МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

Философский факультет

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

МАТЕМАТИКА И РЕАЛЬНОСТЬ

Тезисы
Третьей всероссийской научной конференции

27-28 сентября 2013 г.

МОСКВА
Центр стратегической конъюнктуры
2013

УДК 5:1
ББК 22.1:87
Ф56

Проведение конференции поддержано Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 13-06-06076.

Ф56 **Философия математики: актуальные проблемы. Математика и реальность.** Тезисы Третьей всероссийской научной конференции; 27-28 сентября 2013 г. / Редкол.: Бажанов В.А. и др. – Москва: Центр стратегической конъюнктуры, 2013. – 270 с.

ISBN 978-5-906233-39-4

Конференция по философии математики – традиционная встреча специалистов в этой области и смежных с ней областях. В ее работе приняли участие профессиональные математики, преподаватели математики в системе высшего образования, философы, логики, психологи, историки математики. Тезисы в сборнике сгруппированы в разделы, соответствующие секциям конференции. Приоритетная тема конференции 2013 года – «Математика и реальность».

УДК 5:1
ББК 22.1:87

ISBN 978-5-906233-39-4

СЕКЦИЯ 1

МАТЕМАТИКА И РЕАЛЬНОСТЬ

Darvas György, *director, Symmetrion, Budapest*

THREE GENERATIONS OF NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES IN THEIR RELATION TO APPLICATIONS IN PHYSICS

Our geometrical world view is usually held to be based on Euclidean geometry. It is a plausible view since someone standing on the Earth sees the surroundings as approximately flat. But that view, propagated through our schools, is mistaken.

Many pupils have been convinced that Euclidean geometry is absolute. Many students are then surprised when first meet a non-Euclidean geometry. Many of them are sceptical about the reality of such a geometry. And many of them question the reality of those physical phenomena, which inspired and demanded the elaboration of non-Euclidean geometries.

Geometry is an abstraction. Physical phenomena represent reality. The geometries they demand are those correctly describing the spatial environment in which these phenomena appear. Flat (that means, Euclidean) geometry is an abstract approximation, which disregards the material environment in our current theories. Physical reality assumes the presence of matter which, in turn, determines the structure of space, and which structure appears different from the idealised „empty" world's geometry.

From Euclidean to curved geometries

The first non-Euclidean geometries were elaborated in the middle of the nineteenth century (Lobachevsky, Bolyai, Gauss, ...). Those geometries assumed (different) constant-curvature spaces (hyperbolic, elliptic, spherical, etc.). The curvature also determines the metric of the given space. However, those geometries were still far from physical reality, for the curvature around a physical source is not constant. It depends, among other factors, on the distance from the material source, which causes the space to be curved.

From constant curvature geometries to space-time dependent curvatures

The second generation of the non-Euclidean geometries took into consideration the dependence of the curvature (and the metric) on the displacement of a given point (event) in space and time. This is a family of Riemannian geometries. The curvature (and metric) in such geometries is a function of space-time co-ordinates. Without Riemann geometry, the theory of gravitation, better known as the general theory of relativity, could not have been elaborated. This was the first and up to now probably the most successful application of a non-Euclidean geometry in physics.

From space-time dependent geometries to many-parameter dependent curvatures

More sophisticated mathematical theories were developed that allowed the curvature to depend on other variables. One can mention first the two theorems elaborated by Emmy Noether just with the aim to prove the invariances (a phenomenon associated with symmetries since the 18th c.) evoked by the general theory of relativity. These two theorems establised a correspondence between conservation laws (that means, invariance under certain actions, such as a translation in time) and symmetries, which are so fundamental in most discoveries concerning the physical structure of matter in the recent nearly hundred years. These two mathematical theorems allow an indefinite number of parameters as variables of functions. These parameters can be endowed with physical properties. The possibilities of the variations of applicable physical parameters in the second theorem of Noether are still not fully exploited.

Riemann geometry assigns a fixed curvature to each space-time point. This means that curvature (and the metric of the space) depends on four variables. If one increases the number of variables (in our case: physical parameters) on which the curvature of the space depends, one can assign a variety of curvatures to any space-time point, according to these additional parameters. Application of such additional parameters opened the way to extending the geometries from the characterization of space-time to physical fields.

This potential program was predicted, at least in mathematical terms, by Paul Finsler. Finsler geometries treat spaces whose curvature, and accordingly metric, depend not only on their location (like in Riemann geometry), but also on directions assigned to each spatial point. This explains, why the applications of quaternions and octonions in physical theories interpreted on Finsler spaces are so widespread. The original idea was that the curvature changed according to the possible spatial directions where a (bundle of) vector(s) could be attached to each point at each time.

From many-parameter dependent curvature spaces to physical fields

The idea was plausible, for many physical quantites behave like vectors, and their value really depends on spatial (spatio-temporal) direction. Later the concept of Finsler geometry was extended to generalised additional parameters as well. Finsler geometries represent a third generation of non-Euclidean geometries.

Physical fields often depend on vector quantities. Physics describes nature in permanent change. Physical nature can be characterised by quantities which may change both their place and their direction at every moment. Many phenomena call for a description in a direction-dependent reference frame. Further, physics establishes laws that represent constancy in the continuously changing world. These laws are based on more or less stable physical principles. Fruition of symmetry is one of the most fundamental principles of physics. It embodies constancy in change (cf., *Symmetry: Culture and Science*, Vols. 14-15, 2003-4). Symmetry means that while certain properties are changing at least one other property is conserved. Derivation of conservation theorems in field theories comply in most cases with the second Noether theorem mentioned above.

It is interesting to mention that this geometry was formed by P. Finsler (in his PhD dissertation) during the same year and at the same university (1918, Göttingen) when and where E. Noether published her theorems. And yet, his geometry was acknowledged only much later. Moreover, it started to be widely applied in physics only in the 21st century. The idea was not far from physicists. Similar ideas appeared in field theories many decades ago. In general terms, most gauge fields follow Finsler geometry, although are not reflected in explicite form in earlier publications. Despite much evidence, most physicists did not refer to Finsler and did not consciously apply the geometrical tools developed by him. Only in the recent decade has Finsler geometry become part of tools used by physicists. This geometry became part of the description of *physical fields*, not only the spaces on which these fields are interpreted.

The more parameters appear on which a curvature and metric of a space depends, the less symmetric is that space. However, there appear new symmetries in the fields which are interpreted on these spaces. Finsler geometry is a well handleable tool to describe so called gauge invariances that play such an important role in modern (physical) field theories.

Since many philosophers and physicists are still not familiar with Finsler geometries this paper will make an attempt to give a short insight in the utility of those geometries in understanding the world, shaping our (philosophical) world view, and facilitating to add them in our everyday mathematical instruments.

Антипенко Леонид Григорьевич, *к.ф.н.,г.Москва, Институт философии РАН*

СУЩНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА В СВЕТЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ОНТОЛОГИИ ХАЙДЕГГЕРА

Тематика данного сообщения ближе всего подходит к теме «Математический платонизм vs. натурализм в философии математики», отнесённой к секции «Математика и реальность». Фундаментальная онтология Хайдеггера вносит в математический платонизм существенную поправку. Отныне высший мир платоновских идей или эйдосов приобретает статус существования под эгидой времени. Творческий характер времени позволяет по-новому взглянуть на творческие процессы в математике.

Итак, мы должны констатировать в первом приближении, что фундаментальная онтология Хайдеггера как таковая начинается с посягательства на существование сущностей идеального платоновского мира под знаком вечности − sub specie aeternitatis. Врывающееся в их среду время подвергает их фактору изменения так, что одни из них с течением времени скрываются или видоизменяются, другие же, напротив, из скрытого состояния переходят в состояние открытости, непотаённости (алетейя − по-гречески). Хайдеггер поэтому утверждает, что время есть истина Бытия (Sein или позже: Seyn). «Бытие как таковое, − пишет Хайдеггер, − соответственно открывает свою потаённость во времени. Таким образом, время указывает на непотаённость, т.е. истину бытия» [1; 33].

Но что такое Бытие, по Хайдеггеру, если характеризовать его несколько полнее? Это − тот уровень бытия, который открывается бытийному мышлению и характеризуется термином онтологическое. Онтологическое противостоит (противоположно) онтическому, т.е. тому, что относится к уровню сущего. Сущее, по Хайдеггеру, представляет собой аналог природного, физического, если угодно, но только с тем уточнением, которое делается исходя из установки на бытие человека − вот-бытие (Dasein). Дело в том, что сущее открывается в онтическом мышлении человека, так что, с одной стороны, мы имеем онтическое мышление и сущее, с другой − онтологическое мышление и Бытие. Онтическое мышление автор называет точным, онтологическое − строгим. Точное мышление, пишет он, только связывает себя обязанностью считаться с сущим и служит исключительно этому последнему. Далее им делается такое разъяснение: «Всякий расчёт сводит исчислимое к расчисленному, чтобы употребить его в последующих счетах. Расчёт не позволяет появиться ничему, кроме исчислимого. Каждая вещь есть лишь то, чем она считается. Всё сочтённое обеспечивает собою продолжение счёта. Последний употребляет в своём поступательном движении числа и сам есть продолжающееся самоистребление. Возникновение расчётов с сущим расценивается как прояснение его бытия. Расчёт заранее требует, чтобы сущее было исчислимым, и потребляет сочтённое для вычисления. Это потребляющее употребление сущего выдаёт истребляющую природу расчёта» [1; 39].

Казалось бы, в этих понятиях исчислимого, расчисленного, расчёта и т.п. и заложены начала, или начатки, математики. Но это, конечно, ошибочное впечатление, которое может создаться, к примеру, у тех, кто, прочитав «Маленькую книжку о большой памяти», отождествил способность демонстранта почти мгновенно перемножать пятизначные числа со способностью к математическому творчеству [2]. Тут стоит вдуматься в смысл выражения «истребляющая природа расчёта». В общем контексте фундаментальной онтологии Хайдеггера истребляющая природа расчёта предстаёт как техническое мышление, направленное на техническое производство. На этот счёт даются подробные разъяснения в статье «Вопрос о технике». В ней не идёт речь о примелькавшемся представлении о технике, согласно которому она есть инструментальное средство в человеческой деятельности. Вопрос ставится о существе, или сущности, техники, выступающей из потаённости. Такое выведение (сущности) техники из потаённости даёт представление о добывающем производстве. А это − не что иное, как добыча энергии, таящейся в природе. Энергия извлекается, перерабатывается, накапливается, и всё происходит в рамках установки на дальнейшее поставляющее (добывающее) производство. Извлечение, переработка, накопление, распределение, преобразование, пишет Хайдеггер, суть виды выведения из потаённости. «Это выведение, однако, не просто идёт своим ходом. <…>. Техническое раскрытие потаённого раскрывает перед самим собой свои собственные сложно переплетённые процессы тем, что управляет ими. Управление со своей стороны стремится всесторонне обеспечить само себя. Управление и обеспечение делаются даже главными чертами произ-водящего раскрытия» [1; 227].

Это безмерное накопление и потребление энергии, ведёт, по Хайдеггеру, к экологической катастрофе. Вот откуда появляется понятие о самоистребляющей природе расчёта. На таком концептуальном фоне математическое творчество предстаёт как выход за пределы наращиваемого употребления сущего. Выход за пределы обозначается, на языке Хайдеггера, как трансцендирование. То есть имеется в виду, что Бытие трансцендентно по отношению к сущему [1; 409−410]. С другой стороны, Бытие есть источник языка, источник человеческой речи. Эту мысль автор выражает в терминах «сказ Бытия». «Мысль, пробивающаяся в этом направлении, − пишет он, − не нападает на логику, но тратит себя на достаточное определение логоса, т.е. того сказа, в котором даётся слово бытию как единственно достойному осмысления» [1; 380]. В языке, в слове, исходящем из Бытия, содержится и язык математики. Математическое творчество, стало быть, представляет собою тот же логос, но только логос, сказываемый через Daseyn. В «Пармениде» Хайдеггер отмечает, что сказ, или сказание (die Sage), как раскрывающее слово, содержит в себе изначальную отнесённость Бытия к человеку. Поэтому дарованная способность «иметь слово» является сущностной отличительной особенностью человечества, которое исторически сложилось как эллинство [3; 171]. Дарованная способность «иметь слово», проявившаяся в эллинстве, положила начало математическому творчеству в той форме, которая известна как платонизм.

Платонизм, заполненный временем, придаёт хайдеггеровскому Бытию именно то, что Хайдеггер называет строгостью. Возврат времени, перекличку прошлого с будущим, дающую настоящее, мы видим на примере взаимосвязи, точнее будет сказать, интерференции двух гештальтов времени, расположенных соответственно в начале и в конце зодиакальной эпохи Рыб и означенных созданием евклидовой и не-евклидовой геометрии, авторство которой принадлежит нашему соотечественнику Н.И. Лобачевскому. Настоящее, согласно Хайдеггеру, возникает из переклички истока и цели, т.е. из переклички прошлого и будущего [1; 279]. В аспекте математического творчества мы можем строго судить о том, когда и в каком виде к нам возвращается прошлое.

Литература

1. Хайдеггер, Мартин. Время и бытие. М.: «Республика», 1993.
2. Лурия А. Маленькая книжка о большой памяти. М., 1979.
3. Хайдеггер, Мартин. Парменид. СПб.: «Владимир Даль», 2009.

Арепьев Евгений Иванович, *д. филос. н., профессор, Курский государственный университет*

ОПРАВДАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО РЕАЛИЗМА

Значительная роль в становлении взглядов на природу математики играет интуиция, то есть неявное знание о действительности, формулировка которого может предложить нам аргументы в пользу той или иной версии. Почему нам представляется наиболее приемлемой определенная сущностная трактовка математики? Не останавливаясь на конкретных деталях построения интерпретации, рассмотрим аргументы математического реализма.

Говоря о критериях истинности, определяя их роль для различных областей знания, мы отчасти раскрываем онтологическую основу этих областей. В качестве основных можно принять эмпирические, рационалистические критерии и критерий практики. Соответствуют ли истины математики действительности? И, если да, то какой действительности? Для прояснения этого вопроса рассмотрим связь математических истин с основными группами критериев истинности.

Как математическое знание связано с эмпирией? Известно, что идея признания математических истин эмпирическим знанием, с определенными оговорками и в разных интерпретациях, находит своих последователей. Но можем ли мы признать истины математики эмпирическими обобщениями, если не удается обнаружить примеры их опровержения опытным путем? Возможно ли представить, что ученый, столкнувшись с противоречием математических расчетов и экспериментальных данных просто признает, например, что иногда два плюс два равно пяти?

С другой стороны, мы не можем согласиться и с теми, кто утверждает, что истины математики никак не связаны с опытом, не подтверждаются и не опровергаются им, так как не имеют отношения к действительности, выступая лишь способом нашего познания. Это попросту не так! Во-первых, математика нередко открывает нам абстрактные модели таких областей реальности, материального мира, которые удается описать естественнонаучным путем лишь спустя значительное время. Во-вторых, эмпирические критерии истинности опосредованно подтверждают законы и положения математики через их безотказно эффективное использование в естественнонаучном постижении мира.

Еще более очевидным свидетельством выступает критерий практики. Если понимать под практикой целенаправленное, планируемое и прогнозируемое преобразование действительности человеком, то современное материальное производство, например, просто громогласно провозглашает истинность математических утверждений! Опираясь на математические понятия и законы мы преобразуем мир, и успешность такого преобразования, получение ожидаемых результатов подтверждает соответствие наших знаний действительности. Однако, если эмпирические знания, принципы и закономерности естественных наук могут уточняться практикой, то истины математики – только подтверждаются ей, и это, опять же, говорит нам об их неэмпиричности.

Наконец, когда мы говорим о рационалистических критериях, о логичности, последовательности, непротиворечивости, аргументированности системы знаний, о ее упорядоченности, то здесь, очевидно, необходимо признать, что математика не только имеет приоритетную ориентацию на эти критерии, но и выступает эталоном рационального знания, служит источником и индикатором критериев научной рациональности.

Эти критерии, понятно, говорят нам об истинности математических утверждений, их объективном статусе, то есть принадлежности бытию!

Влиятельность течения реализма признают многие авторы. В.В. Целищев указывает, что платонизм выступает онтологией работающих математиков [1], и нельзя не согласиться, что такой философский фундамент позволяет им действовать весьма успешно. М. Даммет отмечает особенность эволюции взглядов многих мыслителей, состоящую в конечном принятии «усложненного» реализма [2]. О реализме, как одной из «базисных интуиций» говорит Х. Патнем [3]. Вместе с тем, рассуждения об этих аргументах, как правило, заканчиваются системой контраргументов, задача которых оправдать неприятие реализма.

Аргументами из истории науки можно считать то, что кажущаяся нелепость попыток исследовать некий идеальный мир математических сущностей вполне сопоставима с пессимизмом по поводу познания различных компонент материального мира. Например, изучение микромира, изучение физических полей длительное время не представлялось возможным, хотя эти исследования были задолго предвосхищены философскими умозрительными конструктами (атомы, флюиды и пр.). История науки предлагает также разнообразные примеры математического предвосхищения. Признанию кривизны, варьирования параметров физического пространства-времени предшествовали математические результаты Н.И. Лобачевского и др. Примером также служит разработка теории многомерных пространств (Калуца, Клейн и др.), которая около полувека считалась математическим упражнением, лишенным физического смысла. О наличии многочисленных предвосхищений говорит Е. Вигнер в своей знаменитой статье «Непостижимая эффективность математики в естественных науках» [4].

Ученые неоднократно решались на разработку новых, неизведанных областей, об элементах которых было мало известно: трансцендентные и трансфинитные числа, сила тяжести, электричество и магнетизм, молекула, атом и пр. Такие исследования, как мы знаем, оказывались весьма продуктивными и сейчас, видимо, перед философией науки оформляется задача разработки программы математического реализма, с тем, чтобы впоследствии часть ее проблем и результатов перешла в ведение конкретных наук.

Значимым фактором, мешающим признанию, а значит и развитию реализма является проблематичность построения, отсутствие приемлемых онтологических моделей. Центральным по-прежнему остается вопрос: как существуют объекты и истины математики, где находится эта часть действительности? На этот вопрос, видимо, нельзя ответить, если понимать под действительностью лишь материальный мир, если противопоставлять действительность и возможность. Для его решения, на наш взгляд, необходимо понять в буквальном смысле словосочетание «существует возможность», или лучше –

«возможность существует!». Возможность – это часть действительности! Истины и объекты математики – это абстрактные выражения универсальных законов воплотившихся возможностей и всего возможного вообще.

Литература

1. Целищев В.В. Философия математики. Ч. 1. Новосибирск: Наука, 2002. С. 31–37

2. Dummett M. The interpretation of Frege's philosophy. – Duckworth. – First published in 1981 by Gerald Duckworth□ Company Limited The Old Piano Factory 43 Gloucester Crescent, London N.W.I – Printed in Great Britain by Ebenezer Baylis and Son Ltd. The Trinity Press, Worcester, and London. P. 472

3. Макеева Л.Б. Философия Х. Патнэма. URL: http://ihtik.lib.ru/lib_ru_philosbook_22dec2006.html) С. 66–68

4. Е. Вигнер Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Этюды о симметрии. Перевод с англ. Ю.А. Данилова, под ред. Я.А. Смородинского. М., «Мир», 1971. URL: http://ega-math.narod.ru/Reid/Wigner.htm

Барабашев Алексей Георгиевич, *д.ф.н., профессор, Москва, НИУ Высшая Школа Экономики*

НОВЫЕ ГОРИЗОНТЫ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ: АЛЬТЕРНАТИВНАЯ МАТЕМАТИЗАЦИЯ

Эффективность применения математики, о которой писал Н. Бурбаки в 1948 году в статье «Архитектура математики» [1], и позднее Ю. Вигнер в 1960 году [2], исторически связана с успехами применения теоретико-математических конструктов в классическом естествознании, и в первую очередь в физике и механике. Более того, в ряде естественнонаучных дисциплин математика превратилась из модельного инструмента (т.е., поставщика математических моделей, которые подходят для описания изучаемых явлений) в единственно возможный язык, без которого собственно описание явлений невозможно [3]. Тем самым, обозначилась тенденция взаимодействия математики и естествознания: от квантификации к моделям, и далее к математике как языку исследования [4].

Такое понимание взаимодействия математики и других областей познания «ранжирует» науки в соответствии с уровнем применения ими математики. Теоретическая физика, например, оказывается более «продвинутой» в указанном смысле, нежели математическая экология, а математическая экология выше по применению математики, чем макроэкономика, и т.д. Это понимание задает некий общепринятый шаблон того, как должно строиться «правильное взаимодействие» математики и других областей, в каком направлении должны развиваться науки. Более того, если некоторая область познания и практики в своем взаимодействии с математикой не укладывается в общую схему «от квантификации к языку», то данная область начинает рассматриваться как подозрительная, как принципиально ненаучная. Следует полагать, что наиболее ярко эта мысль была первоначально выражена Кантом, который полагал, что прикладная математика также априорна [5].

Наличие значительного объема таких областей познания и практики, которые в настоящее время не укладываются в стандартные представления о том, как должно строиться их взаимодействие с математикой, порождает несколько вопросов. Есть ли основания считать, что эти области в будущем войдут в «нормальное» русло развития, начнут взаимодействовать с математикой в соответствии с общей схемой «от квантификации к языку», или нет? Если нет, то целесообразно ли эти области полагать принципиально ненаучными, или же, опираясь на их опыт взаимодействия с математикой, можно выработать иное, альтернативное естественнонаучной традиции, понимание математизации и шире, самой математики? Наконец, может быть, математика сама «не дозрела», т.е. ее аппарат плохо приспособлен, к описанию тех явлений и процессов, которые изучаются в «плохо математизируемых» областях науки и практики [6]?

Постараемся определить, какие области познания и практики с трудом укладываются в стандартную естественнонаучную схему математизации. На причисление к данным областям претендуют в первую очередь гуманитарные, и помимо того, частично социальные дисциплины (намеренно не употребляем слово «науки»), а также соответствующие им практики. Исследуемые в них феномены – сюжеты, эмоции, образы, межсубъектные взаимодействия, социальные нормы, управленческие действия, и т.д. Нельзя сказать, что математика здесь не применяется вовсе: тут есть и модели, и квантификация, и даже элементы языка математики. Однако, контекст применения математики здесь иной, нежели чем в естествознании, и ценность математики тут заключается скорее в ее формирующем воздействии на системность мышления исследователя и на поведение практика (анализ ситуаций и последующие действия), нежели чем в точности формулировок и адекватности результатов квантификации [7].

Отметим, что в указанных областях более активно применяются те разделы математики, которые менее связаны со стандартной естественнонаучной схемой математизации. Здесь более важны такие разделы математики, как математическая статистика, прикладная теория вероятностей, различные статистические пакеты (софт), теория графов как основа построения системных альтернатив, и т.д., то есть то, что так или иначе связано с вариативностью мышления и поведения субъекта, с оценкой межсубъектного взаимодействия [8]. Можно сказать, что указанные области познания и практики как бы подталкивают математику в направлении неклассического ее развития, к выходу за рамки такого «ядра», которое традиционно находится в центре внимания математической общественности (хороший критерий: именно в рамках данного «ядра», как правило, присуждаются премии Филдса [9]). Исходя из этой тенденции, математика в настоящее время начинает разделяться не просто на теоретическую и прикладную, как обычно принято считать, а на два потока: традиционную теоретическую и прикладную, и новую теоретическую и прикладную. Дисбаланс этих двух потоков очевиден: один представлен аксиоматически построенными теориями, коренится в развитом естествознании, привел к значительнейшим достижениям в создании технических устройств, изменивших нашу жизнь. Второй поток не укладывается в классическую аксиоматику «бурбакистского толка», связанные с его математическими конструктами исследования и практики возникли недавно и могут быть сравнены с первыми шагами естествознания Нового времени, плоды этих исследований и практик только начинают менять нашу жизнь.

В докладе автор предполагает остановиться подробно на примере, относящемся к области теории и практики современного государственного управления, с целью пояснения общей конструкции альтернативной математизации, сформулированной выше [10].

Литература:

[1] Бурбаки Н. Архитектура математики. – В книге «Очерки по истории математики». М., ИЛ, 1963.

[2] Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках. – В книге «Вигнер Е. «Этюды о симметрии». М., Наука. 1971.

[3] Алексеев И.С. Методологические замечания о происхождении и функционировании онтологических знаний в системе теории. – В книге Алексеев И.С. «Деятельностная концепция познания и реальности. Избранные труды по методологии и истории физики». М., RUSSO, 1995.

[4] Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев, Наукова думка. 1976.

[5] Кант И. Критика чистого разума. – Кант И. Сочинения. М., 1964, том 3;

Tait W. Reflections on the concept of a priori and its corruption by Kant. – In the book “Proof and Knowledge in mathematics”. Ed. by M. Detlefsen. N.Y., 1992.

[6] Барабашев А.Г. О прогнозировании развития математики посредством анализа формальных структур познавательных установок. – В книге «Стили в математике: социокультурная философия математики» под ред. А.Г. Барабашева. М., СПб, РХГИ, 1999;

М. Клайн. Математика. Утрата определенности. М., Мир, 1984.

[7] Налимов В.В. Непрерывность против дискретности в языке и мышлении. Тбилиси, Изд-во Тбилисского ун-та, 1978.

[8] Макаров А.А. Использование программ обработки данных в преподавании курсов теории вероятностей, прикладной статистики и информатики. – М.: Изд-во МГУ, 2008.

[9] Монастырский М.И. Лауреаты премий Филдса. – Историко-математические исследования. Выпуск XXXI. М., 1989.

[10] Барабашев А.Г. Об оценках эффективности государственного управления – в печати.

Бычков Сергей Николаевич, *д.филос.н., доцент, ГАОУ ВПО «Московский институт открытого образования»*

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИКИ КАК ФИЛОСОФСКАЯ ПРОБЛЕМА

Первым прикладное значение чистой математики как философскую проблему осознал Декарт. Подобная проблематичность естественно связана с проводимым им противопоставлением субстанции мышления и субстанции протяженности. Согласование мыслимого мира и реального мира, кривой, задаваемой в мире математических объектов посредством алгебраических символов, и геометрического контура той же кривой в реальном пространстве объявляется в картезианстве заслугой Бога, опосредующего субстанции, не имеющие ни одного общего предиката.

В отличие от Декарта для Лейбница не существовало проблемы применимости математики − благодаря принципу «предустановленной гармонии». Кант «отбрасывает догматическую трактовку “предустановленной гармонии” и ставит вопрос об условиях возможности согласованности априорных понятий и эмпирических фактов. Ответ на этот вопрос гласит, что и эмпирический предмет, будучи предметом, не просто дан, но включает в себя момент математической конструкции. Эмпирическая предметность реализуется только на основании эмпирического порядка, а он возможен лишь благодаря чистому чувственному созерцанию пространства и времени» [1, с. 289].

Кант, как известно, считал, что «мы не можем мыслить ни одного предмета иначе как с помощью категорий…» [2, с. 214]. Категории он определяет как «понятия, a priori предписывающие законы явлениям, стало быть, природе как совокупности всех явлений…» [Там же. С. 212]. Поскольку, по мнению Канта, «категории не выводятся из природы и не сообразуются с ней как с образцом», то «возникает вопрос, как понять то обстоятельство, что природа должна сообразоваться с категориями, т. е. каким образом категории могут a priori определять связь многообразного в природе, не выводя эту связь из природы» [Там же]. Так как он полагал, что «явления суть лишь представления о вещах, относительно которых остается неизвестным, какими они могут быть сами по себе» [Там же. С. 213], то ответ на поставленный вопрос фактически сводится к тому, что указанное выше обстоятельство «не более странно, чем то, что сами явления должны a priori сообразоваться с формой чувственного созерцания» [Там же]. Последнее же обусловлено психофизиологическим строением человеческого организма.

Кантовский подход хорошо объяснял факт применимости математики для физики Ньютона, однако в случае с теорией электромагнетизма Максвелла он дал сбой: и по сей день не существует удовлетворительной категориальной интерпретации максвелловой теории.

Кассиреру принадлежит заслуга осознания «конфликтности» категориального мышления и символического способа познания. И разрешиться данный конфликт может лишь на пути категориальной интерпретации физических теорий: лейбницевский принцип предустановленной гармонии сегодня не может быть принят хотя бы потому, что представления современной науки о структуре физического пространства на малых расстояниях несовместимы с используемой в аппарате математического анализа бесконечной делимостью его «идеального прообраза».

Способ достижения этой цели в случае электромагнитной теории, вероятно, один: повторить путь Максвелла от опытов

Фарадея до получения окончательных уравнений, осознанно опираясь на «категориальный императив» Канта.

Литература

1. Кассирер Э. Философия символических форм. Т. 3. Феноменология познания. М.–СПб, 2002.
2. Кант И. Соч. Т. 3. М., 1964.

Васильев Олег Станиславович, *к.ф.н., с.н.с., НИИ Спорта РГУФКСМиТ*

ОТ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ХИРУРГИИ К ХИРУРГИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ И ОБРАТНО. В ПОИСКАХ МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЙ КОММУНИКАЦИИ МЕЖДУ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И КЛИНИЧЕСКОЙ ХИРУРГИЕЙ.

Современная математика позволила осуществить значительный прорыв в области медицинской техники, особенно в области анализа и распознавания образов (компьютерная спиральная, 3D-томография, МРТ, УЗИ-томография и т.п.). Математика значительно обогатила диагностику, и вместе с тем породила целый пласт парамедицинской информации (множество «срезов», проекций, режимов томографии) которая создаёт всё возрастающие проблемы при её дальнейшей клинической интерпретации. Можно сказать, что назрела <u>проблема фильтрации огромного массива быстро увеличивающейся парамедицинской информации.</u>

Какая же информация нужна практикующему врачу? - не всё возрастающая детализация, МРТ, УЗИ и т.п. сигналов, а наоборот, <u>наиболее общие ответы о состоянии тканей</u>. Врача интересуют есть или нет патологические изменения в тканях - именно в таких категориях происходит клиническое мышление. Но такие общие вопросы о состоянии биологической ткани по сути дела являются топологическими характеристиками биологической структуры. На более высоком уровне клинического анализа врача интересуют топологическом характеристики не только биологической структуры, но и биологической функции.

К сожалению, на такой, топологический вид анализа информации современное математическое обеспечение не ориентировано. Поэтому, необходимые топологические реконструкции приходится делать врачу мысленно, на основании субъективных представлений и клинического опыта! Даже трёхмерные реконстуктивные изображения биологических структур однозначно не отвечают на основные врачебные вопросы о наличии патологических изменений в тканях. А это уже топологические характеристики тканей (вопросы связности, вложения и погружения), анализ которых под силу современной математике.

Наиболее близко к топологическому мировоззрению подошла клиническая хирургия, основными оперативными приемами которой являются «разрез» и «сшивание» тканей. Все оперативные приемы производятся в хирургии потканно (ткани последовательно разъединяются и последовательно сшиваются). Хирургия, проводя оперативные вмешательства на биологических структурах, стремится осуществлять это с минимальными топологическими изменениями (за исключением тех, которые являются целью данного вмешательства - например, наложение кишечных анастомозов). Можно сказать, что основным теоретическим вопросом клинической хирургии является поиск наиболее оптимальных и биологически адекватных способов оперативного вмешательства в тканевую структуру организма (и его функцию). Соответственно, становится актуальным анализ таких вмешательств.

Удивительно, но способы такого анализа независимо от неявных потребностей клинической хирургии, начали появляться в ... математической хирургии, являющейся важнейшей конструкцией дифференциальной топологии.

Математическую хирургию обычно понимают в двух смыслах:

в узком смысле как перестройку Морса; преобразование гладких многообразий, которому подвергается многообразие уровня гладкой функции при переходе через невырожденную критическую точку. В этом смысле проводимые разрезы и склейки далеко не произвольны, а подчиняются ряду достаточно жёстких условий.

в широком смысле как произвольные разрезы и склейки топологических многообразий, причём не каждый разрез предполагает последующую склейку. То есть свобода проведения разрезов и склеек значительно повышается.

Обычно цели проведения такой хирургии в топологии две:

упрощение сложности исходного многообразия,

упрощение динамической модели, определённой на многообразии (в этом случае подвергшееся хирургии многообразие может значительно усложнится).

Следует заметить, что такая топологическая хирургия, в виде разрезов и склеек может быть чрезвычайно сложной. Вопросы упрощения математической хирургии в смысле упрощения проводимых разрезов и склеек в математике как правило не ставятся. Эти вопросы становятся актуальными для клинической хирургии.

Какие же проблемы могут быть поставлены в первую очередь на стыке клинической и математической хирургии? На наш взгляд - это вопрос создания *топологический классификации* видов хирургической патологии и оперативных вмешательств, проводимых для её лечения. Заметим, что на одну хирургическую патологию обычно может быть предложено несколько видов оперативных вмешательств (не считая разного рода их модификаций).

Такая топологическая классификация помогла бы упорядочить огромное количество типов, вариантов и модификаций оперативных вмешательств, а также, позволила бы переносить наработки (средства и методы) из разных областей клинической хирургии друг в друга.

Возможно, медицина является искусством, на вершине которой стоит хирургия, и попытки обогатить её математическими концепциями не более, чем наивны (методологически несостоятельны) ... однако, ...последние достижения в области высшей математики дают надежду на осуществление методологического диалога топологии с медициной. Тем более, что понимание математики значительно изменилось в последние десятилетия. Изменилась и сама математика, её язык, инструментарий и сфера рассматриваемых её приложений.

Мы уверены, что два вида искусства - математика и медицина, в виде их наиболее прогрессивных направлений математической и клинической хирургии смогут найти методологическую базу для проведения взаимообогощающего дискурса.

Вечтомов Евгений Михайлович, *д.ф.-м.н., профессор, Киров, Вятский государственный гуманитарный университет*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕАЛЬНОСТЬ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТЬ

Что вкладывается в понятие «реальность»? Что есть математика? Как математика соотносится с объективной реальностью? Это основополагающие вопросы эпистемологии и философии науки. В гносеологическом плане вся реальность подразделяется на объективную реальность (действительность, материя) и субъективную реальность (идеальный мир, сознание). Адекватное познание реальности человеком предполагает реалистичность, означающую материализм на практике и идеализм в мышлении. Эти принципы вполне совместимы: они дополняют друг друга и сочетаются в деятельности человека, являющейся критерием истины. Метафизической связкой между материальной и идеальной сторонами реальности служит предполагаемое Единство Мира – без этого философского постулата невозможна никакая осмысленная гносеология.

Наука – важнейшая форма и мощный метод адекватного познания мира. Наряду с научным познанием существуют и другие формы познания: обыденное, художественное, религиозное, философское. Научное знание наиболее объективно, оно общезначимо и интерсубъективно. Под наукой мы понимаем, прежде всего, науку классическую. Классическая наука исповедует рационализм, исходит из принципиальной познаваемости мира, признаёт существование объективных законов и истин. Неклассическая наука, раздвигая границы потенциального знания и дополняя классическое научное знание, сама нуждается в классическом толковании и обосновании. Внелогическое, внепонятийное и неявное знание не являются строго научными.

Научное знание есть точное, логически выстроенное, структурированное и формализованное знание. В. А. Лекторский во всем многообразии научного знания выделяет четыре системы знания: 1) математику, 2) естествознание, 3) науки о человеке и обществе, 4) историю. В этом ряду последовательно уменьшается объективность знания. Математика признаётся особым, первостепенным видом научного знания.

Любая наука предполагает наличие объекта и предмета, понятийный аппарат, специальные методы исследования, методологию. Научное обоснование опирается на принципы верификации (проверяемость.) и фальсифицируемости (возможность опровержения). Естествознание, точные науки удовлетворяют этим принципам. В математике верификация – означает доказательство, фальсифицируемость – построяемость контрпримеров. Наблюдение, эксперимент, моделирование, вычисления, выдвижение гипотез и дедукция – вот общепризнанный научный инструментарий.

Мы – реалисты. Сначала нужно признаться себе, что мы видим именно то, что видим. Общезначимое, инвариантное видение – это объективная реальность, являющаяся естественной предпосылкой всякого человеческого знания. Ощущения, вызванные непосредственным обозрением объекта, дают лишь первичную достоверную информацию о наблюдаемой вещи. Полное адекватное знание о вещи требует всестороннего наблюдения и анализа.

Теоретическому знанию, или знанию по описанию по терминологии Рассела, предшествует эмпирическое знание, знание-знакомство. Эмпирическое познание начинается с фиксации и признания устойчивых атомарных фактов, базируясь на носящих априорных характер восприятиях пространства, времени, элементарных причинно-следственных связей. Предметное теоретическое познание изначально опирается на аподиктические очевидности, основывается на человеческом разуме, соединяющем рациональную логику и интеллектуальную интуицию. Теоретическое познание имеет дело с моделями, а не с непосредственной реальностью. Границы научного познания неразрывно связаны с выразительными возможностями языка науки. Изучение всякого предметного языка происходит на другом языке – метаязыке, внешнем по отношению к предметному языку. А языком классической науки издавна и справедливо считается математика.

Далее следует методологический уровень научного познания – метафизика. Она играет первостепенную роль в выстраивании современных теорий естествознания. В. Д. Захаров показывает, что метафизические принципы физики составляют подлинную философию природы. В. Я. Перминовым осуществлено всестороннее обоснование математики на основе фундаменталистских принципов апиоризма и праксеологии и дана убедительная критика социокультурной философии науки.

Объектом познания любой науки выступает та или иная грань объективной реальности, которую наука интерпретирует, переводит в идеальную реальность. Эта теоретическая реальность, являясь моделью определённой действительности, и служит предметом изучения данной науки.

О природе математики. Объектом математики является бытие фундаментальных категорий формы и количества, данных нам в самых разных проявлениях и рассматриваемых в наиболее общем и чистом виде. Предмет математики есть вся математическая реальность, начиная с интуитивных прообразов и предпонятий фигуры и числа и заканчивая абстрактными структурами и моделями. В. В. Мадер характеризует математическую реальность как квазиэмпирическую.

Содержание современной математики сопряжено с понятиями математической структуры, определяемой как множество с заданным на нём набором отношений, и преобразования (функция, гомоморфизм) однотипных математических структур. Дедукция, доказательство – это общий метод математики как науки. Классическая математика зиждется на теории множеств и двузначной логике. Конструктивная математика – составная часть классической математики. Нестандартные логики базируются на классической логике. Основой приложений математики выступает математическое моделирование реальности, то есть конкретное и эффективное воплощение гипотетико-дедуктивного способа познания.

При известной относительности всякого знания, знание математическое самое точное, надёжное и достоверное. Ограничительные метаматематические результаты вполне естественны. Рациональными числами всё не охватить и не измерить. Циркулем и линейкой мы можем выполнить принципиально больше построений, нежели одной линейкой. На языке предикатов первого порядка нельзя адекватно выразить арифметику и доказать её непротиворечивость (теоремы Гёделя). Диалектика допускает идеи троичности, многополярности, дополнительности и относительности, принципы кибернетики и синергетики. Возможен и бывает полезным плюрализм мнений. Но Истина не допускает свободы плюрализма, о чём свидетельствует грандиозная история развития математики и эффективность её применений.

В философии математики мы придерживаемся фундаменталистского подхода, стержень которого составляет умеренный математический платонизм. Так, Н. Н. Непейвода определяет своё математическое мировоззрение как умеренный скептический платонизм. Платонизм признаётся подавляющим большинством действующих математиков и преподавателей математики. Фундаментализм выступает и как классицизм. Человек обитает в физическом мире, геометрически являющемся трёхмерным евклидовым пространством. Жизнь протекает во времени, представляющем собой направленный в будущее луч. Формальной основой человеческого мышления служит обычная двузначная аристотелевская логика, созвучная абсолютной истине. Математика включает в себя логику, но даёт истину условную (это ещё один весомый аргумент её впечатляющей применимости к реальности).

Сформулируем следующие методологические положения:

Математика познаёт структуру реальности, выражаемую в фундаментальных философских категориях формы, количества, меры.

Для этого математика созидает свою идеальную реальность – математические структуры.

Математика создаёт символический язык, адекватный её универсальной природе. Математика сама становится языком науки.

Математическое знание фундировано. Невозможность всё строго обосновать привела древних греков к выделению геометрических постулатов и общелогических аксиом – самоочевидных истин о наблюдаемом физическом пространстве и истин элементарной логики. Невозможность всё определить ведёт к необходимости введения первичных терминов.

Математическая реальность имеет вполне определённый надёжный онтологический статус. Математики открывают новое знание, а не изобретают его. Нет французской математики, но есть математика во Франции.

В процессе познания математическая форма (формулы) конкретной предметной теории сохраняется; содержание и интерпретация предметной теории могут существенно меняться, а прояснение её сущности – вопрос сугубо метафизический, философский. Скорее физика есть часть геометрии, нежели наоборот.

Математика является автономной, самостоятельной, универсальной и продуктивной формой научного познания Мироздания.

Визгин Владимир Павлович, *доктор физ.-мат. наук,*
Москва, ИИЕТ им.С.И.Вавилова РАН

«ПРЕДУСТАНОВЛЕННАЯ ГАРМОНИЯ МЕЖДУ ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКОЙ И ФИЗИКОЙ» (К 150-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Г.МИНКОВСКОГО И 100-ЛЕТИЮ ТЕНЗОРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ ГРАВИТАЦИИ).

1. Это выражение – ранний, геттингенский вариант формулировки феномена «непостижимой эффективности математики в естественных науках» Ю.Вигнера. Впервые оно было

использовано Г.Минковским в 1908 г., вскоре после того, как он обнаружил четырёхмерную теоретико-инвариантную структуру специальной теории относительности (СТО) [1. С.203]. Впрочем, о этом открытии он впервые сообщил в своём докладе в Геттингене годом раньше, также отметив поразительную связь математики и физики [2. S.927].

Связывая концепцию Минковского со своей Эрлангенской программой, другой великий геттингенец Ф.Клейн говорил о «совпадении двух, совершенно обособленных по своему историческому происхождению, рядов мыслей», т.е. по существу о той же гармонии [3. С.145]. Об этой предустановленной гармонии впоследствии красочно говорили патриарх Геттингена Д.Гильберт (1930) [4. С.460] и его ученик Г.Вейль [5. С.29]. Оба имели в виду случай общей теории относительности (ОТО) и квантовой механики, понимаемых как соответственно четырёхмерная псевдориманова геометрия и теория линейных самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. При этом, Гильберт отмечал, что само выражение «предустановленная гармония» заимствовано у Г.В.Лейбница.

2. Предустановленная гармония в случае ОТО в полной мере проявилась в 1913 г., когда А.Эйнштейн (при участии М.Гроссмана) разработал тензорно-геометрическую концепцию гравитации (ТГКГ), которая легла в основу ОТО, завершённой спустя два с половиной года [6,7].

На пути к ней, который начался также в 1907 г., когда Эйнштейн выдвинул свой принцип эквивалентности, важнейшим шагом было принятие им четырёхмерной формулировки СТО Минковского, что в конечном счёте и привело к полной гармонии между гравитацией и римановой геометрией, основы которой были созданы Б.Риманом (1854) и развиты Э.Бельтрами, Р.Липшицем, Э.Б.Кристоффелем, Г.Риччи и Т.Леви-Чивитой во второй половине XIX в. [8,9]. Подчеркнём, что и четырёхмерная псевдоевклидова геометрия СТО, и геометризация гравитации в ОТО, являются не столько математическими аппаратами этих теорий, сколько подлинными теоретико-физическими сущностями их.

3. Существование предустановленной гармонии, о которой говорили Минковский и другие геттингенцы, или «непостижимой

эффективности математики в естественных науках», о которой позже говорили Ю.Вигнер и другие, конечно, не означает, что соответствующие физической реальности математические структуры надо просто найти и взять. Путь к ним, как правило, во многом определяется рядом физических и методологических предпосылок. В случае ТГКГ и ОТО были важны и принцип эквивалентности, и скалярные проекты теорий гравитации, и релятивистские идеи Э.Маха и методологические принципы физики (симметрии, сохранения, соответствия, причинности, простоты, наблюдаемости и др.). Но уверенность теоретиков в существовании «предустановленной гармонии между физической природой и математическим образом мышления» (выражение Г.Вейля [5. С.29]) или даже вера в неё была и остаётся одним из важнейших факторов построения фундаментальных физических теорий. «Для тех, кто ценит исключительную силу математики, - говорится в одной из недавних книг по теории струн, - она не просто язык, а бесспорный путь к истине, краеугольный камень, на котором покоится вся система естественных наук» [10. С.7].

4. Выявление адекватной физической реальности (или теоретико-физическим конструкциям) математических структур важно не только для дальнейшего развития и понимания этих конструкций, но и для уяснения их логической непротиворечивости и позитивного восприятия научным сообществом. Об этом говорил ещё Минковский в конце своего кёльнского доклада, где впервые ввёл выражение предустановленной гармонии, которая может облегчить примирение с парадоксальными физическими выводами новой теории «и тех, которым неприятно и больно оставить привычные воззрения» [1. С.203].

Почему струнные теоретики упорно продолжают разрабатывать свои подход, несмотря на то, что они до сих пор весьма далеки от решения на его основе проблемы квантовой гравитации? Ответ заключается в том, что «теория струн является математически непротиворечивой теорией некоего мира» [1. С.306]. А это уже немало и может служить залогом правильности выбранного направления на пути к решению главной физической проблемы.

Литература

1. Минковский Г. Пространство и время // Принцип относительности. Сборник работ классиков релятивизма. Под ред. В.К.Фредерикса м Д.Д.Иваненко. М.-Л.: ОНТИ, 1935. С.181-203.

2. Minkowski H. Das Relativitätsprinzip // Annalen der Physik, 1915. Bd.47. S.927-938.

3. Клейн Ф. О геометрических основаниях лорентцевой группы // Новые идеи в математике. Сб. №5. Принцип относительности в математике. СПб.: Изд. «Образование», 1914. С.144-174.

4. Гильберт Д. Познание природы и логика (1930) // Д.Гильберт. Избранные труды. Т.1. М.: Факториал, 1998. С.457-465.

5. Вейль Г. Полвека математики. М.: Знание, 1969. - 48с.

6. Визгин В.П. Об открытии уравнений гравитационного поля Эйнштейном и Гильбертом (новые материалы) //Успехи физических наук, 2001, т. 171, №12. С.1347-1363.

7. Визгин В.П. Концептуальные истоки общей теории относительности (к 100-летию принципа эквивалентности А.Эйнштейна и четырёхмерного мира Г.Минковского) // Исследование по истории физики и механики. 2007. М.: Наука, 2008. С.253-281.

8. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т.2. М.- Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. – 240с.

9. Reich K. Die Entwicklung des Tensorkalküls: vom absoluten Differentialkalkül zur Relativitätstheorie. Basel etc.: Birkhäuser, 1994 - 331 S.

10. Яу Ш., Надис С. Теория струн и скрытие измерения Вселенной. СПб.: Питер, 2012. – 400с.

11. Сасскинд Л. Битва при чёрной дыре. Моё сражение со Стивеном Хокингом за мир, безопасный для квантовой механики. СПб. : Питер, 2013. – 448с.

Владленова Илиана Викторовна, *к.ф.н., доцент,*
Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ФИЛОСОФСКИХ ПРОБЛЕМ КОСМОЛОГИИ

Огромные величины, с которыми имеет дело космология, а также трудность в наглядности происходящих во Вселенной процессов, вынуждают прибегать к математическим представлениям иногда в ущерб физическому пониманию сути происходящих процессов. Возникает ряд методологических, философских проблем, обусловленных связями между физикой и математикой. Безусловно, математические знания являются важной составной частью теории познания, а математические дискурсы часто служат отправной точкой для исследований в области философии языка. Несмотря на наличие огромного числа различных направлений и философских идей, в основном философия математики центрируется вокруг следующего вопроса: математические понятия существуют независимо от сознания человека или нет? Или другими словами: каков онтологический статус математических объектов?

Сложность проблематики взаимоотношений математического и физического знания обусловлено дискуссионностью подходов к этой проблеме (мы лишь обозначили некоторые из них). Необходимо отметить, что современным физикам в той или иной мере все-таки присущ платонизм в целом или его элементы; а также вера в то, что математика является бесспорной, объективной «истиной в последней инстанции», позволяющая «читать книгу природы». Принятие физических и философских представлений теории относительности Эйнштейна, не в последнюю очередь, способствовало содействие математиков, которые формализовали ее. В частности, весьма успешным стало предложенное Минковским четырёхмерное псевдоевклидово пространство сигнатуры в качестве геометрической интерпретации пространства-времени специальной теории относительности: каждому событию соответствует точка пространства Минковского в лоренцевых (или галилеевых) координатах, три координаты которой представляют собой декартовы координаты трёхмерного евклидова пространства, а четвёртая – координату *ct*, где *c* – скорость света, *t* – время события. Таким образом, было удовлетворена вера в предустановленную гармонию между чистой математикой и физикой. В современной физике складывается такая ситуация, при которой построение теории начинается не с анализа экспериментальных фактов, а с формирования ее математического аппарата, а адекватная теоретическая схема, обеспечивающая его интерпретацию, создается уже после построения этого аппарата. «Таким образом, специфика современных исследований состоит не в том, что математический аппарат сначала вводится без интерпретации (неинтерпретированный аппарат есть исчисление, математический формализм, который принадлежит математике, но не является аппаратом физики). Специфика заключается в том, что математическая гипотеза чаще всего неявно формирует неадекватную интерпретацию создаваемого аппарата, а это значительно усложняет процедуру эмпирической проверки выдвинутой гипотезы. Сопоставление следствий из уравнений с опытом всегда предполагает интерпретацию величин, которые фигурируют в уравнениях. Поэтому опытом проверяются не уравнения сами по себе, а система: уравнения плюс интерпретация. И если последняя неадекватна, то опыт может выбраковывать вместе с интерпретацией весьма продуктивные математические структуры, соответствующие особенностям исследуемых объектов» [1].

Современное состояние теоретической физики избыточно математизировано, особенно научные исследования в области космологии, которые представляют собой решение различных математических уравнений или построение математических моделей. Построение космологических моделей в пространстве-времени, обладающем свойствами, более общими, чем свойства пространства Римана, оформилось как новое направление исследований, получившее название «нериманова космология» («постримановая космология») [2, с.8]. Диссертации, посвященные так называемым теориям объединения, в частности, теориям струн, теориям супергравитации, теориям суперсимметрии т.п. также «избыточно» математизированы: в них достоточно сложно определить степень соответствия математических моделей структуре физической реальности. Характерной особенностью современной физики является широкое распространение математического, в том числе, модельного подхода. Модели играют центральную роль во многих научных контекстах. Вопросы касательно природы математических моделей остаются открытыми: что является источником и гарантом математической истины? Какова взаимосвязь между абстрактным миром математики и материальной Вселенной? Существуют ли в математике какие-то глубокие метафизические связи с реальностью? Математическая модель – это «отражение» реальности, или ее искажение? Каким образом мы можем проверить ее точность?

Преимущества использования моделирования в современной науке очевидны, однако любая идеализация имеет определенные границы применимости, которые необходимо экспериментально уточнять в контексте исследуемой задачи. Это понимание дает необходимое ограничение в математических построениях. К сожалению, экспериментально не все можно проверить (в частности, экспериментальное подтверждение многих объединяющих теорий в физике (теория струн) находится за пределами эксперимента). В этой связи возникает вопрос о том, с какой степенью точности мы можем применять математические модели к реальным объектам Вселенной? Разумно предположить, что чем ближе к экспериментальному подтверждению, тем «идеальнее», истиннее математическая модель. Пределы такой идеальной математической модели бесконечны: мы можем до бесконечности усовершенствовать свои экспериментальные установки с целью получения все более идеальной модели.

Литература

1. Математизация теорий [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nauka-filosofia.info/p62aa1.html.

2. Бабурова О.В. Модели источников гравитационного поля и космологические модели в постримановых пространствах. – автореф. дисс. на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук / Бабурова О.В. – Спец. 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. – Ульяновск, 2006. – 40 с.

Григорян Александр Аркадьевич, *к.ф.н., доцент,*
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

О ПОСТИЖИМОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Под «представлением» мы в настоящей работе будем понимать некоторое смысловое содержание, заключающее в себе способ описания объектов (или действия с объектами) самой различной природы. Так, например, «содержание линейной алгебры состоит в проработке математического языка для выражения одной из самых общих естественнонаучных идей – идеи линейности» [1,с.5]. Представление о линейности (его можно охарактеризовать как принцип или способ описания процессов), заключающийся в возможности интерполяции процесса (функции, величины) в достаточно малой области его протекания его линейной составляющей, используется для решения самых различных математических проблем. Именно этот принцип лежит в основе многочисленных применений линейной алгебры в других науках. Под «структурированным представлением» мы понимаем выражение его на языке какой-либо научной дисциплины, что является необходимым этапом на пути решения стоящих в этой науке проблем с помощью использования нужного представления. «Структурированное представление», другими словами, - это система понятий, воплощающая в своей совокупности некоторый способ описания или действия. Так, представление об изменении структурируется в математике в системе таких понятий, как переменная, функция, окрестность точки, предел, производная и др., в то время как в механике то же представление структурируется в терминах материальной точки, скорости, ускорения и др. Ясно, что путем некоторой модификации элементов (понятий) структурированного представления и характера связи между ними, можно, оставаясь в рамках определенной научной дисциплины, получать новые структурированные представления (новые системы понятий, воплощающие способы описания объектов определенного типа). Таким путем, например, в математике, исходя из обычного представления о непрерывности, можно получить более «тонкие» структурированные представления о «слабой» и «сильной» (равномерной) непрерывности, оставаясь при этом в рамках уже существующей системы понятий дифференциального исчисления. Например, для описания траекторий движения и броуновских частиц применяется математический аппарат, имеющий дело с функциями, которые всюду непрерывны, но нигде не дифференцируемы. Эти весьма уродливые функции, пользуясь выражением Ш.Эрмита, на естественном языке можно охарактеризовать лишь как «чрезвычайно слабо проявляющие свойство непрерывности». Создание новых структурированных представлений может быть осуществлено также на пути синтеза двух или нескольких структур, или путем «вплавления» элементов (понятий) одного представления в структуру другого (дифференциально-алгебраические структуры в математике и т.п.). При этом, достаточно очевидно, что создание новых представлений описанным путем модификации элементов и связей между ними, существенно затрудняется, если исходные структурированные представления носят достаточно конкретный характер, привязаны к описанию объектов конкретной природы (физических, биологических и т.д.) и, наоборот, облегчается в той мере, насколько нам безразлична природа элементов, связанных исходной структурой. В самой природе математики заложена возможность чрезвычайно далекого отвлечения от природы тех объектов для, описания которых в математику вводится и структурируется некоторое исходное смысловое содержание, поскольку после решения проблемы, которой обязано своим появлением новое структурированное представление, исследованию подвергается оказавшаяся плодотворной структура сама по себе. Следовательно, деятельности по созданию новых структурированнных представлений (в ходе решения проблем) именно в математике и обеспечивается наибольший простор. С другой стороны, перенесение способов описания или действия из сферы математических понятий в виде вновь созданных в математике структурированных представлений в конкретные науки путем наполнения этих структур эмпирически верифицируемым содержанием, чрезвычайно затруднено как раз из-за высочайшей абстрактности математических структур, доведенных до предела чистой логически-непротиворечивой возможности.

Таким образом, то, что дает математическим построениям их предвосхищающую мощь (вспомним мистическое восхищение Герца уравнениями Максвелла, которое, по-видимому и знаменовало возникновение мифа о «непостижимости» эффективности математики), является одновременно источником трудностей по приживлению этих конструкций в процессе построения физических теорий. Заметим, что возможность использования новых математически-структурированных представлений вне математики не является чисто абстрактной возможностью, хотя бы потому, что ряд исходных математических структур воплощает в себе объективно-смысловое содержание способов описания или действия, применимые в самых различных науках (порядок, непрерывность, линейность, дискретность и т.п.). Более того, часто эти представления могут быть плодотворно использованы лишь после их математической структуризации. «В самом деле, - отмечает Н.Мулуд, - нельзя сказать, что представление о порядке существует всецело на уровне практического интуитивного испытания объектов до того, как оно перейдет на второй уровень, уровень выработки категорий и символов…, так как сознание порядка остается не полным, не законченным, пока в нем отсутствует его символическая составляющая» [2, с.224-225]. А что можно сказать по поводу эффективного применения в физике более сложных математически структурированных представлений, таких например, как теоретико-групповые (см. Е.Вигнер в статье о «непостижимой эффективности» [3])? В рамках развиваемого здесь подхода, можно утверждать, что вводя новые понятия процессе исследования проблемы о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах (группа перестановок, ее действие на множестве соотношений между корнями и т.д.), Э. Галуа структурировал, в терминах присущих математике абстрактных объектов, следующее представление. Если мы имеем некоторые объекты, непосредственное исследование свойств которых представляется невозможным или затруднительным, то мы создаем вспомогательные объекты, результаты воздействия которых на исходные могут быть некоторым образом фиксированы. Основная цель введения таких вспомогательных объектов состоит в том, что, исследуя их свойства, мы можем получить нужную на информацию о непосредственно интересующих нас объектах. Так, Галуа удалось показать, что алгебраическое уравнение n-ой степени с числовыми коэффициентами разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда его группа сводится к коммутативным группам перестановок. Исследуя конкретные группы-группы перестановок для решения интересующей его проблемы, Галуа вводит такие фундаментальные для будущей абстрактной теории групп понятия, как нормальный делитель(нормальная подгруппа), смежный класс, разрешимая группа и т.д. Структурированные в абстрактной теории групп представления в дальнейшем оказались чрезвычайно плодотворными при исследовании ряда важнейших проблем естествознания (классификация кристаллов, квантовая механика). Этот, и другие, подобные ему примеры, свидетельствуют о том, что, вряд-ли стоит упрекать в гиперболизации известного физика Ф.Дайсона, утверждавшего, что математика - это «не только инструмент, с помощью которого он (физик - *А.Г.*) может количественно описать любое явление, но и источник представлений и принципов, на основе которых зарождаются новые теории» [4, с. 112]. При этом не стоит, по крайней мере, преувеличивать, степень непостижимости того, что новые эвристичные математически-структурированные представления нередко возникают в процессе развертывания внутренней логики развития математического знания. Подобно тому, как естествоиспытатель проводит реальный или мысленный эксперимент с объектами материального мира, применяет имеющиеся или создает новые представления о характере связи между ними, математик, в поисках решения интересующей его проблемы, по сути дела, делает то же самое со своими объектами - математическими понятиями, созидая новые, более изощренные структурированные представления, которые, благодаря присущим математике особенностям, обладают способностью, при соответствующей содержательной интерпретации, обнаруживать ранее неизвестные свойства имеющихся моделей реальности, а наиболее глубокие и интересные - служить концептуальной основой для построения принципиально новых моделей.

Литература

1. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия.- М.: Изд-во МГУ, 1980.

2. Мулуд Н. Современный структурализм.- М.: Изд-во Прогресс, 1973.

3. Вигнер Е. Этюды о симметрии.- М., 1972.

4. Дайсон Ф.Дж. Математика в физических науках.- В кн.: Математика в современном мире.- М., 1967.

Гутнер Григорий Борисович, *д.ф.н., вед.н.сотр.,*
Институт философии РАН (Москва)

ДОСТОВЕРНОСТЬ ПОСТУЛАТОВ МАТЕМАТИКИ И ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

1. Естественнонаучное исследование базируется на двух методологических установках, условно обозначаемых как гипотетико-дедуктивная и конструктивно-генетическая. Первая определяет структуру эмпирического исследования. Она определяет порядок выдвижения гипотез, объясняющих наблюдения и данные экспериментов, их проверку, подтверждение и опровержение. Вторая установка определяет развитие научной теории. Последняя рассматривается как теоретическая конструкция, создаваемая на фундаменте исходных постулатов.

2. Применение конструктивно-генетического метода, как правило, предполагает использование математического аппарата. Развитые естественнонаучные теории, в таком случае, напоминают по своей структуре математические теории. Более того, именно математика дает наиболее точные образцы идеального конструирования. Неслучайно структура «Начал» Евклида осознанно воспроизводилась в некоторых естественнонаучных текстах. (Например, «Математических началах натуральной философии» Ньютона).

3. В этой ситуации существенен вопрос о природе исходных постулатов. Здесь возникает, как кажется, принципиальная разница между математической и естественно-научной теорией. Даже самые фундаментальные постулаты естествознания подлежат эмпирической проверке и могут быть опровергнуты. Иными словами, они остаются гипотезами. Отметим сразу, что главное свойство гипотезы состоит не в том даже, что ее можно отвергнуть, а в том, что для нее всегда имеется альтернатива. Отвергнутую гипотезу можно заменить иной, способной объяснить те же эмпирические факты. Для математических аксиом не существует процедур эмпирической верификации и фальсификации, и они, обычно не рассматриваются как гипотезы. Они принимаются, на первый взгляд, как безусловно достоверные положения, истинность которых транслируется затем на прочие положения теории.

4. Но чем обеспечена их достоверность? Естественным кажется взгляд, принятый, в свое время Декартом, что исходные положения математики обладают безусловной очевидностью и простотой, а потому их истинность не может быть поставлена под сомнение ни одним разумным существом. В таком случае, всякое правильно доказанное математическое положение представляет собой вечную истину, недоступную для критики и не подлежащую пересмотру или коррекции.

5. Подобный взгляд вызывает, как минимум, два возражения. Первое состоит в том, что при таком подходе математическая теория делается подобной идеологической доктрине. Она предъявляется в качестве системы незыблемых истин и всякое колебание по ее поводу должно иметь неприятные последствия для колеблющегося.

6. Второе возражение имеет более интерналистский характер. Далеко не все математические теории строятся на простых и очевидных положениях. Напротив, в основании некоторых из них лежат совершенно неочевидные положения. Классическим примером таких теорий являются неевклидовы геометрии. И это далеко не единственный пример. Современная математика никак не соответствует декартовскому идеалу. Вспомним об аксиомах абстрактной алгебры, топологии, теории вероятностей. Они не

только не очевидны, но вообще малопонятны при первом прочтении.

7. Чем же оправдано принятие исходных положений математических теорий. На мой взгляд здесь действуют три фактора, имеющих, впрочем, не одинаковое значение. Первый фактор — построение на их основе консистентной теории. Консистентность подразумевает не только внутреннюю непротиворечивость, но и согласованность с другими теориями. Второй фактор имеет менее формальный характер. Будучи не очевидны сами по себе, аксиомы должны иметь, если не очевидные, то, во всяком случае, прозрачные для человеческого интеллекта и даже, рискну сказать, соответствующие здравому смыслу, следствия. Возможно, этими свойствами будут обладать даже не сами следствия, а их интерпретации, но подобного рода согласование, по-видимому, прогнозируется при создании математической теории. Так многие положения абстрактной алгебры интерпретируются с помощью арифметических операций, положения топологии — с помощью известных свойств фигур и тел и т. д. Наконец, третий фактор — это эмпирическая верификация. Следствия математических аксиом могут иметь опытное или экспериментальное подтверждение. Вспомним эксперименты Гаусса с измерением углов треугольников. Другой такой пример — соответствие статистических данных предельным теоремам теории вероятностей.

8. Из трех названных факторов обязательным является только первый. Однако все три существенно влияют на формирование математических теорий. Здесь обнаруживается известное сходство математики с естествознанием. В обоих случаях исходные постулаты оправданы последующим развитием теории. Их принятие обусловлено не их собственными свойствами (очевидностью, простотой и т. п.), а характером получаемых из них следствий. В известном смысле, следствия предшествуют посылкам. Выбор аксиом определяется тем, что из них должно быть получено. В естествознании это установленные эмпирические факты. В математике — математические факты, установленные в иных теориях, а также, возможно, и эмпирические факты, имеющие определенное математическое описание.

9. В таком случае, математические аксиомы, подобно естественно-научным постулатам, все же являются гипотезами. Поскольку одни и те же следствия могут быть получены из разных посылок, то, по крайней мере теоретически, можно строить альтернативные аксиомы. Поэтому возможна и критика математических теорий. Не исключено, что принятые аксиомы могут оказаться, в известном смысле, неудачными, что должно стимулировать поиск иных исходных положений математической теории.

10. Заметим, что такой подход вполне соответствует исходному замыслу математической науки, появившемуся в античности. Геометрия Евклида, которую во времена Декарта рассматривали как безупречную логическую систему, покоящуюся на абсолютно достоверных основаниях, не замышлялась так ее создателем. Ее исходные положения рассматривались как некие допущения, уместность которых должна быть оправдана в дальнейшем. Не случайно оформление геометрии в виде дедуктивной системы стало возможным лишь после долгого развития этой науки. Это было своего рода возвратное движение мысли: уже установленные факты нужно было вновь доказать, исходя из принятых как аксиомы и постулаты предпосылок. Иными словами, исходные положения геометрии принимались как гипотезы. Их следствия были уже известны и возможность эффективного выведения этих следствий оправдывала их принятие. Теоретически они могли оказаться неудачными и потребовать замены на альтернативные.

11. Таким образом, гипотетико-дедуктивный метод присущ и математике. Более того, не исключено, что именно в ней он был впервые опробован. Суть этого метода впервые была в самой общей форме описана Платоном в диалогах «Парменид» и «Государство». Причем в последнем — в знаменитом отрывке о делении отрезка — именно математика (точнее, геометрия) приводится как самый явный пример гипотетического знания.

Жаров Сергей Николаевич, *д.ф.н., доцент, Воронежский государственный университет, факультет философии и психологии*

ПРОБЛЕМА БЫТИЯ В КОНТЕКСТЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПОЗНАНИЯ

В классике критерием существования была возможность непротиворечиво мыслить объект в рамках определенной математической структуры. Конструктивистское направление, напротив, признает существующими только те предметы, которые можно построить посредством конечной процедуры. Было бы наивным отрицать конструктивный характер математических объектов и связанную с этим творческую свободу математического мышления. С другой стороны, у всякого, кто серьезно занимался математикой, возникает ощущение, что ее структуры живут своей жизнью, независимой от нашего произвола. Конструктивистская трактовка схватывает важные особенности математики, но не проясняет ее онтологический смысл, разве что мы вдруг признаем, что мир есть конструкция нашего разума.

Ясно, что математический объект обретает свое «быть» через включенность в систему отношений, которая в идеале должна быть приведена к системе аксиом. Но откуда берется эта система отношений? Является ли она продуктом произвольной конструкции, ограниченной лишь законами непротиворечивости? Или математическое мышление имеет некий онтологический исток, в сфере которого только и становится возможным всякое конструирование? В поисках ответа обратимся к одному из самых значимых эпизодов в истории математики – открытию действительных чисел.

Одно из определений действительного числа предложено Дедекиндом. Мы возьмем его в формулировке Г. Вейля: «Назовем… *отрезком* область рациональных чисел, которая вместе с любым рациональным числом h всегда содержит также и все рациональные числа $< h$. Такой отрезок *открыт,* если не существует наибольшего принадлежащего ему рационального числа. Открытый отрезок рациональных чисел, отличный от пустого и универсального множеств, называется *действительным числом*» [1, с. 139-140].

Рассмотрим общий смысл ситуации. Сначала мы берем *неопределенное* (не имеющее однозначной верхней границы) множество чисел. Поскольку в исходном пункте даны *только* рациональные числа, то эта неопределенность имеет принципиальный характер: данный отрезок нельзя однозначно сопоставить ни с одним числом. Как же превратить неопределенность в нечто определенное? Мы *постулируем*, что это неопределенное множество будет рассматриваться как число, пусть и особого рода. Post factum нашим оправданием будет применимость к новым числам всех правил арифметики. Но что является *истоком* такого определения?

Открытие действительных чисел можно рассматривать двояким образом: как первое *созидание* нового математического предмета, или как предметное *выделение* того, что неявно уже присутствовало в исходном континууме. Точки присутствуют в континууме, и в этом смысле уже существуют. Но чтобы стать предметом строгого рассуждения, каждая точка должна быть однозначно выделена из континуума, что требует специальной процедуры. В рассматриваемом случае этой процедурой выступает дедекиндово сечение. Причем это сечение не столько создает, сколько предметно выделяет то, что уже присутствовало.

Таким образом, существование в математике может быть понято в двух различных смыслах. Речь идет о разделении, не совпадающем с различием существования соответственно в классической и конструктивистской трактовках. *Первый смысл* связывает существование математического предмета (в нашем случае – действительного числа) с его включенностью в однозначно определенные отношения. *Второй смысл* исходит из неявного присутствия определяемого в исходном умопостигаемом континууме. На это указывает сам Вейль, характеризуя рациональные числа как знаки, позволяющие локализовать точки одномерного континуума (см. [1, с. 14] По-видимому, здесь мы имеем дело с общей закономерностью. Предпосылкой строгого определения новой математической формы является неявное присутствие этой формы в уже выделенной математической предметности. Примером может служить открытие теории групп. Галуа «увидел» математическую группу, обнаружив, что ответ на вопрос о разрешимости алгебраических уравнений связан с соответствующими этим уравнениям перестановочными отношениями.

Существует ли всеобщая предметность, которая способна выступать источником математической интуиции при введения новых математических форм? Для теории Галуа истоком стали алгебраические соотношения, но последние есть обобщение числовых отношений. Тут вспоминается мысль Л. Кронекера о том, что Бог создал натуральное число, а человек – все остальное. Однако возможны и иные соображения относительно того, что является поистине фундаментальным. Как раз натуральные (и полученные из них рациональные) числа есть продукт творчества, ибо выделение из гераклитова потока жизни себетождественной абстрактной «единицы» является весьма искусственной процедурой. Дальнейшее развитие теории чисел было связано с проекцией рациональных чисел на умопостигаемый континуум, который есть не конструкция, а первичная интуиция. Интуиция континуума старше, чем интуиция числа, ибо линией и рисунком древний человек овладел раньше, чем числами. Действительные числа – это искры, высеченные из бесконечности континуума погруженными в него рациональными числами. Так может быть, умопостигаемый континуум, таящий внутри себя неопознанные структуры, и есть первичный исток математических форм? Математику интересен континуум как носитель неких отношений. Но тогда континуум превращается в пространство. Континуум, выступающий как носитель скрытых, еще не выявленных отношений, есть *пространство вообще*, пространство как предмет интеллектуального созерцания и источник новых математических интуиций.

Пространство как чистое созерцание – начало этого сюжета восходит к Платону. На категориальном уровне данная тема была развита Кантом. Однако у Канта пространство – это раз и навсегда заданное субъективное априори. Мы предлагаем иной подход. «Пространство как таковое» априорно не в гносеологическом, а в онтологическом смысле, как интуитивно данная возможность бесконечного многообразия надсубъективных умопостигаемых форм. Неисчерпаемость этого априори открывается математику и физику по мере постановки и решения парадигмально значимых исследовательских задач.

В современной теоретической физике вырисовывается путь, начало которому положили работы Эйнштейна: взаимодействия выражаются в терминах модификации пространственно-временного континуума. Одна из задач теоретика – правильно подобрать многомерное пространство и выделить в нем структуру, способную выразить динамику взаимодействий. Таким образом, на первый план выдвигается интуиция пространства как носителя возможных онтологических форм. Когда пространство сопрягается с постановкой конкретных вопросов, оно выступает как сфера опредмечивания физических интуиций. Характер такого опредмечивания, естественно, зависит от проблемного контекста.

Литература

1. *Вейль Г.* Математическое мышление. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

Ивин Александр Архипович, *д.ф.н., профессор, Институт философии РАН (Москва)*

ПРОБЛЕМА ИСТИНЫ В МАТЕМАТИКЕ

Понятие истины является одним из наиболее важных в философии математики. Хорошо известны три традиционных теории, раскрывающих природу истины: истина как соответствие (корреспонденция), истина как согласованность (когеренция) и истина как полезность. У каждой из этих теорий есть разнообразные модификации.

Согласно представлению о корреспонденции высказывание является истинным, если оно соответствует описываемой ситуации, т.е. представляет ее такой, какой она является на самом деле. Истолкование истинности как соответствия мысли действительности восходит еще к Античности и обычно называется классической концепцией истины. Все иные понимания истины именуются неклассическими.

В соответствии с концепцией когеренции истина представляет собой систематическое согласие выдвинутого положения с уже принятыми утверждениями. Такое согласие сильнее логической непротиворечивости: не всякое высказывание, не противоречащее ранее принятым высказываниям, может быть отнесено к истинным. Истинно только положение, являющееся необходимым элементом систематической, целостной концепции. «Целостность» обычно понимается так, что из нее нельзя удалить, без ее разрушения, ни одного элемента. Истолкование истины как когеренции развивалось П. Дюэмом, У.В.О. Куайном, Т. Куном, Л. Лауданом и др.

Строго говоря, при таком истолковании истины, если оно проводится последовательно, истина оказывается характеристикой, прежде всего, самой «целостности», а не ее отдельных элементов. «Целостность» приобретает при этом абсолютный характер: она не оценивается с точки зрения соответствия ее чему-то иному, например, внешней реальности, но придает входящим в систему высказываниям ту или иную степень истинности. При этом степень истинности высказывания зависит только от его вклада в систематическую согласованность элементов «целостности».

В противопоставлении внутренней согласованности (когеренции) и соответствия опыту (корреспонденции) можно подчеркнуть слова «в конечном счете». Опыт действительно является источником научного знания. Но далеко не всегда новую, и тем более абстрактную, естественнонаучную гипотезу удается непосредственно сопоставить с эмпирическими данными. В этом случае ее согласие с другими утверждениями теории, в рамках которой она выдвинута, значение гипотезы в систематизации и прояснении связей этой теории с другими, хорошо обоснованными теориями, вполне может играть роль вспомогательного определения истины.

В формальных науках, математике и логике, не имеющих непосредственной связи с опытом, истина как согласование нового положения с уже принятыми утверждениями является основным рабочим инструментом. Большинство «математических» и «логических истин» никогда не выходит за пределы согласования их с уже принятыми математическими и логическими теориями и теми критериями, по которым оцениваются последние. В качестве вспомогательного используется определение истины как полезности, как того, что приводит к успеху.

Особенно наглядно сложность проблемы математической истины проявляется в случае математических идей, относительно которых вообще сложно представить способы сопоставления их с реальностью даже в рамках содержательных научных теорий.

В качестве характерного примера можно сослаться на две аксиомы теории множеств: аксиому выбора (1904) и аксиому детерминированности (1964). Эти аксиомы чересчур абстрактны, чтобы сопоставить их с эмпирическими данными. Аксиомы не входят в состав более частных математических теорий, которые могли бы быть использованы в конкретных научных теориях, допускающих сопоставление с опытом. Это заставляет предположить, что понятие истины как соответствия не применимо к данным аксиомам. Вместе с тем два других истолкования истины – истины как согласованности и истины как полезности – могут использоваться для оценки аксиом. При этом согласованность и полезность являются взаимно поддерживающими друг друга свойствами рассматриваемых математических утверждений.

Обоснованный выбор между аксиомой выбора и аксиомой детерминированности возможен, вероятно, только путем сравнения красоты и богатства математических теорий, построенных с использованием данных аксиом, а также путем сравнения согласованности следствий аксиомы выбора и аксиомы детерминированности с математической интуицией и практикой приложения математики. В частности, решающим аргументом в пользу аксиомы детерминированности может оказаться построение топологической теории, сравнимой по красоте и богатству следствий с созданной к настоящему времени топологией на основе аксиомы выбора.

Истина как когеренция – наиболее частое, а иногда и единственно возможное понимание истины как в математике, так и в абстрактных, далеких от опыта областях математического естествознания. Согласие вновь вводимого положения с системой утверждений, принятых в конкретной области естественнонаучного знания, обычно определяется степенью полезности этого положения для данной области и смежных с нею отраслей знания. Согласованность и полезность оказываются, таким образом, тесно связанными друг с другом.

Соответствие опыту некоторой математической теории не устанавливается непосредственно. Оно может быть лишь результатом сопоставления с эмпирическими данными тех содержательных научных концепций, в структуре которых используется эта теория («ослабленный критерий истинности Куайна»). Именно поэтому в математике, не связанной непосредственно с опытом, истина понимается чаще всего не как соответствие реальности, а как согласованность математических идей между собой.

В математике используется, таким образом, все три разные истолкования истины, взаимно дополняющие друг друга: истина как согласованность, истина как средство, ведущее к успеху, и истина как соответствие.

Казарян Валентина Павловна, *д.ф.н., профессор,*
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

СОЦИО-НАУЧНЫЙ ХАРАКТЕР СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

Наука включает в себя чувственно-предметные инструменты, с помощью которых производится научная работа. Теоретическая деятельность посредством нашего ума и практическая чувственная деятельность с помощью инструментов в их единстве конституируют научное исследование.

Хорошо говорил однажды на заседании совета А.Л.Никифоров: могли ли гениальные греки, скажем от себя – Орфей, написать симфонии Л.Бетховена? Нет, не могли, постольку поскольку не было еще музыкальных инструментов, для которых писал музыку Бетховен.

Так же как ни Аристотель, ни Архимед, ни Птолемей, ни даже Галилей и Ньютон, не могли открыть радиоизлучение галактик или теорию элементарных частиц. Ибо не было у человечества техники, инструментов, чтобы обнаружить эти объекты в природе. Очевидно, что в структуре научного эмпирического факта присутствует не только перцептивный, лингвистический, но и материально-практический компонент [2]. При этом чувственно-практический компонент имеет социальный и исторический характер. В наше время он отчетливо виден и носит социо-технологический характер.

Ситуация понятна для опытных наук. Но причем здесь математика?

В математике сложилась другая ситуация. Никакой чувственно-предметной деятельности мы не наблюдаем в истории математики после периода фалесовой геометрии, когда доказательство носило чувственно-предметный характер, и после периода оперирования счетными камешками, овеществлявшими число, в пифагорейской арифметике. Математические инструменты - угольник и циркуль были весьма важными и почитаемыми в культуре древнего Китая. Согласно легендам с их помощью делали не только математику, но и сам небосвод мифические Фуси и Нюйва. А легендарный Ся Юй укротил реки с помощью циркуля и линейки [1, с. 12-13.].

Конечно, для ускорения расчетов математики использовали чувственно-предметные инструменты: абак, счеты, арифмометр, логарифмическую линейку, вычислительные машины в первоначальный период их применения. При этом никакого приращения нового знания математики не получали – в отличие от опытных наук, где эмпирический факт мог быть новым знанием для науки. Теоретическое мышление, теоретические методы являлись единственным достоянием математики. Математик мог обращаться к математическим фактам и оперировать ими, но эти факты получены без обращения к чувственно-предметному инструментарию, и являются плодом внутриматематической мысли.

Ситуация изменяется в наше время. Что происходит? Вычислительная машина перестала выполнять функцию лишь арифмометра. Современные вычислительные машины и в особенности суперкомпьютеры создали возможности для новой познавательной ситуации в науке, когда ученый получил возможность ставить и решать задачи, не доступные и даже не мыслимые теоретически для прежних ученых. Недавно ученые не могли и мечтать о них. Прежде всего – это задачи со многими переменными, очень многими, до нескольких тысяч. Современный математик способен ставить такие задачи и решать их в приемлемые сроки. Математический инструментарий, современная вычислительная техника, – это условие возникновения и развития новых областей исследования. Инструментарий является не периферийным или внешним фактором для математики, а конституирующим существо научного дела.

Компьютеры стали инструментом, изменяющим математику. Эту сторону использования инструмента нельзя никак сбрасывать со счетов. В последние полвека математик выходит из сферы чисто умственных построений, когда отдельному математику и математическому сообществу было достаточно внутренних отношений между собой или же связи с духовными (культурными) сущностями. В прошлом влияние социума на математику вполне можно было представить экстерналистской моделью, согласно которой социальное не проникало в тело математики. Социальные реалии в форме наличия используемой математиком вычислительной техники обеспечивают возможность постановки новых проблем, решение задач, ранее не возможных в принципе. Также как Орфей не мог написать музыку Бетховена, так и вчерашний математик не мог заподозрить и сформулировать ту научную задачу, которую в условиях нового инструментария он ставит.

Формируется и, может быть, уже сформировалась область математических исследований - безбрежная, расширяющаяся, в условиях применения современной вычислительной техники, особенно суперкомпьютеров.

В выражении «социо-научный характер современной математики», современной математической деятельности, слово «социо» означает «имманентную обусловленность социальными обстоятельствами» – в данном случае развитием техники и технологий как явления исторически-социального. При этом вычислительные машины являются плодом социотехнического процесса в единстве: техники, технологий, специалистов, образования, финансов. Обусловленность означает появление новых математических реалий, появившуюся возможность постановки и исследования принципиально новых задач. Что значит «принципиально новых» - это значит таких, которые обычному математическому мышлению, сложившемуся до использования современной вычислительной техники, были не под силу.

Современный математик не может жить и творить в третьем мире Поппера. Не может этого делать и во втором. Он накрепко завязан на мир социальный. Современная математика сращивается с реальным жизненным миром человека, его социальной организацией. Реальность в форме социальной реальности проникает в математику и превращается в имманентную составляющую математической деятельности.

Литература

1. Березкина. Э.И. Математика древнего Китая. М., 1980.
2. Никифоров А. Философия науки. М., 2006.

Когаловский Сергей Рувимович, к.ф.-м.н. профессор,
Шуйский педагогический университет

К ВОПРОСУ О РЕАЛЬНОСТИ МАТЕМАТИКИ

«Математика разделяется на два типа теорий и вопрос о реальности решается по-разному для каждого из этих типов» - говорится в [2]. К первому типу автор этой работы относит евклидианскую математику, ко второму - «абстрактные» математические теории. Такое разделение оправдано как отвечающее разным стадиям развития математики. Евклидианская математика (ЕМ) является первоистоком «абстрактных» теорий, направленых, прежде всего, на исследование механизмов математической деятельности и их взаимодействий, на их развитие. Моделирование, используемое в (ЕМ) и приложениях математики, основывается преимущественно на отражающей абстракции в смысле Пиаже. В «абстрактных» же теориях, в процессах формирования фундаментальных математических понятий и концепций доминирует рефлексирующая абстракция (в смысле Пиаже), ведущая к освоению их как носителей широкого комплекса познавательно-преобразующих функций, как средств и как продуктов представляемых ими форм и способов мыследеятельности, как средств и как продуктов осознания «существа» этих способов.

Однако трудно согласиться с пониманием «абстрактных» теорий математики «как чистых (формальных) схем, имеющих <разве лишь> определенный шанс получить эмпирическую интерпретацию» [2]. Развитая математическая теория предстает для внешнего наблюдателя как «чистая (формальная) схема». Но эта «схема» – продукт ее длительного и драматичного становления, подобного «непрерывному превращению материально-поэтического субстрата, сохраняющего свое единство и стремящегося проникнуть внутрь себя самого» (О. Мандельштам). За нею скрываются сложный системный характер теории, механизмы ее формирования и развития, средства, несущие развитие ее гомеостатичности, средства, развивающие возможности ее продуктивного функционирования в роли компонента математики как ее надсистемы.

Развитие математической теории как носителя тех или иных «средств производства» поисково-исследовательской (и управленческой) деятельности состоит не просто в наращивании ее предметного содержания, но, прежде всего, в формировании и развитии ее внутренних «средств производства». Этим обеспечивается нарастание потенции ее дальнейшего развития. Развитым математическим теориям присуща значительность места и роли внутренних «средств производства» (являющаяся другой стороной направленности на работу рефлексирующей абстракции), существенно отличающая их от евклидианской математики.

Решая свои внутренние задачи и тем как бы уходя от своего корневого начала, от содержательного плана, от первоначальных целей, «абстрактная» теория восходит к своим глубинным корням, преображает их в свои внутренние «средства производства», превращающиеся в способ продуктивного моделирования как средство исследования, как средство преображения самой поисково-исследовательской деятельности, как средство развития ее методологии.

Обычно, говоря о связи математики с реальностью, указывают на ее широкие прикладные достижения в форме эффективно работающих моделей тех или иных объектов. Но этот аргумент мало связан с особенностями таких связей. (И потому заслуживает особого внимания провозглашаемое в значимой, ценной и в эвристическом плане, статье В. Я Перминова [2] понимание реальности евклидианской математики «как укорененности исходных интуиций… в фундаментальных структурах бытия, выявляемых деятельностью»).

Надпредметный (более того – метапредметный) характер фундаментальных математических понятий говорит о том, что математическое моделирование - это прежде всего когнитивное моделирование, что особенность математики - в формировании и развитии общих способов математического моделирования.

Моделирование в бытующем понимании направлено на получение новой информации о моделируемом объекте. Фундаментальные математические понятия, являющиеся моделями первомеханизмов математической деятельности, моделями соответствующих им прото-понятий, моделями, в формировании которых участвуют механизмы феноменологической редукции в духе Гуссерля, играют существенно иную роль - роль средств преображения поисково-исследовательской деятельности, несущего качественно новые ее возможности. Процессы их формирования являются образцами=моделями продуктивных стратегий поисково-исследовательской деятельности. (Все это еще более зримо показывает, насколько далек от истины расхожий тезис «математика – это логика» и насколько ближе к ней тезис «математика – это (трансцендентальное) моделирование»).

Феноменологическая редукция (взаимодействующая с рефлексирующей абстракцией) является средством формирования идеальных орудий математической деятельности. (Впрочем, ее настолько же естественно называть редукцией, насколько естественно так называть работу скульптора, «очищающего» глыбу мрамора от «посторонних» кусков. Представляется, что настолько же естественно полагать, что ЕМ, являющаяся продуктом длительного исторического развития, априорна. К тому же исследования, последнего времени заставляют усомниться в укоренившихся представлениях о базовых (и универсальных) когнитивных процессах). Строгие понятия, участвуя в математической деятельности как ее орудия, «очищая» и преображая ее, не сводят эту деятельность к работе «чистого сознания». Участие в этой работе, да и в самих процессах формирования строгих понятий, многих языков и многих логик, их синергия - это работа далеко не только «чистого сознания». Они несут новый материал, новые задачи для феноменологической редукции, подготавливающей прорывы на новые уровни математической деятельности. И эти прорывы открывают новые возможности для постижения и преобразований реальности.

Было бы общим местом называть давно ставшие классическими пост-евклидианские достижения математики, укоренившиеся в структурах деятельности, преобразившие науку, преобразившие мировоззренческие представления, преобразившие саму ЕМ. Сегодня было бы общим местом говорить о синергетике как инициирующей глубокие изменения в методологических основаниях современной науки, в философском взгляде на мир, в самом стиле научного мышления [1]. И низведение понимания реальности математики до понимания ее как реальности ЕМ - это впадение в редукционизм. (И не в редукционистском ли подходе к проблеме обоснования математики коренятся непреодолимые трудности ее решения?)

Может ли быть нереальным источник изменения реальности? Очевидный ответ на этот вопрос побуждает вопрос о реальности математики преобразовать в вопрос о характере этой реальности, о предполагаемом характере ее дальнейшего развития и о влиянии результатов ее развития на жизнедеятельность человечества. В конечном счете, последний вопрос – это вопрос о роли математики в развитии культуры, в развитии жизнедеятельности человечества, в изменении самой реальности.

Литература

[1] Князева Е. Н. и Курдюмов С.П. Законы эволюции и самоорганизации сложных систем. – М. : «Наука», 1994.

[2] Перминов В. Я. Реальность математики // Вопросы философии – 2012 - № 2. С. 24-39.

Крушинский Андрей Андреевич, *д.ф.н., Москва, Институт Дальнего Востока РАН*

КОМПОЗИЦИОНАЛЬНОСТЬ КАК ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ МАТЕМАТИЗАЦИИ

Под «композициональностью» я имею в виду обычно возводимый к Г. Фреге семантический принцип, согласно которому значение сложного языкового выражения детерминируется – находится в функциональной зависимости от – значений образующих его составляющих. Очевиден конструктивистский пафос подобной семантической комбинаторики, конструирующей все мыслимые значения с помощью композиции в некотором смысле более первичных значений.

Похоже, что от степени реализации принципа композициональности тем или иным типом естественного языка (имеется в виду письменный аспект языка) напрямую зависит предрасположенность к математизации соответствующей языковой картины мира. Наблюдается четкая корреляция между непоследовательным (мягко говоря) проведением принципа композициональности языками, опирающимися на алфавитное письмо и достаточно вымученной математизацией отвечающих им представлений о действительности, с одной стороны, и тотальной математизацией традиционной китайской языковой картины мира, в значительной мере предопределенной спецификой китайского иероглифического письма, методически осознанно руководствовавшегося указанным принципом – с другой.

Дело в том, что колоссальные оперативные преимущества фонетического письма достигнуты ценой отказа от принципа композициональности уже на базовом уровне перехода от букв к образуемым ими графемам. В самом деле, первичные единицы текста, а именно, буквы, по самой своей природе не обладают никаким собственным смыслом (являясь знаками знаков, они предназначены для обозначения фонем), а потому осмысленность буквенной транскрипции минимальной смысловой единицы (морфемы) есть результат композиционально не мотивированной конвенции. Иными словами, речь здесь идет не более чем об условной письменной фиксации некоего осмысленного (в силу весьма далеких от прозрачности исторических обстоятельств) набора звуков.

Само собой напрашивающейся экстралингвистической проекцией подобного символического означивания оказывается представление о бесструктурном объекте/хаотичном наборе таких объектов в качестве естественного референта семантически неразложимого первичного единства звука и смысла (каковым является морфема в номинативной функции). Таким образом, интуиция понятия класс/принадлежность к классу в мереологическом (собирательном) или стандартном ныне разделительном смысле коренится в индивидуирующем характере референции общих терминов. Хотя эта лингвистически мотивированная интуиция, закономерно породившая в свое время силлогистику и родовидовую схематику, была со временем математизирована, тем не менее, по справедливому наблюдению Э. Кассирера, попытка редукции центрального для математического мышления понятия числа к «логическому» понятию класса «является, в конце концов, тонкой и последовательно проведенной попыткой овладеть с помощью всеобщего схематизма родовых понятий проблемой, которая по своему значению и объему принадлежит новой предметной области и предполагает иное понятие о познании» [1, С.76] .

Показательна стойкая нерасположенность мейнстрима европейской словесной культуры к математической образности как возможной альтернативе вербальному мышлению (инспирированный египетской – в том числе иероглифической – мудростью пифагореизм скорее маргинален для вербально центрированной античности). Эра господства античной риторики, так же, как и период засилья средневековой схоластики – вплоть до эпохи Возрождения и галилеевского откровения насчет математизированности «Книги природы» – прошли под знаком риторической рациональности и аристотелевской логики. Уже в Новое время крайне негативная позиция Г. Гегеля в отношении математической символики как постоянного конкурента философскому логосу четко увязывалась им с противостоянием иероглифического и фонетического письма (мишенью его критики становится Г. Лейбниц в качестве автора проекта универсального письма нефонетического типа). Примечательно, что великий диалектик усматривал одно из серьезных преимуществ буквенного письма над «аналитичностью» (т. е. композициональностью) идеограмм как раз в принципиальной некомпозициональности буквенного представления слов естественного языка (т.е. в семантической бесструктурности и потому немотивированности имен).

Понятно, что в случае идеографии (образующей ядро к настоящему времени семиотически достаточно неоднородной китайской иероглифики), где идеограммы отсылают непосредственно к объектам или понятиям и практически каждому графическому элементу плана выражения отвечает семантическая единица плана содержания, именно условие композициональности выступает исходным и решающим конструктивным принципом. Поскольку главнейшей функцией идеограммы является, или структуризация хотя и изображаемой ей, но существующей до и независимо от нее предметности, или же, перформативное порождение отвечающей ей, так сказать «рукотворной» предметности, постольку композициональная структура идеограммы с необходимостью транслируется в оба указанных типа предметности. Прозрачный пример подобной трансляции графической композиции в социально-политическую реальность дает каноническая трактовка иероглифа 王 (Ван, царь) согласно которой, Царь (представляемый вертикальной чертой графемы 王) является тем единственным из людей, кто, пронизав собой Небо, Землю и Человека (изображаемых тремя горизонтальными чертами 三 анализируемой пиктограммы), сводит их во единое целое.

Отметим, что нормативное пространственное взаиморасположение частей графемы играет ведущую роль в идеографической артикуляции идеи «правильности», взыскуемой стержневой для конфуцианской логико-методологической (равно как и социально-политической) мысли стратегией «выправления имен». Теоретически отрефлексированной и систематически последовательной реализацией подхода к композициональности как к основополагающей методологеме является триграммно-гексаграммный символизм «Канона Перемен».

Числовое кодирование объектов дискурса, широко практикуемое китайскими учеными древности, органично для иероглифического дискурса: его цель – стандартизация правил композиции (способов комбинирования этих объектов) путем сведения их к элементарным числовым алгоритмам. Так, напр., упоминавшейся выше триаде Небо-Земля-Человек (а стало быть, и трем горизонтальным чертам пиктограммы царь, изображающим эту триаду) приписывались следующие числа: 9 в качестве числа Неба (верхняя горизонталь), 6 в качестве числа Земли (нижняя горизонталь), и 8 в качестве числа Человека (средняя горизонталь). Поэтому числовое значение Царя однозначно вычисляется по числовым параметрам коррелирующей с ним триадической классификации, и равно семидесяти двум = НОК [6, 8, 9]. Математическая релевантность подобного очисливания иероглифических графем разительно контрастирует с полным отсутствием хоть какой-нибудь внутренней связи между любым буквенным словом и его числовым двойником, полученным в результате замены каждой буквы ее порядковым номером в том алфавите, буквами которого записано исходное слово.

Алгоритмическая нацеленность китайского числового кодирования в некоторых замечательных случаях запечатлена самой графической структурой числового кода: напр., статусная роль пятерицы как числового обозначения центра (в частности, центра квадрата) визуализировалась ее древним начертанием (), изображающим перекрестье диагоналей квадрата. Этой пространственной срединности отвечает центральная позиция пятерицы в структуре открытого китайцами магического квадрата:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Как видим, китайский панматематизм предопределен ярко выраженной композициональностью китайской идеографии.

Литература

1. Кассирер Э. Познание и действительность (Понятие о субстанции и понятие о функции). СПб., 1912.

Кузнецов Владимир Иванович, *д.ф.н., профессор,*
Институт философии имени Г.С.Сковороды Национальной академии наук Украины

ИНТЕРСИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ВЗАИМОСВЯЗИ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Наука является чрезвычайно сложным устройством получения и хранения достоверного и проверяемого знания об изучаемых ею реалиях. В зависимости от их природы ее разделяют на крупные таксоны (естественные, математические, общественные, гуманитарные, инженерные и др. науки). Менее крупными таксонами выступают биологические, физические, математические и др. науки. Далее в физическом таксоне обособляют классическую и квантово-релятивистскую физику, а в математическом -- геометрию, анализ, алгебру, топологию и т.д. Более «мелкими» таксонами являются, в частности, в неклассической физике – неравновесная термодинамика, релятивистская и квантовая физики, а в геометрии – евклидова, неэвклидовы, риманова, алгебраическая, дифференциальная и др. геометрии.

Согласно реконструктивному подходу [1] в философии науки, каждый «мелкий» таксон функционирует как разветвленная и развивающаяся сеть, элементами которой являются продуктивные системы знания (ПСЗ) и их многочисленные версии. ПСЗ – это минимальное формообразование знания, с помощью которого исследователь получает новое знание в рамках конкретной науки. Причем процесс порождения нового знания реализуется через изменения в существующих и возникновение новых ПСЗ. Важно иметь в виду, что хотя это производство детерминируется наукой в целом, знание создается на границе взаимодействия конкретных ПСЗ и исследуемых с их помощью реалий.

Отметим, что для обозначения ПСЗ часто используется термин «теория», который имеет множество разных истолкований (предложенческое, инструменталистское, структуралистское, структурно-номинативное и др.). Он может указывать как на универсальные для данного таксона теории, так и на частные теории, предметными областями которых являются его подобласти. Например, в рамках таксона, называемого квантовой теорией поля (КТП), существуют различные универсальные КТП, часто обозначаемые как ее интерпретации. Среди них многочисленные версии аксиоматической, конструктивной, операционной, спинозистской, евклидовой КТП. К числу частных теорий относятся квантово-полевые теории электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий, различные версии единых теорий фундаментальных взаимодействий, наконец, так называемая стандартная модель, проверяемая в настоящее время на адронном коллайдере в ЦЕРНе. В любом случае универсальные и частные теории можно рассматривать как ПСЗ.

Реконструктивный подход рассматривает связи математики и реальности на уровне анализа интерсистемных отношений между физическими и математическими ПСЗ. С одной стороны, именно физические ПСЗ являются носителями и продуцентами объективного знания об их предметных областях, которые носят материальный характер. С другой стороны, современные физические ПСЗ невозможны без творческого использования математических ПСЗ. Важно подчеркнуть, что математические ПСЗ соотносятся с физической реальностью только через физические ПСЗ. Поэтому, при рассмотрении вопроса о связи математики и физической реальности следует учитывать опосредующую роль физических ПСЗ.

Предметными областями математических ПСЗ являются абстрактные творения (числа, геометрические фигуры, функции, интегралы, уравнения, группы и т.п.) высокоразвитого человеческого разума. Его свобода ограничена требованиями их непротиворечивости и доказательства их существования in mente, а также выводимостью утверждений об их индивидуальных и групповых свойствах и отношениях из принимаемых предпосылок. Будучи примененными в физических ПСЗ, эти творения выступают в качестве математических форм мышления, вскрывающих и выражающих нетривиальное физическое содержание.

Сказанное не отрицает влияния обыденного человеческого опыта и исследуемых физикой особенностей материальной реальности на конструирование многих этих творений. Однако это не означает, что все математические абстракции и системы знания о них обязательно имеют своими прообразами уже известные до момента их возникновения черты и структуры обыденной и физической реальности. Вместе с тем возможность использования в физических ПСЗ новых математических ПСЗ всегда остается открытой. Вряд ли все построенные к настоящему времени математические абстракции и знания о них найдут свое применение в физике.

Реконструктивный подход обнаруживает системно-структурное подобие математических и физических ПСЗ [2]. Каждая из них является сложной, иерархически организованной полисистемой. В ней выделяются логическая, лингвистическая, модельная, репрезентативная, проблемная, операционная, процедурная, аксиологическая и эвристическая подсистемы. В свою очередь, любая подсистема является иерархической системой, на уровнях которой располагаются специфические для нее однотипные конститутивные элементы. В конкретных ПСЗ эти подсистемы могут находиться на разных ступенях упорядоченности и осознания их создателями и пользователями.

Подсистемы отдельной ПСЗ и их уровни взаимосвязаны. Например, ресурсы лингвистической подсистемы определяют тип моделей из модельной подсистемы, а диапазон принятых моделей задает специфику задач из проблемной подсистемы. В достаточно продвинутой ПСЗ наряду с хорошо известными гипотетико-дедуктивными структурами существуют также пока малоизученные концептуальные, семиотические, синтаксические, семантические, прагматические, модельные, аксиологические, проблемные, процедурные, операционные, аппроксимационные, эвристические, номологические и другие структуры. В современной физике и математике функционирование отдельных ПСЗ возможно только в сети других систем. Между ПСЗ имеются различные отношения: использования, подчинения, фундаментальности, обоснования, включения, специализации, обобщения, редукции, формализации, квантификации, математизации, аксиоматизации, теоретизации и др.

Предлагаемый подход позволяет критически отнестись к концептуальным средствам стандартного дискурса о связи математики и (физической) реальности. В частности, утрачивает свое продуктивное значение слишком общий фразеологизм «математика как язык науки». Ведь любая физическая ПСЗ применяет язык не одной, а многих математических ПСЗ. Образно говоря, физическая ПСЗ «работает» только при использовании многих математических ПСЗ. Ее математическое окружение меняется с развитием физики. В разных подсистемах физической ПСЗ используются специфические математические языки.

Обращает на себя внимание и то, что математические абстракции функционируют в физических ПСЗ в «усеченном» виде. Это объясняет адресованные физикам упреки математиков в том, что первые грешат нестрогим использованием математических ПСЗ. Математические ПСЗ также выступают как материал для конструирования модельных подсистем физических ПСЗ и как инструмент их анализа. Процедурные и операционные подсистемы математических ПСЗ составляют основу для разрешения проблем, сформулированных в терминах построенных моделей физической реальности. Учет этих и других обстоятельств «локального» взаимодействия математических и физических ПСЗ позволяет по-новому анализировать «глобальную» проблематику связи математики и физики.

Доклад подготовлен в ходе выполнения совместного проекта № 15 фундаментальных исследований НАН Украины и СО РАН "Логико-методологический анализ языка науки и проблемы представления знания".

Литература

[1] В.И.Кузнецов. Реконструктивный подход в методологии науки // Философия науки. 2004, 2: 18-31. http://www.philosophy.nsc.ru/journals/philscience/2_04/kuz.pdf

[2] M.S.Burgin and V.I.Kuznetsov. On structural unity of mathematical and physical theories // Reports of the San Sebastian International Symposium “Structures in Mathematical Theories”, September 25–29, 1990. – San Sebastian: Universidad del Pais Vasco, 1990, 19-22.

Левич Александр Петрович, *д.б.н., Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова*

ИСКУССТВО И МЕТОД В МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ: ТЕОРЕТИКО-КАТЕГОРНЫЙ ВЗГЛЯД НА РЕАЛЬНОСТЬ

Мысль о том, что "природа действует простейшим образом", чрезвычайно стара и послужила источником многих научных идей и методических приемов. Открытие экстремальных принципов в свое время породило надежду подойти к законам природы не только "снизу", путем индукции, обобщения фактов, но и "сверху", путем дедукции от экстремальных принципов. Л. Эйлер, в частности, считал, что для этого нужно только путём общих "метафизических" рассуждений найти ту величину, которую "экономит" природа в данной области знания (т.е. "целевую функцию", "функционал") и сформулировать соответствующий экстремальный принцип. В скрытом виде этот принцип содержит все нужные законы, и получить их в явной форме – дело простой математической ловкости. Несмотря на соблазнительную простоту этой программы, реализовать ее ни разу не удалось – ни самому Эйлеру, ни тем, кто пытался следовать за ним. Причина этого достаточно очевидна: не существовало никакого регулярного метода для отыскания экстремизируемой величины. После ряда неудач программа Эйлера по отысканию законов природы "сверху" была заброшена. Более того, сами вариационные принципы были взяты под подозрение и "урезаны в правах" вследствие своего рода "телефобии", которой была заражена позитивистски настроенная наука. Позднее незаметно и, как это часто бывает, без лишней рефлексии наука вновь полностью вернулась к идеям экстремальности. Широкое распространение в науках естественного и гуманитарного циклов получил принцип максимума энтропии. С его помощью решают задачи в статистической физике, экологии, математике, лингвистике, кибернетике, экономике, психологии, теориях коммуникаций, надежности, распо-знавания образов и т.д. Основная проблема в применении этого принципа состоит в отсутствии явных процедур для сопоставления каждой из исследуемых систем адекватного её природе энтропийного функционала. Даже в прародительнице энтропии – статистической физике – подходы к расчету энтропии в интересующих исследователя случаях крайне ограничены (как сетовал И. Пригожин [1, с. 93], "формулировка второго начала с точки зрения современного физика представляет собой скорее программу, чем утверждение, допускающее однозначную интерпретацию, так как ни Томпсон, ни Клаузиус не указали точный рецепт, позволяющий выразить изменение энтропии через наблюдаемые величины"). Поэтому обычная практика при работе с принципом максимума энтропии состоит в постулировании для исследуемой системы какого-либо аналога формул Больцмана или Шеннона.

Но почему же в мире действуют экстремальные принципы? Готфрид Вильгельм Лейбниц считал – потому, что мы с вами живем в "лучшем из миров". Предлагаю на страницах книги [2] додумать эту мысль – в чем конкретно наш реальный мир так хорош, что математические экстремальные принципы имеют к нему действенное отношение? Движет мной не только любопытство, но и потребность науки в поиске законов изменчивости систем, особенно в тех исследовательских областях, в которых гениальное угадывание фундаментальных уравнений ещё не свершилось. Предложенный в книге подход предлагает читателю пути снижения доли субъективной, лишенной систематических методов творческой деятельности по угадыванию законов изменчивости, т.е. снижение доли ИСКУССТВА модельера, в пользу алгоритмизируемых процедур их вывода, т.е. строгого МЕТОДА для поиска уравнений обобщённого движения.

Один из шагов на пути к поставленной цели – это теоретико-категорное описание систем. Теория категорий и функторов была создана для адекватного описания математических структур в самом общем их понимании [3]. Язык этой теории позволяет отказаться от теоретико-множественного описания "застывших" состояний систем и перейти к формальному описанию процессов – движений и преобразований систем [4]. Второй шаг – метод функторного сравнения состояний систем [4, 5] – позволяет естественным образом упорядочивать состояние систем. Этот шаг открывает путь для наиболее общей формулировки принципа экстремальной структуры в теории систем. Третий шаг – расчеты функторных инвариантов для состояний систем – предоставляет систематический метод вычисления функции состояния, которая может быть интерпретирована как обобщенная энтропия системы, согласована со степенью структурированности этого состояния и, тем самым, может играть роль экстремизируемого функционала при дальнейшем вариационном моделировании. Четвертый шаг – применение современных методов вариационного исчисления, которые позволяют исследовать задачи с ограничениями в виде неравенств, а не равенств. Такое, казалось бы, небольшое техническое усовершенствование влечет радикальное расширение возможностей вариационного моделирования на актуальные, реалистические и сложные классы задач научного познания.

Существует еще один – темпорологический – аспект поиска законов изменчивости природных систем [6]. Дело в том, что фактически закон движения есть описание изменчивости исследуемого объекта с помощью изменчивости эталонного объекта, называемого часами. Поэтому от выбора часов зависит форма искомых уравнений. Так же, как уравнения движения однозначно связаны с порождающим их экстремальным принципом, так и темпоральные свойства уравнений порождены параметризацией изменчивости системы, имплицитно содержащейся в соответствующем экстремальном принципе.

На привлечение теории категорий и материала о структурированных множествах повлияла позиция многоголового автора эпохи Н. Бурбаки (1963): на основании абстрактной теории множеств всю математику можно представить как переплетение нескольких математических структур – алгебры, топологии и отношения порядка (по моему же личному, показавшемуся мне откровением, впечатлению от знакомства с "Теорией множеств" Н. Бурбаки [7] – не только всю математику, но и всё естествознание!). "В 1935 году Анри Картан вместе с Жаном Дьедоне, Андре Вейлем, Жаном Фредериком Дельсартом, Клодом Шевалле основали математическую энциклопедию "Элементы математики", которая издавалась под общим псевдонимом "Никола Бурбаки". Подготовка "Элементов математики" была прекращена, когда авторы осознали, что благодаря развитию математики за период выпуска 40 томов "Начал" (при активном участии "ассоциации сотрудников Николя Бурбаки"), основания математики уже не должны исходить из теории структурированных множеств. Научный фольклор утверждает, будто в ноябре 1968 года было объявлено, что "господин Бурбаки скончался" и в сопутствующем некрологе про причину кончины сказано, что усопший "влюбился в девицу Категорию".

Язык теории категорий и функторов не просто удобен в предлагаемом подходе, он суще-ственен, поскольку главное для теории систем понятие инварианта математической структуры обязательно подразумевает рассмотрение, помимо структуры системы, еще и всей совокупности допустимых ее преобразований. Наличие же равноправного с объектами-системами класса преобразований – одно из основных отличий теории категорий от теории множеств.

Теоретико-категорное описание систем позволяет:

1) Обнаружить естественную математическую формулировку экстремального принципа для отбора реально осуществляющихся состояний системы из всех ее потенциально возможных состояний.

2) Предложить строгий метод для расчета соответствующих экстремальному принципу функционалов. Поиск экстремума этих функционалов методами вариационного анализа приводит к точному количественному описанию состояний моделируемых систем.

Литература

1. Пригожин И. От существующего к возникающему. М.: Прогресс, 1985. 328 с.

2. Левич А.П. Искусство и метод в моделировании систем. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. 728 с.

3. Elenberg S., Mac Lane S. General theory of natural equivalence // Trans. Amer. Math. Soc. 1945. V. 58. Pp. 231-294.

4. Левич А.П. Теория множеств, язык теорий категорий и их применение в теоретической биологии. Учебное пособие. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. 190 с.

5. Levich A.P., Solov'yov A.V. Category-functor modelling of natural systems // Cybernetics and Systems. 1999. V. 30. №6. Pp. 571-585.

6. Levich A.P. Generating Flows and a Substantional Model of Space-Time // Gravitation and Cosmology. 1995. V. 1. №3. Pp. 237-242.

7. Бурбаки Н. Архитектура математики // Очерки по истории математики. М.: Мир, 1963. С. 245-259.

Маневич Леонид Исакович, *д.т.н., профессор, Институт химической физики РАН, Москва*

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ: РЕАЛИЗОВАННЫЕ И УПУЩЕННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

К анализу взаимодействия математики и физики можно подходить с различных точек зрения. Одна из них была сформулирована Е.Вигнером в его известной статье «Непостижимая эффективность математики в естественных науках». Вторая точка зрения оформилась как «Философия приложения математики» и связывается обычно с именем М.Штейнера. Как правило, в обсуждениях этой темы речь идет о нетривиальных аспектах «проникновения» математики в физику.

В докладе взаимодействие математики и физики будет обсуждаться как процесс взаимопроникновения идей, открывающий новые и, зачастую, неожиданные перспективы в обеих этих науках. Будут рассмотрены ситуации, когда такое взаимодействие оказывалось принципиально важным, но его реализация или, напротив, игнорирование определялись философским умонастроением отдельных исследователей либо научного сообщества в целом. В результате достигался существенный прогресс в понимании сложных проблем, либо из-за упущенной возможности взаимодействия математики и физики такой прогресс откладывался на годы или десятилетия. Яркими примерами являются теории солитонов и фракталов.

Одна из проблем, относящаяся к классической динамике и допускающая также квантовую интерпретацию, рассмотрена более детально [1,2]. Она относится к описанию широко известного физического явления – биений (в школьном курсе физики оно наглядно демонстрируется на примере двух слабо связанных камертонов). Биения характеризуются полным энергообменом между двумя слабо связанными механическими, акустическими, электрическими или оптическими осцилляторами. Но попытка непосредственного обобщения этого понятия на системы, состоящие из большего числа осцилляторов, наталкивается на принципиальные трудности. Формальные математические возможности, которые позволяли решить задачу для двух осцилляторов в линейном приближении, но не опирались на физическую интуицию, фактически уводили от более глубокого ее понимания, и поэтому важный ряд физических понятий вместе с соответствующим ему математическим аппаратом оказался «пропущенным» в развитии как линейной, так и нелинейной динамики.

Оказалось, что адекватный подход, опирающийся на физическую интуицию, приводит к естественному обобщению концепции биений на системы, состоящие из многих линейных или нелинейных осцилляторов и даже осцилляторных цепей. При этом роль, которую при традиционных биениях играют собственно осцилляторы, переходит теперь к обобщенным, включающим определенное число частиц, эффективным осцилляторам, между которыми и происходит энергообмен уже в линейном приближении. Они представляют собой альтернативу коллективным осцилляторам, которые в линейном приближении вообще не обмениваются энергией. Сами же биения описываются «предельными фазовыми траекториями», соответствующими полному обмену энергией между «эффективными осцилляторами». Применимость этой новой идеологии выходит далеко за пределы механики. Она впервые позволила выявить природу общности широкого класса задач физики твердого тела, нелинейной оптики, фотоники и биофизики, для которых традиционные парадигмы этих областей физики оказались недостаточными. В то же время потребовалась разработка математического аппарата, отражающего специфику феномена биений и их обобщений.

На самом глубоком с точки зрения математики уровне оказывается, что хорошо изученные стационарные процессы и нестационарные процессы типа биений различаются лежащими в основе их адекватного описания числовыми системами: в первом случае это широко известные комплексные (эллиптические) числа (числа с базисом (1, i), $i^2=-1$)), во втором - гораздо менее известные и до недавнего времени не применявшиеся в динамике гиперболические числа (числа с базисом (1, e), $e^2=1$,). Роль мнимой единицы в случае гиперболического числа играет унипотент e.

Литература

1. Manevitch L.I., Smirnov V.V. Phys. Rev. E 82, 036602, 2010

2. L.I.Manevitch, O.V.Gendelman, Tractable Models of Solid Mechanics: Formulation, Springer New York (2011)

Матюшкин Игорь Валерьевич, *к.ф.-м.н., доцент, ОАО «НИИ молекулярной электроники» (Москва, Зеленоград)*

ЧЕЛОВЕЧЕСКИЙ ФАКТОР В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ В ОБЛАСТИ НАНОЭЛЕКТРОНИКИ

Как известно, задача о кенигсбергских мостах породила теорию графов. Тогда в одном лице Леонард Эйлер совмещал и математика, и расчетчика, и постановщика задачи. По мере специализации науки вначале потребовалось разделение труда – чистого или прикладного математика и специалиста в конкретно-предметной области. Еще в 70-х гг. Конрад Цузе [1] прозорливо отметил возникновение и третьей фигуры – специалиста по программированию, программному обеспечению (ПО) и вычислительной технике. Таким образом, математическое моделирование (ММ) становится необходимо-коллективной работой по крайней мере трех человек. Возникает человеческий фактор, связанный со взаимным недопониманием, истоки которого во многом определяются различными целями и смыслом ММ, субъективно воспринимаемыми участниками (назовем их для краткости – Математик, Программист и Специалист). Это и задает тему для настоящего доклада.

Какой же смысл можно вкладывать в термин ММ? По известному изречению Э.Т. Белла, математика является и королевой, и служанкой наук. Последняя точка зрения ярко представлена цитатой из академика А.Н. Крылова [2]: «Для геометра математика сама по себе есть конечная цель, для инженера — это есть средство… Инженер должен по своей специальности уметь владеть своим инструментом, но он вовсе не должен уметь его делать… Так вот геометра, который создаст новые математические выводы, можно уподобить некоему воображаемому универсальному инструментальщику, который готовит на склад инструмент на всякую потребу; он делает все, начиная от кувалды и кончая тончайшим микроскопом и точнейшим хронометром». Различие между «чистой» и «прикладной» математикой, по-видимому, лежит в голове ученого: первая требует следования логике развития самого математического аппарата (теория квадратичных вычетов как развитие теории сравнений), а вторая желает удобства использования теорем на практике (теорема Котельникова в радиотехнике, принцип максимума Понтрягина в теории управления). Пример квантовой механики, потребовавшей создания принципиально нового инструмента, а именно аксиоматического формализма операторов, показывает, что в расширительном смысле под ММ подпадает любая научная деятельность. Гораздо чаще инструмент уже имеется, но его нужно немного заточить, понизив уровень абстракции теорем. Но еще гораздо чаще все необходимые теоремы и уравнения известны, как, например, уравнение Навье-Стокса в гидродинамике, а нужно лишь для конкретной физической системы специфицировать граничные условия. В наноэлектронике уравнения заранее «зашиты» либо в достаточно общих программных системах мультифизики (AnSYS или Comsol), либо в специализированных пакетах (Supreme). И тогда мы наблюдаем процесс вульгаризации, когда ММ из высокого искусства превращается вначале в лишенную эстетики симуляцию (т.н. имитационные модели), что подтверждается в англоязычных статьях подменой слов: modeling на simulation, а затем становится промышленно-штамповочным ремеслом, сводящимся к расчету на освоенном Программистом ПО. Не умаляя актуальности проблем научной визуализации и достижения практически значимых цифр, например, по профилю распределения примесей в кремниевой подложке, такое промышленное (не путать с индустриальным!) моделирование [3], осуществляемое средствами коммерческого ПО, оказывается лишенным научного значения. Поскольку одни цифры зависят от других, не всегда достоверно известных, поскольку параметризация модели определяет результат, то рождается скепсис по отношению к ММ – «что заложишь, то и получишь». И тогда в самом узком смысле ММ получает статус «интерполяции», задача которой сводится к поиску аналитической формулы, описывающий ряд экспериментальных данных. При формальном признании роли математического моделирования многие специалисты в конкретно-предметной области относятся к нему пренебрежительно, зачастую видя в нем наукообразную обертку – «ну вы там что-то нам посчитайте для отчета».

Мы будем говорить об ММ в некотором «среднем» смысле, где наиболее трудоемок этап формализации, а именно по мере понижения абстракции в цепи: чистая математика → прикладная математика → ММ → вычислительный эксперимент → расчет на промышленном САПР. К сожалению, обратное движение, требующее усилия мысли и временного ресурса, редко наблюдается. Например, когда требуется в сжатый срок численно решить систему дифференциальных уравнений, пренебрегают предварительным исследованием этой системы качественными методами. Рыночные условия, постоянная гонка не позволяют и полноценно проводить вычислительный эксперимент.

Рассмотрим вершины целей и проблемные ребра треугольника «Специалист - Математик – Программист». Специалист либо является, либо назначается главой группы заказчиком ММ. Его цель в получении интересующих цифр, а его функция в группе – предоставление знаний по предметной области, формулировка концептуальной стороны задачи и предоставление результатов расчетов аналогичных систем. Если предметная область уже достаточна математизирована, то он обязан указать её традиционный математический аппарат и часто приводимые в литературе соотношения. Целью и интересом Математика является исследование вводимых в модели математических объектов. Таким объектом может быть и нестандартная вычислительная сетка, и устойчивость численного решения. Функция Математика в группе – написать соотношения модели и прописать их «физический» смысл. Целью и интересом Программиста является получение опыта и навыка в использовании утилит (в т.ч. исполняемых на суперкомпьютерах или grid/cloud-сервисах). Его функция в группе состоит в реализации скриптов, проверки их корректности и проведении вычислительного эксперимента.

Линии потенциальных конфликтов и напряжения возникают по вопросам:

1) «Специалист – Математик»: концептуализации при составлении модели, правильности понимания ситуации и справедливости пренебрежения какими-то факторами, подгонке исходных параметров;

2) «Математик – Программист»: проверки адекватности скриптов уравнениям, подбора тестовых примеров, модификации текста программы, удобства интерфейса;

3) «Специалист – Программист»: объема и сроков реализации расчетов, цены программного обеспечения

Следует отметить, что для успешного ММ необходима готовность участников не только к декларируемым шагам навстречу, но и к усвоению кажущимися ими лишними сведений: Специалист может оказаться консервативен для прочтения сведений об игре «Жизнь» (чтобы ему понять на примере ограничения и предпосылки аппарата клеточных автоматов), Математик может высокомерно отказаться от усвоения принципов организации GPU-вычислений и параллелизма алгоритмов и т.д.

Литература

1. Konrad Zuse. Calculating Space, MIT Technical Translation, (Proj. MAC), Cambridge, Mass. 02139, Feb. 1970. - http://www.idsia.ch/~juergen/digitalphysics.html

2. Крылов А.Н. Значение математики для кораблестроения // Мои воспоминания. — М.: изд-во АН СССР, 1963 / Составители: Н.И.Барбашев и С.А.Шерр - http://militera.lib.ru/memo/russian/krylov_an/index.html

3. Pryor R.W. Multiphysics Modeling Using COMSOL : A First Principles Approach, Jones and Bartlett Publishers LLC, 2009.

Минков Станислав Сергеевич, *аспирант, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*

ПРОБЛЕМЫ ПОНЯТИЯ «ВЫСОКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ» СУЖДЕНИЯ

Мне кажется, что существуют две редко обсуждаемые, но очень досадные детали, которые делают само использование слов "высокая вероятность научной гипотезы" или "правдоподобие теории" крайне затруднительным.

Первая деталь: индивидуальные факты не имеют вероятности. Зачастую ускользает из виду, что утверждение "Жизнь на Марсе существует с вероятностью 3%" не имеет особого смысла. Само понятие вероятности было введено строго только для повторяющихся событий с обозримым числом возможных исходов (в так называемой аксиоматике Колмогорова). Например, в примере с игральным кубиком можно приписать каждому элементарному исходу вероятность 1\6; понятно, что при большом числе повторений бросаний кубика доля выпадания двойки (равно как и любого другого числа) все ближе к 1\6. Когда нет никаких повторений, нет и никакой вероятности. И ее нет не по причине какой-то неопределенности в терминах, а существенным образом. Попробуем понять, как определить вероятность, есть ли жизнь на Марсе. Проблема в том, что ответы, конечно, либо «ДА», либо «НЕТ», но тут нет никакого повторяющегося эксперимента. Пойдем путем сведения задачи к похожей на предыдущую. Зададим вопрос «Пусть у планеты такой-то вес (с точностью до каких-то процентов) и такое-то расстояние до солнца (опять же, примерно). С какой вероятностью на ней есть жизнь?». Теперь вероятность определить просто. Надо поделить число всех планет такого типа, на которых есть жизнь, на число планет такого типа вообще. (Тут есть техническая проблема: а как мы узнаем, что на них есть жизнь? Но пусть нам инопланетяне дали общую статистику, а по конкретным планетам данных нет). Получилась какая-то вероятность. Но потом мы решили уточнить вопрос, и добавили к весу и расстоянию до солнца еще и данные по составу атмосферы. И вероятность получилась совсем другой. Потом еще уточнили вопрос, добавили данные о числе спутников, о числе солнц и так далее. И вероятности будут получаться все время разные, они будут «скакать» сколь угодно сильно, может быть, иногда превышая 90%, а уже со следующим уточнением параметра падая ниже 10%, чтобы потом снова вернуться, скажем, к 95%.

Вторая проблема состоит в том, что учет влияния опыта на гипотезу требует введения неких "априорных" вероятностей. Действительно, формула Байеса позволяет рассчитать, насколько данное наблюдение делает гипотезу более или менее вероятной – но только если начальное распределение вероятностей задано. Именно поэтому математики зачастую расценивают эту формулу как «сильно скомпрометированную безосновательными попытками ее применения», а попытки опереться на нее в философии – «неутихающим колоброжением вокруг формулы Байеса» [1]. Нижеприведенное рассуждение поясняет, какие бывают тонкости в понятии априорного распределения.

Предположим, мы живем на Острове; Остров перегорожен Пустыми Горами, делящими его на две равные части - Север и Юг. В Пустых Горах нет живых существ, а на Севере и Юге есть разные животные, но - в равном числе. Мы живем на Юге и нам известно, что на Юге ворон нет. Вороны живут на Севере, причем половина живет в Темном Лесу, а половина в других местах Севера. В Темный Лес мы не пойдем ни при каких условиях. Нас интересует проверка гипотезы "Все вороны черные". Черный цвет распределен на Острове равномерно на Севере и на Юге.

План № 1. Проверять ворон. Для этого надо отправиться на Север и проверить все доступные места. Так как Темный Лес для нас закрыт, то мы переберем половину ворон. Половина полной индукции проведена.

План № 2. "Все вороны черные" = "Все, что не-черное, не ворона". Будем проверять все нечерные предметы. Можно обойти весь Юг, проверяя нечерные предметы. Так как нечерные предметы распределены примерно равномерно, то мы проведем половину от полной индукции, как и в плане № 1.

Но этот план можно еще существенно улучшить. Действительно, зачем проверять предметы на Юге? Мы и так знаем, что ворон на Юге нет. Поэтому заведомо нечерные предметы — не вороны. Поэтому даже не надо ничего делать, чтобы получить половину перебора.

Можно ли сказать, что и в том, и в другом случае мы подкрепили свою гипотезу одинаково? Нет, конечно. Дело в том, что план № 2 содержал тот изъян, что не учитывал, что нам известно, что вероятность встретить ворону на севере ненулевая, а на юге – нулевая. Это показывает, что даже при самом проведении эксперимента критически важно учитывать априорные вероятности. Однако вопрос состоит в том, как их получить.

Х. Патнэм, уделивший вопросу связи «априорной» и «апостериорной» вероятности значительное внимание, предложил опираться на опыт «на основе индуктивных экстраполяций» [1]. В сущности, этот метод восходит еще к индуктивной логике Милля.

Однако практическая трудность состоит в том, что неизвестно, как осуществлять экстраполяцию. Во времена восстания ихэтуаней в Китае против европеизации страны многие мятежники утверждали, что от них отлетают пули. Современному европейцу такое представление кажется дикостью. Но почему? Европеец смотрит на то, что все мягкие тела пробиваются пулями, и, экстраполируя, приходит к выводу, что тела ихэтуаней тоже пробиваются. Китаец смотрит на то, что все, что находится в согласии с традиционными воззрениями Поднебесной, неуязвимо и пережило тысячи лет, и, экстраполируя, заключает, что и тела ихэтуаней неуязвимы. И подавление восстания, строго говоря, не закрывает вопрос.

Рассматривается и еще один пример такого рода. Дж. С. Милль [2] предлагал представлять силлогизм типа «Все люди смертны. Сократ человек. Следовательно: Сократ смертен» в таком виде: «Все известные мне люди прежде умирали. Сократ человек. Следовательно: Сократ когда-то умрет». Да, все так, но почему мы стали экстраполировать по множеству «человек» - вот вопрос. Только потому, что это одно слово? Но введем какое-то обозначение для множества «всех людей, кроме Сократа», назовем их, скажем, элюдьми. В таком языке опыт ничего не говорит нам о смертности Сократа.

Рассмотренные модельные примеры показывают, что наше представление о научности и ненаучности, «высокой» или «низкой» вероятности гипотезы зачастую опирается на априорное распределение вероятностей, и таким образом, является представлением «психологическим», независимым от индивидуальных фактов и экспериментов.

Литература

[1] Патнэм Х. Философия сознания. М.: Дом интеллектуальной книги, 1999, 139-142.

[2] Милль Дж. С. Система логики силлогической и индуктивной: Изложение методов доказательства в связи с методами научного исследования. М.: ЛЕНАНД, 2011, 178-179.

Мороз Виктория Васильевна, *д.ф.н., доцент, Курский государственный университет*

К ВОПРОСУ О СПЕЦИФИКЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ГУМАНИТАРНОЙ ОБЛАСТИ

Процесс математизации знания, как известно, представляет собой приложение математики к нематематическим наукам. Принято считать, что математика успешно применима к теориям, в которых выявляются модели, пригодные для количественной обработки и для определения в точных понятиях [1]. В силу этого обстоятельства перспективы математизации в сугубо гуманитарной области, какой является философия, выглядят весьма сомнительными. Тем не менее, в самой математике наряду с технической (формализованной, количественной) составляющей неустранимо присутствует гуманитарный (смысловой, качественный) компонент, потенциал которого позволяет усомниться в «нематематизируемости» гуманитарной сферы. Однако специфика гуманитарного познания требует математизации особого типа. Каковы же его особенности?

Поиск ответа на вопрос приводит к работам известного современного исследователя, математика и философа В.В. Налимова, в которых идет речь о семантическом континууме и космически универсальной многоуровневой природе сознания. «Математизировать какую-либо область знания, – пишет Налимов, – это значит: (1) выбрать некоторые математические структуры; (2) связать с ними некоторые содержательные предпосылки, относящиеся к объекту моделирования; (3) придать структурам, обогащенным дополнительными предпосылками, статус образа» [2]. Исследуя уровень «предмышления», играющего в функционировании сознания существенную роль и на котором вырабатываются исходные предпосылки, базовые для собственно логического мышления, Налимов разрабатывает вероятностно ориентированную концепцию сознания, построенную на обращении к формуле Бейеса, хорошо известной в математической статистике.

Для построения концепции Налимов выбирает соответственно: (1) линейный континуум Кантора (т.е. множество всех действительных чисел, упорядоченных по их возрастанию); полагается, что на этом континууме изначально упорядочены все возможные смыслы; (2) предложенный выше образ рассматривается как семантический вакуум – в нем все есть, но ничто не проявлено; (3) полагается, что проявленность семантического континуума, т.е. превращение его в текст, осуществляется тогда, когда на нем появляется функция $p(\mu)$, задающая плотность вероятности, – это значит, что различным участкам континуума придается различная мера; (4) изменение смысла текста – его новое прочтение – это появление в некой новой ситуации y фильтра $p(y)$, мультипликативно взаимодействующего с исходной функцией: $p(\mu/y)=kp(\mu)p(y/\mu)$ (формула Бейеса).

В данном случае формула обретает статус вероятностного силлогизма: из двух размытых посылок $p(\mu)$ и $p(y/\mu)$ с необходимостью следует новый текст, порождаемый функцией – $p(\mu/y)$. Логика оказывается числовой: в ее силлогизме стоит знак умножения, имеющий не логическое, а числовое раскрытие. Функция $p(\mu/y)$, возникшая в ситуации y, редуцируется, резко огрубляясь, к дискретам – семантическим атомам – и передается на уровень логического мышления. Ответственным за логическое переосмысление текста оказывается акт спонтанного появления фильтра $p(y/\mu)$. Таким образом, согласно предлагаемой концепции, понимание текста не только является личностным, но и происходит спонтанно, свидетельствуя о том, что внутри сознания происходит процесс самоорганизации.

Строя и обосновывая вероятностную модель порождения смыслов как наиболее подходящую для интерпретации космически универсального феномена сознания, Налимов показывает, как возможно использование математических моделей в раскрытии философской мысли. Однако творчество нашего соотечественника – не единственный пример специфической математизации в гуманитарной области. История философии предлагает немало вариантов подобного рода моделирования. Таковы отдельные изречения Гераклита Эфесского, размышления Парменида о бытии и Платона о благе, в которых математические элементы играют роль своеобразной метафоры, разъясняющей философские идеи. Яркий пример специфического математического моделирования в философско-теологической области предлагается в «Ученом незнании» Николая Кузанского, видевшего в простых математических объектах богатейший познавательный потенциал для раскрытия вопросов о бесконечности Творца и Вселенной, об ученом незнании как высшей форме теоретического разума. Представитель классического рационализма Г. Лейбниц также считал возможным применять математические конструкции для прояснения философской мысли. В некоторых размышлениях Лейбниц вводит в контекст метафизического рассуждения математические фрагменты, позволяющие дать рассуждению наглядно представление, тем самым разъясняя его и даже способствуя рождению известной идеи в философии Лейбница о двух родах истин: истин разума, установленных путем логического анализа, и истин факта, полученных из опыта [3].

В русле рассматриваемой темы особого внимания заслуживают труды представителей Московской философско-математической школы. Так, в работах одного из ее основателей Н.В. Бугаева реализуется вариант философско-математического синтеза, в котором математические конструкции (например, математическая единица) и математический стиль выражения мысли (а именно, формулирование дефиниций и их использование в качестве отправных точек дальнейшего рассуждения) выступают как фундамент для метафизического построения. Идеи, выдвинутые представителями Московской философско-математической школы, получили свое развитие в трудах П.А. Флоренского. Так, в главе «Иррациональность в математике и догмате» книги «Столп и утверждение Истины» математическая конструкция – введение иррационального числа – служит схемой для мысли, стремящейся к постижению отношений Бога и тварного мира. В работе «Макрокосм и микрокосм» понятийный аппарат канторовской теории множеств используется для обоснования идеи единства человека и мира. Предложенная в статье «Пределы гносеологии» математическая конструкция помогает раскрыть концепцию времени в его гносеологическом измерении. В разделе «Обратная перспектива» книги «У водоразделов мысли» математические результаты из области геометрии и теории точечных множеств истолковываются в пользу онтологического превосходства иконы над светской живописью. В разделе «К методологии исторической критики» книги «Столп и утверждение Истины» намечается путь применения теории вероятности к истории и т.д.

Рассматривая математику не только как науку, а как основу мировоззрения, Флоренский считает, что использование соответствующих математических конструкций ведет к правильному пониманию вопросов философского и теологического характера. Так, классификация трансфинитов в работе о. Павла «О символах бесконечности» служит разъяснению вопроса о небесной иерархии, толкование теоремы П. дю Буа Реймона в статье «О типах возрастания» – выяснению возможности бесконечного совершенствования личности, интерпретация комплесных чисел в «Мнимостях в геометрии» – построению модели соединения дольнего и горнего миров. Причем предполагаемые модели «не аналогии или сравнения, а указания на сходство по существу, – не что-либо, что можно принимать, но можно и не принимать, в зависимости от вкусов, а неч-то, правомерность чего определяется достаточно раздельными посылками; короче – необходимо-мыслимые схемы» [4].

Предложенные примеры своеобразной математизации выразительно показывают, что математическая модель в данном случае раскрывает не формализованную сторону явления, как это происходит в естественных науках, статистике или социологии, а содержательную сторону, проясняя его смысл. Активизация именно смысловой составляющей математики делает возможным использование математических моделей в философском познании.

Литература

1. Перминов В.Я. Философско-методологические и исторические проблемы математизации знания // Современные философские проблемы естественных, технических и социально-гуманитарных наук / Под общ. ред. В.В Миронова. М: Гардарики, 2007. С. 57.

2. Налимов В.В. Как возможна математизация философии // Вестник Московского университета. Серия 7, философия: Научн. журнал. М.: Изд-во МГУ, 1991. № 5. С. 8.

3. Лейбниц Г.В. Два отрывка о свободе // Лейбниц Г.В. Сочинения в 4-х т.: Т.1. М.: Мысль, 1982. С. 316.

4. Флоренский П.А. Об одной предпосылке мировоззрения // Весы: Ежемесячник искусства и лит. М: Скорпион, 1904. № 9. С. 28.

Невважай Игорь Дмитриевич, *д.ф.н., профессор,*
Саратовская государственная юридическая академия

ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ РЕАЛЬНОСТИ В КОНТЕКСТЕ КУЛЬТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Тема реальности в математике может быть рассмотрена в разных контекстах. Согласно традиции классической новоевропейской философии математика рассматривалась как особый вид абстрактного знания, и вопрос о реальности в математике сводился к вопросу об истинности математического знания. Реальность должна мыслиться как прообраз математического знания. Такой узкий подход имеет право на существование, но тема реальности в математики не исчерпывается им. В докладе предпринимается попытка рассмотреть тему реальности в математике в рамках подхода к математике как форме языковой мыслительной деятельности. Осмысливая природу математического мышления как специализированной символической деятельности, можно обнаружить интересные особенности отношения математического языка с тем, что математики рассматривают как реальность. При этом обнаруживается, что тема «математика и реальность» замещается осмыслением понятия «математическая реальность». В связи с этим традиционная для философии математики контроверза «математического платонизма» и «натурализма» может получить новое осмысление.

В докладе рассматриваются две доминанты в культуре математического познания, которые были декларированы и ярко проявились в творчестве Галилея и Вейля. Г. Галилей верил в то, что «книга природы» написана на языке математики, а буквами этого языка являются числа и фигуры. Немецкий математик Г. Вейль говорил о математическом творчестве как о процессе «математизирования», видя аналогию и сравнивая его с музицированием, ваянием, живописанием и т.п. В этих двух фундаментальных метафорах – математика как язык самой действительности и математика как языковая игра и конструирование – выражены два альтернативных типа культуры, в контексте которых реализуется математическое мышление и по-разному решается вопрос о реальности. В галилеевой метафоре математический язык рассматривается как «адекватное» выражение объективного содержания природы. В вейлевском образе математика представляется как язык, посредством которого «строятся» математические объекты.

Как показано в моей книге «Свобода и знание» данные типы культуры определяются тем, как рассматривается отношение знака и значения: либо как необходимое и определенное, либо как случайное и условное. Для одной культуры значение первично, а знак вторичен, для другой, напротив, знак первичен, а значение вторично. В математике реализуются оба типа культуры. Первый из этих типов я определяю как культуру выражения, и ему соответствует галилеевское понимание языка математики. Второй тип культуры я называю культурой правил, и ей соответствует вейлевская версия природы математического знания.

Культура правил определяется отношением к знаку как к чему-то условному и произвольному по отношению к референту. Здесь деятельность сознания реализуется в интенциональных актах, которые направлены на поиск значения знака. Эти акты лежат в основе процедуры интерпретации знака. Знак и правила его употребления определяют свой референт, поэтому здесь действует норма: «существует то, что правильно», что задано правилом, нормой, закодированной в используемом знаке. То, что вводится посредством нормы, или правила, то и существует реально. Таким образом, сознание здесь работает как «фабрика реальности». Применительно к математике это видно на примере тех ситуаций, когда математические объекты вводятся посредством определений и заданием правил обращения с ними. Так происходит, когда задается определенная аксиоматика. Определение фиксирует то, что должно существовать в «реальности». Это характерно для конструктивного подхода в математике, в которой «существовать – значит быть построенным». В данном типе культуры определяющей ценностью является порядок, причем порядок установленный и контролируемый разумом. Интересно, что в одном из первых определений предмета математики, которое дал Декарт, говорится, что к области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо мера и при этом не существенно будут ли это числа, фигуры, звезды, звуки или что-нибудь другое, в чём отыскивается эта мера. Поэтому в данном случае математика для обоснования своих утверждений апеллирует не к физическому опыту, а руководствуется принципами непротиворечивости, доказуемости, полноты и др. Критерием же оценки эффективности математической деятельности является выполнимость (вычислимость) действий.

В другом типе культуры – культуре выражения – сознание направлено на поиск выражения данного содержания. Задача состоит в том, чтобы найти «правильное» выражение или репрезентативную форму, соответствующую данному содержанию. В основе этого действия лежат качественно иные акты сознания, которые в феноменологии называют респонсивными актами (Б. Вальденфельс). Респонсивные акты проявляются в способности сознания принять «вызовы» иной субъектности, субъектности Другого. Этим Другим может оказаться предмет, которые стремится выразить себя, хотя бы в такой простейшей форме как в форме «собственного» имени. Актом именования реальность делается фактом нашего сознания. Респонсивные акты определяют совершенно другой тип культуры, для которого определяющей является мысленная оппозиция «правильное – неправильное», относящаяся к оценке выражения, репрезентации. В данном типе культуры «правильным» считается то представление, которое адекватно выражает существующую реальность. Здесь имеет смысл говорить об истинности языковых выражений, а не просто об их правильности. Здесь действует другая норма: «правильно то, что существует». На этапе своего формирования, когда в математике складывались представления о числе, фигуре, отношении, в ней доминировала культура выражения.

Две сущностные способности сознания – респонсивность и интенциональность – определяют два альтернативных типа культуры математического мышления. Это объясняет тот факт, что в математике «работают» два языка. В докладе предпринимается попытка показать, что математика есть особенный способ мышления, который рассматривает знак и его значение как две равноправные и взаимодополнительные «математические реальности», и, вместе с тем, дает описание отношений между областью знаков и областью значений, рассматривая «отображения» одной области на другую. Математическая реальность двойственна: она является либо как значение знака, либо как знак определенного значения. Рассматриваются некоторые методологические следствия такого понимания математической реальности.

Орлов Александр Иванович, *д.т.н., д.э.н., к.ф.-м.н., профессор, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана*

О НОВОЙ ПАРАДИГМЕ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Философские предпосылки разработки математических методов и моделей в той или иной прикладной области (в экономике и управлении (менеджменте), при прогнозировании и предотвращении авиационных происшествий, управлении рисками при создании ракетно-космической техники и т.п.) заслуживают обсуждения. В докладе [1] мы исходили из того, что предназначенные для практического использования математические модели и основанные на них методы должны быть устойчивы к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей. Требование устойчивости касается математических моделей, но само находится вне математики. Оно навязывается математикам извне. И достаточно сильно меняет оценку целесообразности тех или иных исследований.

Обратим внимание на смену парадигм (в смысле Т. Куна [2]) в прикладной математике. Рассмотрим новую (XXI в.) парадигму математических методов исследования в сравнении со старой (середины XX в.). Основное внимание уделим вероятностно-статистическим методам исследования, методам анализа данных.

Во второй половине 1980-х гг. развернулось общественное движение по созданию профессионального объединения специалистов в области организационно-экономического и экономико-математического моделирования, эконометрики и статистики (кратко – статистиков). Аналоги - британское Королевское статистическое общество (основано в 1834 г.) и Американская статистическая ассоциация (создана в 1839 г.). В ходе организации ВСА были проанализированы состояние и перспективы развития рассматриваемой области научно-прикладных исследований и осознаны основы уже проявившейся к концу 1980-х гг. новой парадигмы прикладной математики, прежде всего в области организационно-экономического моделирования, эконометрики и статистики.

Типовые исходные данные в новой парадигме – объекты нечисловой природы (элементы нелинейных пространств, которые нельзя складывать и умножать на число, например, множества, бинарные отношения), а в старой – числа, конечномерные векторы, функции. Ранее для расчетов использовались разнообразные суммы, однако объекты нечисловой природы нельзя складывать, поэтому в новой парадигме применяется другой математический аппарат, основанный на расстояниях между объектами нечисловой природы и решении задач оптимизации.

Изменились постановки задач анализа данных и экономико-математического моделирования. Старая парадигма математической статистики исходит из идей начала XX в., когда К. Пирсон предложил четырехпараметрическое семейство распределений для описания распределений реальных данных. В это семейство как частные случаи входят, в частности, подсемейства нормальных, экспоненциальных, Вейбулла-Гнеденко, гамма-распределений. Сразу было ясно, что распределения реальных данных, как правило, не входят в семейство распределений Пирсона (об этом говорил, например, академик С.Н. Бернштейн в 1927 г. в докладе на Всесоюзном съезде математиков). Однако математическая теория параметрических семейств распределений (методы оценивание параметров и проверки гипотез) оказалась достаточно интересной, и именно на ней до сих пор основано преподавание во многих вузах. Итак, в старой парадигме основной подход к описанию данных - распределения из параметрических семейств, а оцениваемые величины – их параметры, в новой парадигме рассматривают произвольные распределения, а оценивают - характеристики и плотности распределений, зависимости, правила диагностики и др. Центральная часть теории – уже не статистика числовых случайных величин, а статистика в пространствах произвольной природы, т.е. нечисловая статистика [3].

В старой парадигме источники постановок новых задач - традиции, сформировавшиеся к середине XX века, а в новой - современные потребности анализа данных (XXI век), т.е. запросы практики. Конкретизируем это общее различие. В старой парадигме типовые результаты - предельные теоремы, в новой - рекомендации для конкретных объемов выборок. Изменилась роль информационных технологий – ранее они использовались только для расчета таблиц (информатика находилась вне математической статистики), теперь же они - инструменты получения выводов (датчики псевдослучайных чисел, методы размножения выборок, в т.ч. бутстреп, и др.). Вид постановок задач приблизился к потребностям практики – от отдельных задач оценивания и проверки гипотез перешли к статистическим технологиям (технологическим процессам анализа данных). Выявилась важность проблемы «стыковки алгоритмов» - влияния выполнения предыдущих алгоритмов в технологической цепочке на условия применимости последующих алгоритмов. В старой парадигме эта проблема не рассматривалась, для новой – весьма важна.

Если в старой парадигме вопросы методологии моделирования практически не обсуждались, достаточными признавались схемы начала XX в., то в новой парадигме роль методологии (учения об организации деятельности) является основополагающей. Резко повысилась роль моделирования – от отдельных систем аксиом произошел переход к системам моделей. Сама возможность применения вероятностного подхода теперь – не «наличие повторяющегося комплекса условий» (реликт физического определения вероятности, использовавшегося до аксиоматизации теории вероятностей А.Н. Колмогоровым в 1930-х гг.), а наличие обоснованной вероятностно-статистической модели. Если раньше данные считались полностью известными, то для новой парадигмы характерен учет свойств данных, в частности, интервальных и нечетких. Изменилось отношение к вопросам устойчивости выводов – в старой парадигме практически отсутствовал интерес к этой тематике, в новой разработана развитая теория устойчивости (робастности) выводов по отношению к допустимым отклонениям исходных данных и предпосылок моделей.

Выполнена рекомендация Учредительного съезда ВСА по созданию комплекта учебной литературы на основе новой парадигмы. Перечень изданий приведен в [4]. Предстоит большая работа по внедрению новой парадигмы прикладной математики в научные исследования и преподавание.

Литература

1. Орлов А.И. Философские основания устойчивого математического моделирования процессов управления промышленными предприятиями. - Философия математики: актуальные проблемы: Тезисы Второй международной научной конференции; 28-30 мая 2009 г. – М.: МАКС Пресс, 2009. – С.284-287.

2. Кун. Т. Структура научных революций. – М.: АСТ, 2009. – 317 с.

3. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование. Ч.1. Нечисловая статистика. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009.

4. Орлов А.И. Новая парадигма организационно-экономического моделирования, эконометрики и статистики // Вторые Чарновские Чтения. Материалы II международной научной конференции по организации производства. Москва, 7 – 8 декабря 2012 г. М.: НП «Объединение контроллеров», 2012. С. 116-120.

Перминов Василий Яковлевич, *доктор философских наук, профессор, г. Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова.*

СИСТЕМНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ОПЕРЕЖАЮЩЕГО РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ

Математика обладает определенной свободой в построении своих внутренних объектов. На базе имеющихся объектов и операций из чисто формальных соображений могут быть введены другие объекты и операции, не связанные с интуитивной основой исходных объектов. Неевклидовы геометрии и многомерные пространства - наиболее известные примеры таких объектов.

Способ введения внутренних объектов математики не предполагает какой-либо их связи с реальностью. Практика, однако, показывает, что эти объекты находят эмпирическую интерпретацию и переходят в сферу образов, имеющих прикладное значение. Математика в своем внутреннем развитии как бы предвосхищает потребности будущего математического естествознания.

На эту особенность взаимодействия математики и физики указывал еще Ф.Клейн в работе, посвященной применению проективных метрик в теории относительности [1]. А.Эйнштейн в статье о Кеплере высказывал восхищение загадочной гармонией природы и мысли, благодаря которой геометрические фигуры, придуманные древними, а именно эллипс и гипербола, нашли в новое время реализацию в орбитах небесных тел [2, с. 109]. Д.Гильберт видел в согласованности развития математики и физики проявление предустановленной гармонии Лейбница [3, с. 460]. Касаясь связи между математикой и физикой, Н. Бурбаки в своей программной статье писал: «Основная проблема состоит во взаимоотношении мира экспериментального и мира математического. То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь – это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено недавними открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого (если только этим словам можно приписать какой-либо смысл), и, быть может, мы их никогда и не узнаем» [4, с. 258] Е.Вигнер, детально рассмотрев эту проблему, выделил в ней два основных вопроса: почему внутренние образы математики находят эмпирическую интерпретацию и почему использование этих образов приводит к формулировке законов природы, обладающих поразительной точностью [5, с. 123].

Намечено несколько подходов к объяснению этой особенности развития математики. А.Ламуш в своей книге об универсальной гармонии высказывал предположение, что мозг человека работает в одном ритме с природой и по этой причине в своих конструкциях не может уклоняться от структур природы [6, ch.5]. М.Клайн считал, что генезис понятий абстрактной математики всегда опосредован физическими интуициями и их предвосхищающая способность обусловлена аналогиями опыта, игравшими роль при их формировании. Близкую точку зрения защищает Вл.П.Визгин. Мистические стороны эффективности абстрактной математики, по его мнению, исчезают при историческом анализе каждого конкретного случая, выявляющего физические интуиции, лежащие в основе становления абстрактного математического образа [8, с. 35-37]. А.Григорян видит истоки этого явления в более свободной динамике математического мышления, которая не зависима от опыта и обгоняет физику в создании общих структур, необходимых для будущего применения [7, с. 121-122]. М.Штейнер считает, что проблема Вигнера не может быть объяснена из некоторого единого основания, ибо под ней скрывается несколько проблем нуждающихся в отдельном рассмотрении [9, с. 631].

В настоящее время мы, по-видимому, еще не имеем убедительного объяснения феномена математического предвосхищения. Представляется, что его адекватное обоснование требует системного анализа, а именно рассмотрения математики и физики как двух эволюционирующих систем, исторически приспосабливающихся друг к другу. Е.Вигнер в своей статье приводит разговор двух приятелей: один из них, будучи статистиком, использует число π в расчетах роста народонаселения, другой задает ему «наивный» вопрос: какое отношение имеет численность народонаселения к длине окружности? Действительно, это совершенно различные области, и математик древности, вычисляя отношение длины окружности к ее диаметру, не мог подозревать такого широкого применения константы π, которое имеет место в современной науке. Количество таких «наивных» вопросов можно увеличить до бесконечности. Почему алгебра Буля, созданная для систематизации форм логического мышления, нашла приложение в электротехнике, почему аффинная геометрия оказалась интерпретированной как пространство цветов и стала математической основой цветоведения, почему одни и те же дифференциальные уравнения могут быть использованы как для исследования колебаний струны, так и для описания взаимодействия видов в биоценозах? Можно спросить также, почему наш обычный язык оказывается применимым для описания доселе не наблюдаемых явлений, или почему техническую деталь, созданную для какого-либо одного типа механизмов, оказывается возможным использовать в другой области техники. Аналогия с числом π здесь очевидна. Во всех этих случаях мы затрагиваем некоторую общесистемную закономерность: элемент системы, созданный для определенной цели, оказывается затем более универсальным, пригодным для других целей, предвосхищающим другие требования. Это значит, что рассматриваемое явление не специфически математическое и должно быть объяснено из особенностей функционирования искусственных систем вообще, которые создаются обществом. Представляется, что кроме средств ответа на актуальные запросы каждая такая система несет в себе элементы, предвосхищающие будущие потребности. Речь идет здесь о подсознательном приспособлении развивающихся систем к будущим потребностям. Для понимания этого явления может оказаться полезной идея выдающегося физиолога Н.А.Бернштейна о подсознательной «модели потребного будущего», управляющей поведением живого организма [10].

Литература:

1. Клейн Ф.О геометрических основаниях лорентцовой группы. Сб. «Новые идеи в математике». Вып.5, Спб, 1914.

2 Эйнштейн А. Физика и реальность. Москва, «Наука», 1965.

3. Гильберт Д. Избранные труды. Т.1, Москва, «Факториал», 1998.

4. Бурбаки Н. Архитектура математики // Бурбаки Н. Очерки по истории математики. Москва,1963.
5. Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках. УФН, т.94, вып.3, 1968.
6. Lamouche A. L'homme dans l'harmonie universelle. La Colombe, 1957.
7. Григорян А.А. Гносеологические основания эффективности математики. Дисс. на соискание ученой степени кандидата философских наук. Москва,1985.
8. Визгин Вл.П. Проблемы взаимосвязи математики и физики. Историко-математические исследования. Вып. XX,1975.
9. Steiner M. Mathematics – Application and Applicability. The Oxford Handbook on the Philosophy of Mathematics. Oxford Univ. Press, 2005.
10. Бернштейн Н.А. Пути и задачи физиологии активности. Вопросы философии,1961, № 6.

Резников Владимир Моисеевич, *к.ф.н, доцент, Институт философии и права СО РАН, Новосибирский госуниверситет*

ОБ АДЕКВАТНОСТИ ПРИНЦИПА КУРНО В МАТЕМАТИКЕ

Как известно, принцип Курно является мостом, связывающим теорию вероятностей и математическую статистику с реальным миром. Принцип запрещает появление маловероятных событий в единственном проведенном эксперименте. В математической статистике, на основании принципа Курно опровергается гипотеза, в том случае, если реализуется событие, имеющее ничтожную вероятность и являющееся следствием гипотезы. В теории вероятностей принцип обеспечивает наилучшую аппроксимацию теоретической вероятности с помощью частот в теореме Бернулли. Принцип назван в честь ученого и философа А. Курно, однако в отечественной математической литературе термин ‘принцип Курно’ не используется. Кроме методологической и прагматической значимости принцип имеет и историческую значимость. Он входит в условия применения теории вероятностей, предложенные Колмогоровым в его знаменитой книге [1].

По нашему мнению, анализ условий А. Н. Колмогорова является актуальным, так как эти условия применения его аксиоматической теории вероятностей, в известной литературе, не были специально проанализированы до последнего времени. Одно из сформулированных Колмогоровым условий получило критическую оценку у Г. Шейфера и В. Вовка [2]. В этом условии определены свойства вероятностей, которыми обладают все изучаемые события. Содержание условия заключено в двух постулатах. Согласно постулату А, если при проведении большого числа n испытаний, исследуемое событие А произошло m раз, то частота m/n этого события близка к вероятности P(A). Постулат В представляет собой принцип Курно.

Критика Шейфера и Вовка заключается в утверждении, что постулат А выводим на основе постулата В и теоремы Бернулли. В ряде работ ими было предложено несколько объяснений зависимости постулата А от В [2]. Эти объяснения нами описаны с помощью следующих утверждений, упорядоченных в порядке возрастания их обоснованности:

1. Колмогоров не сознавал, что постулаты связаны в контексте теоремы Бернулли.

2. При формулировании постулатов теорема Бернулли еще не была получена.

3. Постулат А имеет самостоятельное значение в силу его частотного характера, хотя он и является производным от постулата В.

4. Применение теоремы Бернулли не является тривиальной задачей, так как предполагает проверку независимости всех используемых данных, и в случае их большого числа это – непростая задача.

Два последних объяснения являются серьезными, они анализируются в нашем исследовании. Во-первых, более глубоко и детально, чем у Шейфера и Вовка, обоснована ‘большая значимость постулата А по сравнению с постулатом В, как в контексте частотной традиции, так и с учетом философской, прагматической и логической аргументации. Во-вторых, более полно показаны трудности корректного применения теоремы Бернулли.

Недостатки принципа Курно с философских позиций

Во-первых, по философским основаниям вероятностные утверждения не являются ни фальсифицируемыми, ни верифицируемыми.

Во-вторых, принцип Курно не адекватен для вероятностного мира, поскольку реализация событий с малыми вероятностями это одно из проявлений случайности. Соответственно, запрет маловероятных событий означает игнорирование случайности.

В-третьих, фальсификация гипотез апеллирует к событиям с малыми вероятностями. С философских позиций, знание малых вероятностей априори это, по сути, вероятностный демон Лапласа.

Недостатки принципа Курно с прагматических позиций

Принцип не учитывает временные, интеллектуальные и др. затраты для фактического определения малых вероятностей. Так для корректного определения вероятности порядка 10^{-n} требуется, по самым скромным подсчетам, проведение 10^{n+1} экспериментов [3].

Недостатки принципа Курно с логических позиций

В литературе известны несколько структур данных, которые неадекватны принципу Курно [4]. В работе дан собственный пример структуры, где появление маловероятного события не опровергает гипотезу, а подтверждает ее. Пусть Сидоров – блестящий хирург. В том случае, если операцию – фактически безнадежному больному делает Сидоров, то вероятность благополучного исхода невысока, но не равна нулю. Он сделал успешную операцию, и пациент остался жив. Произошло маловероятное событие. Однако это событие не опровергает, а подтверждает гипотезу, что Сидоров является блестящим хирургом.

Критика теоремы Бернулли

1. В силу асимптотического характера теорема не определяет ни минимальный, ни оптимальный объем данных, обеспечивающий получение требуемых результатов с заданной точностью.

2. Теорема не определяет теоретическую вероятность. В лучшем случае, она осуществляет верификацию близости заданной априори теоретической вероятности и полуэмпирической частоты.

3 Шейфер и Вовк критикуют неадекватность теоремы Бернулли из-за сложностей верификации свойства независимости проводимых испытаний. Однако Колмогоров критикует теорему Бернулли по другим основаниям.

Критические замечания Колмогорова к теореме Бернулли были им даны при решении следующей задачи. Проводится n независимых испытаний, состоящих в изучении события A, здесь n=10000. Предполагается, что частота μ/n события A отклоняется по модулю от вероятности этого события p на 0,02. Предлагается доказать, что для вероятности P этого отклонения имеет место неравенство:

P>0,9999 [5]. Мы полагаем, что Колмогоров предложил в существенной степени эмпирическую трактовку теоремы Бернулли, но она не является полностью эмпирической, так как в его рассуждениях не фиксируется p. Некоторые исследователи, в частности Алимов и я, полагают, что Колмогоров говорит о зацикливании при эмпирической трактовке теоремы Бернулли [3].

В работе показано, во-первых, что с эмпирических оснований процесс уточнения вероятностей в формулировке теоремы Бернулли является бесконечным. Во-вторых, зависимость постулата А от постулата В на основании теоремы Бернулли не является существенным недостатком. Действительно, постулат В имеет большое значение для проверки статистических гипотез, однако он обладает множеством недостатков с философских, логических и прагматических оснований по сравнению с постулатом А. Необходимо отметить, что как анализ Шейфера и Вовка, так и наш анализ является лишь реконструкцией идей А. Н. Колмогорова о применении теории вероятностей. Так как Колмогоров не дал развернутых объяснений для предложенных им условий применения теории вероятностей.

Литература

1. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.

2. Shafer G., Vovk V. The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe // Statistical Science. – 2006. – Vol. 21. – №.1. – P. 70–98.

3. Алимов Ю.И. Альтернатива методу математической статистики. М.: Знание, 1980.

4. Cohen J. The Earth is Round (*p*<0.05) // American Psychologist. – 1994. – Vol. 49. – № 12. – P. 997–1003.

5. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей в книге: «Математика, её содержание, методы и значение». М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1956. Т. 2. С. 261-262.

Родин Андрей Вячеславович, *к.ф.н., с.н.с., Институт философии РАН (Москва)*

КАК ЭФФЕКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИКИ В ДВАДЦАТОМ ВЕКЕ СТАЛА "НЕПОСТИЖИМОЙ"

Вопрос о "непостижимой эффективности математики" имеет смысл только в контексте математики и физики 20-го века. Дело в том, что именно в начале этого века произошла глубокая перестройка оснований и всей архитектуры математики, которая привела к тому, что чистая математика потеряла всякую очевидную связь с физикой и другими естественными науками и конституировала себя как автономная спекулятивная дисциплина. Тот факт, что на практике математика продолжает успешно применяться в естественных науках и в технике, представляется в этой ситуации загадочным и "непостижимым".

Проблема "непостижимой эффективности" является не только чисто теоретической, но и практической: надежда на случай, на "научный инстинкт" или на чудо не позволяет строить долгосрочные исследовательские стратегии, особенно если речь о крупных коллективных проектах. Поэтому есть основания считать, что нынешняя ситуация, при которой математика применяется в естественных науках "вслепую", делает современную математику менее эффективной в этих науках. Эффективность математики можно существенно повысить, если сделать механизм применения математики более прозрачным и научиться этим механизмом лучше пользоваться.

Задача, на мой взгляд, состоит не только в том, чтобы объяснить феномен эффективности математики с точки зрения внешнего наблюдателя, но и в том, чтобы заново перестроить основания и архитектуру математики таким образом, чтобы, говоря словами Арнольда, (вновь) сделать математику частью физики. Речь, разумеется, не идет о том, чтобы требовать эмпирической проверки математических теорем (ведь эмпирическая наука может содержать априорную часть!), а о том, чтобы восстановить связь фундаментальных (а значит и всех остальных) математических понятий и конструкций с возможным опытом. При этом следует отказаться от консервативного взгляда Бора и его последователей, согласно которому всякий человеческий опыт может быть только классическим (в смысле классической физики), и от аналогичного взгляда тех философов, которые считают, что математическая интуиция может быть только евклидовой.

В своем докладе я покажу, как новые категорные основания математики (и, в частности, Унивалентные Основания недавно предложенные Воеводским) могут помочь реализовать этот амбициозный проект.

Сочков Андрей Львович, *к.т.н., доцент, Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского*

О ДВУХ ФИЛОСОФСКИХ АСПЕКТАХ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Применение математики в различных областях знания представляет собой интересную многогранную философскую тему. Наиболее часто и подробно анализируется «непостижимая эффективность математики» в физике (к примеру, см. работу [1] и ссылки в ней). Однако с точки зрения системного анализа эта естественная наука (при всей ее сложности) изучает простые системы, хотя и фундаментальные. В меньшей степени этот вопрос изучен в отношении наук о сложных системах (кибернетика, метеорология и т.д.). Они также предельно математизированы и широко используют расчеты на ЭВМ, которые являются реальной новинкой в современной математике и вызывают неподдельный философский интерес [2]. В докладе рассмотрены две взаимосвязанные проблемы: эффективность математики в науках о сложных системах на примере технической кибернетики и выразимость данных для компьютерных расчетов и их результатов, что является одним из факторов, определяющих вычислительную точность и, следовательно, упомянутую эффективность.

Для анализа первой проблемы необходимо, прежде всего, точнее определить само понятие эффективности математики, поскольку прогноз погоды бывает часто неверен, а спутники и ракеты падают, не долетев до цели. Показано, что для этого можно использовать численные (математические, по сути) критерии типа коэффициента запаса или процентной точности расчета. Специалисту, решающему прикладную задачу, математика представляется средством познания (набором инструментов). Этот взгляд не нов и четко выражен, к примеру, академиком Крыловым А.Н. (см. цитаты в [1]). На авансцену выходит вопрос адекватного выбора метафизической математической модели (математического инструмента) для изучаемой сложной диалектической системы, в которой одновременно протекают взаимосвязанные процессы разного характера, описываемые разными моделями. Использование той или иной модели (или их комбинаций) приводит к разным результатам, но можно с уверенностью сказать, что ни одна из них не обладает абсолютной эффективностью. Более того, многое зависит от интуиции и профессионализма субъекта познания, то есть имеет место субъективный фактор. Важным специфическим моментом оценки эффективности математического инструментария для технической кибернетики (что справедливо и для метеорологии, и для других наук о сложных системах) является ограниченность и минимальность времени расчета, поскольку управляющее воздействие для последующего шага должно быть рассчитано во время предыдущего, а прогноз погоды на завтра должен быть рассчитан сегодня. Все это подчеркивает актуальность повышения быстродействия и точности компьютерных вычислений. В том числе и этот фактор обусловливает появление новейших вычислительных парадигм: квантовый компьютер, нейрокомпьютер, компьютер бесконечности, компьютер на основе интервального анализа и т.д.

Появление ЭВМ в математике и во многих смежных с ней областях знания поставило ряд новых философских вопросов. Фундаментальные проблемы компьютерного доказательства, соотношений между алгоритмами, доказательствами и актами определения (и другие) поднимались в [2]. В меньшей степени исследовался вопрос представимости данных для компьютерных вычислений и выразимости их результатов, который вплотную подводит к философскому анализу систем счисления как арифметико-логической основы любого компьютера. Предварительное исследование изложено в [3,4] и развито в настоящем докладе. Показано, что важным является аспект записи чисел. Проведен анализ отношений понятий числа и нумерала, который начинали еще Гудстейн Р.Л. и Шанин Н.А. в [5]. Во вступительной статье к [5] Н.А. Шанин отмечал: «Гудстейн подчеркивает обязательность различения понятий *натуральное число* и *числовой знак*[*]. При этом термину *числовой знак* он придает весьма широкий смысл… Автору этой статьи (и, по-видимому, читателям … тоже) не приходилось раньше встречаться с использованием термина *числовой знак* в столь широком смысле и с использованием термина *натуральное число* в столь абстрактном … смысле». Рассмотрены философские последствия такого разделения понятий. Показано, что системы записи чисел (или системы нумералов) имеют разную точность и позволяют наблюдать разные множества чисел. Обсуждаются ограничения, накладываемые традиционными системами счисления на архитектуру компьютерных устройств, и возможные пути построения новых вычислительных систем.

Литература:

1. Сидоров О.В. О роли и значении математики в физике.- В кн.: Философия математики: актуальные проблемы: Тезисы Второй международной научной конференции; 28-30 мая 2009 г./ Редкол.: Маркин В.И. и др.- М.: МАКС Пресс, 2009, с.251-253.

[*] В оригинале у Гудстейна использован термин numeral. - Прим. автора тезисов.

2. Лолли Г. Философия математики: наследие двадцатого столетия.- Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2012.- 299 с.

3. Сочков А.Л. Философские аспекты новейшей арифметики бесконечности.- Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Социальные науки, 2009, № 3(15), с. 72-77.

4. Rosinger E.E. Syntactic – Semantic Axiomatic Theories in Mathematics. In Proceedings of the International Conference “Numerical Computations: Theory and Algorithms” (ed. by F. Dell’Accio et al.), Falerna (CZ), Italy, 17-23 June 2013, Luigi Pellegrini Editore, 2013, p. 116.

5. Гудстейн Р.Л. Рекурсивный математический анализ/ Пер. с англ. А.О. Слисенко, под ред. Г.Е. Минца, вступительная статья Н.А. Шанина.- М.: Наука, 1970.- 472 с.

Терехович Владислав Эрикович, *аспирант, кафедра философии науки и техники, Санкт-Петербургский государственный университет.*

«ИНТЕГРАЛЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ» КАК СПОСОБ ОБЪЯСНЕНИЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ МАТЕМАТИКИ

Если математика – универсальный язык науки, то почему это так? Обычно отвечают, что ученым так удобнее описывать мир. Но если математические формулы – лишь плод разума человека, почему такие разные явления физической природы подчиняются им с необъяснимым упорством?

Наиболее часто используемые способы математического описания наблюдаемых природных систем условно можно объединить в четыре группы (конечно, есть и другие):

• способы, связанные с аналитической геометрией пространства;

• способы, связанные с дифференциальными уравнениями движения;

• способы, связанные с вариационным исчислением, объединяющим интегральные и дифференциальные вариационные (экстремальные) принципы для перемещений и состояний систем: классических, релятивистских, полевых, квантовых, термодинамических, биологических и др.;

• способы, связанные с вероятностью: (а) статистической, где вероятность = частота наблюдаемых событий, (б) информационной, где вероятность = степень упорядоченности систем, (в) квантовой, где вероятность = предрасположенность будущих событий.

Моя гипотеза состоит в том, что, во-первых, все эти четыре группы способов математического описания имеют общее основание, и могут быть представлены предельными случаями квантового метода «интегралов по траекториям» Р. Фейнмана. Во-вторых, этот метод – не просто удобный инструмент расчетов, как принято считать, а модель, описывающая реальные процессы на квантовом уровне. Если предположить, что квантовые системы в самом деле следуют сразу всем возможным траекториям в гильбертовом пространстве, а действительная траектория – результат реального процесса интерференции всех возможных траекторий, то, возможно, мы приблизимся к пониманию удивительной эффективности математики в описании природы [1]. Приведу только несколько аргументов в пользу этой гипотезы.

1.Вариационные или экстремальные принципы играют ключевую роль в большинстве разделов науки. Каждому дифференциальному уравнению соответствует какой-то вариационный принцип.

2.Вариационные или экстремальные принципы связаны друг с другом трояким образом: математически, через понятие действия с размерностью «энергия х время», через оптико-механическую и геометрическую аналогии (принцип Гамильтона – принцип Ферма – принцип Гюйгенса) [2].

3.Все физические процессы во Вселенной основаны на принципах сохранения, каждый из которых связан с каким-либо типом симметрии. Согласно теореме Нётер глубокая связь между симметрией и сохранением покоится на вариационных принципах [3]. Более того, законы сохранения могут быть получены непосредственно из действия и вариационных принципов, и даже закон сохранения энергии является менее общим, чем соответствующие ему вариационные принципы.

4.Ряд вариационных принципов физики могут быть получены из метода «интегралов по траекториям». Для этого достаточно предположить, что не только квантовые, но и классические системы движутся сразу по всем возможным в данных условиях траекториям (историям), а метод «интегралов по траекториям», при увеличении масштаба переходит в принцип наименьшего действия классической механики и другие экстремальные принципы, из которых можно получить дифференциальные уравнения движения соответствующих систем.

5.Метод «интегралов по траекториям» - на сегодня самый точный механизм вычисления поведения квантовых систем, именно на нем основаны так называемые «диаграммы Фейнмана».

6.Метод «интегралов по траекториям» использует понятие амплитуды вероятности, и есть основания предполагать, что именно квантовая вероятность является фундаментом законов классической теории вероятностей.

7.Метод «интегралов по траекториям» использует фундаментальные математические и физические константы: «e», «-i», «h», «π».

8.Существует общая тенденция рассматривать вероятностный подход как фундаментальный для описания любых процессов в природе, независимо от их типа и масштаба.

9.Ряд экстремальных принципов в равновесной и неравновесной термодинамике, теории информации и биологии могут быть представлены в вероятностной форме.

10.В методе «интегралов по траекториям» для описания квантовых траекторий используются понятия «возможные» и «наблюдаемые», а все вариационные и экстремальные принципы используют понятия «возможное» и «действительное» движение или состояние.

11.Ряд современных интерпретаций квантовой механики рассматривают переход с квантового уровня на классический как переход от возможного или потенциального модуса существования к модусу актуальному.

Из предложенной гипотезы вытекают несколько интересных следствий.

Становится понятным, каким образом детерминистическое поведение классических и релятивистских систем является приближением вероятностного поведения квантовых систем. Максимум квантовой вероятности в пределе проявляется через минимумы или максимумы одной из характеристик систем, используемых в вариационных принципах (действие, оптическая длина, разность кинетической и потенциальной энергии, принуждение, собственное время, кривизна и т.д.). Величина вероятности и все ее частные проявления (экстремальные функционалы) становятся мерой реализации конкретной возможной истории в наблюдаемое существование.

Квантовая фаза каждой виртуальной квантовой траектории (истории) состоит из вещественной и комплексной части (мнимая единица). После их интерференции и перехода в актуальную траекторию (историю), мнимая часть исчезает. Можно предположить, что смысл комплексной величины «-*i*» состоит в ее отношении к возможному модусу существования, а операция возведения в квадрат модуля амплитуды вероятности, при которой комплексная величина исчезает, является переходом к актуальному или наблюдаемому существованию.

Все наблюдаемые вокруг нас колебания и волны, от спина частиц, излучений и вращения галактик до биения нашего сердца и биологических ритмов, являются проявлением колебаний или волн амплитуд вероятностей квантовых виртуальных историй, а законы, описывающие наблюдаемые колебания и волны, являются прямым следствием правил интерференции на квантовом уровне.

Возможно, именно это тотальное подобие колебаний и волн на всех уровнях, опирающееся на единое онтологическое основание, является источником удивительной эффективности математики в описании актуальных явлений нашей Вселенной.

Литература:

1.Терехович В. Э. Философско-методологические проблемы принципа наименьшего действия: Автореф. дис. … канд. филос. наук. Санкт-Петерб. гос. ун-т. СПб., 2013.

2.Полак Л. С. Вариационные принципы механики: Их развитие и применение в физике. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 610 с.
3.Фейнман Р. Характер физических законов: Пер. с англ. М.: Наука, 1987. С. 91-92.

Цофнас Арнольд Юрьевич, *д.ф.н., профессор*, *Одесский национальный политехнический университет*

ВОПРОС О ПРИРОДЕ ЧИСЛА НЕ ИМЕЕТ ЗНАЧЕНИЯ

Вопросу о природе числа уделялось много внимания на предыдущих конференциях [1], а ответ на него, предлагаемый мною в заголовке, нуждается в обосновании.

Сам этот вопрос носит метафизический (онтологический) характер. Однако онтология (не говоря уже о метафизике в целом) неоднородна. В ней различимы три группы проблем, несводимых друг к другу. Они составляют натуральную, структурную и динамическую онтологии.

Натуральная онтология касается описания наблюдаемых явлений и более или менее обоснованных предположений о природе вещей. Демокритовское рассуждение о том, что в мире нет ничего, кроме атомов и пустоты, – это рассуждение натурально-онтологического свойства. Точно так же все модификации утверждений о том, что материальные явления первичны относительно духовных сущностей (либо наоборот) касаются природы вещей. С другой стороны, когда говорят, что движение неуничтожимо и первично относительно покоя, или что у всякого явления есть причина, или определяют развитие как процесс накопления информации – во всех этих случаях речь ведут в русле динамической онтологии. К динамической онтологии относятся и известные диалектические положения, названные в марксизме «законами диалектики». Однако когда Демокрит сравнивает свои атомы с буковками, полагая, что из однородных атомов складываются разные вещи – примерно так же, как одними и теми же буквами пишутся комедия и трагедия, он переводит свое рассуждение в структурный план, в область структурной онтологии

Три типа онтологий тесно переплетены, но не равнозначны. Структурно–онтологические представления невозможно устранить ни из какого онтологического рассуждения вообще. Рассуждения в области структурной онтологии могут вестись относительно независимо от представлений о природе вещей и об их динамике, т.е. от натуральной и динамической онтологии, но не наоборот. Это можно сформулировать как принцип толерантности (индифферентности) структурных исследований к определению природы и динамики вещей.

Достижение согласия исследователей по собственно структурным вопросам принципиально возможно, но оно далеко не всегда реализуемо при определении природы вещей или характера их изменений. Если исходить из известного определения предмета математики у Н. Бурбаки как науки о структурах, то становится понятным, почему два математика могут серьезно разойтись друг с другом во мнениях, когда выскажут свои соображения о природе числа, о понятии бесконечности или о значении неэвклидовых геометрий. Но при этом они легко согласятся считать истинным, например, доказательство теоремы Эвклида относительно того, что всегда можно найти простое число, которое больше, чем любое наперед заданное число N, потому что N!+1 – простое число. (Правда, затем наши математики могут вновь не придти к согласию относительно того, может ли эта теорема служить обоснованием идеи бесконечности ряда простых чисел – например, потому, что станут по-разному трактовать природу бесконечности).

Каждый из трех типов онтологий опирается на принципы, ни один из которых не может быть опровергнут, они принимаются на веру. И каждая из частей онтологии опирается на собственный набор фундаментальных для нее понятий – философских категорий. В частности, натуральная онтология предполагает введение понятий бытия и небытия, материального и идеального. Динамическая онтология невозможна без понятий причины и действия, необходимости и случайности, движения и развития. Структурная же онтология не обходится без фундаментальных понятий вещи, отношения и свойства. Стоит поставить вопрос о принципах в рамках самой структурной онтологии, то немедленно обнаружится разная вера. Но разногласия будут касаться не того, что соответствует, например, числу в объективном мире, а лишь признания первичности вещей, свойств либо отношений относительно друг друга. Здесь возможны три унарных (реизм, атрибутивизм, реляционизм), еще три бинарных и одна тернарная модель – всего 7 вариантов.

На основе того, как эти понятия функционируют в естественном языке, в классической работе А. И. Уёмова [2] представлена тернарная модель. В ней категории вещи, свойства и отношения определяются друг через друга, а их различие становится чисто функциональным. Когда мы говорим о числе двенадцать, что оно четное, то думаем о числе как о вещи. Если утверждается, что «двенадцать негритят пошли купаться в море», то здесь «двенадцать» выступает как свойство некоторого множества вещей (не одноместный, а многоместный предикат). А если утверждается, что $2^{12} = 4096$, то здесь «двенадцать» выступает как некоторое отношение между числами 2 и 4096. Это отношение превращает эти два числа в новую вещь – в пару чисел. К натурально-онтологическому вопросу о первичности либо языковых структур, либо неких структур «самих по себе» во внешнем мире структурная онтология может оставаться равнодушной. Таким образом, приходится иметь дело не с определением природы числа, а с синтаксическим характером различия числа как вещи, свойства и отношения.

Что же касается семантических характеристик, то в структурной онтологии они отображаются с помощью другой тройки категорий – понятий определенного, неопределенного и произвольного. К ним прибегают тогда, когда говорят, скажем, о данном числе, о каком-нибудь из чисел или о произвольном числе. Проблема природы неопределенности много обсуждалась в связи с соответствующим принципом Н. Бора для квантовой механики, однако и там продвинуться в решении вопроса, «договориться» о том, существует ли неопределенность в физическом мире или это лишь непременный спутник современных картин мира, не удалось. Причина та же самая: понятие неопределенности – из арсенала категорий не натуральной онтологии, а онтологии структурной.

Адекватный перевод одних понятий в другие невозможен. А точнее говоря, не имеет смысла. Когда речь идет о структурах, термины натуральной онтологии неуместны. В этом случае не уместны и термины динамической онтологии. Они тоже из другого словаря. Ведь никому не приходит в голову ставить вопрос о динамике или даже «развитии числа». А вопросы о «противоречиях» чисел или проблема их «отрицании отрицания» может возникнуть разве что в рамках нумерологии.

Литература:

1. Число: Сб. статей.– М.: МАКС Пресс, 2009.– 368 с.
2. Уёмов А.И. Вещи, свойства и отношения. – М.: АН СССР, 1963.

Чусов Анатолий Витальевич, *к.ф.н., доцент*, *Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова*

ОБ ОТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ МАТЕМАТИКОЙ И РЕАЛЬНОСТЬЮ

Общая тема конференции напоминает споры об отношении бытия и мышления. Как и мышление, математику неявно считают чем-то нереальным, противостоящим "подлинной", "истинной", выделенной реальности. В основе лежат онтологические и онтические предположения об иерархии сфер существования (регионов сущих).

Для экспликации отношений между математикой и реальностью примем рабочие определения основных концептов (кроме концепта "данность").

Мир = взаимодействие объектов, взятое как внутренне расчлененное становящееся целое.

Объект = относительно самостоятельный, активный фрагмент мира.

Субъект = относительно самостоятельный фрагмент мира, имеющий особую внутреннюю активность – представление (репрезентацию).

Предмет = данность объекта субъекту.

Представление = синтез представляющего объекта с представляемым объектом на основе субъектного акта их соотнесения.

Сформулируем вопрос: каковы реальные отношения между разными мирами, в частности – миром математики и миром вне математики? Основаниями такой постановки вопроса являются воспроизводящиеся ощущения: а) реальности мира вне математики, б) реальности самой математики и, менее явно, в) особой реальности соотнесений математики с "внешним миром". Речь о воспроизводстве математических феноменов в контексте реализации объектов-в-мирах (будь то объекты и миры чисто математические или связываемые с иными регионами и типами существования).

Определим "реальность" на основе формулы Х.Ортеги-и-Гассета: "реальность – это все то, с чем мы поневоле должны считаться, поскольку, хотим мы того или нет, оно – здесь, оно произошло, противо-положилось". Характеристики реальности: актуальность, реализованность, самостоятельность, неотменимость, непосредственная данность в каком-то отношении (в т.ч. и данность "в мысли"), мировая конструкция соотнесения и различения мест внутри "здесь".

Согласно Х.Ортеге-и-Гассету, реальность не только самоданна, но и перспективна, т.к. связана с интерпретациями действительности, "с помощью которых человеческое воображение и интеллект реагируют на вещный мир, его перспективу и локализованность в отношении личности. Для этого человек населяет плодами своего воображения воображаемые области." К нашей теме здесь относится то, что воображаемые модели устройства мира "представляют уже не первичную реальность жизни, а ее идею, образ". Но идея и образ также имеют реальность существования (в воображаемых областях), что и надо исследовать с опорой на неклассическое включение в онтологию актов как особых типов существования в составе онтологических концептов и различений. Акты суть компоненты онтики, это локальные осуществления наличного бытия. Развитие актуальной данности математического знания состоит не только в прогрессе фиксации прямых результатов математической деятельности, но и в изменении условий возможности математики.

Реальность математики пытались выражать внешним отношением, когда ее реальность основана в аспектах действительности ("количественные отношения и пространственные формы"). Реальность мира превышает реальность математики (т.к. "отношение" и "форма" классически понимаются как несамостоятельные элементы действительности). Математика относится к реальности как производный феномен и связана с чем-то вроде "отражения". Здесь мир – это естественное образование, математика – производный, зависимый от мира продукт, и нет проблемы "непостижимой эффективности". Но современное развитие математики не позволяет некритически продолжать эту линию (т.к. игнорируются современные математические теории и ряд математических практик, относящихся к сфере "чистой математики"), да и критика выявляет ряд неуниверсальных метафизических предпосылок в отношении мира.

Понимание математики как "самой по себе" истинной реальности относит ее к миру неизменных идеальных сущностей, бытию без становления. Это неизменные объекты и, менее явно, полнота и единственность, а также предзаданность мира математики (в пределе – "сотворение мира по образцу математики"). Реальность математики превышает реальность мира. Но исторически менялись и относимые к сфере математики объекты, и их понимание (напр., единица или дроби). Предзаданность трудно отстаивать при сосуществовании разных несовместимых математик (континуум-гипотеза). Можно полагать реальность математики в сфере возможного, но это уничтожит превосходство и независимость идеального существования от внешних условий.

В трансцендентализме, интуиционизме и конструктивизме реальность математики зависит от конструирующих и конституирующих актов (типичного) субъекта и в целом вторична. Эту позицию следовало бы развертывать в ключе опосредования и подручности.

Рассмотрим математику как объективацию общественной практики (объективация как сфера деятельности и воспроизводимый универсум взаимодействия – К.Маркс и Д.Лукач). Концепт "объективация" дает ответ на вопрос: как в мире имманентно появляются принципиально новые объекты? Неклассичность подхода: имманентная актуальность мира; применение принципа развития к мировым структурам; множественность онтологических характеристик представления как региона сущего; множественность миров, реальностей и онтологий; трактовка знания как акта представления (в отличие от овещненных и потерявших непосредственную актуальность информационных форм фиксации знания); сложным образом понятый историзм.

Анализ математики как объективации требует фиксации и локально возникающих предметных форм математического объекта и математического субъекта, и последующих объективаций (и универсализации) их отношений в структуре воспроизводства предметной области математики (превращение форм существования, создание новых онтологий – с референцией на новые типы реальностей, формирование новых типов субъектов и др.). Математическая реальность изменяется в силу системных операциональных требований (напр., при введении комплексных чисел), меняется онтология представления и происходит развитие предмета математики. Для реализации математики существенно создание понятийных операциональных средств. Подручность средств создает новые констелляции мира, и благодаря этому реальность результатов, получаемых с их помощью, естественно воспроизводится в нашем жизненном мире.

Математика "в себе" есть моделирование формальных онтологий. Математика "для мира" есть экземплификация схем построения объектных мировых конструкций. Результаты объектно фиксируются и воспроизводятся в интерсубъективной, объективированной предметной области математики, ведь субъект практически включен в структуру реального мира (как объект "совсем особенного свойства").

Математика как объективация – это развивающаяся "многореальная" сфера деятельности. Ее непосредственным предметом является реализуемое в представлении многообразие абстрактных структур субъекта, а опосредованным предметом – многообразие объектных структур мира. Объективация математики включается во взаимодействия с другими объективациями и с объектными структурами мира.

Щапова Юлия Леонидовна, *д.и.н., профессор, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова*
Гринченко Сергей Николаевич, *д.т.н., профессор, Институт проблем информатики Российской Академии наук*

МАТЕМАТИКА И РЕАЛЬНОСТЬ АРХЕОЛОГИЧЕСКОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТИ

1. Как представляется, непосредственное сопоставление понятий «математика» и «реальность» невозможно, для опосредованного же их сопоставления требуется ввести понятие «математическая модель». Математическое моделирование широко используется при исследовании самых различных областей реальности, продемонстрируем это на примере изучения исторического процесса в археологическую эпоху.

2. Традиционная хронология и периодизация археологической эпохи (АЭ) отражает явно наблюдаемую эмпирику развития материальной культуры, и отчасти – эволюцию человека-носителя, собранные в систему «трёх веков» (табл. 1, столбцы 1 и 2):

Таблица 1.

Название археологических этапов АЭ	Эмпирическая хронология (тыс. лет до н.э.)	Хронология и периодизация АЭ, спроецированная на ряд Фибоначчи (тыс. лет до н.э.)
1	*2*	*3*
Олдувай	3000 – 800	2584 – 1587 – 987 – 610
Ашель	600 – 140 (120)	610 – 377 – 233 – 144
Мустье	140 (120) – 40	144 – 89 – 55 – 34
верхний палеолит	40 – 8	34– 21 – 13 – 8
неолит+энеолит	8 – 5 – 3	8 – 5 – 3
Бронзовый век	3– 2– 1	3 – 2 – 1
железный век	1– 0–1	1 – 0 – 1

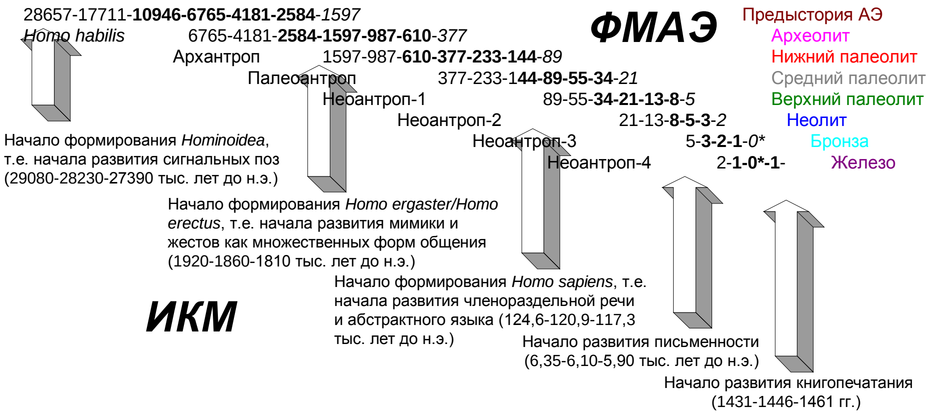
Эти хронологические даты эмпирически установлены поколениями археологов. Но, как было замечено Ю.Л.Щаповой в 1998 году, они хорошо соответствуют известному в математике «ряду Фибоначчи» (выстроенному в обратном порядке). Числа в этом ряду соотносятся согласно «золотому сечению» (1,618034… либо 0,618034…) [1-2] (табл. 1, столбец 3).

3. Важно, что развитие не исчерпывается эволюцией человека-носителя и его материальной культуры. Ю.Л.Щапова, считая этот этап развития его явной фазой, предложила дополнительно учитывать и скрытые фазы такого развития: а) начальную фазу становления человека-носителя и создаваемого им материального производства, и б) завершающую фазу инволюции человека-носителя и создаваемой им материальной культуры. Полученные триады фаз она назвала археологическими субэпохами (АСЭ). Синхронизированные АСЭ стали основой «Фибоначчиевой» модели хронологии и периодизации АЭ (ФМАЭ) (рис. 1, верхняя правая часть). Эта ступенчатая модель ФМАЭ демонстрирует, что в каждый текущий момент времени развиваются две смежные составляющие АЭ: предыдущая и последующая.

4. Независимо от этих исследований и параллельно с ними С.Н.Гринченко установил, что в развитии Человечества как самоуправляющейся системы можно указать моменты системных переворотов, компонентами которых являются информационные перевороты: формирование новых информационных технологий общения между людьми [3-4] (рис. 1, нижняя левая часть). Согласно предложенной им информатико-кибернетической модели (ИКМ) (рис. 2), периоды между этими моментами образуют числовой ряд Жирмунского-Кузьмина [5], каждый последующий член которого в $e^e = 15{,}15426...$ раз короче предыдущего.

5. Сопоставление содержательных (археологических) составляющих «Фибоначчиевой» модели археологической эпохи Ю.Л.Щаповой и информатико-кибернетической модели С.Н.Гринченко показало их хорошее соответствие и взаимную дополнительность [6-8] (рис. 1). ФМАЭ заполняет временную ось чаще, но ИКМ шире (включает, кроме археологической, также и историческую эпоху).

Рис. 1. Хронология и периодизация археологической эпохи (расчёты на базе ФМАЭ и ИКМ).



6. ВЫВОДЫ:

1) Информационное пространство, в котором работают археологи, расширено путём введения в рассмотрение числовых моделей хронологии и периодизации АЭ, которые показали её упорядочённость с математической точки зрения (ряда Фибоначчи, являющегося асимптотическим дискретным вариантом рядов «золотого сечения», и ряда Жирмунского-Кузьмина);

2) Эти числовые модели положены в основу абсолютной хронологии и периодизации АЭ, благодаря чему вся археологическая эмпирика приобретает процессуальный исторический характер и реальность. Доктрина времени придаёт этой реальности историческое значение.

3) В модельном числовом математическом представлении хронологии и периодизации АЭ, демонстрирующем высокую степень соответствия расчётных результатов эмпирическим данным, археологическая реальность предстаёт как воплощение фундаментальных законов развития и усложнения Мироздания.

Литература

1. Щапова Ю.Л. Хронология и периодизации древнейшей истории как числовая последовательность (ряд Фибоначчи) // Информационный бюллетень Ассоциации «История и компьютер», № 25, март 2000.

2. Chtchapova J. Chronologie générale et division en périodes des époques les plus anciennes // Actes du XIVéme Congrés UISPP, Université de Liège, Belgique, 2-8 septembre 2001. Section 1. Théories et methods. Sessions Générales et Posters. BAR International Series 1145, 2003. 105-107.

3. Гринченко С.Н. Социальная метаэволюция Человечества как последовательность шагов формирования механизмов его системной памяти // Электронный журнал «Исследовано в России», 2001. – 145. – С. 1652-1681, http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2001/145.pdf;

4. Grinchenko S.N. Meta-evolution of Nature System – The Framework of History // Social Evolution & History. – 2006. – V. 5 (No. 1). – p. 42-88.

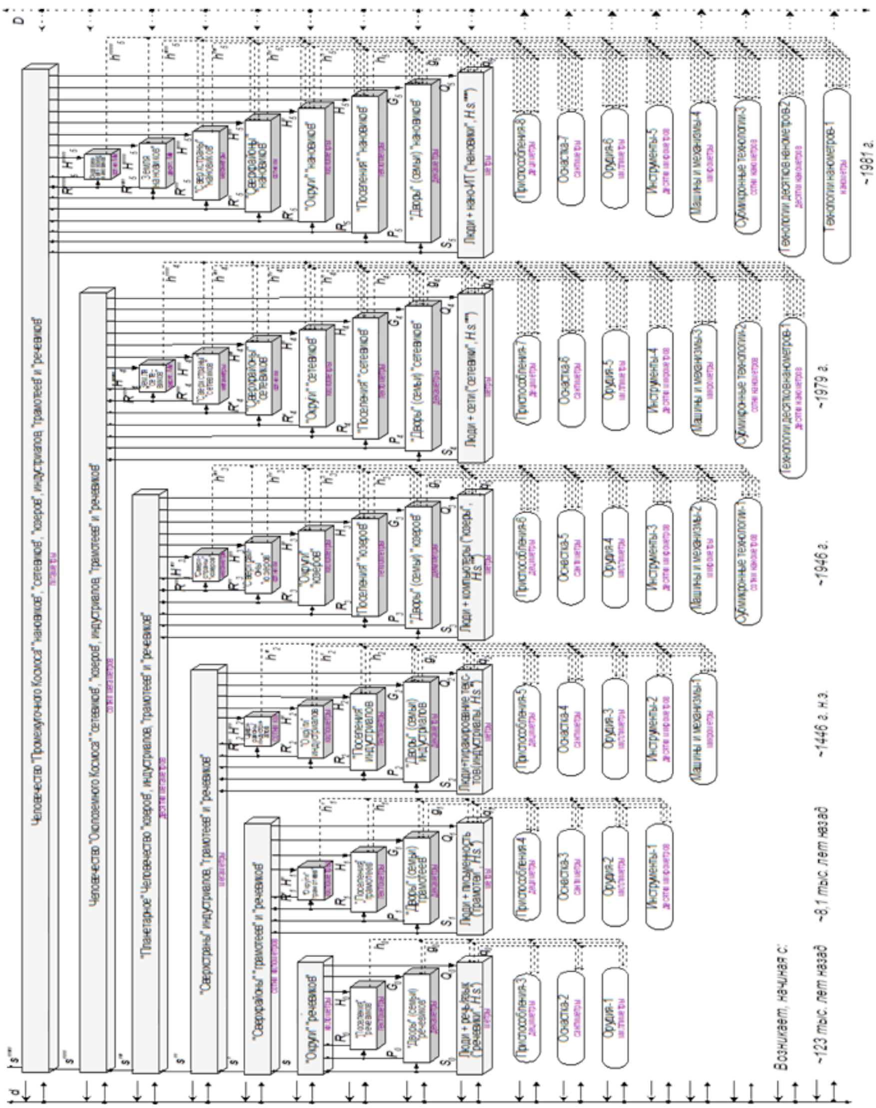
5. Жирмунский А.В., Кузьмин В.И. Критические уровни в процессах развития биологических систем. – М.: Наука, 1982. – 179 с.

6. Гринченко С.Н., Щапова Ю.Л. История Человечества: модели периодизации // Вестник РАН. – 2010. – № 12. – С. 1076-1084.

7. Гринченко С.Н., Щапова Ю.Л. Числовое моделирование как средство изучения археологической эпохи // Информационный бюллетень Ассоциации «История и компьютер», № 38, сентябрь 2012. – М.: МГУ. – С. 71-72.

8. Гринченко С.Н., Щапова Ю.Л. Информационные технологии в истории Человечества. – М.: Новые технологии, 2013. – 32 с. (Приложение к журналу «Информационные технологии», № 8/2013).

Рис. 2.



СЕКЦИЯ 2

ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И НАПРАВЛЕНИЯ ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ: СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Бажанов Валентин Александрович, *д.ф.н., профессор,*
Ульяновский государственный университет

ИДЕЯ «ТРЕТЬЕЙ ЛИНИИ» В ДИСКУССИИ РЕАЛИЗМА И АНТИРЕАЛИЗМА[1]

История реализма и номинализма, как известно, восходит к средневековой философии. Их противостояние казалось бы, давно утратило свою остроту. Однако это противостояние в контексте размышлений об основаниях математики возобновилось в XX веке и происходит в достаточно острых формах уже едва ли не сотню лет.

Оживленные дискуссии между сторонниками реализма (часто именуемыми «платонистами») и антиреалистами, продолжающими линию номинализма, активно продолжаются. Каждая из сторон находит всё более и более веские и изощренные аргументы в пользу справедливости своей позиции и отыскивает слабые звенья в аргументах своих оппонентов. Анализ этой дискуссии наводит на мысль о том, что в данной ситуации более перспективным выглядит стремление найти третью, «срединную» линию, которая могла бы избежать «слабых мест» и реализма, и номинализма.

Ключевой вопрос, который разделяет реализм и антиреализм – это вопрос о модусе существования математических объектов. Существуют ли математические объекты подобно тому, как существуют деревья, коровы или грабли? Проблема существования этих объектов, несмотря на свою кажущуюся простоту, в действительности оказывается весьма сложной. Если связывать требование «существования» с некоторыми «априорными» условиями признания факта существования (объектов), то это может вести к своему роду «метафизическому нигилизму». Между тем констатация модуса «существования» всегда плотно вписана в определенный контекст – онтологический, социологический и т.д. И это естественно, поскольку каждый раз речь идет об «абстрактных»

[1] Работа поддерживалась грантом РФФИ (№13-06-00005а)

объектах, которые напрямую зависимы от когнитивного «оснащения» субъекта.

Математические объекты - в отличие от объектов изучения нематематических - неосязаемы и эмпирически не верифицируемы, принципы детерминизма, обычные для физической реальности, в пределах математической реальности не действуют. Тогда можно ли утверждать, что они нам «известны»? И, если да, то в каком смысле?

Если математика занимается исследованием некоторых объективно существующих идеальных (сверхчувственных) сущностей, то каков модус этого исследования (проблема Бенацеррафа)? В контексте так называемой причинной теории познания и референции, которая предполагает наличие причинно-следственных связей между объектами познания, не понятно, как и каким образом, нам известны и/или познаются логико-математические объекты, фактически находящиеся вне системы этих связей.

Сильная версия реализма (которая фактически тождественна традиционному платонизму) ведет речь идет о некоторой актуальной сверхчувственной реальности, в которую «погружены» эти объекты.

Антиреализм и его разновидность в виде номинализма в общем случае склонны связывать логико-математическое исследование не с открытием, а с конструированием объектов и их свойств, причем в крайних вариантах семантические соображения, относящиеся к понятию (математической) истины, могут заменяться альтернативными синтаксическими, типа свойств непротиворечивости и/или консервативного расширения.

Несмотря на апелляцию к сверхчувственной реальности, реалисты ищут эмпирическое обоснование и усматривают его наличие в так называемом «аргументе незаменимости», который связывает факт существования такого рода реальности с фактом незаменимости математики в науке. Этот аргумент - метафизическая позиция, которая позволяет купировать некоторые возражения против платонизма, имеющие эпистемологическую окраску. Тем не менее, убедительность этого аргумента между тем далеко не бесспорна.

Такой современный подход к интерпретации идеи паранепротиворечивости как dialetheism хотя и непосредственно и не связан с определенной концепцией истины, но неявно предполагает своего рода (умеренный) платонизм, поскольку подводит к констатации реального существования противоречивых объектов и/или реальных противоречивых ситуаций.

В рамках нетрадиционного платонизма принято различать версии П. Мэдди, в которой математические объекты наделяются пространственно-временными характеристиками, «структуралистскую» (М. Резник и С. Шапиро), а также так называемый «полнокровный» реализм (М. Балагер и Э. Залта).

Согласно варианту П. Мэдди математические объекты являются абстрактными образованиями нефизической и нементальной природы, но существующими в пространстве и времени, как и множества (обычных) физических предметов.

Реализм «структурного» толка (или «структурализм») интерпретирует математическое знание как описание комбинаций абстрактных структур («паттернов»), которые носят элементарный характер и из которых можно образовывать сколь угодно сложные абстрактные системы, фундаментальные свойства которых раскрываются через их отношения к другим системам.

«Полнокровный» реализм принимает принцип «изобилия», согласно которому существуют все логически мыслимые абстрактные объекты.

Современный антиреализм, как и реализм, включает в себя целый набор различных подходов.

К нему обычно принято относить конвенционализм, который интерпретирует выражения математического языка как аналитически-истинные суждения (Р. Карнап, К. Гемпель); формализм в духе Г. Фреге и метаматематический формализм в духе Х. Карри; фикционализм Х. Филда, который рассматривает математические выражения как не имеющие отношения к реальности, а также Мейнонгианизм, согласно которому числа и другие математические понятия, хотя не существуют в реальности, но могут характеризоваться определенными истинностными значениями.

Кроме того, к антиреализму относят психологизм и физикализм, который считает математику наукой об объектах физического мира.

Номинализм как разновидность антиреализма выступает в двух формах: 1) как отрицание возможности существования неких абстрактных объектов и 2) как отрицание возможности существования универсалий (общих понятий). Здесь даже может подразумеваться, что любые математические объекты лишены существования, а на самом деле мы имеем дело не с объектами, а с отношениями между высказываниями.

Между тем, комбинация некоторых положений структурализма, антиреализма в версии психологизма, биологической предопределенности базисных математических абстракций (В.Н. Тростников) и идеи нормативного статуса бытия математических объектов (М.А. Розов) позволяет обозначить своего рода «срединную», третью линию между реализмом и номинализмом, снять их противостояние и пролить новый свет на модус существования математических объектов.

Идея третьей линии состоит в следующем.

«Паттерны» представляют собой базисные, элементарные образования, которые формируют математическую реальность. Между тем в этой реальности человеческий интеллект вырезает то, что предзадано характером его деятельности и предшествующим опытом. В этом смысле можно говорить о нормативности абстрактных объектов математики и об априорности процесса математического творчества. Когнитивные способности субъекта математического познания определяются не только его деятельностью, но и ее биологической предопределенностью, внешней и внутренней детерминацией психики, ее перцептивными компонентами.

В перцептивном пространстве отрезок является более простым объектом, нежели точка, а в процессе восприятия объекта происходит укрупнение и обобщение данных отдельных (групп) нейронов, формируются целостные конфигурации, которыми и оперирует мозг и через «призму» которых он анализирует действительность. И это понятно, поскольку в процессе эволюции для выживания было важно различать крупные визуальные конфигурации, которые оказываются первичными с точки зрения формирования образа предмета. Так, теорема Кантора о вложенных отрезках, лежащая в основе теории действительных чисел, замечал Тростников, вынуждается особенностями этого пространства.

Отсюда математические языки оказываются как бы надстройкой над теми нейробиологическими структурами, которые в результате синтеза внешних конфигураций, в конечном счете, предопределяют компоненты математической реальности. Кроме того, сам характер человеческой деятельности определенным образом вносит свою лепту в формирование объектов этой реальности.

Таким образом, обнаруживается тройная детерминация – «внутренняя», «внешняя» и деятельностная (нормативная) - математической реальности. Думается, что такой подход позволяет сгладить «углы» и реализма, и номинализма и снять ряд эпистемологических затруднений, которые характерны для философии математики последних десятилетий.

Букин Дмитрий Николаевич, *к.ф.н., Волгоградский государственный университет*

ЯЗЫК И РЕАЛЬНОСТЬ В МАТЕМАТИКЕ: К СПОРУ «ПРАВЫХ» И «ЛЕВЫХ»

Очевидно, что результаты количественных оценок, расчетов и т.д., составляющие суть математического познания, должны быть каким-то образом доступны человеку и обществу, причем не столь важно, о каких именно представителях последнего идет речь – «работающих математиках», специалистах-прикладниках или школьниках начальных классов. Пожалуй, всякое познание количественных отношений в мире начинается с несложных знаковых систем, в первые годы жизни предлагаемых нам в игровой форме (считалки, яркие картинки, несложные опыты с вещественными предметами – реальные или воображаемые). Мы настолько привыкли к формальному представлению математики в качестве знаковой системы, что оно кажется нам естественным, само собой разумеющимся. При этом, однако, необходимо отдавать себе отчет в том, что знак всегда предполагает означаемое, указывает на него. Также следует учитывать чрезвычайно специфический характер математической семиотики. Тема математического означивания давно и неспроста находится в центре внимания философов – вне зависимости от той роли, которую отводит тот или иной исследователь проблемам языка, несомненная связь последнего с математической реальностью дает надежду на постижение ее закономерностей, скрытых (в отличие от многих законов того же естествознания) от «невооруженного глаза». Попытки проникнуть таким образом в «тайны» математической действительности предпринимались представителями самых разных школ и течений. К. Маркс, например, пытался не только показать переход от реального процесса к дифференциальному символу, но и найти правила, которые позволили бы отыскать скрывающийся за этим символом другой реальный процесс, некую «стратагему» действий. Немецкий математик и философ математики Д. Гильберт, полагающий, что за математическим знаком всегда стоит материальный мир и чувственная очевидность, уделял настолько большое внимание работе с символами, что добился обвинения со стороны противников чуть ли не в «математическом терминизме» и «обесценивании» математического символа до состояния «знака на бумаге» (Г. Вейль) и т.п.

Так мы переходим в плоскость ставшего уже традиционным для философии математики противостояния представителей так называемых левого и правого направлений в философии науки в целом. Кратко охарактеризуем «притязания» каждого из них.

Е.В. Косилова, проводившая обзор конференции «Философия математики: актуальные проблемы» (28-30 мая 2009 г.), отметила: «С некоторым приближением можно сказать, что правое крыло не ставит под сомнение некую специфическую научную «истину», и в этом смысле оно рационалистично и консервативно. Левое же крыло ориентировано на то, чтобы редуцировать научную «истину» к истинам вненаучного характера… Основным аналитическим методом левого подхода является каузальная редукция, которой может подвергаться фактуальное содержание науки (почему были получены такие-то факты), ее метод (почему выбран такой метод, а не другой) или, например, ее понятийная составляющая (каким образом сложилась такая-то система понятий)» [1, с.184]. Философ критически оценивает доклады Г.Б. Гутнера и З.А. Сокулер, занимающих «ультралевую» позицию и по сути продолжающих традицию Витгенштейна, сводящего математику к языковой практике, а математические объекты – к способам говорения о них. Среди зарубежных коллег, продолжающих сегодня «левую» традицию логического позитивизма в философии математики, можно отметить британского аналитического философа и логика М. Даммита.

Сравнительно неярко в современной отечественной философии математики представлено правое направление. В.Я. Перминов – один из немногих философов, упорно и последовательно отстаивающих «правые» взгляды (в том числе касательно вопроса «первичности» языка). Оспаривая «ультралевую» позицию Г.Б. Гутнера, согласно которой научная истина может быть редуцирована к «истине» языковой реальности, он пишет: «Я думаю, что язык не может быть источником онтологии, поскольку любой язык уже предполагает онтологические допущения… При обосновании онтологии мы должны идти не по линии «язык - онтология», а по линии «деятельность – онтология - язык». Язык в своем становлении, несомненно, опирается на общезначимые онтологические представления» [2, с.108].

Более сильные позиции правые занимают на Западе – по крайней мере, в численном отношении они составляют там ощутимую конкуренцию левым. Прежде всего, это касается представителей так называемого математического реализма (П. Мэдди и др.), математического натурализма (Ф. Китчер), среди более ранних и известных имен – логицисты Г. Фреге, Б. Рассел и Р. Карнап, формалист Д. Гильберт и даже некоторые интуиционисты (Л. Брауэр, А. Пуанкаре, Г. Вейль). Насаждаемую логическими позитивистами установку на определяющую роль для философии анализа значения языковых выражений отвергает К. Поппер, в этом вопросе поддерживающий Л. Брауэра. Несмотря на откровенную критику традиционной метафизики «застывших» форм, Э. Кассирер ясно указывает на зависимость языка математических символов от конкретных предметов и процессов и т.д.

Борьба в философии между различными школами, взглядами, позициями и т.д. за право присвоения языку статуса первичного или вторичного культурного феномена, по-видимому, неиссякаема. Иногда создается впечатление, что математический символ действительно обладает некой магической «властью», таинственным образом сквозь века («3», «4», «7», звезды и свастики в Древнем мире, «1» у пифагорейцев, «шифр» «книги природы» Галилея) обретая свое «независимое» бытие в самых современных философских течениях «левой» направленности - аналитической философии, социальном конструкционизме и т.д. Безусловно, в связке «мышление-логика-язык» последний играет поистине огромную роль, на что указывают исследования не только философов-теоретиков, но и логиков, психологов, лингвистов и т.д.

С другой стороны, осмысление любого факта явленности становится доступным нам лишь посредством онтологической категории явления, парной к своей противоположности - категории сущности. Но ведь сущность чего-либо не обязана проявляться, она должна лишь существовать. Язык символов далеко не всегда предшествует математическому мышлению (и именно это, пусть и не всегда прямо, следует из работ К. Маркса, Д. Гильберта, А. Пуанкаре, К. Поппера, В. Я. Перминова и др.). Примыкая к «правой» традиции, закончим доклад знаменитой цитатой из Гёте, переработавшего не менее знаменитую пифагорианскую мудрость: «Цифры не управляют миром, но показывают, как управляется мир».

Литература:

1. Косилова, Е. В. Философия математики: актуальные проблемы: обзор конференции МГУ, 28–30 мая 2009 г. / Е. В. Косилова // Эпистемология и философия науки. 2009. – Т. XXII. – № 4. – С. 184–187.
2. Гутнер, Г. Б. Число и онтологические допущения // Число: сб. статей. М.: Пресс, 2009. – С. 99–116.

Егорова Ксения Владимировна, *аспирант, Ульяновский государственный университет*

МЕСТО КОНСТРУКТИВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ РАЗВИТИЯ НАУКИ

Конструктивизм на современном этапе развития науки не только остается влиятельным направлением, но и укрепляет свои позиции с помощью рождения новых отраслей науки, важной роли компьютеризации знания и вычислительной математики. В связи с этим возникают новые проблемы, ставятся и решаются новые задачи в математике и философии математики. Обоснованность математического знания является одной из главных проблем этих дисциплин.

Данная проблема стоит уже давно, можно сказать, что, наверное, со времен появления самого математического знания. Ведь для любой науки самое главное быть достоверным и точным, а для математики тем более. «Для математиков Древней Греции, столкнувшихся с проблемой несоизмеримых величин, проблема обоснования состояла в том, чтобы найти способы обращения с произвольными отношениями величин, не отбрасывая иррациональных величин и не отступая от точности вычислений. Они разрешили эту проблему через использование геометрических построений» [1, с.9-10]. Далее, ученые XVII века «усматривали неясные моменты в использовании мнимых и иррациональных чисел, которые не укладывались в принятые представления о математической реальности», а обоснование видели в «отыскании убедительной реальной (физической или метафизической) интерпретации для этих чисел» [Там же, с. 10], а вот в XVIII веке «проблема обоснования состояла в уточнении исходных понятий новой теории и в возвращении к идеалу строгости, который был задан классическими образцами» [Там же, с. 10]. XIX век оказывается плодотворным для математики; в эту эпоху Лобачевским создается неевклидова геометрия, Георг Кантор строит теорию множеств, парадоксы в которой привели к кризису обоснования математики. Это заставило математиков уделить повышенное внимание философии математики.

Для преодоления кризиса были выдвинуты четыре программы: логицизм, формализм, интуиционизм и конструктивизм. Первые три программы достигли хороших результатов, но скорее технических, нежели философских. Поэтому были предприняты другие попытки. К ним как раз и относят такое направление в философии и основании математики как конструктивизм. Какова роль конструктивного направления в обосновании математического знания? В чем заслуга отечественных и зарубежных ученых в формировании конструктивистских взглядов в математике? Какова судьба конструктивизма на современном этапе развития науки?

В 40-х гг. XX века формируется советская школа конструктивной математики (А.А. Марков, Н.А. Шанин, А.Г. Драгалин, Г.С. Цейтин, и их ученики), на создание которой оказали влияние математические идеи интуиционизма. Отличительными чертами советской школы конструктивизма от интуиционистской математики и других конструктивных направлений, являются, во-первых, отказ от брауэровской идеи субъективного начала в математике, а во-вторых, важную роль играет создание искусственного языка, посредством которого задаются базовые конструктивные объекты (алгоритм или алгорифм).

В противовес интуиционистам, конструктивное направление подчеркивает связь математики с конструктивной деятельностью, как в математическом творчестве, так и в связи с другими науками. Приверженцы конструктивизма отказываются от абстракции актуальной бесконечности и использования закона исключенного третьего по отношению к бесконечным множествам. «При этом они применяют более слабую абстракцию потенциальной осуществимости, в которой отвлекаются от практических ограничений построения конструктивных объектов. К примеру, представим число «один» из натурального ряда вертикальной черточкой, «два» - двумя черточками и так далее, то данная абстракция отвлекается от практических ограничений, которые могут встретиться при написании большого натурального числа (ограниченность в средствах, бумаги и т.п.). Но возможен другой вариант построения после натурального числа n следующего n+1, но в отличие от актуальной бесконечности, не разрешает рассматривать все бесконечное множество таких чисел как построенное» [2, с. 212].

Главными понятиями конструктивной математики являются понятия конструктивного объекта и конструктивного процесса.

Конструктивными элементарными объектами являются слова в определенном алфавите, в котором под буквами подразумеваться разнообразные знаки, к примеру, вертикальные черточки, изображающие натуральные числа. Конструктивный процесс, конечным итогом которого является слово, будет сводиться к выписыванию одного знака за другим. «Методы конструктивного математического анализа дают возможность построить отдельные разделы традиционного анализа на более ясных исходных предпосылках, учитывающих кроме того вычислительные их возможности. Конструктивный подход преимущественно используется в математике и логике как способ обоснования теории, альтернативный теоретико-множественному и аксиоматическому. Однако идея о конструктивных возможностях всякого исследования находит применение и в других науках» [3, с. 155]. Конструктивное понимание природы математических объектов требует логики рассуждений, отличной от классической.

Советская школа конструктивизма упорно работала над понятием «нормального алгорифма», которое по сей день остается актуальным в связи с развитием вычислительной математики и компьютерных технологий. Понятие алгоритма достаточно удобно для определенных целей конструктивной математики:

- «Использование точного понятия алгорифма дает возможность строить конструктивную математику как науку;
- На основе теории алгорифмов может быть определено понятие конструктивной последовательности точек. Для всякой конструктивной последовательности точек оказывается возможным построить точку, не равную ни одному члену этой последовательности;
- Разработан существенный для построения конкретных теорий конструктивной математики (в частности, конструктивной топологии) специальный аппарат теории алгорифмов, связанный с оперированием над системами слов» [4,с.10-14].

Параллельно свою своеобразную версию конструктивизма разрабатывает американский математик Э. Бишоп. Отличаясь от советской школы рядом математических принципов, а также пониманием числа как первичного объекта математики, наделяемого субъективной реальностью в духе Канта, его конструктивная математика также в целом стремится освободиться от «философских догм относительно природы своих объектов» [5, с. 88]. Концепция Бишопа заинтересовала научное сообщество в связи «с возрастающим интересом к вычислительным процедурам математики, компьютерному решению математических проблем, к созданию программ, позволяющих получать новое математическое знание» [Там же, с. 87]. Сам Бишоп называл математику языком высокого уровня программирования.

На современном этапе развития общества компьютеризация знания не является чем-то удивительным, а скорее даже наоборот, это норма нашей жизни. Решить задачу, доказать теорему можно с помощью вычислительной техники. Идея компьютерного доказательства вызвала большие споры в математическом и философском сообществах. «Дело в том, что компьютер представляет собой физическую машину, которая может дать сбой. А проверить «вручную» то, что делает программа, человеку не под силу. Таким образом, как признают сами авторы компьютерного доказательства, теорема обоснована с вероятностью 0,999… Но априорное знание, каким его полагал Платон, не может быть вероятностным. Да и многие математики, не обращающие внимания на философию, также не приемлют идею вероятности доказательства. Теорема либо доказана, либо нет» [6, с. 159]. Мы получаем доказательство чисто механистически без участия творчества человеческого ума. Но подобные вычисления необходимы, так их скорость выше, результат быстрее и т.д.

В наши дни роль вычислительной техники в математике настолько высока, что на современном этапе развития науки появилась новая отрасль научного знания – симбиоз чистой математики и компьютерной графики, а именно фрактальная геометрия. Её создатель американский математик Б. Мандельброт претворил мысленный эксперимент с помощью ЭВМ: «Руками так не нарисуешь, а вот компьютер справляется просто превосходно. На содержание всех моих эссе в немалой степени повлияла возможность использования всё более сложных компьютерных систем – равно как и возможность обратиться к услугам всё более искушённых программистов, настоящих виртуозов своего дела, управлявших этими системами» [7, с. 41].

Таким образом, конструктивное направление в математике не утратило своих позиций, оно претерпевает рождение новых форм. В философии математики развивается социально-конструктивистский подход, согласно которому математика является продуктом человеческой деятельности, да и культуры в целом (Т. Тимошко, Р. Уайлдер, Р. Херш). Историю математического конструктивизма с контексте этого подхода можно рассматривать с двух сторон: во-первых, «как совокупность метаматематических программ, позволяющих конструировать новые математические объекты и продуцировать на их основе точные вычислительные процедуры, и, с другой — как направление в философии математики, имеющее определенную рефлексивную традицию и перспективы развития» [8, с.55]. Главным же вопросом, как для математика, так и для философа, должен быть вопрос: каков модус существования математического объекта?

Итак, во-первых, конструктивное направление – это неклассический взгляд на классическую математику. Одной из его задач стояла решение проблемы обоснования математического знания путем переосмысления статуса математических объектов. Во-вторых, отечественные и зарубежные мыслители, сформировав свои оригинальные идеи, дали толчок для создания новых областей науки. В-третьих, конструктивизм получил широкое признание благодаря развитию вычислительной математики и информационной техники, а также сам конструктивизм претерпевает рождение новых форм.

Литература:

1) Перминов В. Я. Философия и основания математики. М.: Прогресс-Традиция, 2001. 320 с.

2) Нагорный Н.М., Шанин Н.А. Андрей Андреевич Маков (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи математических наук, 19:3(117), 1964, с. 207-223.

3) Рузавин Г.И. Обсуждаем статьи о конструктивизме // Эпистемология и философия науки. - 2009. - № 2, с. 142-156.

4) Марков А.А. О конструктивной математике, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, 67, Изд-во АН СССР, М.-Л., 1962, с. 8-14.

5) Светлов В.А. Философия математики: Основные программы обоснования математики XX столетия. М.: КомКнига, 2006. 208 с.

6) Целищев В. В. Всё есть число? // Вокруг света. – 2008. – № 9 (2816). С. 150-160.

7) Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.

8) Букин Д.Н. Современный конструктивизм и онтологические основания математики // Вестник тюменского государственного университета. - 2012. - № 10, с. 50-57.

Калюжный Владимир Николаевич, *к.ф.-м.н., доцент,*
Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина

О странностях «философии математики» Канта

«Философии математики» Канта давно дана четкая оценка. Как отметил Кассирер, современная математика «пошла по пути, проложенному Лейбницем, а не Кантом». Более того, она «все более делалась "гипотетико-дедуктивной системой", истинность которой заключалась исключительно в ее внутренней логической согласованности и последовательности». В сущности, то же утверждают и отечественные исследователи Е.А. Беляев и В.Я. Перминов: кантовская философия математики оказалась несостоятельной, произвольно сужающей область математических объектов; «дело не в созерцании... но лишь в формальных определениях, в оперативной силе понятия». Отношение ученых к Канту недвусмысленно выразил Герман Вейль: «соприкосновение с современной математикой обратило в прах мою веру в Канта». Тем не менее, до сих пор продолжаются попытки поднять «философию математики» Канта на щит, выразительным примером чего является книга В.С. Библера «Кант – Галилей – Кант». Это заставляет продолжать критический анализ наследия философа.

Строго говоря, никакой «философии математики» у Канта нет. Имеется лишь несколько отрывочных фрагментов (да еще и противоречащих друг другу), которые автор и не пытается развивать. С математикой Кант знаком недостаточно. Она для него – не предмет изучения, а средство подтверждения своих построений.

Когда мы читаем у Канта, что нечто (познание, задачи, метод) «называется математическим», сразу возникает вопрос, а кто именно дал такое наименование? Еще большее недоумение возникает, когда мы видим категорическую формулировку: «математическое знание есть...»! Неужто до Канта никто не идентифицировал математику?!

Когда читатель сталкивается с кантовской идеей, что философское познание исходит из понятий, а математическое – из конструирования понятий, у него в сознании всплывает обыденное значение слова «конструирование». Означает же оно 'осмысленное собирание целого из частей'. Тем самым, конструирование – это феномен цивилизации. Оно встречается повсеместно и не может касаться какой-то одной сферы – математики. Заметим, что текст – это конструкция из предложений, доказательство – конструкция из доводов... В этом смысле ‘дискурсивность’, вопреки Канту, прекрасно вписывается в его ‘конструктивность’.

Вопреки стандартному смыслу, Кант навязывает совершенно иную интуицию этого слова: «конструировать понятие – значит показать a priori соответствующее ему созерцание» (то, что Кант называет «созерцанием», скорее всего, должно пониматься как «осознание»).

Подобная трактовка вызывает внутренний протест. Дело в том, что конструирование обращено вовне, оно динамично, результативно. Созерцание же сосредоточено внутри субъекта, статично, пассивно. Выражение «я конструирую треугольник, показывая предмет, соответствующий этому понятию» представляется бессмысленным. Где здесь, вообще, конструирование? Откуда возьмется понятие, если еще ничего не сконструировано? Что значит «показывать», откуда взялся «предмет»? И как понимать «соответствующий» (по каким критериям)?

Иной раз Кант называет «конструированием» то, что в геометрии принято называть «дополнительным построением». Но здесь имеем дело не с понятиями, а с объектами. У Канта можно уловить две разновидности конструирования: «остенсивное» и «символическое».

Выражение «остенсивная, или геометрическая, конструкция» кажется весьма неудачным, поскольку «остенсивное определение» не предполагает никаких действий, а лишь указание на нечто, изначально имеющееся. Как при этом можно на глаз отличить окружность от эллипса с почти одинаковыми осями?!

Геометрия (в особенности, аналитическая, созданная Декартом) рассматривает не только прямые, треугольники и окружности, а более сложные кривые: эллипсы, параболы и гиперболы (которые входят в класс кривых второго порядка). На какой предмет показывал бы Кант в данном случае – загадка. Не упоминает он и построения с помощью циркуля и линейки, которые вполне можно было бы рассматривать как конструирование.

В какой-то мере, в качестве конструирования можно рассматривать вращение прямоугольного треугольника вокруг одной из своих сторон, приводящее к конусу. Но причем здесь «синтез», непонятно.

«Символическое» конструирование Кант усматривает в алгебре, подразумевая под этим разного рода операции над величинами. Но назвать его лучше было бы «синтаксическим», что только подчеркнет – вопреки философу – их дискурсивный характер. По идее, оно могло бы привести к (простейшим) формулам. Но как здесь возможно «извлечение корня», неясно – дело же не в том, чтобы нарисовать соответствующий значок! Принципиально, что возникающие выражения не являются понятиями – они не имеют самостоятельного «смысла» (допускают различную интерпретацию).

Своим «конструированием» Кант не в состоянии охватить элементарную математику, не говоря о высшей. В частности, как у него может возникнуть представление о логарифме и многих других функциях?! А как в кантовском подходе может быть определено простое число? Характерно также, что философ не касается анализа бесконечно малых, который интенсивно развивался в XVIII веке, – в его «конструктивизм» это не вписывается.

Настоящее «конструирование» понятий может быть только логическим и осуществляться в соответствующем языке (языковую проблематику Кант опускает). Материалом для этого выступают исходные (первичные) понятия, чего философ не учитывает. Все, что нужно, фиксируется в определениях и аксиомах. Наглядность же полезна в рамках эвристичности. Вопреки Канту, многие математические понятия «без ощущений» вовсе не «пусты».

Одно из самых частотных слов в «Критике чистого разума» – это « доказательство» (что диссонирует с не менее популярным «созерцанием»). О доказательствах же в математике автор «Критики» говорит мало, как будто не осознавая, что главное в ней – это доказательство теорем. Дедуктивный характер математики четко прослеживается по «Началам» Евклида или Ньютона! Употребляя выражение «цепь выводов», говоря о «постепенном присоединении», философ, фактически, признает «аналитичность», упорно декларируя «синтетичность».

Кант признает, что в математике «истинное место для апагогических доказательств», часто вспоминает «закон противоречия». Но доказательство от противного начинается с предположения ситуации, которой не может быть. Спрашивается, о какой наглядности, о каком in concreto можно говорить?!

Понятия аналитичности и синтетичности Кант вводит для чрезвычайно узкого класса математических суждений. На самом деле формальная запись практически любой математической теоремы использует кванторы. Если аналитичность понимать как ‘выводимость’, то, очевидно, что все математические утверждения аналитичны. Если синтетичность трактовать как ‘информативность’, то, разумеется, все они синтетичны.

Интуиция самого Канта имела естественнонаучный характер. Суть проблемы в том, что имеющую идеальный характер математику философ попытался втиснуть в прокрустово ложе своей доктрины.

Кускова Светлана Михайловна, *к.ф.н., Московский государственный машиностроительный университет*

ПРОБЛЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

Современный логицизм разграничивает характеристики математических объектов и теорий, имеющие обоснование в логике и доказуемые чисто логическими средствами, и внелогические характеристики, специфически содержательные для математики как особого типа предметности.

Такие характеристики с позиции логицизма считаются контингентными, не детерминированными логическими правилами, а потому оспоримыми.

Только те свойства числа и натурального ряда, которые не зависят от устройства человеческого сознания и общественной практики (как и от любых фактов материального мира) составляют фундамент программы обоснования математики Г. Фреге и Б. Рассела. Согласно Фреге [3], математическое мышление работает не с предметами, а с понятиями о предметах. Понятия принадлежат объективному миру идеальных сущностей, независимому от первого физического мира и второго мира психических переживаний. Математические понятия принадлежат третьему миру, упорядочены жёсткими идеальными связями. Человек может их использовать в деятельности счёта, нумерации, измерения. Но сущность этих предметов не сводится к традиции их употребления, а подчиняется законам бытия истины, т.е. логике.

Натуральное число у Фреге – это свойство понятия. Понятие – минимальная форма мысли, основной предмет идеального «третьего мира» чистой логики. Определение понятия числа Фреге строит на базе учения о понятии вообще.

По объёму выделяются понятия пустые и непустые, единичные и общие. Экстенсиональная характеристика понятия кодируется натуральным числом.

Выражение «n есть число» означает «Существует понятие такое, что есть соответствующее ему число». Понятиям «естественный спутник Земли», «планета Солнечной системы» и «спутник Венеры» сопоставляются числа 1,9 и 0 a posteriori, но Фреге строит понятия, объёмы которых заданы a priori и гарантированы их логической структурой. Например, число 0 сопоставляется самопротиворечивому понятию.

0 – это число, соответствующее понятию «равно 0 и не равно 0».

1 – число, соответствующее понятию «равное 0».

2 соответствует «равно 0 или равно 1».

Число, следующее за n, соответствует понятию «принадлежащий ряду, оканчивающемуся на n». Ряд строится добавлением члена дизъюнкции. Здесь важно использование только логических средств при определении каждого числа. Каждое следующее число характеризует понятия о числах, относящихся к понятиям, поэтому описывается в метаязыке. Построение натурального ряда требует движения от понятий к понятиям о понятиях, выражаемого в переходе к новому языку более высокого уровня, чем язык, в котором определено предыдущее число.

Фреге ограничивается такими понятиями, объём которых имеет простейшую структуру – множество индивидов. Но бывают понятия, экстенсионал которых задан сразу в нескольких универсумах и не представляет собой множества однородных предметов.

Например, понятие «здоровый» обобщает признаки организма, образа жизни, цвета лица, питания и т.д. Аналогично понятие «футбольный» применимо к понятиям «матч», «игрок», «мяч» и т.д. Объёмная характеристика подобного понятия включает отношения между универсумами «людей» и «вещей», а не объединения их подмножеств.

Натуральные числа Фреге представляются нам разнокачественными сущностями, поскольку каждое требует своего языка, особым способом сопоставляющего символ идеальному предмету. Ряд изначально строится не как единый универсум чисел, а как иерархия универсумов, включающих следующее число, поэтому метод Фреге не предполагает единственности натурального ряда.

Л. Витгенштейн [1] показывает «семейную» структуру видов чисел, совокупность которых только в простейшем случае порождается дизъюнкцией, а в общем обнаруживает много отношений между универсумами объёмов понятия числа. Учитель даёт задание продолжить ряд чётных чисел до 1000. Ученик делает правильно, но после 1000 пишет 1004, 1008, т.е. увеличивает шаг, уверяя, что он делает как раньше, правильно. Согласно Витгенштейну, два человека не приходят к согласию, чья последовательность соответствует начальному правилу. Оба одинаково понимают правило построения ряда и операцию «следующий за», но используют разные мета-правила применения правил.

При однозначном контекстуальном определении «0», «|», «N» возможны несколько способов употребления этих определений, порождающие разные натуральные ряды. В метаязыке есть правила использования переменных и констант, установления соответствия содержимого ячеек таблицы, меток на линейке с границами измеряемой вещи. Эти правила применения правил конвенциональны в отличие от правил действий с объектами. Соблюдая единственное правило построения натурального ряда, но, подвергая рефлексии правило применения правил, получим натуральный ряд неединственным способом.

Рассматривая математику как знание, мы принимаем постулат, что «все переходы уже сделаны» и следуем линейным порядком с заданным извне шагом. Но если математика также есть деятельность, нет оснований считать ряд в себе завершённым и метод его прохождения принудительным.

Внесоциальных, логических оснований для предпочтения именно этой структуры альтернативным нет.

Связь принципа единственности натурального ряда с гипотезой о его актуальной завершённости показывает А.С. Есенин-Вольпин в [2]. Он разработал ультраинтуиционистскую программу метаматематики, не допускающую необоснованных утверждений в доказательствах. Эта программа сочетает интуиционизм в логике и логицизм в математике (неоспоримыми будут только те утверждения, которые получены логическими средствами без привлечения предметных суждений о специфике математических объектов). Отказ от идеи потенциальной бесконечности влечёт отказ о единственности натурального ряда. Есенин-Вольпин вводит понятия чисел, осуществимых относительно тех или иных операций. Бесконечность он понимает не как «очень много», а как невозможность завершить процесс, даже если процесс состоит из двух шагов.

1) Число «0» осуществимо;
2) Для произвольного x, если x осуществимо, то x| осуществимо;
3) Существуют не осуществимые числа.

Противоречие 2) и 3) возникает только при допущении единственности ряда.

Сумма 109+109 осуществима относительно функции «+», но не «|».

Две последовательности натуральных чисел равнообъёмны, если каждому осуществимому элементу одной соответствует осуществимый элемент другой. Но эти последовательности могут не совпадать, если они различаются неосуществимыми элементами.

На наш взгляд, выбор языка влияет на осуществимость математического объекта. Число 109 как индивид, входящий в множество натуральных чисел, и 109 как число шагов применения операции «|» требуют разных уровней языков. В первом случае язык содержит операции сложения, умножения, степени, позволяющие символически осуществить 109, во втором случае – не содержит.

Операция «|» не задана на готовом множестве, как «+», а участвует в построении множества, поэтому её применение за пределами осуществимости не гарантирует единственности результата.

Литература

1. Витгенштейн Л. Философские исследования // Философские работы, М. 1994
2. Есенин-Вольпин А.С. Анализ потенциальной осуществимости // Философия. Логика. Поэзия. Защита прав человека. М. 1999
3. Фреге Г. Основоположения арифметики. Томск, 2000

Мануйлов Виктор Тихонович, *к.ф.н., доцент, Курский государственный университет*

КОНСТРУКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ В РАЗЛИЧНЫХ КОНЦЕПЦИЯХ ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

Конструктивность математического знания – одно из важнейших методологических требований, предъявляемых к математической теории в исследованиях по основаниям математики [4]. Содержание понятия «конструктивная математическая теория» определяется конкретной взаимосвязью «конструкций» и «логики» в структуре математического рассуждения. Различают арифметические и геометрические конструкции. Взаимоотношение арифметической и геометрической конструкций друг с другом и с логикой анализируется на трёх самодостаточных областях исследования [3],[5] (Схема 1).

[Математика]-1	[Логика и методология математики]-1	[Философия математики]-1
[Математика]-2	[Логика и методология математики]-2	[Философия математики]-2
[Математика]-3	[Логика и методология математики]-3	[Философия математики]-3

Схема 1.

На уровне [Философии математики]-1 исследуются следующие понятия математической конструктивности [4]:

1) алгоритмическая конструктивность;

2) конструктивность оперативной математики П. Лоренцена;

3) интуиционистская конструктивность;

4) предикативистская конструктивность;

5) конструктивность фрагмента аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля;

6) конструктивность Гёделевской модели «конструктивных множеств»;

7) конструктивность финитной метаматематики Д. Гильберта;

8) конструктивность различных расширений финитной установки.

Каждый из перечисленных смыслов конструктивности опирается на определенные упрощения, идеализации, огрубления, накладываемые на деятельность предполагаемого теорией при ее гносеологической интерпретации идеализированного субъекта, – гносеологические основания конструктивности математической теории [4].

Центральным пунктом второго уровня является логика и методология математического знания, составная часть теории научного знания – эпистемологии; в немецкоязычной традиции Wissenschaftstheorie ([9]; [1];[2]). «“Теория науки” (Wissenschaftstheorie) в Германии есть философия науки (philosophy of science) в ее широчайшем смысле, включая работы по логике и основаниям научных теорий, концептуальной истории науки, культурной и практической среде и нормативным аспектам как научного, так и технического прогресса...)» [6]. Здесь выделяют две концепции математического и научного знания: аналитическая

[Философия науки]-2 (analytische Wissenschaftstheorie) и конструктивная [Философия науки]-2 (konstruktive Wissenschaftstheorie) [9] . Метод аналитической философии науки характеризуется как «исследование» или «путь (метод) исследования» («die Forschung» [9] и «the way of research» [7]) в противоположность методу конструктивной философии науки (konstruktive Wissenschaftstheorie), характеризуемому как «представление» или «путь (метод) представления» («die Vorstellung» [9] и «the way of representation» [7]). Логическая часть конструктивной теории науки представлена так называемой диалогической логикой [8].

Основную часть третьего слоя исследований в области оснований математического знания составляют философские (в традиционном понимании) концепции. [Конструктивная логика и методология]-3 представлена «философскими» диалогами [4].

В результате философского диалога между «конструктивистами» и «платонистами» в античности появились «Начала» Евклида [3], где доминирует геометрическая конструкция числа (число-мера). В математике XVII–XVIII вв. античные числа-меры получили адекватный геометрический способ представления (в аналитической геометрии Р. Декарта) и несколько арифметических (теоретико-числовых) способов представления (конечные и бесконечные цепные дроби, бесконечные десятичные дроби и т.д.). При арифметизации анализа это геометрическое происхождение действительного числа было забыто, и многие методы и теоремы анализа, основанные на геометрических представлениях, стали рассматриваться как сомнительные [5]. В философии математики И. Канта арифметическая и геометрическая конструкция разведены по двум «математическим» категориям: число рассматривается как трансцендентальная схема категории количества, а величина отождествляется с трансцендентальной схемой категории качества. Гильберт главный путь обоснования математики видел в доказательстве непротиворечивости формализованной математической теории в метаматематике, содержащей лишь «финитные» способы рассуждения. Гёдель показал, что «финитные» способы рассуждений могут быть представлены арифметическими операциями с числами, и что непротиворечивость арифметики не может быть доказана «финитными» средствами, что свидетельствует о недостаточности арифметической конструкции для построения «логики» современной математики. Альтернативную к формализму позицию занял основатель интуиционизма Брауэр, «второй акт интуиционизма» которого имеет целью создать адекватную теорию континуума на основе понятия «последовательности свободного выбора». Парадоксальные результаты решения «континуум-проблемы» Гильберта подтверждают вывод о фундаментальном значении геометрического континуума для развития математики.

Литература

1.Мануйлов В. Т. Исчисление и диалог как методы математической аргументации в «немецком конструктивизме»// Проблема конструктивности научного и философского знания: Сборник статей: Выпуск четвертый/ Предисловие В. Т. Мануйлова. – Курск: Изд-во Курск. гос. ун-та, 2005. – С. 17-30.

2.Мануйлов В. Т. Конструктивное обоснование логико-математического знания в «немецком конструктивизме»// Проблема конструктивности научного и философского знания: Сборник статей: Выпуск пятый/ Предисловие В. Т. Мануйлова. – Курск: Изд-во Курск. гос. ун-та, 2005. – С. 59-78.

3.Мануйлов В.Т. Конструктивность античной математики// Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей: выпуск 11/ предисловие В. Т. Мануйлова. – Курск: Изд-во Курск. гос. ун-та, 2008. – С. 59-84.

4.Мануйлов В.Т. Конструктивность как принцип обоснования научного знания // Философские науки, № 10, 2003. – С.104–121.

5.Мануйлов В. Т. Конструктивность классического математического анализа//Проблема конструктивности научного и философского знания: сборник статей: выпуск 12/ предисловие В. Т. Мануйлова. – Курск: Изд-во Курск. гос. ун-та, 2009. – С. 93-110.

6.Butts R. E., Brown J. R. Introduction // Constructivism and science: essays in re¬cent German philosophy / Ed. by Butts R. E. and Brown J. R. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1989. – P. ix-x.

7.Lorenz K. Science, a rational enterprise? Some remarks on the consequences distinguishing science as a way of presentation and science as a way of research // Constructivism and science / Ed. by Butts R. E. and Brown J. R. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ. P. 3–18.

8.Lorenzen P., Lorenz K. . Dialogische Logik. – Darmstadt: Wissenschaftl. Buchgesellschaft, 1978.– 178 S.

9.Wohlrapp H. Analytischer versus konstruktiver Wissenschaftsbegriff //Konstruktionen versus Positionen. Bd. II. Allgemeine Wissenschaftstheorie / Hrsg. von Lorenz K. Berlin; N. Y.: Bruyter, 1979. S. 348-377.

Медведева Евгения Евгеньевна, *аспирант, кафедра философии, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина*

ВИТГЕНШТЕЙН VERSUS ПЛАТОНИЗМ В МАТЕМАТИКЕ

Дать ясную и адекватную интерпретацию философии математики австрийского мыслителя Людвига Витгенштейна (1889-1951) весьма проблематично по целому ряду причин, включая и тот факт, что сам австрийский философ, возможно, отрицал действительное существование таковой. Тем не менее, появились исследования, в которых авторы (З.А. Сокулер, М. Дамметт, Дж. Флойд, П. Фрасколла, В. Кленк, П. Мэдди, М. Мейрион, С. Шенкер и др.) освещают компоненты философии математики Витгенштейна, имплицитно присутствующие в его текстах. Витгенштейна почти неизменно характеризуют как адепта определенного варианта конструктивизма в философии математики, однако мнения относительно природы данного конструктивизма разнятся. В представленной статье предпринята попытка выявить особенности философии математики Витгенштейна, которые обнаруживаются посредством анализа его отношения к платонизму как одному из направлений в философии математики.

Витгенштейн воспринимал математику как, по сути, алгоритмическую деятельность, а именно как вычислительную деятельность высшего порядка. Он придерживался этой «алгоритмической» точки зрения уже в своем главном произведении раннего периода - «Логико-философском трактате» (1921), - где им была предпринята попытка редуцировать арифметику к теории «операций», а также разработать таблицы истинности в качестве процедуры решения. «Алгоритмическая» точка зрения доминировала у Витгенштейна и в переходный период его творчества. Несомненно, его следует характеризовать как противника платонизма в математике или как «антиплатониста». Сам философ подчеркивал, что математик является «изобретателем, а не открывателем» [1].

Антиплатонизм Витгенштейна связан с его «алгоритмической» точкой зрения. Радикальная форма антиплатонизма пронизывает всю философию математики Витгенштейна. Особенно это проявляется в его критике понятия числовой эквивалентности, которое играет важную роль в логицистском определении натуральных чисел. Кроме того, витгенштейновский антиплатонизм связан с его знаменитым аргументом «следования правилу»[2], который частично направлен против платонистского представления о «правиле в виде рельса» [3].

Радикальное противостояние платонизму в философии математики является для Витгенштейна очень важным. Чтобы убедиться в этом обратимся к осмыслению его критических заметок о метаматематике Гильберта. Витгенштейн всегда настаивал на том, что «вычисление с буквами не является теорией». Он утверждал, что проза в случае с метаматематикой Гильберта способна стать лишь приводящей к путанице попыткой обеспечить нас теорией (эту явную ошибку допускает последователь платонизма). Согласно Витгенштейну, не должно существовать такой вещи как фундаментальная «теория». Он считает, что теория множеств является «вычислением», которое окружают «облака мыслей». А философия в свою очередь является деятельностью, разгоняющей эти «облака». Поэтому, несмотря на то, что Витгенштейн заявляет, что система исчисления «Принципов математики» Б.Рассела является «надежной», он в то же время добавляет, что сама мотивация, стоящая за построением исчисления, «ошибочна»: «Конечно, когда Рассел строил свое исчисление, он не намеревался просто развивать игру в шахматы, а стремился воспроизвести с помощью своего исчисления то, что в действительности означает слово «бесконечность» при его употреблении. Но в этом он ошибался» [4].

Несмотря на то, что Витгенштейн отказался от жесткой критики теории оснований математики, тем не менее, он способствовал распространению сомнения относительно ее философской значимости. Витгенштейн не стремился поставить под вопрос бесспорность теории множеств, он лишь хотел прояснить окружающие данную теорию путаницы. По Витгенштейну, результатом философской деятельности должно стать не обнаружение «технической» ошибки и не создание нового исчисления, а просто достижение ясности. Следствием ясности должен стать отказ от некоторых фундаментальных программ в философии математики и связанных с ними исчислений.

Таким образом, позиция Витгенштейна в философии математики представляется поначалу в виде здравого смысла: не дело философа как философа вмешиваться в «техническую» сторону теории, например теорию множеств, поскольку философ не обладает достаточной квалификацией, чтобы заниматься этим. Но такая интерпретация слишком далека от полной реконструкции витгенштейновского аргумента. В действительности следует сказать об одном важном измерении теории, а именно - ее прозе. Данное измерение является немаловажным, поскольку с ним связаны замешательства, порождаемые в прозе. Последняя ответственна за создание самого исчисления, и если элиминировать замешательства, то надобность в вычислении отпадает само собой, даже если вычисление корректно. Таким образом, согласно концепции Витгенштейна: «В связи с математикой возможно исследование, совершенно аналогичное нашему исследованию в психологии. Это исследование столь же мало математично, сколь мало в нашем случае оно - психологично. В таком исследовании нет вычислений, так что оно не является, например, логистикой. Его можно было бы назвать исследованием «оснований математики» [3, с.319].

Цель Витгенштейна в его «Замечаниях по основаниям математики» заключается не в преумножении математического знания, а в изменении способа его рассмотрения [1, с.112-114]. Философия математики не добавляет новых теорем или доказательств к языку математики, а проясняет употребление существующих знаков, показывает их взаимосвязь друг с другом и областями применения.

Чтобы понять смысл математических предложений требуется пристальное внимание к контексту, потому что правильное понимание математического высказывания не гарантируется его изолированной словесной формой выражения. Легко допустить ошибку при описании математической языковой игры. «Описания, которые непосредственно приходят в голову, вводят нас в заблуждение – так, в этой области, устроен наш язык» [1, с. 116]. Традиционные подходы к философии математики способны ввергнуть нас в «плутни мифотворчества» [1, с. 82], так как исследуют математические предложения абстрактно или оперируют ограниченным понятием употребления осмысленного предложения. В «Философских исследованиях» и «Замечаниях по основаниям математики» Витгенштейн убеждает нас в том, что предложения могут быть осмысленными лишь при их употреблении для описания действительности. «Чтобы решить эту философскую проблему, надо сравнить между собой такие вещи, сравнивать которые еще никому всерьез не приходило в голову» [1, с. 179]. Главная рекомендация «Замечаний по основаниям математики» Витгенштейна заключается в том, чтобы мы сравнивали математические предложения с правилами, а не с описаниями фактов. Акцент на регулятивном характере этих предложений призван избавить нас от основных ошибочных концепций, которые оказывают влияние на наше мышление в этой области [1, с. 146-147].

Таким образом, согласно Витгенштейну, широко распространенной ошибочной концепцией в философии математики является миф платонистского реализма. По его мнению, последователь платонизма мыслит математическую науку как естественную историю математических объектов. Математические предложения конструируются как теоретические описания вневременных абстрактных сущностей. «При этом нам смутно представляется, будто эта реальность – нечто абстрактное, очень общее и очень жесткое. Логика – своего рода ультрафизика, описание «логического строения» мира, воспринимаемого путем своеобразного ультраопыта» [1, с. 7- 8].

Витгенштейн в «Философских исследованиях» и «Замечаниях по основаниям математики» Витгенштейн полностью порывает с платонизмом. Он опровергает «миф» платонизма, что математические высказывания являются описаниями математических объектов, и что математическое исследование есть изучение их закономерных связей. Витгенштейн организует фронтальную атаку на платонизм через опровержение того, что математические предложения выражают ассерторические суждения. На самом деле математические теоремы не устанавливают факты, даже те sui generis (особого рода) факты, к которым обращается последователь платонизма. В области математики не существует знания об объектах, так как не существует ничего из того, к чему такое знание могло быть приложено. Аппарат логики и математики лишается онтологического статуса через отрицание референциальной функции логических и математических высказываний. Предложение, обоснованное посредством доказательства, служит правилом или нормой, а не описанием.

Таким образом, математика является набором правил, набором техник, сетью норм с их практическим применением, а не наукой о сверхчувственных объектах, доступных только умозрению. Витгенштейн предложил модель математики, в которой математические правила глубоко проникают в ядро человеческой социальной деятельности, в наши «формы жизни».

Литература

1. Витгенштейн Л. Замечания по основаниям математики // Витгенштейн Л. Философские работы. Часть II. М.: Издательство «Гнозис», 1994. С. 52.

2. Медведева Е.Е. Л. Витгенштейн о «следовании правилу» // Философские традиции и современность. 2012. № 1. С. 56-65.

3. Витгенштейн Л. Философские исследования // Витгенштейн Л. Философские работы. Часть I. Пер. с нем. М.: Издательство «Гнозис», 1994. С. 167.

4. Waismann F. Wittgenstein and the Vienna Circle. Oxford: Basil Blackwell, 1979. P.114.

Панов Сергей Владимирович, *к.ф.н., НИТУ «МИСиС»*
Ивашкин Сергей Николаевич, *к.культ.н., Библиотека имени Н.А.Добролюбова, Москва*

А.БАДЬЮ: КРИТИКА АРИСТОТЕЛИЗМА, ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВЕННОГО, ЖЕСТ ЧИСЛА

Алэн Бадью резюмирует свою концепцию математики как мышления о бытии как таковом в следующих положениях: 1) Онтология (математика) является мышлением чистой непостоянной множественности; 2) Множественное есть радикальное неединое, оно само состоит из множественностей, будучи множественным множественностей; 3) Не существует никакого имманентного предела единого и исходного принципа конечности для чистой множественности. Множественность - это бесконечность, не подводимая под единое, это бесконечность бесконечных, или бесконечное рассеяние бесконечных множественностей; 4) Так как множественность мыслится за пределами досягаемости единого, оно является множественностью ничто вне и до принципа постоянства; 5) Действительная онтологическая презентация необходимо аксиоматична, что значит для Бадью – связана с онтологическим решением, раскрывающим сущее в событии, а не с описанием или определением уже сущего [1: 34-35].

В своем отождествлении онтологии и математики Бадью открыто опровергает аристотелевскую традицию, связывавшую матему с выражением прекрасного, а математику с эстетикой. Эта традиция строилась на признании математической объективности как возможного (латентного) в отношении к действительному бытию, отсюда определение математики как псевдо-мышления о псевдо-бытии, раскрываемого мысленно в квазиобъектах (числах, фигурах, алгебраических или топологических структурах), которые определены как языковые выражения латентных содержаний реальных объектов; норма математической фикции – прозрачная красота простых отношений исчисляемого, а цель фикции – создание умопостигаемого постоянного универсума, правила существования которого даны эксплицитно, поэтому математика не является мышлением о мышлении, так как все принципы математической фикции визуализированы воображением или чувственной интуицией [1: 41-42].

Откуда у Бадью эта идея непостоянного множественного, которая дает право отвергнуть аристотелевскую традицию математики как фикции? Можно сказать, что Бадью вычитывает ее среди прочих источников в трансцендентальных условиях опыта Канта, который различал связь (Verbindung) как синтез многообразного и единство (Einheit) как изначальный фундамент этой связи, поскольку именно представление единства обуславливает концепт связи. Т.е. для того, чтобы связь явлений мыслилась как таковая, уже необходимо представление множественности, подводимой под единое. Однако порядок опыта как синтетическое единство многообразного не может быть тождественным порядку «единого» - категориального чистого рассудка в его исходной апперцепции, трансцендентальном единстве самосознания: то, что обуславливает возможность связывания многообразного, не является связью, но обеспечивает закон подведения множественного под постоянное единство [1: 154-155].

Отсюда Бадью определяет метафизическую программу Канта как «корреляцию двух пустот» - чистого самопредставления субъекта как безусловного единства интуиций и трансцендентального объекта как условия возможности любых феноменальных связей, как саму априорную форму связывания [1: 159]. Задача Бадью в его критике «вычитающей» (soustractive) онтологии Канта, которая вынесла за скобки возможность радикально осмыслить множественное субъекта и объекта как таковое, – высвободить субъективность из единства самопредставления, из «пустого центра трансцендентального поля», мыслить ее как несводимую множественность самоидентификаций, как «группу множественных возможностей единого», а всегда сообразное единому опытное многообразное – как непостоянную множественность, бесконечными сериями своего развертывания локализующуюся в событийной ситуации [1: 164].

Ситуация как результирующая математического события, раскрывающего множественности в их особенной интенсивности, не может уже быть, по мнению Бадью, онтологической общностью сущего, которое все еще отражало бы отсутствующее целое бытия, чье содержание радикально десакрализуется и деонтологизируется в его теории транзитивности, воскрешающей отношения пустоты и атомов в натурфилософии Лукреция и геометрический метод Спинозы [1: 159].

Очевидно, что в таком понимании математика как единственная транзитивная онтология отвергает все достижения так называемого «языкового поворота» в философии (Витгенштейн), который видел в математике только логический метод, а в математическом предложении – отсутствие мысли. Для Бадью логика становится описанием возможных математических универсумов, в которых уже зафиксированы онтологическим решением упорядочивающие корреляции: матема и есть natura naturans, внутренние связи которой и предназначено описать логике в своих пропозициональных тавтологиях [1: 134-135].

Форма чистой множественности бытия мыслится Бадью как число, как «макро-тело» числа, которое больше не совместимо с функциями меры, счета и постоянства. Число (α,X) является единством двух элементов – ординального числа α и его части X (X < α). В макро-теле как месте Числа (выражения чистой множественности), как возможности исчисления бесконечного, заключены все числа, материя которых первое ординальное бесконечное, чья форма бесконечна [1: 148]: каждый бесконечно малый интервал макро-тела чисел может восприниматься как место бесконечности видов чисел. Число больше не является выражением концепта (теория Фреге), ни операциональной фикцией (теория Пеано), ни эмпирико-языковой данностью (вульгарное понимание), ни трансцендентальной категорией (теория Кронекера или Канта), ни синтаксисом или языковой игрой (Витгенштейн), ни абстракцией нашей идеи последовательности, оно - форма бесконечного «расточительного» порождения бытия в видах чисел наподобие того, как бесконечны атрибуты субстанции у Спинозы [1: 149]. Число – это форма, выделенная из постоянной однородной множественности ординального, оно – жест бытия как разрыв в максимальном постоянстве множественного, как след события, как избыток [1: 150-151]. И это жест – это усилие мысли, соответствующее событию, которое происходит, когда логика явления (описание корреляций математического универсума) больше не способно локализовать множественное как таковое [1: 200].

Каковы следствия математики как транзитивной онтологии для антропологии Бадью? В своей критике современного капитало-парламентаризма и «демократического материализма» как выражения европейского нигилизма Бадью определяет свойство человека как способность участия во множественных мирах, являться в неисчислимых местах, его свойство – бесконечно переходить от одного мира к другому в обретении своей явленности, которая несовместима с конечностью бытия, уйти от триумфа согласия, скрепляющего в целое множественность позиций [2:3]. Однако можем ли мы преодолеть нигилизм гибкостью интеллектуального инстинкта только исходя из онтологического решения?

Литература

1. Badiou A. Court traité d`ontologie transitoire. P., Seuil, 1998.

2. S’orienter dans la pensée, s’orienter dans l’existence. Séminaire public d’Alain Badiou // II. 2005-2006 (transcription de François Duvert).

Симакин Александр Георгиевич, *ст. преподаватель, Российский университет дружбы народов (Москва)*

ИДЕАЛЬНОСТЬ ОРУДИЯ И РЕФЛЕКСИВНАЯ ПРИРОДА МАТЕМАТИКИ

Традиционное понимание мышления, в том числе и прежде всего мышления математического, сводится к умственному оперированию некими нематериальными, идеальными вещами: образами, представлениями, символами, знаками и т.п. Современная теоретическая математика, в отличии, например, от практической математики древних египтян, предстает в свете этой традиции как наиболее совершенная форма мышления, обладающая строгим аксиоматическим методом. Признанным среди ученых образцом научной рациональности всегда являлись теории, построенные аксиоматически, а первый пример такой теории - геометрия Евклида была образцом для подражания. Такое понимание математики выражено в утверждении, что она есть наука о математических структурах (Н.Бурбаки), т.е. о множествах с заданными на них отношениями, подчиняющимися неким произвольно постулированным правилам-аксиомам. Таким образом, математическое мышление понимается здесь как строгая интеллектуальная игра математическими символами, строгость правил которой, однако сполна компенсируется их изначальным произвольным постулированием, а его успешность определяется соответствием основному требованию к аксиоматической системе – отсутствием противоречия.

Данное понимание мышления принципиально исключает саму возможность постановки вопроса об истине, об адекватном отражении некоторого реального предмета. Математический (логический) символизм если что-то и отражает, то лишь произвол постулировавшего его субъекта. Но тогда очевидный факт совпадения итогов формальных операций со знаками с некоторой физической реальностью, названный Ю. Вигнером «непостижимой эффективностью математики в естественных науках» действительно становится чем-то теоретически невыразимым, абстрактным чудом или услугой Творца. Такое понимание мышления восходит к Декарту и составляет сущность картезианского дуализма.

Совершенно иначе дело выглядит, если мышление понимать «по Спинозе» как «активное действие по форме предмета» (Э.В.Ильенков). Последнее, будучи активным, т.е. таким действием, которое определяется исключительно формой предмета, а не произволом субъекта или случайными внешними помехами или стимулами, и есть действие мыслящее, есть собственно мышление как таковое. Мышление – не магически-бестелесный акт, совершающийся в недрах духа, понятого как абстрактная противоположность лишенной мышления, простирающейся материи. Между картезианскими абстракциями мышления и материи действительно разверзается ничем не заполненная пропасть. Напротив, если под мышлением понимать разумное действие одного тела по форме другого, то полностью устраняется сама проблема взаимодействия “мышления” и чувственной реальности.

Существуют три типа взаимодействия природных тел. Взаимодействие механическое или всецело случайное, в котором нет активной и пассивной стороны, и все тела всегда находятся в отношении со всеми другими телами. Взаимодействие химическое, в котором так же нет активной и пассивной стороны, но в котором нечто взаимодействует по данному типу уже не со всем, но со своим-иным. И, наконец, высший тип взаимодействия – взаимодействие-полагание, в котором различаются активная и пассивная стороны, субъект и предмет. В таком взаимодействии-полагании активная сторона полагает пассивную в роль предмета, и в то же время, полагается предметом в роль субъекта. Такое асимметричное взаимодействие тел есть *мышление или жизнь*. Мышление (= жизнь) как процесс есть активное чувственно-предметное действие живого существа, субъекта действия, по форме вещи, положенной им в качестве предмета этого действия, оно определяется необходимой и всеобщей природой предмета, оно - свободно. Всеобщая природа предмета, следовательно, представлена и в форме предметного действия и в мыслящем теле живого существа – субъекта предметного действия. Так в форме полета, и в форме крыла птицы представлена всеобщая природа воздушной стихии. Следовательно, живое мыслящее тело птицы (и любого живого существа) есть не просто картезианская простирающаяся материя, а есть спинозовская мыслящая материя, оно есть *идеальное*, в нем представлена всеобщая природа чувственно-предметного жизненного мира птицы. Отличие человека от других форм жизни в том, что кроме органического тела у него есть еще «неорганическое тело» (К.Маркс) - культура, материальная и духовная. Развитие человека идет не путем эволюции его органического тела, а путем культурно-исторического совершенствования его «неорганического тела», и в этом отношении человек - живое, но не биологическое, а культурно-историческое, социальное существо. Ядром и порождающим началом культуры являются материальные орудия труда - продолжение его органического тела. В форме материального орудия идеально представлен предмет, на который направлена орудийная деятельность человека, так, например, в форме топора представлена всеобщая форма дерева. Духовная культура и деятельность возникают в процессе чувственно-предметной трудовой деятельности и получают относительную самостоятельность и независимость от последней в силу общественного разделения труда. В процессе совместно-разделенной трудовой деятельности люди создают и материальные орудия и генетически относящиеся к ним символы и знаки – средства духовной деятельности. Так символ, идеальным образом представляя некоторый реальный предмет, еще несёт в составе своей телесной формы нечто общее с природой представляемого предмета, знак же оказывается абсолютной идеальной абстракцией, чистой конвенциональной условностью. Орудие труда, символ и знак можно рассматривать как генетически восходящую линию идеальных форм культуры, опосредствующих мышление человека – его универсальную деятельность по форме природного универсума.

Математическая деятельность предстает как деятельность чистого мышления, оперирующего платоновскими идеальными сущностями. Платон верно понял тот факт, что любая деятельность осуществляется в соответствии с идеальными образцами, но не открыл их земного происхождения. Земным порождающим началом идеальности в деятельности человека является орудие труда, идеально представляющее всеобщую природу предмета деятельности. Совокупность орудий труда есть идеальное инобытие природы, познанной человеком. Теоретические понятия математики и соответствующие им знаковые системы не являются плодом произвола, они есть дериват, результат рефлексии человека на свою орудийную деятельность в ее количественном аспекте, поэтому в них идеально представлена диалектика всеобщего и единичного количественной сферы универсума. Так, евклидова точка – есть результат такой рефлексии на деятельность измерения длины, с помощью материальной меры. И все последующее развитие математики есть рефлексия математического мышления: математика познает саму себя, тем самым познавая универсум.

Вся духовная культура есть рефлексия на орудийную деятельность человека. Осознание рефлексивной природы математики и ее генетической связи с орудийной деятельностью демистифицирует отношение математики с реальностью и объясняет логическую неизбежность противоречий в ее составе.

Сокулер Зинаида Александровна, *д.ф.н., профессор,*
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ВИТГЕНШТЕЙНОМ ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ И ДИАГОНАЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ КАНТОРА

Как известно, философские проблемы математики занимали большое место в творчестве Л.Витгенштейна. Он неизменно и последовательно стремился лишить математические результаты романтического ореола прозрений относительно особой умопостигаемой реальности, представить их в прозаическом свете как результаты определенных построений и техник. Витгенштейн повторяет, что математическое утверждение имеет смысл только в некоторой системе, что предложение, которое еще не доказано (т.е. не включено в определенную систему) вообще не имеет смысла. Соответственно, Витгенштейн критически отзывается о результатах, не просто поразивших философов и философски настроенных математиков, но составивших центральные сюжеты для философии математики XX века: это теорема Гёделя о неполноте и канторовская диагональная процедура, посредством которой доказывается несчетность множества действительных чисел.

Пытается ли Витгенштейн опровергнуть соответствующие доказательства? Разумеется, нет. Он выступает против их принятого истолкования. «Ты говоришь: «… следовательно, Р истинно и недоказуемо». Это, вероятно, означает: «Итак, Р». Пожалуй, я не возражаю, но с какой целью ты записываешь данное «утверждение»? ... И как бы ты смог объяснить мне истинность утверждения, если сам не можешь использовать его для чего-нибудь иного, кроме как для этих маленьких фокусов?» . Подобные реплики провоцировали обвинения Витгенштейна в том, что он попросту не понимает смысла теоремы Гёделя. Пытаюсь показать, что такие обвинения несправедливы.

Витгенштейн обсуждает не саму теорему Гёделя, а ее интерпретацию. И здесь, как и повсюду, он борется против расхожего убеждения в том, что все то, что выглядит как утвердительное предложение, таковым и является, и соответственно, должно быть истинным или ложным; истинность (ложность) понимается про этом как соответствие (не соответствие) некоторому независящему от предложения факту.

Гёделевское предложение Р говорит о собственной недоказуемости, следовательно, оно не может быть доказуемым в непротиворечивой системе, следовательно, оно истинно. Получается математическое предложение, которое не принадлежит определенной системе и является описанием существующего независимо от него факта. Для Витгенштейна это неприемлемо, поэтому он показывает, что к такому выводу ведет не сама по себе математическая конструкция Гёделя, а то, что в ее расхожей интерпретации используется понятие истинности, которое по инерции кажется ясным, но на самом деле таковым не является, потому что выходит за пределы своих обычных применений. Что, спрашивает Витгенштейн, произойдет, если предложение, говорящее о своей недоказуемости, будет доказано? – Никакие основы не зашатаются, просто будет изменена интерпретация данного предложения. Например, будет уточнено, что оно недоказуемо такими-то доказательствами, - но доказуемо другим: «Когда для Р была дана интерпретация «Р недоказуемо», то еще было неизвестно это доказательство для Р, и поэтому нельзя сказать, что Р утверждает: это доказательство не существует. – Как только построено доказательство, тем самым создана новая ситуация: и теперь надо решать, будем ли мы называть это доказательством (еще одним доказательством) или же утверждением о недоказуемости».

Защищая Витгенштейна, напомню, что неразрешимое предложение может быть добавлено в системе формализованной арифметики в качестве аксиомы. Новая система не будет противоречивой, просто изменится интерпретация данного предложения.

Поэтому, призывает Витгенштейн, надо смотреть на использования математического предложения, а не на его вербальную интерпретацию. Эта установка остается лейтмотивом при обсуждении канторовской диагональной процедуры и ее результата. Витгенштейн призывает не смотреть на эту процедуру как на метод открытия особого поразительного факта – несчетности множества действительных чисел; и тем более как на способ построения некоторого нового числа: «Не состоит ли вопрос, по сути, в следующем: для чего можно использовать это число? Правда, это звучит странно. – Но это как раз и означает: в какое математическое окружение оно включено?».

«В формулировках: «Нельзя выстроить в ряд действительные числа» или же «Множество … несчетно» - опасно, обманчиво то, что некое определение, способ образования понятия, представлено в виде факта природы» . Витгенштейн обращает внимание на то, как меняется значение выражений «упорядочение», «действительное число» в ходе диагонального рассуждения. Если у нас есть некоторое понимание того, что значит упорядочить в ряд натуральные числа, то фраза «предположим, что мы упорядочили в ряд все действительные числа» меняет это представление каким-то неконтролируемым образом. А сам диагональный метод – это не способ предъявить неучтенное, но до того и независимо от диагонального рассуждения существующее число; это просто изменение словоупотребления, позволяющее называть процедуру методом построения нового действительного числа. Так что Витгенштейн предлагает следующую, неопасную (в смысле: не возбуждающую никаких философских болезней) формулировку результата Кантора: «Если что-то называют рядом действительных чисел, то построение по диагональному методу также именуют «действительным числом» и притом говорят, что оно отлично от всех членов ряда». Витгенштейн предостерегает от предложений, которые так и кажется, вводят нас в тайны математического мира: «Это тот аспект, относительно которого я хочу предостеречь. Если кажется…, то следует быть осмотрительным».

Насколько я могу понять, в канторовской трансфинитной арифметике и в его учении об иерархии мощностей множеств Витгенштейн видит постоянное изменение значений слов (таких как «число», «равенство», «число, следующее после»).

Математические открытия состоят в построении новых техник, которые изменяют старые «языковые игры». Даже в математике, таким образом, происходит дрейф значений используемых слов – и наложение разных ментальных образов, с этими словами связанных, - что, по мнению Витгенштейна, и порождает разнообразные философские проблемы и даже целые направления.

Суханов Ким Николаевич, *д.ф.н., профессор, Челябинский государственный университет*

БЕЙЕСИАНИСТСКАЯ МАТЕМАТИЗИРОВАННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРОЦЕДУРЫ ПОДТВЕРЖДЕНИЯ

1. Вторая половина XX в. объявлена началом революции в понимании подтверждения научных теорий, революции, связанной с оформлением бейесианистской концепции философии науки вообще и использованием аппарата бейесионистской теории вероятностей в различных областях. Основные элементы концепции и аппарата бейесианизма освещаются как в позитивном, так и в критическом аспекте, например, в [1], [2]. Высказана мысль о том, что математизированная бейесианистская эпистемология науки является наиболее перспективным направлением прогресса эпистемологии в XXI столетии [3].

2. Наиболее интересным с философской точки зрения моментом бейесианизма является применение вероятности, отклоняющейся от ее частотной интерпретации, к решению проблемы подтверждения научного знания. В бейсианистской интерпретации вероятность берется как количественная мера веры, уверенности ученого в правильности, истинности научных суждений (гипотез, теорий). Познавательный процесс зачинается назначением субъектом познания исходных "априорных" вероятностей рассматриваемым суждениям.

3. В рамках познавательного процесса по логике бейесианизма исходные "априорные" вероятности имеют обычно либо форму "субъективной вероятности", которая «назначается» субъектом познания в соответствии с объемом его знания, а точнее в соответствии с объемом его незнания, либо в форме "объективной вероятности", назначаемой в соответствии с требованиями рациональности, последовательности, логики.

4. Обращение к субъективной форме вероятности оправдывается отсутствием надлежащей информации об истинности научного знания. При полном отсутствии информации обращаются к «принципу безразличия», в соответствии с которым всем имеющимся альтернативам назначаются одинаковые (равные)

вероятности. При наличии каких-либо ориентиров распределение вероятностей подчиняют требованию соблюдения пропорциональности. Во всех случаях требуется подчинение практики назначения вероятностей и оперирования ими нормам («аксиомам») теории вероятностей.

5. Априорные вероятности как меры уверенности в правильности суждений в качестве начальных условий вводятся в процедуры подтверждения или опровержения научных суждений (гипотез, теорий). Такая процедура направлена на уточнение предварительно назначенных вероятностей. Уточнение достигается применением бейесианистского аппарата теории вероятностей (формула условной вероятности, теорема Бейеса, правило Бейеса, принцип кондициализации) и учета влияния поступающих свидетельств на эпистемическую позицию исследователя (на изменение вероятностей как мер его убежденности) [4].

6. По нашему мнению смысл термина «свидетельство» ближе всего раскрывается понятием факта. Проблема факта относится к дискуссионным проблемам философии в целом и философии науки в частности, а по степени сложности понятие факта ставится У.О. Куайном на третье место после понятий объекта и высказывания. [5]. В понятии факта отражается два аспекта - существование (объектов, явлений) и фиксация этого существования в форме высказывания, суждения [6]. При этом факты становятся известными не только в результате их непосредственного «предъявления», но и в результате получения сообщений (высказываний, суждений) от свидетелей, которыми факты были удостоверены. Бейесианист включает оба случая в рамки обозначенного выше эпистемического отношения ученого, переводя разговор в оценку достоверности свидетельств вероятностной мерой (в смысле меры уверенности в достоверности свидетельств).

7. Свидетельство (факт) согласно бейесианистской эпистемологии подтверждает гипотезу (теорию), если его появление повышает с помощью аппарата бейесионистской теории вероятностей вероятностную меру уверенности ученого в правильности гипотезы. Такое повышение не реализуется, если свидетельство существовало до формулировки гипотезы [7]. Следует подчеркнуть, что здесь имеются в виду именно свидетельства, а не явления (объекты, свойства, отношения,

состояния, процессы), существовавшие сами по себе (и возможно уже переставшие существовать) до оформления гипотезы (теории) и независимо от своего удостоверения.

8. Против бейесианистской интерпретации процесса подтверждения знания выдвинуто немало возражений и критических замечаний. Тем не менее, мы считаем, что рассмотрение подтверждения знания со стороны эволюции эпистемической позиции ученого, возрастания или уменьшения его уверенности в истинности суждений заслуживает серьезного внимания и обсуждения.

Литература

1. Michael Strevens. The Bayesian Approach to the Philosophy of Science. / For the Macmillan Encyclopedia of Philosophy, second edition / www. strevens. org / research/ simplexuality

2. Luc Bovens, Stephan Hartmann. Bayesian Epistemology. Oxford: Clarendon Press; 2003.

3. Bayesian Epistemology / Stanford Encyclopedia of Philosophy/ First published Thu Jul 12, 2001; substantive revision Wed Mar 26, 2008.

4. Процедуру подтверждения гипотез в рамках частотной интерпретации вероятностей см.: К.Н. Суханов. Онтологическая вероятность в логике / Вопросы истории, экономики и философии. Челябинск: Южно-Уральское кн. изд. 1969. С 261-269.

5. Quine, W.O. Word and Object. N.Y. ; L., 1960. P. 246.

6. См. Суханов К.Н. Онтология, эпистемология и логика науки / Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2011. С. 57-58.

7. Более детальное раскрытие этого положения на примере теории тяготения Ньютона и влияния лунного притяжения на земные приливы см. Michael Strevens. The Bayesian Approach to the Philosophy of Science. / For the Macmillan Encyclopedia of Philosophy, second edition.

Сычева Людмила Сергеевна, *д.ф.н., профессор,*
Новосибирский государственный университет

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ НА ПУТИ ОТ ФИЛОСОФИИ К НАУКЕ

В работах по философии математики рассматриваются следующие вопросы, ответы на которые несовместимы друг с другом. 1) В чем специфика математических объектов, где и как они существуют? Х. Патнэм дает перечень из 11 школ, отвечающих на этот вопрос [Цит по 1, с. 18-20]. 2) Определяются ли в математике все понятия строго в отличие от других наук, выводятся ли ее теоремы строго из аксиом, или в математике, как считает В.А.Успенский, это не так. 3) Имеют ли место научные революции в математике? М. Кроу: «революции (в смысле Куна) никогда не встречаются в математике». 4) Как в математике возникают новые понятия, теории, новые дисциплины? 5) Влияют ли на развитие математики внешние факторы (потребности практики, других наук) или – только внутренние – какие?

Неоднозначность ответов в философии математики – типична для философии. Однако не все авторы согласны «мириться» с «хаосом мнений и предположений». У. Харт, например, предлагает осуществить эпистемологический поворот в философии математики – изучать вопросы математического познания, а не традиционные вопросы о природе математических объектов и математической истины. Пойа, Лакатос, Мостовский и некоторые другие сближают математику с естествознанием, считая, что математик не может гарантировать окончательной истинности своих утверждений и что методы, посредством которых он идет к ним - это те же методы индуктивных наук.

Итак, мы видим, что в философии математики есть тенденции к осознанию этой области знания не как философской дисциплины, которой присущи «хаосом мнений и предположений», а как эмпирической науки. В свою очередь, и в философии науки (дисциплине, «объемлющей» по отношению к философии математики) М.А. Розовым развивается идея о превращении философии науки в научную дисциплину. Он пишет: «Куда же идет философия науки? Или, прежде всего: а насколько оправдано здесь слово «философия»? Дело, конечно, не в названии, а в закономерностях развития, в характере проблем и методов их решения. Мне лично представляется, что эмпирически ориентированная философия науки — это, по крайней мере, в перспективе уже не философия в узком смысле этого слова. Она готова разделить участь таких дисциплин, как социология или психология, которые, как, впрочем, и многие другие имели философское прошлое. «Хорошо известно, что психология родилась в конце девятнадцатого века как дитя философии и экспериментальной физиологии» [2, с.16]. Философия науки в современном ее виде рождается на стыке философии и историко-научных исследований» [3, с. 42.

М.А. Розов построил модель науки: 1. Наука – это куматоид, включающий в себя множество программ, которые определяют деятельность ученого. Программы частично вербализованы, но по большей части существуют на уровне непосредственных эстафет. 2. Три основных группы программ: программы получения знаний (методы, конструкторы, методологические программы), коллекторские и аксиологические программы. Коллекторские программы определяют дифференциацию науки и лицо научных дисциплин. 3. В отличие от нормальной науки Куна, эта модель открыта как по отношению к другим дисциплинам, так и по отношению к Культуре в целом. 4. Наука динамична и за счет постоянного взаимодействия различных научных и вненаучных программ научные дисциплины связаны друг с другом и образуют дисциплинарные комплексы. 5. Наука – это система с рефлексией. Научное знание возникает как вербализация образцов, представляя собой продукты описательной рефлексии. Эти знания постоянно осознаются в свете разных познавательных задач, что приводит к рефлексивным преобразованиям. Исследование науки следует вести с надрефлексивных позиций. [4]

Рассмотри, что можно сделать в философии математики в рамках эстафетной модели науки М.А. Розова.

Оппозиция платонизма и антиплатонизма может быть снята благодаря представлению о том, что математические объекты – это социальные куматоиды - с каждым типом математического объекта связана относительно постоянная программа и переменный материал. Исследовать возникновение математических объектов –

это значит выявить программу, задающую этот объект, изучить, что способствовало ее формированию и изменению. Программы в математике заданы либо правилами, записанными в символической форме, либо в виде образцов решенных задач. И правила, и образцы задач – даны исследователю, в них нет мистики интеллигибельного мира, нет нужды обращаться к «особому» миру. Математические объекты – это роли обозначений, а роли задаются способами действий. [5].

Математические объекты – не найдены человеком в природе, а сконструированы учеными. Конструктор как программа задает элементы и правила действия с ними. Розов связывает теоретическое исследование (в том числе и в математике) не с мифическими мысленными процедурами, а с вербализацией образцов прошлой деятельности, когда один человек объясняет другому, как действовать в тех или иных ситуациях (первый уже владеет этими действиями) [6].

Ответ на вопрос о научных революциях в математике зависит от определения научной революции. При понимании научной революции как существенного изменения в развитии конкретной науки, революции есть и в математике – прежде всего – появление нового конструктора.

Математические дисциплины, при всей их разнородности, тесно связаны друг с другом, а также с физическими науками, астрономией, биологией, географией, экономикой и многими другими. Связи фиксируются идеей программно-предметных комплексов, и вследствие этого научные дисциплины нерационально изучать как изолированные «образования». Предметные науки ставят задачи, а математические –разрабатывают средства. Говоря о развитии науки, следует изучать не изолированные дисциплины, а их комплексы. В этом случае и не будет вопросов – какую реальность изучает математика – разрабатывая средства для предметных наук, математика тем самым изучает и предметную реальность. Конечно, вопросы о том, что именно изучает математика, все же останутся, ибо не все математические дисциплины «обслуживают» предметные науки. [7]. В математике, как и в других науках, действуют по образцам, прибегают к аналогиям, используют не строго введенные, но работающие понятия (такие, как бесконечно малые в анализе).

Литература

1. Целищев В.В. Философия математики. Ч. 1. Новосибирск, 2002.

2. Холл К., Линдсей Г. Теории личности. М., 1997.

3. Розов М.А. О судьбах эпистемологии и философии науки // Философия. Наука. Цивилизация. М., 1999.

4. Розов М.А. Теория социальных эстафет и проблемы эпистемологии. Смоленск, 2006.

5. Розов М.А. Способ бытия математических объектов // Методологические проблемы развития и применения математики. М., 1985.

6. Сычева Л.С. Математика и теоретическое конструирование // Философия науки. №1 (52), 2012.

7. Сычева Л.С. «Физическая математика» Архимеда, формирование интегрального исчисления и механизмы новаций в математике // ΣΧΟΛΗ. Философское антиковедение и классическая традиция. 2012. Т. 6. Вып. 2.

Шапошников Владислав Алексеевич,
к.ф.н., доцент, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

НАТУРАЛИЗМ И СОВРЕМЕННАЯ ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ

Цель предлагаемого рассуждения – представить определенный взгляд на современную историю и нынешнее состояние философии математики.

Рождение современной философии математики обычно связывают с именем Г. Фреге и с появлением трех великих школ – логицизма, интуиционизма и формализма. Споры вокруг них оставались центром исследований в философии математики вплоть до 1950-60 годов. Однако характерная для этих исследований вера в возможность обрести окончательное обоснование математики *дала надлом* еще в 1930-е годы. В качестве формальной точки отсчета здесь удобно взять теоремы Гёделя (анонсированы на симпозиуме по основаниям математики в Кёнигсберге в сентябре 1930 года). Впрочем, надлом этот имел общекультурные основания и поэтому проявился в целом ряде концепций. Это, например, философия математики позднего Витгенштейна (Австрия и Великобритания), это концепция группы Бурбаки (Франция)[2], это биологическая трактовка математики у Конрада Лоренца (Австрия) в статье 1941 года о кантовской концепции a priori, это антропологический подход к математике Л. Уайта и Р. Уайлдера (США). Эти концепции имеют отчетливо выраженный антифундаменталистский характер.

Подчеркну еще раз – речь идет о 30-40-х, а не 60-70-х годах, т.е. происходило это не после, а еще до и во время второй мировой войны! Исходная фигура здесь отнюдь не И. Лакатос, как обычно считают [2, p. 17; 1, с. 84]. Процесс формирования этой традиции шел постепенно, начиная, по крайней мере, с 1910-х годов, когда Освальд Шпенглер работал над своим «Закатом Европы». Известно, что Витгенштейн читал книгу Шпенглера, первый том которой вышел в 1918 году, и трудно представить, чтобы он не обратил внимания на имеющиеся в этом томе рассуждения о математике (принципиально нефундаменталистского толка).

Каковы причины возникновения названного надлома, который обычно связывают с более поздним временем и описывают как появление мэверик-традиции [2] или нефундаменталистской философии математики [1, с. 79-96]? Какие общефилософские и общекультурные тенденции спровоцировали изменения в сфере философии математики в 30-40-е годы? Речь, по-видимому, может здесь идти: 1) о влиянии дарвинизма и распространении эволюционных представлений; 2) о распространении идей прагматизма; 3) о попытке освободить философию и науку от теологии и метафизики в неопозитивизме; 4) о развитии социологии и социокультурной антропологии; и т.д. и т.п. Можно ли охватить все эти тенденции общей характеристикой? Мне кажется уместным применить здесь достаточно популярный термин *натуралистический поворот* [3; 4].

Натурализм – это то, что противоположно *супранатурализму*, т.е. апелляции в философских рассуждениях к сверхприродному,

[2] А.Г.Барабашев относит ее к фундаменталистской традиции [1, с. 81-82] с чем я не могу согласиться.

сверхестественному, сфере религиозных и метафизических представлений в традиционном их понимании. Для натурализма математика есть часть человеческой культуры. Сама же эта культура есть верхний этаж трехэтажной *фундаментальной натуралистической пирамиды*: биологическое – социальное - культурное. Каждый следующий этаж в ней есть порождение предыдущего; он не мыслим без предыдущего, хотя и не редуцируем к нему [5]. В рамках такой достаточно широкой схемы возможны разные построения. На практике чаще всего встречается либо версия натуралистической философии математики, делающая основную ставку на *верхние*, социокультурные этажи фундаментальной натуралистической пирамиды (в двух версиях – культурной и социологической), либо на ее *нижний*, биологический этаж (опять же в двух версиях – когнитивной и эволюционной). Нефундаментализм если и не синонимичен натурализму, то, во всяком случае, теснейшим образом с ним связан.

Важно заметить, что натуралистическая тенденция встретила именно в философии математики небывалое сопротивление. Мэверикам так и не удалось до сих пор не только поменяться местами с мейнстримом, но и отвоевать себе равные с ним права. Они по-прежнему остаются маргиналами в сообществе философов математики. Объясняется это тем, что чистая математика и математическая логика стали в XIX – начале XX веков своего рода новой теологией, призванной насытить нашу жажду абсолютного в условиях повсеместной утраты доверия к традиционной христианской теологии (слова Ницше о смерти Бога). Это хорошо видно у Б. Рассела, но также и у Г. Фреге, Л. Брауэра, Д. Гильберта. Философия математики и логики и сейчас служит важнейшим оплотом квазитеологического стиля философствования. Если же учесть современные тенденции к формированию постсекулярного общества, то ситуация становится еще более интересной. В этих условиях важнейшую роль приобретает *методологический натурализм*, т.е. попытка выяснить, насколько далеко удается продвинуться в понимании математики без явного или скрытого обращения к теологическим и квазитеологическим предпосылкам.

Однако, благодаря авторитету и влиянию идей У.В.О. Куайна, в современной американской философии математики натурализм является весьма популярной позицией, что постепенно трансформирует ситуацию в философии математики в целом. Обратим внимание на одно весьма знаменательное свидетельство этого процесса.

Для фундаменталистской философии математики естественно делать основной акцент на *чистой* математике, как том, что позволяет выяснить подлинную природу математики. Это связано с ее платонической и теологической генеалогией. Для натуралистической философии математики, уже из общих соображений, основной акцент следует делать на *прикладной* математике, поскольку, рассматривая применение математики в контексте нашей деятельности в этом мире, мы оказываемся ближе к ее истоку и именно здесь у нас больше шансов найти ключи к ответу на вопрос, что же такое математика. И только разобравшись с тем, как математика работает в приложениях, мы сможем понять и что такое чистая математика.

В соответствии с такой логикой, начиная с 1990-х годов, развивается особое направление философии математики, ставящее именно *проблему применимости* в центр внимания; иногда его не совсем удачно называют «философией прикладной математики». В англоязычном философском пространстве как пионера данного направления воспринимают американо-израильского философа Марка Штайнера, выпустившего в 1998 году монографию «Применение математики как философская проблема» [6]. В эту область уже внесли свой вклад австралийский философ Марк Коливан [7], британский философ Мэри Лэнг [8], американец Кристофер Пинкок [9], норвежец Сорин Бангу [10] и другие.

В заключение хочется подчеркнуть: какой облик приобретет философия математики ближайшего будущего, решается не в спорах вокруг узких специальных проблем, а, главным образом, в прояснении отношений натурализма и теологии, с одной стороны, и в попытке разобраться с отношениями математики и реальности, с другой.

Литература

1. Барабашев А.Г. Будущее математики. М.: МГУ, 1991.
2. *Kitcher P. and Aspray W.* An Opinionated Introduction // Aspray W. and Kitcher P. (eds.) History and Philosophy of Modern Mathematics. Minneapolis: The University of Minnesota, 1988, p. 3-57.

3. Callebaut W. (ed.) Taking the Naturalistic Turn, Or How Real Philosophy of Science Is Done. The University of Chicago Press, 1993.
4. Кезин А.В., Фоллмер Г. Современная эпистемология: натуралистический поворот. Севастополь, 2004.
5. Шеффер Ж.-М. Конец человеческой исключительности. М.: НЛО, 2010.
6. Steiner M. The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Harvard University Press, 1998.
7. Colyvan M. The Indispensability of Mathematics. Oxford University Press, 2001.
8. Leng M. Mathematics and Reality. Oxford University Press, 2010.
9. Pincock C. Mathematics and Scientific Representation. Oxford University Press, 2012.
10. Bangu S. The Applicability of Mathematics in Science: Indispensability and Ontology. Palgrave Macmillan, 2012.

Яшин Борис Леонидович, *д. ф. н., профессор, Московский педагогический государственный университет*

ЭТНОМАТЕМАТИКА И ПРИРОДА БАЗОВЫХ ПОНЯТИЙ МАТЕМАТИКИ

Этноматематика, сложившаяся во второй половине прошлого века как область исследований проблем, связанных с возникновением фундаментальных математических идей, представлений и понятий в различных культурах, в тех или иных этносах, профессиональных и возрастных объединениях, т. е. в социальных группах, отличающихся друг от друга не только представлениями об окружающем нас мире, но и способами его математического освоения, приобретает в настоящее время все большее влияние среди ученых и философов Австралии, Африки, Бразилии, Великобритании, Германии, США, Японии и некоторых других стран Северной и Южной Америки.

Проблемное поле этноматематических исследований достаточно широко и разнообразно. Сегодня в нем, по мнению Р.

Виталь и О. Сковсмос (R. Vithal, O. Skovsmose), можно выделить четыре основных направления: антропологическое, историческое, социально-психологическое и педагогическое [1].

Первое из них характеризуется тем, что здесь исследуются математики традиционных культур. В работах этого направления, прежде всего, обращается внимание на возникшие в этих культурах числовые системы, жесты, символы, игры и головоломки, представления геометрии, на проявления математики в искусстве, архитектуре и т.д.

Во многих работах второго направления критикуется западноевропейский центризм в истории математики, которому противопоставляется идея паритета математик разных культур, показывается, что в процессе возникновения и развития математики весьма важную роль сыграли и неевропейские цивилизации, такие, например, как египетская, иракская, японская, майя и др.

Представители третьего направления, используя инструментарий социальной психологии, анализируют математические знания, формирующиеся в повседневной практике в культурах коренных народов Австралии, Африки, Северной и Южной Америк.

Ученые и философы, работы которых относятся к четвертому направлению, фокусируют внимание на изучении взаимоотношения этноматематики и математического образования. В последние годы здесь разрабатывается исследовательская междисциплинарная программа по философии, эпистемологии и истории математики (и шире – истории естествознания), нацеленная на практический выход в обучении и преподавании математики в школах и университетах. При этом особое значение здесь придаётся искусству и техникам (Techne) объяснения и понимания математических идей, а также преодоления различий их восприятия представителями разных социально-культурных групп [2].

Общим для исследований, ведущихся в области этноматематики, является изучение математического познания в контексте предметной и познавательной (интеллектуальной) деятельности, в рамках которой и обнаруживаются связи математики и культуры, в которой она возникает.

Исследования первых трех направлений, с моей точки зрения, в наибольшей степени способствуют поиску ответа на вопрос о том, все ли культуры формулируют математические идеи одинаковыми (или подобными) способами, идут одним и тем же путем в их разработке?

Ответ, который дают результаты этих исследований, вполне однозначен: западноевропейская математическая парадигма представляет собой лишь одну из возможных парадигм, которая, как и все остальные, придуманные человеком системы, находится в прямой зависимости от предметной деятельности и условий, в которых человек существует [3].

Следует ли из этого вывод о том, что исследования в области этноматематики опровергают точку зрения сторонников универсальности, единственности математики? Отнюдь.

Во-первых, потому что результаты этих исследований говорят о том, что универсальные математические структуры («число» и «числовая прямая», «симметрия», «прямая линия» и некоторые другие) обнаруживаются в любой культуре.

Во-вторых, потому что этноматематику интересуют проблемы не «академической», формальной, т. е. современной математики, а математики «опытной», обусловленной спецификой предметной деятельности, характерной для каждой из культур внутри которой она возникает.

Переход от «опытной» математики к математике «академической» осуществляется, во многом, благодаря тому, что все «опытные» математики, отличаясь друг от друга в частностях, в главном инвариантны друг другу [4]. Эта инвариантность есть следствие, прежде всего, того, что окружающий нас мир природы един, универсален в своих фундаментальных свойствах. В своей практической деятельности человек, осваивая окружающий его мир природы, так или иначе, выявляет эти фундаментальные характеристики объективного мира, овладевает его «предметной структурой». А «опытная» или «первая», как ее называет В. Я. Перминов, математика в лице элементарных арифметики и геометрии, находит в этой деятельности свой онтологический фундамент [5].

Результаты исследований в области этноматематики, по моему мнению, показывают, что первичные (базовые) понятия и идеи математики не даны человеку до его личностного, практического опыта, что они не существуют сами по себе вне человека, вне его бытия, вне его деятельности. Эти идеи и понятия рождались и рождаются вместе с рождением самого человека как «человека разумного», вместе с возникновением у него «способности к суждению», вместе с обретением им сознания.

Учитывая то, что современный человек – результат многовековой эволюции, что каждый из людей обладает генетической памятью, которая хранит в том или ином виде опыт предшествующих поколений его предков (архетипы Юнга), можно сказать, что кажущиеся внеопытными, априорными (в смысле Канта) фундаментальные математические понятия (и не только математические) на самом деле не являются таковыми. Они возникают как представления и формируются как понятия в процессе повседневной обыденной практической деятельности, в процессе социализации личности, что и находит свое подтверждение в результатах работ многих исследователей, работающих в области этноматематематики.

Иными словами, результаты такого рода работ можно рассматривать в качестве дополнительных аргументов в пользу взаимосвязи априоризма и эмпиризма в математическом познании, на которую сегодня обращают внимание некоторые философы [6].

Литература

1. Vithal, R., Skovsmose, O. The End of Innocence: A Critique of Etnomathematics// Educational Studies in Mathematics, vol, 34, 2, 1997. Pp. 131-157.

2. D’Ambrosio U. The Program Ethnomathematics and the challenges of globalization//Circumscribere, International Journal for the History of Science, vol.1, 2006. Pp.74-82.

3. См., например: Ascher M. Ethnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas, Brooks / Cole Publishing Company, California, 1991.

4. Пронин А.С., Ромашкин К. И. Об эффективности математики в научном познании//Вестник МГОУ. Серия «Философские науки». №2/2012. С. 80-86. [Электронный ресурс]. - URL: http://vestnik-mgou.ru/web/index.php/ru/filosofskie-nauki/197 (дата обращения 23.03.2012)

5. Перминов В.Я. Реальность математики // Вопросы философии. –№2. – 2012 [Электронный ресурс]. – URL:

http://vphil.ru/index.php?option=com_content&task=view&id=585&Itemid=52 (дата обращения: 04.01.2013).

6. См., например: Бажанов В. А. Кантианские мотивы в логике и философии науки. Идея единства априорного и эмпирического знания// Вопросы философии. - № . – 2012 [Электронный ресурс]. – URL: http://vphil.ru/index.php?option=com_content&task=view&id=585&Itemid=52 (дата обращения: 04.08.2013).

СЕКЦИЯ 3

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ. ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ. МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА

Катречко Сергей Леонидович, *к.ф.н., доцент,*
Москва, НИУ «Высшая школа экономики»

ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНЫЙ КОНСТРУКТИВИЗМ КАК ПРОГРАММА ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И КАК НОВЫЙ ТИП ОНТОЛОГИИ

§ 1. Как возможна математика? Трансцендентальное обоснование математики

Под трансцендентальным Кант понимает исследование, «занимающееся не столько предметами, сколько способом нашего познания предметов, поскольку он возможен a priori» [1, 44; B 25]. Тем самым можно говорить о трансцендентальном сдвиге от познания предметов к исследованию способа познания. Если представить этот сдвиг в ослаблено–расширительном виде, то одна из задач трансцендентализма состоит в анализе такого вида нашего познания как математика (наряду с другими основными видами познания, к которым относятся естествознание и философия (Аристотель, Кант)). Специфика математики определяется Кантом как «познание посредством конструирования понятий» [1, 423–5; B 740–66], что предполагает совместную работу рассудка (понятия) и чувственности (конструирование). Конструирование понятий осуществляется посредством схем как «общезначимых созерцаний» (воображение) в априорных формах пространства (остенсивное конструирование; геометрия) и времени (символическое конструирование; алгебра), которые выступают средами конструирования: например, мы рисуем треугольник в пространстве. В современной математике присутствуют оба типа кантовского конструирования.

Постулирование Кантом конструктивного задания математических абстрактных объектов, которые первоначально задаются посредством дефиниций [1, 430–3] (или принципа абстракции Юма–Фреге [2]; http://en.wikipedia.org/wiki/Hume's_principle), позволяет говорить об особом трансцендентальном конструктивизме. Современная математика работает с высоко абстрактными объектами и поэтому возникает проблема различения «хороших» и «плохих» математических объектов (в частности, для преодоления парадоксов). С точки зрения трансцендентализма приемлемыми являются лишь конструктивные математические объекты, т.е. такие математические абстракции/предметы, которые могут быть сконструированы посредством неких «действий чистого рассудка» [1, 73; B 81].

В отличие от других типов конструктивизма (например, эрлангенского конструктивизма), которые мыслят конструирование физикалистски, т.е. путем соотнесение математических сущностей с физическими данностями (например, соотнесение прямой с лучом света) кантовское конструирование имеет более ментальный характер. В этом смысле трансцендентальный конструктивизм близок математическому интуиционизму. Однако выше я специально использовал выражение «более ментальное» для того, чтобы подчеркнуть, что трансцендентализм (Канта) не является феноменализмом берклиевского типа: трансцендентальное — это не индивидуально–субъективное, а транс–субъективное. В онтологическом отношении трансцендентальное занимает промежуточное положение между трансцендентным (объективным) и имманентным (субъективным), что сближает его с интенциональной реальностью Э. Гуссерля и/или третьим миром [знания] К. Поппера. Природа трансцендентального соответствует статусу измерительных приборов/инструментов в процессе познания (см. метафору телескопа Г. Фреге) или даже в нашей практической деятельности: если мы перекапываем огород лопатой, то онтологический статус нашего «орудия» не является ни объективным (таковым является земля), ни субъективным (таковым является наше тело). При познании таким трансцендентальным инструментом выступают наши познавательные способности, или наш «способ познания» [B25].

§ 2. Трансцендентализм как новый тип онтологии

Вместе с тем трансцендентальный конструктивизм можно рассматривать не только как программу обоснования абстракций математики, но и как новый тип онтологии.

Наивно реалистическая (= эмпиристская) онтология полагает существующим лишь то, что воспринимается (либо посредством наших органов чувств, либо посредством приборов) и может быть выражена максимой «существовать — значит быть воспринимаемым» (Дж. Беркли и др.).

Трансцендентальный анализ (по)знания показывает, что само по себе восприятие, т.е. наличие на «экране» нашего сознания тех или иных содержаний еще не гарантирует их объективного существования, поскольку для подобного приписывания мы должны быть уверены, что наше восприятие является результатом «внешнего» воздействия, а не (само)воздействием на «экран» активных компонентов сознания. Тем самым возникает проблема различения объективно–реального от субъективного, поскольку, возможно, что мы выдаем за объективно–воспринятое порождения нашей фантазии. Причем это родовой недостаток любого вос–приятия, в том числе и с помощью физических приборов. Например, на экране осциллографа вместо изображения внешних сигналов может быть запечатлен результат внутренней «активности» самого прибора (в частности, при его сбое). Это означает, что одного критерия воспринятости для утверждения об объективном существовании данного недостаточно.

Более того, в непосредственном восприятии нам не дан объект как таковой. Воспринимая, например, то, что мы именуем камнем, мы не воспринимаем объект под именем камень, поскольку наши органы чувств/приборы предназначены для восприятия не объектов [сущностей], а [их] свойств. Как говорит Кант, мы воспринимаем чувственное многообразие, которые при познании мы интерпретируем как восприятие [одного] объекта. [Объективное] существование объекта постулируется нами, а условием этого выступает трансцендентальное единство апперцепции, «благодаря которому все данное в созерцании многообразное объединяется в понятие об объекте» [1, 104; 504].

Поэтому трансцендентализм постулирует другой критерий объективного существования. В качестве основы он выбирает не природные (физические) объекты, а математические объекты, которые имеют конструктивный способ своего существования. Соответственно, критерий существования будет звучать так:

существовать — значит быть конструируемым, т.е. быть построенным по некоторому правилу. В тексте Критики есть немало примеров подобных конструкций, но парадигмальным выступает следующий пример, посредством которого Кант иллюстрирует вводимый концепт трансцендентального предмета (resp. предмета/объекта вообще): «Так, мы мыслим треугольник как предмет, когда сознаем сочетание трех прямых линий согласно правилу, соответственно которому такое созерцание всегда может быть показано» [1, 504]. Тем самым объективным для трансцендентализма выступает то, что является конструктивно–правилосообразным, т.е. подчиняется/строится (по) некоторому правилу. Причем заметим, что этот критерий универсален, т.к. он применим не только к математическим, но и к любым другим объектам, в том числе и к физическим предметам/феноменам.

Таким образом, в трансцендентализме существенно пересматривается смысл понятия объективного [существования]: объективным (= имеющим место в объекте) является общезначимое, т.е. имеющее место не только для нашего единичного сознания, но для «сознания вообще» (Пролегомены, § 20). Таковыми выступают формальные объекты–конструкции, парадигмальным примером которых являются математические абстракции. Соответственно, сам трансцендентализм представляет собой первую версию (наряду с феноменологией) формальной онтологии как науки об объектах вообще.

Литература:

1. Кант И. Критика чистого разума. — М.: Мысль, 1994.
2. Катречко С.Л. Абстрактная природа логико-математического знания и приращение информации // Седьмые Смирновские чтения. — М.: Современные тетради, 2011. с. 176 – 178.

Кузичева Зинаида Андреевна, *к.ф-м.н., ст.н.сотр.,*
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

МАТЕМАТИКА, ЛОГИКА, РЕАЛЬНОСТЬ

Постановка проблемы соотношения науки (науки вообще или какой-либо конкретной научной дисциплины) и действительности чаще всего предполагает, что требуется выяснить её (науки) роль в познании действительности. Реже ставится задача выяснить влияние науки на действительность. Разумеется, как правило, подразумевается, что да, наука влияет на действительность, но влияние это не всегда конкретизируется. В предлагаемом докладе делается попытка рассмотреть оба указанных аспекта проблемы применительно к математике и логике; при этом не ставится и не решается вопрос о том, что такое «действительность», т.е. предполагается, что из контекста ясно, о чем идет речь.

Выясняя роль математики и логики в познании действительности, нельзя хотя бы кратко не остановиться на вопросе о взаимном влиянии этих дисциплин. Невзирая на внутренние затруднения математики и претензии к ней извне, математическая строгость, основу которой составляет «логичность», остается эталоном научной строгости. Математика неотделима от логики, она немыслима без логики - это факт, не нуждающийся в обсуждении. Другое дело, отношение логики к математике. Так ли остро нуждается логика в математике? В принципе, логика как наука могла бы обойтись без математики. Однако исторически сложилась так, что ученые сочли не только целесообразным, но и необходимым внесение в логику математических методов.

Аналогия между решением алгебраических уравнений и выводом следствий из посылок стала еще более отчетлива после введения алгебраической символики и начала создания общих алгебраических теорий в XVI веке. Эта аналогия явилась фактором, который поддерживал идею математизации (алгебраизации) логики. Но не единственным.

Представляется, что более мощным источником, питающим идею реформации логики в указанном направлении, явилось стремление придать ей инструментальный характер, превратить ее в орудие исследования действительности, в активного участника создания картины мира. Это стремление, возможно, наиболее ярко выражено в знаменитой программе Лейбница, целью которой было изобретение универсального метода познания, позволяющего вычислить любую истину, исключив, тем самым философские споры. Роль основного орудия открытия истин программой Лейбница отводилась новой логике.

Идея Лейбница оставалась (в той или иной форме) актуальной вплоть до XX века. В XVIII веке вдохновляющим образцом для исследователей, несомненно, служили грандиозные успехи математики, например, дифференциального и интегрального исчислений – основных тогда разделов математического анализа, детища технической революции нового времени. Да и алгебра продолжала развиваться, обогащалась новыми разделами и проблемами, решением которых занимались «геометры», а не просто «алгебраисты». Те же геометры работали и над математизацией логики.

Найти ответ на вопрос о воздействии математики и логики на действительность уже не так просто. Хотя бы потому, что весьма не просто ответить на вопрос о том, что такое действительность. С математикой вроде бы проще. «Декартова переменная величина» и функции, в самом деле, позволили отображать в математических теориях не только механическое движение, но и более сложные процессы. Отсюда – необходимость математики для техники. А можно ли всерьез отрицать воздействие техники на действительность? Следовательно, математика, хотя и опосредованно, влияет, и даже в осязаемой форме – в виде механизмов, приборов, машин и пр. которые непосредственно воздействуют на многострадальную действительность.

Обратимся теперь к логике. При этом не будем пытаться мимоходом решить, пригодна ли логика как таковая (точнее, какой-либо из ее вариантов) для исследования реальности, может ли она познавать сущность явлений, например. Этот вопрос касается проблемы, требующей тщательного исследования. Не следует сомневаться, однако, что мыслители вроде Лейбница ставили перед собой задачу наделить логику, над созданием которой они трудились, необходимым для исследований аппаратом. Другое дело, что в итоге получилось.

Одним из итогов усилий, направленных на создание логики более мощной, чем традиционная, явилось становление к концу XIX века математической логики в форме исчислений высказываний и предикатов (Фреге, 1879, [1]). Этой стадии логики предшествовала алгебра логики, иначе называемая логикой классов. Именно стремление улучшить алгебру логики завершилось созданием математической логики в упомянутом виде. Относительно логики классов требуется некоторое разъяснение.

Принципиальный момент, позволивший создать исчисление, сохраняющее важные алгебраические свойства, но пригодное для представления логических объектов, состоял в том, что была принята объемная точка зрения на понятия, введено понятие универсума, а в качестве объектов оперирования рассматривались классы, подмножества, на которые разбивается множество, представляющее универсум (Дж. Буль, А. Де Морган, [2, 3]). Решение задач в логике классов затруднялось большим объемом чисто технической работы по перебору комбинаций классов. Для облегчения перебора предлагались различные приемы, в том числе механические приспособления, например, широко известная «логическая машина» Джевонса.

Однако поиск технических средств решения задач логики в тот период не привел к существенным результатам, несмотря на все остроумие предлагаемых и используемых устройств. Иначе обстояло дело с проблемой использования логики в решении определенных технических задач. Но не логики классов, а исчисления высказываний. Применение логики в технике стало возможным, когда обратили внимание на соответствие между значениями истина и ложь в исчислении высказываний и состояниями включено и выключено в электрических (например) схемах и на то, что дизъюнкция и конъюнкция высказываний моделируются соответственно параллельным и последовательным соединением в электрических схемах. Реализовалось это наблюдение в 40-е годы XX века, когда были созданы системы для проверки и упрощения релейно-контактных схем, позднее вошедшие в теорию управляющих систем [4]. Сложилась ситуация обратная той, что имела место во времена Джевонса: если тогда предпринимались попытки использовать технические средства для решения задач логики, теперь стали применять логику к решению задач техники.

Впрочем, взаимовлияние логики и реальности гораздо многообразнее, достаточно упомянуть роль логики в развитии новейших компьютерных технологий или переполненные аудитории на докладах, посвященных проблемам математической логики. А разве живейший интерес не только логиков, но специалистов других областей и студенчества не есть реальность?

Литература

1. Frege G. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle, 1879. Имеется перевод на русский язык: Готтлоб Фреге. Логика и логическая семантика. Сборник трудов. М.: 2000, Аспект-пресс. С. 65–143; М.: URSS, 2012. С. 65-143.

2. Boole G. The mathematical analysis of logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning. Cambridge, 1847.

3. Morgan A. De. Formal logic, or the calculus of inference, necessary and probable. London, 1847.

4. Кузичева З.А. Влияние теории распределительных систем на развитие логики // Вестник МГУ. Сер. 7, № 1, 2009.

Кулик Борис Александрович, *д.ф.-м.н., с.н.с., Санкт-Петербург, ФБ ГУН Институт проблем машиноведения Российской академии наук*

НОВЫЕ СВОЙСТВА ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА: ОЦЕНКА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ СЛЕДСТВИЙ И ИНДУКТИВНОЕ ОБОБЩЕНИЕ[1]

Логический анализ пока что является необходимым инструментом многих философских рассуждений, включая и те, которые имеют отношение к философии математики. Однако до сих пор еще в логике имеется немало нерешенных проблем, в частности о том, какую логику выбирать в качестве инструмента из бесчисленного множества изобретенных специалистами вариантов. Данный доклад посвящен проблеме соотношения индукции и дедукции, причем в рамках классической логики. Прежде считалось, что индукция – это переход от частного к общему, а дедукция – переход от общего к частному. В последние годы это различие стало не столь категоричным: теперь дедукцию уже нельзя отождествлять с переходом от общего к частному [1], хотя убедительных доводов в пользу такого утверждения не приводится, если не считать некоторые не совсем удачные примеры типа «Шекспир писал сонеты, следовательно, неверно, что он не писал сонетов».

Более четко определить соотношение между дедукцией и индукцией позволяет алгебраический подход к дедуктивному выводу на основе алгебры кортежей [2], в которой соотношения между посылками и следствием можно выразить с помощью объемов логических формул.

Имеется строгое математическое определение алгебры кортежей (АК). АК есть алгебраическая система, изоморфная алгебре множеств, носителем которой является совокупность произвольных многоместных отношений. В АК заданы операции:

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 11-08-00641, 12-07-00550-а, 12-07-00689-а, 13-07-00318-а), ОНИТ РАН (проект 2.3 в рамках текущей Программы фундаментальных научных исследований) и Президиума РАН (проект 4.3 Программы № 16)

обобщенное объединение ($\cup_G$), обобщенное пересечение ($\cap_G$) и дополнение. Для представителей носителя (многоместных отношений) определена пара обобщенных соотношений: равенства ($=_G$) и включения ($\subseteq_G$). Отношения, представленные в носителе, в АК можно отобразить с помощью одной из четырех типов структур матричного типа, называемых АК-объектами. Навешивание кванторов в логических формулах выполняется в АК с помощью операции элиминации атрибутов (по сути, это простое удаление столбцов из соответствующих АК-объектов). Использование этой операции позволяет вычислить проекции АК-объектов.

Алгоритмы выполнения операций и проверок равенства и включения в АК имеют свою специфику, они подробно описаны в [2]. В отличие от традиционных математических систем, моделирующих отношения (теория бинарных отношений и реляционная алгебра), АК содержит все аналитические средства исчисления предикатов. Переход от формального описания логических систем к алгебраическому представлению становится понятным, если учесть, что структуры АК моделируют область истинности логических формул и соответствуют таким выражениям как дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы.

В теоретических основах АК разработаны алгебраические методы решения следующих задач дедуктивного анализа:

1) проверка корректности определенного следствия C для заданных посылок A_i;

2) вывод возможных следствий из заданных посылок A_i с учетом семантических ограничений (например, минимизация состава значащих переменных в следствии, получение следствий с заданным набором переменных и т.д.).

Решение таких задач в АК основано не на правилах вывода, оптимальный порядок применения которых заранее трудно предсказать, а на определенных типовых алгоритмах. Алгоритм проверки корректности следствия C для заданных посылок A_i при использовании структур АК заключается в вычислении обобщенных пересечений и проверке обобщенного включения

$$(A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n) \subseteq_G C \qquad (1)$$

Согласно (1), вывод совокупности следствий $\{C_r\}$ из посылок A_i в АК можно выполнять, используя следующую зависимость:

любое C_r есть следствие, если $A \subseteq C_r$, где $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$. Значит, корректное следствие из системы посылок A_i моделируется АК-объектом, являющимся произвольным надмножеством A. Для его построения в АК разработано несколько методов. Один из них заключается в том, что вычисляются проекции A (любая проекция A является его надмножеством). Этот метод позволяет формировать следствия с заданным набором переменных.

Рассмотрим пример. Даны посылки $A_1 = x \vee y$ и $A_2 = y \supset z$. Можно ли из этих посылок вывести формулу, содержащую только переменные x и z? Переведем посылки в структуры АК. Тогда после соответствующих вычислений получим

$$A[XYZ] = A_1[XY] \cap_G A_2[YZ] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{0\} & * \\ * & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}.$$

Для нахождения проекции, содержащей атрибуты X и Z, элиминируем из $A[XYZ]$ атрибут Y. Тогда получим $C_1[XZ] = \begin{bmatrix} \{1\} & * \\ * & \{1\} \end{bmatrix}$, что соответствует логической формуле $x \vee z$. Таким образом, методами АК доказывается справедливость вывода $(x \vee y) \wedge (y \supset z) \models x \vee z$.

Особенности и наглядность алгебраического подхода к логическому выводу позволяют предложить методы качественной оценки получаемых следствий. В формуле (1) АК-объект $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$ является наименьшим по объему понятий следствием (ядром следствия), поскольку любое уменьшение объема A ведет к невыводимости полученного АК-объекта из посылок $\{A_i\}$. Для вывода следствия, отличающегося от ядра, необходимо увеличить объем A – это согласуется также с правилом введения дизъюнкции в натуральном исчислении [3].

Таким образом, любое расширение A дает формально правильное следствие. Однако многое из того, что выходит за пределы A, повышает неопределенность выводимых знаний. Например, в ядре содержится однозначное утверждение «Завтра будет солнечная погода», но формально правильным следствием будет и утверждение «Завтра будет солнечная погода или завтра будет дождь». Отсюда ясно, что расширение ядра A приводит к росту неопределенности следствия.

Процедура вывода следствия с помощью вычисления проекции ядра A во многих случаях приводит к индуктивному обобщению. Так, в приведенном выше примере вывода формулы $x \vee z$ из формул $x \vee y$ и $y \supset z$ в АК-объекте $A[XYZ] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{0\} & * \\ * & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}$ для каждого из значений атрибута Y представлены не все варианты истинности формулы $x \vee z$, а при элиминации атрибута Y получается полный набор вариантов. Так, в $A[XYZ]$ для $Y = 0$ содержатся только два набора значений истинности для X и Z: (1, 0) и (1, 1), хотя для формулы $x \vee z$ подразумевается еще один набор – (0, 1). Аналогичная ситуация получается и для $Y = 1$.

Исследования показали, что многие правила и примеры логического вывода при моделировании в структурах АК можно вычислить с помощью взятия проекций A, т.е. во всех этих случаях имеет место индуктивное обобщение.

Заключение

Рассмотренные в докладе новые свойства логического вывода являются одним из недавних результатов исследований по использованию АК в логическом анализе. Ранее [2] было установлено, что АК применима не только для дедуктивного анализа, но и для анализа недедуктивных рассуждений (абдукция, формирование и проверка гипотез и т.д.) и логико-вероятностного анализа.

Литература

1. Ивин А.А Логика. – М.: "Оникс, Мир и Образование, Харвест", 2009.
2. Кулик Б.А., Зуенко А.А., Фридман А.Я. Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та., 2010.
3. Генцен Г. Исследования логических выводов. В кн.: Математическая теория логического вывода, сб. переводов. – М.: «Наука». 1967, с. 9-74.

Леоненко Леонид Леонидович, *к.ф.н., доцент, Одесская национальная академия связи имени А.С.Попова*

“АНАЛОГИКА” VERSUS ЛОГИКА?

Дж. Сова и А. Маджамдар высказывают мнение, что «аналогия является необходимой *предпосылкой* <prerequisite> *логических рассуждений*» [1, sect.2] (курсив мой – *Л.Л.*). Сходного мнения и Д. Хофштадтер, считающий, что при адекватном моделировании аналогий «речь идет не о логике, а об аналогике» [2, p.35].

В упрощенной форме аргументы упомянутых авторов можно выразить так: мы не можем рассуждать, не сравнивая и не делая выводов из результатов сравнений. Сравнения, отображения и обобщения, необходимые для проведения аналогий, опираются на низкоуровневые процессы восприятия <low-level perception>. Поэтому весьма желательно иметь систематическое описание, а буде возможно и формализацию, указанных процессов и предполагаемых ими видов сравнений, формирующих базис для общей теории аналогии.

Иными словами, необходима некая теория выводов на основании сравнений – “аналогика”, – и она является “предпосылочной” по отношению к формальной логике. Отдельные вопросы: насколько сама “аналогика” может быть формальной, каковы могут быть ее основные понятия, etc. Среди ученых, разделяющих тезис о “приоритете аналогики” в указанном здесь смысле, имеются разногласия по поводу этих вопросов.

Прежде, чем обсуждать изложенные аргументы, уместно уточнить понятие “вывод по аналогии”. Пусть задан язык L, в терминах которого описываются: i) объекты a и b, а также ii) процедура ***Cp*** их сравнения, оценивающая сходство a и b. Аналогией я называю произвольный вывод вида:

$$L\colon \frac{\approx_{\boldsymbol{Cp}}(a,b)\in\Omega\ ,\quad \Im(a)\quad (1)}{\Im'(b)}$$

где Ω – некоторое множество значений степеней сходства (достаточных, чтобы можно было считать a и b «аналогами»); а $\Im$ и

$\mathfrak{I}'$ – некоторая информация о соответственно a и b, выраженная в языке L. Запись L: $\approx_{\boldsymbol{Cp}}(a,b)\in\Omega$ означает, что найденная процедурой ***Cp*** степень сходства a и b принадлежит Ω.

Типологию аналогий можно получить, уточняя использованные выше понятия: “объект”, “сходство”, “язык”, “процедура”, “информация”.

Следуя А.И. Уёмову [3], я буду называть объект a моделью, а b – прототипом. Замечу, что А.И. Уёмов считал возможными аналогии, *не* базирующиеся на сходстве объектов a и b. Мою полемику с ним по этому поводу см. в [4].

На мой взгляд, выдвинутые в работах [1] и [2] аргументы в пользу “предпосылочности аналогики” можно оспорить, прибегнув к следующей аналогии. Мы не можем рассуждать, не опираясь на тождество или различия некоторых объектов нашего рассуждения. («В стиле» авторов [1] и [2] можно было бы добавить: указанные отождествления и различения базируются на низкоуровневых перцептуальных процессах). Это, однако, не всегда означает необходимость *теории* тождества. Когда же такая необходимость возникает, соответствующая теория – а иногда и теори*и* – встраиваются в логику, а не выступают предпосылками для нее.

Поэтому я думаю, что более вероятной перспективой для “аналогики” может быть развитие *многообразия* теорий сходства, использующих формальные средства и логики, и математики, и различных прикладных дисциплин.

Это, на мой взгляд, подтверждают и те попытки построения основ “аналогики”, которые предприняты в ряде современных работ. Так, в цитированной выше статье [1] предлагается теория сходства произвольных *понятий*, базирующаяся на особом формальном аппарате их представления (концептуальных графах). *Иная* теория сходства понятий, применяющая сходный формализм, предложена Г. Спанудакисом и П. Константопулосом [5]. Использование сходных формализмов позволяет в этом случае надеяться на интеграцию указанных двух теорий. Такая надежда ослабевает, когда в качестве средства описаний понятий применяется принципиально отличный формализм – как, например, язык тернарного описания А. Уемова [6]. Правильным будет сказать, что в упоминаемых трех теориях используются различные процедуры ***Ср***(*a*, *b*) оценки сходства понятий *a* и *b*. Но в любом случае, анализируя сходства понятий, мы не покидаем пределы логики.

Вне-логические понятия и формализмы могут потребоваться в случаях исследования отношений сходства в специфических предметных областях. Так, Д.Хофштадтер исследует аналогии посредством построения особой теории сходства *символьных строк* [2]. Другая теория сходства таких строк – а правильнее, теория их *другого сходства* – изложена в [7]. Математические средства указанных двух теорий существенно различны. Однако эти различия связаны с особым характером процедур ***Ср***(*a*,*b*) численной оценки сходства символьных строк *a* и *b*. Что же касается самих выводов на основе полученных оценок сходства, то они вполне соответствуют схеме (1) вывода по аналогии.

Таким образом, на мой взгляд, нет оснований для описанного выше противопоставления логики и "аналогики". Исследования перцептуальных процессов, в ходе которых формируются разновидности понятий сходства, могут выступать предпосылкой той или иной концепции аналогии (как в [2]), но вполне допустимы и концепции, исходящие из некоторого фиксированного множества видов сходств (и не ставящие вопроса о том, как это множество получено – как в [5]). Исследования различных видов аналогий могут опираться как на логические, так и на вне-логические формальные средства; но случаи привлечения последних вполне аналогичны использованию вне-логических понятий в конкретных – например, математических – выводах.

Если (и пока) основными вопросами теории какого-либо вида аналогии являются вопросы *правильности* (достоверности, правдоподобия) получаемых выводов, эта теория – раздел логики.

Литература

1. *Sowa J.F., Majumdar A.K.* Analogical Reasoning // Conceptual Structures for Knowledge Creation and Communication, LNAI 2746, Springer-Verlag, 2003, pp. 16–36; http://www.jfsowa.com/pubs/analog.htm

2. *Hofstadter D.* The Copycat Project: An experiment in Nondeterminism and Creative Analogies // A.I. Memo 755 – Cambridge,

MA: MIT, 1984, pp.1–47; ftp://publications.ai.mit.edu/ai-publications/pdf/AIM-755.pdf

3. *Уемов А.И.* Логические основы метода моделирования / А. И. Уемов — М.: Мысль, 1971. — 311 с.

4. *Леоненко Л. Л.* Аналогія і абдукція / Л. Л. Леоненко // Філософська думка. — 2008. — № 3. — С. 14—30.

5. *Spanoudakis G.,Constantopoulos P.* Elaborating Analogies from Conceptual Models // International Journal of Intelligent Systems, 1996, Vol. 11, No. 11, pp. 917–974; http://citeseer.ist.psu.edu/spanoudakis96elaborating.html

6. *Uyemov A.* The Language of Ternary Description as a Deviant Logic. I. // *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*. – 1995, Vol.15, No.1–2, p.25–35; – 1997, Vol.17, No.1–2, p.71–81; – 1998, Vol.18, No.1–2, p.173–190.

7. *Leonenko L.* Analogies Between Texts: Mathematical Models and Applications in Computer-assisted Knowledge Testing // Information Models of Knowledge. – Kiev, Ukraine – Sofia, Bulgaria: ITHEA, 2010, pp. 128 – 134.

Михайлова Наталия Викторовна, *к.ф.н., доцент, Минский государственный высший радиотехнический колледж*

ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ В КОНТЕКСТЕ НОВЫХ ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКИХ КРИЗИСОВ

Современные философские взгляды на источники человеческого знания, а также трудности математического познания, опирающегося на онтологическое единство знаковых конструкций, обусловили плюралистические, на первый взгляд, возможно, несовместимые точки зрения на будущее математики. Наличие кризиса философии математики в реализации конструктивных подходов к науке с точки зрения проблемы обоснования математики следует отделять от философско-методологического вопроса: можно ли говорить о кризисе современной математики как науки? Может быть, кризиса нет, поскольку лучшие работы в наиболее перспективных областях математики стали делать исследователи в смежных науках, например, представители современных компьютерных наук или теоретической физики? Такого рода вопросы непосредственно связаны с проблемой обоснования современной математики.

В связи с этой проблемой обратим внимание на интересную философскую работу начала XXI века английского математика Брайана Дэвиса «Куда идет математика?» (2001). В ней выявляются новые философские аспекты в проблеме обоснования современной математики, согласно которым к концу прошлого века точнейшая из наук испытала потрясения, способные принципиально изменить характер полученных в ней результатов. Логические прозрения Курта Гёделя привели в 30-е годы прошлого века к первому из трех кризисов обоснования математики. Например, Герман Вейль писал об открытии Гёделя как о кризисе, который «постоянно подтачивал энтузиазм и решимость». Следует заметить, что критика формалистской программы обоснования математики, исходящая из теорем Гёделя, приписывает гёделевским теоремам большую философско-методологическую общность, чем та, которой они обладают по логике своих доказательств. Прослеживая историю эволюции современной математики и стиля математического мышления XX века, С.П. Новиков выявил следующую философско-методологическую проблему обоснования современной математики: «Бесполезная всеусложняющая алгебраическая формализация языка математики, экранирующая суть дела и связи между областями, – это слишком широко распространившаяся болезнь, <…> это проявление кризиса, ведущего к определенной бессмысленности функционирования абстрактной математики, превращения ее в организм, потерявший единый разум, где органы дергаются без связи друг с другом» [1, с.17]. Это мнение о новых философско-методологических кризисных тенденциях развития математики разделяют и другие авторитетные математики.

Общепризнано, что одним из самых серьезных революционных технических изобретений прошедшего века, оказавшим огромное влияние на математику, можно считать компьютер. Поэтому в такой интерпретации прогресса математики, точнее, в новых инструментальных информационных технологиях основные проблемы – это компьютеры и математическое мышление. Следуя анализу Брайана Дэвиса можно зафиксировать, что начиная с 70-х годов XX века, в современной математике произошли еще два кризиса, столь же непредсказуемые, как и кризис, вызванный работой Гёделя. «Оба они, – считает Дэвис, – связаны с проблемой переусложненности: доказательства стали настолько длинными и сложными, что ни один ученый не взял бы на себя смелость однозначно подтвердить или оспорить их правильность» [2, с.1351]. В современной литературе по философии математики эта проблема пока еще не обсуждалась, хотя, можно предположить, что она заключается в возможных пределах формализации. Второй кризис относится к математическим доказательствам, методологически проводимым с использованием компьютерных технологий, в легитимности применения которых сомневались некоторые выдающиеся математики. Соответствующая философская проблема формулируется следующим образом: можно ли считать математически легитимным такое доказательство, которое выполнено на компьютере? Если философски акцентировать эту проблему, то по существу она сводится к проблеме «доверия к компьютерам». Появление мощных компьютеров породило естественное сомнение в надежной методологической обоснованности имеющихся машинных способов доказательства математических теорем.

Философский анализ способствует выявлению причин, которые не позволяют считать любое компьютерное доказательство убедительным, несмотря на веру в то, что оно является идеалом формального доказательства. Во-первых, эта вера основывается на инструментальной надежности современного компьютера, в работе которого случаются сбои и который может содержать ошибки в программном обеспечении. Во-вторых, хотя компьютерная программа формального доказательства пишется в соответствии с законами формальной логики, в нее тоже могут вкрасться ошибки. Как считает математик Ян Стюарт: «Критерием здесь должно являться одно – надежность результатов. До тех пор пока соблюдается это условие, вычисления, произведенные машиной, будут столь же убедительны, что и произведенные человеком» [3, с.43]. Заметим, что компьютерные доказательства применяются как для получения новых результатов, так и для численной проверки уже сделанных теоретических доказательств. Поэтому вопрос об убедительности методологии компьютерных доказательств в равной мере соотносится с по-прежнему актуальным вопросом об убедительности «ручного» доказательства, сделанного математиком.

Третий кризис переусложненности в определенном смысле для математиков наиболее серьезный из всех, так как связан с излишней сложностью современных математических доказательств. Например, доказательства некоторых знаменитых математических проблем напрямую связаны с проблемой обозримости доказательств, поскольку важнейшим фактором, влияющим на убедительность доказательства, является его обозримость, то есть возможность его мысленного схватывания целиком. С развитием математики и появлением все более сложных и длинных доказательств, они теряют свое методологическое достоинство – свойство убедительности. Почему математическое доказательство в усложненных областях современной математики должно быть обозримым? Оно должно быть обозримым, если используется как философское основание согласия в математических суждениях. Следует учесть также следующее философское возражение: обозримость математического доказательства не только не гарантирует его убедительности, но даже ничего методологически существенного не говорит об убедительности проведенного доказательства, так как последнее не является «самодостаточным фактором» и зависит в значительной мере от выбранного направления в обосновании современной математики.

Литература

1. Новиков С.П. Вторая половина XX века и ее итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе // Вестник ДВО РАН. – 2006. – № 4. – С. 3–22.

2. Davies B. Whither mathematics? // Notices of the American Mathematical Society. – 2001. – Vol. 52, № 11. – P. 1350–1356.

3. Стюарт Я. Математика 2050 года // Будущее науки в XXI веке. Следующие пятьдесят лет. – М.: АСТ: Астрель; Владимир: ВТК, 2011. – С. 37–46.

Орлов Александр Иванович, *д.т.н., д.э.н., к.ф.-м.н., профессор, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана*

Луценко Евгений Вениаминович, *д.э.н., к.т.н., профессор, Кубанский государственный аграрный университет (Краснодар)*

О РАЗВИТИИ СИСТЕМНОЙ НЕЧЕТКОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Кратко рассмотрим перспективы и некоторые «точки роста» современной теоретической и вычислительной математики. По нашему мнению, сложившиеся понятия и теории должны быть модернизированы для адекватного отражения запросов прикладных научных исследований.

С достаточным основанием можно констатировать, что числа и множества - основа современной математики. Однако вопросы применения этих понятий заслуживают обсуждения.

Необходимо различать математические, прагматические и компьютерные числа, поскольку их свойства различны. Первые традиционно используются в математике. Их бесконечно много. Вторые получают при записи результатов измерений (наблюдений, испытаний, анализов, опытов). Прагматических чисел – конечное число, как и компьютерных (поскольку существует компьютерный нуль). Тождества для математических чисел не всегда выполняются для прагматических. Расходящийся ряд математических чисел может превратиться в сходящийся для компьютерных.

Не останавливаясь на проблемах аксиоматизации наивной теории множеств («парадокс брадобрея», теоремы Геделя и др.), отметим, что границы реальных совокупностей зачастую размыты. Этот факт был известен еще в Древней Греции (парадокс «Куча»). Э. Борель предложил описывать реальные совокупности функциями принадлежности, а Л. Заде и его последователи развили математический аппарат теории нечетких (размытых, расплывчатых, туманных, пушистых) множеств. Возникла возможность «нечеткого удвоения» математики: заменяя обычные числа и множества на нечеткие, получаем новые математические объекты (например, нечеткие классификации, т.е. нечеткие аналоги отношений эквивалентности), некоторые свойства которых отличаются от свойств исходных объектов. Доказан цикл теорем [1] о сведении теории нечетких множеств к теории случайных множеств, однако при математическом моделировании реальных явлений и процессов теория нечеткости и теория вероятностей обычно рассматриваются как различные математические теории, со своим специфическим инструментарием.

Интервальное число является частным случаем нечеткого множества (с функцией принадлежности, равной 1 внутри некоторого интервала и равной 0 вне его). С 1960-х годов бурно развивалась интервальная математика (и интервальная математическая статистика [2]). Заменяя обычные числа интервальными, получаем возможность создавать «интервальное удвоение» математики. В интервальной математической статистике получены результаты (связанные с понятиями нотны и рационального объема выборки), которым нет аналогов в «обычной» математической статистике [2].

Система есть множество элементов, взаимосвязанных друг с другом, что дает системе новые качества, которых не было у элементов. Множество – это система, в которой сила взаимодействия между элементами равна нулю. Следовательно, все понятия и теории, основанные на понятии множества, допускают обобщение путем замены понятия множества на понятие системы и тщательного прослеживания всех последствий этой замены. Другими словами, возможно системное обобщение математики. При этом возникают различные интересные задачи. Отметим системное обобщение операций над множествами (на примере операции объединения булеанов); системное обобщение понятия функции и функциональной зависимости.

Важным для приложения является понятие когнитивной функции. Такая функция содержит информацию не только о соответствии значений функции значениям аргумента, как абстрактная математическая функция, но и о достоверности высказывания о том, что именно такое их соответствие имеет место в действительности, причем эта достоверность меняется от одних значений аргумента и функции к другим. Когнитивные функции являются наглядным графическим отображение наших знаний о причинно-следственных связях между интервальными или лингвистическими значениями аргумента и интервальными или лингвистическими значениями функции. Разработаны теоретические основы и программное обеспечение системно-когнитивного анализа [3].

Введено и изучено понятие матрицы знаний как нечеткого (с расчетной степенью истинности) отображения системы аргументов на систему значений функции. Разработана модификация метода наименьших квадратов при аппроксимации когнитивных функций. Развита идея системного обобщения математики в области теории информации - системная (эмерджентная) теория информации. Введены информационные меры уровня системности - коэффициенты эмерджентности. Как обобщение теории правдоподобных рассуждений Д.Пойа рассмотрены прямые и обратные, непосредственные и опосредованные правдоподобные логические рассуждения с расчетной степенью истинности.

Объединяя различные рассмотренные выше направления обобщения классических основ математики, получаем теорию, которую естественно назвать системной нечеткой интервальной математикой (СНИМ).

В программной системе «Эйдос» был реализован ряд разделов СНИМ. За более чем 30 лет применения эта система хорошо показала себя при проведении научных исследований в различных предметных областях и занятий по ряду научных дисциплин, связанных с искусственным интеллектом, представлениями знаний и управлением знаниями [4]. Однако в процессе эксплуатации системы были выявлены и некоторые недостатки. Поэтому создана качественно новая версия системы (система Эйдос-X++), в которой преодолены ограничения и недостатки предыдущей версии и реализованы новые важные идеи по ее развитию и применению в качестве программного инструментария системно-когнитивного анализа [5].

Система Эйдос-Х++ является программным инструментарием, реализующим ряд идей системного нечеткого интервального обобщения математики.

Литература

1. Орлов А.И. Теория принятия решений. – М.: Экзамен, 2006. – 576 с.

2. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование. Ч.1. Нечисловая статистика. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 541 с.

3. Луценко Е.В. Автоматизированный системно-когнитивный анализ в управлении активными объектами (системная теория информации и ее применение в исследовании экономических, социально-психологических, технологических и организационно-технических систем). – Краснодар: КубГАУ. 2002. – 605 с.

4. Луценко Е.В. 30 лет системе «Эйдос» – одной из старейших отечественных универсальных систем искусственного интеллекта, широко применяемых и развивающихся и в настоящее время // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ). 2009. – №10(054). С. 48 – 77.

5. Луценко Е.В. Универсальная когнитивная аналитическая система «Эйдос-Х++» // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ). 2012. – №09(083). С. 328 – 356.

Рогожин Владимир Ильич, *Санкт-Петербург, генеральный директор INTERNETIA Co. Ltd.*

ОБОСНОВАНИЕ МАТЕМАТИКИ – ВЕЧНАЯ ПРОБЛЕМА?

Д.ф.-м.н. Ю.А. Неретин отмечает: «Ситуация в математике и математической физике последних 10-15 лет быстро становится всё более зловещей. …Вопрос В.И. Арнольда «Выживет ли математика?», не есть риторика. Разумные реакции уже сильно запоздали, и выйти из тупика нельзя без тяжелых потерь.» [1,2]

В чем же глубинная, сущностная причина такого положения? Уже более ста лет, как две фундаментальные знаковые системы, математика и физика, «утратили определенность». Математика, как и физика, находится в глубинном, сущностном «кризисе интерпретации и репрезентации».[3] В математике процесс «утраты определенности» начался с открытием неевклидовых геометрий и длился примерно сто лет, когда Г.Вейль в 1946 году сказал: «Сейчас мы менее чем когда-либо уверены в первичных основаниях математики и логики. Мы переживаем свой «кризис» подобно тому, как переживают его все и вся в современном мире.»[4] Пик кризиса – математическая «контрреволюция» конца 19-го века [5] и эпопея обоснования математики в первой половине 20-го века. Проблема обоснования математики – это проблема обоснования всей системы знания, прежде всего фундаментальной физики с ее незавершенным онтологическим переворотом Планка-Эйнштейна и переживающей свой концептуальный кризис.[6] Только решение проблемы обоснования может дать ответ на загадку «непостижимой эффективности математики».[7] Но по неизвестной причине проблема обоснования математики даже не была включена в краткий перечень «задач тысячелетия»(!). И как же сможет в таком случае математика «закрыть физику»? [8]

А.К. Сухотин, анализируя программы обоснования математики, делает вывод: «Обзор классических направлений (логицизм, интуиционизм и конструктивизм, формалистское течение) и современных подходов (аксиоматический и теоретико-категориальный) показывает, что проблема философского обоснования такова, что она постоянно остается проблемой и, очевидно, таковой и в дальнейшем.»…«математика обречена всегда находиться в «кризисной» ситуации».[9] С таким выводом нельзя согласиться. Это означает, по сути, отказ от поиска истины.[10]

С.К. Черепанов в свою очередь отмечает: «Приходится констатировать, что в концептуальном плане данная проблема, по существу, не осмыслена» и «...эти программы были неадекватными по своему замыслу.» [11] Автор ставит вопрос: «как возможно обоснование математики?» и задает курс ее решения: «...построить модель регулярного процесса, который не может зациклиться и все время приводит к возникновению нового и нового.» Каким же образом можно построить такую сущностную модель понимания «знаков Природы» [12]?

Л.Витгенштейн отмечал тенденцию к отождествлению языка с миром. «Логика заполняет мир; границы мира суть и ее границы».[13] По Витгенштейну логическая символика идентична онтологической структуре мира.

Свой подход к проблеме обоснования обозначил и Э.Гуссерль: «Лишь в той мере, в какой при идеализации учитывается аподиктически всеобщее содержание пространственно-временной сферы, инвариантное во всех мыслимых вариациях, может возникнуть идеальное образование, которое в любом будущем и для всех грядущих поколений будет понятно и в таком виде будет передаваемо традицией и воспроизводимо в идентичном межсубъектном смысле.» [14]

Построение искомого «идеального образования» или *базисной структуры Природы, ее первопроцесса,* ведется на основе метода онтологического конструирования с предельно острой «бритвой Оккама», идеи Канта о понятийно-фигурном синтезе, идеи Н.Бурбаки о «порождающих» структурах [15], идей «предельного перехода» и «приращения», одной аксиомы, одного принципа, концептов «материя», «логос», «мера», «топос», «эйдос», «тектон», «вектор» (лат. несущий), «форма», «инвариант», «состояние». *Ключевая идея – идея о «порождающих структурах» (les structures mère).* Необходимо отметить, что проблема конструирования «порождающей структуры» остро стоит и перед физикой [16]. Первый принцип подсказывает Природа. В «Логике троичности» Б.В.Раушенбах отмечает: «триединость буквально пронизывает всю Природу». Борис Викторович выводит «математическую модель триединости» – вектор, «имеющим начало в ортогональной системе декартовых координат».[17] Но в итоге концепт «вектор» автор не связал с фундаментальными понятиями физики – «состояние» и «вектор состояния», а в более широком, его предельном понимании, с абсолютными (безусловными) формами существования материи (абсолютными состояниями): покоем, становлением, движением.

Единственная аксиома онтологического конструирования - «аксиома первоначала» (супераксиома): «В начале был логос …», где логос понимается как «закон законов» (в Гераклитовом смысле) и репрезентируется «небесным треугольником» Платона - «Δ-дельта» как прототектон (первоорганизующий) и эйдос суммы трех предельных переходов (совпадений «максимума» и «минимума»). В итоге конструирования получаем «рамочную» структуру первопроцесса Природы в ее единстве и многообразии - «Абсолютную порождающую структуру» («структуру-мать», суперструктуру, «отсутствующую» [18], «гиперструктуру» [19]), репрезентирующую сущностное единство «порождающих структур» в едином математическом символе-протоэйдосе Природы («первообраз-идея», «первоконструкт»).[20] Смысловая глубина концепта «структура» четко обозначена Г. Гутнером: «Событие, состоящее в схватывании структуры, означает понимание».[21] И все-таки прав А.А.Зенкин: «истина должна быть нарисована и предъявлена «неограниченному кругу» зрителей». [5]

Таким образом, синтетическая программа сущностного обоснования математики выводит на «фундаментальную онтологию мира» [22] в виде порождающей модели первопроцесса Природы - «общую рамочную структуру», «каркас» фундаментального знания, и далее, на понимание природы информации как поливалентного феномена онтологической (структурной) памяти – ядра новой концептуальной структуры мира. [23]

Литература

[1] Неретин Ю.А. «Метод вторичного квантования» Березина. Взгляд 40 лет спустя / Воспоминания о Феликсе Александровиче Березине — основоположнике суперматематики. М, МЦНМО, 2009.

[2] Арнольд В.И. Выживет ли современная математика? / Избранное – 60. М.: Фазис, 1997.

[3] Романовская Т.Б. Современная физика и современное искусство-параллели стиля / Физика в системе культуры. М.: ИФРАН, 1996.

[4] Клайн Морис. Математика. Утрата определенности. —М.: Римис, 2007.

[5] Зенкин А.А. Научная контрреволюция в математике http://exsolver.narod.ru/Artical/Mathemat/mathrevolution.html

[6] Смолин Ли. Неприятности с физикой: взлет теории струн, упадок науки и что за этим следует http://www.rodon.org/sl/nsfvtsunichzes/

[7] Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках УФН 94 535–546 (1968)

[8] Механик А. Уравнение злого духа // Интервью с Л..Фаддевым. Эксперт № 29 (570), 2007.

[9] Сухотин А.К. Философия математики. http://ido.tsu.ru/other_res/hischool/filmatem/83.htm

[10] Клайн М. Математика. Поиск истины. — М.: Мир, 1988.

[11] Черепанов С.К. Обоснование математики: новый взгляд на проблему http://www.philosophy.nsc.ru/journals/philscience/3_97/07_cherep.htm

[12] Галилей Г. Пробирных дел мастер / Пер. Ю.А. Данилова. М.: Наука, 1987

[13] Витгенштейн Л. Логико-философский трактат / Пер. с нем. Добронравова и Лахути Д.; Общ. ред. и предисл. Асмуса В. Ф. — М.: Наука, 2009

[14] Гуссерль Э. Начало геометрии. Введение Жака Деррида. М.: Ad Marginem, 1996.

[15] Бурбаки Н. Архитектура математики // Бурбаки Н. Очерки по истории математики / М.: ИЛ, 1963.

[16] Кулаков Ю.И. Теория физических структур http://www.tphs.info/lib/exe/fetch.php/wiki:autor:kulakov:kniga.pdf

[17] Раушенбах Б.В. Логика троичности // Вопросы философии, № 3, 1993.

[18] Эко У. Отсутствующая структура. Введение в семиологию. СПб., 1998.

[19] Шухов А. «Математика или общая теория структур?» http://nounivers.narod.ru/ofir/cts.htm

[20] Рогожин В.И. Парадигма части VS Парадигма целого… Абсолютная порождающая структура http://elementy.ru/blogs/users/ideabank/

[21] Гутнер Г. Онтология математического дискурса http://teneta.rinet.ru/rus/ge/gutner_ontology_of_mathematic.htm

[22] Перминов В.Я. Реальность математики / Вопросы философии № 2, 2012

[23] Рогожин В.И. «It from Δ-Logit» http://elementy.ru/blogs/users/ideabank/

Титов Андрей Валентинович, *к.т.н., доцент, Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)*

К ПРОБЛЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЕМ ОБЪЕКТОВ БОЛЬШОЙ СЛОЖНОСТИ.

Эффективность решения задач прогнозирования динамики развития и управления развитием сложными объектами и системами во многом зависит от того, насколько правильно определены стратегические и тактические цели развития.

В основу такого прогнозирования может быть заложен ситуационный принцип, заключающийся в том, что в каждый момент времени рассматривается пространство возможных состояний ситуации управления, под которой в общем случае будем понимать состояние объекта управления и состояние среды, в которую «погружен» объект управления. При этом вероятность нахождения ситуации управления в том или ином состоянии может быть не только неизвестна, но и сам вопрос о существовании этой вероятности может быть не корректным в связи, например, с ее уникальностью. В то же время сценарий развития ситуации зависит от того, в каком именно состоянии она находится на момент, принятый за начальный. В частности, если ситуация описывается аналитически уравнениями с переменными коэффициентами (параметрами), то различные диапазоны изменения коэффициентов могут приводить к различным решениям.

К способам повышения степени адекватности моделей сложных объектов и процессов, для которых, как уже говорилось, не эффективно классическое «жесткое моделирование», является уже упомянутое «мягкое моделирование».

Мягкие модели могут оказаться полезным инструментом для моделирования сложных объектов, поскольку на основе использования мягких моделей, можно, делать выводы для целого ряда жестких моделей, получаемых с помощью исходной мягкой модели путем вариации значений коэффициентов модели, что, может отражать изменение степени весомости параметров влияющих на оценку состояния объекта описания. В частности, при изменении коэффициентов модели экспоненциальный рост может меняться в определенных «точках перегиба» на более медленный. Мягкие модели позволяют также учитывать при описании сложных объектов некоторые «подводные камни» жестких моделей.

Наконец, можно еще упомянуть эвристические модели, применяемые для описания сложных объектов. Можно надеяться, что грамотное сочетание этих принципов приведет к созданию эффективных моделей сложных объектов. Однако дальнейшее развитие методов моделирования сложных объектов, позволяющих получать эффективные прогнозы их развития и способствующие принятию эффективных управленческих решений невозможно без разработки общей теоретической базы, объединяющей в систему различные виды моделирования процессов управления сложными объектами различной природы.

Как отмечалось выше, при описании сложных объектов действенными могут оказаться методы, основанные на обработке нечисловой информации, на привлечении качественных оценок, применении неклассической логики, поэтому зачастую к эффективному моделированию состояний сложных объектов и динамики их развития приводят методы, основанные на использовании теории нечетких множеств. Неопределенность, приводящая к некорректности задач управления, заставляет обращаться к методам, основанным на использовании эвристик.

В частности в задачах стратификации состояний сложных систем при наличии результатов измерений или оценок по имеющему размытые границы набору параметров может использоваться модель, основанная на использовании эвристических процедур в сочетании с нечеткой классификационной моделью. К таким задачам относятся задачи оценки и прогнозирования уровней безопасности при эксплуатации сложных технических систем, уровней пожарной опасности объектов различной сложности, уровней террористической угрозы, уровней экологической опасности при проектировании опасных производств и т.д.

Для описания динамики состояний сложных объектов и перехода их в новые фазовые состояния полезными могут оказаться фрактальные модели в их сочетании с нечеткими и эвристическими моделями. В частности параметры модели развития: $Z_{n+1} = K(t)Z^{p}_{n} + C(t)$ могут иметь не только сложную структуру и нечетких характер, но и обладать динамическими свойствами как в «мягких» моделях В.И.Арнольда.

Суть описания динамики развития состояний объекта управления в их подобии некоему исходному эталонному образу, т .е. в описании процесса самоподобия и определения зоны его устойчивости.

Чтобы получить некоторое представление о специфике фрактальных моделей процессов развития, нужно обратиться к особенностям генетических теорий. В частности в работе [3] приводится сопоставление классического и генетического подходов к процессам развития: «При классической трактовке объекта познания (исповедуемой классической логикой) этот объект понимается как нечто самотождественное. Изменения, которые происходят с объектом, относятся только к смене им свойств и к изменению его отношений к другим объектам. Изменяется не сам объект, а лишь его характеристики и состояния. В лучшем случае может учитываться фактор возникновения или уничтожения объекта, но в любом случае он рассматривается как себе тождественный.

Напротив – при генетическом, конструктивистском подходе, наиболее ярко представленном в новое время методологией Декарта объекты рассмотрения (исключением могут быть лишь первичные объекты) конструируются исследователем и потому находятся под его контролем. …Статичность бытия, при которой изменения могут затронуть лишь их акцидентальные (т.е. случайные) стороны сущностей отступает перед становлением, когда речь идет уже о подлинном возникновении и подлинном преобразовании объектов рассмотрения».

Превращение научного направления в дедуктивную науку по Глушкову включает следующие этап создания формального языка для описания понятий и процессов, изучаемых данным научным направлением.

Среди языков, которыми описываются ситуации управления для объектов управления различной природы, выделяют следующие [2]:

- Естественный язык.
- Язык предикатов.
- Язык теории множеств
- Язык универсальной алгебры, в частности булевой алгебры.
- Язык теории вероятностей.
- Язык нечетких множеств,
- Язык теории графов.
- Язык функционального анализа.
- Язык теории моделей
- Язык теории структур.
- Категорный язык.

Приведенный перечень языков, на которых может проводиться классификация тех или иных объектов конечно не полон и может быть существенно пополнен. Однако, более важной задачей является обнаружение связи как между этими языками, для приведения их в систему, которая в конечном итоге и стала бы системой языков теории управления, а так же нахождения связи языка с типом объекта управления. Определенные усилия в этом направлении были предприняты профессором А.И.Субетто при оценке границ применимости различных типов специальных квалиметрий. Краткая характеристика ситуаций управления и наиболее соответствующих им методов формализованного описания приведена в работе [2].

Формулы языка предикатов, имеют эквивалентную теоретико-множественную форму. Например, фигура силлогизма

A(M,P)

A(S,M)

A(S,P)

может быть записана в логической форме как

$\forall x((F(x)\rightarrow G(x))\wedge(E(x)\rightarrow F(x)))\rightarrow\forall x(E(x)\rightarrow G(x))$.

Эквивалентная теоретико–множественная форма имеет вид:

$((M\subseteq P) \wedge (S\subseteq M)) \rightarrow(S\subseteq P)$.

Обобщением может служить запись на языке импликативных решеток:

$(S\Rightarrow M))\bigcap(S\Rightarrow M)\leq S\Rightarrow P$.

Использование языка предикатов для описания ситуации управления основано на оценке суждений вида «объект А обладает свойством В». При этом значение оценки не исчерпывается парой 0,1, если нас интересует не просто наличие свойства, но и его интенсивность. Например, А может обладать свойством В с некоторой интенсивностью и тогда истинность приведенного суждения будет оцениваться в промежутке [0,1]. В частности, это может приводить к тому, что возможны истинные суждения вида «А обладает и не обладает свойством В». Иными словами, при моделировании состояний сложных объектов мы можем сталкиваться с ситуациями, в которых нарушаются законы классической формальной логики с законами исключенного третьего и противоречия. Следовательно, моделирование объектов сложной природы требует привлечения формальных методов моделирования основанных на разных типах логики. Адекватность выбранного метода формального моделирования во многом определяется пониманием взаимосвязи между формальными системами с различным типом логики.

Литература:

1. А.В.Титов. К вопросу о научном обеспечении ситуационного подхода в государственном управлении // Материалы Всероссийской научной конференции «Россия: путь к социальному государству». М. 2008.

2. А.И.Субетто. Метаклассификация как наука о механизмах и закономерностях классифицирования. - С-Петербург - Москва: ИЦ, 1994.- 254

3. А.А.Крушинский. «Логика древнего Китая». (В печати)

Хаханян Валерий Христофорович, *д. филос. н., профессор, Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)*

О ТЕЗИСЕ ЧЁРЧА И ПРИНЦИПЕ УНИФОРМИЗАЦИИ (К ЗАМЕТКАМ ПО ОНТОЛОГИИ МАТЕМАТИКИ)

I. В 1907 г. Л.Э.Я. Брауэр основал новое направление в математике - интуиционизм. Формализация интуиционистских принципов осуществлена в 20-х годах прошлого века А.Н.Колмогоровым, В.И.Гливенко и А. Гейтингом. В середине того же века формализации подверглись арифметика, анализ и затем - теория множеств. Исследовался спектр вопросов, аналогичных в исследованиях теорий множеств с классической логикой и связанных с интуиционистской и конструктивной проблематиками. Методы рекурсивной реализуемости, псевдобулевозначных моделей, моделей Крипке применялись в исследованиях по интуиционистской теории множеств. Отметим применение метода рекурсивной реализуемости к:

а) вопросам равнонепротиворечивости классических и интуиционистских систем;

б) свойствам эффективности интуиционистских систем;

в) свойствам классов ординалов и кардиналов в этих системах;

г) возможностям построения класса конструктивных множеств;

д) исследования совместности и независимости интуиционистских и конструктивных принципов.

В [1] доказана независимость принципа униформизации от тезиса Чёрча в интуиционистской теории множеств без аксиомы объёмности и с добавленными принципами Маркова и двойного дополнения множеств DCS (см. [2] или [3]).

В [3] доказано, что эти принципы совместны с теорией множеств с интуиционистской логикой (формулировка теории включала все аксиомы теории множеств Цермело-Френкеля с заменой аксиомы регулярности на схему аксиом трансфинитной индукции). В [2] использовалась модель, в которой аксиомы теории множеств и все отмеченные выше принципы также выполняются, исключая принцип униформизации, который не удавалось ни доказать, ни опровергнуть.

Доказано, что униформизация не выводима в теории множеств с аксиомой объёмности и с принципами Маркова, Чёрча и DCS. Это решает все открытые проблемы из [1]. Следовательно, модели из [2] и [3] для теории множеств являются различными. Результат был анонсирован в [4].

Система теории множеств ZFIR2 включает схему подстановки, а система ZFIC2 – схему собирания и дедуктивно сильнее ZFIR2.

Для доказательства основного результата используется факт, что нет частично-рекурсивной функции, которая была бы функцией экстенсиональности для всех множеств из модели. Используемый контрпример есть в [1].

Дадим сводку результатов. В пунктах, где доказывается выводимость, слева стоит более слабая теория, чем в пунктах, где выводимость опровергается. Все результаты расширяются до принципа DCS.

1. в ZFIC2+M+DCS+CT не выводится U – основной результат;
2. в ZFIC2+M+DCS+U! не выводится U - следствие 1.и 4.; см. также замечания в конце работы [1];
3. в ZFIC2+M+DCS+CT!+U не выводится CT - см. [5], теорема 1, стр. 1073 или [7], теорема 3.4, стр. 245;
4. в ZFIR2+CT! выводится U! - см.[6], стр. 49, теорема 2.1 и замечание к ней;
5. в ZFIR2+U выводится U! - простой вывод в логике предикатов;
6. ZFIR2+CT выводится CT! - как в 5.;
7. в ZFIC2+M+DCS+U не выводится CT! - см. [8], основная теорема на стр. 51 и предпоследний абзац на стр. 52 или [7], main theorem 2.3, p. 241;
8. в ZFIC2+M+DCS+U не выводится CT - из 7.и 6.

Задача: в ZFIC2-объёмность+M+DCS+CT не выводится U!

II. Сделаем философские выводы из представленных результатов, относящихся к основаниям математики (теории множеств и теории доказательств).

С точки зрения достижения истинных результатов, подразумеваемой в любом знании (и в математике), желательно описать систему истинных принципов в основаниях (для математики - теории множеств). Такой представлялась картина ведущим математикам конца 19-го – начала 20-го веков (Г. Кантор, Р. Дедекинд, Д. Гильберт, А. Пуанкаре и др.). Попытки достичь абсолютно истинных основ математики закончились неудачей. С другой стороны, профессиональные математики просто продолжают работать в своих областях математики, не задаваясь вопросом об обосновании получаемых результатов. Такая точка зрения удобна, но возникает вопрос: а являются ли получаемые результаты истинными и если да, то в каком смысле они таковыми являются?

Из сводки выше видно, что понятие истины в математике не является чем-то застывшим и подвергается время от времени кардинальным изменениям (существование кризисов в математике, признаваемых всеми математиками). Попытки преодолеть существующее положение вещей (сродни попыткам осознать устройство нашей Вселенной, да и ряду более «мелких» проблем в истории философии) с моей точки зрения обречены на провал. Тем не менее, некоторые локальные достижения в вопросах осознания истинности математического знания предложить всё же можно. Здесь же только хотелось на приведённом примере продемонстрировать трудность и специфику поставленной проблемы.

Литература

1. Хаханян В.Х. Невыводимость принципа униформизации из тезиса Чёрча в интуиционистской теории множеств. // Математические заметки, т. 43, выпуск 5 (май), 1988, С. 685-691.

2. Хаханян В.Х. Теория множеств и тезис Чёрча. // В кн.: Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М., Наука, 1983, С. 198-208.

3. Хаханян В.Х. Непротиворечивость интуиционистской теории множеств с принципами Чёрча и униформизации. // Вестник Моск. Университета, Серия Математика, Механика, № 5, 1980, С. 3-7.

4. Хаханян В.Х. Независимость сильного принципа униформизации от тезиса Чёрча в полной теории множеств. Научные математические чтения памяти М. Я. Суслина. Саратов, 16-21 октября 1989. Тезисы докладов. СГПИ, 1989, Саратов, С.91.

5. Хаханян В.Х. Сравнительная сила вариантов тезиса Чёрча на уровне теории множеств. ДАН СССР, 1980, т.252, № 5, С. 1070-1074.

6. Шварц Г.Ф. Некоторые применения метода рекурсивной реализуемости к интуиционистской теории типов. // В кн.: "Вопросы кибернетики. Неклассические логики и их применение". Научный совет по комплексной проблеме "кибернетика". М., 1982, С. 37-54.

7. Hahanyan V.H. The Consistency of some Intuitionistic and Constructive Principles with a Set Theory. Studia Logica, 1981, XL, № 3, P.237-248.

8. Хаханян В.Х. Непротиворечивость интуиционистской теории множеств с формальным математическим анализом. ДАН СССР, 1980, т. 253, № 1, С. 48-52.

Чагров Александр Васильевич, *д.ф.-м.н., профессор,*
Тверской государственный университет

БЕСКОНЕЧНОСТЬ, ВСЕВЕДЕНИЕ, ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ

Известна расхожая фраза «математика – наука о бесконечном». Разумеется, в этой фразе, как и в ей подобных, немало неточности и полемической заострённости. Однако верно, что математика – единственная наука, в которой изучаются бесконечные объекты, как нечто данное, и бесконечные совокупности объектов. Конечно, и в некоторых разделах других наук не обойтись без бесконечного, но это происходит именно в связи с математикой; таковы, к примеру, философия математики, психология математики. По-видимому, наиболее близка «по духу» к математике физика (В. И. Арнольд вообще считал математику разделом физики, хотя это больше относилось к выбору соответствующей грани предмета и метода его исследований, а также упомянутой «заострённстью», но … не буду брать на себя слишком многое). И действительно, физика занимается абстрактными представлениями реального мира, среди которых, например, и такая абстрактная сущность, как «мгновенная скорость». Но ведь это весьма близко к лейбницевским бесконечно малым, причём это довольно быстро приводит к трудностям: педагогическим – объяснить школьнику или студенту, что такое мгновенная скорость, весьма нелегко, тем более, что и сами преподаватели порой не готовы к этому (я – во всяком случае, по разным причинам); философским – вспомним апории Зенона, апорию Стрела, прежде всего. Впрочем, абстракции, в частности – абстракции бесконечности разного рода, в физике играют вспомогательную роль, способствуя выявлению свойств реальности, построению физических теорий для описания этой реальности, нахождению в них несоответствий реальности, уточнению или даже замене этих теорий на более подходящие и т.д., но не наоборот; по словам Хао Вана «… физические явления не подходят для изучения и обоснования математики, сущностью которой является бесконечность. Сверх того, трудно себе придать смысл предположению, что существует бесконечно много физических явлений». Поскольку мне довелось последнюю закавыченную цитату видеть лишь в переводе на русский язык, я могу лишь предположить, что здесь вместо «обоснования математики» должно быть «обоснования той части математики». Последнее связано с тем, что математика в некоторых своих частях изучает вовсе даже не бесконечность в том или ином виде, а принципиально конечные объекты, хотя и в неограниченном количестве; такова, к примеру, теория булевых функций.

Доказательства теорем Гёделя о неполноте довольно часто поясняют аллюзией к парадоксу лжеца, который я здесь сформулирую так: «Произнося эту фразу, я лгу». В результате мы получаем т.н. «дурную бесконечность» (цикл): «Если я говорю правду, то я лгу. Если я лгу, то тем самым я говорю правду. Если я говорю правду, …». Так вот, в доказательстве первой теоремы Гёделя о неполноте строится формула, утверждающая собственную недоказуемость. Я опускаю сколько-нибудь подробное обсуждение деталей построения этой формулы, однако упомяну, что в основе лежит формульное описание доказуемости в эффективно аксиоматизируемой (точнее, аксиоматизированной) теории. Важным обстоятельством здесь является то, что это формульное описание одной (!) формулой даёт эффективное описание сразу всех (!) доказуемых в данной аксиоматизации формул. Поясню это хорошо известным примером «определения» некоторого натурального числа: «наименьшее из натуральных чисел, которые невозможно определить фразой русского языка, содержащей не менее ста слов». Явная «парадоксальность» этого «определения» снимается замечанием, что это «определение» даётся после того (!), как даны все определения всех натуральных чисел (это вовсе не означает лёгкость этого «снятия»: в своей педагогической деятельности я много раз сталкивался ситуацией, когда для разъяснения не хватало и академического часа).

Образно выражаясь, формула, описывающая доказуемость в данной теории, актуализирует потенциально бесконечное множество всех доказуемых в данной аксиоматизации формул; именно это имеется в виду в заголовке в слове всеведение: прежде, чем говорить об одном свойстве доказуемости в данной аксиоматической системе, мы должны знать в той или иной форме все доказуемые формулы. Таким образом, если мы признаём лишь потенциально бесконечные множества, то вряд ли следует признавать доказательства теорем Гёделя о неполноте абсолютно безупречными.

Обратимся теперь к предмету, о котором идёт речь в теоремах Гёделя о неполноте. Это т.н. стандартная модель арифметики – множество (вновь всех!) натуральных чисел с константами 0, 1 и арифметическими функциями сложения и умножения (как известно, все другие вычислимые функции (возведение в степень, равно как и целочисленное логарифмирование, целочисленное извлечение корня и т.д, и т.п.), а также все вычислимые арифметические предикаты (неравенства, делимость нацело и пр.) будут выразимы в разных разумных арифметических эффективно аксиоматизируемых теориях. Возникают естественные вопросы:

- Зачем нам все (!) натуральные числа?
- Зачем нам все (!) вычислимые функции?

Попытки ответить на эти вопросы, как на соотношение формализации арифметики с реальностью, которую мы пытаемся формализовать, приводят (в разных случаях по-разному в зависимости от многого – обстоятельств, методологических воззрениях, вкусов и др. исследователя и пр.) к разным ответам. Однако, среди первого (оно же будет здесь и последним, поскольку «Нельзя объять необъятное!») возражения – ресурсное. Мы, разумеется, имеем сколь угодно большие натуральные числа (сколь угодно большие числа – устойчивое словосочетание, которое невозможно употреблять при определении конкретного числа или хотя бы в качестве свойства чисел), позволяя себе, если уж очень надо, добавить единицу к наибольшему из рассматриваемых чисел. Однако это не очень разумно с точки зрения именно по отношению к реальности. Очень большие числа и их соотношения обрабатываются всякого рода вычислительными устройствами (будем называть их компьютерами). Т.о., разумно рассматривать не все натуральные числа, а лишь числа из конечного множества {0,1, … ,n} при не заданном заранее n. Разумность обосновывается теми фактами, что в данный момент (момент мы здесь будем понимать на наивно-интуитивном уровне) имеется конечное (!) множество познающих (т.е. субъектов познания), конечное (!) множество компьютеров, каждый из которых имеет конечную (!) память, ну и т.д. с признанием конечности (!) принимаемых условий с конечностью (!) требований в каждом из этих условий.

В докладе автор предполагает дать если не исчерпывающие ответы на сформулированные и связанные к ними вопросы, то, по крайней мере, наметить направления исследований для получения ответов. Кроме этого, предполагается обсуждение и близкой тематики, например, тезиса Чёрча (разрешимо-неразрешимо).

Шиян Тарас Александрович, *к.ф.н., доцент, Российский университет дружбы народов (Москва)*

ВОЗНИКНОВЕНИЕ МАТЕМАТИКИ КАК СЕМИОТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС: МОДЕЛЬ ПРЕДМЕТНОГО ЗАМЫКАНИЯ

Исследуя процессы трансформации философских и научных дискурсов под влиянием массового систематического использования в них различных искусственных знаковых систем, автор построил модель, которую, как оказалось, можно трактовать как модель (теорию) возникновения математики как некоторого рода особой конструктивистской, оторванной от «реальности» знаковой практики. В настоящих тезисах представлены основные идеи подхода автора.

Под дискурсом понимается относительно обособленная, устоявшаяся область коммуникации, характеризующаяся своими устоявшимися формами речевой деятельности, используемыми знаковыми средствами, предметом обсуждения, классическими образцами и т.д. Примерами таких объектов являются научные и философские дисциплины, научные и философские школы, и вообще все так или иначе институциализированные человеческие сообщества, рассматриваемые с точки зрения их семиотических и коммуникативных структур.

Исходным пунктом исследования была попытка понять те изменения, которые произошли в логике в XIX–XX вв. В результате автор пришел к тезису, что переход к практике систематического использования некоторых искусственных языков вызывает подмену исходного предмета дискурса и переход к исследованию самих знаковых конструкций (что, правда, тесно связано с исследованием выстраиваемых за ними абстракций), принципов их построения, манипулирования ими и т.д. Этот процесс предлагается называть предметным замыканием дискурса. При этом сам дискурс как-то модифицируется и делается по каким-то параметрам ближе к научному, чем к философскому (что демонстрируют, например, многочисленные острые споры о правомерности существования в рамках философии символической философской логики).

Помимо логики, другими объектами, которые принимались в расчет при анализе процессов предметного замыкания, были следующие дисциплинарные дискурсы: античная геометрия, физика Нового времени, химия (а также алхимия средневековья и раннего Нового времени), традиция Московского методологического кружка (ММК). Каждый из упомянутых дискурсов демонстрирует свою степень предметного замыкания, особенности устройства, связи с внешними практиками, свои особенности используемых знаковых средств и т.д.

На взгляд автора, замыкающая знаковая система (знаковая система, вызывающая процессы предметного замыкания) должна обладать следующими свойствами:

1) представлять в дискурсе не речь (речевой уровень дискурса), а предмет мышления и коммуникации;

2) быть «рисуночной», т.е., во-первых, визуальной и, во-вторых, статичной, что связано с особенностью нашего восприятия и позволяет представлять в дискурсе предмет (независимо от его природы) одновременно во всех его частях;

3) быть достаточно «креативной», т.е. давать возможность порождать в своих рамках необходимое по числу и разнообразию количество репрезентаций предмета (что обеспечивается, во-первых, многоярусностью системы, позволяющей конструировать посредством уже имеющихся знаковых средств новые синтагматические конструкции, во-вторых, ее открытостью, позволяющей при необходимости вводить в систему новые знаковые элементы и конструктивные приемы и, следовательно, позволяет представлять в дискурсе новые предметные структуры).

Кроме того, вероятно, необходимы еще:

4) относительная дискретность семиотической системы, чтобы без труда можно было отделять друг от друга части предметного представления;

5) относительная компактность представления предмета, ее обозримость.

Эти два дополнительных свойства обеспечиваются за счет выбора соответствующих вариантов «рисуночности».

С появлением средств репрезентации предмета внутри самого этого дискурса (с ростом тенденций к предметной изоляции, подмене изучения предмета изучением получаемых знаковых репрезентаций) возникает потребность в выполнении некоторых особых семиотических функций, в силу чего формируются особые практики, назначением которых в системе дискурса является выполнение этих функций. По мнению автора, такими функциями или группами функций (часто взаимосвязанными) являются следующие:

1) адекватное построение знаковых конструкций (например, различные конструктивные, «генетические» построения в математике);

2) обсуждение, контроль, подтверждение адекватности знаковых конструкций (например, логико-дедуктивный уровень, частично, вычисления и др.);

3) различные формы манипулирования конструкциями, их трансформация, преобразование (осуществляется отчасти методами построения, отчасти вычислениями, отчасти некоторыми другими способами);

4) изучения знаковых конструкций, получение знаний о них или знаний об абстрактных (теоретических) объектах, ими представляемых (в математике осуществляется методами логики и вычислений).

Рассматривая трансформацию дискурсов в ходе процессов замыкания, автор выделил два типа предметно-замкнутых дискурсов, названных им сильно-замкнутыми и двухслойными. Отличительным свойством сильно-замкнутых дискурсов является наличие в них практик адекватного построения знаковых «репрезентаций». Тогда как в двухслойных дискурсах «верхний», предметно-замкнутый слой (дискурс) содержит только практики 2–4, а практику адекватного построения выполняет «нижний», «эмпирический» слой (дискурс), связывающий предметно-замкнутый, «теоретический» слой с его исходным предметом. Еще одним важным, хоть и не конституирующим свойством сильно-замкнутых дискурсов является вторичная онтологизация знаковых конструкций – полагание выстраивающихся за ними абстракций реально существующими.

Примерами сильно-замкнутых дискурсов являются: символическая логика, геометрия и, очевидно, остальные дисциплины математики. Тогда как примерами двухслойных дискурсов являются математизированные дисциплины современных естественных наук, в первую очередь, физики.

Не вписываются полностью в эту типологию дискурсы химии и ММК, в которых процессы предметного замыкания не завершено. Можно заметить, что в них отсутствует слой вычислений, связанных с основными репрезентирующими схематизмами. Кроме того, в химии отсутствует практика логического оперирования этими схематизмами. Можно выдвинуть следующую гипотезу: сильное предметное замыкание требует формирования трех взаимосвязанных практик: (1) конструирования знаковых репрезентаций (что часть переосмысляется как практика построения объектов исследования), (2) дедуктивных рассуждений, (3) вычислений, и именно отсутствие в дискурсах химии и ММК таких операционально-семиотических комплексов является основной причиной отсутствия в этих дискурсах ярко выраженного предметного замыкания.

Единственная группа макросоциальных дискурсов, которая подходит под тип сильно-замкнутых дискурсов, – это различные математические дисциплины. Т.е. в модели независимо от непосредственно поставленных автором исследовательских задач было получено описание семиотических процессов, порождающих в культуре особого вида семиотические практики, объединяемые сегодня названием «математика».

СЕКЦИЯ 4

ВЗАИМОСВЯЗЬ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ И ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

Баранец Наталья Григорьевна, *д.ф.н., профессор*
Верёвкин Андрей Борисович, *к.ф.-м. н., доцент*
Ульяновский государственный университет

О СУДЬБЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КОНСТРУКТИВИСТСКИХ ШКОЛ А.А.МАРКОВА И Э.А.БИШОПА

В СССР первым последовательным конструктивистом был *А.А. Марков* (1903-1979). Под влиянием публикации С.К. Клини (1945) Марков занялся теорией алгоритмов. Уже в 1947 г. он дал отрицательное решение проблемы норвежского математика А. Туэ (1914), доказав алгоритмическую неразрешимость равенства в ассоциативных системах (в современной терминологии,– в полугруппах). В 1950 г. Марков объявил о создании собственного понятия *«нормального алгорифма»* [1], а подробное описание своей конструкции он дал на следующий год. Ранее Марков использовал определения Чёрча, Тьюринга, Клини и Поста. В монографии 1954 г. Марков дал обстоятельное изложение результатов и методов своего направления [2].

Марков основал научную школу, к двум ветвям которой, ленинградской и московской, принадлежат примерно 160 учёных (О. Демут, А.Г. Драгалин, И.Д. Заславский, М.И. Канович, Б.А. Кушнер, С.Ю. Маслов, Ю.В. Матиясевич, Г.Е. Минц, Н.М. Нагорный, Н.Н. Непейвода, В.П. Оревков, Н.В. Петри, Г.С. Цейтин, Н.А. Шанин, В.А. Янков и многие другие). Московская ветвь этой школы частично пересекается с логическими школами П.С. Новикова и А.Н. Колмогорова.

Конструктивизм Маркова вырос из естественнонаучного стремления к осязаемости. Он считал, что цель математики исчерпывается конструктивной функцией, а саму математику относил к техническим наукам вроде машиноведения. Марков отвергал актуальную бесконечность, но признавал абстракции отождествления и потенциальной осуществимости. В логике Маркова (ступенчатой семантической системе) нет закона исключённого третьего, но выполнен закон непротиворечия.

Логические операции применяются к операндам с конструктивно прояснённым смыслом, импликация понимается как алгорифмическая выводимость.

Марков применял *«принцип конструктивного подбора»*, из которого следует возможность снятия двойного отрицания с некоторых экзистенциальных формул и признание, тем самым, некоторых следствий закона исключённого третьего. Принцип утверждает о завершаемости алгорифма, если нелепо предположение о его неограниченной продолжаемости [3]. С этим решительно не соглашаются интуиционисты и конструктивисты иных течений. Из принципа Маркова следуют почти гёделевы результаты о неполноте: конструктивная реализуемость не влечёт выводимость.

Математические результаты Марковского конструктивизма близки интуиционистским, но глубже по части доказательства неразрешимости проблем. В марковской теории классическая конечность расщепляется на четыре неэквивалентных понятия: финитности, субфинитности, квазифинитности и неинфинитности. В анализе неразрешимы проблемы равенства вещественных чисел, отсутствуют разрывные функции. В теории полугрупп неразрешимы проблемы тождества и делимости элементов, изоморфии, единичности, группового свойства и вложимости в группу. В топологии неразрешима проблема гомеоморфии и гомотопической эквивалентности. При этом возникают непрояснённые выходы в классическую математику [4].

Марков объяснил причину неразрешимости массовых задач неограниченным ростом сложности алгорифмов, разрешающих частные случаи.

Современных последователей Маркова интересует не полнота теорий, а интуитивно понимаемая адекватность. Главной целью конструктивизма они считают анализ методов построений. Из научных идеалов они предпочитают полезность, с подозрением относятся к новизне и декларируют ограниченность познания [5].

К зарубежному направлению конструктивизма относится программа американского математика *Эрретта Альберта Бишопа* (1928-1983). Интерес Бишопа к конструктивной математике появился в 1964 г. во время годичной стажировки в Миллеровском институте фундаментальных исследований в Беркли. Коллеги вспоминают, что обращение в конструктивизм у него произошло под влиянием идей Г. Вейля. В 1966 г. он приехал в Москву на математический Конгресс и прочитал пленарный доклад о конструктивизации математического анализа. А.А. Марков и Н.А. Шанин предложили Бишопу продолжить обсуждение на кафедре логики, но после краткой беседы общего языка не нашлось. Бишоп отрицал значимость алгоритмов для математики и шёл своим путём. В 1967 г. он написал книгу *«Foundations of Constructive Analysis»*, которая открывалась *«Конструктивистским Манифестом»*. Такие идеи тогда не считались респектабельными. Бишопу не удалось договориться и с американскими специалистами по рекурсивным функциям. В 1972 г. в соавторстве с учеником Г. Ченгом он опубликовал книгу *«Constructive measure theory»*. В это время он перестал набирать учеников, потому что им было сложно защититься по неклассическому направлению. Последнюю диссертацию под его руководством защитил в Сан-Диего Дж. Д. Бром в 1974 г. по теме *«Конструктивная теория компактных операторов»*. Известно только 5 диссертаций явно конструктивного направления под руководством Бишопа. К его школе сегодня относят себя 10 математиков.

В основе Бишоповского конструктивизма лежит идея восстановления нумерического смысла математики. Его позицию в анализе называют «атомистической». Бишоп отрицал свободно становящиеся последовательности Брауэра, жёсткую привязку эффективности к рекурсивности и возможность окончательной формализации доказательства. Он связывал доказательность с убедительностью и здравым смыслом, отводя собственно логике в обосновании математики неглавную роль.

История науки 20 в. показала, что вопрос об основаниях математики и знания вообще на современном уровне не может быть разрешён в окончательном виде и остаётся открытым.

Работа поддержана грантом РФФИ № 13-06-00005

Литература

1. Марков А.А. «Конструктивная логика» // УМН, 1950, т. 5, №3, с. 187-188; «Теория алгорифмов» // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1951, т. 38, с. 176-189.

2. Марков А.А. «Теория алгорифмов» // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1954, т. 42, с. 3-375; переиздана в соавторстве с Н.М. Нагорным в 1984 и 1996 гг.

3. Марков А.А. «О конструктивной математике» // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1962, т. 67, с. 8-14.

4. Сосинский А.Б. «А не может ли гипотеза Пуанкаре быть неверной?» // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 2004, т. 247, с. 247-251.

5. Непейвода Н.Н., Бельтюков А.П. «Манифест прикладного конструктивизма»// Логические исследования, 2010, № 16, с. 199-204.

Бойкова Дарья Валерьевна, *аспирант, философский факультет, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова*

ИЗ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ИСТОРИИ ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ: В.Ф.КАГАН ОБ ОСНОВАНИЯХ ГЕОМЕТРИИ

В. Ф. Каган — российский и советский математик, один из создателей одесского издательства «Матезис», глава научной комиссии этого издательства, заведующий кафедрой дифференциальной геометрии Московского университета (в 1922-1952 гг.), главный редактор полного собрания сочинений Н.Я.Лобачевского. На протяжении всей жизни к сфере интересов Кагана относилась проблематика, связанная с основаниями геометрии. Основаниям геометрии посвящена в частности его магистерская диссертация.

Занимаясь исследованиями в области истории математики, Каган неявно разделяет историю геометрии на «до» и «после» появления неевклидовых геометрий. В период «до» геометрия Евклида мыслилась как единственно возможная. Геометрическое пространство фактически отождествлялось с реальным пространством. И, когда геометрию называли формальной наукой, под этим подразумевалось лишь то, что «свойства пространства логически выводятся из небольшого числа основных его свойств» [1].«Начала» Евклида он характеризует как «пеструю смесь логики и интуиции» [2]. Заслуга Евклида состоит в систематизации имеющегося знания, по отношению же к методологии «Начал» Каган настроен критично: определения бессодержательны и не используются в выводе, аксиом и постулатов недостаточно для доказательства теорем. Бреши в формальной структуре геометрии заполняет интуиция.

Здесь речь идет о «геометрической интуиции», которая в конечном счете основана на визуальных образах и представлениях. Ее Каган отличает от «логической интуиции», составляющей условие всякого рассуждения и доказательства [3]. Логическая интуиция дает возможность различения понятий, и она, в отличие от геометрической интуиции, на данном этапе неустранима из геометрии.

Анализируя и типизируя попытки доказательств пятого постулата, Каган замечает сходство между многими из них: в качестве допущения принимается суждение, расходящееся с геометрической интуицией, из него выводят следствия, расходящиеся с интуицией еще сильнее, что трактуется как противоречие. Так, итальянский математик Дж.Саккери еще в первой половине XVIII в. доказывает ряд теорем, эквивалентных теоремам геометрии Лобачевского, но в определенный момент останавливается, утверждая, что полученный результат противоречит «природе прямой линии» [4]. Недоказуемость пятого постулата и возможность построения различных систем геометрии нивелирует значимость геометрической интуиции. Более того, Каган глубоко убежден, что геометрическая интуиция должна быть полностью устранена из геометрии, а геометрия должна быть выстроена как действительно формальная система.

Наличие в математике объектов, не имеющих прямого соответствия в реальном мире (например, объектов неевклидовых геометрий), заставляет пересмотреть наше понимание природы математики, в частности отношение математических объектам к объектам реального мира. Согласно Кагану, математические теории, во-первых, могут быть лишь формальными теориями, не связанными ни с какими реальными объектами. Потому может существовать множество различных интерпретаций формальной системы. Во-вторых, построение математики — это логическое построение, т. е. построение, свободное от каких-либо наглядных (интуитивных) представлений. В-третьих, математическое построение — дедуктивное построение, т. е. рассуждение, осуществляемое по законам силлогистики [5].

Преподавание математики должно современному представлению о природе математике. В своей речи, произнесенной при защите диссертации на степень магистра чистой математики, Каган приводит пример из одного учебного пособия, где автор при проведении доказательства теоремы использует никак не заданные и не проясненные представления о движении [6]. Рассуждения автора Каган не считает доказательством. Говорить о доказательстве возможно лишь тогда, когда очерчен круг исходных положений.

По многим пунктам позиция Кагана близка формализму. Будучи знакомым с «Основаниями геометрии» Гильберта, Каган высоко их оценивал. Полемизируя с Н.Извольским, Каган встает на защиту Гильберта, утверждая, что тот не прибегает к интуиции в своей работе. Отмечает Каган и недостатки гильбертовой аксиоматизации: из посылок Гильберта нельзя развить геометрию Евклида в полном объеме [7]. В 1905 г. издается собственная работа Кагана «Основания геометрии. Опыт обоснования Евклидовой геометрии», где «интуиции нет, как нет и чертежей» [8].

Литература:

[1] Каган В. Ф. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии // Вестник опытной физики и элементарной математики (1905 г., выпуск № 392), с. 169

[2] Каган В. Ф. Издательство Академии Наук СССР, Москва-Ленинград, 1948 г., с. 160

[3] Каган В. Ф. По поводу интуиции в новой геометрии // Вестник опытной физики и элементарной математики (1912 г., выпуск № 569), с. 122

[4] Каган В. Ф. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии // Вестник опытной физики и элементарной математики (1904 г., выпуск № 383), с. 247

[5] Каган В. Ф. Введение в учение об основаниях геометрии // Вестник опытной физики и элементарной математики, (1916 г., выпуск № 662), с.36-37

[6] Каган В. Ф. Задача обоснования геометрии в современной постановке. Одесса, Типография Акционерного Южно-русского общества Печатного дела, 1908, с. 6

[7] Каган В. Ф. Этюды по основаниям геометрии // Вестник опытной физики и элементарной математики, (1901 г., выпуск № 308), с. 174

[8] Каган В. Ф. К статье Н. Извольского “Интуиция в работе Гильберта» // Вестник опытной физики и элементарной математики, с. 323

Зайцев Евгений Алексеевич, *к.ф.-м. н., доцент, Институт истории естествознания и техники РАН (Москва)*

КВАЛИТАТИВНЫЙ ХАРАКТЕР СРЕДНЕВЕКОВОЙ ТЕОРИИ КОНФИГУРАЦИИ КАЧЕСТВ[1]

Теория конфигурации качеств Орема (XIV в.) является одним из наиболее оригинальных достижений средневековой науки. Историки, однако, расходятся во мнении, следует ли считать эту теорию результатом развития средневековых представлений, или же в ней уже содержатся идеи, составившие основу научной революции XVII в. Для решения этого вопроса обратимся к анализу онтологической подоплеки концепции Орема.

В теории конфигурации качеств распространенные в пространстве качества (теплота, белизна и пр.) представляются в виде геометрических фигур – двумерных или трехмерных. Основанием этих фигур являются отрезок или часть плоскости, по которым распространено качество, при этом само качество изображается в каждой точке основания в виде перпендикулярного к нему отрезка. В теории нет единиц измерения, поэтому точная

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 12-03-00340а)

количественная оценка построенных фигур-качеств невозможна. Орем и не стремится к этому. Его цель состоит в представлении качеств глобально, посредством фигур, взятых целиком. Будучи эквивалентным простому словесному описанию, представление в виде фигуры имеет по Орему лишь то преимущество, что позволяет упростить анализ качества, сделав его наглядным [1, p.190-4]. Изображение качества посредством фигуры дает возможность «увидеть» его как некоторое особое «измерение» вещи, отличное от ее измерений в пространстве. Недоступное зрению качество становится тем самым доступным мысли. Сказанное не означает, что фигура, представляющая качество, является только «воображаемой», т.е. принадлежит исключительно сфере познающей мысли, как может показаться из-за использования при изображения качества в виде отрезка (ординаты фигуры) глагола imaginare («представлять»). Тот же глагол Орем использует и в отношении линии, которая «представляет» на рисунке обычное протяжение тела, обладающего качеством, в пространстве (абсцисса фигуры).

Основной тезис доклада состоит в том, что Орем, строго говоря, не изображает или представляет качества в виде подходящей геометрической фигуры, а отождествляет качества с этими фигурами. Подобно античным стоикам Орем признает телесный характер качеств; конфигурации же, отвечающие этим качествам, являются, по сути, конфигурациями соответствующих тел. Отождествление качеств и их конфигураций позволяет объяснить действие качеств, которое понимается как тактильное действие обычных физических тел. Так, Орем ссылается на широко распространенное в Античности мнение, что ощущение ожога есть следствие уколов атомами огня, имеющими форму пирамид. Отсюда и следуют основные выводы теории Орема. Так, отождествление качеств с геометрическими конфигурациями позволяет утверждать, что из двух «равных» качеств, первое из которых является униформным (одинаково распространенным во всех частях тела), а второе – дифформным (различным в разных частях тела), скажем, тем же пирамидальным, последнее качество, при прочих равных условиях, будет оказывать более активное воздействие [1, p. 226-230]. При помощи конфигураций можно также объяснить, почему при определенных условиях менее интенсивное качество действует сильнее, нежели более интенсивное. По Орему различие в действиях качеств проистекает из различия их конфигураций.

Орем распространяет теорию конфигурации качеств и на медицину – область, которая послужила в Средние века одним из источников общей теорий квантификации качеств. С ее помощью он описывает действие составных лекарств (complexiones или mixta), активные качества которых состоят из сочетаний двух пар противоположных свойств – холодного и теплого, влажного и сухого, находящихся в различных соотношениях. Составные качества имеют свои конфигурации, которые определяются по аналогии с тем, как геометрические формы растений, животных и т.д. определяются их субстанциальной формой [1, p.232-34].

Представление активных качеств посредством фигур Орем использует для объяснения самых разных природных феноменов: излечение болезней посредством наложения трав или минералов, возникновение симпатий и антипатий (в широком смысле), появление приятного ощущения или, наоборот, отвращения по отношению к тому или иному вкусу или запаху. Конфигурацией качеств объясняется также действие «дурного глаза» и прочих оккультных феноменов, которые получают, таким образом, рациональное объяснение, служащее оружием в борьбе с суевериями (ars magica).

С точки зрения аристотелевского гилеморфизма, остававшегося парадигмальным на протяжении всего средневековья, концепция конфигурации качеств говорит, в сущности, о том, что обладающая теми или иными качествами вещь, имеет особые формы (существующие наряду с ее обычной субстанциальной формой), суть которых выражается посредством геометрических фигур. В этом отношении онтологические предпосылки концепции Орема сходны до некоторой степени с основаниями науки Нового времени, творцы которой признавали за материей способность к обладанию своей собственной внутренней формой, отличной от формы субстанциальной (Галилей). Различие же состоит в том, что в науке Нового времени постулируется также возможность точного количественного анализа этой внутренней формы. В построениях же Орема речь идет исключительно о качественной стороне дела, а именно, о том, большее или меньшее воздействие оказывает то или иное качество в зависимости от своей геометрической формы. Таким образом, заменяя качество на геометрическую форму, Орем не выходит за рамки аристотелевского квалитативизма, скептическое отношение которого к возможности количественного анализа физических феноменов служило основным препятствием для развития математического естествознания.

Отказ средневековых авторов, включая Орема, от количественно анализа качеств, теоретическая возможность которого появляется с использованием фигур, объясняется также пессимизмом схоластики в отношении познания бесконечного. Поскольку мир, как учил Аристотель, непрерывен, то для его описания необходимы инфинитезимальные, т.е. опирающиеся на понятие бесконечности, средства. Но в способности овладения такими средствами схоластика отказывала тварному рассудку, считая, что таковое доступно только Богу. Так, Уильям из Олнвика (XIV в.) писал в этой связи: «…совершенной мерой непрерывного количества может быть только неделимое непрерывного количества, являющееся точкой; никакое количество не может быть точно измерено без знания о том, сколько неделимых точек оно содержит. А поскольку их [число] бесконечно, то знать [его] тварь не может, но только Бог, который все расположил числом, весом и мерой» [2, S. 399-400].

Литература

1. Nicole Oresme. De configurationibus qualitatum et motuum // Clagett M. Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. Madison and London, 1968: 158-435.

2. Maier A. Metaphysische Hintergründe der spätscholastischen Naturphilosophie. Roma, 1955.

Лютер Ирина Олеговна, *к.ф.-м.н., Институт истории естествознания и техники имени С.И.Вавилова РАН (Москва)*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ В СРЕДНЕВЕКОВОЙ АРАБСКОЙ ТРАДИЦИИ[2]

В самом начале исследования ранее не изучавшегося трактата Асир ад-Дина ал-Абхари (1200–1265) «Улучшение “Начал” Евклида» мое внимание привлекли формулировки нескольких определений, прежде всего определения прямой. Так, согласно ал-Абхари, линия прямая, если взятые (предположенные) на ней в любом количестве точки будут на одном уровне, то есть, как он поясняет, не будет часть из них выше, часть из них ниже.

Такая формулировка отличается не только от определения Евклида (прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней), но и от определений, представленных в наиболее популярных во времена ал-Абхари (и впоследствии) обработках «Начал» его современников Насир ад-Дина ат-Туси (1201–1274) и Псевдо-Туси. У ат-Туси прямая линия – та, расположение которой таково, что любые ее точки противопоставляются друг другу (или находятся друг напротив друга). Псевдо-Туси более лаконичен: линия прямая, если ее точки противопоставляются друг другу.

Похожий лексический набор присутствует и в определении прямой из более ранней редакции «Начал» Ибн Сины (Авиценны, 980–1037), но любая точка прямой здесь противопоставляется двум ее конечным точкам. Это, вполне возможно, свидетельствует о знакомстве Ибн Сины (например, через арабского Аристотеля) с определением прямой Платона в «Пармениде»: прямая – то, центр чего находится перед ее краями (по сути напротив). Весьма вероятно, что появление «противопоставления точек» в арабских редакциях определения прямой Евклида – также результат восприятия определения Платона.

[2] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-06-00053а)

Таким образом, ал-Абхари в своем определении прямой, казалось бы, отходит от сложившейся к XIII в. традиции определять эту линию с помощью «противопоставления точек». Однако это не совсем так.

Такое представление прямой, по-видимому, заимствовано им из «Комментария к введениям Евклида» Ибн ал-Хайсама (965–1039/40). Точнее, из пояснений ал-Хайсама к определению прямой с помощью как раз «противопоставления точек», подобному определениям ат-Туси и Псевдо-Туси: это означает, что линия прямая, если взятые на ней в любом количестве точки будут на одном уровне, то есть не будет часть из них выше, часть из них ниже, и не будет часть из них правей, часть из них левей, а будет положение их всех одним положением. Заметим, что ранее изучался лишь фрагмент этого сочинения ал-Хайсама с его доказательством параллельного постулата.

Ибн ал-Хайсам приводит еще несколько так называемых определений прямой. Первое – это определение прямой как кратчайшей линии, проведенной между любыми двумя точками, которое он поясняет (без указания автора и источника) с помощью введенного Архимедом в трактате «О шаре и цилиндре» допущения, в котором утверждается, что из всех линий, имеющих одни и те же концы, прямая будет наименьшей. Заметим, что ат-Туси в своих комментариях к этому сочинению Архимеда усомнился в том, что это допущение (по сути, постулат) не нуждается в обосновании, и представил свою попытку его доказать.

Второе – это определение прямой как линии, части которой совмещаются друг с другом для всех их местоположений. Это означает, комментирует ал-Хайсам, что линия будет прямой, если, во-первых, выделенная из нее часть, наложенная на «остаток» линии, совместится с ним и, во-вторых, если эта часть совместится с «остатком» после того, как ее еще и «перевернут». Он отмечает, что второе условие не выполняется для дугообразной линии: любая ее часть и «остаток» совпадают, если только они выпуклы или вогнуты в одну сторону; поэтому, если «перевернуть» такую часть, а в этом случае ее выпуклость будет направлена, противоположно выпуклости остатка линии, то она не совместится с остатком линии. Другими словами, прямая рассматривается как гомеомеричная (подобочастная) линия – такая, у которой по Аристотелю любые части подобны по своим свойствам друг другу и целому (однородны), следовательно, могут быть совмещены.

Третье определение прямой, приведенное ал-Хайсамом: это – линия, положение которой не изменится, если зафиксировать две ее точки или два конца и вращать ее вокруг «этого ряда точек»; тогда как любая дугообразная линия в подобной ситуации изменит свое положение.

Ибн ал-Хайсам, однако, не оригинален. Все представленные им определения и трактовки прямой в несколько иной форме упоминаются Проклом (V в.) в комментарии к первой книге «Начал»: и что ни одна часть прямой не лежит ни на более низком, ни на более высоком уровне; и что все части прямой совмещаются подобным образом со всеми другими частями; и что это есть линия, которая остается неподвижной, если ее концы фиксированы.

Еще один, но более вероятный источник рассуждений Ибн ал-Хайсама – это комментарии к определениям Симпликия (VI в.), приведенные Абу-л-‘Аббасом ан-Найризи (ум. ок.922) в своих комментариях к «Началам» Евклида. Симпликий обсуждает и все определения, приведенные ал-Хайсамом, и определение прямой Платона, представленное в виде: прямая – та, середина которой скрывает ее концы. Здесь, как объясняет Симпликий, подразумевается следующее: если поместить глаз в один из концов прямой и попытаться увидеть другой конец, то середина прямой будет препятствовать видению другого конца. Он утверждает, что это происходит потому, что взгляд (зрительный луч по Евклиду) распространяется прямолинейно, а это (то есть этот оптический постулат) и определяет прямолинейность данной линии и то, что середина ее скрывает концы. Очевидно, что введение оптики в геометрию – не единственный критический элемент данного утверждения.

В определении прямой как гомеомеричной линии Симпликий, в отличие от ал-Хайсама, обходится без констатации двух условий, определяющих это свойство прямой, утверждая, что прямая – та, все части которой совмещаются друг с другом «со всех сторон». Заметим, что именно так определял прямую Герон Алесандрийский (I в.). Симпликий обосновывает это тем, что для частей окружности, если их накладывать друг на друга, совмещение с любой стороны невозможно, поскольку две выпуклые части, налагаемые друг на друга, лишь касаются в точке, как две окружности, а две вогнутые части, налагаемые друг на друга, только соприкасаются в двух точках. К Герону восходят, по-видимому, и рассуждения Симпликия по поводу свойства прямой линии быть неподвижно, если ее концы неподвижны, поскольку оба ассоциируют концы с полюсами, а прямую с осью вращения.

Возвращаясь к ал-Абхари, обратим внимание еще и на то, что его определение прямой – это по существу предложение XI.1 «Начал» Евклида: невозможно чтобы одна прямая линия находилась частью в одной плоскости, частью в плоскости, расположенной выше (формулировка Псевдо-Туси). Вызывает недоумение, что ал-Абхари, хорошо зная это предложение (в его формулировке: любая прямая находится в одной плоскости), проигнорировал факт совпадения определения и предложения, тем самым изменив поставленной в названии своего сочинения цели – улучшить аксиоматико-дедуктивное построение Евклида.

Султанова Линера Байраковна, *д.ф.н., профессор,*
Башкирский государственный университет (Уфа)

МЕТОДОЛОГИЯ НЕЯВНОГО ЗНАНИЯ В КОНТЕКСТЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Что проблема рациональной реконструкции истории развития научного знания существенна для историков и философов любой науки, обнаружил еще И. Лакатос [1]. И он же впервые подметил тесную связь истории науки с философией науки. В самом деле, исторические факты развития любой научной дисциплины имеют значение только при условии их интерпретации в свете какой-либо философской гипотезы, выражающей основную закономерность развития этой дисциплины. В выдвижении и развитии такой философской гипотезы, по сути, и заключается основная задача рациональной реконструкции истории отдельных научных дисциплин. При этом исторические факты должны «вписываться» в такую концепцию. Опорный философский тезис при проведении исторических исследований не является необходимым разве только в рамках методологии кейс стадис, применение которой не оправдано, если мы хотим не просто описать некий уникальный факт в развитии науки, но стремимся обнаружить какие-либо закономерности в её развитии. А именно это и является важнейшей целью философии науки. Вообще нужно учитывать, что любая новая концепция развития науки увеличивает наше знание о природе науки и делает более объемным наше понимание ее специфики.

Особый статус математики в системе научного знания придает особое значение и исследованиям в области истории математики, поэтому, как представляется, всегда актуален поиск опорной философской гипотезы для построения концепции развития математики. Отметим, что в этой связи методология неявного знания, основывающаяся на понятии неявного знания в историко-философских исследованиях, уже доказала свою эффективность [2; 4]. Важно, что эта методология может применяться в различных гносеологических ситуациях: во-первых, при исследовании истории формирования новых математических методов, когда фактически речь идёт о встраивании нового математического знания в уже существующий математической контекст, и, во-вторых, когда речь идёт об уточнении формулировки математической теоремы как уже общепризнанного математического знания.

Думается, что в рамках методологии неявного знания, при исследовании истории формирования новых математических методов, наиболее эффективна концепция исторической эволюции нового математического метода от неявной эвристики к формальной теории [3; с. 134-159]. При этом будущий новый метод рождается в виде некоторой неявной эвристики, т. е. фактически выполняет вспомогательную роль при решении какой-либо совершенно новой, нестандартной задачи, но в случае своей высокой эффективности, может быть востребован и в дальнейшем. Данная неявная эвристика со временем может трансформироваться в явный математический метод, который применяется уже как обоснованное математическое знание [3; с. 134-159]. Эволюционный характер указанного процесса заключается в постепенной, но неуклонной экспликации неявно-интуитивного элемента данной эвристики. Формирующийся таким образом математический метод становится все более алгоритмом и все менее эвристикой. Наиболее интересным примером в этом смысле, по всей видимости, является история формирования математического метода интерпретаций, получившего при формализации название аксиоматического метода [3; с. 142-152].

Гносеологическая ситуация уточнения формулировки математической теоремы под воздействием обнаружения контрпримеров описана ещё И.Лакатосом при исследовании истории уточнения формулировки теоремы Эйлера как утверждения, связывающего число сторон, вершин и граней правильного многогранника [1]. Поскольку такие контрпримеры брались из опыта, а не выявлялись дедуктивным образом, И.Лакатос получил, вроде бы, обоснованный повод для разворачивания идеи математического квазиэмпиризма и пересмотра дедуктивного статуса математики. Однако исследования в области истории и философии математики, осуществлённые в нашей стране во второй половине XX века продемонстрировали, что для уточнения формулировки математических теорем на основе исторической экспликации скрытых лемм в математических доказательствах, в принципе, никаких контрпримеров не нужно – достаточно парадигмального изменения гносеологической установки математического познания с творческой на критическую [2; с. 172, 195]. Это стало возможным в математике примерно в начале второй половины XIX в., после так называемой «революции строгости» математика Вейерштрасса, описанной ещё И.Лакатосом [1]. Как представляется, это означает, что методологии неявного знания, по крайней мере, не уступает методологии контрпримеров, хотя понятно, что эти методологии взаимосвязаны - действительно, контрпримеры способствуют экспликации скрытых лемм. Поэтому, как представляется, никакой особой почвы для расцвета математического квазиэмпиризма (даже), всё-таки, не существует, а методология неявного знания, скорее всего, должна рассматриваться как основная базовая философская предпосылка для проведения рациональной реконструкции истории математики.

При этом математика понимается как дедуктивная наука, исторически формирующаяся посредством аксиоматического метода, когда из очевидно истинных аксиом, принимаемых без доказательства, возможно, даже по конвенции, на основе логики выводятся другие истинные теоретические утверждения – теоремы. Именно такова парадигма современной математики, как в системе естественных наук, так и в системе культуры. Как известно, такая парадигма математического познания была задана в свое время еще Р.Декартом и тогда же стала основой для классического идеала научного знания. Представляется, что история формирования многих важнейших математических утверждений может быть представлена наиболее адекватно именно на основе методологии неявного знания. Например, именно таким образом можно интерпретировать историю обоснования основной теоремы алгебры [4; с. 109-110]. Такой статус математики обеспечивает герметичность математического доказательства [4; с. 103-104], что делает невозможным опровержение скрытых лемм после их экспликации. Эксплицированные скрытые леммы в итоге всегда «встраиваются» в существующий математический контекст. Контрпримеры только обнаруживают такие леммы, и уточняют таким образом формулировки математических теорем, но не более того. Поэтому ни контрпримеры, ни скрытые леммы, вопреки утверждению некоторых исследователей, никак не могут рассматриваться в качестве «потенциальных фальсификаторов» попперовского толка [5; с. 223-256], а какие-либо «неявные гипотезы» в математике [5; с. 226], в принципе, невозможны.

Обобщая результаты многолетних исследований, проводимых с применением методологии неявного знания, можно заключить, что именно такой методологический подход способствует наилучшему раскрытию природы современной математики, принимаемой именно с дедуктивным статусом. Математические методы при этом можно рассматривать как неявные эвристики, которые в результате последующего интенсивного применения становятся строгими математическими методами, алгоритмами. В процессе становления строгих методов из неявных эвристик происходит постепенное, но неуклонное вытеснение из них неявно-интуитивного элемента, что влечет за собой их встраивание в математический научный контекст, соответствующий определенному историческому периоду развития математики. Понятно, что, если рассматривать математику как-то иначе, т.е. на основе какой-либо иной, антифундаменталистской, парадигмы, то методология неявного знания может оказаться не столь плодотворной.

Литература

1. Лакатос И. Доказательства и опровержения. М.: Наука, 1967. 152 с.

2. Султанова Л.Б. Неявное знание в развитии математики. Уфа: РИЦ БашГУ, 2009. 260 с.

3. Султанова Л.Б. Проблема неявного знания в науке. Уфа: Изд-во УГНТУ, 184 с.

4.Султанова Л.Б. Роль неявных предпосылок в историческом обосновании математического знания // Вопросы философии. № 4, 2004. С. 102-114.

5. Лолли Г. Философия математики: наследие двадцатого столетия. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И.Лобачевского, 2012. С. 215-234.

СЕКЦИЯ 5

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Березин Сергей Александрович, *к.ф.-м.н., доцент,*
Сибирский институт управления – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы (Новосибирск)

ЗАЧЕМ УЧИТЬ ГУМАНИТАРИЕВ МАТЕМАТИКЕ

По одной из исторических версий тезис «математика – язык науки» возник на основе ворчливого замечания Гиббса: «Математика – тоже язык!», вызванного необходимостью возразить преподавателям древних языков (латыни и греческого), требовавших на ученом совете университета увеличения часов преподавания их предметов (за счет других дисциплин, разумеется!). Развитие естественных наук (физики, прежде всего) подтвердило эффективность математического языка (точнее - жаргона математических моделей) с одной стороны, но с другой – вызвало к жизни моду на употребление «в обиходе» терминов и языковых конструкций, имеющих математическое происхождение, но трактуемых, как правило, недостаточно точно, а то и «с точностью наоборот». Это относится, прежде всего, к ошибкам в отношении применения формальной логики, оценки вероятностей, статистической значимости, обработки экспертной информации и т.п.

Последовавший позднее поток «журналистских интерпретаций» реальных процессов и явлений, в которых ярлык заменял понятие, а зуд популяризации – понимание характерный, например, для так называемого «западного менеджмента» (правило Парето «20 на 80», «бостонская матрица» и пр.), поставил математическую терминологию в один ряд с астрологической, нумерологической, эзотерической и т.п.

Разумеется, математическое знание также является псевдо-знанием, поскольку корректное использование математической модели предполагает выполнение предпосылок, зачастую весьма строгих и обременительных, однако, задача философов – математиков тем и трудна и ответственна, что: а) всякий раз, когда применяется то или иное описание реальной ситуации с привлечением математики, необходимо четко и недвусмысленно оговаривать условия применения, а главное – относительность трактовки выводимых следствий; б) при подготовке гуманитариев (юристов, экономистов, менеджеров, журналистов и пр.) преподавать не абстрактные разделы – мат. логика, алгебра, мат. анализ, геометрия, теория вероятностей и т.д., а конкретные «интеллектуальные техники», основанные, естественно, на указанных выше разделах, но облеченные в специальную «удобоваримую» оболочку.

Указанная выше в пункте «б)» специфика подготовки сделает востребованной специальным образом подготовленного математика – прикладника настолько, что обеспечит работой профессионалов-математиков на всё обозримое будущее. Более того, размышляя о роли математика как ученого, приходишь к догадке о том, какова миссия математика как человека в этом мире.

Литература

Арнольд В.И. Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2008.

Беляцкий Н.П. Интеллектуальная техника менеджмента. – Мн.: Новое Знание, 2001.

Березин С.А. О стратификации понятия «математическая грамотность» // Тезисы Всероссийской Конференции по философии математики, Москва, МГУ, 2007 г.

The New York Times Book of Mathematics: More than 100 years writing by the numbers (ed. by Gina Kolata).- New York, STERLING, 2013.

Дорофеева Алла Владимировна, *к.ф.-м.н., доцент,*
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

МАТЕМАТИКА НА ФИЛОСОФСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ

Математика играет огромную роль в современной жизни и ее преподавание студентам университетов совершенно необходимо. Однако для каждой специальности нужна своя программа. На философском факультете речь, прежде всего, идет о предмете математики.

Это наука о математических структурах (множествах, между элементами которых определены некоторые отношения). Ее фундаментом является теория множеств. Студенты философского факультета изучают основные типы математических структур: структуры порядка, алгебраические структуры и топологические структуры.

Фундаментальным понятием математики является «функция». На основе нужд практики сложился класс элементарных функций, который изучается сейчас в средней школе.

Первоначально изучали только числовые функции. Но это определение оказалось недостаточно общим. Так, в механике возникла задача о нахождении кривой линии, связывающей точки A и B, по которой материальная точка попадает из A в B в кратчайшее время. Эта задача привела к созданию вариационного исчисления, функционального анализа, теории оптимального управления, которая является математическим аппаратом космонавтики. Этим примером мы хотели показать, что в преподавании математики на философском факультете должна играть роль история науки.

Фундаментальным понятием математики является «число». История науки позволяет показать, как в математике были изучены натуральные, целые, рациональные, действительные числа и их обобщения: комплексные числа и кватернионы. На базе кватернионов в физику вошли векторы, в геометрию четырехмерные пространства, а затем пространства любой размерности. Геометрия – мощный инструмент познания окружающего нас физического пространства.

В программе для философского факультета нельзя обойти тему «математический анализ». На ней основываются современные естествознание и техника. С помощью математического анализа сформулированы общие законы астрономии, механики, физики и других наук. Этот раздел является основой математического образования.

В течение 17-19 столетий математики считали, что всякое непрерывное движение осуществляется с некоторой скоростью. Следовательно, из непрерывности функции следует существование производной. В 1875 г. К Вейерштрасс построил функцию, непрерывную при любом x, но ни одной точке не имеющей производной. Это подорвало доверие к интуиции. А. Пуанкаре писал: «Как интуиция могла обмануть нас до такой степени?» Отсюда вывод – в математике необходимы строгие доказательства.

До того как я пришла преподавать математику на философский факультет, на нем работала кафедра математического анализа. Не было ни математических пособий, ни учебника, преподавался только «математический анализ». Я начала составлять новую программу, и, прежде всего, ввела изучение теории бесконечных множеств. В 1971 г. в издательстве Московского университета мною был опубликован «Учебник по высшей математике для философских факультетов университетов». Однако в нем не было теории вероятностей. В 2003 г. этот раздел появился в моей книге «Высшая математика. Гуманитарные специальности» издательства Дрофа. Она неоднократно переиздавалась. В 2012 г. в издательстве Юрайт вышло очередное издание.

В 2009 г. и в 2013 г. мною был опубликован сборник задач «Высшая математика для гуманитарных направлений».

Заключительный раздел курса высшей математики «Теория бесконечных множеств». Она была разработана в 70-80-х гг. XIX в. Г. Кантором и вскоре получила всеобщее признание. На рубеже XIX-XX вв. в теории множеств были обнаружены парадоксы. Первый опубликовал К. Бурали-Форти в 1897 г., а затем в 1899 г. Г. Кантор и в 1905 г. Б. Рассел обнаружили противоречия, связанные с понятием «множества всех множеств». Парадоксы угрожали классическим разделам математики. В связи с этим появилась необходимость в критическом пересмотре оснований теории множеств.

Было выявлено различение потенциальной и актуальной бесконечности. Представители ряда научных школ выступают против актуальной бесконечности. Однако именно она используется в классическом математическом анализе.

Многие ученые предлагают отказаться от закона исключительного третьего. Но это неизбежно приведет к перестройке всех областей математики.

Большинство ученых являются противниками столь радикального подхода. Они заботятся о сохранении того ценного, что накоплено в математике. Для этого в теорию множеств вносят ограничения, исключающие обнаруженные в ней парадоксы и в тоже время сохраняющие ту часть теории, которая необходима для построения классических разделов математики.

Среди различных направлений в работе по созданию более надежного фундамента теории множеств особенно плодотворным является аксиоматическое. В последние годы именно в этих условиях получены значительные результаты.

В теории множеств имеется общепризнанная система аксиом Цермело-Френкеля.

В 1940 г. К. Гедель доказал, что если к системе аксиом Цермело-Френкеля добавить континуум-гипотезу, то получится непротиворечивая система утверждений. В 1963 г. П. Коэн доказал, что если к системе аксиом Цермело-Френкеля добавить отрицание континуум гипотезы, то тоже получится непротиворечивая система утверждений. Таким образом, ни континуум-гипотезу, ни ее отрицание нельзя вывести из общепринятой системы аксиом теории множеств. Следовательно, можно построить две теории бесконечных множеств, подобно тому, как наряду с евклидовой можно построить неевклидову геометрию.

В заключение подчеркнем принципиальную особенность, которая отличает математику XIX в. от математики предыдущих столетий: создание электронных математических машин и их математического обеспечения.

На протяжении истории человечества математика три раза получала мощные импульсы от действительного мира. Впервые это произошло в древности. Занятия земледелием, строительством простейших сооружений, торговлей привели к созданию арифметики и геометрии. Второй импульс математики получила в XVII в. Потребности механики, оптики, техники, географии, связанные с необходимостью изучать движение, привели к понятиям производной и интеграла, к созданию математического анализа.

Третий мощный толчок математика испытала в середине XX столетия, когда были созданы первые ЭВМ, и возникла необходимость их программного обеспечения. В наши дни идет процесс бурного развития вычислительной техники. Но до аксиоматического построения этой области еще далеко – это проблема будущего развития науки.

Еровенко Валерий Александрович, *д.ф.-м.н., профессор, Белорусский государственный университет (Минск)*

НАДО ЛИ СТУДЕНТАМ-ФИЛОСОФАМ ИЗУЧАТЬ ИДЕОЛОГИЮ И МЕТОДОЛОГИЮ МАТЕМАТИКИ?

Зачем студенты-философы изучают математику в университете? Стандартные ответы подобные тому, что мы учим математику для развития логического мышления, сейчас уже мало кого удовлетворяют, поскольку само логическое мышление строго не определено. Никто не оспаривает важность формирования логической культуры, но до введения строгих понятий на конкретном педагогическом уровне дело так и не дошло. Истинная цель общего математического образования философов – это не только приобретение конкретных знаний, но, прежде всего, развитие нестандартного мышления направленного на знание, которое иногда называют философией математики. Хорошее университетское образование помогает человеку максимально раскрыть свои умственные способности. Однако так ли велик этот максимум в большинстве случаев?

Существенное отличие философии от математики состоит в том, что любой философский текст находится в окружении духовной атмосферы своего времени, называемой культурным контекстом. Жизненные реалии давно уже поставили под сомнение исключительность логических императивов в сфере познания, как единственного средства убедительности. У философов есть для этого все основания, так как им приходится спорить из-за каждого термина, потерявшего «реальный смысл», несмотря на объемность коннотаций определений, и договариваться о его значении, пытаясь преодолеть многозначность языка при расширении круга знаний. В связи с этим логик и философ математики В.А. Успенский замечает: «Однако образование состоит не только в расширении круга знаний.

В не меньшей степени оно предполагает расширение навыков мышления. Математик и гуманитарий обладают различными стилями мышления, и ознакомление с иным стилем обогащает и того и другого» [1, с. 24]. Например, студентам-философам полезно знать об особенностях аксиоматического метода, познакомиться со свойствами бесконечных множеств, иметь представление об уместности использования вероятностной терминологии в философских текстах.

Современная математика довольно сложная и трудная наука, даже философский анализ ее положений бывает весьма сложен, а многие методологические проблемы обоснования математики остаются недостаточно разработанными. Поэтому философия современной математики ограничивается философскими обобщениями и пересказом методов ее некоторых направлений. Соответствующие трудности обусловлены, прежде всего, тем, что понимание математики не может быть адекватно интерпретировано на основе имеющихся интуитивных представлений об этой фундаментальной науке. Идеология и методология математики существенно отличаются от эмпирического знания логикой своего развития. Философское мировоззрение можно и нужно рассматривать как логическое постулирование выводов, использующих логико-математический аппарат. Изучая основы высшей математики, студенты-философы имеют возможность убедиться в том, что можно считать основанием серьезной науки и надежным фундаментом для дальнейшего исследования, а также на аргументированном, убедительном и доступном материале понять, что такое строгая логика рассуждений.

Так, например, студенты-философы начинают преодолевать стереотипы своего математического мышления, когда узнают, что традиционная для многих присказка «очевидно как дважды два четыре» вовсе неочевидна, если говорить об этом с позиций полноценного университетского образования, так как это утверждение выводится из аксиом арифметики натуральных чисел Пеано, строго оформленной, лишь в конце XIX века. К сожалению, в конце XX века разрыв понимания между математиками и философами, в связи с все возрастающей сложностью математической аргументации, только увеличился. За последние триста лет наукой пройден огромный путь от незнания к знанию, от неполного знания к полному пониманию проблем. Столь же значительные изменения произошли за это время и в философии как одной из существенных составляющих современной культуры. Тем не менее, как с сожалением констатирует физик и философ синергетики Д.С. Чернавский: «До Гегеля известные философы, включая Канта, знали математику, более того, считать себя философом, не будучи знакомым с математикой, было просто неприлично. После Гегеля в философии появилось много представителей описательных наук, не знакомых с математикой, а в последнее время можно стать философом, вообще не будучи специалистом ни в каких других науках» [2, с. 230–231]. Это обстоятельство является вполне достаточным основанием для беспокойства за качество обучения студентов-философов и заинтересованного рассмотрения подходов к их обучению основам математики.

В обучении математике студентов-философов остро стоит проблема мотивации – сначала убедить студента-гуманитария в полезности математики. Древние греки впервые заговорили на языке, который понятен современному математику. В действительности каждый раздел математики пользуется своей символикой, поэтому язык математики следует признать понятием еще более трудно определенным, чем понятие «естественный язык». Ценность, пусть даже довольно скромной по современным университетским меркам математической подготовки студентов-философов заключается в том, что она способствует стимулированию развития навыков самостоятельного мышления, что делает нашу рациональную жизнь разумнее и лучше. Язык, на котором мы общаемся с природой, это не только геометрия общеобразовательного уровня, а также строгий, абстрактный и независимый метод пространственно-временных отношений. В этой мысли есть соблазн отождествить современную математику с природой, хотя мир всегда такой, какой он есть и сотворен он не ради удобного математического формализма.

Именно в математике есть та логичность, последовательность и строгость, которая нужна для обсуждения общезначимых проблем. Поэтому, во-первых, так важна математика как основа самого основного языка – философского, на котором стремятся наукообразно говорить многие гуманитарии. А, во-вторых, математики стараются не позволять основным философским вопросам нарушать их душевный покой. Как сказал шведский математик Ларс Гординг: «Иногда тот или иной философ возражает против нашего способа понимания, но философы ставят под вопрос все, и можно не обращать внимания на то, что они говорят. У них никогда не бывает упорядоченного набора аксиом» [3, с. 216]. В философских науках, ориентированных на постижение человеческого духа и раскрытие тайных смыслов, приоритеты со строгого научного объяснения смещаются на понимание. Поэтому философские дефиниции должны не предварять философские объяснения, а завершать любой философский труд простотой, достоверностью и убедительностью внутреннего объяснения.

Литература

1. Успенский В.А. Апология математики. – СПб.: ТИД Амфора, 2011. – 554 с.

2. Чернавский Д.С. Синергетика и информация. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 288 с.

3. Гординг Л. Философский диалог: математика, жизнь, смерть // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12, Вып. 5. – С. 215–224.

Зайцев Евгений Алексеевич, *к.ф.-м. н., доцент, Институт истории естествознания и техники РАН (Москва)*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ОБРАЗ ЧИСЛА И ВЕЛИЧИНЫ: ОБ УЧЕБНОМ ПОСОБИИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ГУМАНИТАРИЕВ

В докладе будет описано учебное пособие для самостоятельной работы студентов-гуманитариев. Оно является дополнением к читавшемуся автором в течение многих лет лекционному курсу «Математика в мировой культуре». На лекциях, учитывая специфику аудитории и характер ее интересов (речь идет о «сугубых» гуманитариях – историках, филологах, искусствоведах, которым, скорее всего, не придется использовать математику в своей профессиональной деятельности), рассматривалось ограниченное число ключевых понятий математики, таких как величина и число, аксиоматический метод и дедуктивный вывод, пространство и бесконечность и т.д., которые изучались в историческом контексте своего возникновения и развития. Такой подход давал студентам представление об исторической обусловленности математического знания и, одновременно, указывал на возможность критического отношения к его конкретно-историческим формам. Однако опыт показал, что одного лекционного курса с традиционными докладами и рефератами по выбранным темам в качестве самостоятельной работы недостаточно для глубокого освоения материала. В этой связи возникла необходимость дополнить его пособием, содержащим специально подобранные задачи.

Выбор задач осуществлялся в соответствии со следующими критериями. Во-первых, задачи должны были отражать особенности стилей, складывавшихся на различных этапах развития математики. Во-вторых, их решения должны были основываться на визуализации изучаемых объектов (в западной педагогической практике это называется использованием «манипуляторов»). Первый критерий учитывал гуманитарные интересы аудитории; второй – позволял осуществить подбор задач, решение которых было доступно практически всем. В соответствие с этими критериями из многообразия исторических форм математического знания (к сожалению, недооцененного современной педагогикой) были выбраны два раздела древнегреческой математики, которые после методической обработки и составили основу пособия. Эти разделы, сформировавшиеся еще в классический период античной истории, носят условные названия «наглядная арифметика» и «наглядная или геометрическая алгебра». Обе дисциплины ведут свое начало от математических исследований ранних пифагорейцев. В отличие от теорий, созданных в эпоху эллинизма (аксиоматическая геометрия «Начал» Евклида, инфинитезимальные методы Архимеда и т.д.) в пифагорейской арифметике и «алгебре» не используются формальные идеализации и сложные логические выводы (например, рассуждение от противного). Все доказательства опираются на наглядное представление объектов, рассуждение о которых не выходит за рамки выводов, опирающихся на логику практических действий, в которой, в частности, отсутствует понятие логического отрицания. Иными словами, при решении задач используются исключительно предметные идеализации [1; 2; 3].

Пособие состоит из двух разделов. Первый раздел «Наглядная арифметика (учение о числах)» включает две главы, посвященные основам арифметики фигурных чисел и учению о четном и нечетном. В начале каждой из глав излагается теоретический и исторический материал, после чего следует список практических заданий различной сложности от совсем простых, решение которых доступно учащимся с любой подготовкой, до задач олимпиадного уровня. В рамках каждой темы приведена серия однотипных задач, отличающихся лишь коэффициентами или другими деталями, что дает преподавателю возможность составления индивидуальных домашних и контрольных работ.

Второй раздел «Наглядная алгебра (учение о величинах)» включает две главы, первая из которых посвящена основам геометрического подхода к величинам, а вторая – решению конкретных задач – доказательству тождеств и нахождению неизвестных величин из уравнений. В связи с трудностями, испытываемыми некоторыми студентами при освоении «геометрической алгебры», практические задания к этому разделу начинаются с теста, который должен помочь учащемуся понять существо излагаемых подходов на уровне практической интуиции. Этот тест может также использоваться преподавателем для выявления студентов, которым необходимы дополнительные занятия (консультации).

Заключительные параграфы теоретической части каждого из разделов носят исследовательский характер. Они посвящены обсуждению сложных, подчас не решенных на сегодняшний день вопросов. И, наконец, в приложениях приведен разбор некоторых задач и кратко описаны приемы их решения. Эти приложения дополняют и конкретизируют теоретическую часть; кроме того, они дают учащимся представление о том, как следует оформлять решение.

Особенностью данного пособия (рабочее название «Геометрический образ числа и величины») является то, что в нем практически не используются формализмы: при решении задач, которые в современной номенклатуре относятся к арифметике и алгебре, используются почти исключительно наглядные геометрические методы. Наша цель состояла в том, чтобы научить учащихся максимально использовать соображения качественного характера, возникающие в результате исследования геометрической формы объектов. Многолетний опыт преподавания студентам гуманитарных специальностей свидетельствует, что с помощью такого подхода можно не только преодолеть формальное (а порой и откровенно негативное) отношение этой категории учащихся к математике, но и по-настоящему заинтересовать их предметом.

Творческое освоение исторических типов математики имеет также и общекультурное значение. В начале XX столетия немецкий культуролог Освальд Шпенглер, известный своей исторической интуицией, высказал на первый взгляд неожиданное, но, с нашей точки зрения, глубоко верное суждение, что «стиль души проявляется в мире чисел». Эти слова были сказаны по поводу, как теперь принято говорить, «ментальностей», т.е. определяющих, но зачастую явно не формулируемых оснований культуры той или иной эпохи. Для нас это означает, что, знакомясь с особенностями той или иной исторической формы математического знания (а серьезное знакомство с ними невозможно без самостоятельного решения задач), учащийся тем самым приобщается к общекультурному стилю соответствующей эпохи.

Эти две цели – знакомство с конкретикой математических задач и приобщение к культуре – и определили содержание данного учебного пособия.

Литература

1. Зайцев Е.А. Предметные идеализации как основа преподавания математики // Математика в школе, 9, 2011: 65-70.

2. Зайцев Е.А. Представление о противоположностях и особенности доказательства в ранней пифагорейской математике // Историко-математические исследования. Вып. 13(48). М., 2009: 217-245. http://www.mathedu.ru/imi48.djvu.

3. Зайцев Е.А. Логико-философские основания и историческая реконструкция архаичного варианта античной теории отношений и пропорций // Доказательство. Труды Московского семинара по философии математики / ред. В.А. Бажанов, А.Н. Кричевец, В.А. Шапошников. М., 2013: 146-218.

Когаловский Сергей Рувимович, *к.ф.-м.н. профессор,*
Шуйский педагогический университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Моделированию, его формам, отношениям между исследуемыми объектами и их моделями в математической деятельности присущ особый характер, отвечающий ее природе. В процессах создания работоспособных моделей исследуемых систем, моделей самих способов математической деятельности, во множестве играемых ими ролей, в характере взаимодействий моделей с их прообразами, в используемом строительном материале увязываются все ведущие направления и формы математической деятельности, все участвующие в ней психологические механизмы.

В учебной деятельности фундаментальные математические понятия выступают как развивающиеся модели ее первомеханизмов и как носители множества познавательно-преобразующих функций, в частности, таких, как быть средствами ориентировки и мета-ориентировки; быть средствами системной организации знаний; быть носителями надпредметных знаний и их продуктивных взаимодействий с предметными знаниями, а значит, быть и стратегическими и тактическими орудиями математической деятельности; средствами развития дальновидения и дальнодействия мышления; быть средствами общего интеллектуального развития, а значит, средствами освоения общих форм и способов деятельности (А.В.Боровских и Н.Х.Розов), и, конечно же, быть средствами обоснования продуктов математической деятельности.

Важный вид моделирования, несущий немалые возможности для развития креативности мышления учащихся, состоит в том, что постановка задачи, рассматриваемая в одном контексте, моделируется ее постановкой, рассматриваемой в другом, далеком от него контексте.

Феномены культуры характеризуются полигенетичностью и полифункциональностью (Ю.М. Лотман). Их освоение требует погружения в разные контексты. В особой степени это относится к фундаментальным математическим понятиям, к освоению их как продуктивных моделей развивающихся протопонятий. Важным механизмом их освоения является деконтекстуализация, приводящая к формированию предельно широкого, «трансцендентального» контекста (а посредством этого к поликонтекстуализации), погружение в который является одним из ведущих механизмов математической деятельности.

Модель в бытующем понимании – это «система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает новую информацию об этом объекте» (В.А. Штофф). Однако строгие понятия предела, непрерывности, касательной и т.д. являются моделями соответствующих протопонятий в естественном смысле, но не в бытующем смысле: их использование направлено не на получение новой информации об этих протопонятиях, а на преображение поисково-исследовательской деятельности.

Фундаментальные математические понятия – это, прежде всего, модели представлений о способах мыследействий, являющихся их истоками, их прототипами. Так как эти понятия не «адекватны» своим прототипам, необходимы процессы «вживания» в них, организуемые так, чтобы представления, прото-понятия, способы действий, послужившие их прототипами, не подавлялись, а развивались посредством их взаимодействий с этими понятиями (как их моделями). Процессы «вживания» в эти понятия, процессы овладения ими ведут к обретению ими «онтологического» статуса, к тому, что модели и их прототипы меняются ролями.

Осуществление процессов восхождения от интуитивных представлений, от протопонятий к таким строгим понятиям, процессов восхождения к аксиоматическим системам и их освоения, постижение логики таких процессов ведет учащихся к осознанию места и роли моделирования в математической деятельности, обогащает их метакогнитивный опыт. В отличие от моделей, строящихся как решения прикладных задач, такие понятия выступают не как средства исследования этих протопонятий, а как цели процессов формирования таких орудий математической деятельности, которые несут ее преображения. Процессы их формирования становятся образцами=моделями стратегий поисково-исследовательской деятельности. Они способствуют осознанию того, что фундаментальные математические понятия, являющиеся продуктами многоступенных абстрагирований-моделирований, «удаляющих» от «вещной» реальности, посредством таких «удалений» обретают качества носителей эффективных методов исследования реальности. Они способствуют осознанию того, что движение от протопонятий к строгим фундаментальным понятиям – это движение от неразвитого идеального к развитому идеальному, обретшему потенцию далеко идущего развития.

Моделирование, используемое в решении многих математических задач, направляется на схватывание структуры исследуемого объекта как программы его построения. Использование знаковой формы, представляющей эту структуру, несет преображение подхода к решению задачи, не просто тем, что эта форма используется как модель исследуемого объекта, но тем, что она становится мета-программой его построения, в том смысле, что она становится носителем множества разных программ построения этого объекта (и других, не только «изоморфных» ему объектов) и тем открывает возможность сопоставления таких программ под углом зрения их эффективности. Решение многих задач осуществляется так, что и находимые мета-программы сами далее выступают не как средства, напрямую ведущие к решению задачи, а как объекты рассмотрения, и только новые знаковые формы, находимые как (эффективные) модели этих мета-программ, то есть мета-мета-программы построения исходных объектов, открывают хорошо реализуемые возможности усмотрения эффективных программ построения этих объектов.

Эффективность знакового моделирования в математической деятельности рождается сложными взаимодействиями содержательного плана и знаково-символической деятельностью, сложными взаимодействиями между несколькими знаковыми системами и содержательным планом, между соответствующими им языками, непрерывно совершающимися взаимными переводами-моделированиями с одних из этих языков на другие.

Из всего сказанного становится еще более ясным то, насколько далек от истины расхожий тезис «математика – это логика» и насколько ближе к ней тезис «математика – это моделирование» (но, конечно, еще ближе к истине тезис ««математика – это моделирование и логика»).

Математическое моделирование в обыденном понимании – это обращение к отражающей абстракции в смысле Пиаже. В процессах формирования фундаментальных математических понятий доминирует рефлексирующая абстракция (в смысле Пиаже), продукты которой выступают как направленные на исследование не столько исследуемых объектов «самих по себе», сколько действий с ними и способов их исследования.

Моделирование в математической деятельности – это перевод рассмотрения из глубинного «внутреннего» плана во «внешний», в иные контексты, в иные плоскости, на иные уровни. И чем дальше отстоят «внутренний» и «внешний» планы, чем больше контекстов-переводов, тем большую продуктивность это несет. Такие переводы осуществимы с помощью феноменологической редукции, сопровождаемой погружениями в еще большие глубины «внутреннего» плана.

Кондратьева Галина Вячеславовна, *к.п.н., доцент,*
Московский государственный областной университет

К ВОПРОСУ О СТРОГОСТИ КУРСА ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ В КОНТЕКСТЕ ВРЕМЕНИ, КОТОРОЕ ОТВОДИТСЯ НА ИЗУЧЕНИЕ ПРЕДМЕТА

Говорить о строгости доказательств в курсе школьной математики можно, если имеется достаточный временной задел на изучение предмета. Иначе заявления о необходимости повышения строгости доказательств останутся лишь декларацией. Но время, отведённое на школьную учёбу в целом, ограничено. Поэтому принципиально важно задаться вопросом: а сколько уроков можно выделить на преподавание математики в школе? И затем уже переходить к обсуждению вопроса о необходимости доказательности всего курса.

Поставленный вопрос о времени на математику не так прост, как может показаться. Каждый учитель, методист, ученый имеет свои предметные предпочтения, и, естественно, ратует за необходимость увеличения времени на подготовку по «своему» предмету. Поэтому обоснованный ответ на поставленный вопрос предполагает не только учет рекомендаций специалистов, но и изучение опыта отечественной школы. Конечно, построение исторических параллелей не должно превращаться в простое копирование старинных образцов. Более того, аргументы типа «это хорошо, потому что 50 (100 и т.д.) лет назад это было эффективным» не вполне правомерны. Понимая ограниченность исторической аналогии, мы, тем не менее, не должны исключать ее из своего исследовательского арсенала.

Общеизвестно, что в советской школе математике уделялось большое внимание.

Таблица 1

Время на изучение математики в советской школе

Годы	1920	1934	1946	1955	1959	1966	1980
% уроков математики к общему числу уроков	17	19	22	20	18	21	20,5

Впрочем, первые годы после революции трудно считать показательными: речь шла о сломе старой школы и строительстве новой. Последовавшие затем в 1920-х гг. эксперименты с комплексами привели к отказу от предметного обучения и растворению предмета математики в комплексных темах. Но данный опыт не получил положительных результатов, и в результате в начале 1930-х пришлось вернуться к предметному обучению. Именно тогда и возникла система под название «советская школа». Математика здесь преподавалась по учебникам А.П.Киселева. Данные книги, создававшиеся еще в конце XIX в. как учебники для систематических курсов гимназий, делали отдельные отступления от строгости в пользу доступности. В дальнейшем планы советской школы пересматривались, уточнялись, программы менялись, вносились значительные изменения для повышения (понижения) теоретического уровня. Но время на математику не опускалось ниже 18% от общего числа уроков. Однако советская школа была единой и трудовой, при пониженной гуманитарной составляющей школьного образования.

В современной же школе, напротив, реализуются идеи профильного обучения, активно проводится линия гуманитаризации образования, и поэтому здесь может оказаться более востребованным опыт дореволюционной школы. В царской России существовали различные типы средних учебных заведений, каждое из которых осуществляло подготовку в рамках выделенного направления. Именно в это время система образования носила выраженный сословный характер, предполагающий разное образование для представителей различных сословий.

Таблица 2

Время на обучение математике в дореволюционной школе

Название учебного заведения	Число лет обучения	Год введения	% уроков математики к общему числу уроков
Классические гимназии	7	1864	12
	9	1871	14
	9	1890	14
Реальные училища/гимназии	7	1864	15
	7 (осн. отд)	1872	15

	6 (комм. отд)		12
Реальные училища	8 (осн. отд)	1895	16
	7 (комм. отд)		16
Военные гимназии	7	1866	21
	7	1882	19
Кадетские корпуса	7	1889	19
Женские гимназии ведомства императрицы Марии	7		11
Женские гимназии ведомства Министерства	7	1870	14
Институты	7		12

Классические гимназии ставили целью подготовку юношества к занятиям науками. Курс математики в гимназиях включал арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию. При этом принципиально было важно, чтобы учащиеся изучали математику как дедуктивную, доказательную науку. Реальные училища предназначались для подготовки людей «практического дела»: инженеров, промышленников, банкиров и т.д. Здесь курс математики должен был иметь большую практическую направленность. Кадетские корпуса готовили будущих кадровых военных. Здесь был самый обширный курс математики среди средних учебных заведений, включавший, например, начала аналитической геометрии. Программы курса математики названных учебных учреждений предполагали достаточно строгое изложение материала. Стабильными гимназическими учебниками были издания А.П.Киселева, А.Ю.Давидова.

Женские учебные заведения (11%-14% времени на математику) были ориентированы на подготовку хозяйки и матери.

Курс математики здесь был с упрощенными доказательствами, а то и вовсе без них (мариинские гимназии).

Сегодня время на математику варьируется в зависимости от школы. Федеральный компонент по желанию руководства может быть дополнен компонентом образовательного учреждения и элективными курсами. Если учитывать только федеральный компонент и базовый уровень в старших классах, то на математику отводится около 15% учебного времени, (подсчитывалось по приказу Минобразования РФ от 30.08.2010 № 889).

Таблица 3

Классы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Уроки математики	4	4	4	4	5	5	5	5	5	4	4

За счет компонента образовательного учреждения время на математику можно увеличить, например, на один час в неделю, тогда на математику получается меньше 19% учебного времени. Только будут ли добавлены часы? Конечно, в полной школе из-за профилей ситуация значительно более разноплановая, здесь рассмотрен только базовый вариант. Именно по данному базовому варианту процентная доля математики в современной школе оказалась сравнимой с положением математики в гимназии (14%) и в реальном училище (16%).

Данный факт в целом можно бы расценить как положительный: гимназии давали серьезную подготовку своим воспитанникам. Именно в гимназиях строгости построения курса придавалось особенное значение. Причем продолжительность обучения в современной школе на два года больше, т.е. и результаты должны быть лучше. Таким образом, казалось бы, можно сделать вывод о возможности построения достаточно строгого курса школьной математики. Но есть здесь спорные моменты.

Во–первых, гимназии, как и все средние учебные заведения России, были элитными заведениями. Принимали в них по конкурсу, а ежегодные экзамены отсеивали неуспевающих. Принципиально считалось, что гимназический курс доступен только для избранных. Современная школа не может позволить себе такой практики. Ведь ЕГЭ, ГИА по математике обязательны для учеников, а принимаем и учим всех. Задача учителя – подготовить к выпускным экзаменам весь класс. Это сделать проще и эффективнее, ведя «рецептурную математику», а не мучая учащихся бесполезными (с точки зрения части В) доказательствами. Во-вторых, программа современного курса математики просто несравнима с курсом гимназий, реальных училищ и кадетских корпусов. Так, программа гимназий ограничивалась арифметикой, алгеброй, геометрией (планиметрия, стереометрия), тригонометрией. Попытки расширить курс (К.Д.Краевич, М.Е.Ващенко-Захарченко и др.) не достигали успеха. Большинство педагогов прошлого считало, что лучше знать меньше, но основательно. Современный курс полной школы дополнен многими новыми темами (элементы математического анализа, теории вероятностей и др.). Например, в современной школе в 11-ом классе изучаются такие важные темы как

1. Алгебра и начала анализа: функции и их графики, предел, обратная функция, производная функции и ее применения, первообразная и интеграл, уравнения и неравенства,

2. Геометрия: метод координат в пространстве, цилиндр, конус, шар, объемы тел.

Даже беглое знакомство с материалом само по себе требует серьезного временного задела. А в гимназиях последний класс целиком отводился на повторение. Как возликовали бы современные педагоги, если бы весь выпускной класс они только готовили к ЕГЭ!

Таким образом, современный базовый курс школьной математики теоретически можно построить на любом (весьма высоком) уровне строгости, но реализовать его на практике в массовой школе вряд ли получится. Из-за недостатка времени, обширности материала и жестких рамок ЕГЭ востребована «рецептурная математика».

Перязев Николай Алексеевич, *д.ф.-м.н., профессор,*
Восточно-Сибирская государственная академия образования,
Иркутск

О СПЕЦИАЛИЗАЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Наивысшие результаты в творческой деятельности добиваются узкоспециализированные профессионалы. Причем специализация в научной сфере, в том числе в математике, проявляется уже на стадии высшего образования. Но как справедливо отмечается Г. Биркгофф «между математиками уже в детстве существуют значительные различия» [1]. Поэтому, при образовании узкого специалиста необходимо учитывать эти различия. Во многих случаях эти различия продиктованы разными типами математического мышления.

Как замечает А. Пуанкаре: «Если часто об одних говорят, что они аналитики, а других называют геометрами. То это не мешает тому, что первые остаются аналитиками, даже когда занимаются вопросами геометрии. В то время как другие являются геометрами, даже если занимаются чистым анализом. Сама природа их ума делает их «логиками» или «интуитивистами» и они не могут переродиться, когда принимаются за новую тему» [2].

Автором введена следующая типология личности, возникающая в связи с математической деятельностью [3]. Выделяются восемь личностных предпочтений, объединенных в четыре биполярные шкалы:

по мотивации:	**абстрактная – прикладная**
по восприятию идей:	**аналитическое – геометрическое**
по методу получения результатов:	**формальный – интуитивный**
по типу создаваемых моделей:	**дискретное – непрерывное**

В результате возникают 16 типов математического мышления. Напомним из [3] краткие характеристики личностных предпочтений каждой из четырех шкал.

Абстрактная мотивация: вызывают наибольший интерес задачи, возникающие из логики развития своего направления в математике, часто является постановщиком задач.

Прикладная мотивация: вызывают интерес задачи, возникающие в связи с приложениями своего направления к другим направлениям математики и других наук, часто решает задачи поставленные другими специалистами.

Аналитическое восприятие: геометрически заданные задачи переводит в аналитическую запись, даже если имеется геометрическое решение.

Геометрическое восприятие: аналитически заданные задачи представляются рисунками, схемами, даже тогда когда это не требуется для решения.

Формальный метод: в первую очередь проверяются стандартные методы решения, разрабатываются общие методы для решения задач, ведется построение теории, и ее планомерная разработка.

Интуитивный метод: решение задач в первую очередь ищется нестандартными методами, вызывает интерес решение трудных проблем, часто удаются хитрые контрпримеры.

Дискретные модели: при решении задач строятся дискретные модели и исследуются дискретными методами, хорошо развито алгоритмическое мышление.

Непрерывные модели: при решении задач строятся непрерывные модели и применяются непрерывные методы, часто даже для дискретных начальных данных.

При разработки электронных образовательных ресурсов, в отличие от традиционных учебников, имеются большие возможности учитывать индивидуальные особенности обучающихся. Но если уже существующие электронные учебные пособия благодаря гипертексту и мультимедиа улучшили возможности усвоения учебного материала, то по-прежнему остаются не использованными возможности связанные с индивидуализацией учебных материалов, их адаптацией к запросам конкретного пользователя.

При разработке личностно ориентированных электронных учебных материалов по математическим дисциплинам для студентов младших курсов университетов можно использовать определенную выше типологию математического мышления. При этом не целесообразно использовать традиционное тестирование, так как, во-первых, испытуемые не готовы к объективной оценки своих индивидуальных особенностей, а во-вторых, знания и умения, приобретенные в средней школе мешают проявлению особенностей, присущих их типам математического мышления. По этой причине для определения типа математического мышления предпочтительней использовать скрытое тестирование. Пример такой компьютерной системы [4].

В результате по типу математического мышления учащемуся будут даваться рекомендации по составлению индивидуальной программы его математического образования. Все последующие модули электронных учебных материалов необходимо разрабатывать в альтернативном виде: несколько вариантов, ориентированных на определенные типы математического мышления.

Литература

1. Биркгофф Г. Математика и психология. М.: Советское радио, 1977.
2. Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1990.
3. Перязев Н.А. Индивидуальные стили математического мышления // Философия математики: актуальные проблемы. Материалы международной научной конференции. — М., Изд. Савин С.А., 2007. — С.165-167.
4. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2010611108. Компьютерная система по определению индивидуального стиля математического мышления. / Н.А. Перязев, С.Р. Мусифулина.— М.: РосПатент, 2010.

Розов Николай Христович, *д.ф.-м.н., профессор, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова*

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ФИЛОСОФА: РАБОЧИЙ ИНСТРУМЕНТ ПРОФЕССИОНАЛА ИЛИ БЕСЦЕЛЬНАЯ ЭКСКУРСИЯ В НЕПОНЯТНОЕ?

Хотя курс высшей математики давно уже входит в учебный план философских факультетов, остаётся открытым фундаментальный вопрос: с какой целью преподаётся студентам-философам высшая математика, чего мы хотим достигнуть в итоге её изучения? От ответа на этот вопрос зависит формирование содержания программы, выбор методики преподнесения материала, определение уровня требований к усвоению предмета, установление взаимосвязей с «профессиональными» дисциплинами.

Анализ существующих программ, практики преподавания и имеющихся учебных пособий показывает, что в реализации курса высшей математики для студентов-философов прослеживается, по крайней мере, пять различных концепций – условно говоря, «академическая», «популяризаторская», «общеобразовательная», «историческая» и «прагматическая».

«Академическая» концепция предлагает доказательно, с сохранением допустимой строгости и алгоритмичностью, излагать конкретные математические факты и сопровождать их большим числом примеров. Эта точка зрения базируется на убеждении, что «математика ум в порядок приводит», воспитывает логическое мышление. Правда, особое значение математики для формирования логического мышления гуманитариев никем не доказано. Кроме того, не следует смешивать значение математики для развития научных исследований в гуманитарных областях знаний (для чего достаточно лишь очень ограниченного числа лиц) и обучение математике массы рядовых специалистов по гуманитарным дисциплинам.

«Популяризаторская» концепция во главу угла ставит «просветительскую» цель. Святой обязанностью считается доносить до широкого круга «нематематиков» в доступной и завлекательной, научно-популярной форме некую совокупность разрозненных фактов и не преследуется цель обеспечить понятийное и целенаправленное освоение математики.

«Образовательная» концепция исходит из того, что «массовому» гуманитарию никогда не придётся пользоваться первым замечательным пределом или рисовать поверхность $z^2 = xy$. Но ему придётся грамотно использовать математику на бытовом (житейском) уровне, а профессионально – быть может, сталкиваться с рядом понятий и идей, которые порождены математикой и сегодня должны быть правильно понимаемы любым образованным человеком. Вот с ними и надо, не вдаваясь в детали и строгости, познакомить гуманитариев.

«Историческая» концепция исходит из того, что для гуманитариев наиболее подходящим является знакомство с математикой в соответствии с «естественным» путём её развития. Иначе говоря, речь идёт о своеобразном курсе истории математической науки и её творцов. Однако «хронологическое» изложение истории математики без ясного понимания постоянно рождавшихся всё более общих и всё менее доступных абстракций и конструкций превратится просто в набор непонятных терминов, а рассказы об учёных, начиная уже с XIX века, неизбежно придётся строить по пустой «биографической» схеме «родился – учился – работал – скончался».

«Прагматичекая» концепция предлагает отбирать математический материал дифференцированно, исходя не из вкусов и пристрастий математиков, а в жёсткой зависимости от его значения для философского образования и реальных потребностей философской науки. Такой подход действительно полезен для обучающихся и может возбудить их интерес к курсу математики, а также позволит выделять из них тех, кто захочет в дальнейшем использовать математические знания в своей работе.

Эти концепции, сформированные, в основном, математиками, преподающими на гуманитарных факультетах или интересующимися «математикой для гуманитариев», по большому счёту отражают воззрения и интересы именно математиков, тогда как важно было бы получить чёткую точку зрения корпорации философов, преподавателей и исследователей (особенно – занимающихся философскими проблемами математики), больше всех заинтересованной в подготовке молодых кадров высокой квалификации и глубже всех понимающей насущные проблемы такой подготовки в современных условиях.

Литература

1. Розов Н.Х. Гуманитарная математика // Математика в высшем образовании. 2003. № 1. С. 53-62.

2. Успенский В.А. Математика для гуманитариев: философия преподавания. // Математика в высшем образовании. 2005. № 3. С. 91-104.

3. Розов Н.Х. Мысли о преподавании математики гуманитариям, возникшие при чтении одного учебного пособия // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 57-66.

4. Петров Н.Н. Математика у гуманитариев // Математика в высшем образовании. 2012. № 10. С. 167-174.

5. Успенский В.А. Математическое и гуманитарное: преодоление барьера. М.: МЦНМО, 2012. 46 с.

Субботин Александр Ильич, *к.ф.н., доцент, Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону)*

СУБСТАНЦИАЛЬНАЯ И ОПЕРАЦИОНАЛЬНАЯ РЕАЛЬНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ (педагогический аспект[1])

1. Известно, что главными трудностями в понимании учениками тонкостей доказательства разных математических теорем и преобразований является их неспособность сразу увидеть основание этих преобразований, т.е. основание некоего перехода от одного математического выражения (геометрической формы) к другому, в силу их утверждаемого равенства. Для сознания ученика

[1] Педагогический аспект этой темы заключается в проблеме непонимания и нежелания понимать учителями естественную специфику мышления ученика, принципиально отличающуюся от специфики мышления учителя.

4-5 класса, усвоившего условия математического равенства, непонятно, как можно говорить о равенстве *частично* равных предметов, да еще и делать замещения таких предметов как полностью равных. Рассмотрим два классических примера.

2. Смысловой фокус теоремы Пифагора – в сопоставлении двух квадратов, имеющих одинаковую площадь, но разные структуры, образуемые формами разделения их площадей. Как объяснить ученику, что эти очевидно разные квадраты, на самом деле, – одинаковые, и в чем смысл такого отождествления?

Самое простой и универсальный подход – использовать известный математический принцип: если от равных величин отнять одну и ту же величину, то останутся равные величины. Например: «4 – 1 = 4 – 1». Обычно оставляется без внимания, как представлена величина, обозначенная как "4", между тем как в первом, так и во втором случае (слева и справа от знака равенства) она может *иметь разное операциональное выражение* и воплощение, например: «4 = 2 + 2» и «4 = 1 + 3». Если признать, что операциональное представление задает особый вид онтологии математических объектов, то очевидно, что объекты «2 + 2» и «1 + 3» – разные, *пока не произведено преобразование* – сложение. Только после этого становится понятно, что эти объекты равны. В математике операциональному неравенству не придается значения; оно устраняется, когда производится преобразование. Но в геометрии наглядность – на первом плане: два квадрата имеют *очевидно разную* структуру (за счет разных внутренних разграничений) и *неочевидно одинаковую* площадь. Если это соотношение перевернуть, то получается, что некий квадрат (назовем его "Z"[2]) может стать исходным для получения бесконечного количества квадратов, внутреннее пространство которых так или иначе разделено, так что их можно представить в двух онтологических формах – операциональной (сумма составляющих площадей) и субстанциальной (общая площадь, как результат суммирования). Т.е. в доказательстве теоремы Пифагора «спрятано» важное допущение: факт одинаковой суммы площадей двух квадратов – как некоей субстанциальной "Z-основы" – является доказательством

[2] Идея «квадрата "Z"» принадлежит В.И. Каталевскому.

существования преобразования ("превращения") их разных операциональных структур друг в друга. Само доказательство заключается в *нахождении* этого преобразования.

3. Смысловой фокус решения Архимедом задачи царя Гиерона – в сопоставлении объемов двух тел, находящихся в разных агрегатных состояниях, – твердом и жидком. Сложность заключалась в том, что корону нельзя было расплавить, чтобы облегчить сравнивание. «Эврика» Архимеда заключалась в нахождении преобразования, позволяющего сопоставлять и сравнивать эти разные агрегатные состояния: объем короны можно узнать, измерив количество вытесненной ею воды в сосуде (дальше – все просто). И здесь мы имеем одинаковый объем короны и вытесненной ею воды, т.е. два физических объекта, разных во всех отношениях, кроме одного – объема. Аналогичность этого преобразования вышеприведенным – в связи с теоремой Пифагора и задачей Фалеса – очевидна. Аналогом субстанциальной "Z-основы" здесь является «жидкое агрегатное состояние физического объекта»; преобразование заключается в отвлечении от всех свойств двух конкретных объектов – золотой короны и вытесняемой ею воды, кроме одного – их объема. В рамках мысленного эксперимента, при решении этой задачи, это выглядит как "превращение" короны в воду.

4. Такая способность непосредственного усмотрения неявного основания единства разных, разнородных или разделенных предметов в научной, рационалистической культуре называется *интуицией*, и профессиональные математики (в отличие от учителей математики) именно в ней видят основу прогресса математики; так Г. Вейль пишет: «Извечный секрет необычайной продуктивности гения – в его умении находить новые постановки задач, интуитивно предугадывать теоремы, приводящие к новым значительным результатам и к установлению важных зависимостей… Математику движут вперед в основном те, кто отмечен даром интуиции, а не строгого доказательства» [2, 24]. Здесь видно, что Г. Вейль под «пониманием» имеет в виду именно видение структур математических преобразований. Речь идет об интуитивном усмотрении, *во-первых*, оснований единого (единства различного, разнородного или разделенного), *во-вторых* – связи этих частей и

возможности их преобразования друг в друга. В математике первый момент лежит в основе доказательств математического существования, а второй – в решении задачи – нахождении конкретного преобразования.

5. Первый пункт этого метода имеет древнюю историю: умение усматривать (узревать) некое единство противоположностей считалось *мистическим*, присущим мудрецам, и пользовалось большим уважением. В наше время, когда нормативно-рационалистическое мышление столкнулось с неразрешимыми проблемами, востребовано рефлексивное, творческое мышление, дающее позитивные результаты. И запреты на те или иные формы такого мышления становятся анахронизмом. Как пишет П.С. Гуревич, «можно говорить о мистике как о поиске истины и реальности, которая выходит за пределы чувственной и интеллектуальной сфер… Мистик видит единство там, где обычный взор усматривает лишь многообразие и разобщенность. Мистический опыт — особое состояние сознания (мистическое сознание)» [3, 145]. Конечно, «чистый» мистик вполне удовлетворяется таким эйфорическим состоянием своего сознания, но педагогически важно учить ребенка не только достигать, но и использовать его – через фантазию – для конструирования в своем сознании конкретных математических или иных преобразований, т.е. переводить его именно в чувственную и интеллектуальную сферу, чтобы делать, таким образом, открытия. Как писал Г.С. Альтшуллер: «Что значит управлять фантазией? Это значит уметь «включать» и «выключать» ее, менять ее «потенциал» и «направление» и, главное, направлять так, чтобы получить максимальную творческую отдачу» [1, 79].

Литература

1. Альтшуллер Г.С. Фантазия – инструмент творчества / Молодой коммунист, № 5, 1973.

2. Вейль Г. Математическое мышление. М., Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989. Глава «Топология и абстрактная алгебра: два способа понимания в математике».

3. Гуревич П.С. Мистика как культурная традиция // ecsocman.hse.ru/data/ 599/139/1231/014 Gurevich.pdf.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ: АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

МАТЕМАТИКА И РЕАЛЬНОСТЬ

Тезисы
Третьей всероссийской научной конференции

27-28 сентября 2013 г.

Подписано в печать 26.09.2013.
Формат 60x88/16. Усл. печ. л. 16,9. Эл. изд.

Центр стратегической конъюнктуры **7720376@mail.ru**

141280, МО, г. Ивантеевка, ул. Луговая, д. 1.
Тел. +7(495)772-03-76