззрения учащихся в процессе обучения важное значение имеет показ соотношения изучаемых ими основ наук и объективной действительности. Для естественных и общественных наук, непосредственно отражающих эту действительность, решение такой задачи более или менее очевидно. Однако для абстрактных наук, например таких, как математика, решение этой задачи далеко не очевидно, а нередко и весьма затруднительно. А решать ее необходимо, так как проблема соотношения математики и действительности представляет частный случай решения более общего вопроса — основного вопроса философии.

В современной математике обнаружена глубокая связь между абстрактным и конкретным, количеством и качеством, индуктивным и дедуктивным, конечным и бесконечным, формальным и содержательным, относительным и абсолютным, единичным и общим и т. д. Тому, кто недостаточно знаком с основами методологии математики, трудно формировать у обучаемых понимание сущности математики.

Рассмотрим пример абстрактного математического понятия.

Группой называется непустое множество элементов G, для которых определена одна бинарная операция $x\tau y$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\forall x \forall y \forall z (x\tau y)\tau z = x\tau (y\tau z)$;
2) $\exists e \forall x (e\tau x = x\tau e = x)$;
3) $\forall x \exists x' (x\tau x' = x'\tau x = e)$.

Элементы x, y, z, ..., принадлежащие группе G, могут иметь самый различный конкретный смысл (числа, векторы, преобразования и др.).

Отвлечение от природы элементов и операций позволяет изучать свойства операций, наиболее часто встречающихся в математике и ее приложениях, в самой общей форме, в их чистом, т. е. отвлеченном от конкретного содержания, виде.

«Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное» (Энгельс Ф. Анти-Дюринг/ /Маркс К., Энгельс Ф. Соч.— 2-е изд.— Т. 20.— С. 37). Этим достигается большая рационализация суждений и многое другое. Так, например, возникает понятие математической структуры как множества элементов произвольной природы, для которых задают одно или несколько отношений.

Математический подход при познании явлений объективного мира, как показывает жизнь, позволяет глубже проникнуть в природу вещей и явлений и открыть ранее скрытые закономерности. Это обусловлено тем, что математика способна отражать явления и процессы материального мира точнее, полнее и глубже, чем это возможно лишь средствами непосредственного наблюдения, эксперимента и качественного осмысления полученных при этом результатов.

Второй причиной проникновения математики во все области знания является то, что математике присуща огромная степень абстракций и необычайная широта ее понятий и принципов. Такие, например, понятия, как функция, число, вектор и др., по своей широте и универсальности могут сравниться лишь с философскими понятиями. Они позволяют отразить самые разнообразные явления и процессы объективного мира, в том числе и общественные.

То, что математика способна отражать общие черты качественно различных явлений, как известно, послужило для В. И. Ленина основанием заявить, что единство мира обнаруживается в поразительной аналогичности дифференциальных уравнений, отражающих качественно различные явления объективного мира.

Проникновение математики в различные науки объясняется еще и тем, что математика имеет исключительно строгую логику. Если есть определенные истинные математические посылки, то следствия из них в силу внутренней логики математики являются безошибочными.

Поэтому *математическое мышление* — это специфическое воспроизводство абстракций и идеализаций науки, оперирование ими по строгим правилам логики.

Оно характеризуется способностями:

— формализации знания;

— оперирования формальными структурами, структурными отношениями и связями;

— перехода от одной операции к другой, устанавливания между ними диалектических связей;

— сокращения (свертывания) мыслительного процесса.

Характеризуя математическое мышление в первом приближении, обычно называют такие его свойства, как гибкость, активность, целеустремленность, точность, доказательность.

Задача учителя математики — сформировать у школьников диалектико-материалистические представления о предмете математики, раскрыть в рамках возможностей школьного курса причины и законы развития математической науки, критерии истинности математических теорий, показать, как используются математические понятия для понимания явлений и процессов, изучаемых науками о природе и обществе.

В процессе формирования диалектико-материалистического мировоззрения при обучении математике необходимо:

а) определить темы курса математики, в которых наиболее характерно выступают его мировоззренческие основы;

б) вычленить темы из курсов химии, физики и других дисциплин, наиболее пригодные для использования в них математического аппарата;

б) отобрать и выработать методы обучения, соответствующие поставленной цели;

г) наметить формы применения математических методов и понятий в других дисциплинах.

Методы обучения математике должны отражать в опосредованной форме закономерности теории познания. Метод сравнения и противопоставления, метод одновременного изучения прямых и обратных действий, глубокий анализ взаимно обратных величин дают существенные результаты как в плане повышения качества знания, так и в вопросах формирования научного мировоззрения.

Выработке научно-материалистических взглядов на природу и общество содействует установление в процессе обучения взаимных связей между учебными предметами, поскольку явления объективного мира существуют не изолированно, а находятся в единстве и взаимосвязи. Межпредметные связи призваны прежде всего формировать научное мировоззрение учащихся. Явления, изучаемые с разных сторон отдельными учебными предметами, трактуются с общих принципиальных методологических позиций. При этом сохраняются объективные связи между изучаемыми явлениями, а также внутренней логики каждого предмета.

Усвоение учащимися многих математических понятий активно содействует развитию их диалектического мышления.

Важнейшими в этом смысле из всего арсенала математических понятий и методов являются метод координат, функциональная зависимость, графический метод исследования функций, начала математической логики, векторы, метод приближенных вычислений, производная, интеграл, алгоритмизация процессов, элементы математической статистики, информатика.

В процессе изучения математики и информатики школьники знакомятся с элементами математической логики, которая находит в современных условиях приложение в электронике (исследование релейно-контактных и электронных схем), вычислительной технике (программирование), кибернетике и других отраслях науки.

Следовательно, свои воспитательные функции математика выполняет как средствами своего логического аппарата, так и путем применения математического знания в других смежных с нею науках.

Приведем пример того, как кажущиеся на первый взгляд абстрактными понятия, изучаемые на уроках математики, выражают нередко не связанные друг с другом закономерности реального мира.

При изучении линейной функции $y=kx+b$ полезно показать учащимся, что она может описывать зависимость между длиной стержня и температурой нагревания: $l=l_0(1+\alpha t)$, между объемом газа и его температурой при постоянном давлении: $V=V_0(1+\alpha t)$ (закон Гей-Люссака), давлением и температурой газа при постоянном объеме: $p=p_0(1+\beta t)$ (закон Шарля), скоростью и временем в равноускоренном движении: $v=v_0+at$ и т. д. Учащимся следует при этом рассказать, что в курсе физики каждая из перечисленных зависимостей и их свойства рассматриваются самостоятельно ввиду своеобразия отражения физикой реальной действительности (каждая из закономерностей выводится из эксперимента), в математике соответствующие закономерности и их свойства изучаются одновременно.

При изучении функции $y=ax^2$ можно привести примеры зависимости пути от времени при равноускоренном движении $S=\frac{at^2}{2}$, формулу мощности электрического тока $P=I^2R$ при постоянном сопротивлении и другие формулы, связывающие различные физические величины.

Еще более обобщенным понятием, отражающим многообразные процессы реального мира, является понятие производной функции, которое должно быть дано в свете общей задачи математического анализа — исследования процесса изменения функции. В физике производная рассматривается как мгновенная скорость прямолинейного движения, как сила тока в цепи, линейная плотность неоднородного стержня, в химии скорость химической реакции и т. д. Особое место при изучении производной отводится исследованию функции с ее помощью, решению задач на экстремумы, приближенным вычислениям.

Раскрытию своеобразия отражения действительности математикой успешно способствует вывод формул решения задач и составление задач по данной формуле. В ряд задач по математике целесообразно вкладывать практическое содержание.

Широта отражения материального мира математикой может быть раскрыта в курсах геометрии. Например, в определение понятия «цилиндр» включены свойства бесчисленного множества окружающих нас предметов, имеющих цилиндрическую форму. Раскрыв содержание понятия цилиндра, находим свойства его элементов и зависимость между ними, применяя их для каждого предмета, имеющего форму цилиндра. Например, выяснив, что объем цилиндра V равен произведению площади основания S на высоту h, узнаем, как найти объем любого предмета цилиндрической формы. На практических занятиях учащимся предлагается вычислить объемы деталей, заготовок, предметов домашнего обихода, имеющих форму цилиндра (независимо от их цвета, материала), по одной и той же формуле $V=S\cdot h$. Если бы понятие «цилиндр» не было отвлеченным, то объем каждого предмета надо было бы вычислять по своей формуле.

Из свойств пирамиды в этом плане заслуживает особого внимания следующее: при пересечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию, получается сечение, площадь которого прямо пропорциональна квадрату его расстояния от вершины. Это обстоятельство служит теоретическим объяснением зависимостей между яркостью светящейся поверхности и расстоянием от источника света. Действительно, если представить себе, что в вершине пирамиды находится источник света, то световой поток, перехватываемый параллельными сечениями пирамиды, распределяется по ее поверхности. При удалении площадки от вершины на расстояние, вдвое большее, площадь ее увеличится вчетверо, а сила света, приходящаяся на единицу площади, станет вчетверо меньше. Итак, яркость светящейся поверхности обратно пропорциональна квадрату расстояния ее от источника света. Пользуясь этим законом, современная астрономия определила расстояние до самых отдаленных объектов Вселенной — внегалактических туманностей, до которых луч света доходит за многие сотни тысячелетий.

Математические понятия имеют своим источником объективную реальность. Однако математика в отличие от естественных наук ориентируется лишь на немногие свойства объективной реальности, а затем, исходя из созданных на этой основе понятий, строит абстракции более высокого порядка. Для доказательства правильности созданной таким образом системы нет надобности каждый раз проверять ее действительностью.

«Как и все другие науки, математика возникла из *практических потребностей* людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики»,— писал Ф. Энгельс (Маркс К., Энгельс Ф. Соч.— 2-е изд.— Т. 20.— С. 37—38).

Учитель математики может раскрыть это важное положение Ф. Энгельса на примерах, взятых из учебного курса. Например, при первоначальном знакомстве с углами необходимо обратить внимание учащихся на значение величины угла в технике: угол откоса насыпи; угол зрения, под которым виден предмет, и связанная с этим оценка расстояния и т. д. При изучении симметрии рассматриваются примеры симметричных фигур в быту, технике, природе.

В начальных классах после ознакомления с различными предметами, имеющими форму геометрических тел, необходимо обратить внимание учащихся на важнейшие свойства этих фигур: равномерную кривизну круга, «жесткость» треугольника, осевую и центральную симметрии прямоугольника и др. Хорошо, когда эти свойства воспринимаются детьми конкретно, находят подтверждение в практике. Чтобы получить убедительные ответы на вопросы: «Почему колеса делаются круглыми, а стропила крыши в виде треугольника? Почему тетрадям и книгам придают форму прямоугольника?», достаточно попытаться сделать колесо не круглым, построить модель стропил в виде четырехугольника или попробовать сделать тетрадь из листа треугольной формы.

Знакомя учащихся на уроках геометрии с абстрактными понятиями, необходимо показать им конкретные объекты, сопоставить их друг с другом: плоская поверхность стола, классной доски, зеркала и кривая поверхность мяча, электрической лампочки; туго натянутая нить и нить, закрепленная в двух точках и свободно висящая, и т. д. Такое сопоставление помогает установить причинно-следственные связи изучаемых явлений.

Здесь же можно дать понятие и о некоторых соотношениях между геометрическими образами (понятия параллельности, перпендикулярности, равенства, подобия, симметрии). Воспитание у детей привычки видеть геометрические фигуры в окружающих предметах имеет первостепенное значение, так как в результате дети учатся обнаруживать зависимости между геометрией и практической деятельностью людей, устанавливать источники развития научного знания.

Особое место занимают в курсе геометрии преобразования, в частности параллельный перенос, при изучении которого нужно напомнить учащимся о поступательном движении в физике. Например, перемещение ползунка, движущегося в прямолинейных пазах, движение щелевого затвора фотоаппарата и т. д. При помощи свойств параллельного переноса можно решать значительное число практических задач.

Изучая четырехугольники, стоит указать на одно интересное свойство, имеющее практическое значение: равными четырехугольниками произвольной формы можно сплошь покрыть плоскость (т. е. можно сделать паркет, плитки которого будут равными между собой четырехугольниками).

Свойство вписанных углов находит применение при определении положения точки по известным ее направлениям на три другие точки, положение которых также дано. Решение этой математической задачи дает возможность определить, например, положение корабля на море или самолета в воздухе при помощи радиолокации. Радиостанции (так называемые радиомаяки) посылают сигналы определенной длины волны. Приемное устройство на корабле (рамочная антенна) дает возможность определить направление на передающую радиостанцию. Если известны положения трех таких радиомаяков и направления на них, то возможно определить положение корабля.

Необходимо добиваться, чтобы общее школьники воспринимали через возможно более широкий круг проявлений конкретного. Полезно, например, обратить внимание учащихся VII класса на то, что признак равенства треугольников определяет свойства «жесткости». Сначала учащимся напоминают различные применения этого свойства в строительстве и в быту, а в следующем классе они узнают, что в быту и технике учитывается и отсутствие «жесткости» (например, подвижность параллелограмма).

Первые уроки стереометрии, как правило, очень трудны ввиду того, что переход от плоских (двухмерных) образов к пространственным (трехмерным) требует большой работы воображения. Поэтому необходимо постоянное обращение к реальным образам окружающего нас мира, а также к моделированию. Постепенно к моделированию присоединяется проекционный чертеж пространственных фигур, играющий первостепенную роль в развитии пространственного воображения.

Известно, что «чертеж — язык техники», и учащиеся должны овладеть умением строить точные, наглядные чертежи, уметь их читать и понимать, а в простейших случаях восстанавливать по этим чертежам соответствующие пространственные фигуры.

Своеобразие отражения действительности математикой нельзя понимать узко, только как обращение непосредственно к вещам окружающей нас действительности и отношениям между ними. Широте понимания могут помочь различного рода модели, чертежи — все материальные реализации, а также идеальные образы, связь которых с действительностью уже воспринята учащимися.

Исключительная широта применения математических теорий к изучению реальных явлений объясняется тем, что сами эти теории и изучаемые ими понятия возникли в результате отвлечения от некоторых свойств реальных объектов.

Ф. Энгельс писал в «Анти-Дюринге»: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира ... *чистая* математика *применяется* впоследствии к миру, хотя она заимствована из этого самого мира и только выражает часть присущих ему форм связей,— и как раз *только поэтому* и может вообще применяться» (Маркс К., Энгельс Ф. Соч.— Т. 20.— С. 37).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АБСТРАКЦИИ И ИХ ОТНОШЕНИЕ К РЕАЛЬНОСТИ

Прогресс математики всегда был тесно связан с возрастанием абстрактности ее понятий и теорий. Используя более глубокие абстракции, математика раскрывает существенные свойства исследуемых ею объектов. Благодаря этому оказалось возможным изучать не только традиционные количественные отношения и пространственные формы, но также и более сложные структурные отношения.

Начало новому взгляду на объекты исследования математики было положено открытием неевклидовых геометрий Н. И. Лобачевским, Я. Бойаи, К. Ф. Гауссом и Б. Риманом. Эти открытия не только подорвали тысячелетнюю веру в возможность существования единственной геометрии Евклида, но и в корне изменили прежние представления о геометрии как полуэмпирической науке.

Хорошо известно, например, что И. Ньютон считал геометрию частью механики, которая имеет дело с измерениями, И. Кант пытался единственность геометрии Евклида обосновать философскими аргументами. Рассматривая пространство как априорную форму чувственного созерцания, он считал, что поскольку человек воспринимает весь внешний мир сквозь призму этой формы, являющейся неотъемлемым свойством нашей чувствительности, то свойства и отношения предметов внешнего мира должны согласоваться с положением геометрии и эта геометрия должна быть единственной.

Сторонники эмпиризма (Д. С. Миль и его последователи) считали положения геометрии индуктивными обобщениями опыта и поэтому также не могли правильно оценить значение новых неевклидовых геометрий.

Положение коренным образом изменилось после того, как в 1868 г. итальянский математик Е. Бельтрами построил модель планиметрии Лобачевского, т. е. показал, как она может быть интерпретирована на так называемых псевдосферах, представляющих поверхности отрицательной кривизны в геометрии Евклида. Впоследствии Ф. Клейн, А. Пуанкаре и другие предложили интерпретации и модели всей геометрии Лобачевского — Бойаи. Построив модель неевклидовых геометрий из объектов геометрии Евклида, математики тем самым доказали, что если последняя является непротиворечивой, то должны быть непротиворечивыми и неевклидовы геометрии. Таким образом, с чисто логической точки зрения все эти системы являются одинаково равноправными.

Однако простота этих рассуждений оказывается обманчивой. Сам этот вывод таит в себе удивительный парадокс: если все логически возможные системы геометрии считать одинаково истинными, тогда само понятие истины оказывается противоречивым и двусмысленным. В самом деле, геометрии Евклида и Лобачевского — Бойаи опираются на аксиомы о параллельных, которые противоречат друг другу, хотя каждая из этих геометрий является логически непротиворечивой. Признать обе эти геометрии одинаково истинными означало бы признать истинными две взаимоисключающие системы утверждений. Знаменитый закон формальной логики «Третьего не дано» (истинно либо *A*, либо отрицание *A*) в свете новых логических парадоксов как-то теряет свою убедительность и непререкаемость.

Выход из этого кризиса был найден следующим образом: условились считать, что истинность системы может быть установлена после того, как ее основным абстрактным объектам будет дана конкретная интерпретация, например физическая, и полученные в результате этого утверждения будут проверены с помощью опыта.

Иначе говоря, аксиомы геометрии не являются ни эмпирическими обобщениями свойств физического пространства, ни априорными синтетическими утверждениями, как учил Кант, т. е. аксиомы стали рассматривать как некоторые гипотезы, применение которых для изучения свойств и отношений реального мира должно быть обосновано после соответствующей интерпретации основных объектов геометрии. Сами же эти объекты в рамках математического исследования остаются такими же абстрактными, как, например, алгебраические соотношения. То, что под алгебраическими символами можно подразумевать любые числа, ни у кого не вызывало сомнений. Геометрические же утверждения неизменно связывались со свойствами физического пространства. Новый абстрактный подход к объектам геометрии привел к обобщению предмета ее исследований. В результате этого прежнее геометрическое пространство стало небольшой частью более обширного абстрактного пространства. Это позволило Д. Гильберту в «Основаниях геометрии» (1899) сказать: «Мы мыслим три различные системы вещей; вещи первой системы мы называем точками и обозначаем *A, B, C*, ...; вещи второй системы мы называем прямыми и обозначаем *a*, *b*, *c*, ...; вещи третьей системы мы называем плоскостями и обозначаем α, β, γ, ... Мы мыслим точки, прямые, плоскости в определенных соотношениях и обозначаем эти соотношения различными словами, как-то «лежит», «между», «конгруэнтный», «параллельный», «непрерывный». Точное и для математических целей полное описание этих соотношений достигается аксиомами геометрии» (Гильберт Д. Основания геометрии.— М., 1948.— С. 56).

Значит, основным объектам геометрии *(точка, прямая, плоскость)* можно дать любую интерпретацию, а не только ту, единственную, которую имел в виду Евклид. Например, под точкой можно подразумевать тройку действительных чисел, под прямой — линейное уравнение с тремя переменными и т. д.

Доказательство возможности расширения традиционных представлений об объектах евклидовой геометрии как о фигурах, образованных из обычных точек, прямых и плоскостей, является одним из крупнейших достижений математики XIX столетия. Известно, что одной из интерпретаций (а точнее, арифметической моделью) геометрии Евклида является *аналитическая геометрия*, в которой всякое свойство, присущее точкам и прямым, находит себе некоторое соответствующее свойство пар чисел (x; y) и отношений троек чисел (a; b; c).

Например, свойству пересечения двух прямых на плоскости, т. е. наличию у них общей точки, соответствует существование единственного решения некоторой системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Любопытным оказывается фрагмент еще одной интерпретации планиметрии Евклида, если понимать под «точками» точки так называемой конформной плоскости (евклидова плоскость, к которой присоединена одна бесконечно удаленная точка, за исключением какой-либо одной ее точки (назовем ее O), которую мы удалим из этой плоскости).

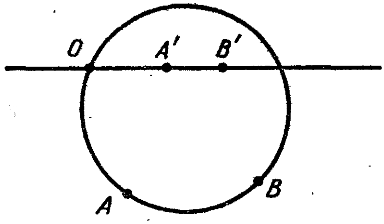

Рис. 6

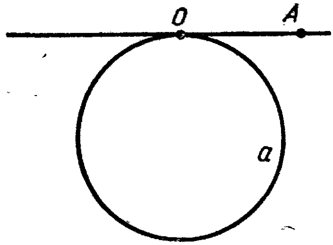

Рис. 7

Прямыми будем называть всевозможные окружности и те прямые, которые проходят через выброшенную точку O (рис. 6). За точки принимаются обычные точки, а прямые отличаются от обычных прямых, но, как можно убедиться, эти точки и прямые в совокупности удовлетворяют всем плоскостным аксиомам геометрии Евклида. (Изложение аксиом Евклида дано в уже упомянутых выше «Основаниях геометрии» Д. Гильберта.)

Остановимся на выполнимости некоторых аксиом в данной интерпретации, например этой: «Через две точки можно провести прямую и притом только одну». В самом деле, если O, A' и B' лежат на одной прямой, то такой прямой будет прямая в обычном смысле (рис. 6). Если же точки O, A и B не лежат на одной прямой в обычном смысле, то искомой прямой будет единственная окружность, проходящая через эти три точки (рис. 6).

Аналогично обстоит дело и с аксиомой, гласящей, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну. Действительно, если дана прямая a и точка A, то искомой прямой будет либо прямая OA (рис. 7), либо окружность, соприкасающаяся с окружностью a (рис. 8, 9). Соприкасающиеся окружности являются параллельными, так как их общая точка O удалена, а других общих точек у них быть не может.

Подробнее с интерпретацией планиметрии Евклида можно ознакомиться в книге В. Н. Молодшего «Очерки по философским вопросам математики» (М., 1969).

После появления теории множеств стало возможным рассматривать объекты всех математических дисциплин вне зависимости от

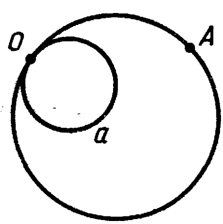

Рис. 8

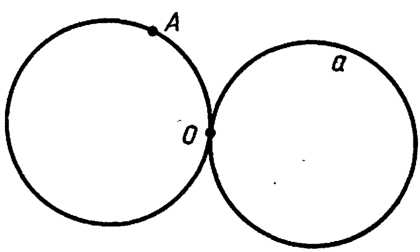

Рис. 9

их содержания и конкретной природы. Синтез теоретико-множественных идей и аксиоматического метода составляет суть концепции *математической структуры.* Современная математика различает три основных типа математических структур: *алгебраические, топологические* и *структуры порядка.*

Посредством комбинации названных структур образуются более сложные или многократные математические структуры, с помощью которых можно классифицировать различные математические теории.

В результате возникновения новых абстрактных разделов математики и формирования структурного подхода к объектам ее исследования становилось все более очевидным, что математика не ограничивается изучением свойств и отношений между величинами и пространственными фигурами, а сами эти свойства и метрические отношения между величинами и отображающими их числами и функциями, несмотря на их важное прикладное значение, в идейном отношении составляют лишь часть более обширного и глубокого учения о математических структурах и категориях. Иногда, стремясь подчеркнуть отличие современной математики от классической, первую называют качественной, а вторую — количественной, противопоставляя их друг другу.

Такое противопоставление основывается на отождествлении понятий величины и числа с количеством, а структуры и категории с качеством. Конечно, понятия абстрактной структуры и категории качественно отличаются от понятия величины или фигуры в трехмерном пространстве. Но математические структуры и категории имеют дело не с какими-либо конкретными реальными предметами, а исключительно с абстрактными объектами, и при их описании обращается внимание только на их общие, формально-структурные свойства и отношения, которые выражают с помощью аксиом. Точно так же при этом отвлекаются от конкретного содержания отношений между изучаемыми предметами.

Теперь кратко остановимся на отношении математических структур к объективной реальности, ибо этот вопрос является центральным для философии математики. Трудности понимания объективной природы абстрактных объектов и структур математики связаны прежде всего со спецификой математического познания, которое обосновывает все свои утверждения, опираясь исключительно на законы и принципы логики, а не на эксперимент, а также с особенностями, присущими процессам абстрагирования и идеализации в математике.

В математике абстрагирование идет гораздо дальше, чем в естествознании.

Многие абстракции в математике возникают через ряд последовательных ступеней отвлечения и последующего обобщения, т. е., как часто говорят, мы имеем дело не просто с абстракциями, а с абстракциями от абстракций. Рассмотрим в качестве примера формирование понятия *многомерного пространства.*

Известно, что основные понятия геометрии Евклида представляют идеализации свойств окружающего нас трехмерного пространства. Такая идеализация связана с абстрагированием, и, чтобы подняться на следующую ступень отвлечения, надо представить точку, прямую и плоскость как особые идеальные объекты.

Теперь необходимо взглянуть на эти объекты с аналитической точки зрения. Поскольку любой точке пространства соответствует упорядоченная тройка действительных чисел, то уместно задать вопрос: чему может соответствовать четверка, пятерка или любое конечное упорядоченное множество n чисел? Эти пространства по аналогии с обычным трехмерным пространством стали называть четырехмерным, пятимерным или вообще n-мерным пространством. Подобно этим пространствам образовывались понятия метрического и топологического пространств, по отношению к которым все прежние пространства будут частными случаями.

Наконец, для математики, пожалуй, больше, чем для какой-либо другой науки, присуща относительная самостоятельность чисто теоретического развития, и это в первую очередь связано с особенностями рассуждений в ней. Поэтому, когда имеют дело с готовыми математическими структурами, на первый взгляд они кажутся априорными формами познания, оторванными от конкретного содержания.

Если же проследить генезис этих форм исторически и логически, то эта иллюзия исчезает. В самом деле, между первоначальными структурами математики, имеющими совершенно конкретное и интуитивное содержание наподобие трехмерного пространства Евклида, и более общими абстрактными структурами вроде многомерного и бесконечномерного пространства существует прямая связь и преемственность.

Ведь при рассмотрении точек многомерного пространства как векторов, координатами каждого из которого служит упорядоченная последовательность действительных чисел, постулируется выполнение основной группы законов, имеющих силу для векторов обычного трехмерного пространства. С помощью этих законов выявляется, с одной стороны, связь между трехмерным и многомерным пространством и, с другой — различие между ними, так как постулируется выполнение не всех законов трехмерного векторного пространства. Точно так же обстоит дело и с любыми абстрактными структурами, в системе аксиом которых формулируются наиболее глубокие и существенные свойства абстрактных объектов. Вот почему они оказываются применимыми для математического исследования самых разнообразных явлений и процессов реальной действительности.

Однако, начиная работать с готовыми структурами, обычно забывают о тех интуитивных прообразах, которые дали толчок для образования целой цепи последующих абстракций и обобщений.

Другими словами, способ применения и разработки математических структур прямо противоположен историческому пути их формирования. В то время как исторически математическое познание шло от отдельных, конкретных систем объектов, или интерпретаций, к выявлению их общей структуры, в дальнейшем развитие идет от готовых абстрактных структур к обнаружению их конкретных интерпретаций.

Такой процесс развития математического познания, в котором конечный его пункт принимается за начало дальнейшего движения мысли, К. Маркс называет «оборачиванием метода» и в «Математических рукописях» подробно иллюстрирует его на примере возникновения и применения основных понятий дифференциального исчисления (Маркс К. Математические рукописи.— М., 1968.— С. 55—57).

В работе «О дифференциале» К. Маркс показывает, как в ходе разработки исчисления символический дифференциальный коэффициент становится самостоятельным исходным пунктом, но тем самым и дифференциальное исчисление выступает как некое специфическое исчисление, которое оперирует уже на собственной почве. К. Марксу удалось сорвать покров с тайны, которым было окутано дифференциальное исчисление на первых этапах его развития. Это исчисление носило мистический характер потому, что не был раскрыт реальный смысл операции дифференцирования и происхождения понятий производной и дифференциала. Эти идеи Маркса об «оборачиваемости метода» в ходе математического познания дают возможность правильно подойти к решению вопроса об объективном содержании абстрактных структур современной математики.

Кажущееся на первый взгляд априорным их происхождение в действительности представляет продукт длительного развития, в ходе которого постепенно выявлялись наиболее глубокие и существенные свойства математических объектов и структур. Но как только такой цикл развития заканчивался и приводил к возникновению соответствующей математической структуры, этот конечный пункт становился началом нового этапа математического познания, связанного с разработкой теории данной структуры и ее применениями в других науках.

ГЛАВА 2. ВОСПИТАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ПРИКЛАДНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Известно, что эффективно такое обучение, которое в единстве с воспитанием и наряду с изложением учебного материала обеспечивает активизацию мыслительной деятельности всех учащихся и сознательное овладение ими системой научных знаний, побуждает у них потребность в этих знаниях и вызывает интерес к предмету, соответствует развитию способностей каждого учащегося, прививает умения и навыки применять полученные знания на практике и самостоятельно приобретать их. Эффективному обучению математике во многом способствует решение *задач с практическим содержанием*. Потребность в использовании практических материалов при обучении школьников математике определяется тем, что возникновение, формирование и развитие математических понятий имеют своим источником чисто человеческие ощущения и восприятия, а также и тем, что в познавательной деятельности учащегося имеет место тесная связь логических процессов мышления и чувственных восприятий. Поэтому обращение к примерам из жизни, окружающей обстановки и т. п. облегчает учителю возможность организовать целесообразную учебную деятельность учащихся.

Все это способствует более глубокому усвоению теоретических положений, формированию умения применять математические знания на практике, позволяет в ряде случаев ознакомить школьников с процессами производства.

Для развития прикладных математических навыков при подборе упражнений, по нашему мнению, необходимо формировать следующие навыки и умения:

— целеустремленное составление и анализ математических моделей реальных задач и развитие соответствующей интуиции на доступном учащимся уровне;

— отбор данных, нужных для решения задачи, прикидка их необходимой точности;

— выбор заранее не заданного метода исследования;

— составление задач, решение с помощью предварительного вывода аналитических зависимостей;

— составление задач, требующих для своего решения знаний из различных разделов курса;

— доведение решения задач до практически приемлемого результата;

— применение справочников и таблиц;

— прикидки, оценки порядков величин;

— действия с различными величинами;

— методы контроля правильности решения.

Учителя математики средних школ и СПТУ имеют возможность пользоваться задачниками по математике, выпущенными издательствами «Высшая школа» и «Просвещение» для учащихся средних школ и профессионально-технических училищ. В некоторых пособиях практические задачи подобраны по группам родственных специальностей. Кроме того, материал для составления прикладных задач можно заимствовать из справочников по различным отраслям народного хозяйства, а также при чтении современной технической литературы и ознакомлении с народнохозяйственными планами страны.

Избегая однообразия и шаблона при составлении задач, целесообразно применять различные формулировки условий, в том числе такие, в которых существенно выделена описательная часть, формулировки-рассказы, задачи-расчеты и др.

Для обеспечения лаконичности и наглядности формулировок зачастую полезно переносить некоторые элементы из словесной формулировки на чертеж (схему, диаграмму и т. д.), показывая учащимся чертеж-условие, добиваться самостоятельного решения и задачи.

Следует иметь в виду, что задачи с практическим содержанием не могут составить единой самостоятельной дидактической системы задач, обеспечивающей необходимое закрепление всего теоретического материала, изучаемого на уроках математики.

Условно воспитательные возможности прикладной направленности школьного курса математики можно разделить на мировоззренческие и социально-педагогические, которые тесно взаимосвязаны друг с другом и реализуются через составляющие компоненты.

Мировоззренческие функции отличает относительное постоянство, тогда как социально-педагогические функции более подвижны, поскольку они зависят от целей и задач, поставленных перед школой на определенном этапе развития общества. Большую роль в формировании мировоззрения учащихся играет историзм в преподавании математики. Это связано с тем, что подавляющее большинство понятий классической математики обязано своим происхождением практике. Именно поэтому, говоря об истории возникновения математического понятия на основе рассмотрения прикладной задачи, желательно прослеживать его эволюцию с выяснением причин.

Анализ различных методических подходов к формированию того или иного математического понятия должен сопровождаться определением методологических достоинств и недостатков этих подходов.

ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ВОСПИТАНИЕ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Известно, что В. И. Ленин считал политехническое образование важнейшим средством подготовки молодого поколения к жизни, одним из основных принципов советской педагогики, определяющих цели, содержание и формы школьного обучения.

Говоря об экономическом воспитании учащихся в процессе решения задач с производственным содержанием, мы имеем в виду прежде всего привитие умений выявлять причинно-следственные связи между экономическими факторами и их математическими интерпретациями. При этом экономический анализ рассматриваемых жизненных ситуаций по результатам решения задач способствует, с одной стороны, развитию математического мышления на конкретном материале, с другой — закреплению и углублению экономических знаний в результате качественно-количественной и количественной интерпретации экономических понятий.

Целесообразно исследовать межпредметные связи с целью выявления последовательности приобретения учащимися экономических знаний как по возрастным ступеням обучения, так и по предметам в целом от класса к классу. Например, на уроках истории, а затем и обществоведения закладываются основы политико-экономических знаний о производственных отношениях каждой общественной формации и их взаимосвязи с производительными силами. Экономическая география рассматривает некоторые вопросы экономики народного хозяйства в целом и его отдельных отраслей, закономерностей территориального размещения производства и формирование экономических районов, повышения рентабельности, хозяйствования на основе учета потенциальных экономических возможностей отдельных районов (наличие полезных ископаемых, экономичность их разработки и др.).

Однако система изложения курса экономической географии в основном построена на принципе раскрытия глобальных закономерностей экономического планирования, роста промышленности, интенсификации сельского хозяйства отдельных регионов, но мало затрагивает вопросы трудовой деятельности отдельных небольших коллективов людей (цехи, бригады, звенья и др.). Введение элементов экономики, отражающих трудовую деятельность отдельных коллективов людей на примерах решения задач, дает возможность раскрывать в осязаемом виде количественные взаимосвязи экономических факторов.

Решение задач с экономическим содержанием, как и любых задач с практическим содержанием, можно расчленить на три этапа.

На первом этапе — *формализации* происходит переход от реальной ситуации к построению формальной математической модели. Для построения такой модели учащиеся должны уметь следующее: выделить основные взаимосвязи между компонентами исследуемой проблемы, анализировать полноту имеющихся в условии задачи данных, выразить математическими символами те экономические положения и их взаимосвязи, которые даны в условии задачи, и т. д. В результате этой работы должна появиться математическая модель (уравнение, система уравнений, неравенство, система неравенств и т. д.), адекватно отражающая данную реальную ситуацию.

На втором этапе задача решается *«внутри математической модели»*. На этом этапе учащиеся должны научиться выбирать наиболее подходящий метод для решений поставленной математической задачи: пользоваться вспомогательным математическим аппаратом, выбирать приемы решения, разбивать сложные задачи на подзадачи и т. п. Умение выбирать рациональный метод решения зависит от уровня математической подготовки учащегося.

На третьем этапе — *интерпретации* учащиеся должны научиться переходить к исходной ситуации, выявлять соответствие полученных результатов рассматриваемой экономической ситуации, переходить от общих утверждений к частным, оценивать значение данных экономических факторов для практической деятельности и т. п.

Выявление причинно-следственных зависимостей экономических факторов в повседневной трудовой деятельности имеет большое воспитательное значение, способствует формированию у учащихся экономической грамотности и осознания ими принципов хозяйствования.

Одним из первых экономических понятий, с которыми, как правило, знакомятся учащиеся, является *производительность труда*, сведения о которой известны им из курсов истории и географии. Кроме того, ученики знают, что эффективность всякого общественного производства находится в прямой зависимости от роста производительности труда. Понятия *себестоимости единицы продукции* и *заработной платы* целесообразно вводить в условие задачи в таком контексте, чтобы учащиеся могли усвоить сущность и значение этих понятий из этого условия.

Задача 1. Две бригады из 10 и 15 человек за смену изготовляли 620 деталей. После усовершенствования технологии производительность труда двух бригад повысилась до 702 деталей за смену. На сколько процентов увеличилась производительность труда обеих бригад, если каждый рабочий 1-й бригады в среднем повысил производительность на 20%, а каждый рабочий 2-й бригады — на 10%? Вычислить среднемесячную зарплату каждого рабочего после улучшения технологии производства деталей, если за каждую деталь оплачивают по 50 к. (Число рабочих дней в месяце 22.) Рассмотрим возможный вариант беседы учителя с учащимися.

Этап формализации.

Преподаватель. В результате чего повысилась производительность труда?

Учащийся Н. За счет улучшения технологии производства.

Преподаватель. На сколько увеличилась совместная производительность труда этих бригад?

Учащийся Т. На 82 детали за смену.

Преподаватель. Перечислите искомые величины.

Учащийся Р. Производительность труда за смену рабочих 1-й и 2-й бригад, среднемесячный заработок этих рабочих.

Преподаватель. Итак, сколько неизвестных в задаче?

Учащийся Р. Четыре.

Преподаватель. Правильно. Следует ли из этого, что эту задачу нужно решать с четырьмя неизвестными?

Учащийся Н. Нет.

Учащийся К. Нужно решать с двумя неизвестными.

Преподаватель. Правильно. Что же примем за x?

Учащийся Н. За x примем первоначальную производительность за смену рабочего 1-й бригады, а y — первоначальная производительность рабочего 2-й бригады.

Преподаватель. Достаточно. А как быть с зарплатой? Класс задумался.

Учащийся Р. Это можно вычислить потом.

Преподаватель. То есть как потом?

Учащийся Р. Когда мы найдем производительность труда каждого рабочего 1-й и 2-й бригад за смену, ибо известно, как оплачивается одна готовая деталь.

Преподаватель. Правильно. Решайте задачу в тетрадях, а учащийся Н. решает задачу у доски.

Из первой части условия задачи получим уравнение

$$10x+15y=620. \tag{1}$$

После усовершенствования технологии производства производительность труда рабочих 1-й бригады увеличилась на 20%, а рабочих 2-й бригады — на 10%, в результате чего производительность труда обеих бригад увеличилась на 702 дет.— 620 дет. = 82 дет. за смену. Поэтому получим уравнение

$$\frac{10x}{1000}\cdot 20+\frac{15y}{100}\cdot 10=82.$$

Дальнейшую часть беседы можно считать *вторым этапом* решения задачи.

Таким образом, получили систему уравнений

$$\begin{cases} 10x+15y=620, \\ 2x+1{,}5y=82, \end{cases}$$

откуда $x=20$, $y=28$.

Этап интерпретации. После улучшения технологии производства рабочие стали изготовлять за смену соответственно 24, 30,8, т. е. приближенно 31 дет. Однако для зарплаты учитываются только полностью изготовленные детали, т. е. 30 дет.

Зарплата рабочего 1-й бригады:

$24 \cdot 0{,}5$ р.$\cdot 22 = 264$ р.

Зарплата рабочего 2-й бригады:

$30 \cdot 0{,}5$ р.$\cdot 22 = 330$ р.

Преподаватель. Что же такое зарплата?

Учащийся П. Зарплата — деньги, которые трудящийся получает за свой труд.

Преподаватель. Правильно. Что еще вы знаете о зарплате?

Ответы учащихся показывают, что многие из них обычно имеют представление о том, что существуют премиальные и квартальные надбавки и 13-я зарплата в виде единовременного вознаграждения в конце года.

Опыт работы преподавателей свидетельствует о том, что при изучении тем «Уравнения с одной переменной» и «Системы уравнений с двумя переменными первой степени» использование в задачах по математике понятий производительности труда, себестоимости и заработной платы вполне доступно учащимся. Приведем примеры еще нескольких условий задач.

Задача 2. Затраты на перевозки одного и того же груза двумя разными видами транспорта вычисляются по формулам $y_1 = 100 + 40x$ и $y_2 = 200 + 20x$, где x — расстояние в сотнях километров, а y_1 и y_2 — стоимость перевозки в рублях. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится второй вид транспорта по сравнению с первым.

Задача 3. Затраты на перевозки одного и того же груза тремя видами транспорта вычисляются по формулам $y_1 = 100 + 50x$, $y_2 = 150 + 25x$, $y_3 = 200 + 16\frac{2}{3}x$, где x — расстояние в сотнях километров, y_1, y_2, y_3 — стоимость перевозки в рублях. Найти графически, каким видом транспорта экономически более выгодно перевозить груз на расстояние до 200 км и каким видом транспорта — на расстояние свыше 600 км.

Задача 4. Две бригады токарей, состоящие из 10 и 15 человек, вступив в предпраздничное соревнование, соответственно увеличили производительность труда на 20 и 25%, и потому за смену обе бригады увеличили выпуск деталей с 720 до 885 штук. Найти месячный заработок каждого рабочего и в период соревнования, если за каждую деталь они получали по 32 к. и все рабочие работали с одинаковой производительностью труда. (1 месяц содержит 22 рабочих дня.)

На наш взгляд, учащимся средней школы полезно ознакомиться с методами математического программирования, создание которого связано с насущными потребностями планирования и организации производства. Углубление экономических связей между различными отраслями народного хозяйства, увеличение масштабов производства не позволяют обходиться без количественных методов экономических расчетов и использования современной вычислительной техники. Методы математического программирования позволяют наиболее рациональным образом распределить ограниченные ресурсы: будь то задача наилучшего использования ограниченных производственных ресурсов для выпуска определенного набора продуктов, так называемая задача *планирования производства*, или задача наиболее эффективного использования транспортных средств для перевозки заданного объема продукции — *транспортная задача*. При этом линейное программирование позволяет получать такое распределение точно, а не «на глазок».

Методы линейного программирования впервые были предложены в СССР.

В 1939 г. академик Л. В. Канторович опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства». Предложенный в ней так называемый метод разрешающих множителей позволял находить решение таких технико-экономических вопросов, как наиболее рациональное распределение работ по механизмам, раскрой материала с минимальными отходами, распределение грузов по нескольким видам транспорта и т. д.

Через 20 лет (1959 г.) вышла вторая книга Л. В. Канторовича — «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов». На идеях, изложенных в этой книге, создалось новое экономико-математическое направление в советской экономической науке, куда вошло математическое программирование. У истоков этого направления стояли также акад. В. С. Немчинов и проф. В. В. Новожилов. Эти советские ученые за свои фундаментальные работы в области экономико-математических исследований были удостоены Ленинской премии.

С математической точки зрения, вполне доступной школьникам, *методы линейного программирования* состоят в нахождении максимума и минимума линейной функции от нескольких переменных при заданных дополнительно ограничениях для этих переменных.

Рассмотрим пример. Найти числа x_1 и x_2, которые удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{aligned}&2x_1+5x_2\leqslant 10,\\&2x_1+x_2\leqslant 6,\\&x_1+x_2\leqslant 3,\\&x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

и при которых функция $F(x_1;\ x_2)=2x_1+3x_2$ принимает максимальное значение.

Допустимым решением приведенной задачи называется пара чисел, удовлетворяющая всем ограничениям задачи. Оптимальным решением называется решение, при котором функция F принимает максимальное значение.

Построим область допустимых решений задачи (рис. 10). Этой областью будет четырехугольник $OM_1M_2M_3$.

Нам нужно на области $OM_1M_2M_3$ найти пару чисел x_1 и x_2, при которых функция $F(x_1;\ x_2)=2x_1+3x_2$ принимает максимальное значение.

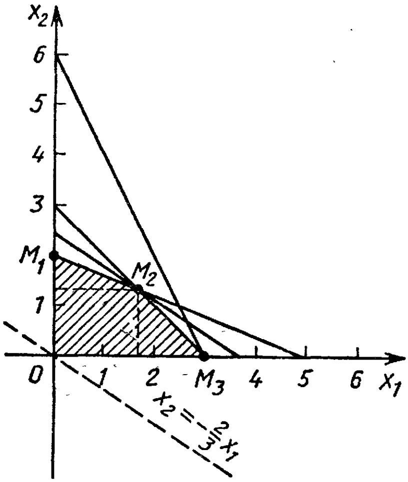

Рис. 10

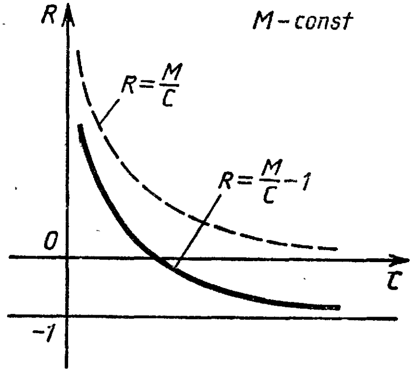

Рис. 11

Пусть $2x_1+3x_2=0$, отсюда $x_2=-\frac{2}{3}x_1$.

Построим график зависимости $x_2=-\frac{2}{3}x_1$. Осуществим теперь параллельный перенос его вверх вдоль оси Ox_2 (это будет равносильно увеличению значений выражения $2x_1+3x_2$). Последней точкой, которая будет общей у переносимого графика и у многоугольника $OM_1M_2M_3$, будет точка M_2, являющаяся пересечением прямых $2x_1+5x_2=10$ и $x_1+x_2=3$.

Решая систему $\begin{cases} 2x_1+5x_2=10, \\ x_1+x_2=3, \end{cases}$ найдем $x_2=\frac{4}{3}$, $x_1=\frac{5}{3}$, откуда $F(x_1;\ x_2)=2\cdot\frac{5}{3}+3\cdot\frac{4}{3}$, т. е. $F(x_1;\ x_2)=7\frac{1}{3}$.

В практических задачах функция F называется *целевой* или *производственной*, а многоугольник типа $OM_1M_2M_3$ — *многоугольником ограничений*.

Введем обозначения некоторых экономических понятий и основные соотношения между ними. Если П — прибыль, R — рентабельность, З — затраты, n — количество продукции, M — цена единицы продукции, C — себестоимость единицы продукции, тогда

$$\text{П}=\text{M}\cdot n-\text{З};$$

$$\text{R}=\frac{\text{П}}{\text{З}}=\frac{\text{M}\cdot n-\text{З}}{\text{З}}=\frac{\text{M}\cdot n}{\text{З}}-1. \qquad (1)$$

Так как $\text{C}=\frac{\text{З}}{n}$ (2), окончательно получаем:

$$\text{R}=\frac{\text{M}}{\text{C}}-1. \qquad (3)$$

Формула (3) имеет наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 11).

Из формулы (3) следует, что минимизация себестоимости единицы продукции эквивалента максимизации рентабельности. Ясно, что если:

1) $C<M$, то $R>0$ (предприятие рентабельно);

2) $C=M$, то $R=0$;

3) $C>M$, то $R<0$ (предприятие нерентабельно).

Рассмотрим следующую задачу:

Задача 5. Пусть в колхозе требуется распределить площадь пашни между двумя культурами по данным следующей таблицы:

Культура	Площадь, га	Урожай, ц/га	Затраты, р/га	Цена за 1 ц	Затраты тракторо-смен на 1 га	Затраты человеко-дней на 1 га
1	x	10	50	6	0,1	2
2	y	15	80	8	0,24	10

Пусть, кроме того, заданы ресурсы производства: земли — 1800 га, тракторо-смен — 300, человеко-дней — 8000 — и потребности в той и другой культуре: для первой культуры — 10 000 ц и для второй культуры — 7500 ц. Величины x и y являются неизвестными и подлежат определению.

Решить задачу по оптимизации трех различных критериев, а именно:

А) по максимуму прибыли;

Б) по максимуму рентабельности;

В) по максимуму прибыли с гектара.

Решение.

Ограничения задачи имеют следующий вид:

ограничение по площади: $x+y\leqslant 1800$; (4)

ограничение по тракторо-сменам: $0{,}1x+0{,}24y\leqslant 300$; (5)

ограничение по человеко-дням: $x+5y\leqslant 4000$; (6)

ограничения по потребностям в культурах:

$$10x\geqslant 10\,000, \text{ или } x\geqslant 1000, \tag{7}$$

$$15y\geqslant 7500, \text{ или } y\geqslant 500. \tag{8}$$

Кроме того, ясно, что $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. (9)

Графическое решение системы неравенств (4) — (8) дает многоугольник ограничений (заштрихован на рисунке 12). Номера около прямых соответствуют номерам неравенств.

Для прибыли согласно данным таблицы имеем формулу

$$\Pi=6\cdot 10x+8\cdot 15y-50x-80y=10\,(x+4y), \tag{10}$$

для рентабельности — формулу

$$R=\frac{\Pi}{З}=\frac{10\,(x+4y)}{50x+80y}=\frac{x+4y}{5x+8y}. \tag{11}$$

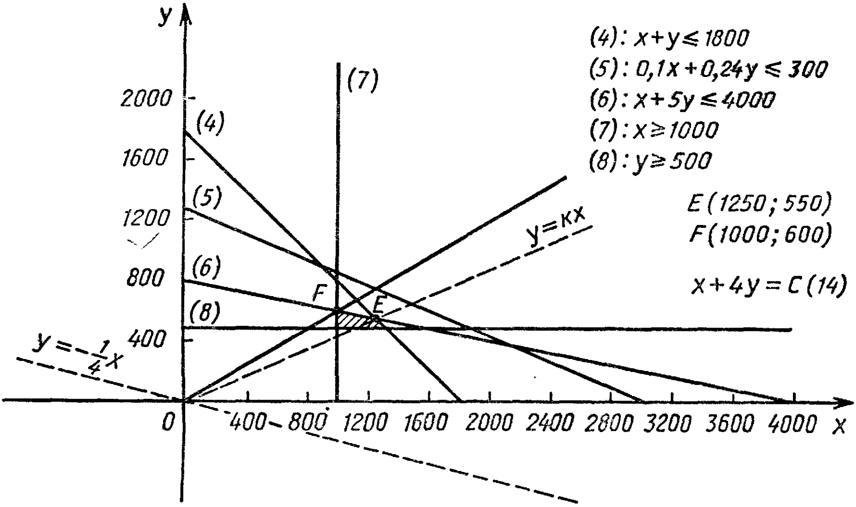

Рис. 12

Обозначая через p прибыль с 1 га, имеем:

$$p=\frac{10(x+4)}{x+y}. \tag{12}$$

Вариант А.

Решение по максимуму прибыли.

Мы должны максимизировать прибыль, т. е. согласно формуле (10)

$$\bar{x}+4y=\max \tag{13}$$

при выполнении ограничений (4) — (9).

Уравнение

$$x+4y=C$$

соответствует прямой с угловым коэффициентом $-\frac{1}{4}$.

Заметим, что изменение C не влияет на угловой коэффициент прямой, а только осуществляет параллельный перенос прямой. При увеличении C прямая смещается вверх вдоль оси Oy, а при уменьшении — вниз.

Согласно условию (13) параметр C должен быть как можно больше, значит, прямую $x+4y=C$ надо сместить параллельно самой себе вверх до тех пор, пока мы еще не выйдем из «многоугольника ограничений».

На рисунке 12 видим, что решению соответствует точка E. Так как точка E является точкой пересечения прямых $x+y=1800$ и $x+5y=4000$, то, решая совместно эти уравнения, находим координаты точки E и тем самым ответ задачи $x=1250$ га, $y=550$ га.

Вариант Б.

Решение по максимуму рентабельности.

Для рентабельности имеем формулу (11), откуда

$$y=\frac{5R-1}{4-8R}\cdot x, \tag{15}$$

или, иначе, $y=kx$, где $k=\frac{5R-1}{4(1-2R)}$.

Можно считать, что $R\neq\frac{1}{2}$, так как если $R=\frac{1}{2}$, то согласно (11) имеем $2x+8y=5x+8y$, т. е. $x=0$, что противоречит ограничению (7). Уравнение (15) представляет собой уравнение пучка прямых, проходящих через начало координат. Выясним, как изменяется k в зависимости от R.

Найдем первую производную k по R. Имеем $\frac{dk}{dR}=\frac{3}{4(1-2R)^2}$. Так как $\frac{dk}{dR}$, а следовательно, и $\frac{dR}{dk}$ положительно, то увеличение k влечет за собой увеличение R, и так как нам нужно, чтобы R достигло наибольшего значения, то следует выбрать ту из прямых пучка (15), для которой k достигает наибольшего значения, а для этого достаточно поворачивать луч $y=kx$, выходящий из начала координат, против часовой стрелки до тех пор, пока он не выйдет за пределы «многоугольника ограничений». На рисунке 12 видим, что решение получается уже не в точке E, а в точке F. Так как точка F является точкой пересечений прямых $x=1000$ и $x+5y=4000$, то, решая систему, находим координаты точки и тем самым ответ в виде $x=1000$ га, $y=600$ га.

Вариант В.

Решение по максимуму прибыли с гектара.

Прибыль с 1 га будет определяться формулой (12). Решая (12) относительно y, имеем:

$$y=kx, \text{ где } k=\frac{p-10}{40-p}. \tag{16}$$

При этом можно считать, что $p\neq 40$, так как если $p=40$, то из формулы (12) следует, что $x=0$, что противоречит ограничению (7). Для производной $\frac{dk}{dp}$ имеем $\frac{dk}{dp}=\frac{30}{(40-p)^2}$, и так как $\frac{dk}{dp}$, а следовательно, и $\frac{dp}{dk}$ положительны, то для увеличения p надо увеличивать k поворотом луча $y=kx$ против часовой стрелки, т. е. опять получим решение в точке F (рис. 12). Следовательно, решения в задачах (Б) и (В) совпадают.

Иногда луч $y=kx$ может совпасть с осью ординат, в этом случае задача определена. Однако это не допускается в теоретической математике.

Предлагаем решить теперь методом линейного программирования следующие задачи:

Задача 6. На изготовление одного стола требуется 0,15 $м^3$ древесины, а одного шкафа — 0,2 $м^3$, причем доход, полученный от реализации одного стола, равен 10 р., а одного шкафа — 16 р. Сколько столов и сколько шкафов нужно изготовить из 60 $м^3$ древесины, чтобы обеспечить наибольший доход от их реализации?

Задача 7. Известно, что 1 кг вишни содержит 150 мг, а 1 кг абрикосов — 75 мг витамина С. Сколько вишни и сколько абрикосов следует включить в дневной рацион, чтобы при минимальных затратах в нем оказалось 75 мг витамина С и не менее 0,25 кг вишни, если 1 кг вишни стоит 3 р., а 1 кг абрикосов — 4 р.?

Задача 8. Предполагается, что рацион составляется из двух видов кормов — сена и концентратов. В следующей таблице приведены числовые данные о себестоимости кормов в данном хозяйстве (суточная потребность кормов на 1 корову равна 20 кормовых ед.).

Виды кормов	Содержание кормовых единиц в 1 кг кормов	Себестоимость кормов (в копейках)
Сено	0,5	1,5
Концентраты	1,0	2,5

Найти самый дешевый рацион, если ежедневный рацион кормления сельскохозяйственных животных должен включать не менее 16 кг сена.

Задача 9. Для изготовления изделий А и В заводу необходимо 1,5 т стали. Затраты стали в килограммах и в рублях на одно изделие указаны в следующей таблице:

Изделие	А	В
Затраты	3	5
Прибыль	4	5

Определить план выпуска продукции, при котором может быть будет достигнута наибольшая прибыль.

Задача 10. Мебельная фабрика выпускает кресла двух типов. На изготовление кресла первого типа расходуется 2 м досок стандартного сечения, 0,8 $м^2$ обивочной ткани и затрачивается 2 человеко-часа, а на изготовление кресла второго типа соответственно 4 м, 1,25 $м^2$ и 1,75 человеко-часа. Известно, что цена одного кресла первого типа равна 15 р., а второго типа — 20 р. Сколько кресел каждого типа нужно выпускать, чтобы стоимость выпускаемой продукции была максимальной, если фабрика имеет в наличии

4400 м досок, 1500 м² обивочной ткани и может затратить 3200 человеко-часов рабочего времени на изготовление этой продукции?

Указание. Ограничения имеют вид:

$$\begin{aligned}&2x_1+4x_2\leqslant 4400,\\&\frac{4}{5}x_1+\frac{5}{4}x_2\leqslant 1500,\\&2x_1+\frac{7}{4}x_2\leqslant 3200,\\&x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.\end{aligned}$$

Целевая функция $f(x_1;\ x_2)=15x_1+20x_2$.

Задача 11. Ателье шьет женские юбки и платья из ткани двух видов. На одну юбку расходуется ткани одного вида 1,5 м², другого — 0,5 м², а на пошив одного платья расходуется ткани первого вида 1,6 м², второго — 0,8 м². Сколько платьев и юбок нужно сшить, чтобы добиться наибольшего дохода, если на складе имеется ткани первого вида 141 м², второго вида 63 м²? При этом известно, что доход мастерской от реализации одного платья составляет 10 р., а одной юбки — 6 р.

Указание. Ограничения имеют вид:

$$\begin{aligned}&1{,}5x+1{,}6y\leqslant 141,\\&0{,}5x+0{,}8y\leqslant 63,\\&x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.\end{aligned}$$

Задача 12. Хозрасчетной бригаде выделено для возделывания кормовых культур 100 га пашни. Эту пашню предполагается занять кукурузой и свеклой, причем свеклой решено занять не менее 40 га. Как должна быть распределена площадь пашни по культурам, чтобы получилось наибольшее число кормовых единиц? При этом должно быть учтено следующее: 1 ц кукурузного силоса содержит 0,2 ц кормовых единиц, 1 ц свеклы — 0,26 ц кормовых единиц, на возделывание 1 га кукурузного поля необходимо затратить 38 человеко-часов труда механизаторов и 15 человеко-часов ручного труда, а на 1 га поля, занятого свеклой, соответственно 43 и 185 человеко-часов, ожидаемый урожай кукурузы — 500 ц с 1 га, а свеклы — 200 ц с 1 га, и, наконец, всего на возделывание кормовых культур можно затратить 4000 человеко-часов труда механизаторов и 15 000 человеко-часов ручного труда.

Указание. Ограничения:

$$\begin{aligned}&x_1+x_2\leqslant 100,\\&38x_1+43x_2\leqslant 4000,\\&15x_1+185x_2\leqslant 15\,000,\\&x_2\geqslant 40,\ x_1\geqslant 0.\end{aligned}$$

Целевая функция имеет вид:

$$z=500\cdot 0{,}2x_1+200\cdot 0{,}26x_2.$$

На первый взгляд может показаться, что историзм в преподавании математики и ее прикладная направленность несовместимы друг с другом. Однако если учесть, что большинство понятий классической математики, попавших в школьный курс, обязаны своим происхождением практике, то эта связь становится очевидной.

С другой стороны, знакомство с историей математики, знание закономерностей ее развития абсолютно необходимы. О назначении истории науки прекрасно сказал Г. Лейбниц: «Весьма полезно познать истинное происхождение замечательных открытий, особенно таких, которые были сделаны не случайно, а силою мысли. Это приносит пользу не столько тем, что история воздает каждому свое и побуждает других добиваться таких же похвал, сколько тем, что познание метода на выдающихся примерах ведет к развитию искусства открытия» (Гнеденко Б. В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике.— М., 1982.— С. 116).

В той же книге акад. Б. В. Гнеденко пишет о том, что, для того чтобы наука о мышлении могла решать свои задачи, нужно возможно полнее изучить, как исторически развивалось мышление. Надо думать, что при изучении методов и приемов мышления в период писания истории видное место должна занять история науки. До сих пор она была в основном историей успехов мышления, по-видимому, она должна стать историей одновременно и развития мышления.

На примере возникновения и эволюции понятия интеграла конкретно проиллюстрируем идеи, заложенные в приведенных высказываниях, а также сделаем попытку обоснования причины появления интеграционных процессов, выясним встретившиеся на этом пути методологические трудности и способы их устранения.

Еще во времена античности для решения вопросов измерительной математики, в которых нельзя было обойтись ограниченным числом операций (вычисление площадей криволинейных фигур, объемов шара, конуса, пирамиды и др.), использовались два метода: *метод «неделимых»* и *метод исчерпывания*. Опытные учителя математики находят время для ознакомления учащихся с идеями применения этих методов либо на классных, либо на внеклассных занятиях по математике.

Благоприятные возможности для ознакомления с этими методами как возможной пропедевтики курса начал анализа существуют, что было подтверждено автором и работающей с ним группой учителей в процессе экспериментальной работы.

Охарактеризуем каждый из этих методов.

1. *Метод «неделимых».*

При использовании метода «неделимых» геометрические фигуры представляются как бы составленными из элементов низшей размерности: тела — из параллельных друг другу плоских сечений, плоские фигуры — из параллельных между собой отрезков. Поэтому идея измерения площади искомой фигуры опиралась на сложение площадей отдельных частей фигуры. Метод «неделимых», как нетрудно видеть, использовал актуальные бесконечно малые, и, следовательно, в его теоретическом обосновании неизбежно возникали противоречия. В самом деле, если площадь есть бесконечная сумма длин всех отрезков, то она равна бесконечности. Если же площадь есть сумма нулевых площадей всех отрезков, то она равна нулю.

Несмотря на такого рода противоречия, метод «неделимых» получил большое распространение. Он и сегодня в определенном смысле используется иногда в методике преподавания математики как средство наведения учащихся на результат.

Примером может служить задача о нахождении центра тяжести однородного плоского треугольника. Представим, что треугольник состоит из однородных отрезков, параллельных одной из сторон треугольника. Центр тяжести каждого такого отрезка находится в его середине, а центр тяжести всего треугольника принадлежит медиане, так как она проходит через середины всех таких отрезков. Аналогичные рассуждения относительно двух других сторон треугольника приводят к нужному результату.

Большое развитие метод «неделимых» получил у Архимеда, однако сам Архимед не считал его доказательным, а лишь полезным, наводящим соображением. Развитие этого метода связано с именами Кавальери, Торричелли, Роберваля.

Рассмотрим решение задачи на вычисление объема шара, которую Архимед решил методом «неделимых» в сочетании с правилом рычага. Рассуждения проведем с использованием современной символики. Добавим, что к моменту решения этой задачи были известны формулы объема цилиндра и конуса, а шар мыслился как фигура, получающаяся от вращения круга вокруг диаметра.

Итак, пусть дана окружность радиуса a с центром в точке $(a;\ 0)$ (рис. 13). Ее уравнение имеет вид $(x-a)^2+y^2=a^2$, т. е.

$$x^2+y^2=2ax. \tag{1}$$

Умножив равенство (1) на π, получим:

$$\pi x^2+\pi y^2=\pi\cdot 2ax. \tag{2}$$

Построим прямоугольник со сторонами $2a$ и $4a$ и равнобедренный треугольник с основанием $4a$ и высотой $2a$. Ясно, что уравнение одной из боковых сторон треугольника имеет вид $y=x$. Представим теперь, что вся построенная таким образом конструкция вращается вокруг оси Ox. При вращении образуются три тела: цилиндр, конус, имеющий с цилиндром одно и то же основание и высоту, и шар. Проведем на расстоянии $x<a$ от начала координат плоскость, перпендикулярную оси Ox. В сечении получатся три окружности — от пересечения плоскостью сферы, боковой поверхности цилиндра и боковой поверхности конуса. В левой части равенства

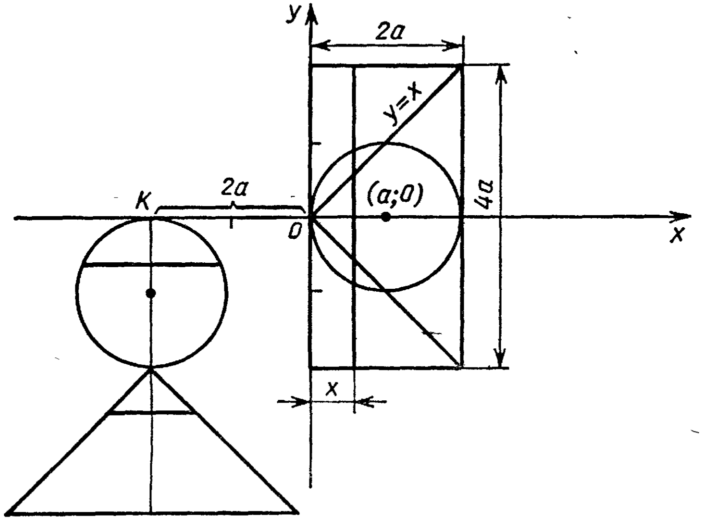

Рис. 13

(2) слагаемые имеют следующий смысл:

πy^2 — площадь переменного сечения шара плоскостью,

πx^2 — площадь переменного сечения конуса плоскостью.

Умножив равенство (2) на $2a$, получим:

$$2a(\pi x^2+\pi y^2)=x\cdot\pi(2a)^2. \qquad (3)$$

В равенстве (3) фигурируют площади трех дисков (кругов), полученных при пересечении шара конуса и цилиндра одной и той же плоскостью. Архимед поступает так: оставляет диск радиуса $2a$ на месте на расстоянии x, а диски радиусов y и x подвешивает на невесомой нити в точке $K(-2a;\ 0)$ и рассматривает рычаг с осью Ox (нулевого веса) с точкой опоры O. Из физики известно, что произведение силы на плечо называется моментом силы, поэтому в равенстве (3) можно считать, что моменты сил равны, т. е. диски находятся в равновесии.

Если x изменяется от 0 до $2a$, то можно условиться, что поперечные сечения цилиндра, конуса и шара целиком заполняют соответственно цилиндр, конус и шар, а сами тела находятся при этом в равновесии. Обозначив объем шара через V и подставив в равенство (3) известные формулы объема цилиндра и конуса и абсциссу центра тяжести цилиндра, получим:

$$2a\left(V+\frac{\pi(2a)^2\cdot 2a}{3}\right)=a\cdot\pi(2a)^2\cdot 2a,$$

отсюда $V=\frac{4}{3}\pi a^3$. (В формулу (3) вместо x Архимед подставлял a, т. е. центр тяжести фронтального сечения цилиндра.)

К первой половине XVII в. были достигнуты замечательные успехи в области вычислений площадей и объемов, в том числе с помощью метода «неделимых». Однако единой теории до появления в 1635 г. труда Кавальери «Геометрия неделимых» не было.

Основные положения Кавальери заключались в следующем:

1. Плоскую фигуру, площадь которой надо вычислить, делят параллельными прямыми на полоски (выбор направления безразличен).

2. Число полосок неограниченно увеличивается. При этом полоска «превращается» в отрезок. Этот отрезок Кавальери называет «неделимым» плоской фигуры. Подобным образом получается точка как «неделимое» линии и плоская фигура как «неделимое» тела.

3. Признаком «неделимого» элемента является то, что число измерений «неделимого» на единицу меньше числа измерений рассматриваемого геометрического образа.

4. Вычисление площади (объема) сводится к отысканию отношения мер: площади неизвестной и площади известной (или объема неизвестного и объема известного).

5. Отыскание этого отношения основано на таких принципах:

а) выбор направления, параллельно которому разбивается геометрическая фигура на полоски (или слои), не влияет на результат вычислений (в нашей сегодняшней трактовке это утверждение равносильно утверждению об инвариантности площади или объема относительно поворота осей координат);

б) площади двух фигур (объемы) относятся как совокупности их «неделимых».

Несмотря на то что Кавальери разработал теоретическое обоснование метода «неделимых», сам он сомневался в его научности. Вот один из парадоксов, которые привели к разочарованию Кавальери. Он рассматривал $\triangle ABC$ (рис. 14). Из вершины B опускал высоту BD и далее проводил следующие рассуждения: в $\triangle BDA$ за «неделимое» принимал, например, отрезок KM, в $\triangle BDC$ обязательно найдется соответствующий отрезок $K'M'=KM$. И так можно рассуждать относительно всех отрезков, сплошь заполняющих $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$. Следовательно, можно сделать вывод о том, что $\triangle ABD = \triangle BDC$, что неверно.

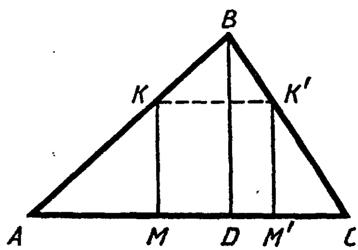

Рис. 14

Если в геометрии «неделимых» у Кавальери площади покрываются системой прямолинейных отрезков, то Торричелли покрывал одну фигуру системой отрезков, а другую — системой кривых (дуг).

Интересен в этом плане рассмотренный Торричелли пример нахождения площади круга, если известна формула длины окружности.

Пусть дана окружность радиуса R с центром в точке O (рис. 15).

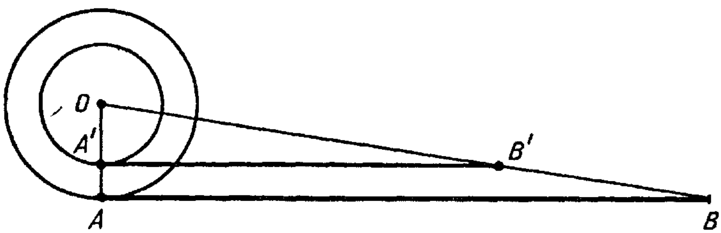

Рис. 15

Из точки A проведена касательная, на которой отложили $AB=C=2\pi R$, т. е. длину окружности. Соединим O с A и O с B. Далее рассуждения таковы: для любой «промежуточной» окружности радиуса OA' в $\triangle OAB$ найдется отрезок $A'B'$, длина которого равна длине окружности $2\pi OA'$. Следовательно, системе «неделимых» в круге (т. е. окружностей) соответствует система «неделимых» прямолинейных отрезков в $\triangle AOB$. Значит, площади круга и треугольника равны, т. е.

$$S_{\text{круга}}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R=\pi R^2.$$

В геометрии Торричелли при решении некоторых задач нахождения объемов тел вращения за «неделимые» принимаются также площади поверхностей. Поясним на примере.

Задача. Дана гипербола $xy=2k^2$ ($x>0$, $y>0$), которая вращается вокруг оси Oy, и пусть образующееся при этом тело вращения ограничивается цилиндрической поверхностью радиуса OA и высотой AB (рис. 16). Найти объем тела вращения — «острого гиперболоида» (как его называл Торричелли).

За «неделимое» в этом теле вращения принимается цилиндрическая поверхность радиуса x и высотой y, площадь которой равна $2\pi xy=2\pi\cdot 2k^2=\pi(2k)^2$. Как видно, площадь поверхности «неделимого» независима от радиуса. Согласно принципу Кавальери объем всего тела равен «всем неделимым», т. е. $V=\pi(2k)^2\cdot OA$.

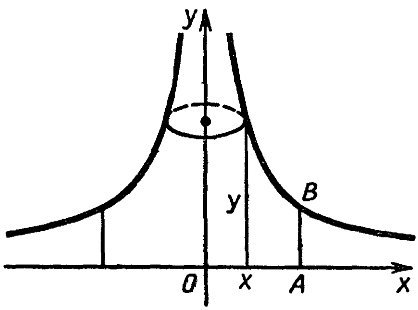

Рис. 16

По существу, здесь (впервые) вычислен несобственный интеграл с бесконечным пределом. В Европе в то время это было настоящей сенсацией.

Развитие метода «неделимых» связано с именем французского математика Роберваля (Жиля Персонье). Используя метод «неделимых», он решил задачу нахождения «площади под циклоидой».

Известно, что *циклоида* может быть получена как траектория

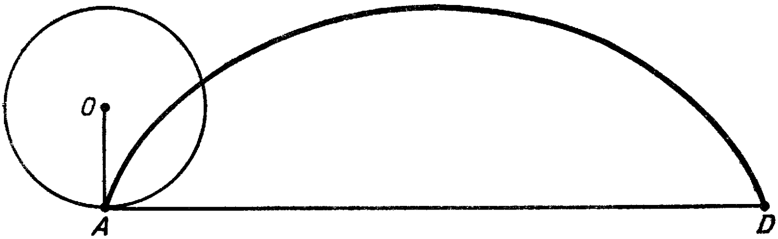

Рис. 17

движения точки окружности (например, точки A), когда окружность катится без скольжения по прямой (рис. 17).

Еще Архимед, используя открытый им закон массы жидкости, вытесняемой телом, установил, что площадь под одной аркой циклоиды равна утроенной площади порождающего ее круга, т. е. $S = 3\pi R^2$. Ценность решения этой задачи Робервалем состоит не только в определении площади методом «неделимых», но и в том, что способ построения циклоиды позволил получить график синусоиды как сопутствующей кривой, причем этот способ построения широко используется и сегодня в методической литературе.

Воспроизведем рассуждения Роберваля.

Пусть имеется окружность радиуса R (рис. 18) и отрезок AD, длина которого равна длине полуокружности. Построив перпендикуляры к отрезку AD из точек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 до пересечения соответственно с прямыми, проведенными через точки a, b, c, d, e, f, g параллельно AD, получим точки (1; a), (2; b), (3; c), (4; d), (5; e), (6; f), (7; g). Соединив их плавной кривой, получим часть синусоиды m. Представим себе теперь, что окружность катится по AD. В то время как она коснется отрезка AD в точке 1, точка A будет занимать при этом такое же положение, какое занимает точка a при исходном положении.

Если от точки синусоиды m с абсциссой 1 отложить влево отрезок, равный aa', то конец этого отрезка определит новое положение точки A.

Если окружность касается отрезка AD в точке 2, то положение точки A найдется, если от точки синусоиды с абсциссой 2 отложить влево отрезок, равный bb'. Точно так же, отложив от точек синусоиды m с абсциссами 3, 4, 5, 6, 7 отрезки влево, соответственно равные отрезкам cc', dd', ee', ff', gg', получим точки (левые концы этих отрезков), принадлежащие траектории n точки A. Соединив их плавной кривой, получим половину циклоиды AnC, площадь которой нужно вычислить.

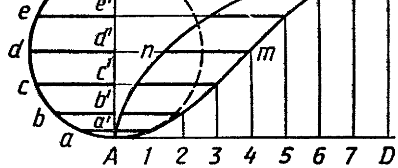

Рис. 18

Так как половина синусоиды AmC делит прямоугольник пополам, а площадь этого прямоугольника равна $\pi R \cdot 2R = 2\pi R^2$, то задача состоит в нахождении площади лепестка $AnCmA$.

Для этого используется метод «неделимых». В данном случае «неделимыми» являются отложенные равные между собой отрезки, принадлежащие лепестку и левому полукругу.

На основании равенства «неделимых» делается вывод о равенстве площадей полукруга и лепестка, т. е.

$$S_{AnCmA} = \frac{1}{2}\pi R^2.$$

Значит, площадь фигуры, расположенной под половиной арки циклоиды, составляет $\pi R^2 + \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{3}{2}\pi R^2$, а площадь фигуры под аркой циклоиды равна $S = 3\pi R^2$.

2. *Метод «исчерпывания».*

Еще в IV в. до н. э. доказательства, полученные методом «неделимых», перестали считаться достоверными.

Строгим доказательством считалось доказательство методом «исчерпывания». Общей теории метода «исчерпывания» в древности не строилось, поэтому в каждом конкретном случае все рассуждения повторялись заново. А если иметь в виду полное отсутствие алгебраической символики, то нетрудно представить, какую тяжеловесность приобретал этот метод.

А. П. Юшкевич приводит следующую схему рассуждений по методу «исчерпывания» (в современной реконструкции). Для вычисления какой-либо площади или объема X строятся две монотонные последовательности площадей или объемов вписанных и описанных фигур (U_n) и (V_n), где $n \in N$.

1. Показывается, что разность $V_n - U_n$ может стать меньше любой наперед заданной положительной величины, тем самым и разности $X - U_n$ и $V_n - X$ становятся сколь угодно малыми.

2. Существует известная величина I, также удовлетворяющая условию

$$U_n < I < V_n. \qquad (1)$$

(Тогда с помощью «приведения к нелепости» показывается, что $X = I$. Важно, что значение I известно заранее, и в этом заключается главная трудность использования данного метода.)

Приведем пример применения этого метода. Пусть надо найти площадь Р криволинейной трапеции, определяемой графиком непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (рис. 19). Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей. Через точки деления проведем отрезки прямых до пересечения с графиком функции. На i-м участке построим два прямоугольника с основанием, равным длине i-го участка разбиения Δx_i, и высотами, соответственно равными наименьшему и наибольшему значениям функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$.

Если такое построение провести на каждом участке разбиения, то получим две ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольни-

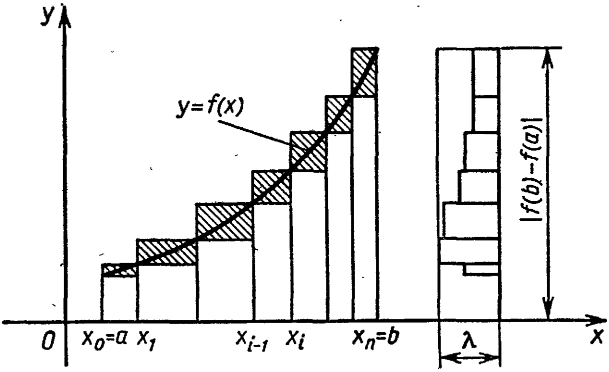

Рис. 19

ков, одна из которых (обозначим ее площадь s) целиком содержится в криволинейной трапеции, а другая (ее площадь S) содержит криволинейную трапецию.

Очевидно, что соотношение между площадями полученных ступенчатых фигур и площадью криволинейной трапеции таково:

$$s \leqslant P \leqslant S, \tag{2}$$

где

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i; \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i; \quad m_i M_i \text{ —}$$

наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на i-м ($i = 1, 2, \ldots$) участке разбиения $[x_{i-1}; x_i]$ отрезка $[a; b]$.

Суммы s и S носят названия соответственно нижней и верхней интегральных сумм или нижней и верхней сумм Дарбу (по фамилии французского математика, впервые детально их изучившего).

Суммы s и S можно рассматривать вне зависимости от конкретной задачи на вычисление площади криволинейной трапеции. От функции $y = f(x)$ достаточно требовать только непрерывности на $[a; b]$.

Важно, что при заданной функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ величины s и S вполне определяются разбиением $[a; b]$ на части. Если разбиение подчинить какому-либо закону, а через n обозначить число участков разбиения, тогда s и S приобретают индекс n и соотношение (2) можно записать так:

$$s_n \leqslant P \leqslant S_n. \tag{2'}$$

Сопоставим неравенства (2′) и (1). Знак равенства в (2′) выбран для общности. С точки зрения древних (с их конкретными задачами) он им был не нужен.

Вычисление Архимедом площади, ограниченной одним витком спирали, по существу, есть вычисление площади под графиком параболы $y = x^2$ при $0 \leqslant x \leqslant a$. Архимед разбивал отрезок $[0; a]$ на n

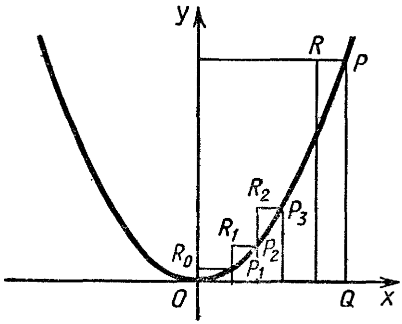

Рис. 20

равных частей. Абсциссы точек разбиения составляют арифметическую прогрессию, тогда s_n и S_n представляют собой суммы квадратов членов арифметической прогрессии. Архимед знал формулу для вычисления таких сумм, число $I=\frac{a^3}{3}$, заключенное между s_n и S_n, знал, что разность S_n-s_n становится сколь угодно малой при неограниченном увеличении n. Затем на основании так называемого «приведения к нелепости» он показал, что $P=\frac{a^3}{3}$.

Рассмотрим один из примеров применения этого метода.

Пусть имеем функцию $y=x^2$ (рис. 20). Требуется определить площадь F, ограниченную кривой $y=x^2$, осью Ox и прямой PQ, причем $OQ=x$. Разделим отрезок OQ на равные части, каждая из которых Δx. Восставим из точек деления перпендикуляры до пересечения с параболой, а из точек пересечения этих перпендикуляров P_1, P_2, ..., P проведем параллельные оси Ox прямые до пересечения с соседними слева перпендикулярами к оси Ox в точках R_0, R_1, R_2, ..., R. Таким образом, получается ступенчатая фигура $OR_0P_1R_1P_2R_2...RPQ$, площадь которой больше интересующей нас площади. Пусть $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, ..., $(x;\ y)$ — координаты точек P_1, P_2, ..., P.

Площади прямоугольников выразятся произведениями $y_1\cdot\Delta x$; $y_2\cdot\Delta x$; ...; $y\cdot\Delta x$. Общая площадь фигуры: $S=y_1\Delta x+y_2\Delta x+$ $+\ldots+y\Delta x=\Delta x\,(y_1+y_2+y_3+\ldots+y)$. Если число частей, на которые разделен отрезок OQ, равно n, то $x_1=\Delta x$, $x_2=2\Delta x$, $x_3=3\Delta x$, ..., $x=n\Delta x$. Из уравнения $y=x^2$ находим $y_1=(\Delta x)^2$, $y_2=(2\Delta x)^2$, $y_3=(3\Delta x)^2$, $y_4=(4\Delta x)^2$, ..., $y=(n\Delta x)^2$.

Значит, $S=\Delta x\,[(\Delta x)^2+2^2(\Delta x)^2+3^2(\Delta x)^2+\ldots+n^2(\Delta x)^3]=$ $=(\Delta x)^3(1+2^2+3^2+\ldots+n^2)$.

Так как $1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot2\cdot3}$, то $S=(\Delta x)^3(1+$ $+2^2+3^2+\ldots+n^2)=(\Delta x)^3\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot2\cdot3}=\frac{n\Delta x\,(n\Delta x+\Delta x)\,(2n\Delta x+\Delta x)}{1\cdot2\cdot3}$.

Очевидно, что $n\Delta x=x$, следовательно,

$$S=\frac{x(x+\Delta x)(2x+\Delta x)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{2x^3+3x^2\Delta x+x\cdot(\Delta x)^2}{1\cdot 2\cdot 3},$$

или

$$S=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\cdot\Delta x+\frac{x}{6}\cdot(\Delta x)^2.$$

Искомая площадь F будет тем точнее, чем меньше Δx, поэтому, устремив Δx к нулю ($n\to\infty$) и перейдя к пределу, будем иметь:

$$F=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\cdot\Delta x+\frac{x}{6}\cdot(\Delta x)^2\right],$$

или $F=\frac{x^3}{3}$.

Тот же результат получится, если аналогично построить другую ломаную так, чтобы ступенчатая фигура содержалась в фигуре с интересующей нас площадью. Аналогично площадь круга есть предел площадей правильных многоугольников, вписанных и описанных, когда число их сторон неограниченно удваивается.

К середине XVII в. европейские ученые были хорошо знакомы с методом «неделимых» и методом «исчерпывания». Они восхищались безупречной строгостью метода «исчерпывания», но пошли несколько иным путем. Поясним на примере, который фактически представляет собой вычисление пределов сумм Дарбу. Понятие предела последовательности определялось не всегда достаточно четко, но если пределы s_n и S_n совпадали, то их общее значение считалось величиной площади или объема. Этот способ близок к методу «исчерпывания», так как если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=I$, то $S_n-s_n\to 0$ и может быть применен метод «исчерпывания» по всей форме, но это уже не считали нужным делать. К указанному направлению относится работа Валерио («О центрах тяжести тел», 1604) и позже работы Паскаля, Ферма, Роберваля и др.

Во второй половине XVII в. это направление в вычислении площадей, объемов и др. сделалось основным. Все эти вычисления постепенно стали называть *квадратурами*, так как все они сводились к нахождению некоторых площадей.

При отыскании новых квадратур возникали технические трудности вычисления пределов. При решении этих проблем ученые Ферма, Грегори, Барроу столкнулись с некоторыми неожиданностями. Например, обнаружили взаимообратный характер задач на квадратуры и на проведение касательных. Однако значение этого явления удалось полностью осознать и сделать основой нового исчисления лишь Ньютону и Лейбницу. Действительно, если указанные задачи взаимно обратны, то вычисление площадей (квадратур) можно производить с помощью формул для производных и вспомогательных средств, таких, как подстановка и формула интегрирования по частям. Это, как мы знаем, во многих случаях быстро дает хорошие результаты.

Для Ньютона основным понятием при вычислении квадратур сделалась *первообразная* (*флюента*, вычисляемая по *флюксии*, в терминологии Ньютона).

Значение квадратуры, соответствующее площади криволинейной трапеции, выражалось значением первообразной $\Phi(x)$ для $f(x)$ в точке b отрезка $[a;\ b]$ при условии, что $\Phi(a)=0$. Это равносильно вычислению разности значений любой первообразной $F(x)$ в точках b и a, т. е. $P=F(b)-F(a)$. Непосредственно записывать результат квадратуры таким образом начал Лакруа (1798).

Так же проводились вычисления квадратур и Лейбницем и его школой. Но для Лейбница целью жизни являлось создание некоего универсального математического и даже математически логического метода познания и в качестве первого образца — науки о бесконечном, дифференциального и интегрального исчислений. Математика для него была всеобщим изображением всевозможных видов связей и взаимозависимостей простейших элементов, наукой не о величинах, но о формах, в которых количественные изменения подчинены качественным.

Поэтому в силу своих общих философских и методологических установок Лейбниц не мог удовлетвориться тем практическим решением, которое устраивало Ньютона. Замена понятия, лежащего в основе квадратуры, первообразной, означало фактическое удаление определения рассматриваемого объекта от его реального происхождения. Вместе с тем условий для создания математически корректного понятия интеграла тогда не существовало (не было ни развитой теории пределов, ни понятий граней ограниченного множества). Лейбниц определил интеграл как сумму бесконечного числа бесконечно малых дифференциалов: $dy=y'dx$. Рассматривать dx конечным он не хотел, так как в этом случае интеграл давал бы площадь ступенчатой фигуры, лишь приближенно равную площади криволинейной трапеции. По существу, определение Лейбница — это использование метода «неделимых» ($dy=y'dx$ был нулем и ненулем одновременно). Фактически $\int y'dx$ являлся неким специальным знаком для обозначения нового понятия, четкое определение которому Лейбниц хотел дать, но не мог. Понимаемое буквально определение интеграла по Лейбницу носило некоторый «мистический» отпечаток. Вообще анализ конца XVII и всего XVIII в. в части обоснования был «мистическим» (по выражению К. Маркса).

В силу тех же установок Лейбниц, выражаясь современным языком, подчинил систему обозначений требованию алгоритмичности вычислений и, понимая сущность решения конкретных задач, создал исключительно удобную символику, сохранившуюся в основных чертах до сих пор.

В XVIII в. понимание интеграла по Ньютону сделалось почти всеобщим («мистическое» определение Лейбница не было продуктивным). Однако в континентальной Европе использовались обозначения и терминология Лейбница. В XIX в. они завоевали и Англию, и после Коши отстаивать свою самобытность в этом вопросе стало невозможным.

Отсутствие обоснования нового исчисления, несмотря на его огромные практические результаты, порождало как прямую оппозицию, так и попытки построить анализ на иных, чем у Ньютона и Лейбница, началах.

В прямой оппозиции к новому исчислению из ученых-математиков был Ролль. Интересно высказывание Ролля (относящееся к 1708 г.) о том, что в отношении математики достаточно часто замечают, что то, что не доказано со всею строгостью, вообще не доказано и что нет никакой достоверности, кроме полной. Как видим, утверждение, правильное в узком смысле, использовалось для отрицания величайшего открытия XVII столетия. Здесь как нельзя более ярко выступают возможные последствия недооценки основного философского критерия — практики.

Лагранж пытался дать строгое построение анализа на основе разложения функций в ряды. Отметим, что такие термины, как *производная, первообразная*, принадлежат Лагранжу.

Термин *предел* был известен в XVIII в. Эйлер считал необходимым строить анализ на этом понятии. Отстаивал предел как основу нового исчисления и Даламбер. Но строгое определение предела дал О. Коши (1821, 1823). Он первый определил бесконечно малую как переменную, имеющую предел, равный нулю. Работа по перестройке анализа на основе теории пределов выпала главным образом на его долю. Это был уже XIX в.

Можно выделить несколько причин, приводящих к появлению *интеграла Коши*.

1. Противоречия при вычислении определенных интегралов от разрывных функций по формуле Ньютона—Лейбница (эта формула ведь являлась определением). Например:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2 < 0.$$

Результат получен неправдоподобный, поскольку интегрируется неотрицательная функция.

2. Развитие приближенных методов вычисления определенных интегралов, связанных с прямым вычислением интегральных сумм.

3. Использование понятия интеграла в тех случаях, когда ничего неизвестно о существовании первообразной (например, для общей непрерывной функции).

4. Общая тенденция обоснования анализа методами самого анализа.

О. Коши (1823) дал современное определение *определенного интеграла*, но применительно к непрерывным функциям.

Пусть непрерывная функция $y = f(x)$, определенная на $[a;\ b]$, задает криволинейную трапецию (рис. 21).

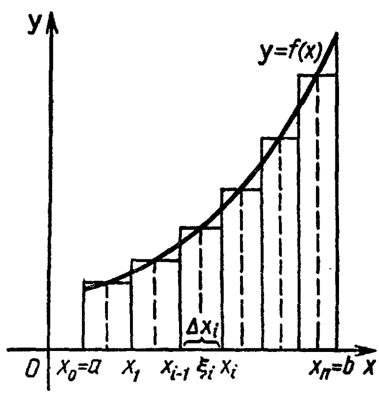

Рис. 21

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$, такими, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b.$$

На каждом i-м участке деления $[x_{i-1}; x_i]$, длина которого Δx_i, выберем произвольную точку ξ_i и найдем значение функции в этой точке $f(\xi_i)$. Составим сумму $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$, называемую *интегральной суммой*.

Геометрически интегральная сумма представляет собой площадь ступенчатой фигуры, частично содержащейся в криволинейной трапеции, частично выходящей за ее пределы и состоящей из прямоугольников (произведение $f(\xi_i) \Delta x_i$ — площадь i-го прямоугольника).

Очевидно, что интегральная сумма σ зависит как от способа разбиения отрезка $[a; b]$, так и от выбора точек ξ_i.

Пусть λ — длина наибольшего из отрезков разбиения $[a; b]$. В случае непрерывной функции $y = f(x)$ суммы σ, получающиеся при различном выборе точек x_i и ξ_i, стремятся к определенному пределу при $\lambda \to 0$. Этот предел и был назван О. Коши *определенным интегралом*.

$$J = \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

В кванторной форме это определение записывают следующим образом:

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists\, \delta > 0)\, (\forall x_i)\, (\forall \xi_i)\, (\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - J| < \varepsilon).$$

Очевидно, что для одного и того же разбиения любая интегральная сумма заключена между значениями нижней и верхней сумм Дарбу.

Первоначально Коши в качестве точек ξ_i брал левые концы отрезков разбиения $\xi_i = x_{i-1}$ (в 21-й лекции для Политехнической школы), но уже в 22-й лекции он доказал независимость определения от выбора точек ξ_i, где $x_{i-1} < \xi_i \leqslant x_i$.

Основным у Коши было понятие определенного интеграла. Величина $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ называлась неопределенным интегралом и доказывалось, что $\Phi'(x) = f(x)$. По поводу определения Коши А. П. Юшкевич пишет: «Формулировка понятия об определенном интеграле, данная Коши, представляла собой в известном отношении возврат к той концепции, из которой первоначально исходил Лейбниц, которая была характерна для всех квадратур, производившихся от Архимеда до Кавальери и Ферма, и которая была оттеснена на задний план в XVIII столетии».

Риман (1853) расширил смысл определения Коши. Дело в том, что конструкция Коши годится для любой ограниченной функции. Функция, для которой такой предел существует, называется *интегрируемой* (по Риману). Определение интеграла Римана уже не эквивалентно определению интеграла как разности значений первообразной. Но рассматриваемые на классе непрерывных функций, эти определения совпадают.

В 1883 г. появилось еще одно определение интеграла. В конструкции Пеано оно имеет следующую форму. Рассматриваются множества $\{s\}$ и $\{S\}$ нижних и верхних сумм Дарбу. Существуют числа k и L, где k — наименьшая верхняя граница множества $\{s\}$ нижних сумм, L — наибольшая нижняя граница множества верхних сумм $\{S\}$. Причем для любых разбиений отрезка $[a; b]$ справедливо соотношение $s \leqslant k \leqslant L \leqslant S$. Если k и L совпадают (т. е. $k=L$), то функция $f(x)$ называется интегрируемой и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = k = L$ (по определению). Это определение эквивалентно определению интеграла Римана.

ФОРМИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СТИЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ ТЕМ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

В последние 20 лет были сделаны огромные усилия по построению школьного курса математики на строгой логической основе с максимально возможной научностью изложения. Наряду с этим интуиции, эвристическим поискам, правдоподобным рассуждениям незаслуженно отводилась второстепенная роль. Здесь уместно вспомнить высказывание М. Клайна в книге «Проблемы преподавания математики в вузах»: «Логика ничего не открывает: ни теорем, ни их доказательств. Таким образом, сосредоточив внимание на дедуктивной стороне, мы упускаем из виду активность математического процесса. Логика, быть может, есть обязательный стандарт математики, но не ее суть». По нашему мнению, логика освещает завоевания интуиции. Как правило, учитель контролирует лишь уровень логической подготовленности школьников, а мера развития их интуиции, к сожалению, ему менее известна, так как не является объектом столь пристального внимания и контроля. На наш взгляд, и это доказано в исследовании Т. С. Маликова, в качестве одного из главных факторов в обучении математике нужно учитывать *интуитивное восприятие*, которое должно сформироваться в данном конкретном случае и которое наиболее способствует творческой деятельности учащихся. Например, как ни старались вводить в школе понятие функции через соответствие, в сознании учащихся самопроизвольно формировалось понимание функции через «зависимость». Точно так же в понятии вектора учащиеся зачастую не усматривают параллельного переноса, у них это понятие ассоциируется с направленным отрезком.

В процессе обучения полезно приобщить учащихся к эвристическим поискам, конструированию элементарных моделей, учить догадке умению строить правдоподобные заключения по интуиции и аналогии, а также завершать исследование дедуктивными доказательствами. Такой подход наиболее соответствует теории познания, развивает мыслительную деятельность учащихся, пробуждает интерес к исследуемой проблеме. Ясно, что при этом во имя развития интереса можно допустить некоторое ослабление строгости доказательства математических фактов. Представляется возможным формулировать систему вопросов, в процессе ответов на которые формируется то или иное понятие с помощью его упрощенной модели. Ответы на некоторые из этих вопросов учащиеся могут получить в стенах школы, а на более сложные — при продолжении ими математического или технического образования. Здесь уместно вспомнить А. Эйнштейна, который писал о том, как в детстве ему попались под руку книжки по физике и математике, прочитав некоторые, он без особых усилий усвоил изложенный в них материал. Это пробудило в нем огромный интерес к физике и математике. И лишь спустя много лет он понял, насколько примитивно было содержание прочитанных книг. Тем не менее он до конца жизни был благодарен этим книгам, ибо они явились исходной базой его дальнейшей деятельности.

Учебная проблема не только понимается, но и принимается обучаемым, а потому вызывается потребность в практической деятельности. Далее следует практическая деятельность по изменению обстоятельств (преобразованные обстоятельства), изменившиеся связи с ними, вновь корректирующее их отражение, определяющее отношение к ним учащегося. Затем вся цепь продолжается на новом уровне. Так спиралеобразно идет развитие связей и отношений в процессе деятельности учащихся.

Приведем два примера нестрогих рассуждений, которые, однако, имеют глубокий познавательный и математический смысл.

Учащимся известно, что площадь круга S есть функция радиуса R, т. е. $S=\pi R^2$. Придадим R приращение: $\Delta R>0$. Соответствующее приращение площади S равно: $\Delta S=S(R+\Delta R)-S(R)$. Ясно, что приращение ΔS представляет собой площадь кольца. Длина окружности $C(R)$ есть также функция от R. Вполне понятно, что $C(R)\,\Delta R<\Delta S<C(R+\Delta R)\,\Delta R$, поэтому $C(R)<\frac{\Delta S}{\Delta R}<C(R+\Delta R)$. Переходя к пределу в этих неравенствах при $\Delta R\to 0$ и учитывая, что функция $C(R)$ непрерывна, получаем:

$$\lim_{\Delta R\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta R}=C(R),\ \text{т. е. } C(R)=S'(R),\ (\pi R^2)'=2\pi R,$$

т. е. получили формулу длины окружности $C=2\pi R$. Учащиеся должны представлять себе, что отыскание предела $\lim\limits_{\Delta R\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta R}$ есть процесс уменьшения ширины кольца, приводящий к тому, что кольцо стремится к окружности.

Рассуждая совершенно аналогично, можно, имея формулу объема шара, получить формулу площади сферы.

Следует признать совершенно ненормальным положение, при котором в школе не изучается понятие дифференциала.

Важно наполнить изучение этого фундаментального понятия конкретным содержанием, ибо оно формирует стиль математического мышления, одной из характеристик которого является рационализм.

Не вдаваясь в тонкости проблемы возможности замены приращения функции ее дифференциалом, приведем несколько прикладных задач, подтверждающих этот рационализм.

Задача 1. Сторона участка земли квадратной формы, измеренная геодезической стальной лентой, оказалась равной 1000 м. Относительная погрешность измерения лентой равна 0,001. Определить абсолютную и относительную погрешность измерения площади участка.

Решение. Площадь Q участка выражается зависимостью $y=x^2$, $\Delta Q=\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$. Далее, $dy=y'\Delta x=2x\Delta x$. Следовательно, $\Delta y=dy+(\Delta x)^2$. Так как относительная погрешность измерения стороны x равна $\delta=0{,}001$, то абсолютная погрешность $\Delta x=1$ м. Площадь участка $Q=1\,000\,000$ м^2. Возможная абсолютная погрешность измерения этой величины $\Delta y=2x\Delta x+(\Delta x)^2=2\cdot 1000\cdot 1+1^2=dy+1$. Если заменить приращение функции Δy дифференциалом dy путем отбрасывания малой величины (1 м^2), то получим, что площадь участка равна $Q=(100\pm 0{,}2)$ га. Относительная погрешность измерения площади $\delta_y=\frac{0{,}2}{100}=0{,}002$, или 0,2%.

Задача 2. Сравнить относительные погрешности при вычислении площади железной пластины, имеющей форму круга радиусом $R=125$ см, рассматривая абсолютную погрешность, равную приращению площади круга a, и абсолютную погрешность, равную дифференциалу площади круга. Считать, что погрешность при измерении радиуса не превышает 0,5 см.

Решение. 1) $\Delta S=\pi(R+\Delta R)^2-\pi R^2=\pi(2R\Delta R+(\Delta R)^2)=\pi(2\cdot 125\cdot 0{,}5+0{,}25)=125{,}25\pi$. Относительная погрешность равна $\delta=\frac{\Delta S}{S}=0{,}0080016\approx 0{,}8\%$.

2) Найдем dS и $\frac{dS}{S}=\frac{2\pi R\cdot\Delta R}{\pi R^2}=\frac{2\cdot\Delta R}{R}=\frac{2\cdot 0{,}5}{125}=0{,}8\%$.

3) Найдем относительную погрешность приближения при замене приращения ΔS дифференциалом dS. При этом $\frac{\Delta S-dS}{dS}=0{,}2\%$. Относительная погрешность приближения составила 0,2%.

Задача 3. Объем шара радиуса V равен $\frac{4}{3}\pi R^3$. Найти приращение и дифференциал объема и дать им геометрическую интерпретацию.

Задача 4. Определить объемное расширение металлического шара радиуса $R=20$ см при его нагревании до 200 °С, если известен коэффициент линейного расширения металла $\alpha=0{,}000012$. (Решить задачу с помощью дифференциала.)

Задача 5. Медный кубик, ребро которого 5 см, подвергается равномерной шлифовке со всех сторон. Зная, что масса его уменьшилась на 0,96 г, и считая плотность меди равной 8960 кг/м^3, определить, как изменились размеры кубика, т. е. укоротилось его ребро.

Рассмотренные нами задачи имеют разный физический смысл. Однако их объединяет одно — при решении каждой из них приращение функции заменяют ее дифференциалом, так как это в значительной мере облегчает вычислительные процедуры, причем такая замена не приводит к существенным погрешностям.

В пользу обязательного знакомства учащихся с понятием дифференциала говорит также и следующий факт.

При введении в средней школе понятия интеграла выражение $f(x)\,dx$ называется подынтегральным выражением и не более того. Кроме указания на место расположения выражения $f(x)\,dx$, такая информация ничего более в себе не содержит. В то же время находят некоторую функцию $F(x)$ и даже семейство $F(x)+C$ таких функций, что $(F(x)+C)'=f(x)$. Остается один шаг, чтобы выражение назвать его настоящим именем.

И наконец, когда применяют определенный интеграл к нахождению площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$ и графиком $y=f(x)$ (производной некоторой функции, хотя об этом стараются не говорить), разбивают отрезок $[a, b]$ на части. При этом площадь каждой части (прямоугольника) вычисляется по формуле $f(x_i)\,\Delta x_i$. При стремлении наибольшего из оснований прямоугольников к нулю и числа делений отрезка $[a, b]$ к бесконечности суммируют бесконечно большое число бесконечно малых слагаемых (дифференциалов). Такое образное представление о задаче нахождения площадей, объемов, работы переменной силы и т. д. дает учащимся метод изучения реальной действительности. В самом деле, при вычислении площади под кривой изначально кривую на достаточно малом отрезке изменения аргумента принимают за отрезок прямой, при вычислении пути (перемещения) неравномерного прямолинейного движения на достаточно малом промежутке времени неравномерное движение считают равномерным, при вычислении работы переменной силы на достаточно малом отрезке силу считают постоянной и т. д.

Важно, чтобы учащиеся увидели то общее, что объединяет решение приведенных здесь и других разнородных задач, ибо при этом формируется стиль мышления, способности поиска аналогичных задач в окружающей действительности, попытка их решения, а это, пожалуй, можно отнести к области педагогических сверхзадач.

Рассмотрим для примера задачу о вычислении работы переменной силы.

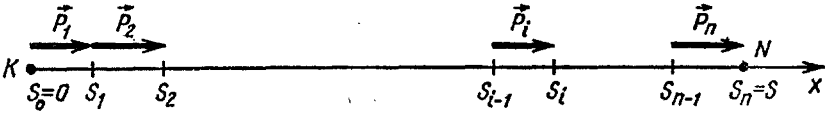

Рис. 22

З а д а ч а. Пусть тело перемещается под действием некоторой силы по прямой, причем направление силы совпадает с направлением движения. Определить работу, произведенную при перемещении тела из положения K в положение N (рис. 22).

Пусть направление силы совпадает с направлением оси Ox, координаты точек $K(a;\ 0)$ и $N(b;\ 0)$.

Если на тело на протяжении всего пути действует постоянная сила, то, как известно, работа A равна произведению силы F на длину пути s, т. е. $A=Fs$, причем если F измеряется в ньютонах, s — в метрах, то A измеряется в джоулях.

Если же на тело действует п е р е м е н н а я сила, то эта сила будет функцией от s (расстояния каждой точки отрезка KN от точки K), т. е. $F=f(s)$.

Как и при вычислении площади трапеции, разобьем весь путь KN (интервал изменения аргумента s) на n равных участков, получим $s_0=0$, s_1, s_2, s_3, ..., s_{n-1}, $s_n=s$ — расстояния соответствующей точки от K.

Будем считать силу, действующую на каждом из этих участков, постоянной: пусть на первом участке она равна $P_1=f(\gamma_1)$, где $s_0\leqslant\gamma_1\leqslant s_1$, на втором участке она равна $P_2=f(\gamma_2)$, где $s_1\leqslant\gamma_2\leqslant s_2$, ..., на участке $[s_{i-1};\ s_i]$ она равна $P_i=f(\gamma_i)$, где $s_{i-1}\leqslant\gamma_i\leqslant s_i$, и т. д.

Работа, произведенная постоянной силой на первом участке, равна $A_1=f(\gamma_1)\cdot(s_1-s_0)$, на втором участке $A_2=f(\gamma_2)\cdot(s_2-s_1)$, на третьем участке $A_3=f(\gamma_3)\cdot(s_3-s_2)$ и т. д., наконец, на n-ом участке $A_n=f(\gamma_n)\cdot(s_n-s_{n-1})$.

Для определения работы, произведенной силой на всем пути, нужно сложить элементарные работы, произведенные на каждом участке разбиения: $f(\gamma_1)(s_1-s_0)+f(\gamma_2)(s_2-s_1)+\ldots+f(\gamma_n)(s_n-s_{n-1})$. Так как отрезок KN разбит на равные участки, то для удобства каждый из них обозначим Δs. Теперь суммарную работу можно записать так: $A_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\,\Delta s$. Эта величина является приближенным значением искомой работы, и она тем точнее, чем больше n (число участков, на которые разбивается KN), а следовательно, чем меньше каждый из этих участков. Итак, $A=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\,\Delta s$, а предел суммы такого вида есть определенный интеграл:

$$A=\int_a^b f(s)\,ds.$$

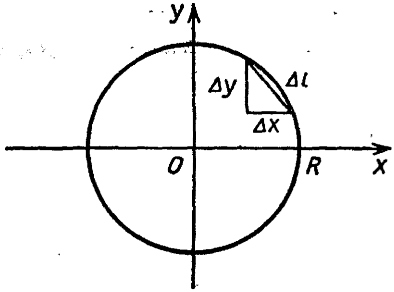

Рис. 23

Пример. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F, т. е. $F=kx$ (1). Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия пружины на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение. Из формулы (1) находим $10=k\cdot 0{,}01$, откуда $k=1000$ Н/м. Формула (1) принимает вид $F=1000\,x$, т. е. $f(x)=1000\,x$. Вычисляем работу:

$$A=\int_0^{0,04} 1000x\,dx=1000\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,04}=0{,}8\ (\text{Дж}).$$

Для вывода формулы длины окружности с помощью дифференциала достаточно малую часть ее дуги Δl заменяют отрезком прямой (рис. 23). Тогда по теореме Пифагора $(\Delta l)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$, откуда $\Delta l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\Delta x\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$.

Отсюда $\frac{\Delta l}{\Delta x}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$. Переходя к пределу слева и справа при $\Delta x\to 0$, получим $\frac{dl}{dx}=\sqrt{1+(y')^2}$, или $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. Длина всей окружности $C=4\int_0^R\sqrt{1+(y')^2}\,dx$. Далее, так как $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $(y\geqslant 0)$ и $y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, то $C=4\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4R\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$.

Осуществив подстановку $x=R\sin\varphi$, получим:

$$C=4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=4R\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi R.$$

ГЛАВА 3. ПРИМЕРЫ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

ПОЛУЧЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА НА ОСНОВЕ ИДЕИ ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ

При введении новых математических понятий необходимо учитывать механизм образования математических абстракций. На примере формирования понятия линейной функции и некоторых других понятий мы сделаем попытку построения различных уровней математических абстракций и покажем, как развивается математическое познание. Этот процесс К. Маркс назвал «оборачиванием метода».

Собственно, задача сводится к формированию понятия производной данной функции и дифференциала на основе линейной аппроксимации, что можно осуществить в такой последовательности изучения тем:

— свойства линейной функции;

— линейная интерполяция;

— представление данной алгебраической функции линейной вблизи нуля;

— представление данной алгебраической функции линейной вблизи данного значения аргумента;

— производная как коэффициент в формуле представления данной функции линейной. Дифференциал;

— формула Тейлора;

— решение уравнений методом касательных и методом хорд.

Изучение свойств линейной функции предусмотрено программой, и учащиеся начиная с VII класса систематически используют их. Можно условно сказать, что это относительно первый уровень математической абстракции, на котором учащиеся рассматривают конкретные практические задачи и получают уравнение $y=kx+b$.

Переход на следующий уровень абстракции, по нашему мнению, осуществляется в том случае, когда сама линейная функция является инструментом для решения других задач, в частности задачи линейной интерполяции. Вывод формулы линейной интерполяции диктуется необходимостью по значениям непрерывной функции $f(x)$ на концах отрезка $[x_1; x_2]$ находить ее приближенное значение в некоторой промежуточной точке x, заменяя данную функцию линейной, график которой проходит через точки $(x_1; f(x_1))$ и $(x_2; f(x_2))$. В частности, этот способ используется при составлении математических таблиц.

Поясним это на примере с помощью рисунка 24, где вместо графика функции $y=f(x)$, проходящего через точки A и B, рассматри-

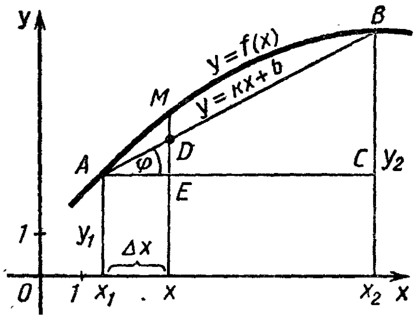

Рис. 24

вается график линейной функции (часть этого графика представлена отрезком AB). Угловой коэффициент k графика линейной функции равен: $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Приращение линейной функции Δy на отрезке Δx пропорционально приращению аргумента, т. е. $\Delta y=k\Delta x$, или

$$\Delta y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\Delta x.$$

Таким образом, значение функции $y=f(x)$ в точке x приближенно равно:

$$y\approx y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\Delta x,$$

или

$$y\approx y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1).$$

Замена функции $f(x)$ на отрезке $[x_1;\ x_2]$ линейной функцией, принимающей значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$ на концах x_1 и x_2 отрезка, называется *линейной интерполяцией*. Как видно, в данном случае не имеет значения характер поведения функции внутри отрезка $[x_1;\ x_2]$ (от этого свойства функции абстрагируются); важно, что данная функция заменена линейной на данном интервале и ее график проходит через точки $A(x_1;\ f(x_1))$ и $B(x_2;\ f(x_2))$.

Если в равенстве $y\approx y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$ вместо приближенного равенства взять точное (ведь в точках x_1 и x_2 значения данной функции и сконструированной линейной совпадают), то получается не что иное, как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, т. е.

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1),$$

или в симметричном виде:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Формула $y\approx y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$ имеет практическое применение.

Например, пусть нужно вычислить без помощи таблиц значение функции $y=\lg x$ при $x=4{,}537$, т. е. вычислить $\lg 4{,}537$. Найдем по таблицам: $\lg 4{,}53=0{,}6561$ и $\lg 4{,}54=0{,}6571$.

В данном примере $x_1=4{,}53$, $y_1=0{,}6561$, $x_2=4{,}54$, $y_2=0{,}6571$, $\Delta x=x-x_1=4{,}537-4{,}53=0{,}007$.

Подставляя в формулу (1) значения x_1, x_2, y_1, y_2 и $\Delta x = x_2 - x_1$, получаем $\lg 4{,}537 \approx \lg 4{,}53 + \frac{0{,}007}{4{,}54-4{,}53}(0{,}6571-0{,}6561) = 0{,}6561 + \frac{0{,}007 \cdot 0{,}001}{0{,}01} = 0{,}6568$.

Этот результат совпадает с табличным.

На практике часто бывает необходимо исследуемую функцию $y=f(x)$ заменить линейной функцией вблизи некоторой точки $x = x_0$, т. е. в окрестности $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$. Геометрически задача сводится к тому, что в точке с абсциссой x_0 к графику данной функции проводится касательная и в δ-окрестности точки x_0 рассматриваются не значения самой функции, а значения построенной линейной функции. По сути дела, при изучении в школе производной решается аналогичная задача: «Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0». Однако учащимся, как правило, не сообщается, зачем это нужно. Тем не менее уже в восьмилетней школе, когда учащиеся еще не знакомы с понятием предела, можно решить подобные задачи, анализируя их условия. Например: «Заменить функцию $y=2-x+3x^2$ вблизи нуля или данного значения аргумента x_0 линейной функцией. Подсчитать погрешность, которая допускается при этой замене на данном конкретном отрезке».

Так как с понятием предела учащиеся еще не знакомы, то в случае $x_0=0$ замену можно осуществить путем отбрасывания членов, степень которых выше первой, и получить уравнение $y \approx 2-x$. Этот результат полностью согласуется с тем, который будет получен впоследствии с помощью производной.

В случае $x_0 \neq 0$ в рассмотрение вводится малая величина $\Delta x = x - x_0$, и после замены x на $x_0 + \Delta x$, выполнения действий и отбрасывания членов, содержащих степени Δx выше первой, получается линейная относительно Δx (а значит, и относительно x) функция, которой и заменяют данную вблизи точки x_0.

Поясним сказанное следующим примером: «Заменить функцию $y=x^2-2x+12$ линейной функцией (читай: «Написать уравнение касательной...») в окрестности точки $x_0=3$».

Введем в рассмотрение малую величину $\Delta x = x-3$. Ясно, что $\Delta x \to 0$ при $x \to 3$. Подставив $x = 3 + \Delta x$ в исходное уравнение, получим $y = x^2 - 2x + 12 = (3+\Delta x)^2 - 2(3+\Delta x) + 12$.

Выполнив действия и отбросив члены, содержащие Δx, степень которых выше первой, будем иметь $y = 9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 6 - 2 \cdot \Delta x + 12 = 15 + 4 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \approx 15 + 4 \cdot \Delta x$.

Заменяя теперь Δx на $x-3$, окончательно получим $y \approx 4x+3$. На самом деле последнее равенство будет точным (т. е. $y=4x+3$), так как отброшенная величина $(\Delta x)^2$ будет при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка малости, чем Δx, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0$, а это полностью согласуется с тем, что в дальнейшем будет получено учащимися с помощью производной.

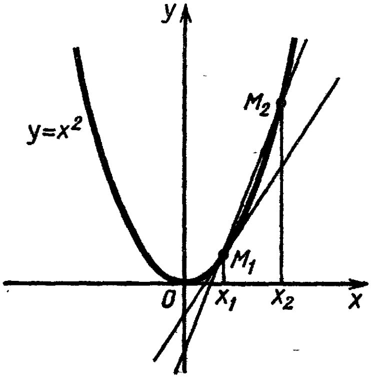

Рис. 25

В заключение отметим, что *линейной аппроксимацией* можно назвать замену данной функции линейной функцией в окрестности данной точки. Поскольку учащиеся еще не знакомы с пределом, то для многочленов задача эта решается указанным выше способом.

Написать уравнение касательной к параболе $y=x^2$ в точке M_1 (т. е. заменить параболу в окрестности некоторой точки прямой), не привлекая понятия предела, можно следующим образом. Так как прямая $y=kx+b$ должна быть касательной к параболе $y=x^2$ в некоторой точке x, то в этой точке должно выполняться равенство $x^2=kx+b$.

Пусть прямая M_1M_2 (рис. 25) является секущей параболы $y=x^2$. Квадратное уравнение, корнями которого являются абсциссы двух точек пересечения секущей M_1M_2 с параболой $y=x^2$, имеет вид $(x-x_1)(x-x_2)=0$, или $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$. Если $M_2 \to M_1$ по параболе (секущая при этом, поворачиваясь около точки M_1, стремится занять положение касательной), то в «пределе», когда M_2 совпадает с M_1, т. е. $M_2=M_1$, можно допустить справедливость равенства $x_1=x_2$. Тогда квадратное уравнение приобретает вид $x^2-2x_1x+x_1^2=0$. Итак, координаты точки $M_1(x_1;\ x_1^2)$ удовлетворяют уравнениям $x^2=kx+b$ и $x^2-2x_1x+x_1^2=0$, откуда $k=2x_1$, $b=-x_1^2$. Подставляя k и b в уравнение $y=kx+b$, получим $y=2x_1x-x_1^2$ — искомое уравнение касательной.

До сих пор мы обходились без понятия предела, т. е. изложение велось на интуитивном уровне. Мы руководствовались только правдоподобными рассуждениями.

Теперь допустим, что учащиеся уже знакомы с понятием предела и дана алгебраическая функция $y=f(x)$, которую надо заменить линейной в окрестности точки $x=x_0$. После введения в рассмотрение малой величины $\Delta x=x-x_0$, соответствующей замене x на $x_0+\Delta x$, и выполнения алгебраических операций получаем:

$$f(x_0+\Delta x)=b+k\,\Delta x+\gamma, \tag{1}$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\gamma}{\Delta x}=0$.

Далее задача сводится к нахождению коэффициентов b и k.

Предполагая, что формула (1) справедлива при $\Delta x=0$ (а это равносильно условию непрерывности функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$), получаем $b=f(x_0)$, и, значит, $\Delta y=k\,\Delta x+\gamma$. Отсюда $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и формула (1) принимает вид:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x+\gamma. \qquad (2)$$

Как видно, производная получилась как коэффициент при Δx в *формуле линеаризации* (1), а дифференциал $dy=k\,\Delta x=f'(x_0)\,\Delta x$.

Рассмотренный способ получения производной восходит к Даламберу и Эйлеру. Их дифференциальное исчисление К. Маркс назвал рациональным. У Даламбера вычисление производной становится правильной математической операцией, основанной на *предельном переходе* в отношении конечных разностей $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Переходу к пределу предшествовало разложение Δy в степенной ряд по степеням Δx, в котором коэффициентом при Δx была уже готовая производная. (Современное определение предела на языке потенциальных бесконечно малых было дано О. Коши уже в XIX в.)

Во многих случаях замена функции, линейной в окрестности некоторой точки x_0, по формуле (2) не является достаточно точной. Тогда ставится задача: заменить данную функцию в окрестности точки x_0 не линейной, а квадратичной (исторически так оно и было), т. е. сконструировать квадратичную функцию, график которой (парабола) в точке с абсциссой x_0 соприкасался бы с графиком данной функции (рис. 26).

В этом случае из слагаемого γ в формуле (2) выделяется член, пропорциональный $(\Delta x)^2$, так, что $\gamma=A\,(\Delta x)^2+\gamma_1$, где A — некоторый коэффициент, а γ_1 обладает тем свойством, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\gamma_1}{(\Delta x)^2}=0$, т. е. в γ_1 вошли все члены, содержащие Δx в степени выше второй.

Таким образом, равенство (2) принимает вид:

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x+A\,(\Delta x)^2+\gamma_1. \qquad (3)$$

Выразим отсюда коэффициент A:

$$A=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot\Delta x-\gamma_1}{(\Delta x)^2}.$$

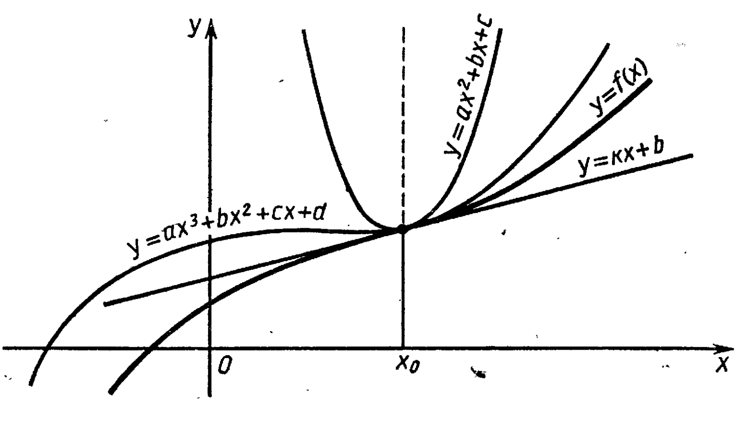

Рис. 26

Переходя слева и справа в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{(\Delta x)^2} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\gamma_1}{(\Delta x)^2}$$

или

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{(\Delta x)^2}.$$

Продифференцируем по Δx числитель и знаменатель (воспользуемся правилом Лопиталя):

$$A = \frac{1}{1\cdot 2} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}, \text{ т. е. } A = \frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}.$$

Теперь равенство (3) принимает вид:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x + \frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}\cdot(\Delta x)^2 + \gamma_1. \qquad (4)$$

Эта формула позволяет рассмотрение функции $f(x)$ в точке x_0 заменить квадратичной функцией.

Для того чтобы получить замену функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$ многочленом третьей степени (график данной функции — кубическая парабола), надо из остаточного члена γ_1 выделить член, пропорциональный $(\Delta x)^3$, так, что $\gamma_1 = B(\Delta x)^3 + \gamma_2$, где B — некоторый коэффициент, а γ_2 — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $(\Delta x)^3$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\gamma_2}{(\Delta x)^3} = 0$.

Теперь равенство (4) принимает вид:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + B(\Delta x)^3 + \gamma_2, \qquad (5)$$

откуда

$$B = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x - \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2}{(\Delta x)^3} - \frac{\gamma_2}{(\Delta x)^3}.$$

Перейдем слева и справа к пределу:

$$B = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x - \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2}{(\Delta x)^3}.$$

Продифференцируем по Δx числитель и знаменатель:

$$B = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0+\Delta x) - f'(x_0) - f''(x_0)\cdot\Delta x}{3\cdot(\Delta x)^2}.$$

Повторно дифференцируя числитель и знаменатель по Δx, получим:

$$B = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f''(x_0+\Delta x) - f''(x_0)}{\Delta x} = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Подставим вместо B в равенство (5) полученное выражение:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(\Delta x)^3 + \gamma_2.$$

Это и есть формула для замены данной функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x=x_0$ многочленом третьей степени.

Продолжая аналогичные рассуждения, индуктивно можно получить формулу Тейлора (фактически с четырьмя членами она уже получена), позволяющую аппроксимировать функцию многочленами и записывать разложения функций в степенные ряды.

Предлагаемый подход к введению понятия производной и дифференциала на основе идеи линейной аппроксимации может быть использован как на уроках, в особенности в математических классах, так и во внеклассной работе.

Дальнейшая работа учителя над основной формулой линеаризации $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\gamma$ может быть продолжена при решении прикладных задач с помощью составления уравнений. Покажем, как эта формула используется для решения уравнений вида $f(x)=0$, где $f(x)$ — непрерывная функция. Суть метода такова: находится интервал, в котором функция $f(x)$ меняет знак. Пусть это будет на отрезке $[x_0;\ x_0']$. За так называемое нулевое приближение можно взять $x=x_0$. Пусть в этой формуле $\Delta x=h$, тогда она принимает вид:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\cdot f'(x_0)+\ldots\ . \qquad (6)$$

Пусть пока еще неизвестное точное решение уравнения $f(x)=0$ таково: $\bar{x}=x_0+h$. Тогда $f(x_0+h)=0$, и, значит, $f(x_0)+hf'(x_0)\approx 0$. Знак приближенного равенства взят ввиду того, что нами в правой части формулы (2) отброшены члены более высокого порядка, чем h.

Из последнего равенства получаем $h\approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, т. е. $\bar{x}\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Если правую часть обозначить через x_1, то

$$x_1\approx x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \qquad (7)$$

Мы получили «первое приближение» (рис. 27).

Аналогично получим «второе приближение»: $x_2\approx x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ и т. д. Так как отбрасывание членов высшего порядка в формуле (6) равносильно замене графика функции $y=f(x)$ при $x=x_0$ на касательную, то геометрический смысл рассматриваемого метода состоит в последовательном построении касательных к графику и нахождении точек пересечения

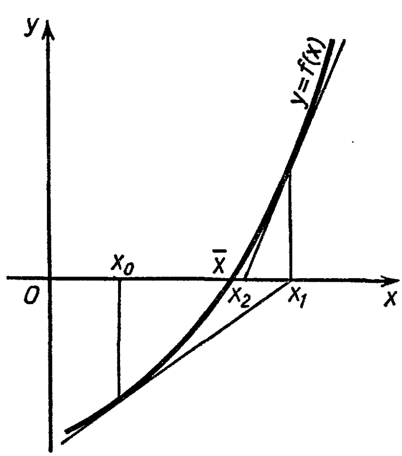

Рис. 27

этих касательных с осью Ox. Этот метод называется методом Ньютона (или методом касательных). (Метод Ньютона принадлежит к числу итерационных методов, т. е. методов последовательных приближений. По понятным причинам мы не исследуем здесь возможные итерационные процессы.)

Рассмотрим пример: решить уравнение $x^3-3x-1=0$ с точностью до 10^{-3}.

Так как $f(1)=-3$, а $f(2)=1$ и $f(x)$ непрерывна на $[1; 2]$, то корень уравнения принадлежит отрезку $[1; 2]$. Пусть $x_0=2$. Тогда по формуле (7) (с тремя знаками после запятой) получим:

$$x_1=2-\left(\frac{x^3-3x-1}{3x^2-3}\right)_{x=2}=1{,}889.$$

Аналогично получаем $x_2=1{,}879$, $x_3=1{,}879$. Таким образом, с данной точностью решение будет $\bar{x}=1{,}879$.

Составим программу решения данного уравнения на ЭВМ:

```
1Ø  DEFFN F(X)=X*X*X-3*X-1
2Ø  DEFFN A(X)=3*X*X-3
3Ø  XØ=2
4Ø  E=1E-Ø3
5Ø  X1=XØ-FN F(XØ) / FN A(XØ)
6Ø  R=FN F(X1)
7Ø  IF ABS (R) GOTO 1ØØ
8Ø  XØ=X1
9Ø  GOTO 5Ø
1ØØ PRINT X1
```

Кроме метода касательных, описанного нами, существует так называемый *метод хорд* решения уравнения вида $f(x)=0$, основанный на выведенной нами формуле линейной интерполяции. Если для удобства заменить отрезок $[x_1; x_2]$ на отрезок $[a; b]$, то эта формула примет вид $y\approx f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$, а стало быть, уравнение прямой (2), т. е. уравнение хорды AB будет иметь вид:

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a). \qquad (8)$$

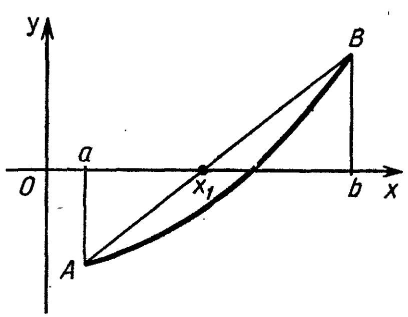

Рис. 28

Итак, пусть дано уравнение $f(x)=0$ и известно, что на отрезке $[a; b]$ уравнение имеет корень (рис. 28).

Так как уравнением хорды AB является уравнение (8), то для нахождения первого приближения корня надо найти абсциссу точки пересечения хорды AB с осью абсцисс. Для этого в уравнении (8) надо положить $y=0$ и решить его относительно x. Получим:

$$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(a). \tag{9}$$

Это приближенное значение корня можно снова уточнять. Сначала вычислим значение $f(x_1)$ и возьмем тот из концов отрезка $[a; b]$, в котором знак $f(x)$ противоположен знаку $f(x_1)$. Пусть это будет конец b. Тогда к отрезку $[x_1; b]$ применим формулу (9) и получим следующее приближение корня:

$$x_2 = x_1 - \frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)} \cdot f(x_1). \tag{10}$$

Продолжая этот процесс, получим рекуррентно определенную последовательность чисел: $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, где

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n)} \cdot f(x_n). \tag{11}$$

Она сходится к корню уравнения $f(x)=0$. При достаточно большом значении n отклонение x_n от точного значения корня α станет меньше заданной точности вычисления ε. Поскольку точное значение α корня нам неизвестно, то обычно ведут вычисления до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$.

Если же знаки функции различны на отрезке $[a; x_n]$, то вместо рекуррентной формулы (11) берут

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n-a}{f(x_n)-f(a)} \cdot f(x_n).$$

Пример. Найти с точностью до 0,01 корень уравнения $x^3+3x-1=0$ на отрезке $[0; 1]$.

Решение. На данном отрезке корень действительно существует, так как $f(0)=-1$, $f(1)=3$ и $f(x)$ непрерывна на $[0; 1]$. По формуле (9) имеем $x_1 = 0 - \frac{1-0}{3+1} \cdot (-1) = 0{,}25$. Так как $f(0{,}25) = 0{,}25^3 + 3 \cdot 0{,}25 - 1 \approx -0{,}234$, то по формуле (11) получим:

$$x_2 = 0{,}25 - \frac{1-0{,}25}{3-(-0{,}234)} \cdot (-0{,}234) \approx 0{,}304.$$

Мы имеем $f(0{,}304) = 0{,}304^3 + 3 \cdot 0{,}304 - 1 \approx -0{,}060$, и потому

$$x_3 = 0{,}304 - \frac{1-0{,}304}{3-(-0{,}060)} \cdot (-0{,}060) \approx 0{,}3176.$$

$$f(0{,}3176) = 0{,}3176^3 + 3 \cdot 0{,}3176 - 1 \approx -0{,}0152.$$

Далее находим, что

$$x_4 = 0{,}3176 - \frac{1-0{,}3176}{3-(-0{,}0152)} \cdot 0{,}0152 = 0{,}3211.$$

Таким образом, с точностью до 0,01 корень $x=0{,}32$.

Надо иметь в виду, что как метод касательных, так и метод хорд, являются частными случаями общего метода приближенного решения уравнений — *метода последовательных приближений.*

КОНСТРУИРОВАНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

По нашему мнению, проблема связи между изучением отдельных школьных предметов должна занимать одно из центральных мест. Это способствует пониманию роли и места различных наук в общем процессе познания, их взаимных отношений, характера свойственных им методов, областей и границ применимости этих методов. Чрезвычайно важно, чтобы результаты обучения на уроках по одному из предметов использовались и закреплялись при изучении других предметов.

Рассмотрим три физические задачи, приводящие к построению функции вида $y=ax^2+bx+c$.

Задача 1. Пусть тело движется равноускоренно вдоль оси Ox. Найти формулу для отыскания координаты x (перемещения) тела в любой момент времени t.

Известно, что при равноускоренном движении тела вдоль координатной оси Ox скорость меняется по закону $v_x=v_{0x}+a_xt$ (1), где t — время, v_x и v_{0x} — соответственно проекции скорости $\vec{v}$ тела и скорости $\vec{v}_0$ на ось Ox, a_x — проекция ускорения $\vec{a}$ на ось Ox.

Графики проекции скорости для случаев $a_x>0$ и $a_x<0$ представлены на рисунке 29.

Перенесем график (при $a_x>0$) на рисунок 30 и выделим на оси Ot малый отрезок времени $[c; d]$. Через точки c и d восставим перпендикуляры к оси Ot до пересечения с AB.

Длина отрезка $[c; d]$ на оси t численно равна тому малому промежутку времени, за который скорость изменилась от ее значения в точке c (т. е. ac) до ее значения в точке d (т. е. bd).

Если промежуток времени, численно равный отрезку $[c; d]$, достаточно мал, то в течение этого времени изменение скорости тоже мало, поэтому движение в течение такого малого промежутка времени можно считать равномерным, а полоску $abcd$ — мало отличающейся от прямоугольника.

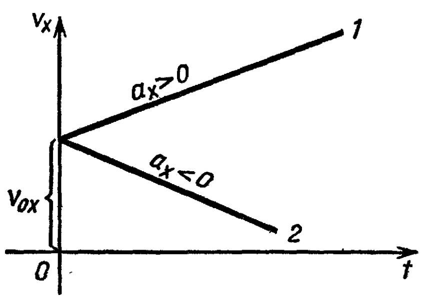

Рис. 29

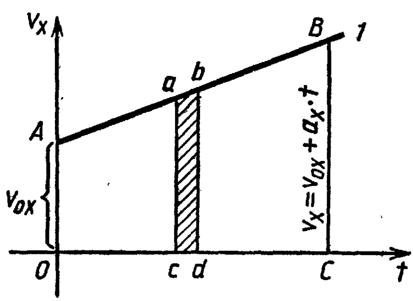

Рис. 30

Таким образом, площадь полоски численно равна модулю перемещения тела за время, соответствующее отрезку $[c; d]$.

Так как на такие узкие полоски можно разбить всю площадь фигуры, расположенную под графиком скорости, то перемещение за все время t численно равно площади трапеции $OABC$.

Одно из оснований трапеции численно равно v_{0x}, длина другого — v_x, высота численно равна t, поэтому проекция перемещения s_x равна:

$$s_x=\frac{v_{0x}+v_x}{2}\cdot t. \qquad (2)$$

Подставляя сюда из (1) вместо v_x равную ей величину $v_{0x}+a_xt$, получим:

$$s_x=\frac{v_{0x}+v_{0x}+a_x\cdot t}{2}\cdot t=\frac{2v_{0x}t+a_xt^2}{2},$$

или

$$s_x=v_{0x}\cdot t+\frac{a_xt^2}{2}. \qquad (3)$$

Если в формуле (3) начальная скорость v_{0x} равна нулю, то $s_x=\frac{a_xt^2}{2}$.

В случае свободного падения тела $s=\frac{gt^2}{2}$. Применяя формулу (3), нужно помнить, что s_x, v_{0x} и a_x могут быть как положительными, так и отрицательными — это проекции векторов $\vec{s}$, $\vec{v}_0$ и $\vec{a}$ на ось Ox. Ясно, что задача может быть решена составлением дифференциального уравнения, а именно $\frac{ds}{dt}=v_0+at$. Отсюда $ds=(v_0+at)\,dt$, и, значит, $s=v_0t+\frac{at^2}{2}+c$. При $t=0$ $s=0$, и, значит, $c=0$. Таким образом,

$$s=v_0t+\frac{at^2}{2}.$$

Можно было площадь S_{OABC} найти простым интегрированием:

$$s=\int_0^t (v_0+at)\,dt=v_0t+\frac{at^2}{2}.$$

Задача 2. Рассмотрим физическую задачу, связанную с математическим описанием траектории движения тела, брошенного под некоторым углом к горизонту, после чего сделаем обобщения, специфичные для математики. При этом считаем массу тела равной или близкой к нулю. Не будем учитывать также действия сил воздушной среды и других, т. е. рассмотрим в некотором смысле идеализированное движение, причем совершаемое в одной вертикальной (фронтальной) плоскости. Расположим в этой плоскости систему координат xOh с осью абсцисс, направленной вправо,

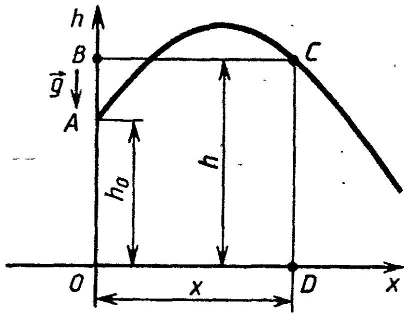

Рис. 31

и осью ординат, направленной вверх. Рассмотрим движение, траектория которого показана на рисунке 31. Пусть в начальный момент времени тело находилось в точке A на некоторой высоте h_0 над поверхностью Земли. Через промежуток времени t после начала движения оно оказалось в точке C, находящейся на высоте h от поверхности Земли. Если обозначить скорости тела в точках A и C через $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$, то их проекции на оси Ox и Oh соответственно будут равны v_{Ox}, v_x и v_{Oh}, v_h. Проекция скорости на ось x изменяться не будет, т. е.

$$v_x = v_{Ox}, \tag{1}$$

так как на тело действует только сила тяжести, направленная по вертикали вниз, и, стало быть, изменяться будет лишь проекция вектора скорости $\vec{v}$ на ось h:

$$v_h = v_0 + g_h t. \tag{2}$$

Таким образом, координата x тела изменяется так же, как при равномерном прямолинейном движении:

$$x = v_{Ox} t. \tag{3}$$

Координата же h изменяется так же, как при прямолинейном равноускоренном движении:

$$h = h_0 + v_{Oh} \cdot t + g_h \cdot \frac{t^2}{2},$$

или

$$h = h_0 + v_{Oh} \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \tag{4}$$

так как $g_h = -g$.

Ясно, что формулы (1) и (2) определяют скорость, а формулы (3) и (4) — положение брошенного тела через t секунд после начала движения.

В тот момент, когда v_h в формуле (2) обращается в нуль, тело достигает наибольшей высоты, т. е. при $t = \frac{v_{Oh}}{g}$ (5). Это следует из того, что до этого момента $v_h > 0$, а после этого $v_h < 0$.

По формуле (4) можно определить наибольшую высоту подъема тела. Она равна:

$$h_{max} = h_0 + \frac{v_{Oh}^2}{2g}. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь некоторые характеристики траекторий тел, брошенных под различными углами к горизонту, причем будем считать, что начальная скорость v_0 вылета тела не зависит от угла φ (рис. 32).

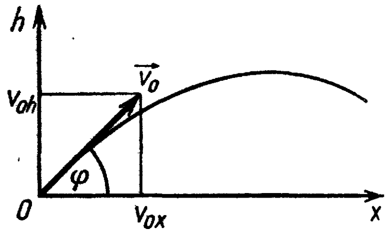

Рис. 32

Из формулы (2) следует, что тело достигнет вершины своей траектории в момент $t=\frac{v_{Oh}}{g}$ и находится над поверхностью Земли, как следует из формулы (6), на высоте

$$h_{max}=\frac{v_{Oh}^2}{2g}.$$

Нетрудно понять, что $v_{Oh}=v_0$ лишь при $\varphi=90°$. Таким образом, самая большая высота подъема тела достигается, когда оно брошено вертикально вверх под углом 90°. Эта высота равна:

$$H=\frac{v_0^2}{2g}. \qquad (7)$$

Приняв в равенстве (4) $h_0=0$ и $h=0$, можно найти значения t, при которых тело брошено, а также упало на Землю, т. е. момент броска и момент падения: $v_{Oh}t-\frac{gt^2}{2}=0$, отсюда $t=0$ и $t=\frac{2v_{Oh}}{g}$. Из равенства (3) можно найти расстояние от места броска до места падения:

$$x=v_{Ox}t=\frac{2v_{Ox}\cdot v_{Oh}}{g}, \qquad (8)$$

или

$$x=\frac{2v_{Ox}v_{Oh}}{g}=\frac{((v_{Ox}^{\text{В}})^2+(v_{Oh}^{\Gamma})^2)-(v_{Ox}^{\text{В}}-v_{Oh}^{\Gamma})^2}{g}=$$

$$=\frac{v_0^2-(v_{Ox}^{\text{В}}-v_{Oh}^{\Gamma})^2}{g}.$$

Полученная дробь будет иметь наибольшее значение при $v_{Ox}^{\text{В}}=V_{Oh}^{\Gamma}$, т. е. наибольшая дальность полета получается при $\varphi=45°$:

$$X=\frac{v_0^2}{g}. \qquad (9)$$

Как видно, наибольшая дальность в два раза больше наибольшей высоты подъема (см. (7)).

Точно так же можно показать, что если тело брошено от точки O влево, то наибольшая дальность полета будет при угле $\varphi=135°$.

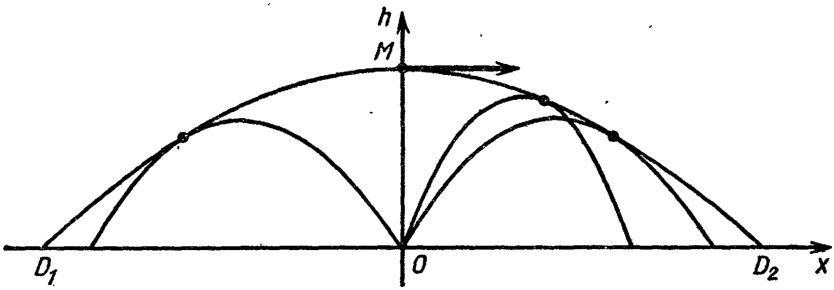

Рис. 33

Можно показать, что при отклонении вектора v_0 от биссектрисы первого или второго координатного угла вверх или вниз на один и тот же угол, меньший 45°, дальность полета тела получается одинаковой.

Теперь поставим вопрос: «Какую часть пространства заполняют траектории движения тел при разных углах φ, брошенных с одинаковой по модулю начальной скоростью?»

Ясно, что это пространство ограничено некоторым куполом. Рассмотрим лишь траектории, расположенные во фронтальной плоскости (рис. 33).

Пусть M — точка максимального подъема тела, D_1 и D_2 — точки наибольшей дальности. Проведем кривую (она будет параболой) через точки D_1, M, D_2 и выясним, с какой начальной скоростью u надо бросить тело из точки M горизонтально вправо (влево), чтобы его траектория прошла через точку D_2 (D_1). Напомним, что точка M находится на высоте $h=\frac{v_0^2}{2g}$ (см. (7)), а точка D_2 (D_1) находится от точки O на расстоянии $\frac{v_0^2}{g}$.

Согласно формуле (4), в которой следует положить $v_{0h}=0$ и $h_0=\frac{v_0^2}{2g}$, получим, что через t секунд после броска высота тела над Землей будет равна $\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gt^2}{2}$. Момент падения тела на Землю определится уравнением $\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gt^2}{2}=0 \Rightarrow t=\frac{v_0}{g}$.

Из формулы (3), в которой надо положить $v_{0x}=u$, заключаем, что точка падения будет находиться на расстоянии $ut=u\cdot\frac{v_0}{g}$ от точки O.

Для того чтобы эта точка совпала с точкой D_2, нужно, чтобы выполнялось равенство $u\cdot\frac{v_0}{g}=\frac{v_0^2}{g}$, т. е. $u=v_0$.

Как видно, тело, брошенное горизонтально из точки M со скоростью v_0, имеет траекторию, проходящую через D_2 (D_1). Эту траекторию называют параболой безопасности, имея в виду тот факт, что она ограничивает зону обстрела при условии, что выстрелы производятся из точки O с начальной скоростью v_0 и, стало быть, выше нее полет безопасен. Если в формулах (1)—(4) положить $v_{0h}=0$, $v_{0x}=v_0$, $h_0=\frac{v_0^2}{2g}$, то мы получим формулы, которыми определяются в момент времени t положение и скорость тела, движущегося по параболе безопасности:

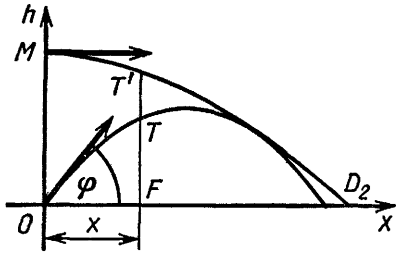

Рис. 34

$$v_{0x}=v_0 \qquad (10),$$

$$v_{0h}=-gt \qquad (11),$$

$$x=v_0t \qquad (12),$$

$$h=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gt^2}{2} \qquad (13).$$

Докажем теперь, что если одновременно бросить два тела, причем одно из них из точки O под некоторым углом φ, а другое из точки M горизонтально, с одной и той же начальной скоростью v_0, то тело, брошенное из точки O в одни и те же моменты времени, будет находиться ниже тела, брошенного из точки M, и лишь в единственный момент времени они будут на одинаковой высоте.

Графически это означает, что при определенном значении t их траектории движения соприкоснутся.

Пусть тело, брошенное из точки O под углом φ, через t секунд находится в точке T так, что $OF=x=v_{0x}t$ (рис. 34). Продолжим FT до пересечения с параболой безопасности в точке T' и определим время, через которое тело, брошенное из точки M горизонтально с начальной скоростью v_0, окажется в точке T' (на одной прямой с точками T и F). Пусть это будет через t' секунд. Таким образом, имеем $v_0t'=OF=v_{0x}t$, откуда $t'=t\frac{v_{0x}}{v_0}$.

Найдем высоты FT' и FT:

$$FT'=h_0-\frac{g(t')^2}{2}=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{g}{2}\cdot\left(t\cdot\frac{v_{0x}}{v_0}\right)^2;$$

$$FT=v_{0h}t-\frac{gt^2}{2}.$$

Разность этих высот равна: $FT'-FT=\frac{v_0^2}{2g}-v_{0h}t+\frac{gt^2}{2}\left(1-\left(\frac{v_{0x}}{v_0}\right)^2\right)=$ $=\frac{v_0^2}{2g}-v_{0h}t+\frac{gt^2}{2}\left(\frac{v_{0h}}{v_0}\right)^2=\frac{1}{2g}\left(v_0-gt\cdot\frac{v_{0h}}{v_0}\right)^2\geqslant 0$. Таким образом, точка T всегда расположена ниже точки T', за исключением момента времени $t=\frac{v_0^2}{gv_{0h}}$, когда $FT'=FT=0$, т. е. точки T и T' совпадают. Значит, тело достигнет параболы безопасности через $t=\frac{v_0^2}{gv_{0h}}$ после вылета. Проекция F снаряда на землю будет в это время находиться на расстоянии $x=v_{0x}\cdot t=\frac{v_0^2}{g}\cdot\frac{v_{0x}}{v_{0h}}=\frac{v_0^2}{g}\cdot\operatorname{ctg}\varphi$ от точки O.

Так как при изменении угла от 90 до 45° последнее выражение принимает все значения от 0 до $\frac{v_0^2}{g}$, то параболы безопасности в любой ее точке касается траектория некоторого тела, брошенного из точки O.

Это означает, что парабола безопасности является огибающей семейства траекторий тел, брошенных под углом к горизонту из точки O. *Огибающая* — это такая кривая, которая в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства и ни на каком участке не совпадает ни с одной из кривых этого семейства.

Математическое решение задачи нахождения огибающих будет представлено дальше, а теперь выясним некоторые замечательные свойства параболы. Допустим, что тело, движущееся из точки M по параболе безопасности, через t секунд (рис. 35) будет находиться в точке $T(x;\ h)$.

Найдем расстояние OT из $\triangle OTF$, используя формулы (12) и (13):

$$OT=\sqrt{x^2+h^2}=\sqrt{(v_0t)^2+\left(\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gt^2}{2}\right)^2}=\frac{v_0^2}{2g}+\frac{gt^2}{2}=\frac{v_0^2}{g}-h.$$

Проведем прямую d параллельно оси Ox на расстоянии $\frac{v_0^2}{g}$ от нее. Тогда $\frac{v_0^2}{g}-h$ есть расстояние от точки T до прямой d. Так как рас-

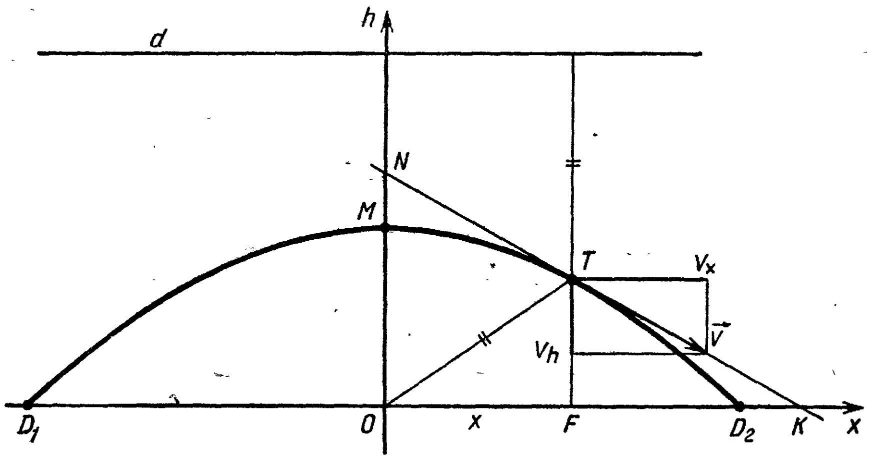

Рис. 35

стояния от любой точки, лежащей на параболе, до точки O и прямой d будут равны между собой, то мы получили важнейшее свойство параболы, обычно принимаемое за определение этой кривой: парабола есть множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки O и данной прямой d. Точка O называется фокусом параболы, прямая d — директрисой или направляющей.

Докажем еще одно свойство параболы, которое состоит в следующем: если NK — касательная к параболе в точке T (рис. 35), то $\angle OTN = \angle FTK$. (Так как эти углы оба острые, то достаточно доказать равенство их тангенсов.)

Из рисунка с учетом равенств (10)—(13) имеем:

$$\operatorname{tg} \angle FTK = \frac{v_x}{-v_h} = \frac{v_0}{gt}; \quad \operatorname{tg} \angle OTF = \frac{x}{h} = \frac{v_0 t}{\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt^2}{2}}. \tag{14}$$

Но

$$\operatorname{tg} \angle OTN = \operatorname{tg}(180° - \angle OTK) = -\operatorname{tg} \angle OTK =$$
$$= -\operatorname{tg}(\angle FTK + \angle OTF) = -\frac{\operatorname{tg} \angle FTK + \operatorname{tg} \angle OTF}{1 - \operatorname{tg} \angle FTK \cdot \operatorname{tg} \angle OTF},$$

и после подстановки значений (14) и упрощения получим:

$$\operatorname{tg} \angle OTN = \frac{v_0}{gt}. \tag{15}$$

Итак, $\operatorname{tg} \angle OTN = \operatorname{tg} \angle FTK$, а значит, $\angle OTN = \angle FTK$.

Из доказанного свойства следует, что если из точки F направить луч света параллельно оси Oh, то, отразившись от параболы в точке T, он попадет в точку O (фокус).

На основании этого свойства устроены многие световые приборы.

При вращении параболы вокруг оси Oh получается параболоид вращения. Если в фокусе поместить источник света, то лучи, отразившись от поверхности параболоида, пойдут параллельно оси. Фары автомобиля, рефлектор прожектора и другие приборы устроены с использованием этого свойства.

Итак, на основе математического описания траектории движения тела, брошенного под углом к горизонту (физическая задача), мы пришли к важным выводам, а именно к характеристике свойств объекта (параболы), являющегося предметом изучения математики.

Теперь давайте проследим, как можно подойти в математике к решению задачи получения уравнения параболы (не пользуясь определением).

Задача 3. Пусть источник света находится в точке O (рис. 36). Какова должна быть форма зеркала, чтобы отраженные лучи были параллельны оси Ox?

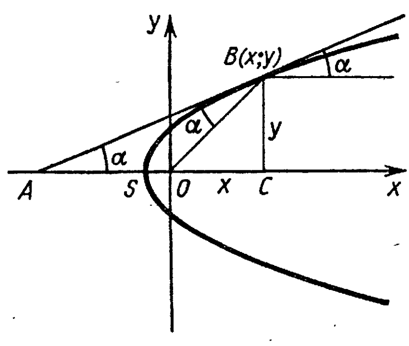

Рис. 36

Решение. Рассмотрим кривую, получающуюся при пересечении поверхности зеркала плоскостью xOy, и на этой кривой произвольную точку $B(x;\ y)$. Проведем касательную AB к кривой в точке B. Угол падения луча равен углу отражения, поэтому $\angle ABO = \alpha = \angle OAB$.

Так как $\triangle AOB$ равнобедренный, то $|OA| = |OB| = \sqrt{x^2+y^2}$. Считая $y > 0$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}, \qquad (16)$$

или, умножая числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{x^2+y^2}-x$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}, \qquad (17)$$

или $\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$.

Нетрудно заметить, что последнее уравнение можно записать в виде $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+y^2} = 1$, и, следовательно, непосредственно проинтегрировав, имеем $\sqrt{x^2+y^2} = x + c$, откуда

$$y^2 = 2cx + c^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right). \qquad (18)$$

Полученное общее решение дифференциального уравнения говорит о том, что искомыми кривыми будет семейство парабол, осью симметрии которых является ось Ox.

Пусть дано расстояние от фокуса O до центра зеркала S: $|SO| = a$. Тем самым задается начальное условие:

$$y_x = 0. \qquad (19)$$

Подставляя начальное условие (19) в формулу (18), получим: $0 = 2c\left(-a + \frac{c}{2}\right)$, откуда $c = 2a$. Значение $c = 0$ не подходит по физическому смыслу задачи.

Таким образом, искомая парабола имеет уравнение $y^2 = 4a(x+a)$.

Для этой параболы $P = 2a$, и, следовательно, фокусное расстояние $\frac{P}{2} = a$, т. е. источник света находится в фокусе. Вращая полученную параболу вокруг оси Ox, получим искомую поверхность — параболоид вращения.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

Межпредметные связи должны рассматриваться не только как «мостики» между учебными предметами, но и как построение целостной системы обучения на основе общности содержания знаний и методов научного познания.

Проблема межпредметных связей вытекает из дидактического принципа систематичности, который отражает общее философское понятие о связи явлений и согласуется с физиологическим и психологическим понятием о системности работы мозга. Через межпредметные связи отражается живая связь явлений в понятиях человека, а их осуществление является объективной необходимостью развивающего обучения.

Межпредметные связи математики и физики не нашли еще должного воплощения в практике работы учителей этих предметов, а это ведет к неполному, одностороннему изучению вопросов, где проявляется закономерная связь математики и физики как наук о природе.

Проблемы взаимосвязи двух предметов отражены в работах многих исследователей.

Так, И. В. Скопина пишет о пропедевтическом введении понятий предела, производной, первообразной и определенного интеграла на уроках физики. В. Д. Хомутовский исследует взаимосвязи физики и математики при формировании у учащихся понятий величины, функции, а также роль межпредметных связей в привитии школьникам навыков вычислений. Л. П. Урвачев описывает педагогическую эффективность применения координатного метода при изучении механики. И. Ф. Жураховский исследует проблему обучения учащихся VII—VIII классов решению задач в условиях межпредметных связей физики и математики.

Несмотря на это, проблема еще далека от сколько-нибудь комплексного удовлетворительного решения.

Последовательное осуществление межпредметных связей в обучении математике и физике в значительной степени способствует приобретению обобщенных знаний, умений и навыков, формированию научной картины мира. Главной идеей на данном пути является генерализация знаний учащихся по математике и физике путем реализации единого подхода к формированию понятий, общих для этих курсов, математического моделирования физических явлений и процессов, разработка операционных структур решения типовых задач по математике и физике.

В исследовании Н. Т. Донченко (см.: Донченко Н. Т. Осуществление взаимосвязи в обучении физике и математике в средней школе.— М., 1984), например, сформулированы следующие положения, которые могут быть полезны при построении физических и математических моделей явлений и процессов объективного мира:

а) когда одно и то же явление моделируется на уроках физики и математики, то на уроках физики модель представляют в наиболее общих чертах, а на уроках математики она получает дальнейшее обобщение путем большей степени абстрагирования;

б) конкретизацию моделей осуществляют посредством введения характеристик, раскрывающих свойства идеализированного объекта и выступающих как физические величины;

в) определение физических величин, характеризующих реальный объект или процесс путем измерений, предусматривает применение математического аппарата, особенно при вычислении погрешности измерений;

г) на этапе установления основных функциональных зависимостей между существенными сторонами объекта или процесса с применением математических понятий учащиеся неизбежно осуществляют математическое моделирование;

д) полученные в процессе решения задачи уравнения, являясь математической моделью одного из видов фундаментального взаимодействия или их совокупности, позволяют представить идеализированные объекты, процессы в динамике;

е) математическое моделирование следует использовать как средство концентрации наглядности абстрактной информации об особенностях течения процесса.

Использование сформулированных положений позволяет сосредоточить внимание учащихся на наиболее характерных чертах объективного мира, тем самым обеспечивая необходимую глубину познания сущности моделируемых процессов.

Развитие познавательного интереса учащихся к определенным учебным предметам и соответствующим областям науки, техники и культуры связано с разработкой новых факультативов на межпредметной основе. В частности, С. И. Новиковым на основе математики, физики и кибернетики предложен факультатив «Содержание и методы проведения межпредметных факультативов в VII классе (физика, математика и кибернетика)». Содержание такого факультатива отвечает широким интересам учащихся, межпредметный курс оказывает позитивное влияние на усвоение учащимися единства общих мировоззренческих идей и законов, на овладение ими способами использования межпредметных связей. Материал курса позволяет плодотворно реализовать принцип политехнического обучения, деятельность учащихся при этом содействует развитию познавательных интересов школьников к конкретной науке и ее приложениям.

Примерная программа факультатива, рассчитанная на 38 ч (содержит следующие разделы):

Введение.

Системы счисления.

Элементы математической логики. Основные законы алгебры высказываний.

Алгебра релейно-контактных цепей.

Элементы вычислительной техники.

Автоматическое управление и регулирование.

Физика электрических цепей управления.

Применение физических методов исследования для анализа электрических цепей.

Экскурсия в вычислительный центр.

Для развития материалистического мировоззрения учащихся в процессе их обучения важное значение имеет показ отношения изучаемых ими основ наук к объективной действительности. Для естественных и общественных наук, непосредственно отображающих эту действительность, решение такой задачи более или менее очевидно.

Однако для абстрактных наук, например таких, как математика, как уже говорилось выше, решение этой задачи далеко не очевидно, а нередко и весьма затруднительно. Трудно не согласиться с мнением В. В. Фирсова о том, что существо прикладной направленности среднего математического образования заключается в осуществлении содержательной и методологической связи школьного курса математики с практикой, что предполагает введение в школьную математику специфических методов, характерных для исследования прикладных проблем математическими методами.

Для иллюстрации этой мысли рассмотрим уже решенную задачу описания математическими методами траектории движения тела, брошенного под углом к горизонту, исходя из несколько иных посылок.

Итак, тело брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти: а) вид траектории; б) высоту наибольшего подъема; в) дальность полета. (Сопротивлением воздуха пренебречь.)

Решение. Имеем прямоугольную систему координат xOy, и пусть тело брошено из начала координат под углом α к горизонту. Тогда составляющие скорости без учета сопротивления таковы: $v_x = v_0 \cos \alpha$, т. е. горизонтальная составляющая постоянна, $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$.

Координаты тела x и y как функции времени выразятся так:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключая параметр t, имеем $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$.

Обозначая $\operatorname{tg} \alpha = a$, $\frac{g}{2v_0 \cos^2 \alpha} = b$ (a и b — константы), имеем $y = ax - bx^2$. Это — уравнение параболы.

Далее, $y' = a - 2bx$, отсюда $y' = 0$ при $x = \frac{a}{2b}$, т. е.

$$y_{\max} = \frac{a^2}{2b} - \frac{ba^2}{4b^2} = \frac{a^2}{4b}, \quad y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Тело упадет на землю, когда $y = 0$, т. е. $ax - bx^2 = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{a}{b}$. При $x = \frac{a}{b}$ получим дальность полета $x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$, $x_{\max} \leqslant \frac{v_0^2}{g}$, т. е. равенство достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

В заключение этого параграфа рассмотрим еще одну задачу на конструирование квадратичной функции на основе построения математической модели закона движения материальной точки.

Задача. Материальная точка движется по вертикальной прямой под действием силы тяжести, причем известны ее положение и скорость в некоторый момент t_0. Найти закон движения.

Решение. Примем вертикальную прямую за ось Oy, за начало координат примем точку ее пересечения с поверхностью Земли, а ось Oy направим вверх. Обозначим положение точки и скорость ее в момент времени t_0 соответственно через y_0 и v_0. Принимая во внимание механический смысл второй производной, мы приходим к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-g, \tag{1}$$

где g — ускорение силы тяжести. Наша задача сводится к нахождению того решения $y=y(t)$ уравнения (1), которое при $t=t_0$ удовлетворяет условиям

$$y=y_0,\ \frac{dy}{dt}=v_0.$$

Числа t_0, y_0 и v_0 называются начальными данными, а условия (2) — начальными условиями решения (движения). Интегрируя равенство (1), получим:

$$\frac{dy}{dt}=-gt+c_1, \tag{3}$$

откуда

$$y=-\frac{gt^2}{2}+c_1t+c_2. \tag{4}$$

Формула (4), где c_1 и c_2 постоянные, содержит все решения уравнения (1). Выделим из нее решение, удовлетворяющее начальным условиям (2). Пусть для упрощения $t_0=0$. Подставим в (3) и (4) вместо t, y и $\frac{dy}{dt}$ их начальные значения 0, y_0 и v_0. Получим $c_1=v_0$, $c_2=y_0$.

Для нашего примера c_1 и c_2 есть начальные значения искомой функции и ее производной. Заменяя c_1 и c_2, получим частное решение дифференциального уравнения (1):

$$y=-\frac{gt^2}{2}+v_0t+y_0.$$

УСТАНОВЛЕНИЕ СВЯЗИ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КВАДРАТИЧНОЙ И ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЙ

В наше время весьма распространенным стало явление, при котором авторы, работающие над созданием учебника геометрии (или алгебры), уделяют недостаточное внимание установлению связей математики не только с другими дисциплинами школьного курса, но и между математическими дисциплинами. Разобщенность курсов алгебры и геометрии принципиально недопустима.

Поясним сказанное несколькими примерами. Известно, например, что основной методической установкой в алгебре при изучении функций в восьмилетней школе является требование научить учащихся строить график конкретной функции по точкам, а также по графику описать свойства этой функции.

Например, при изучении линейной функции сначала рассматривают прямую пропорциональность $y=kx$, а затем переходят к конструированию функции $y=kx+b$, строят по точкам ее график, не обосновывая его вида. Такие же ослабленные требования предъявляются к изучению линейной функции и в дальнейшем, в то время как в VII классе в геометрии в разделе «Декартовы координаты на плоскости» вводятся текущие координаты и выводятся в общем виде уравнения окружности $(x^2+y^2=r^2)$ и прямой $(ax+by+c=0)$. Здесь же представляется способ написания уравнения прямой по двум точкам, заданным своими координатами, причем он принципиально отличается от алгебраического прежде всего по уровню абстрагирования, о чем подробно будет изложено ниже. Ясно, что устранение таких расхождений в курсе алгебры и геометрии возлагается на учителя.

Второй пример касается изучения квадратичной функции. Известно, что в алгебре изучение ее свойств связано с представлением ее уравнения в виде $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$. (1)

В связи с изучением параллельного переноса в геометрии учащийся должен иметь в виду следующее: пусть дана некоторая прямоугольная система координат xOy (рис. 37) и некоторая точка $A(x;\ y)$. Выберем теперь на плоскости систему координат $x'O_1y'$, начало которой находится в точке $O_1(x_0;\ y_0)$, а оси O_1x' и O_1y' параллельны осям Ox и Oy. В системе $x'O_1y'$ координаты любой точки A имеют вид $x'=x-x_0$, $y'=y-y_0$, где x, y — координаты точки A в системе xOy, а x', y' — координаты точки A в системе $x'O_1y'$.

Пусть вершина параболы находится в некоторой точке $O_1(x_0;\ y_0)$ (рис. 38). Найти уравнение этой параболы. Выберем вспомогательную систему координат с началом в вершине O_1 параболы и осями, параллельными соответственно осям Ox и Oy. Тогда в этой системе координат парабола будет иметь уравнение $y'=ax'$. Подставив

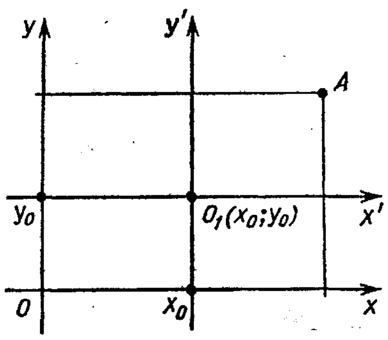

Рис. 37

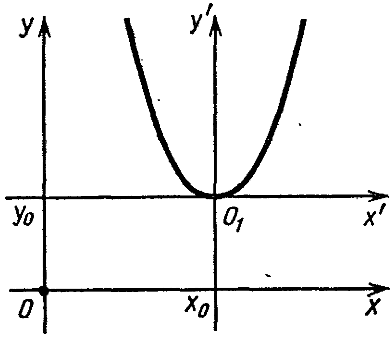

Рис. 38

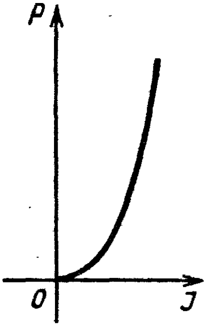

Рис. 39

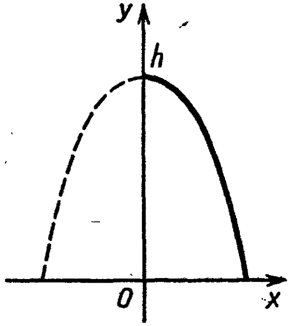

Рис. 40

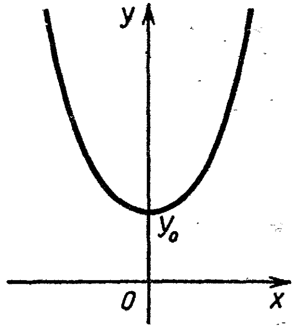

Рис. 41

в него вместо x' и y' их выражения через x и y, получим уравнение в исходной системе координат:

$$y-y_0=a\,(x-x_0)^2. \qquad (2)$$

В этом уравнении x_0, y_0 — координаты вершины параболы, коэффициент a определяет «размах» ветвей параболы и их направление.

Записав уравнение (1) в виде $y-\frac{4ac-b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ и сравнив его с уравнением (2), получаем $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Теперь приведем несколько примеров процессов, описываемых квадратичной функцией:

1) Зависимость мощности электрического тока P на участке цепи с сопротивлением R от силы тока I выражается формулой $P=RI^2$. Графически эта зависимость изображается правой ветвью параболы ($I\geqslant 0$) с вершиной в начале координат (рис. 39).

б) Тело, брошенное с высоты h с начальной скоростью v_0, при своем падении описывает траекторию, совпадающую с правой ветвью параболы $y=h-\frac{gx^2}{2v_0^2}$, вершина которой находится на оси Oy в точке $y_0=h$, ветви параболы направлены вниз (рис. 40).

в) Во время работы сепарирующей центрифуги поверхность вращающейся жидкости принимает форму так называемого параболоида вращения. Если взять сечение, совпадающее с плоскостью xOy, то в сечении получается парабола. Уравнение этой параболы имеет вид:

$$y=y_0+\frac{\omega^2x^2}{2g},$$

где ω — угловая скорость, g — ускорение свободного падения (рис. 41).

Остановимся теперь на принципиальном, на наш взгляд, различии изучения прямой в курсах геометрии и алгебры, тем более что ни одно из существующих методических пособий не разъясняет сути «геометрической» и «алгебраической» прямой. В самом деле, в учебнике геометрии А. В. Погорелова к получению уравнения прямой подходят следующим образом: пусть надо составить уравнение некоторой прямой l (рис. 42). Берут точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, симметричные относительно этой прямой. На прямой l фиксируют произвольную точку M с текущими координатами x и y, т. е. $M(x; y)$. Находят расстояние

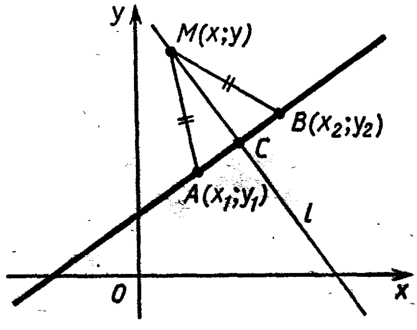

Рис. 42

$$AM=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

и расстояние $BM=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$. Далее, так как $AM^2=BM^2$, то составляют равенство

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 \qquad (1)$$

и после очевидных преобразований получают уравнение прямой l

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)=0.$$

Обозначая $2(x_2-x_1)$ через a, $2(y_2-y_1)$ через b и $x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2$ через c, окончательно получают уравнение прямой $ax+by+c=0$.

Нетрудно видеть, несмотря на специфичность предметов геометрии и алгебры, что при конструировании уравнения прямой в геометрии выходят на более высокие уровни абстракций, чем в алгебре. Поэтому, поскольку и алгебру и геометрию ведет один и тот же учитель, он должен осуществлять некоторую нивелировку излагаемого материала. В частности, если объектом изучения является прямая и в геометрии этот материал изложен принципиально в том ключе, как это было нами только что показано выше, на уроках алгебры целесообразно рассмотреть для начала следующие две задачи:

Задача 1. Сконструировать линейную функцию $y=kx+b$ по угловому коэффициенту k и значению ее y_1 в точке x_1.

Решение. Так как известно k, то для нахождения b необходимо в уравнение $y=kx+b$ подставить вместо x и y соответственно x_1 и y_1. Получим:

$$y_1=kx_1+b.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$y-y_1=k(x-x_1). \qquad (2)$$

(При произвольном действительном значении k уравнение (1) представляет собой уравнение пучка прямых с центром в точке с координатами $(x_1; y_1)$. Из рассмотрения исключается прямая, перпендикулярная оси Ox.) —

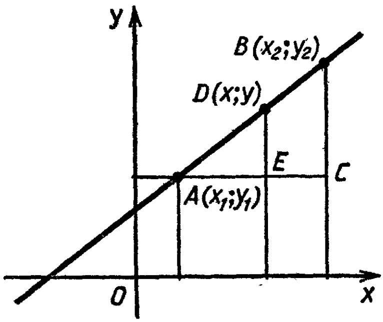

Рис. 43

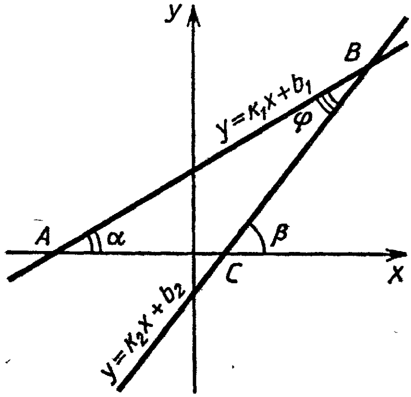

Рис. 44

Задача 2. Сконструировать линейную функцию по двум ее значениям y_1 и y_2, принимаемым соответственно в точках x_1 и x_2.

Решение. Имеем $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ — точки графика искомой функции (рис. 43), а значит, $y_1=kx_1+b$ и $y_2=kx_2+b$, откуда $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$,

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{3}$$

Подставляя найденное k в равенство (2), получим:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1),$$

или

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{4}$$

Уравнение (4) — уравнение прямой AB.

Уравнение (4) может быть получено значительно проще, а именно: возьмем точку $D(x;\ y)$, находящуюся между точками A и B (рис. 43). Из подобия треугольников ABC и ADE находим:

$$\frac{BC}{AC}=\frac{DE}{AE} \text{ или } \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1},$$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Таким образом (и это в первую очередь должен знать учитель), можно установить зависимость между уравнениями (1) и (4), а для этого надо вывести формулы для нахождения угла между прямыми. Пусть даны линейные функции $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ (рис. 44). Требуется найти угол φ между их графиками. Обозначим через α и β углы, образованные этими прямыми с положительным направлением оси Ox. Угол β является внешним по отношению к треугольнику ABC, поэтому $\beta=\alpha+\varphi$, откуда $\varphi=\beta-\alpha$. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=k_1$ и $\operatorname{tg}\beta=k_2$, т. е. $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1}$.

Из этой формулы вытекают условия параллельности ($k_2=k_1$) и перпендикулярности ($k_2=-\frac{1}{k_1}$) графиков данных функций.

Запишем теперь уравнение (4) в виде $y=kx+b$. Получим:

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x+y_1-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x_1. \qquad (5)$$

Это есть не что иное, как уравнение прямой AB (рис. 42). Ясно, что прямая l перпендикулярна прямой AB и проходит через точку C (середину AB). Значит, ее угловой коэффициент $k_e=\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}$ (см. (5)). Координаты точки C будут $x_c=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_c=\frac{y_2+y_1}{2}$. Для нахождения b подставим значение k и координаты точки C в уравнение $y=kx+b$. Получим $\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+b$, откуда $b=\frac{y_1+y_2}{2}-\frac{x_1^2-x_2^2}{2(y_2-y_1)}$. Таким образом, уравнение прямой l (рис. 42) имеет вид:

$$y=\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}\cdot x+\frac{y_2+y_1}{2}-\frac{x_1^2-x_2^2}{2(y_2-y_1)}.$$

Приведя обе части к общему знаменателю и опустив его, будем иметь:

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+(x_1^2+y_1^2-x_2^2y_2^2)=0,$$

что в точности совпадает с уравнением (1).

Можно было сначала взять уравнение (1) и получить уравнение (5). Это полезно сделать в процессе изучения соответствующих тем программы и обязательно при обобщающем повторении, ибо ничто так не развивает интерес, как установление причинно-следственных связей между изучаемыми объектами (или явлениями).

Уравнение (4) можно получить совершенно из других посылок, и это будет соответствовать исторической правде. Мы имеем в виду задачу линейной интерполяции, которая состоит в том, что по значениям некоторой непрерывной функции $y=f(x)$, на концах отрезка $[x_1;\ x_2]$ равной соответственно y_1 и y_2, требуется найти приближенное ее значение в некоторой промежуточной точке x, заменив эту функцию на отрезке $[x_1;\ x_2]$ линейной функцией, график которой проходит через точки с координатами $(x_1;\ f(x_1))$ и $(x_2;\ f(x_2))$ (рис. 43).

Из $\triangle ABC$ находим $k=\operatorname{tg}\varphi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Из $\triangle ADE$ получим $DE=$ $=(x-x_1)\operatorname{tg}\varphi=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$. Далее DE рассматриваем как приближенное значение приращения Δy функции $y=f(x)$ на отрезке $[x_1;\ x_2]$, т. е. $\Delta y\approx DE$.

Таким образом, приближенное значение функции $y=f(x)$ в точке x равно:

$$y \approx y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1). \qquad (6)$$

Абсолютная погрешность приближения в данном случае равна длине отрезка DM. Эта интерполяционная формула лежит в основе построения четырехзначных математических таблиц. В случае, если речь идет о нахождении промежуточного значения линейной функции $y = kx + b$, равенство (6) будет не приближенным, а точным, т. е. $y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$. Получено уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$.

Рассмотренные задачи решаются в различных школьных учебных предметах, однако в науке математике они являются объектом изучения аналитической геометрии — арифметической модели геометрии Евклида. Это должен знать учитель.

КАТЕГОРИИ КОНЕЧНОГО И БЕСКОНЕЧНОГО В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

В начале XX в. Д. Гильберт сказал: «Ни одна проблема не волновала так глубоко человеческий дух, как проблема бесконечного; ни одна идея не влияла на разум так возбуждающе и плодотворно, как идея бесконечности; но, однако, ни одно понятие не нуждается так сильно в выяснении, как понятие бесконечного».

С понятием бесконечного в школьном курсе математики приходится иметь дело довольно часто. Начиная с начальной школы и кончая выпускным классом предложения типа «натуральный ряд чисел бесконечен», «уравнение имеет бесконечное множество решений», «стремится к бесконечности», «стремится к нулю», «бесконечная периодическая и непериодическая дробь», и т. д. входят в обиход учащихся. Однако они не получают достаточно четкого толкования.

На языке *бесконечно малых* дается определение предела числовой последовательности (длины окружности и площади круга), с привлечением ε-δ определяется предел функции в точке, а глубокий смысл понятия бесконечного для учащихся остается нераскрытым. Можно с уверенностью сказать, что на различных уровнях абстракции смысл понятий конечного и бесконечного надо прояснять начиная уже с первого класса.

Конечное и бесконечное — это противоположные, взаимоисключающие друг друга стороны объективной реальности.

То, что присуще конечному и ограничено его природой, оказывается совершенно несвойственным бесконечному, и, наоборот, то, что характерно для бесконечного, не имеет места в конечном.

Непонимание противоположности конечного и бесконечного в математике порождает множество парадоксов и противоречий. Многие математики пытались вычислить сумму бесконечного ряда $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ на основе обычных арифметических правил, установленных для операций над конечными числами. Если считать, что этот бесконечный ряд обладает тем же свойством и подчиняется тем же законам, что и конечные ряды, то это порождает неясности.

На основе применения ассоциативного закона можно представить ряд $1-1+1-1+\ldots$ в виде $(1-1)+(1-1)+\ldots$, и тогда сумма нашего ряда как будто должна быть равна 0.

Далее, можно наш ряд представить следующим образом: $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$, тогда можно предположить, что сумма ряда равна 1. Используя коммутативный и ассоциативный законы, будем иметь $-1+(1-1)+(1-1)+\ldots$. Видим, что сумма равна -1.

Если же записать наш ряд в таком виде: $1-1+1-1+\ldots=$ $=1-(1-1+1-1+\ldots)$, то можно заметить, что выражение, стоящее в скобках, ничем не отличается от данного ряда. Обозначив поэтому в вышеуказанном равенстве наш ряд $1-1+1-1+\ldots$ буквой x, имеем $x=1-x$. Отсюда $x=\frac{1}{2}$.

Итак, обнаруживается, что сумма ряда $1-1+1-1+\ldots$ может быть равна и 0, и 1, и -1, и $\frac{1}{2}$. Можно даже показать, что она вообще может быть равна любому рациональному числу. Таким образом будет «доказано», что любое рациональное число равно нулю.

Здесь же полезно привести такой пример: «доказать», что два отрезка различной длины имеют «одинаковое» число точек (рис. 45).

При «доказательстве» поступаем так. Пусть даны два отрезка AB и CD. Условимся, что если между всеми точками этих отрезков можно установить взаимно однозначное соответствие, то задача решена. Теперь проведем AC и BD до пересечения в точке K. Если на отрезке AB возьмем некоторую точку P, то, проведя KP до пересечения с CD, получим соответствующую ей точку P'. Взяв теперь на CD некоторую точку L' и проведя KL', получим соответствующую точку L. Нетрудно видеть, что для любой точки отрезка AB всегда найдется соответствующая ей точка отрезка CD и, наоборот, для любой точки отрезка CD найдется соответствующая точка отрезка AB.

Задача «решена».

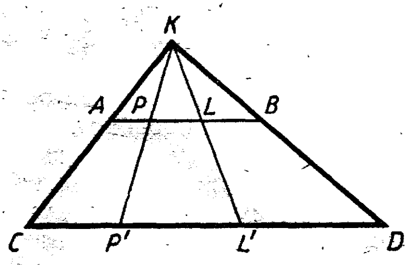

Рис. 45

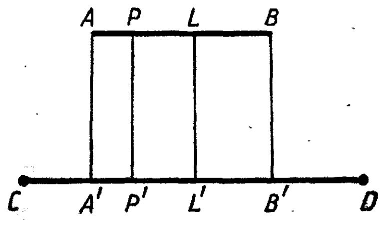

Рис. 46

Если же каждой точке P отрезка AB поставить в соответствие точку P' отрезка CD так, что $PP' \perp SD$ (рис. 46), то окажется, что на отрезке CD точек «больше». Получается явный абсурд.

Причина рассмотренных парадоксов в том, что мы при вычислении суммы ряда и сравнении количеств точек на каждом отрезке неправомерно пользовались по отношению к бесконечному теми закономерностями, которые справедливы лишь по отношению к конечному.

В зависимости от решения вопроса о соотношении бесконечности и движения в истории научного познания вырабатываются две различные концепции бесконечности: *актуальная* и *потенциальная*.

Если бесконечность понимается как актуальная бесконечность, то в этом случае бесконечно большая величина — это такая величина, у которой размеры настолько велики, что охватывают собой все возможное и уже не могут быть больше увеличены.

Если же бесконечность понимается как потенциальная бесконечность, то тогда бесконечно большая величина — это такая величина, размеры которой превосходят всякую данную наперед определенную величину и могут быть увеличены еще больше. Такое представление о бесконечности является несравненно более глубоким, более богатым по содержанию, более близким к истине, чем примитивное представление о бесконечности как гипертрофированной конечности.

Вот два примера, использующие понятие потенциальной бесконечности.

Число называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, начиная с которого модуль разности между числом A и членами последовательности $\{a_n\}$ может стать и в дальнейшем оставаться меньше ε, т. е. $|A - a_n| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

А. Я. Хинчин писал: «Слова «бесконечно малая» звучат как указание на размеры изучаемой величины, и часто начинающий приучается связывать с термином «бесконечно малая» представление о величине «очень малой», «ничтожно малой»; такое представление неправильно: термин «бесконечно малая» по самому своему определению описывает не размеры величины, а характер ее изменения. Было бы, конечно, правильнее называть этого рода величины не «бесконечно малыми», а безгранично убывающими» (Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа.— М., 1955.— С. 32).

Бесконечно малые величины в качестве своей неотъемлемой противоположности предполагают бесконечно большие величины.

Представление о бесконечно малых является математическим выражением момента бесконечности вглубь, присущего реальной бесконечности, и выделение этого момента немедленно ведет к выделению и противоположного ему момента бесконечности вширь, который находит себе математическое выражение в представлении о бесконечно больших величинах. Так же как и бесконечно малые, бесконечно большие величины не являются определенными числами, а представляют собой процессы.

Математическая абстракция бесконечно малой величины и предела, лежащая в основе дифференциального и интегрального исчислений, имеет свой аналог в объективном мире. Ф. Энгельс отмечал, что в природе происходят процессы, совершенно аналогичные процессам исчисления бесконечно малых, что в объективной деятельности имеет место в буквальном смысле интегрирование, отличающееся от математического интегрирования лишь тем, что одно совершается сознательно человеческой головой, а другое бессознательно природой.

В наиболее общей форме математическую бесконечность рассматривает в настоящее время теория множеств. В ней сосредоточиваются основные проблемы, связанные с идеей бесконечности в математике. Теория множеств является тем фундаментом, на котором зиждется дальнейшее логическое обоснование сформулированных математическим анализом представлений о бесконечных величинах и пределах. Необходимость такого дальнейшего логического обоснования идей исчисления бесконечно малых диктовалась потребностями внутреннего развития математики. Возросший уровень абстракции математических теорий в XIX в. требовал и большей логической строгости в их построении. А между тем с точки зрения логической строгости основные представления математического анализа в том их виде, в каком они были сформулированы Коши в начале XIX в., оставляли желать лучшего. Например, понятие предела опиралось на понятие действительного числа, но вместе с тем понятие иррационального числа, в свою очередь, опиралось на понятие предела, истолковывалось как предел последовательности рациональных чисел. Получался, таким образом, явный порочный круг. Уже в первой половине XIX в. некоторые математики, начиная с Больцано, пришли к мысли, что многие положения математического анализа, теории рядов существенно нуждаются в предположении об актуальном существовании бесконечного множества значений рассматриваемой переменной величины. Идея актуальной бесконечности вновь была наполнена новым содержанием и послужила одним из устоев теории множеств, на базе которой понятие потенциальной бесконечности, используемое математическим анализом, получило строгое логическое обоснование.

Разработка основ теории множеств является заслугой немецкого математика половины XIX в. Георга Кантора. Если до Кантора математики, чувствуя трудности, связанные с понятием бесконечности, пытались избавиться от них, заменяя его понятием предела, то Кантор пошел по другому пути. Он отбросил традиционный страх математиков перед оперированием бесконечностью. Сведя понятие бесконечности к понятию бесконечного множества, он смело обратился к исследованию бесконечных множеств, их свойств и закономерностей. В канторовской концепции идея актуальной бесконечности является существенным моментом.

В такой весьма небольшой по объему книге трудно рассчитывать на полноту реализации прикладной направленности школьного курса математики и выявления ее воспитательных возможностей. Тем не менее можно сделать три, на наш взгляд, чрезвычайно важных вывода.

Во-первых, прикладная направленность курса математики средней школы не должна сводиться лишь к ориентации на изучение алгоритмических языков программирования. Ясно, что вычислительная техника была создана главным образом для внутримодельного решения прикладной задачи, для выполнения так называемой рутинной работы. Главная же задача и главная трудность состоят в том, чтобы научить учащихся конструированию математических моделей реальности. А отдавать внутримодельное решение задачи ЭВМ или не отдавать — это особый вопрос, который должен решаться исходя из конкретных условий. Сейчас, когда дифференциация обучения (в том числе и математике) стала трактоваться в самом широком и истинном понимании, появляются реальные возможности учить школьников в одних случаях конструированию алгоритмов, в других быть пользователями готовых алгоритмов, а в третьих оставаться на уровне интуиции и правдоподобных рассуждений. Важно, чтобы на каждом из этих уровней для них был очевиден смысл и необходимость изучаемого математического содержания, его значимость и связь с окружающей действительностью.

Второй вывод касается воспитания в процессе обучения математике: по нашему глубокому убеждению надо как можно меньше говорить о воспитании, оказывать влияние на формирование личности логикой предмета и, что пожалуй самое важное, прикладной направленностью содержания курса с выявлением и реализацией ее мировоззренческих и социально-педагогических функций. Надо раз и навсегда отказаться в школе от технократического мышления, когда средства превалируют над целью, когда на учащегося смотрят как на обучаемый, программируемый компонент системы, как на объект самых разнообразных манипуляций, а не как на личность с бесконечными степенями свободы ее интеллекта.

И наконец, в-третьих, говоря о строгости изложения, уместно вспомнить высказывание русского ученого академика А. Н. Крылова, который рекомендовал «не считать недостаточно строгим для шестнадцатилетнего гимназиста, например, то, на чем сам Ньютон обосновал все современное учение о мироздании и что он положил в основу своих неопровержимых доказательств строения системы мира», а утонченную строгость доказательств рассматривал как «торжество науки над здравым смыслом». Аналогичных взглядов придерживались и выдающиеся физики А. Эйнштейн и А. Д. Ландау.