МАТЕМАТИКА И ОПЫТ

Издательство
Московского университета

МАТЕМАТИКА И ОПЫТ

Под редакцией **А. Г. Барабашева**

Издательство
Московского университета
2003

УДК 1:001
ББК 87.3
М 33

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского гуманитарного научного фонда
Проект № 02-03-16106

Математика и опыт / Под ред. А.Г. Барабашева. — М.: М 33 Изд-во **МГУ,** 2003. - 624 с.

ISBN 5-2211-04739-7

В работе предпринята попытка масштабного сравнения различных подходов к соотношению математики и опыта, сложившихся главным образом в рамках априоризма и эмпиризма. Сравнение проведено как в чисто теоретическом ракурсе, так и посредством рассмотрения различных исторических и философских ситуаций. Исследуются возможные альтернативные подходы, выходящие за пределы дилеммы «априоризм—эмпиризм» в истолковании отношения математики к опыту и опытному знанию.

Книга представляет интерес для математиков, философов, специалистов и преподавателей по истории и философии науки, студентов и аспирантов математических и естественно-научных специальностей.

The attempt of full scale approach to the problem of relation of mathematics and experience is represented in this book mainly in the frame of two general positions, apriorism and empiricism. The comparison of positions of mathematical apriorism and mathematical empiricism here realized as in theoretical form, as in the form of the investigation of different historical and philosophical situations. In the final part of the monograph possible non-aprioristic and non-empiristic alternative approaches to the problem of relations of mathematics and experience are searched.

The book could be useful for mathematicians, philosophers, for specialists in the history and philosophy of science. Students and graduate students in mathematical and natural science specialities could use it in the process of preparation for exams in the field of philosophy of mathematics educational programs and courses.

УДК 1:001
ББК 87.3

ISBN 5—2211—04739—7

<u>Предисловие</u>

Проблема соотношения математики и опыта является одной из наиболее давних и разработанных проблем философии математики. Более того, на заре существования математики и задолго до возникновения философии математики как самостоятельной области исследований пифагорейцы уже предложили первое решение этой проблемы, положив число началом всего сущего.

Историческая эволюция математики, равно как и эволюция попыток ее философского обоснования, сопровождались увеличением разнообразия предлагаемых решений проблемы соотношения математики и опыта, а также усложнением этих решений. Постепенно выявилась и структура таких решений, или же, вернее сказать, подходов к решению проблемы. Во-первых, стало ясно, что речь должна идти об исследовании соотношения математических суждений и суждений, полученных в процессе опыта. Во-вторых, постепенно возрастало структурирование самого понятия опыта, и в этом понятии стали выделять повседневный опыт и опыт в виде экспериментального, естественно-научного изучения явлений. В-третьих, оказалось, что возможны раздельно сравнительный анализ формы построения опытных суждений и формы построения математических суждений и сравнительный анализ истинности математических и опытных суждений. В-четвертых, и это стало основным продвижением в исследовании проблемы соотношения математики и опыта, постепенно сложились два как бы конкурирующих подхода к решению проблемы — математический априоризм и математический эмпиризм.

Имеющиеся априористские и эмпиристские работы обычно автономно представляют свой круг идей и не коррелируют друг с другом, зачастую содержатся в сборниках, посвященных иным проблемам философии математики (проблеме существования революций в математике, проблеме содержания социокультурной философии математики, проблеме физикализма, проблеме соотношения чистой и прикладной математики и т.д.), и в лучшем случае фрагментарно спорят с некоторой «избранной» позицией из спектра противостоящих, не осознавая своего места в ряду сходных концепций. Наконец, среди исследователей нет единства относительно самих формулировок этих двух подходов. Таким образом, при всей важности проблемы соотношения математики и опыта и при всем богатстве и значимости уже разработанных подходов в современной философии математики сложилась парадоксальная ситуация отсутствия рефлексивного (целостного) осознания соотношения математического априоризма и математического эмпиризма.

Такая рефлексия, детальный и многоаспектный анализ соотношении математического априоризма и математического эмпиризма как подходов, предлагающих различные и даже в чем-то противоположные решения проблемы соотношения математических и опитых суждений, не может быть осуществлена одним автором, обязательно находящимся «в плену» своей индивидуальной теоретической схемы. Мелодия соотношения математического априоризма и математического эмпиризма может быть исполнена только пи много голосов, звучащих синхронно, но ведущих каждый свою «партию». Именно поэтому было решено посвятить очередной (уже третий) коллективный сборник работ российских авторов, специализирующихся в области философии и истории математики, столь и шестой, хотя и фрагментарно обсуждаемой проблеме. Как и две предыдущие монографии данной серии («Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты». М., 1997; «Стили в математике: социокультурная философия математики». СПб.. 1999), настоящая книга является целостным коллективным произведенном, обладающим особой формой построения и изложения материала, включающего полемику авторов между собой, обнаружение как неустранимых разногласий, так и моментов общности отстаиваемых позиций.

Настоящая книга претендует на то, чтобы стать существенным акладом отечественного сообщества философов математики в рассмотрении проблемы соотношения математики и опыта. Этот вклад, как мне представляется, состоит из двух частей. По содержанию книги видно стремление коллектива авторов эксплицировать проблему соотношения математики и опыта как проблему взаимосвязи математического априоризма и математического эмпиризма. Тнкое уточнение сразу же переводит проблему в техническую плоскость и дает возможность оценивать выдвигаемые позиции как сами ни себе (в контексте априоризма и эмпиризма), так и сравнивать их друг с другом. Но, пожалуй, главным вкладом можно считать форму обсуждения, уникальный механизм совместной организации представляемых материалов. Стиль сборника, при котором коллектив авторов как целое участвует в обсуждении всех разнообразных идей соотношения математики и опыта — от анализа исходных понятий и до рассмотрения различных исторических ситуаций (кейсов), дает искомую полифонию взглядов, то несогласное согласие, которое наиболее полно передает действительное соотношение математического априоризма и математического эмпиризма в их эволюции.

Представляемая читателю книга стала результатом многочисленных докладов и обсуждений на национальном семинаре по философии математики, регулярно проводимом в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Концепция книги, ее содержание, структура и способ построения были определены на ежегодных сентябрьских конференциях по философии математики (2001 и 2002 гг.), традиционно проходящих в Краснови-дово Можайского р-на Московской обл. Перед второй из указанных конференций все предлагаемые доклады были помещены на сайт конференции, что, безусловно, способствовало эффективности обсуждения и подготовке окончательного коллективного текста книги. Мне как редактору этой коллективной монографии хотелось бы выразить признательность всем авторам и членам нашего спорящего, но дружного сообщества философов и историков математики за терпение и энтузиазм в обсуждении и подготовке окончательной редакции книги. История нашей совместной многолетней работы свидетельствует, что достижения коллектива как по глубине, так и по охвату темы могут и должны превзойти достижения любого отдельного исследователя — конечно, при условии нахождения должных, способствующих творческому сомыслию организационных форм и при доброжелательности авторов друг к другу несмотря на все разногласия в их взглядах. Я полагаю, что особая благодарность от всего авторского коллектива должна быть адресована трудолюбивым и настойчивым членам редколлегии — С.Н. Бычкову, вложившему много сил и времени на доработку и редактирование текста книги, А.Н. Кричевцу, контролировавшему поступление и размещение файлов статей, а также получение рецензий и их обработку, С. С. Демидову и В.А. Бажанову, поддерживавшим подготовку рукописи, ее совершенствование и прохождение через разные инстанции на всех этапах работы редколлегии, а также В. Я. Перминову, последовательно и убедительно вдохновлявшему все наше сообщество на разработку данной темы, глубокой и философски значимой проблемы соотношения математики и опыта.

А Г Барабашев

Вместо введения

С. С. *Демидов*

МАТЕМАТИКА В ОПЫТЕ ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПОСЛЕДНИХ ДЕСЯТИЛЕТИЙ

Чтобы попытаться оценить изменения, произошедшие за тридцать последних лет в тематике и характере историко-математических исследований, я предлагаю сравнить некоторые цифры, отражающие активность историко-математической деятельности международных конгрессов по истории науки, прошедших за это время.

Как некоторые, наверное, еше помнят, 30 лет назад такой конгресс, по счету тринадцатый, прошел в нашей стране — с 18 по 24 августа 1971 г. в Москве в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова на Ленинских (ныне Воробьевых) горах. Истории математики были посвящены: специальная секция, которая провела 6 заседаний, где было заявлено 59 докладов[1], симпозиумы «Пути развития функционального анализа» (1 заседание, 7 докладов) и «Античность и современность» (1 заседание, 6 докладов), значительная часть симпозиума «Средневековая наука: взаимоотношения Востока и Запада». (I заседание, 5 математических из 8 заявленных в программе), специальное межсекционное заседание, посвященное 150-летию со дня рождения П.Л. Чебышева (1 заседание, 3 доклада). Доклады по истории математики звучали также на секциях «История античной науки и техники» (4 из общего числа 16) и «История средневековой науки и техники» (18 из общего числа 46). Один математический доклад (из 22 заявленных в программе) прозвучал также на проходившем 26—28 августа в Ленинграде Кеплеровском симпозиуме — спутнике Московского конгресса.

Можно сказать, что основная работа конгресса протекала на секциях. Таковых, соответствующих по преимуществу основным наукам и отраслям техники — математике, механике, физике, астрономии, химии, наукам о Земле, биологии, медицине, наукам о человеке, технике, авиационной, ракетной и космической науке и технике, — было 12[2]. Работа секций и симпозиумов (их было 14, они были посвящены узловым вопросам истории науки — например, «Личность ученого в истории науки», «Эволюционная теория и генетика» или «Использование новой техники в развивающихся странах (конец XVIII — XX в.)» — или знаменательным для истории науки датам, например, 100-летию Э. Резерфорда или 150-летию П.Л. Чебышева) была организована таким образом, что любой историк математики, например, мог посетить большинство интересующих его мероприятий по своей специальности. Центром же историко-математических событий оставалась секция истории математики — здесь было заявлено 59 из 103 (т.е. 57,3%) заявленных докладов по истории математики.

Для сравнения приведем данные по последнему, XXI конгрессу, прошедшему 8—14 июля 2001 г. в Мехико. Разумеется, работала секция истории математики, которая провела всего 1 заседание, на котором было представлено 6 докладов. И это вовсе не означает, что на мексиканском конгрессе были слабо представлены история математики или историки математики. Они были одними из самых активных на конгрессе. Заседание Международной комиссии по истории математики, на котором состоялось ставшее уже традиционным награждение новых лауреатов премии К. Мэя, вручаемой за достижения в области истории математики, собрало значительное количество участников. Медаль А. Койре Международной академии истории науки была на этот раз присуждена историкам математики — российскому ученому И.Г. Башмаковой и представителю Франции К. Узелю. Конечно, доклады по истории математики делались и в рамках других секций и, что особо важно подчеркнуть, на многочисленных симпозиумах. Два из них были организованы непосредственно Международной комиссией по истории математики. Это — «История математики в латиноамериканских странах» (на него было заявлено 8 докладов) и «История взаимоотношений французских и немецких математиков в XVIII—XX вв.» (соответственно 5 докладов). Кроме этого, историко-математические доклады были включены в программы симпозиумов — «Астрономическое наследие неевропейских культурных ареалов» (1 доклад из 19), «Миссионерская активность и распространение европейских наук в Америке и Азии: деятельность иезуитов в XVI—XVIII вв.» (3 доклада из 11), «Замедленное научно-техническое развитие — возможности усиления миссии преподавания» (2 доклада из 9), «От универсализма любителя к институализированному профессионализму: становление профессии ученого (XVIII—XIX вв.)» (2 доклада из 11), «Этнонаука и этноматематика: эволюция стилей мышления в последние 500 лет» (4 доклада из 9), «Трансмиссия научных культур и формирование научных языков» (6 докладов из 8), «Изменения в интерпретациях и концептуальном содержании» (2 доклада из 22), «Культурное и научное значение памятников науки и техники, находящихся в исторически значимых городах» (1 доклад из 11), «Типологические параллели в доклассических науках» (2 доклада из 13), «Наука и техника в Древней Мексике» (1 доклад из 11), а также в специальное заседание Международной ассоциации — «Наука и культурное разнообразие» (1 доклад из 6). Некоторые из этих симпозиумов были организованы историками математики — (У.Д. Амброзио, А.К. Волковым, С.С. Демидовым, Э. Кноблохом, Р. Рашедом, Я. Фолтой).

Как всегда, доклады по истории математики в древности и в Средние века проходили на соответствующих секциях: на секции «Классическая и восточная древность» было заявлено 8 докладов (из общего числа 12 секционных докладов), на секции «Средние века и Ренессанс» 2 доклада (из 7). Доклады по истории математики звучали также на секциях «Международные научные обмены» (2 из 8), «Эволюция преподавания и популяризации» (1 из 12), «Искусство и наука» (1 из 8), «Наука и общество» (2 из 29), «Наука и культура» (1 из 25) — всего в программе конференции числился 61 доклад. (Общее число докладов меньшее, чем на московском. Напомним, что тогда их было 103, однако не надо забывать, что московский конгресс был рекордным по числу участников — он был одним из первых после падения «железного занавеса», мексиканский же конгресс отпугнул многих потенциальных его участников из Европы дороговизной авиабилетов.)

Как видно, секция уже перестала быть средоточием деятельности историков математики (на нее приходится менее 10% от числа всех историко-математических докладов, заявленных в программе, в то время как для московского эта цифра поднимается почти до 60%). Поэтому если на московском конгрессе участник (по крайней мере тот, кто к этому стремился) мог составить себе представление о новых результатах, доложенных на конгрессе, которые по ^большей части сообщались на секциях (любые симпозиумы и мемориальные заседания предполагают приглашение докладчиков по заранее согласованной теме, а вовсе не изложение новых результатов), то мексиканский конгресс такую возможность исключал самой своей организацией. Хочу обратить внимание и на чрезвычайное расширение тематики секций, число которых более чем удвоилось — 29 против прежних 12.

Если раньше, как мы уже говорили, большую часть секций составляли секции по истории тех или иных конкретных наук или областей техники, то теперь к ним добавились и составили при этом большинство секции, посвященные важным проблемам истории науки и техники в их взаимосвязи с обществом, его культурой, экономикой и идеологией. Если к этому добавить симпозиумы, на которых и протекает ныне основная жизнь конгрессов (объединяющими началами все в большей степени становятся пленарные заседания и заседания комиссий), их число 62 (23 из них организованы различными комиссиями союза, 35 — отдельными учеными и 4 — так называемые специальные сессии) против 14 московских, то можно сделать вывод о произошедшем за эти 30 лет кардинальном изменении тематики и характера историко-научных исследований.

Изменение это произошло не внезапно, однако его смысл и направленность начинают проясняться только сейчас. Я буду говорить об истории математики, так как лучше представляю себе события именно в этой области, но полагаю, что и в других разделах истории науки события проистекали сходным образом (хотя и с разной интенсивностью). Среди участников московского конгресса был Кеннет Мэй. профессор из Торонто (Канада), которого мой учитель Адольф Павлович Юшкевич — один из крупнейших историков науки XX в. и один из организаторов московского конгресса — не знал как ученого. Результаты Мэя по историографии истории математики не представлялись ему особо интересными. А.П. Юшкевич рассматривал его прежде всего как общественного деятеля, занятого полезным делом — хлопотами об организации в рамках Союза истории и философии науки специальной комиссии по истории математики[3]. Такую комиссию во время московского конгресса К. Мэй организовал[4], а в 1974 г. основал и журнат комиссии «Historia Mathematica», который сегодня стал одним из самых распространенных и влиятельных историко-научных журналов в мире. Одним из результатов деятельности комиссии, которая впоследствии стала регулярно собираться в Математическом институте в Обервольфахе, стало резкое усиление активности историков математики на конгрессах. Комиссия стала организовывать в их рамках симпозиумы. Одним из первых таких симпозиумов стал симпозиум «Историография и история математики» на проходившем в 1989 г. в Гамбурге XVIII конгрессе, организаторами которого выступили известный мюнхенский историк математики М.Фоль-ертс и автор этих строк.

Естественно задаться вопросом: каковы причины, побуждающие ученого возлагать на себя довольно обременительные обязанности по организации таких предприятий? Попробую ответить на него, опираясь на собственный опыт[5]. Как тогдашний вице-президент комиссии по истории математики (речь идет о времени, предшествующем конгрессу 1989 г.) я был заинтересован в активизации ее работы. Тема — историография истории математики — казалась мне в высшей степени актуальной[6]. Это причины объективные. К тому же была причина этой активности, носившая субъективный характер: организуя симпозиум, я увеличивал свои шансы на участие в конгрессе, В это время еще существовал Советский Союз, и этот симпозиум значительно увеличивал вероятность включения моей кандидатуры в состав советской делегации. Подобного рода субъективные соображения играют немалую роль в организации симпозиумов на конгрессах — акции организатора такого предприятии в его собственном университете резко повышаются, к тому же любой западный университет безоговорочно оплатит такому организатору расходы по поездке на сам конгресс; добавим еще открывшуюся перед таким организатором возможность издать материалы такого симпозиума под своей редакцией — это стимулирует активность амбициозной молодежи (хочу обратить внимание на большой процент сравнительно молодых ученых, выступивших в такой роли на мексиканском конгрессе; руководители симпозиумов на московском конгрессе — сплошь маститые ученые).

Все это — важные субъективные причины, которые побуждают ученых браться за организацию симпозиумов. Объективным же фактором, определяющим подобную деятельность, выступает необходимость исследования новых тем и вопросов, которые ставит перед сообществом сам ход развития нашей науки. Ведь только для обсуждения таких тем и вопросов организатор сумеет найти достаточное количество квалифицированных докладчиков, и в необходимости постановки только таких тем он сумеет убедить коллег, от которых зависит включение соответствующего симпозиума в программу конгресса.

Итогом такой деятельности немалого числа активных историков науки и стали изменения в тематике конгрессов (и параллельные перестройки в структуре отделения истории науки Международного союза истории и философии науки — организация комиссий по самым разным вопросам истории науки). Первоначально казалось, что вся эта деятельность служит исключительно удовлетворению личных амбиций. Однако теперь становится ясным, что причины этого феномена находятся значительно глубже, а личные амбиции являются лишь частью того механизма, который осуществляет эту громадную перестройку всего корпуса истории науки.

Описанная нами картина наблюдается не только в практике международных конгрессов по истории науки, но и в деятельности других международных и национальных историко-математических форумов (например, на традиционных конференциях по истории математики в математических институтах в Обервольфахе (ФРГ) и Люмини (Франция), на состоявшейся в 1999 г. 5-й Всероссийской школе по истории математики в Ярославле), в работе ведуших историко-математических семинаров (таких, как семинар на механико-математическом факультете МГУ или в Институте Анри Пуанкаре в Париже). Сходная ситуация и в тематике публикаций ведущих мировых изданий по истории математики — в упоминавшемся журнале «Historia Mathematical или в «Историко-математических исследованиях.

10

Если 30 лет назад в тематике историке-научных изысканий доминировала история идей, то сегодня мы видим значительное количество исследований, направленных на выяснение того, каким образом математика в своем развитии зависит от социальных факторов (и в какой мере ими определяется), как математические идеи функционируют в обществе, каким образом организованы ее институты и как они взаимодействуют с другими общественными и государственными институтами, как математика, институционально и идейно, связана с проблемами народного образования, как воздействуют на ее развитие идеологические факторы и, наконец, как она сама воздействует на общество, на его философию, культуру и идеологию. И дело здесь даже не в том (хотя и в том тоже), что модные до Второй мировой войны проблемы выявления социальных корней науки (вспомним знаменитый доклад Б.М. Гессена о социальных и экономических корнях ньютоновых «Начал», произнесенный в 1931 г. на Втором международном конгрессе по истории науки в Лондоне), не найдя своего решения в рамках тогдашних историко-научных исследований, вновь вернулись в историю науки на новом витке ее развития (а именно в такой трактовке это изменение тематики историко-научных исследований и было первоначально воспринято по крайней мере советским научным сообществом[7]), таким пониманием наполнялся и появившийся тогда термин — «социальная история науки».

Дело, на наш взгляд, в другом. Наука в современном обществе заняла особое положение. Конечно, важность науки, а главное, базирующегося на ней научно-технического прогресса всеми признавались, но решительные перемены в идеологии произошли лишь в последние десятилетия, Не последнюю роль в этом сыграла экспансия компьютерных, космических и ядерных технологий. И факт этот по-настоящему только начинает осознаваться. И хотя он рождает во многих слоях общества неадекватную реакцию активного неприятия — растут антинаучные настроения, принимающие подчас чрезвычайно агрессивные формы, — значимость науки и научной идеологии de facto становится общепризнанной. В такой атмосфере необходимость осознания феномена науки становится одной из центральных задач познания, поэтому вопросы истории и философии науки оказываются в ряду сюжетов, волнующих почти каждого мыслящего человека. А отсюда и чрезвычайное расширение историко-математической проблематики, и увеличение списка специальностей лиц, пишущих на историко-математическиетемы, и, соответственно, читательской аудитории[8].

Мир разделенный европейской культурной традицией Нового времени надвое — Восток и Запад, материя и противостоящее ей сознание, теория и, по сути, противополагаемая ей практика меняются на наших глазах. Такие оппозиции, оказывавшиеся до известной степени удобными для предварительных оценок, мысленных построений и даже практики (например, для номенклатуры специальностей — чистая и прикладная, определившей структуру учебных заведений на добрые две сотни лет), начинают выглядеть сегодня искусственными. Проблема «математика и опыт» приобретает, как убедительно демонстрируют доклады на нашей конференции, новое понимание и новые измерения.

Примечания

[1] Приводимые цифровые данные получены в результате анализа программ X1I1 и XXI конгрессов [1, 2].

[2] Некоторые направления делились на подсекции. Например, секция «История физики и астрономии» делилась на две подсекции — «История новой и новейшей физики» и «История физики и астрономии».

[3] В отсутствии интереса А.П. Юшкевича к деятельности К. Мэя и его трудам нашло отражение распространенное тогда среди ведущих историков математики отношение к вопросам, которыми оп занимался, как второстепенным. Истинное значение деятельнсти К. Мэя (1915—1977) было оценено лишь после его ранней смерти. В память К. Моя основанной им Международной комиссией по истории математики была учреждена Международная премия, первыми лауреатами которой в 1989 г. стали А.П. Юшкевич и Д.Я. Стройк.

[4] Вот состав ее тогдашнего бюро — К. Мэй (Торонто), президент; С.С. Демидов (Москва), вице-президент; П. Дюгак (Париж), секретарь; К.Р. Бирман (Берлин); С. Ито (Токио); Дж.Дж. Уитроу (Лондон).

[s] Начиная с XVIII конгресса я участвовал в организации симпозиумов на всех последующих конгрессах.

[6] Актуальность темы для современной истории математики — вопрос в высшей степени деликатный. В 1972 г., будучи еше совсем молодым историком науки, я участвовал в 3-м конгрессе болгарских математиков с доклатом по истории теории дифференциальных уравнений с частными производными в XIX в. Плохо рассчитав время, я успел рассказать только об изменении идеологии в теории, которое произошло в конце века. Я сам и мои коллеги посчитали, что доклад я загубил: ограничился введением, не рассказав о главном — о конкретных результатах математиков XIX в. Выступая в июне 2001 г. на конференции по истории теории дифференциальных уравнений в Лиссабоне, я (уже сознательно) сделал центром доклада то самое изменение в идеологии, убрав конкретные результаты из доклада вовсе. Доклад вызвал содержательную дискуссию. То, что в начале 70-х годов казалось неинтересным, стадо в высшей степени актуальным в наше время.

[7] И его тогдашним лидером — С.Р. Микулинским.

[R] Отсюда, в частности, и появление курсов истории математики, читаемых ныне студентам самых неожиданных специальностей в многочисленных университетах.

Список литературы

1. XIII Международный конгресс но истории науки. Программа. Москва, IS—24 августа 1971. М.. 1971.
2. XXI International Congress of History of Science, Mexico City, 8—14 July, 2001. Scientific Program. Mexico City, 2001.

12

КОММЕНТАРИИ

А.А. Григорян

В статье С.С. Демидова обращают на себя внимание факты, свидетельствующие о том, что современный историк математики в своих исследованиях стремится существенно выйти за границы «парадигмального поля» историко-математического исследования, ограниченного прежде всего проблемами «истории идей». В частности, историки математики в своих работах затрагивают важнейшие проблемы как философии, так и социологии математики.

В своем комментарии мне хотелось бы сказать о другой, не менее значимой тенденции, характерной для развития исследований в области философии математики.

Было бы ошибкой утверждать, что классические философские проблемы математики — такие как, например, проблема бытия математических объектов, проблема обоснования математики и т.п., близки к своему окончательному разрешению или что интерес к ним, по крайней мере сейчас, резко понизился. По-видимому, справедливо и то, что эвристический потенциал тех идей и направлений в обсуждении данных проблем, которые обходятся без широкого приатечения и достаточно кропотливого анализа соответствующего историко-математического материала, еще далеко не исчерпан. Тем не менее современные исследователи проблем философии математики все чаше не просто привлекают историко-математический материал для иллюстрации своих идей, но и, пусть в достаточно ограниченной области, выступают в роли историка.

Дело не только в том, что историко-математический материал может обеспечить богатую обосновательную базу для выдвигаемых философских концепций. Поскольку эти концепции зачастую основываются на принципиально различных метафизических и гносеологических предпосылках, их собственно философский сравнительный анализ оказывается практически невозможным. Однако в том случае, если каждую из сравниваемых концепций попытаться применить для построения рациональной реконструкции того или иного эпизода в истории математики, понимание которого так или иначе связано с обсуждаемой философско-математической проблематикой, можно говорить о достаточно адекватном «взвешивании» эвристических потенциалов рассматриваемых идей в философии математики. Более того, на этом пути возможна такая коррекция философско-математических построений, которая будет способствовать тому, что историки математики смогут использовать их в качестве своего методологического инструментария, что, надо признать, является не слишком частым явлением в современной практике взаимоотношений историков и философов математики.
13

Е.А. Зайцев

В статье С.С. Демидова внимание обращено на феномен смены приоритетов в историко-научных исследованиях вообще и в историко-математических исследованиях, в частности. Анализ тематической структуры международных конгрессов по истории науки позволил автору сделать вывод о том, что традиционные дисциплинарно ориентированные исследования в настоящее время во многом потеряли свою привлекательность. Внимание научного сообщества переключилось на ряд культурологических тем, в рамках которых и изучаются теперь исторические формы той или иной научной дисциплины.

На феномен смены приоритетов в истории математики можно взглянуть шире, попытавшись разобраться в истоках дисциплинарного подхода, с одной стороны, и в движущих силах того развития, которое в настоящее время приводит к его преодолению, с другой. Дисциплинарная форма, которую история науки приняла в XX в., своим источником имела позитивистскую трактовку научного знания. При таком подходе значимыми являются лишь «позитивные» научные результаты, полученные в рамках данной дисциплины. Что же касается вопроса о том, как вообще стала возможной та или иная форма существования науки, то он «выносится за скобки» как не вписывающийся в позитивистскую модель развития (родоначальники позитивизма относили такие вопросы к сфере «метафизики»).

Таким образом, именно к позитивным достижениям науки и было в XX в. приковано внимание историков соответствующих дисциплин. И если в истории физики или биологии время от времени слышались голоса, считавшие абсурдом попытки обнаружения новейших физических или биологических идей, скажем, у Аристотеля, то в области истории математики идея прогрессивного кумулятивного развития почти не встречала сопротивления. Историки старательно обходили молчанием тот факт, что в подлинной истории идей развитие математики неотделимо от развития общекультурного, прежде всего философского (или ограничивались формальными замечаниями общего характера).

В конце же XX столетия, когда математика утратила лидирующее положение среди прочих наук, модель кумулятивного развития, поддерживавшаяся солидарными усилиями математиков (заинтересованных в пропаганде своих идей посредством исторических обзоров) и историков математики (зачастую работавших в составе математических факультетов и живших проблемами современной им математики), дала трещину. Утратив привычные критерии, историки математики занялись поисками новых методологических

14

ориентиров. К сожалению, общих критериев им сформулировать не удалось. Интуитивно почувствовав, что математика является феноменом, неразрывно связанным с культурой рассматриваемой эпохи» историки математики впали в другую крайность. Оставив без внимания специфику этого феномена, они занялись исследованием самых разных констелляций, в которых могла бы фигурировать математика. Историю математического знания стати «прививать» к истории политических режимов, национальных стилей, научных учреждений, патронажа, миссионерства (одним из популярнейших направлений является сейчас история иезуитской математики) и т.д. Неудивительно, что при этом собственно математическая проблематика, столь ценимая исследователями предыдущего поколения, начала постепенно исчезать из поля зрения исследователей. На смену ей пришли сюжеты, навеянные идеями социологии, политологии, религиоведения и т.д. Внешне многое изменилось, но, по сути, принципы отбора и интерпретации исторического материала остались столь же произвольными. Если раньше изучению подвергались только те исторические формы математики, в которых видели прообразы новейших математических идей, а все остальное оставалось за скобками, то теперь исследованию подвергается лишь тот материал, который считается релевантным с точки зрения доминирующего подхода — социологического, политологического и т.д.

В этой ситуации возможны два варианта: либо история математики вовсе прекратит свое существование, растворившись в разного рода «исследованиях науки и технологии» (в США, например, это уже фактически произошло), либо будет наконец осознано то обстоятельство, что математика настолько тесно связана с философскими императивами конкретной эпохи (позитивно или негативно), что исследование ее истории невозможно без анализа соответствующего философского контекста.

ОТВЕТ АВТОРА

Я полностью разделяю мнение Е.А. Зайцева, что исследование истории математики «невозможно без анализа соответствующего философского контекста».

По поводу его соображений, связанных с моим докладом, у меня есть несколько мелких замечаний. Во-первых, я никак не могу согласиться с утверждением, что к концу XX в. математика утратила лидирующее положение среди прочих наук. На мой взгляд, верно, скорее, обратное — ее доминирование в науке и, даже шире, в культуре приобретает все более абсолютный характер. Одним из

15

проявлений этой тенденции стало включение математики в программу обучения студентов по все новым и новым специальностям — вплоть до журналистов, при обучении которых еше вчера ни о какой математике и речи быть не могло. Во-вторых, я не могу согласиться с тем, что история математики в США фактически растворилась «в разного рода "исследованиях науки и технологии"». На мой взгляд, в США произошло иное — пути развития традиционной истории математики и истории науки разошлись. Исследования по традиционной истории математики ведутся в математических департаментах университетов и патронируются Американским математическим обществом (именно оно издает сегодня замечательную серию книг «История математики»), в то время как на многочисленных кафедрах истории науки представительство историков математики минимально, а в Американском обществе историков науки историки математики почти никакой роли не играют. В американских журналах по истории науки (в том числе в «Isis» и в «Osiris») история математики практически отсутствует. Но не надо при этом забывать, что ведущие журналы по традиционной истории математики — «Historia Mathematical и «Archive for History of Exact Sciences» — издаются, по существу, в США. Такая же тенденция расхождения путей развития истории математики и истории науки начинает прояатяться и в Европе, пожалуй, сильнее всего — во Франции.

Разделяя мысли, высказанные по поводу моей статьи А.А. Григоряном, хочу в дополнение к ним высказать следующее. Конечно, история математики (равно как и любая другая историческая наука) имеет своей целью «поведать о том, как это было». При всей важности этой установки, которая на первый взгляд может показаться даже определяющей цель исторического исследования, существует другая, по моему мнению, куда более важная и значительно более сложная задача историке-мате магического исследования — выявление сущности математики и природы ее метода, постигаемые на пути их исторической реконструкции. Эта задача (или, если угодно, сверхзадача) историко-математического исследования делает его, по сути, исследованием философским — здесь цели истории и философии математики оказываются идентичными.

Раздел 1

ПО СЛЕДАМ КАНТА

А.Г. Барабашев

РЕГРЕСС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АПРИОРИЗМА*

Математический априоризм можно рассматривать с двух разных позиций — как *философскую концепцию* математики и как философскую концепцию *математики.* Вторая позиция предполагает рассмотрение «приложимости» математического априоризма к математике, его способности эффективно объяснять и предсказывать функционирование и эволюцию математического знания как состоящего из синтетических априорных суждений. Я утверждаю, что история математического априоризма как философской концепции *математики* начиная со времени его возникновения у Канта представляет собой периоды разработки все более и более слабых версий, каждая из которых, в свою очередь, ставилась под сомнение новыми достижениями математики, плохо укладывающимися в схему априористского истолкования. Поэтому, как я полагаю, следует признать, что история математического априоризма как программы обоснования и исследования математики представляет собой его регресс[1].

Абрис аргументации

Чтобы убедиться в неоспоримости выдвинутого тезиса, я предполагаю последовательно рассмотреть сущность и историю математического априоризма в их соотношении с эволюцией математики. Для этого следует:

а) выделить ту проблему и эксплицирующие ее вопросы, которую рассматривает и на которые стремится ответить математический априоризм;

б) указать центральные положения (тезисы) математического априоризма в том виде, в котором они были первоначально сформулированы Кантом, а также кратко осветить предысторию мате-

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (код проекта: 99—03—00078).

17

матического априоризма (в части формирования этих центральных положений);

в) предъявить аргументацию, с помощью которой Кант обосновывал свою позицию;

г) рассмотреть, что в математике может расцениваться как факты, подтверждающие или опровергающие математический априоризм, и показать, какие факты дальнейшего (после Канта) развития математики вошли в противоречие с исходной версией математического априоризма;

д) выявить, что уцелело в математическом априоризме после открытия этих фактов и какие утверждения и способы аргументации пришлось ослабить в новых, гуссерлевой и неокантианской, версиях математического априоризма;

е) обосновать, что в математике первой половины XX в. были открыты дополнительные факты, заставляющие математический априоризм принять еще более слабую форму. Это подразумевает, во-первых, описание таких фактов и, во-вторых, сравнение гуссерлевой и неокантианской ослабленных версий априоризма с последующими, еще более слабыми версиями — праксеологическим, эволюционистским, структуралистским математическим априоризмом;

ж) выделить в современном состоянии математики те новые тенденции и нарождающиеся факты (находящиеся в процессе принятия математическим сообществом утверждения), которые не укладываются и в последние, постнеокантианские версии математического априоризма. Следствием обнаружения таких тенденций и фактов станет утверждение, что избежать дальнейшего ослабления математического априоризма как программы исследования и обоснования математики вряд ли удастся.

1. Общая проблема, в рамках которой развертываются основные концепции природы математики, может быть сформулирована как проблема соотношения математики и реальности. Эта проблема, если отвлечься от ее понятийного оформления, представляет собой *типовой образ ситуаций вопрошания,* повсеместно возникающих в тех познавательных эпизодах, в которых математические понятия, утверждения, теории приходится сопостаатять с понятиями, утверждениями, теориями о реальном, чувственно воспринимаемом мире. Математика поставляет только *материал для вопрошапия,* содержащийся в разных, вполне конкретных эпизодах изучения природы, в которых участвуют, с одной стороны, те или иные математические утверждения (тот аппарат, который математика предлагает исследователю для описания природы), а с другой — реальный опыт человека, встречающиеся человеку объекты внешнего мира. Загадоч-

18

ная гармония математических утверждений и реальных взаимоотношений объектов внешнего мира, проявляющаяся в этих эпизодах, как бы инициирует общую постановку проблемы соотношения математики и реальности, придавая ей жизненность (т.е. проблема соотношения математики и реальности не надуманна, и практика, математики ее постоянно воспроизводит).

Сопряжение значительно отличающихся ситуаций вопрошания, их соединение в одних понятиях предполагает использований столь общих обозначений, что данная выше понятийная формулировка общей проблемы соотношения математики и реальности, несмотря на жизненность самой проблемы как чего-то, стоящего за понятиями, становится малоинформативной, не указующей на концепции-решения или единственную концепцию-решение проблемы. Более того, понятия «математика», «реальность», «соотношение» могут быть наполнены разным смыслом, что затрудняет нахождение подходов к решению проблемы. Другими словами проблема соотношения математики и реальности выступает как условное обозначение (предельно общее наименование), объединяющее все концепции природы математики, но не позволяющее представить их по существу и выделить концепции-решения проблемы.

2. Философия трансформирует проблему соотношения математики и реальности в вопросы, понятийное оформление которых и сам настрой вопрошания подводят к тем или иным концепциям природы математики. Так, некоторые концепции природы математики возникли в результате попыток ответить на вопрос о том, обусловлены ли содержание и истинность математических суждений чем-то отличающимся и от эмпирической, и от индивидуатьной субъективной реальности (например, существуют ли всеобщие субъективные основания математики)? Обращение не к экспериментальному опыту и сенсусу, не к психологическим индивидуальным характеристикам ученых-математиков, не к референтной истинности и приложимости математических суждений, не к эмпирической реальности, а именно к познающему субъекту «как таковому» — вот акценты и исходные понятия, используемые этим кругом концепций.

Наиболее известной разновидностью данного вопроса можно считать его *априористскую трактовку.* Классическая постановка иопроса в случае априоризма выглядит так: являются ли математические суждения априорными синтетическими[2] и благодаря какой человеческой способности такие суждения возможны? Другой вариант — *идеалистическая трактовка:* являются ли идеи, содержащиеся в математических утверждениях, врожденными, и если это так, то почему мы все обладаем одной и той же версией этих идей?
19

Две названные трактовки вопросов как бы предрасположены к двум ответам, концепциям природы математики — математическому априоризму и математическому идеализму, причем под последним я понимаю комплекс убеждений о врожденном характере математических истин.

Платон, Лейбниц, Кант, Гуссерль, неокантианцы, равно как и многие современные философы науки и философы математики, мне представляется, тяготеют к данным двум трактовкам вопроса об обусловленности содержания математики не эмпирической реальностью и не индивидуальной субъективной реальностью. У Платона концепции математического априоризма и математического идеализма существуют в неразвито слитном виде в рамках представлений о ноэсисе и дианойе. Лейбниц развернул эти представления в направлении математического идеализма, а Кант использовал фрагменты концепции Лейбница при построении основ собственно математического априоризма. Как я утверждаю, после Канта математический априоризм постоянно ослаблял свои позиции под давлением математической практики, однако в философском плане его позиции все более совершенствовались, становились все более изощренными.

3. Впервые, по-видимому, идея неэмпирического и в то же время не индивидуально-субъективного статуса математических утверждений была высказана Платоном в «Федоне» и «Федре» и развита в диалоге «Государство», книгах V—VII (1]. (Анализ взглядов Платона применительно к существованию математических объектов, см. [2]. Но я хотел бы обратить внимание именно на статус математических утверждений, а не объектов). Задавая вопрос, как возможны в мире чистых идей математические утверждения, Платон привлекал для ответа концепцию ноэсиса и писал, что одной из разновидностей интеллигибельного выступает такое, в котором предположения выщвигаются как гипотезы, исходящие не из чувственных объектов, но из чистых идей, они разворачиваются через чистые идеи и заканчиваются в чистых идеях. Утверждения геометрии и арифметики в той части, в которой они имеют дело с идеями числа и фигуры, подпадают под власть ноэсиса. Однако в то же время Платон указывал, что геометры

исходят в своих рассуждениях из эмпирических фигур, как бы имея их исходным пунктом. Поэтому утверждения геометрии остаются на уровне дианойи, не добираясь до ноэсиса — чистой диалектики идей [3]. В частности, геометрические доказательства имеют в виду чертежи, т.е. конкретные (индивидуальные) математические объекты, а не фигуры вообще [4]. Интересно, что важные соображения о соотношении ноэсиса и дианойи в математическом дискурсе, высказанные устами Сократа в контексте разговора об идеальном государстве, о благе и умопостигаемом мире, Платон счел нужным представить в концентрированном виде в окончании этого фрагмента разговора во второй раз, как бы затверживая разбросанные по тексту диалога соображения. Главкон, внимающий Сократу, повторяет то, как он понял его мысль: «Я понимаю, хотя и не в достаточной степени: мне кажется, что ты говоришь о сложных вещах. Однако ты хочешь установить, что бытие и все умопостигаемое при помощи диалектики ("ноэсиса". — *А. Б.)* можно созерцать яснее, чем то, что рассматривается с помощью так называемых наук, которые исходят из предположений. Правда, и такие исследователи бывают вынуждены созерцать область умопостигаемого при помощи рассудка («дианойя». — *А.Б.),* а не посредством ощущений, но поскольку они рассматривают ее на основании своих предположений, не восходя к первоначалу, то, по-твоему, они и не могут постигнуть ее умом, хотя она вполне умопостигаема, если постичь ее первоначало. Рассудком же ты называешь, по-моему, ту способность, которая встречается у занимающихся геометрией и им подобных. Однако это еще не ум, так как рассудок занимает промежуточное положение между мнением и умом» [1 (Государство. Книга VI. Т. 3. С. 294)].

Таким образом, главными моментами платоновской концепции, объединяющей в себе в неразвитом виде и априористскую и идеалистическую трактовки, были: 1) промежуточное существование математических утверждений, расположенных между эмпирией (восхождение вверх, анализ в направлении от эмпирических основоположений) и миром эйдосов (спуск вниз, синтез в направлении от эйдосов числа и фигуры к сочетающим их утверждениям); *2)* познание математических истин как обращение к врожденному душе знанию о мире эйдосов; 3) синтетический характер математических суждений. Как будет показано далее, пункты 2 и 3 хорошо совместимы с априористской и идеалистической трактовками вопроса о неэмпирических и несубъективных основаниях математики.

4. Развитие взглядов Платона было осуществлено Лейбницем. Он ввел само понятие «истины априори», относящейся к свойствам некоторой структуры, существующей независимо от того, есть ли чти структура в эмпирическом мире (по Лейбницу, в мире простых субстанций) [5]. Сделано это было следующим образом. Имеются лиа вида истин — истины разума и истины факта. Истины факта ситуативны, и противоположные к ним возможны при некоторых лругих обстоятельствах. Истины разума необходимы, и противоположные к ним утверждения невозможны, ибо из них *выводится* противоречие. Истины разума посредством анализа сводимы к все нолее и более простым, покуда мы не приходим к исходным (прими гивным) истинам разума и к составляющим их понятиям. Определение примитивных истин разума не может быть дано, и они не могут быть доказаны. Тем самым Лейбниц использовал декартовское «непосредственное знание» как прямое усмотрение истины (интеллектуальная интуиция). В то же время противоположные к ним утверждения *непосредственно* противоречивы. Далее Лейбниц вводит понятие «истины априори». По Лейбницу, априори суть истины, необходимо следующие из исходных истин разума. То есть априори есть логически необходимые (выводимые) истины. Эти истины имеют аналитический характер (хотя сами понятия аналитического и синтетического были введены Кантом). В частности, вся информация, содержащаяся в теоремах геометрии,

согласно Лейбницу, содержится в исходном понятии пространства. Естественно, такая точка зрения не удовлетворяла Канта, предполагавшего синтетический характер математических утверждений. По мнению В. Тэйта, «это истолкование Лейбнииа дало основание немотивированному тезису Канта[3], высказанному им в Трансцендентальной Эстетике, что пространство не есть понятие» [3, p. 40].

5. При построении концепции математического априоризма Кант использовал представления, разработанные Платоном и Лейбницем. У Платона, как мне кажется, Кантом заимствованы два положения;

1) он воспринял тезис о причастности математических утверждений к сфере внеопытного знания и даже усилил его, отказавшись от промежуточного статуса математических утверждений (отрицая чувственные основания математических утверждений, в частности воплощенные в чертежах эмпирические прообразы геометрических фигур как важные для рассуждений геометров);

2) он признал наличие нового знания в выводимых (из исходных) математических утверждениях, выразив это в тезисе о синтетическом характере математических утверждений.

От Лейбница Кант унаследовал главным образом понятие «истины априори», отказавшись в то же время от ее аналитического характера и от чисто логической выводимости априорных истин из исходных примитивных.

С точки зрения собственно математического априоризма эти заимствования зачастую воспринимаются как источник неясностей, недоразумений и внутренних несогласований. Например, как отмечал Б. Рассел [6], а затем Ф. Китчер и ряд других авторов, важные недоразумения проистекали из смешивания Кантом априорного как процесса познания и как его результата — априорных суждений. Как указывал Рассел, это именно неправомерное смешивание: априорный процесс познания не обязательно влечет за собой априорные суждения, и наоборот (например, априорные суждения могут быть результатом апостериорного познавательного акта) [6, p. 21]. Предложенные Кантом критерии априори — необходимость и непосредственная универсальность — отнесены им не только к суждениям, но и к самому процессу познания. Но в таком случае априорные познавательные акты приобретают черты декартовского и лейбницевского прямого усмотрения интеллектуальной истины, что не только устанашшвает дополнительный мостик между концепциями Канта и Лейбница, но и, в принципе, подводит к лейбницевскому тезису об аналитичности истины априори. Применительно к собственно математическому априоризму в его кантовской (классической) версии эти нестыковки приводят к внутренним предпосылкам развития, предполагают процесс «отлаживания» философских позиций. В частности, в данном случае дальнейшее развитие математического априоризма характеризовалось отказом от априорности процесса математического познания (т.е. стало ясным, что схемы доказательств не являются априорно данными).

6. Концепция синтетического априори как самостоятельная эпистемологическая концепция не сводится к заимствованиям, но имеет свои центральные утверждения. И именно Кант в границах этой концепции сформулировал собственно математический априоризм — ту его версию, которая стала классической и от которой можно отсчитывать историю математического априоризма. Вопрос об обусловленности математики субъектом в рамках этой версии трансформировался в вопрос о том, существуют ли априорные основания познания, обеспечиваюшие именно такие (а не другие) основания математики и структуру математического дискурса. Ответ Канта — ядро программы математического априоризма, его центральный тезис — звучал так: у математики — субъективные основания, и они суть априорные основания человеческого познания. Имеется априорное синтетическое созерцание в формах пространства и времени, и математика единственна именно потому, что единственно это созерцание. Это созерцание, продолжал Кант,

реализуется как конструирование[4]. Такое конструирование начинается с конструирования понятий математических объектов. Так, в геометрии любой теореме об окружностях предшествует конструирование понятия «окружность» через постулаты и аксиомы геометрии (в данном случае особенно важен постулат, что из любой точки на плоскости можно провести окружность любого радиуса). Для этого у нас есть неэмпирическая интуиция, представляющая либо чистое воображение (формальная интуиция), либо, как пишет Кант, чистую форму чувственной интуиции, накладываемую на эмпирию посредством рисования чертежа и т.п. действий. Указанная неэмпирическая интуиция универсально применима при

23

конструировании всех возможных геометрических фигур (скажем, разных треугольников). Затем следуют доказательства, использующие ранее созданные (сконструированные) понятия. Доказательства, делящиеся в математике на дискурсивные (понятийный вывод) и на демонстрации (при которых в мышлении удерживается его объект, используется «формальная интуиция объекта»), в обоих случаях представляют собой конструирование, т.е. утверждается, что доказательство распадается на два типа конструирования — на понятийный вывод и на демонстрацию с удержанием объекта в мышлении. Независимость от чувственного опыта в обоих типах конструирования — первая важнейшая черта математических суждений. Кстати, каждое математическое суждение по самой сути конструирования напрямую соотносимо с априорным синтетическим созерцанием (для каждого суждения я созерцаю, что «это именно так»). Соответственно, я полагаю, что Ф. Китчер не прав, когда он при описании «априористской программы» делит суждения в цепочке доказательного вывода на первичные (соотносимые с априорным созерцанием) и вторичные (вывод, согласно правилам, сохраняющим априорное созерцание *первичных* суждений) [7]. Вторая важнейшая черта — синтетический характер математических суждений. В отличие от аналитических суждений, в которых предикат содержится в субъекте суждения и используется принцип непротиворечия (скажем, таково суждение «тело протяженно»), синтетические суждения опираются на принцип непротиворечия и на формулу «предикат не содержится в субъекте суждения, но состоит с ним в связи»[5]. Например, суждение, что площадь трапеции равна произведению высоты на полусумму ее оснований, не является аналитической истиной и не имеет логического характера. Наконец, прикладная значимость математики обуслоатена применимостью пространства и времени как формальной интуиции к «внешнему чувственно воспринимаемому миру» в виде чистых форм чувственной интуиции. Тем самым Кант тяготел ко взгляду, что прикладная математика также априорна [3]. Разъясняя это положение, Кант пишет: «Исследуя выше понятия пространства и времени, нетрудно было дать понять, каким образом они, будучи априорными знаниями, тем не менее необходимо должны относиться к предметам и делают возможным синтетическое знание о них независимо от всякого опыта. В самом деле, так как предмет может являться нам, т.е. быть объектом эмпирического созерцания, только с помощью таких чистых форм чувственности, то пространство и время суть чистые созерцания, a priori содержащие условие возможности предметов как явлений, и синтез в пространстве и времени имеет объективную значимость» [8].

24

7. Концепция математического априоризма, предложенная Кантом, должна учитывать две основные группы факторов. Во-первых, в философском (концептуальном) плане она должна быть представлена как можно более изящно и полно. Все возможные нестыковки, двусмысленное использование понятий должны быть устранены, а отсылки и пересечения с другими философскими концепциями природы математики — четко обозначены. Математический априоризм, как я уверен, успешно справляется с этой задачей, и именно поэтому он пользуется столь большим влиянием среди философов

математики. Во-вторых, математический априоризм должен соответствовать математической практике, т.е. тому положению дел, которое наблюдается в реально функционирующей («работающей») математике. Именно в этом своем качестве математический априоризм представляет собой программу исследования и обоснования математики[6]. Конечно, математическая практика разнообразна, и ни один отдельно взятый факт, утверждение (теорема), пример или контрпример не могут поколебать математический априоризм. Относительно отдельных «сингулярных» фактов он неуязвим. Однако в математике есть факты и другого рода. К ним относятся значимые кластеры теорий, включая идеологию этих теорий, массивы часто используемых теорем, принятые и распространенные типы математического дискурса, основополагающие приложения и принципы использования математического знания в этих приложениях. Это — интегральные факты математики. С ними любая философская концепция математики вынуждена считаться — в противном случае она будет восприниматься как красивая игрушка философов математики, далекая от реальной жизни. Именно о воздействии таких фактов на математический априоризм и пойдет дальше (начиная с п. 9) речь.

8. Предваряя возможное возражение, выскажу один важный дополнительный тезис. Однажды возникнув, концепция математического априоризма развивается. В этом плане хотелось бы поспорить с теми кантоведами, которые резко отрицательно относятся к попыткам модернизации взглядов Канта. Мне предстаапяется, что такой подход к Канту не продуктивен. Математический априоризм — не сформировавшаяся единовременно, а затем застывшая концепция. У Канта не следует искать то, что как бы гениальной предусмотрительностью было заложено им в концепцию математического априоризма с целью полностью учесть будущую математическую практику. Не надо полагать Канта провидчески поднявшимся над горизонтом доступного ему современного состояния математики, не надо полагать, что у Канта содержатся ответы на псе вопросы, поставленные математикой последующих эпох. Я исхожу из того, что математический априоризм развивается, что исследователи после Канта не просто читают и разъясняют его взгляды, а делают реальное дело. Они снимают неопределенности во взглядах Канта, истолковывают неясности (о которых сам Кант и не подозревал) в пользу сохранения центральных положений концепции. Кант предупредил возможное будущее развитие математики и сделал математический априоризм достаточно гибким к возможному воздействию открываемых интегральных фактов именно благодаря тому, что он не все предусмотрел и не все ясно расставил по местам. Конечно, по мере развития математики возникают новые неопределенности, неясности в математическом априоризме, появляются новые вопросы, на которые математический априоризм должен давать ответы. Но эти неясности, неопределенности, вопросы характеризуют более глубокие уровни проработки программы математического априоризма.

9. Как расценивать послекантовское развитие математического априоризма в его соотношении с математикой — как прогрессивный или регрессивный сдвиг программы? Я постараюсь показать, что это был именно регресс.

Первый «удар фактами» по математическому априоризму был нанесен открытием неевклидовых геометрий. После открытия первой из них, гиперболической геометрии[7], были созданы риманова геометрия, проективная геометрия, барицентрическая геометрия, аффинная геометрия, эрмитова геометрия, геометрия Лаггера, неархимедовы геометрии и т.д. В них варьировались разные постулаты и аксиомы геометрии, вводились вообще другие основания, получались новые, отличающиеся от евклидовых результаты. Факты, представляющие собой целый класс основоположений и результатов в рамках новых геометрических теорий, были таковы:

А. Постулаты и аксиомы. Наиболее известные факты относились к основаниям геометрии, ее пятому постулату. Если утверждение, альтернативное пятому евклидову постулату, не приводит к противоречию и влечет за собой продуктивные следствия, то как тогда быть с кантовским видением постулатов? Напомню, что у Канта постулаты суть практические предположения в смысле оснований дальнейшего конструирования. В этих предположениях содержится синтез (синтетическое априорное созерцание), впервые представляющий нам объекты геометрии и задающий их понятия. Постулаты не могут быть доказаны, их обоснование коренится непосредственно в нашем априорном созерцании. Что, возможны *различные* априорные синтетические созерцания?

26

Б. Понятия. Возникают экзотические понятия, возможные в неевклидовых геометриях, но невозможные в евклидовой геометрии. Например, понятие «двуугольник» существует в римановой геометрии, но в евклидовой оно запрещено (такой синтез невозможен). Получается, что возможно вариативное в разных геометриях конструирование понятий. Но как быть тогда с необходимым характером истин априори?

В. Суждения (теоремы). В евклидовой и неевклидовой геометриях имеются не совпадающие по содержанию теоремы. Например, в евклидовой геометрии все треугольники с равными углами подобны, что влечет соотношение их площадей, равное квадрату линейного коэффициента подобия. В гиперболической геометрии это не так. Построить треугольник, подобный данному, но других линейных размеров, нельзя. Насколько можно доверять доказательствам «альтернативных» теорем? Как быть с тем, что процесс доказательства суть конструирование как априорный синтез?

Указанные факты, как видно, затрагивают важные компоненты математического априоризма в том его прочтении, которое приписывалось Канту. Общее мнение математического сообщества той эпохи, как я полагаю, состояло в том, что по математическому априоризму нанесен серьезный удар. Так. А. Пуанкаре считал, что если бы априорное созерцание действительно имело место, то мы бы и не могли себе представить неевклидовы геометрии. Он писал: «...Мы должны спросить себя, в чем состоит природа геометрических аксиом. Не являются ли они синтетическими априорными суждениями, как говорил Кант? Будь это так, они навязывались бы нам с такой силой, что мы не могли бы ни вообразить себе положение противоположного содержания, ни основать на нем теоретическое построение. Неевклидовых геометрий не могло бы быть» [9]. Действительно, общим местом было отождестатение единства априорного созерцания с единственностью евклидова пространства. Евклидовость пространства возводилась, так сказать, не из практики эмпирического оперирования с фигурами на поверхности земли, твердыми телами, натянутыми веревками, лучами света и т.п., а из наличия формы чистой эмпирической интуиции: другая попросту не могла быть мыслима. Эта форма совпадает с формальной интуицией, так что единственно мыслимая прикладная геометрия суть приложение «чистой» геометрии. Аналогично такая же ситуация полагалась и с соотношением чистой и прикладной арифметики.

10. Реакция математического априоризма на представленные факты развития математики в общих чертах может быть представ-

27

лена как комбинация уточнений и допущений, сформулированных Гуссерлем и неокантианцами[8]. Я постараюсь показать, что эта реакция напоминает регрессивный сдвиг программы в том значении, которое приписывалось этому понятию Лакатосом в концепции научных исследовательских программ.

Во-первых, Кант не предсказывал названные новые интегральные факты развития математики. Их пришлось учитывать post factum. С этим были согласны все исследователи послекантовской эпохи. Причем схема такого учета варьировалась. Один из вариантов может быть резюмирован в тезисе «лучшая зашита — нападение». Некоторые неокантианцы интерпретировали открытие неевклидовых геометрий как блестящее подтверждение взглядов Канта: так, Л. Нельсон утверждал, что поскольку астрономически невозможно обнаружить, какая из геометрий верна, то все они должны укладываться в некие более общие посылки неэмпирического происхождения [10, с. 18, 25]. Но аргументацию Л. Нельсона ослабляет то обстоятельство, что у Канта нигде нет прямого утверждения, что наряду с евклидовой геометрией *должны* исследоваться и другие геометрии, не дается никакого намека на то, что геометры должны строить новые системы, варьируя постулаты и аксиомы (хотя Кант и был в курсе некоторых попыток доказательств пятого постулата). Другой вариант ограничивал априоризм в пользу эмпиризма. Например, Г. Гельмгольц полагал, что пространство — интуитивное понятие, а аксиомы следуют из нашего опыта. Третий вариант сводил дело к соображениям удобства. Обращаясь к словам А. Пуанкаре, мы избираем более замечательные для нас объекты, с которыми чаше имеем дело в нашем опыте [9, с. 81]. Таким образом, «блестящее подтверждение», модернизация тезисов априоризма, конвен-циальные допущения в совокупности составляют, по терминологии Лакатоса, оправдание фактов, а не их предсказание.

Во-вторых, пришлось изменить и уточнить некоторые вспомогательные положения математического априоризма, которые Кант связывал с центральным комплексом утверждений о математических суждениях как априорном синтетическом созерцании в форме пространства и времени. В особенности я бы отметил, что была подвергнута сомнению непреложность априорной интуиции как основания доказательства. Так, Ф. Клейн пришел к выводу, что чем дальше мы продвигаемся в создании сложных математических теорий, тем более интуиция нам изменяет. Очевидность обманчива. Л. Больцман эмоционально писал по этому поводу: «Я вполне согласен с тайным советником Клейном в отрицательном отношении к учению Канта. Я совершенно не понимаю, как можно говорить о доказательствах из наглядного представления. Когда я читаю Канта, я совершенно не понимаю, как разумный человек может писать

28

это. Наглядное представление ровно ничего не доказывает. Наглядное представление есть лишь повторение того, что мы воспринимаем чувственным образом. Я не могу совершенно понять того, что человек приносит с собою наглядное представление пространства, которое находится над опытом или до опыта; я не знаю, как это следует себе представить» [10, с. 124]. Конечно, Больцман огрубил ситуацию и сделал из нее сугубо эмпирический вывод. В действительности речь может идти только о *не* наглядности процедур доказательства, т.е. об отсутствии ясного отбрасывания ложных гипотез внелогическим путем (через наличие априорного созерцания). Схожее соображение об ущербности априорной интерпретации процесса математического доказательства высказывалось также Ф. Китчером в контексте его критики математического априоризма. Китчер указывал, что для длинных доказательств невозможно посредством многократного повторения рассуждений и освежения их в памяти охватить эти доказательства как единый акт. Подходя к концу, мы забываем начало. «Таким образом, когда мы следуем длинным доказательствам, мы теряем гарантии априорности их начальных шагов» [7, p. 45]. Я согласен с Китчером за исключением упомянутого мною ранее его утверждения, что эти гарантии состоят всего лишь в «сохраняющих априорность правилах» (p. 38): ближе к Канту было бы сказать, что, когда мы следуем длинным доказательствам, мы не можем совместить априорную интуицию отдельных шагов доказательств (промежуточных суждений) с интуицией суждения (теоремы) в целом. Эту ситуацию подметил Пуанкаре, когда в главе *«Математическое творчество»* книги *«Наука и метод»* указал, что многие люди не способны принять вывод в целом при понимании его отдельных шагов. Для понимания математического доказательства, считал Пуанкаре, необходимо обладать интуицией порядка расположения элементов доказательства. «Понятно, — писал Пуанкаре. — что это чувство, этот род математической интуиции, благодаря которой мы отгадываем скрытые гармонии и соотношения, не может быть принадлежностью всех людей. Одни не обладают ни этим тонким, трудно оцениваемым чувством, ни силой памяти и внимания выше среднего уровня, и тогда они оказываются совершенно неспособными понять сколько-нибудь сложные математические теории. Другие, обладая этим чувством лишь в слабой степени, одарены в то же время редкой памятью и большой способностью внимания. Они запомнят наизусть частности, одну за другой; они смогут понять математическую теорию и даже иной раз сумеют ее применить, но они не в состоянии творить. Наконец, третьи, обладая в более или менее высокой степени той специальной интуицией, о которой я только что говорил, не только смогут понять математику, не обладая особенной

29

памятью, но они смогут оказаться творцами, и их поиски новых открытий будут более или менее успешны, смотря по степени развития у них этой интуиции» [9, с. 311—312]. Видно, сколь далека эта интуиция от всеобщей и единой синтетической априорной интуиции истинности математических суждений! Я считаю, что можно найти общую почву соображений Клейна, Больцмана, Китчера, Пуанкаре, в чем-то ослабив каждое из них: принять математические утверждения и доказать истинность математических утверждений, принять и обосновать — разные вещи. Совокупность математических суждений («цепочка силлогизмов в доказательстве») обладает качественно иными свойствами по сравнению с каждым отдельном суждением. Поэтому логический аппарат в математике прямым усмотрением истинности отдельных суждений незаменим. Отсюда необходимо ограничение математического априоризма в части отождествления процедуры доказательства с конструированием как ступенчато осуществляемым априорным синтетическим созерцанием. Априоризм должен потесниться и уступить часть своего «царства» логической процедуре. Однако очевидность, собственно априорное созерцание, остается с суждениями, за границы априоризма выводится только процедура их соединения, сведения в систему, доказательного обоснования.

В-третьих, вместо априорного созерцания в форме евклидова пространства возникло допущение о наличии единого фундамента, абсолютного пространства, спецификациями которого являются пространства всех геометрий. Это усовершенствование математического априоризма, предложенное Л. Нельсоном и следующее из отмеченной ранее стратегии «лучшая защита — нападение», получило внутреннее оправдание. Именно синтетические априорные суждения допускают противоположные как осмысленные, хотя у Канта не говорится, что они истинны наряду с евклидовыми. Неопределенности у Канта позволяли принять такую трактовку, а совместимость различных геометрических систем (так, гиперболическая планиметрия выполняется на псевдосфере, расположенной в евклидовом трехмерном пространстве; «Эрлангенская программа» ф. Клейна устанавливает единые основания различных геометрий через классификацию групп движений; другой вариант взаимосвязи геометрий был предложен в концепции Б. Римана, в которой «основным понятием является не фундаментальная группа, а фундаментальная (произвольная) квадратичная форма, являющаяся обобщением понятия расстояния между двумя бесконечно близкими точками» [11]. Указанная концепция подводила математическое основание под подобную точку зрения[9]. В то же время сохранялась и более консервативная позиция, согласно которой равноправие различных геометрий есть только в сфере математики (как математических теорий) и в теоретической физике (как теорий, имеющих приложения в физике), но в фундаменте находится именно евклидова геометрия как схема нашего созерцания (В. Майнеке). Все остальные геометрии доступны нам постольку, поскольку они ограниченно моделируются с помошью евклидовых образов.

11. Что получилось у Гуссерля и неокантианцев, в чем заключалась модификация математического априоризма?

Г. Гуссерль испытал влияние марбургской школы и Б. Больцано. Основные идеи Гуссерля о математике содержатся в его работе «Начало геометрии» [12]. Гуссерль полагал, что сознание необходимо очистить от эмпирического содержания, поскольку мы конституируем оглушения в мышлении. А так как акты сознания есть оценочные акты, то при очищении сознания от эмпирии в итоге остается последнее неразложимое единство сознания, его интен-циональность как направленность на предмет. Содержание интенциональности, т.е. *на что* направлено наше сознание, Гуссерль называет ноэмой, а форму интенциональности, т.е. *как* сознание направляется на предмет, он обозначает как когито («я думаю, что»). Когито обеспечивает интенциональность как таковую, а ноэма обусловливает само содержание сознания, включая возможные вопросы об объекте [13]. Интенциональность задает порядок ощущений (то, что Гуссерль называет феноменологической редукцией), в том числе предполагает отбрасывание одних, возможных, но не реализовавшихся ощущений, и концентрацию на других ощущениях. Одна из трех разновидностей феноменологической редукции, эйдейтическая редукция (варьирование данных воображения и отбор образов-иллюстраций), лежит в основе математики, логики, этики и эстетики [14]. Как выражается Гуссерль, феноменологическая редукция выводит на разные «онтологические регионы» интенциональности, и в том числе на «онтологический регион» математики (кстати, близкая конструкция была дана в статье Душкина [15]). Можно сказать, что это и будет аналог кантовского ареала математики как области, содержащей суждения, представляющие априорное синтетическое созерцание. Состав математического онтологического региона весьма разнообразен, например, в нем может присутствовать мысленное осуществление некоторых действий по воображаемому скручиванию, склеиванию и т.п. некоторых поверхностей. Р. Трагессер показывает, что при подобных действиях нам обязательно приходится достраивать наше представление объектов, с которыми мы действуем. По-настоящему «у нас есть иллюзия установления синтетических истин априори» [13, p. 97]. Таким образом, у Гуссерля происходит отказ от предзаданности априорных форм созерцания. Ноэмы эволюционируют, что обеспечивает расширение математики.

Попытки усовершенствовать априоризм в его части, предлагающей обоснование математического знания, совершались также представителями неокантианских школ и напраштений. Взгляды сторонников «физиологического» (Ф. Ланге, Г. Гельмгольц) и «психологического» (Л. Нельсон) направлений, внесших значительный вклад в эволюцию математического априоризма, были представлены ранее (см. п. 10). Кроме того, здесь следует упомянуть две школы последователей Канта — Марбургскую и Баденскую.

В Марбургской школе — Г. Коген, П. Наторп, Э. Кассирер [16] — гипотеза занимает место априорных форм, и с ее помощью производится упорядочивание созериания.

Представители Баденской школы (В. Виндельбанд, Э. Ласк, Г. Риккерт, последний в наиболее явной форме [17], — предлагают другой вариант: безличное сознание конструирует математические суждения, которые априорны с позиций отдельного индивидуума.

Видно, что реконструировать общую позицию неокантианцев, обрисовать единое состояние исследовательской программы математического априоризма второй половины XIX — первого десятилетия XX в. крайне тяжело. Внутренние разночтения между ними и даже прямо противоположные взгляды на некоторые вопросы (как, например, Г. Гельмгольца, Л. Нельсона и В. Майнеке о равноправии различных геометрий с точки зрения наличия их априорного созерцания: Гельмгольц — полностью равноправны, Нельсон — абсолютная геометрия в основании созерцания, а все остальные геометрии производны, Майнеке — евклидова геометрия в основании созерцания) не позволяют построить приемлемую для всех них во всех частях схему. Тем не менее относительно дальнейшего развития математического априоризма можно выделить ряд черт, фиксирующих его регресс. Конечно, ядро программы, утверждения об априорном синтетическом характере математики, о том, что в основе этого знания лежит априорное созерцание, осталось. Однако вспомогательные утверждения и способы их защиты претерпели изменение.

Ослабление программы математического априоризма заключалось, на мой взгляд, в следующем:

— математические утверждения схватываются актом синтетического созерцания, представляющим собой последовательность процедур (конструирование) в соответствии с формальной интуицией пространства и времени. Но доказательство этих утверждений все равно нужно, и логический вывод неустраним. Иными словами, мы «видим», что данное утверждение истинно, что это так на самом деле, мы понимаем смысл утверждения, но такого видения мало. Необходимо также системное представление, обнаружение связи данного утверждения с другими утверждениями, т.е. доказательство. Здесь — простор дедукции. Из доказательства в его «идеальном» исполнении (как *последовательности* силлогизмов без пробелов и прямых отсылок к интуитивной самоочевидности) априорное созерцание изгоняется;

— представления о пространстве и, в меньшей степени, времени как формах априорного созерцания, данные Кантом, теряют определенность. Например, неясно, что понимается под пространством и насколько можно сохранить его евклидово представление;

— принимается положение, что математика может расширяться и выходить за пределы наглядности, очевидности и единственности теорий;

— априорное созерцание распространяется главным образом на «чистую» математику, но не на приложения (прикладную математику).

12. Одновременно со становлением неокантианства и после его расцвета появились новые факты, требующие дальнейшего изменения программы математического априоризма. Эти интегральные факты были «вписаны» в установившуюся в начале XX в. картину формально-аксиоматического построения математики. В частности, в ее рамках был создан новый образ геометрии. Такой взгляд на геометрию отчетливо выразил П.К. Рашевский. Он писал: «Можно сказать, что геометрия как математика — это геометрия, рассматриваемая с точки зрения ее логической структуры» [18]. Конечно, Гильберт не придерживался столь радикальной позиции, считая себя последователем Канта. В своей метаматематике, как известно, он вводил финитные ограничения. Кроме того, разделяя объекты математики на формальные и идеальные, Гильберт соотносил идеальные объекты с априорным синтетическим созерцанием[10]. Тем не менее установившийся благодаря работам Гильберта и Геттингенской школы общепринятый взгляд на математику существенно сместил акценты. Математика начинает рассматриваться как совокупность формальных структур, основания которых принимаются конвенциальныш путем [19]. Ограничения формализма, установленные теоремами Геделя, сходными результатами Тарского и Куайна и др., не поколебали указанного общего убеждения, развитого далее

(как бы в противовес ограничениям) коллективом Н. Бурбаки. Интересно, что сам Гильберт спокойно отнесся к результатам Геделя, считая, что его предсташтения о математике теоремами Геделя поколеблены не были, поскольку его программа не сводится к конвенциально-формальным компонентам. Отмечу также, что предпринятая Ершовым и Самохваловым попытка «спасения» программы Гильберта реабилитирует именно взгляд Гильберта, а не распространенный образ формализма, сложившийся в сознании математического сообщества [20].

33

13. Совсем новый, постнеокантианский математический априоризм, я полагаю, демонстрирует дальнейшее отступление в качестве программы обоснования и исследования современной математики.

В.Я. Перминов предлагает вариант, предел отступления априоризма в котором положен стабильностью праксеологического конструирования. Граница отмечена двумя соединенными межевыми знаками: стабильность однажды доказанного и принятие суждений не на формально-логических основаниях. Вот, по-моему, центральный тезис данной конструкции: «Подтверждение (проверка доказательства) математической теоремы представляет собой всегда конечный процесс, сводящийся к установлению возможности или невозможности некоторых комбинаций в конечном множестве элементов, т.е. к элементарным праксеологическим констатациям, которые уже не могут быть подвергнуты ревизии со стороны логики или опыта. Доказательства математических теорем являются столь же законченными, сколь законченной может быть наша практическая деятельность по упорядочению конечного числа элементов» [21]. Здесь уже затрагивается происхождение априорных форм в практической деятельности — вещь, не обсуждавшаяся в неокантианстве (я бы сказал, что ближе всего к этой позиции Э. Гуссерль, полагающий из других оснований пластичность ноэм).

Вторая ветвь новейшего математического априоризма, далеко ушедшего от своего «прародителя», хорошо исследована А.Н. Кричевцом. Он считает, что возможно развивать натуралистическую трактовку кантианства, при которой концепция синтетического априори сопоставляется с данными современного естествознания и, более того, синтезируется с некоторыми «философски нагруженными» разделами естествознания, в первую очередь с математическим естествознанием и теорией искусственного интеллекта [22]. А.Н. Кричевец стремится показать, что возникновение и история эволюционизма дают материал для рассмотрения гипотезы об эволюционной нестабильности самих априорных форм [23]. Как утверждает А.Н. Кричевец, «кантовские априорные формы следует, с одной стороны, понимать в гораздо более широком, чем у Канта, смысле, подводя под кантовскую схему все без исключения теории математического естествознания, а с другой стороны, в гораздо более, слабом смысле, связывая их развитие с опытом, хотя и не сводя к нему, т.е. не отказываясь полностью от их априорности (однако смысл априорности придется уточнить)» [23, с. 3]. Основные авторы, работы которых в этой связи привлекает А.Н. Кричевец, — К. Лоренц [24] и Ж. Пиаже [25], а если брать шире, то направления эволюционной эпистемологии и генетической эпистемологии (во втором случае иногда предпочитают употреблять термин «ге-

34

нетическая психология», или «эволюционная психология»). Добавлю, что подходы к признанию изменения априорных форм были, как мне кажется, намечены Гуссерлем (через эволюцию ноэм), однако для неокантианцев убеждение Канта в стабильности априорных форм еще сохранялось непоколебимым.

Третий вариант — совмещение структурализма и формального подхода к математике как совокупности формальных структур, с одной стороны, и трансцендентализма — с другой. Данный вариант развивается Г.Б. Гутнером [2, с. 17]. Суть этого подхода заключается в том, что предполагается априорное сингетическое созерцание не суждений, а математических структур в целом. Г. Гутнер пишет:

«Математический объект существует постольку, поскольку сконструирован. Однако математика не есть простое конструирование объектов. Она представляет собой решение задач, а потому каждый объект появляется в ней в рамках более общей структуры, продуцируемой познавательными способностями для *того,* чтобы получить такое решение. Значит, объект существует, поскольку встроен в такую структуру в виде ее элемента. Сама структура предстает как конструкция способности воображения, и о ней может быть поставлен вопрос — в рамках какой еще более общей структуры она существует» [2, с. 41]. Интересно, что и у Гутнера, и у Кричевца большое значение придается анализу рефлектирующей способности суждения («Третья критика» Канта). Для Гутнера, как мне представляется, идея наличия рефлектирующей способности суждения дает возможность избежать предварительной заданности самых общих структур и обосновать тем самым эволюцию математики в направлении возникновения новых и неожиданных теорий.

14. Казалось бы, математический априоризм, усовершенствовав свою аргументацию и ослабив ряд исходных допущений, смог адаптироваться к современной математике. Однако математика не стоит на месте, и возможны, я бы даже сказал, назревают, новые интегральные математические факты, которые могут потребовать дальнейшего ослабления математического априоризма.

Эти факты связаны в первую очередь с изменившимся характером приложений математики. Возникло много качественных приложений, часто наблюдается аллегорическое использование языка математики. Согласно классификации В.В. Налимова, только в одном из трех направлений математизации (он называет его «эмпирико-математическим») реализуется традиционное построение математических моделей, исходя из эмпирических данных. Построение таких моделей, как писал В.В. Налимов, «всегда требует определенных априорно задаваемых предпосылок» [26]. В двух других, новых направлениях («параметрическом» и «метафоро-математическом», или даже «мифо-математическом», как предпочитает называть его Налимов) математические модели либо выступают в роли метафор, «существенно облегчающих осмысление наблюдаемых явлений» [26, с. 106], либо «в роли мифа, которому исследователь дает новое раскрытие так же, как когда-то это делал мыслитель древности с мифами своего времени... Так, предметная область обогащается идущими от математики новыми идеями, порождающими новое видение Мира» [26, с. 108]. Здесь уже не просматривается априорное синтетическое созерцание, а посему в новых видах приложений сохранение объясняющей (возможность применения математики к изучению реальности) функции априоризма проблематично.

Во вторую очередь под сомнение ставятся некоторые фундаментальные для целых классов теорий утверждения математики. Я имею в виду тот спор, который сейчас происходит относительно доказательств Кантора в теории множеств. Если, как полагают некоторые исследователи[11], рассуждения в доказательстве с так называемой «диагональной процедурой» некорректны по причине допускаемого нарушения определения актуально бесконечного (завершенного) множества и введения не-множеств [27], то большое количество результатов во многих областях математики оказывается под вопросом.

В-третьих, но наверняка не в последних, возник и стремительно разрастается массив «условных» суждений (условно истинных теорем). Так, если какое-либо утверждение относительно простых конечных групп получено с помощью машинного счета, то из него вытекают следствия, чаще всего доказываемые обычным путем, без применения компьютера. Однако истинность всей этой цепочки результатов (суждений) условна, поскольку в обычной процедуре доказательства проверить истинность исходного машинно верифицированного суждения невозможно, а наша интуиция ничего не говорит нам о том, верно это утверждение или нет. Кстати, похожая ситуация складывается с априорным синтетическим созерцанием суждения «для раскраски любой карты на трехмерной сфере достаточно четырех красок»: у нас нет интуиции, так ли это. Возможно, есть случай, когда потребуется пять красок. Доказательство не проясняет эту ситуацию, поскольку критическая фаза доказательства требует применения компьютера, и его «ответ» подменяет собой усмотрение истинности.

15. Осталось сформулировать вывод. Мне представляется, что защитникам математического априоризма, настаивающим на его соотнесении с практикой математики, следовало бы задуматься не о том, как повергнуть другие концепции природы математики, а о том, как отступить дальше без значительных потерь, как еще более трансформировать математический априоризм, пожертвовав второстепенными положениями с целью защиты его центральных тезисов.

36

Примечания

[1] Как неоднократно отмечалось, априоризм как философская концепция обладает логической устойчивостью (т.е. его утверждениям может быть придана ясная логическая форма и с несогласованностью некоторых утверждений, равно как и с неясностями, можно успешно справляться). Более того, априоризм не устаревает: последователи априоризма успешно модифицировали исходную концепцию Канта и превратили ее в такие конструкции, которые полностью соответствуют философии своего времени, остаются глубокими и привлекательными для читателей, вдохновленных идеями Канта. Однако я хотел бы подчеркнуть, что в данной статье речь идет не о философии синтетического априори в целом и не о ее истории, не о математическом априоризме как о части априоризма, а о математическом априоризме как специализированном «прикладном» (а точнее, прилагаемом к обоснованию реальной математики) фрагменте данной философии. Этот фрагмент, я полагаю, обладает ценностью для математиков и философов (за исключением небольшого числа специалистов по философии математики, очарованных внутренними ландшафтами математического априоризма и технической сложностью, равно как и славной историей его проблем) главным образом в соотнесении с объектом своего изучения — реальной математикой.

[2] Как справедливо отметил А.Н. Кричевец, здесь и далее по тексту лучше было бы употреблять понятие «синтезируемые» вместо общепринятого «синтетические». Подчеркивание процессуальной стороны синтеза хорошо совместимо с другим основополагающим аспектом концепции Канта — конструированием, Тезисы об априорном синтезируемом созерцании и о конструировании совместно образуют, я считаю, ядро математического априоризма как программы исследования и обоснования математики. Более подробно математический априоризм как *исследовательская программа* описан в пункте 6 настоящей статьи.

[3] В действительности этот тезис у Канта отнюдь не был немотивированным. Чтобы не умножать объяснения и не повторять других авторов, приведу отрывок из только что вышедшей статьи В.А. Шапошникова, в которой подробно рассматривается позиция Канта о том. что пространство не есть понятие, вкупе с примечательной реакцией Павла Флоренского на взгляды Канта: «В одном из примечаний к «Столпу» (1914) о. Павел пишет: «Огромной заслугою Канта было указание, что могут быть объекты, ничем не различающиеся между собою в понятии, для рассудка, но, тем не менее, различимые — так что разница постигается между ними лишь при их наглядном сравнении». Примером таких объектов могут служить симметричные относительно центра сферы и равные между собой сферические треугольники. Флоренский не разделяет ни первоначального вывода, который Кант делал на основании этого факта, что «пространство — не понятие, а реальность, независимая от рассудка», ни позднейшего — что «пространство не понятие, а форма созерцания» [28].

[4] Отдельным вопросом является то, имеются ли наперед заданные правила (схемы) такого конструирования или нет. Этот вопрос применительно к подведению эмпирических явлений под одно правило или суждение, как указывает А.Н. Кричевец, решался Кантом по-разному. В «Критике чистого разума» Кант полагает, что правило или суждение как бы предзаданно и неизменно. В «Критике способности суждения» правило формируется через рефлектирующую способность суждения, оно гибко [23]. Если принимать позднюю позицию Канта, то, как мне кажется, мы вплотную подойдем к взгляду Д. Гильберта, что не существует универсального правила решения всех задач,

[5] Значимость нахождения предиката в связи с субъектом суждения особо отмечает М. Леппакоски [29].

37

[6] Собственно говоря, именно в таком ключе рассматривал математический априоризм Ф. Китчер, хотя у него в явном виде разделение математического априоризма как программы обоснования математики и как самостоятельной философской концепции еще не производилось.

[7] О драматизме этого открытия свидетельствует, в частности, то обстоятельство, что творцы гиперболической геометрии непременно хотели выяснить ее отношение к действительности. Например, Я. Больяи писал: «...Обе геометрии одинаково доступны воображению, и навсегда останется неразрешимым, какая из них является действительной». [30]. Иная позиция была у Н.И.Лобачевского. Он считал, что «как бы то ни было, новая Геометрия, основание которой уже здесь положено, если и не существует в природе, тем не менее может существовать в нашем воображении и, оставаясь без употребления для измерений на самом деле, открывает новое, обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики» [31].

[8] Защитные аргументы неокантианцев собраны в книге В.Я. Перминова [32].

[9] Похожая ситуация, кстати, складывалась и с расширением понятия числа (введение кватернионов и других числовых систем). Насколько я знаю, “числовая” сторона эволюции математики рассматривалась *в* контексте влияния на априоризм Э. Гуссерлем в работах “О понятии числа” (1887) и «Философия арифметики» (1891). Гуссерль ясно осознал проблему эпистемологического статуса «воображаемых чисел», под которыми он понимал отрицательные, иррациональные, комплексные числа, трансфиниты и актуально бесконечные. Основной вопрос, которым интересовался Гуссерль, заключался в том, как возможны интуиция и озарение в случае замены логического мышления механическим оперированием с символами [33]. А.Н. Кричевец предложил гипотезу о «финальной вариативности» эволюции числовых систем, при которой каждый этап вариативности заканчивается объединенным обшим пониманием. Именно с этих позиций А.Н. Кричевец рассмотрел, как введение отрицательных чисел — промежуточного состояния вариативности нововременных числовых систем, «снятого» в финальном акте введения комплексных чисел, было расценено Кантом. Однако современная эволюция числовых (и алгебраических) систем в плане их соотнесения с математическим априоризмом еще ждет своих исследователей.

[10] Более подробно о том, в каких частях и насколько Гильберт при формировании концепции формализма придерживался взглядов Канта, можно прочесть в работе Е.Д. Смирновой [34].

[11] См.: *Петросян В.К.* Общий кризис теоретике-множественной математики и пути его преодоления. М., 1997; *Зенкин А.А.* Ошибка Георга Кантора // Вопросы философии. 2000, № 2. В работах [35; 36] рассуждения Кантора при построении диагональной процедуры оцениваются как противоречивые, хотя авторы не согласны друг с другом относительно соотношения своих позиций и сравнения своего вклада в обнаружение недостатков доказательства Кантора. Хотелось бы отметить, что критика диагональной процедуры Кантора как противоречивого рассуждения, допускающего сначала наличие актуально бесконечного множества. а затем оперирующего с ним как с потенциально бесконечным, присутствовала уже у И.Е. Орлова в его статье [37], что обнаружил В.А. Бажанов [38; 39].

Список литературы

1. *Платон.* Соч.: В 4 т. М., 1990—1994.
2. *Гутнер Г.Б.* Онтология математического дискурса. М., 1999. С. 21—23,
3. *Tait W.A.* Reflections on the concept of a priori truth and its corruption by Karit // Proof and Knowledge in Mathematics / Ed. by M. Detlefsen. N.Y., 1992. P. 40—41.
38
4. *Родин А.В.* Теорема // Вопросы философии. 1998. № 9.
5. *Leibniz G. W.* The monadology and other philosophical writings / Transl. by R. Lotta, London, 1948. P. 33-35.
6. *Russell B.* A critical exposition of the philosophy of Leibniz. London, 1937.
7. *Kitcher Ph.* The nature of mathematical knowledge. N.Y.; Oxford, 1984. P. 38, 39.
8. *Кант И.* Критика чистого разума. Ч. 2. Трансцендентальная диалектика. Гл. 2. О дедукции чистых рассудочных понятий // Кант И. Соч. М., 1964. Т. 3. С. 185.
9. *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983. С. 40.
10. Новые идеи в математике Сб. 8. СПб., 1914.
11. *Визгин В.П.* К истории «Эрлангснской программы» Ф. Клейна // Историко-математические исследования. Вып. XVIII. М., 1973. С. 222—223. "12. *Гуссерль Г.* Начало геометрии. М., 1996.
13. *Tragesser R.* Husserl and realism in logic and mathematics. Cambridge, 1984. P. 80-82.
14. *Winance E.* Intention and nature of Husserl's logic // Philosophia Mathematica. 1965. Vol. 2. N 2, P. 70-71.
15. *Душкин Ю.И.* О возможности «нейтральной» позиции в философии математики и о месте бесконечности в математике // Бесконечность в математике. Философские и исторические аспекты. М., 1997. С. 232.
16. *Кассирер Э.* Познание и действительность. Понятие о субстанции и понятие о функции. СПб.. 1912.
17. *Риккерт Г.* Введение в трансцендентальную философию. Предмет познания. Киев, 1904.
18. *Рашееский П. К.* «Основания геометрии» Гильберта и их место в историческом развитии вопроса // Гильберт Д. Основания геометрии. М.; Л., 1948. С. 10.
19. *Curry H.B.* Outline of a formalist philosophy of mathematics. Amsterdam, 1951.
20. *Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* О новом подходе к методологии математики // Закономерности развития современной математики. Методологические аспекты. М.. 1987. С. 85-106.
21. *Перминов В.Я.* Развитие представлений о надежности математического доказательства. М., 1986. С. 66.
22. *Кричевец А.Н.* Проблема условий возможного опыта в математике, психологии и «искусственном интеллекте» (философский аспект): Автореф. дис. ... д-ра, филос. наук. М., 1999.
23. *Кричевец А.Н.* Априорность и адаптивность. М., 1998.
24. *Lorenz K.* Kant's Doctrine of the apriori in the Light of Contemporary Biology // Learning, Development, Culture. Essays on Evolutionary Epistemology / Ed. H.C. Plotkin. Chichester, 1982.
25. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. М., 1969.
26. *Налимов В.В.* Является ли знание научным в той степени, в которой оно математизировано? Биологический аспект проблемы // Математизация современной науки: предпосылки, проблемы, перспективы. М., 1986.
27. *Бычков СМ., Шашкин Л.О.* Канторовская диагональная процедура и непротиворечивость теории множеств // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 5 (40). М., 2000. С. 297.
28. *Шапошников В.А.* Философия геометрии Павла Флоренского в контексте его учения о природе человеческого

познания // Там же. С. 103.
29. *Leppakoaki M.* The transcendental how. Kant's transcendental deduction of objective cognition. Almqvist Wiksell International, Universitet Stockholms, 1993. P. 54.
30. *Больяи Я.* Аппендикс... М.; Л., 1950. С. 196.
31. *Лобачевский Н.И.* О началах геометрии // Об основаниях геометрии / Под ред. А.П. Нордена. М., 1956. С. 48.

32. *Перминов В.Я.* Философские и методологические проблемы математики. М„ 1986. С. 60-62,
33. *Hill C. O.* Review of Edmund Husserl, Early writings in the philosophy of logic and mathematics. Modern Logic. 2000. Vol. 8. N 1—2, P. 144—145.
34. *Смирнова ЕЛ* Философия, логика и семантика // Философия и логика. М., 1974.
35. *Петросян В.К.* Общий кризис теоретико-множественной математики и пути его преодоления. М., 1997.
36. *Зенкин А.А.* Ошибка Георга Кантора // Вопросы философии. 2000. № 2.
37. *Орлов И.Е.* Существует ли актуальная бесконечность // Под знаменем марксизма. 1924. Кв. 1.
38. *Бажанов В.А.* Ученый и «век-волкодав» // Вопросы философии. 2001. № 11 С. 125-135.
39. *Бажанов В.А,* Очерки социальной истории логики в России. Ульяновск. 2002 Гл. 3.

КОММЕНТАРИИ

В.А. Бажанов

Идея статьи Алексея Георгиевича мне показалась весьма интересной и заслуживающей пристального внимания. Действительно, в определенном смысле эволюцию априоризма в математике в послекантовский период можно интерпретировать как регресс (если использовать термины, заимствованные из концепции И. Лакатоса, то регресс программы, связанной с поиском понимания природы математического знания).

Регресс, понимаемый как своего рода ослабление исходных принципов, вообще характерен для процессов роста знания. Это один из важнейших механизмов роста научного знания, особенно широко представленный в истории математики и логики. Именно так, например, через ослабление, эволюционировала логика от классической к неклассической (отказ от тех или иных основных законов логики). Другим мощным механизмом здесь яапяется выбор альтернативных существующим законов (своего рода принцип «дихотомического» формирования базисных структур и оснований теорий и концепций). Достаточно очевидно, что математический априоризм (или программа априористского истолкования математики) развивался от достаточно жестко фиксированной точки зрения к более размытым и слабым, в большей степени соответствующим глубине понимания сложности предмета и задачи.

Полагаю, что концепция априоризма в математике может допускать несколько не вполне эквивалентных истолкований, и она не обязательно, как утверждается в статье Алексея Георгиевича, означает «обусловленность математики субъектом» в смысле «существования априорных оснований познания». Тогда не стоит рассматривать и открытие неевклидовых геометрий как «удар» по этой позиции. Кроме того, я не соглашусь с автором этой интересной статьи, когда он утверждает, что «признание идей, содержащихся в математических утверждениях, врожденными» означает «идеалистическую трактовку» (природы математики). Я вообще не склонен употреблять понятие идеализма без привязки к известной марксистской точке зрения, но если и пытаться это сделать, то по отношению к классической концепции платонизма в математике.

Г.Б. Гутнер

Несмотря на ясность заявленной позиции, А.Г. Барабашев оставляет непроясненным, в чем именно состоит описываемый им регресс. Обращаясь к приведенным в статье историческим примерам, можно увидеть две расходящиеся линии трансформации априоризма. Хотя обе эти линии связаны с тем, что весьма емко обозначено словом «регресс», они выражают противоположные тенденции. Одна из них состоит в последовательном сокращении сферы априорного знания. Другая же, как ни странно, напротив, ведет к существенному (подчас неограниченному) расширению априорной сферы. Однако это расширение достигается за счет размывания самого понятия «априори» и смешению априорного с другими видами представлений. Эти две линии не различены автором, хотя указания на оба вида регресса в статье присутствуют.

К регрессу второго типа следует, по-видимому, отнести и феноменологию Гуссерля, вплетающую априорные представления в структуру опыта, и неокантианские реконструкции научной мысли, делающие априорной любую теоретическую идеализацию. Дальнейший регресс можно тогда увидеть в явной профанации априоризма в ряде современных работ, когда статус априорных суждений присваивается общим эмпирическим гипотезам, выступающим в качестве предварительных условий некоего частного опыта.

Гораздо интересней обсудить регресс первого типа. В общем виде его можно представить как последовательный отказ от априорности тех представлений, которые не выдерживают, следуя выражению А.Г. Барабашева, «удара фактами». Например, можно допустить, что открытие неевклидовых геометрий и их последующее использование в естествознании требует перевода евклидовых постулатов в разряд эмпирических гипотез. Не исключено, что появление теории относительности дает возможность поступить так же с принципом причинности. Но при таком регрессе сохраняется некий остаток, априорный в строгом смысле слова.

41

Вопрос в том, что это за «строгий смысл». Понять это можно рассуждая от противного. Попробуем допустить, что все наши представления так или иначе происходят из опыта (понятого в самом широком смысле), т.е. что все они суть результаты интерпретации чувственных данных, адаптации к окружающей среде, прагматически оправданных конвенций (список можно продолжить). Если мы это принимаем, то перед нами стоит задача описания происхождения всех формальных условий знания (включая самые обшие), доказательства их адекватности внешним обстоятельствам, объяснения их релевантности постaаенным прагматическим целям и т.д. Но каковы формальные условия этих наших описаний, объяснений и доказательств? Не окажутся ли они теми же, о которых мы пытаемся рассуждать? Избежать циркулярности поможет лишь обнаружение ряда таких формальных условий всякого мышления, которые ниоткуда не возникают и ничем не объясняются, но сами служат для построения всех объяснений и доказательств. Обнаружение таких условий требует некоего пограничного рассуждения, которое и яатяется собственно философским. Оно возникает на краю мысли и о его условиях нет смысла спрашивать. Дальше просто невозможно сделать ни шагу, не впадая в антиномии, порочные круги и прочие индикаторы бессмысленности. Именно такие, последние условия мысли и называются априорными. Следует поэтому признать, что само название статьи А.Г. Барабашева очень точно выражает суть априоризма. Это философское направление регрессивно по своей природе, я бы даже сказал, по своему призванию. Его задача и состоит в том, чтобы отступать до последней возможности, двигаясь к границам мышления. Но это отступление не может быть ни бесконечным, ни безрезультатным. Первое означало бы бесконечное число существенно различных предпосылок мысли, второе — уже упомянутую циркулярность.

С.С. Демидов

«Я утверждаю, что история математического априоризма, начиная с момента его возникновения у Канта, представляет собой периоды все более и более слабых версий, каждая из которых в свою очередь опровергалась новыми фактами», — такими словами А.Г. Барабашев начинает свою статью. Против этого утверждения (рассматриваемого, правда, с некоторыми оговорками, из которых основная касается употребления слов

«слабых версий» — но об этом ниже) возразить трудно. Следом автор пишет: «Поэтому можно
42
сказать, что вся история математического априоризма как исследовательской программы предстаатяет собой регресс». И вот уж с этим согласиться, на мой взгляд, нельзя. И вот почему.

Рассмотрим случай первого такого «опровержения» — открытие неевклидовой геометрии. «Опровергающий» «новый факт» — наличие новой геометрии наряду с единственной, как полагал И. Кант, априорной евклидовой вовсе не зачеркнул подход априористов. Они довольно быстро поняли, что наличие новых геометрий вовсе не препятствует евклидовой быть априорной формой созерцания. Следует лишь соблюдать известную аккуратность в формулировках, что они и стали делать. Так продолжалось и далее, и это превосходно показывает в своем докладе А.Г. Барабашев. «Новые факты» заставляли априористов уточнять свою позицию. Автор, правда, трактует такие уточнения исключительно как форму защиты (даже как нападение, которое, как известно, лучшая форма зашиты). И, конечно, формы, в которых ныне выступает априоризм, чрезвычайно отличны от кантовских. Но это и естественно. Как естественно меняется лицо эмпиризма. Это ведь особая и вовсе не затронутая автором тема — какова эмпирия сегодня? И показался ли бы факт (из современной электродинамики или тем паче — из квантовой механики), безоговорочно рассматриваемый как эмпирический сегодняшним философом, таковым Канту?

Этот процесс постепенного уточнения позиции философской доктрины в результате открытия «новых фактов» напоминает, скорее, уточнение формулировки теоремы в результате открытия новых контрпримеров.

И еще одно замечание. Ход нашей дискуссии показывает (во всяком случае, мне), несколько неудачный выбор оппозиции «априоризм» — «эмпиризм». (Всегда ли это оппозиция?) В докладе А.Г. Барабашева обсуждаются иные и, на мой взгляд, более удачные «системы координат», в которых рассмотренные в дискуссии проблемы выглядят более естественно.

С.Л. Катречко

Можно ли говорить о регрессе кантовского априоризма?..

Наше риторическое вопрошание говорит о том, что это не так, однако для этого надо подвергнуть критическому анализу как высказанный в статье тезис, так и изложенную в удобной для критики — «тезисной» форме — аргументацию. Воспользуюсь для этого различением И. Лакатоса (из работы «Доказательства и опровержения»), основателем концепции научно-исследовательских
43
программ, к которой явно тяготеет и автор данной статьи, и разобью свой комментарий на две неравные части: (1) общее — *глобальное* — несогласие с основным тезисом статьи; (2) конкретные — *локальные* — неточности в аргументации, которые искажают (подчас существенно) представленные в статье концепции априоризма и прежде всего базовую — кантовскую — концепцию априоризма.

(1) Прежде всего вызывает сомнение собственно методология предложенного автором статьи подхода. Дело в том, что методология И.Лакатоса изначально была предназначена для анализа развития естественно-научного знания (включая математику) и поэтому сам «перенос» данной методологии на область гуманитарного знания (математический априоризм является *прикладной философской концепцией,* а не частью математики как таковой) должен быть предварительно обоснован. А серьезные возражения против подобного распространения подхода Лакатоса на область гуманитарного знания имеются. С одной стороны, математический априоризм может быть соотнесен с «парадигмальным» подходом Т. Куна (в качестве принимаемого мной тезиса *парадигма* Куна является более глубинным — *философским,* в терминах концепции строения научного знания В.С. Степина, — ядром научного знания, чем выделяемое *ядро* — уровень *общенаучной картины мира,* по Степину, — научно-исследовательской программы Лакатоса). Если же вслед за этим принять куновский принцип несоизмеримости, т.е. рассматривать *разные версии* математического априоризма как *различные — несоизмеримые — концепции,* то само их сравнение и тем более утверждения о имеющем месте *регрессе* окажется неправомерным. Более того (полемически заостряя свою мысль), можно сказать, что *нет математического априоризма И. Канта* как такового (это противоречит одному из центральных тезисов А.Г. Барабашева; см. п. 5—7): в лучшем случае можно говорить об общей кантовской концепции априоризма и зачатках математического априоризма, которая была развита неокантианцами. Анализ кантовской «Критики чистого разума» (далее — КЧР; ссылки даны по 2-му изд.) и других его работ показывает, что перед Кантом стояла задача обоснования, прежде всего не математики, а естествознания (точнее — феномена наличия причинно-следственной связи, подвергнутого сомнению Д. Юмом). Математика же рассматривается Кантом, скорее, как вспомогательная — «низшая» — ступень естествознания и соотносится с деятельностью не рассудка, а «низшей» познавательной способности чувственности. Достаточно примечательным в этом плане является тот факт, что (чувственная) *математика,* и (рассудочная) *логика* рассматриваются Кантом совершенно в разных разделах КЧР, что коренным образом отличается от анализа математики с конца XIX в., когда логика и математика «сливаются» (благодаря деятельности Пеано, Фреге, Рассела, Гильберта, etc) в единый логи ко-метаматематике-математически и комплекс *логизированной* (аксиоматической) *математики* (см. об этом в моей статье наст, сб.). Поэтому «второй этап математического априоризма», связанный с деятельностью неокантианцев и Э. Гуссерля, «работает» с совершенно другим предметом (математикой), чем Кант.

С другой стороны, проделанная методологическая работа школы французских постструктуралистов в лице М. Фуко и Ж. Делеза (+ «менталистский» подход школы «Анналов») в области гуманитарного знания даже усиливает куновский тезис о несоизмеримости. М. Фуко в своей работе «Археология знания» говорит о типичной ошибке «непрерывной хронологии» и предлагает заменить ее анализом имеющих место в истории мысли концептуальных разрывов. В этом смысле (повторюсь еше раз) *нет никаких (ослабленных) версий априоризма,* а *есть дискретная серия разнородных концепций* уже хотя бы потому, что изменяется «предмет» этих концепций — математика.

Вызывает несогласие и объединение в одну апрйористскую «серию» того набора концепций, которые в статье анализируются. Если, например, собственно кантовский априоризм (отнюдь не узко понятый как математический; см. выше), неокантианская концепция математического априоризма, феноменологический подход к анализу математического знания Э. Гуссерля, неомарксистский — праксеологический — подход В.Я. Перминова могут быть объединены в одну серию на определенных методологических основаниях (хотя две последние я бы априоризмом не назвал), то рассматриваемая в статье «натуралистическая» версия кантианства (п. 14), основанная на привлечении идей эволюционной эпистемологии, уже никакого отношения к априоризму как таковому не имеет, так как идеи априоризма и эволюционизма внутренне несовместимы.

Более того, представленная в статье априористская «серия» (что, несмотря на вышеизложенную критику, является интересной идеей), на мой взгляд, позволяет сформулировать противоположно-дополнительный тезис: *любая концепция математики так или иначе содержит «элементы» априоризма, так как априоризм является необходимым компонентом любого математического знания* (этот тезис может быть назван тезисом о *неуничтожимости (неизбежности) априоризма математического знания).* То есть априоризм — это та неизменная «составляюшая» различных (философских) концепций математики, наличие которой создает иллюзию об их единстве («регрессе» или «прогрессе»).

45

С этих же позиций (принципа несоизмеримости) не так очевидна и постулируемая в п. 4—7 статьи преемственность кантовского априоризма и платоновского идеализма. Здесь можно вспомнить неоднократные замечания Канта о недопустимости отождествления его позиции с позицией идеализма (специальные кантовские вставки-примечания к главе «Трансцендентальная эстетика» 2-го изд. КЧР; кантовские замечания об идеализме в «Пролегоменах...»). Ограничусь здесь более точной ссылкой на «черновые заметки» Канта 1790—1791 гг. (цит. по: *Кант И.* Соч.: В 8 т. Т. 8. М., 1994), которые даны с такими подзаголовками «[Опровержение проблематичного идеализма]», «Против идеализма», «Об идеализме»: «идеализм разделяют на *проблематичный* (идеализм Декарта) и *догматичный* (идеализм Беркли); последний отрицает существование всех вещей, кроме бытия того, кто утверждает их существование (с. 650); ...[первый] признает, ...что мы не имеем никакого *внешнего* чувства, но лишь способность воображения в отношении внешних созерцаний (с. 654)». В «Пролегоменах...» Кант делает характерное замечание, что предложенный им в КЧР термин «трансцендентальный идеализм» не совсем удачен и может быть заменен на термин «формальный идеализм», что принципиально отличает «идеализм» Канта от «содержательного» идеализма Платона — Декарта — Лейбница, выраженного, например, в концепции «врожденных — содержательных! — идей». [Замечу, что предложенное Кантом определение идеализма существенно отличается от «субъективистской» (эпистемологической) трактовки идеализма, данной в п. 4 статьи: *идеализм как онтологическое учение* определенным образом решает вопрос о статусе математической реальности, а не о наличии соответствующих «идей» у познающего субъекта; т.е. автор статьи совершает категориальную ошибку, смешивая (онтологическое) различение «идеализм vs. материализм» с гносеологическими различениями «эмпиризм vs. рационализм» и рассматривая различение «субъективизм vs. объективизм».] Если несколько заострить лейтмотив кантовской — антиидеалистической — мысли, то можно сказать, что *кантовский априоризм вообще идеализмом не является!* Он представляет собой как бы «срединную» между идеализмом и материализмом онтологическую позицию (+ «срединную» между эмпиризмом (сенсуализмом) и рационализмом эпистемологическую концепцию), а именно, сочетание «содержательного» материализма (признание реальности) и «формального» идеализма (признание априорных форм познания). В этом смысле кантовский подход, скорее, может быть соотнесен не с платоновским идеализмом, а с идеализмом (гилеоморфизмом) Аристотеля.

46

(2) Перейдем теперь к «локальным» неточностям отдельных пунктов статьи (прежде всего п. 7—8), связанных с вольным или невольным искажением кантовского учения о познании (кантовский априоризм, специфика математического познания, природа математического конструирования). Здесь можно выделить два типа неточностей. Первый тип я бы соотнес с феноменом «испорченного телефона», когда критикуется (излагается) не оригинальная кантовская мысль, а результаты ее (мысли) интерпретации другими мыслителями, на которые и опирается автор статьи. Против этого главным нашим оружием изберем опору на оригинальные тексты самого Канта, посвященные этой проблематике. Вторая ошибка может быть названа ошибкой презентизма и связана с тем, что мысль Канта «применяется» к посткантовской математике, статус которой принципиально иной («чувственная» математика Канта vs. «рассудочная» посткантовская математика). Формат (критического) комментария не позволяет подробно развернуть «позитивную» аргументацию в пользу выдвинутых здесь тезисов, поэтому сошлюсь на «электронный» — расширенный — вариант комментария (http://www.philosophy.ru/library/ksl/philmath_ 2001.html), а также на свои тексты, где дается более детальное изложение моей интерпретации кантовской концепции познания см. форум «Как возможно творческое воображение?» (http:// www.fido7.net/cgi-bin/forumm.fp/?user= Kant&num).

П. 7: 1. Идеализм Платона и априоризм Канта, достаточно разнородные явления (об этом мы уже говорили выше). 2. Утверждение о том, что Кант «даже усилил... статус математических утверждений... отрицая чувственные основания математических утверждений» представляется неправомерным, так как математика, по Канту, основывает свои положения на чувственных созерцаниях и пространственно-временных конструкциях (особенно явно это прописано при сопоставлении природы деятельности математики и философии в главе «Дисциплина чистого разума в догматическом применении» КЧР). В этой связи, скорее, справедлив обратный тезис о том, что статус математики (математических утверждений) у Канта *наименьший* (по сравнению со статусом других естественнонаучных дисциплин). 3. Термин «синтетическое» у Платона и Канта используется в совершенно разных смыслах: «синтез» Канта связан с появлением нового знания, а «синтез» Платона — с направлением познания (собственно, сам автор статьи говорит об этом чуть выше; см. п. 5). 4. Претензии Рассела (Китчера, автора статьи) к Канту о неразличении им априорного как процесса и результата познания неосновательны,

47

так как для Канта (чисто) «априорный процесс познания» — нонсенс [см. ключевой (начальный) тезис Канта о природе познания в КЧР: «без сомнения, *всякое наше познания начинается с опыта»* (с. 32; курсив мой. — *К.С.)].* В каком-то смысле Кант вообще не рассматривает «динамику» познавательного процесса, а анализирует познавательную деятельность, посредством анализа его результатов, отвечая на вопрос «как возможны синтетические суждения a priori?». Поэтому не случайно, по признанию самого Канта, самым трудным для него в КЧР оказалось изложение *учения о схематизме,* в котором анализируется «динамика» взаимодействия рассудка и чувственности.

П. 8: 1. Утверждение о наличии у Канта концепции математического априоризма — ошибка презентизма. У Канта есть только «зачатки» этой — более прикладной — концепции, которую можно «достраивать» различными способами. 2. В прочитанных мною текстах я нигде не нашел слов Канта о *единственности математики,* например евклидовости геометрии, говорить же о «единственности [чувственного] созерцания» неправомерно, так как это уже рассудочная (количественная) оценка созерцания (см. также расширенные критические замечания по этому поводу к п. 11 ниже). 3. «*Для этого у нас есть неэмпирическая интуиция»: у* Канта нет и не может быть (в отличие от Декарта, Лейбница, Гуссерля) *неэмпирической интуиции,* любая кантовская интуиция имеет чувственно-эмпирическое происхождение. Причем это является одним из центральных положений всей теории познания Канта, которая может быть названа концепцией (дискурсивного) рассудочного познания. В этом смысле Кант *категорически* отвергает возможность *познавательной интуиции,* хотя допускает (гипотетическую, явно нечеловеческую) возможность «интуитивного рассудка» (интуитивный) [прообразный рассудок vs. (человеческий) дискурсивный рассудок] при эстетической — создании произведений искусства — деятельности [см. знаменитый § 77 из «Критики способности суждения» (далее — КСС]. Основой познания, т.е. его необходимым компонентом, являются («внешние») чувственно-эмпирические созерцания, которые «запускают» любой познавательный акт. Именно они, если субъект стремится к истинному познанию природы, являются «ограничителями» творческой активности воображения и рассудка, с ними должны быть согласованы понятия рассудка (а воображение, в свою очередь, подчиняется рассудку как «законодателю» познания). Вот как Кант уточняет невозможность нечувственной интуиции в своей

48

«Антропологии...»: «другими словами, воображение бывает или производительным (продуктивным), или воспроизводительным (репродуктивным). *Но продуктивное воображение все же не бывает творческим, т.е. способным породить такое чувственное представление, которое до этого никогда не было дано нашей чувственной способности* (выделено мной. — *К.С.)...* Тот, кто из семи цветов никогда не видал красного, никогда не может иметь ощущение этого цвета...» *(Кант И.* Соч.: В 6 т. Т. 6. М., 1966. С. 402—403).

4. Утверждения автора *«Независимость от чувственного опыта в обоих типах конструирования — первая важнейшая черта математических суждений»* и термин *«априорное синтетическое созерцание»* также имеют весьма условное отношения к оригинальной кантовской позиции: любое созерцание для Канта имеет чувственный характер (см. аргументацию выше), а в основе кантовского «конструирования понятий» лежит соотнесение этого понятия с (чувственным) созерцанием (КЧР. С. 423), которое осуществляет кантовская способность суждения.

5. Вернусь к началу «моего» п. 7 и обращу внимание на сноску <3>, в которой затрагивается ключевая тема «конструирования математических объектов» (эта тема — лейтмотив п. 8; частично она затрагивается в п. 16). Здесь автором приводятся два положения: (1) позиция Канта при переходе от КЧР к КСС на «механизм» формирование правил конструирования меняется; (2) *«в КСС правило формируется через рефлектирующую способность суждения, оно гибко».* На наш взгляд, это существенное искажение кантовской позиции на процесс (математического) познания. Анализ кантовского текста КСС (см. цитаты и развернутый анализ текста в электронном варианте комментария) позволяет, скорее, сформировать два противоположных тезиса. (1) В процессе познания «законодателем» (правил) является лишь рассудок, а (определяющая) способность суждения выполняет роль «подведения» под это правило особенного (в случае математического познания — соответствующего чувственного созерцания), причем это Кант подтверждает и в КСС [см. с. 37 (предисловие); с. 50—56 (гл. «О способности суждения как априорно законодательной...»). (2) Рефлектирующая деятельность способности суждения никакого отношения к познанию не имеет, сферой ее деятельности является эстетическая [«привнесение» в природу (идеи) красоты] и телеологическая деятельность («привнесение» в природу целесообразности).

П. 9—11. Видимо, наиболее адекватно исходная кантовская позиция в понимании априорности пространства—времени была

49

выражена Л. Нельсоном, которая близка и мне. Однако для разрешения спорных моментов опять-таки надо обращаться к тексту оригинала, т.е. к самому Канту. Обратимся к «локальным» замечаниям по данному пункту 1. *«Первый "удар фактами" по математическому априоризму был нанесен открытием неевклидовых геометрий»,* и именно с этого, по мнению автора, начался *«регрессивный сдвиг программы»* математического априоризма. Сосредоточим нашу критику на аргументе, т.е. попробуем «выбить опору» из-под данного тезиса. Открытие неевклидовых геометрий не могло нанести «удар» по кантовскому априоризму, так как в п. 3 своего доказательства априорности пространства Кант особо подчеркивает, что пространство — *«не... понятие, а... созерцание»* (КЧР, с. 51; курсив мой. — *К.С.),* а это значит, что оно не является евклидовым или неевклидовым, поскольку это иррелевантная характеристика для чувственного созерцания! В каком-то смысле *пространство как созерцание* даже не обязательно трехмерно (хотя о трехмерности Кант в своих текстах говорит), трехмерность — это вторичная рассудочная «оценка» пространства и поэтому она не обладает статусом «первичной» априорности. Потому, например, упомянутое в тексте (п. 9) понятие «двуугольника» для Канта яатяется (рассудочной) фикцией, так как под него нельзя подвести никакое (чувственное) созерцание. [Замечу, что для современной *рассудочно-логизированной математики* оперирование с нечувственными понятиями типа «двуугольника» в принципе возможно, если мы предложим приемлемый критерий отличения пустых рассудочных фикций от «хороших» понятий (Гильберт).] 2. *«Действительно, общим местом для всех было отождествление единства априорного созерцания с единственностью евклидова пространства».* Отмечу, еще раз (см. замечание к п. 8.2), что прямого указания в кантовских текстах на единственность евклидовой геометрии или невозможность неевклидовых геометрий я не обнаружил. Вполне возможно, что это положение долгое время фигурировало как «идол площади» и было соотнесено с кантовским априоризмом (замечу, что это «привнесение» вполне совместимо с априоризмом). Евклидовость или неевклидовость геометрии — это «вторичная» (одна из возможных) концептуализация априорного пространственного созерцания, которая в общем случае статусом априорности не обладает. Вполне возможно, что эта идея сформулирована *рефлективной способностью суждения* или «синтезирована» деятельностью *продуктивного воображения,* однако прямого отношения к (научному, математическому) познанию, согласно Канту, она не имеет: это только красивая гипотеза, которая должна быть проверена опытным, т.е. созерцательным путем.

50

А.Н. Кричевец

К весьма интересной статье А. Г. Барабашева я хочу сделать два замечания. Первое: в каком смысле можно толковать лакатосовское понятие регресса программы в отношении философских исследований? Как мне кажется, то, что происходит с философией, в равной степени можно называть и прогрессом, и регрессом, и априоризм здесь не находится в каком-либо особом положении (некоторые авторы вообще считают, что философия умерла). Анализ А.Г. Барабашева весьма добротен и убедителен: версии априоризма, действительно, с течением времени становятся все более слабыми. Однако версии чего в философии становятся все более сильными? То, что некая идея переживает эпохи, даже если платит за это ослаблением своей категоричности, скорее, надо истолковывать в ее пользу.

Второе замечание более конкретное — о соотношении созерцания и логического доказательства (п. 12). Вообще этот вопрос кажется мне обескураживающе неясным. Если бы от доказательства требовалась только логичность, то идеальным доказательством было бы формальное (например, в исчислении предикатов). Однако преподаватель математики, спрашивая ученика, всегда смотрит на доказательство, и если бы ученик предъявил формальный вывод теоремы, вряд ли это устроило бы учителя. Известный автор школьных учебников И.Ф. Шарыгин вообще считает, что для понимания геометрии не менее, чем известный список теорем, важно усвоить некоторый набор задач. Задач, не имеющих большого значения по сравнению с математическими утверждениями, но, с моей точки зрения, дающих опыт конструирования и созерцания.

В вопросе о доказательстве, возможно, телегу следует поставить впереди лошади. В зоне роста [для ученика это зона ближайшего развития (Л.С. Выготский), а для профессионала — совершенно новые теории] не доказательство осуществляется в рамках некоторой заранее известной системы созерцаний-постулатов путем логического выведения, а сама система созерцаний развивается и проясняется в процессе усвоения доказательства. Доказательство становится доказательным и убедительным в тот момент, когда актуализируется система необходимых созерцаний, когда доказанное утверждение становится очевидным.

Таким образом, первый тезис п. 14 о том, что из доказательств математический априоризм изгоняется, кажется мне слишком сильным. С этой оговоркой я присоединяюсь в качестве адепта к ядру слабой априористской программы, описанному в первых трех тезисах п. 14, касающихся чистой математики.

Остается ли после этого ослабления что-нибудь на долю трансцендентального субъекта познания — вот в чем вопрос.

51

А.Ф. Кудряшев

Главное из того, что Алексей Георгиевич хотел показать в данной статье, на мой взгляд, сделано. Обоснован тезис о прогрессирующем ослаблении связи между математическим априоризмом в его исходной форме и реальной математикой. Попытки модернизировать априористскую концепцию математики трактуются Алексеем Георгиевичем как регресс математического априоризма, хотя желание представить априоризм в качестве философской методологии математики у приверженцев учения самого Канта и его последователей, судя по всему, с течением времени не ослабевает. Другое впечатление от статьи заключается в том, что в ней выявлена изначальная слабость указанной связи, если под последней понимать методологическую и предсказательную функции априористской концепции по отношению к практикуемой математике, т.е. что эта связь со временем становилась все слабее и слабее. И скорее всего это так, поскольку математический априоризм только пытается объяснить то, что создается в математике, а значит, он вторичен и обречен на вечное запаздывание и отставание. Впрочем, не такова ли участь всякой философии математики?

Однако математический априоризм может сохраняться как иррациональная вера в авторитет Канта и высказанного им «слова». Например, особое почитание Канта было свойственно Д. Гильберту, тогда как его реальная математическая практика была во многом (если не совершенно) иной, о чем свидетельствует его девиз: «Мы должны знать, мы будем знать». Математический априоризм в его разных, включая постнеокантианские, вариантах может оставаться еще и как ожидание и даже некая деятельность по фрагментарной реализации обширной виртуальной программы создания «своей» математики, как-то соотносящейся с существующей и потому имеющей набор соответствующих фактов, но, с точки зрения скептиков, вряд ли когда способной обрести целостное воплощение, а потому в таком виде лишь абстрактно возможной.

В.Я. Перминов

Я согласен с тезисом А.Г. Барабашева, согласно которому математический априоризм с момента его оформления у Канта в качестве систематической концепции претерпевает изменения, в процессе которых он отказывается от некоторых исходных посылок. Неевклидовы геометрии, в этом смысле, хороший пример. В настоящее время мы, конечно, не можем настаивать на том, что вся математика априорна, и должны признать, что математи-

52

ческое мышление способно выходить за сферу самоочевидных (априорных) принципов. Таких дефектов в кантовской теории много. Представляется совершенно искусственной декларируемая в ней связь арифметики с понятием времени, не раскрыт генезис априорных форм мышления в индивидуальном сознании (колебания неокантианцев относительно этого момента совершенно законны), не определен должным образом и сам состав априорных принципов. И по всем этим пунктам традиционный априоризм, конечно, должен уточняться и, таким образом, в ряде моментов отступать от исходной трактовки. Но мне кажется, что А.Г. Барабашев слишком субъективен в общей оценке ситуации и за естественной эволюцией кантовской концепции, которая в действительности является процессом ее уточнения и обоснования, склонен усматривать только признаки ее регресса и деградации. Я не вижу серьезных аргументов для такого рода оценки. Регрессом априоризма мог бы быть только частичный или полный отказ от основной идеи Канта, согласно которой исходные математические представления относятся к универсальной форме мышления и, таким образом, не зависят от опыта. Нет ни одного факта, который принуждал бы нас отказаться от априорности арифметики и евклидовой геометрии в этом смысле. Сфера априорного знания исторически уточняется: некоторые принципы, которые Кант считал априорными, мы в настоящее время уже не можем считать таковыми. Это относится к законам механики, а также и к частным аналитическим суждениям. Мы должны, таким образом, существенно сузить сферу априорного знания, определенную Кантом. Однако это также не опровержение, а только уточнение кантовской концепции. С гносеологической точки зрения нам не так важно, насколько велик объем априорного знания, а важно — существует ли оно вообще в его исходном понимании. Я не вижу фактов, которые заставляли бы нас в настоящее время отказаться от утвердительного ответа на этот вопрос. Я не согласен с А.Г. Барабашевым также и в его попытке, истолковать деятельностную концепцию априорного знания как некоторую ступеньку в регресивном развитии исходной версии априоризма. Деятельностная концепция, несомненно, усиливает традиционную априористскую теорию, поскольку она позволяет понять истоки априорных представлений и с большей определенностью выявить их состав. Критика априоризма, с точки зрения общих законов эволюции знания, развиваемая А.Г. Барабашевым, полезна для прояснения истины, но она явно недостаточна лля отказа от идеи математического априоризма и для опровержения кантовской точки зрения в ее существенных моментах.

53

ОТВЕТ АВТОРА

Я счастлив, что данная статья привлекла внимание коллег и благодарен им за благожелательно-бережное отношение (в целом, за единственным и вполне объяснимым исключением) к высказанной в ней идеям. Ввиду многочисленности поступивших комментариев по некоторым позициям целесообразно ответить уважаемым оппонентам «в совокупности», только в случае крайней необходимости адресуясь в ним персонально.

Во-первых, следует систематизировать как позитивные, так и негативные (по отношению к моей статье) соображения,

1. Позитивные.

1.1. То, что математический априоризм эволюционирует в направлении построения все более слабых версий, воспринято всеми без исключения комментаторами как ясно сформулированный и интересный для обсуждения тезис. Часть комментаторов поддержала этот тезис, часть не согласилась с ним, но все, даже наиболее строгие оппоненты, воспользовались той понятийной рамкой (программа — математический априоризм — версии математического априоризма — факты — регресс), которая была предложена в статье.

1.2. Аналогично, естественной для восприятия оказалась и идея о разделении философии математики (и математического априоризма в том числе) на собственно философские концепции математики, и на концепции в прикладном смысле (интересные настолько, насколько хорошо они описывают реально существующую математику и совместимы с новыми направлениями и тенденциями ее развития, вплоть до предвидения общего хода дальнейшего развития математики). Эта идея обсуждается во всех комментариях.

1.3. Оказалась отмеченной связь предложенной мною конструкции с концепцией И. Лакатоса. Возможность использования концепции Лакатоса при изучении эволюции математического априоризма я стремился показать всем содержанием статьи. Конечно, не все комментаторы безоговорочно восприняли такой ход мысли, но все они отметили его в своей реакции на статью. Собственно, я пытался показать, что каркас концепции исследовательских программ хорошо встраивается в аморфное «тело» философии математики, делая его более структурированным и, значит, более анализируемым.

1.4. Проблема обнаружения «предельной» и далее не изменяемой формы априоризма, нахождения тех априорных элементов нашего мышления, от которых уже ни в коем случае нельзя отказаться, естественно следует из содержания статьи и поэтому оказалась в центре рассуждений многих комментаторов. Есть ли, действительно, тот «последний рубеж», далее которого априоризм от-
54
ступить не может? Может быть, все философские концепции математики объявляют свои позиции в категоричной и максималистской форме, а затем в историческом процессе своего взаимодействия с эволюционирующей математикой отступают к некоторым последним рубежам? Может быть, именно в этом состоит их отличие от исследовательских программ, для которых регресс одних программ означает, как правило, прогресс их оппонентов?

1.5. Принято предложенное в статье интегральное понимание «математических фактов» как именно *фактов* эволюции математики, а не как разнородных конгломератов более мелких явлений (отдельных формулировок теорем, понятий, доказательств, идей).

2. Негативные.

К негативным реакциям, в принципе, возможно отнести либо полное неприятие идей статьи, либо частичное их отрицание, касающееся некоторых моментов развития аргументации. Полное неприятие, как мне кажется, присутствует только в одном комментарии, хотя — парадоксально — уважаемый коллега явно оказался под влиянием предлагаемой мной конструкции, используя ее образы для своей критики и строя как бы зеркальное отражение моей конструкции (воистину лучший способ выдвинуть новую идею — это приставить к идее оппонента приставку «не»). В свою очередь, я не согласен в данном случае ни с отрицанием реализованной мною возможности применения концепции И. Лакатоса для анализа гуманитарного знания, ни с утверждением о том, что концепция парадигм смогла бы лучше описать эволюцию математического априоризма. Так, я считаю, что различные «математические априоризмы» не являются серией несоизмеримых концепций: их внутреннее сходство, как я пытался показать, много значительнее и глубже их сходства с другими типами концепций философии математики. Я был бы счастлив, если автор данного комментария представил бы дополнительную публикацию на этот счет, в которой он смог бы обосновать свое тезисное утверждение подробнее. Кстати, не совсем уместно, с моей точки зрения, ссылаться на Канта для подкрепления утверждения об отсутствии преемственности платоновской и лейбницевской концепций, с одной стороны, и кантовского априоризма — с другой (если уж быть точным, как предлагает уважаемый комментатор, то в статье я не говорю о преемственности этих двух глобальных философских концепций, а только о том, что та часть концепции Канта, которая может быть отнесена к математическому априоризму как серии попыток последовательного развития идей Канта в области философии математики, в свою очередь, идейно связана с соответствующими рассуждениями Платона о природе математики). Например, Кант отвергал идейную связь «Наукоучения» Фихте со своими взглядами, приписывая эту связь всецело фанта-
55
зии Фихте. Однако в последующей истории философии принадлежность Канта и Фихте к одному течению так называемой «немецкой классической философии» оспаривается только немногими исследователями, да и принадлежность эта отнюдь не исчерпывается только временной и, если так можно выразиться, «географической» (в том числе личной) близостью этих великих философов. Что касается локальных моментов несогласия, то я во многом отношу их за счет моего неумения точно выразить мысль в условиях, накладываемых ограничивающим жанром статьи. К сожалению, в кратком ответе не место для подробного изложения моего понимания возможных интерпретаций «Критики чистого разума» и вопроса об их соотношении, о том, что такое математическое

конструирование и насколько «жестко» оно связано с рефлектирующей способностью суждения, о соотношении логического доказательства и созерцания, о тонких соотношениях трех взаимосвязанных концепций — математического априоризма, позиции Лейбница и математического платонизма, о том, действительно ли Л. Нельсон успешно защитил кантовский априоризм от обвинения со стороны многих математиков, естествоиспытателей и философов XIX столетия в фактическом признании единственности евклидовой геометрии как следствия присущей человеку структуры априорного созерцания и насколько в своей защите Л. Нельсон «адекватно» (если вообще так можно выразиться) интерпретировал Канта. Я не сторонник математического априоризма, однако данные проблемы весьма интересны, и я не оставляю надежды посвятить им отдельную статью. В контексте настоящей публикации я говорил об этих проблемах кратко, только чтобы обозначить вехи развития математического априоризма. Может быть, кто-нибудь из коллег также сочтет важным и интересным детально осветить эти проблемы. Наконец, все мои ссылки на других авторов являются следствием моего понимания их позиций; соответственно, критику этих авторов уважаемыми комментаторами лучше было бы заменить на критику моего понимания авторских идей.

В.Я.Перминов

ПРАКСЕОЛОГИЧЕСКИЙ АПРИОРИЗМ И СТРАТЕГИЯ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Идея априорного знания поддерживается самой практикой математического мышления. Мы все осознаем самоочевидность и абсолютность утверждений элементарной математики, а также безусловную надежность признанных доказательств. Математическое мышление постоянно демонстрирует нам первичность интуитивной основы математического рассуждения перед всяким его символическим оформлением и общезначимый характер этой основы. Это значит, что априоризм в своей основе не может быть отвергнут, он может быть лишь более или менее правильно объяснен с теоретико-познавательных позиций.

Теория познания, однако, не достигла здесь полной ясности. Она все еще не имеет убедительного и достаточно ясного понимания природы априорного знания, согласующегося с общей теорией науки и с методологией математики. Очевидно, что здесь нужны новые идеи, все еще скрытые для существующей теории познания.

В данной статье будет изложена концепция априоризма, которая исходит из понимания первичных математических идеализации как необходимых категорий мышления, порожденных его практической ориентацией. Наша задача состоит в том, чтобы выявить теоретические предпосылки этой трактовки и показать ее приемлемость для философии и методологии математики.

1. Слабость традиционного априоризма

Понятие a priori по отношению к логическим и математическим истинам систематически стал использовать Г.В. Лейбниц. Он полагал, что все математические истины врожденны («потенциально находятся в душе человека») и что они аналитичны в том смысле, что их можно свести к системе самотождественных утверждений (тавтологий). Лейбниц считал, что принципы математики относятся к реальности и заключают в себе глубинные истины о строении мира, недоступные для опытного познания. Он понимал непрерывность не только как свойство математических функций, но и как характеристику процессов природы. Математика и метафизика образуют, по Лейбницу, систему необходимых истин, противостоящих случайным истинам, взятым из опыта.

Кант существенно углубил лейбницевское понятие необходимых истин. Главное достижение кантовской теории познания состоит в разделении содержания и формы мышления и в обосновании того факта, что математическое знание относится к форме мышления и обладает принципиально иными характеристиками, чем знание, взятое из опыта. Кант отделил априорность от врожденности и строго обосновал факт синтетичности математического знания. Он, таким образом, отделил математику от опытных наук как науку о форме мышления, а также и от логики как от системы аналитически априорных истин. Математика, по Канту, непосредственно базируется на априорных предстаатениях пространства и времени: геометрия понимается как теория, кон-
57
цептуализируюшая представление о пространстве, арифметика аналогичным образом соотносится с представлением о времени. Математика как форма мышления сугубо идеальна и не имеет отношения к реальности самой по себе.

Недостатки кантовской теории в настоящее время очевидны. Является неясным прежде всего понятие чистого созерцания, которое способно доставлять нам исходные сведения о математических объектах, облагающие самоочевидностью и вневременной значимостью. Очевидно, что Кант приписывает конечному существу возможность непосредственного видения некоторого типа абсолютных истин. Неясное (абсолютность математических истин) объясняется еще более неясным — допущением особой познавательной способности разума, обеспечивающей доступ к абсолютному знанию. Математическое знание как относящееся к форме мышления полностью отделяется от мира вещей, лишается статуса реального в каком-либо смысле. Такая трактовка плохо согласуется с нашим обычным восприятием математических объектов как отражающих определенные отношения предметного мира. Кантовская теория априорного знания отличается неясностью в определении состава априорных принципов. Кант, как известно, включал в состав априорного знания вместе с принципами математики также и принципы чистого естествознания, что совершенно неприемлемо для современной методологии науки. Кантовская философия математики номиналистична в том смысле, что она допускает данность в чистом созерцании только для конкретных математических объектов и схем их порождения, что создает трудности для обоснования общих понятий и принципов. Можно указать также и на то, что Кант абсолютизировал очевидность аксиом в качестве критерия их приемлемости. Появление неевклидовых геометрий опровергло эту методологическую установку. Можно сказать, что Кант не обратил должного внимания на логические механизмы математического мышления, которые выводят его за пределы очевидности.

Не меньшее число возражений может быть выдвинуто и против теории априорного знания, предложенной Э. Гуссерлем. Гуссерль стремился освободить априорное знание от остатков антропоморфизма, имеющих место в кантовской теории: Кант, как известно, не исключал того положения, что существа иной природы могут иметь другие априорные представления. С точки зрения Гуссерля, априорные представления не зависят ни от объекта, ни от субъекта мышления и яатяются совершенно одинаковыми для любого познающего существа, будь это люди, чудовища или боги [1, с. 101]. Это, несомненно, более правильная установка, которая раскрывает истинный статус априорных представлений. В «Идеях к чистой
58
феноменологии и феноменологической философии» Гуссерль предпринимает попытку понять логику становления самих априорных форм, которая отсутствует в кантовской теории познания. Гуссерлевское учение об эйдосах при всей его проблемности устраняет кантовский номинализм, связывающий чистую чувственность только с созерцанием

конкретных математических объектов.

Гуссерль, однако, существенно ослабляет установки кантовского априоризма в том смысле, что допускает эмпирическое опосредование в становлении априорных представлений. Вместе с радикальными эмпириками он считает, что арифметика и геометрия как теоретические науки не могли возникнуть иначе, как на основе счета и измерения. Становление геометрии, по его мнению, было бы невозможно без протогеометрии — грубой эмпирической геометрии, создаваемой в практике измерений [2, с. 163]. Если априорное у Канта независимо от опыта и в генетическом, и в логическом отношении (он допускает здесь только неспецифическое влияние опыта, не определяющее содержания априорного знания), то у Гуссерля априорное знание с самого начала опосредовано миром феноменов: всякое априорное представление предполагает, по Гуссерлю, наличие конкретных переживаний и является независимым от опыта только логически в качестве сформировавшейся эйдейтической структуры.

Это включение опыта в формирование априорных структур сознания сдвигает феноменологию в сторону эмпиризма и ставит ее перед проблемой объяснения интерсубъективности и стабильности этих структур. В настоящее время становится все более ясным, что универсальность и интерсубъективность априорных форм сознания нельзя обосновать вне телеологии мышления, вне анализа его целевых установок. Исключив анализ целей мышления как неприемлемую метафизику, Гуссерль вынужден выводить нормы мышления из самого его материала, что неизбежно возвращает его к идее относительности всех принципов. Формы мышления, конечно, не могут быть поняты из самого мышления без учета его внешней детерминации, но они не могут быть и выведены из опыта в качестве его схематизации или идеализации.

Должна быть признана как несостоятельная также и трактовка априоризма, разрабатываемая в рамках эволюционной эпистемологии, которая понимает априорное знание как знание врожденное или закрепленное эволюцией. Здесь происходит некоторое возвращение к позиции Декарта и Лейбница и заслуга Канта усматривается только в том, что он впервые зафиксировал наличие в человеческом сознании элементов филогенетически унаследованных представлений [3, с. 163]. Хотя сторонники эволюционной эпистемологии убеждены, что они вскрывают подлинную основу кантонского априоризма, в действительности мы имеем здесь дело с очевидным искажением его сути, с подменой трансцендентального идеализма некоторого рода натурализмом. При такой трактовке исчезает принципиальное разделение формы и содержания мышления и за априорное знание выдается часть содержательного знания, обладающая относительной стабильностью. Система априорных принципов становится подвижной и подверженной корректировке[1].

Врожденное знание, несомненно, существует и может быть предметом исследования, но оно не имеет никакого отношения к априорным формам мышления, о которых идет речь в кантовской теории познания. Это обстоятельство является важным для философии математики, ибо математика, будучи априорным знанием, ни при каких обстоятельствах не может быть понята в качестве знания врожденного.

2. Практика как основа нормативности.

:

В марксистской теории познания подчеркивается, что практика является стимулом познания, основой познания (в смысле наличного материала и средств), а также высшим критерием истинности теорий и идей. К этим несомненно верным положениям необходимо добавить еше одно, состоящее в том, что практика является нормативной основой познания, т.е. источником универсальных норм, которым подчинено всякое знание. Указанное положение важно, так как оно дает нам возможность понять тезис априоризма без какой-либо мистики, исходя из естественных задач мышления.

Если некоторая развивающаяся и функционирующая система является частью другой, более широкой системы, то в своих функциях она неизбежно подчинена целям этой последней системы и обшие регулятивы ее развития могут быть поняты только при рассмотрении этого функционального соподчинения. Данный абстрактный системный принцип должен быть руководящим и при анализе законов теории познания. Познавательная деятельность человека — это функциональная часть его практической деятельности, а это значит, что высшие нормы, регулирующие познавательную деятельность, имеют праксеологическую природу и должны быть выведены в конечном итоге из практической функции знания.

Суть указанного тезиса состоит в том, что всякое знание, сориентированное на практику, подчинено нормам, проистекаюшим из самой этой цели, из общей установки на его эффективность для практики. *Это* значит, что наряду с принципами, проистекающими из предмета исследования, которые различны для различных

60

сфер опыта, существуют универсальные принципы, проистекающие из общих целей знания и единые для всех его видов. Это принципы, определяющие универсальную форму знания. Априорное и апостериорное знания различаются в этом плане как знание телеологическое, заданное только практической ориентацией мышления, и знание отражательное, индуктивное, определенное специфическими подразделениями опыта.

Мы должны провести здесь четкое разделение между практикой и опытом. В онтологическом плане практика — это деятельность субъекта, изменяющая предметный мир, а опъп — это система представлений о мире, полученная на основе чувственного восприятия. В понятийной картине мира опыту соответствует вся позитивная информация о мире, основанная в конечном итоге на актах его чувственного восприятия, а практике — универсальные нормы, прежде всего категориальные и логические, порожденные деятельностной ориентацией мышления. Философы-эмпирики склонны рассматривать опыт в качестве универсальной основы знания, порождающей в конечном итоге и саму систему норм. Здесь, однако, упускается из виду, что эмпирические высказывания получают смысл только на основе категорий, т.е. чистых деятельностных схем, которые относятся исключительно к актам деятельности независимо от структуры и качеств ее предмета.

Важно понять, что только практика конституирует мир реальных предметов и реальности в целом. Существование предметов и предметного мира задается в деятельности, до актов познания и независимо от этих актов. С праксеологической точки зрения предметная реальность абсолютно первична перед познавательной деятельностью, и она никоим образом не может быть понята как конституируемая активностью сознания на основе данных чувственности. Выявление структуры предметного мира не функция знания, а исключительно функция деятельности.

Деятельность выявляет две структуры сознания, имеющие интерсубъективное значение. Это структура предметной реальности, обладающая непосредственной данностью, и структура универсальных норм, обусловленных универсальной практической ориентацией сознания. Наряду с миром предметов как общезначимой чувственной реальности нам дана в качестве абсолютной предпосылки мышления также и структура идеальной нормативности, структура универсальных ограничений, которую традиционный априоризм понимает под трансцендентальной субъективностью. Это значит, что структура универсальных норм мышления проистекает не из разума и не из опыта, а из практики как необходимой целевой установки мышления. Понимание этого момента дает нам ключ к пониманию истинной природы и сущности априорного знания.

61

3. Априорность категорий и логики

Универсальная праксеологическая нормативность проявляется, прежде всего, в категориальных принципах. Всякое опытное знание строится как знание о чем-то материальном, основанное на причинно-следственных связях, на различении объектов в пространстве и времени и т.п. Нетрудно понять, что мы имеем здесь дело с общими требованиями к структуре представлений, проистекаюши-ми из их практической функции. Теория, которая отказалась бы от различения объектов по пространственно-временным характеристикам, не подчинялась бы общим свойствам причинно-следственных связей, не отделяла случайное от необходимого и т.д., не могла бы быть квалифицирована как знание, ибо она заведомо не могла бы быть использована для координации действий в какой-либо сфере опыта. Знание должно быть соединено с практикой, а, следовательно, оно должно быть подчинено категориям практики, безотносительным к сфере опыта. Абстрактные принципы типа «причина раньше следствия», «время необратимо» и т.п. должны быть поняты в этом плане как наиболее общие ограничения на структуру представлений, проистекающие из их практической значимости.

Другой универсальной нормативной структурой сознания, проистекающей из деятельности, является система логических норм, которой подчинено всякое понятийное мышление. Если категории ограничивают содержание представлений, являются системой интуиции, лежащих в основе определения предмета мышления вообще, то логические нормы — это ограничения на структуру понятий (значений) и возможные их связи. Знание, построенное вне логики, не является знанием, поскольку оно не может служить основой практической ориентации и выбора.

Ясно, что категориальные и логические представления не являются эмпирическими в собственном смысле слова, ибо они не являются результатом какой-либо индукции из содержания мышления. Они отражают исключительно форму мышления, проистекающую из его практической ориентации.

В практике исследования конкретных явлений мы имеем дело с общими принципами двух типов; одни из них проистекают из предмета рассмотрения и устанавливаются посредством индукции (законы сохранения в физике, например), другие же идут от субъекта как ограничения на форму знания, проистекающие из его назначения. Таковы законы логики. Великая заслуга Канта состоит в четком разделении этих двух уровней — содержания и формы мышления — и в установлении несводимости их друг к другу.

Категориальные и логические принципы априорны в том смысле, что они не зависят в своей структуре от какого-либо частного опыта и от эмпирических подразделений вообще. Они, безусловно,

62

универсальны, поскольку не зависят от содержания и типа знания. Они эквифинальны в том смысле, что в генезисе индивидуального сознания любой опыт приводит в конечном итоге к одной и той же системе этих принципов. В отличие от эмпирических (индуктивных) суждений категориальные принципы и логические нормы даны нам с безусловной (аподиктической) очевидностью, которая строго интерсубъективна. Индивид, не обладающий общей логикой и системой категорий в качестве самоочевидных оснований мышления, не может быть включен в социальную коммуникацию и социальное поведение.

Наиболее важное свойство указанных принципов состоит в том, что они внеисторичны: они не могут корректироваться на основании какого-либо нового содержания знания, ибо они выражают собой не эмпирические подразделения, а лишь форму знания, обусловленную целевой установкой мышления. Историческая смена объектов изучения, научных эпох и мировоззрений оставляет неизменными логику и категории как универсальные и абсолютно инвариантные формы мышления.

4. Разрешение теоретических трудностей

Суть деятельностной трактовки априоризма становится предельно ясной при приложении ее к внутренним проблемам кантовской теории познания. Это относится, прежде всего, к пониманию источника априорных форм мышления. Кант говорит о форме мышления как о знании, идущем «от самого субъекта» [4, с. 91]. Это явно недостаточная характеристика, ибо остается неясным, каким образом субъект приобретает нормы, которые только высвечиваются опытом, и почему они должны быть неизменными и едиными для всех субъектов. Деятельностная концепция знания вносит здесь прояснение, состоящее в том, что за формами мышления стоит не опыт и не психическая организация субъекта, а его деятельностная ориентация, имеющая объективное и универсальное значение. Априорные принципы, с этой точки зрения, не врождены, но, тем не менее, они однозначно заданы процессом практической адаптации индивида, его включением в деятельность и коммуникацию.

Кантовская теория познания догматична в том отношении, что рассматривает форму мышления как данную и не ставит вопрос о ее становлении в индивидуальном сознании. С деятельностной точки зрения мы можем говорить об этапах этого становления как реальных и поддающихся анализу. Принципиальным для нас является здесь тот факт, что логика этого становления эквифинальна и требует не индуктивного, а телеологического объяснения. С этой точки зрения надо считать неадекватными все попытки понять гене-
63
зис категорий в рамках эмпирической психологии. Это относится, в частности, к общему замыслу обоснования категорий в генетической эпистемологии Ж. Пиаже. Психологический анализ может выявить этапы становления категориальных представлений у ребенка, однако он не может дать понимания этого процесса без обращения к гипотезам, относящимся к общей задаче мышления.

Важнейшая проблема кантовской философии состоит в необходимости обосновать инвариантность (вневременность) форм мышления. Если эти формы относятся только к сущности разума, то естественным образом возникает вопрос об их устойчивости перед лицом бесконечного разнообразия опыта[2]. Кант, как известно, решает эту проблему на основе субъективизации опыта. Универсальная значимость категорий, по Канту, предопределена тем, что сам опыт конституируется только на основе категорий и, таким образом, заранее согласован с функцией его синтеза в категориях. Крайний субъективизм кантовской теории здесь очевиден, ибо получается, что разум создает не только идеи, выходящие за пределы опыта, но в определенном смысле и сам опыт как заранее удовлетворяющий априорным схемам мышления. Важно отметить также, что объяснение общезначимости форм мышления существенно связано у Канта с различением «вещей в себе» и «вещей для нас». «Вещи для нас» создаются активностью сознания и с самого начала строятся в ограничениях, согласованных с механизмами категориального синтеза.

Деятельностная теория разрешает эту проблему на принципиально иных основаниях. Устойчивость форм мышления, с этой точки зрения, проистекает не из субъективных ограничений опыта, а из характера самих этих форм, из их телеологической природы. Мы не можем отбросить или ограничить принцип причинности («каждое явление имеет причину») вследствие того, что наше сознание нацелено на выявление причин и неизбежно рассматривает мир явлений в плане причинной детерминации. С другой стороны, эта гипотеза не может быть, и опровергнута каким-либо опытом вследствие своей абстрактно-онтологической природы. Это значит, что инвариантность форм мышления определяется исключительно их праксеологической природой и не нуждается для своего объяснения в субъективизации опыта, а также в разделении «вещей в себе» и «вещей для нас».

С праксеологической точки зрения мы должны отказаться от тезиса Канта, согласно которому «рассудок предписывает законы природе» [4, с. 140]. Рассудок сам по себе не предписывает никаких законов природе, а лишь устанавливает смысловые схемы, в которых знание приемлемо для понимания и действия. Априори необходимо, чтобы всякое знание о мире было знанием о событиях в пространстве и времени, подчиненных причинной связи и т.д. Это, 64
однако, только требования к форме знания со стороны деятельности, свободные от каких-либо ограничений на состав возможных событий и на законы природы как таковые. Априорные принципы — это принципы универсальной онтологии, которые, как и принципы логики, не содержат в себе информации о мире, ограничивающей разнообразие опыта, а лишь раскрывают фундаментальные смысловые отношения, в которых эта информация должна быть выражена, чтобы иметь статус знания. Онтологические ограничения не предписывают и не предвосхищают каких-либо законов, имеющих отношение к опыту.

В этом плане мы должны ограничить претензию Канта на коперникианский переворот в философии, подчиняющий предметы опыта системе априорных принципов. Если, следуя Канту, включить в систему априорных принципов также и некоторые принципы естествознания, то эта идея становится, конечно, тривиально ложной. Ясно, однако, что отказ от коперникианского переворота в его первичной трактовке, смешивающей принципы физики с принципами метафизики, не ставит под сомнение особый статус универсальных категорий и логики. Кант, несомненно, прав в утверждении первичности и абсолютности форм мышления, в том положении, что систематизация опыта невозможна без предстааче-ний, независимых от опыта. Современная теория познания не может поколебать это фундаментальное положение, лежащее в основе априористской теории познания.

Деятельностная точка зрения позволяет прояснить реальную основу кантовского понятия чистого созерцания. Определение чистого созерцания как «представления данного до всякого знания» апеллирует к разуму, существующему до всякого опыта. Эта мистика, однако, исчезает при понимании категорий как принципов выделения и предвосхищения предметной структуры мира. Пространство, с этой точки зрения, не очевидность, присущая разуму по его природе, а лишь представление о сущностно необходимой для практики стороне вещей, сформированное в процессе деятельностной адаптации и социализации индивида. Кантовское чистое созерцание, таким образом, это только Деятельностная интуиция, первичное видение предметов в аспекте деятельности и система их идентификации. Эта интуиция образуется непосредственно в практике и предшествует всякому познанию в том же плане, в котором ему предшествуют практика и выявляемая ею предметная структура мира.

Важно отметить, что в деятельностной теории познания чистое созерцание — не инструмент конструирования предметности, а только инструмент ее выяапения и предвосхищения. Развитие этого тезиса устраняет радикально-конструктивный характер кантовской теории познания и приводит к некоторому варианту теории
65
отражения. С этой точки зрения получает определенный смысл концепция «данности предмета в подлиннике», развиваемая в интуитивизме И.О. Лосского. Лосский справедливо указывал на то обстоятельство, что все теории, в которых предмет познания «впервые создается в актах познания», противоречивы и бесперспективны [6]. Деятельностная точка зрения, наконец, полностью устраняет агностицизм кантовской теории, ибо она рассматривает предметный мир не как конструируемый сознанием, а как выявляемый деятельностью до каких-либо актов мышления. Структура реальности, выявляемая в деятельности, дана нам как высшая реальность, за пределами которой нет и не может быть какой-либо трансцендентности, недоступной знанию. Деятельностная теория познания делает бессмысленной идею ноуменального мира как особого бытия,

недоступного для понятийного описания. Праксеологическая трактовка познания приводит нас к пониманию того обстоятельства, что сама категория реальности производна от деятельности и не может означать ничего другого, кроме структуры предметности, выявляемой в актах деятельности.

5. Априорность математики

В теории познания Канта априорность математики признается как самоочевидный факт вследствие универсальности и необходимости ее утверждений. Праксеологическое понимание категорий дает нам возможность подойти к рациональному обоснованию этого факта исходя из связи математики с категориальной структурой мышления. Математический априоризм оправдывается здесь из того предположения, что система очевидностей, лежащих в основе исходных математических понятий, является частью категориальных и логических очевидностей или в определенном смысле производна от них.

Существенный довод в пользу принадлежности исходных истин арифметики и геометрии к сфере априорного знания проистекает из самоочевидности и интерсубъективности этих истин. Деятельностная трактовка априорного знания позволяет нам утверждать, что важнейшей характеристикой априорного знания является его самоочевидность и интерсубъективность. Для выполнения своей функции универсальной нормы априорное знание должно быть дано сознанию с особой степенью очевидности, преобладающей над всякими очевидностями, относящимися к содержанию знания. Таковы, к примеру, общепринятые нормы логического следования. Но в таком случае сама аподиктическая очевидность, которая в полной мере присуща исходным утверждениям элементарной математики, может рассматриваться, э качет стве аргумента за априорность этих утверждений.

66

Этот вывод подтверждается и непосредственным анализом структуры универсальной онтологии. Практическая деятельность порождает в качестве универсальных и интерсубъективных пред-стаапений представления о бытии и небытии, пространстве, времени, причине и следствии, необходимости и возможности и т.п. Эти категории в своей сущности отражают не что иное, как общие принципы субъектно-объектного отношения, онтологические условия деятельности, или. точнее, необходимые онтологические предпосылки акта деятельности. Одновременно с этим процесс деятельности формирует другой аспект универсальных онтологических представлений, а именно идеализированные предстаааения о предмете деятельности. Действуя, мы необходимо предписываем реальности некоторые общие требования к предмету, оправданные с точки зрения принципиальной возможности действия: мы представляем реальность как состоящую из конечных предметов, разделенных в пространстве и времени, идеально стабильных и аддитивных в смысле независимости своих свойств от увеличения или уменьшения совокупности. Вся реальность рассматривается при этом как неограниченная или способная к неограниченному увеличению совокупность такого рода предметов. Эти представления, порождаемые деятельностью наряду с общими субъектно-объектными категориями, мы можем назвать идеальными предметными представлениями или предметной онтологией. Исходные очевидности элементарной математики могут быть поняты как представления, заданные структурой предметной онтологии.

С этой точки зрения различие математических и эмпирических идеализации, как и различие между двумя соответствующими типами наук, становится предельно ясным. Интуитивной основой математики являются не представления опыта, а предметная онтология как определенный аспект универсальной праксеологической онтологии. Этот вывод в целом согласуется с кантовской характеристикой математического мышления. Хотя Кант не обращался к понятию деятельности при объяснении природы математики, он справедливо подчеркивал ту мысль, что математика генетически не связана с опытом, что она внедрена в наше сознание наряду с логикой и категориями как априорная форма мышления. Эту основную установку кантовской философии математики мы должны принять и сегодня в качестве несомненно истинной.

Кантовская теория, однако, должна быть испрашшна в одном моменте: мы должны отказаться от понятия времени как интуитивного основания арифметики. Деятельностный анализ понятия числа показывает, что оно фиксирует в себе только структурные аспекты универсальной предметности и не имеет отношения к идее процесса в его объективном или субъективном понимании.

67

Обычный довод против априорности математики исходит из очевидной содержательности ее истин и их применимости к описанию опыта. Может ли считаться в качестве априорного знание, столь органически связанное с повседневным чувственным опытом? Мы склонны верить, что простые истины арифметики и геометрии внедряются в наше сознание через пересчет предметов, через измерение реальных объемов и т.п. Это соображение, однако, яатяется ошибочным. Внимательный анализ процедуры счета и измерения показывает, что эти процедуры уже опираются на представление идеального дискретного множества, допускающего увеличение, т.е. на представление натурального ряда. Как уже было сказано, реальная предметная практика наряду с представлениями о пространстве, времени и причинности порождает предметную онтологию, т.е. представление о совокупности идеальных предметов, допускающей неограниченное увеличение. Любая практика, независимо от того, включает ли она в себя счет и измерение, неизбежно производит и содержит в себе представления о предметных множествах и величинах, т.е. онтологию, лежащую в основе математики. Идея числа и натурального ряда не порождается процедурой счета, она порождается всей предметной деятельностью как часть нормативной основы мышления и лишь прилагается затем к конкретным ситуациям в процессе счета и измерения. Ошибка сторонников эмпирического подхода к пониманию числа и величины состоит в том, что они рассматривают счет и измерение как первичный опыт, порождающий эти понятия, превращая, таким образом, область приложения понятия в его генетическую основу[3]. Это, однако, заблуждение. В действительности мы не могли бы считать, измерять и определять меру в конкретных случаях без представлений о количестве и величине, об аддитивности величин и т.п., которые имеют свои истоки не в опыте, а в структуре практики, в деятельностной установке человеческого мышления вообще.

Человеческое познание с самого начала развивается из двух источников — из опыта и из глубинных очевидностей разума, имеющих деятельностную основу, образуя два принципиально различных типа наук. С этой точки зрения математика и опытные науки различаются не степенью абстрактности, а прежде всего своей интуитивной основой, будучи ориентированными соответственно на содержание и форму знания. Не вся математика может быть истолкована как априорная и непосредственно связанная с универсальной онтологией, но это, вне всякого сомнения, относится к ее исходным представлениям, составляющим содержательное ядро и логическое основание математической науки в целом.

68

6. Обоснование математического реализма

Кантовский априоризм является антиреалистическим в том смысле, что он не предполагает какой-либо корреляции между математическими понятиями и миром вещей самих по себе. Праксеологическое понимание форм мышления позволяет увидеть несостоятельность этого взгляда. Универсальные формы мышления внеопытны, но не внепрактичны: они продиктованы практической направленностью человеческого мышления и, следовательно, коррелятивны представлениям универсальной онтологии, существующим до математики в качестве общей структуры бытия. Мы должны принять тезис Канта, что в априорном знании нет ничего эмпирического, но мы не можем признать, что в нем нет ничего реального.

Кантовский трансцендентализм имеет две стороны. Он состоит в утверждении, что существует система представлений, независимая от опыта и предполагаемая опытом как необходимая форма его синтеза, а также в предположении, что эта система представлений трансцендентально идеальна, т.е. обусловлена только сущностью разума и не имеет отношения к вешам в себе. С праксеологической точки зрения мы должны принять первую установку и категорически отвергнуть вторую. Идеальные структуры мышления выполняют свою функцию именно потому, что фиксируют в себе существенные подразделения реальности, выявляемые деятельностью.

В своем отношении к миру человек строит два уровня представлений: теоретические представления, относящиеся к данным опыта, и онтологические представления, фиксирующие в себе необходимые условия деятельности. Оба эти уровня представлений обладают объективной значимостью, ибо оба они навязаны практическим отношением человека к миру. И если математическая теория в своих исходных интуициях задана категориальной онтологией, то ей не может быть отказано в статусе реально значимой теории. Законы математики, конечно, не законы физики, но, тем не менее, мы имеем право настаивать на их непосредственной связи со структурой реальности, выраженной в категориях. Этот ход мысли приобретает полную ясность, если мы перейдем от Канта, который считал категории только формой мышления, к Гегелю, который считал их также и формами бытия вещей. Праксеологическая теория познания оправдывает позицию Лейбница и Гегеля, указывая путь для реалистического понимания принципов математики.

Мы не можем принять реализм Платона, предполагающий некоторую форму субстанционального бытия математических объектов, но мы должны отказаться и от радикального идеализма Канта, для которого математические понятия только мысленные

69

конструкции. Между наивным платоновским реализмом и кан-товским идеализмом, несомненно, возможна средняя позиция, вскрывающая факт обуслоаленности первичных математических идеализации универсальной онтологией, имеющей статус реальной картины мира. Прямая линия, конечно, не существует как чувственный объект, но представление о прямой линии включено в универсальную форму мышления как неустранимый элемент, и, следовательно, оно отражает в себе некоторый необходимый аспект реальности, обусловливающий саму возможность познания и действия. Реальность математического объекта или принципа — это его принадлежность к универсальной форме мышления, необходимость для системы предметной онтологии.

Исходные понятия математики являются, таким образом, одновременно и априорными, и реальными. Математика априорна, поскольку ее первичные представления производны от универсальной формы мышления, независимой от опыта, и она реальна, поскольку универсальные формы мышления производны от деятельности и представляют собой специфическую картину реальности, обусловленную практической ориентацией мышления,

В высказываниях о математической реальности возможны различные акценты. Во-первых, мы можем говорить о системе первичных математических объектов как однозначно детерминированных системой реальных (онтологических) представлений. Мы подчеркиваем здесь то обстоятельство, что первичные математические факты — не конвенции и не фикции, а структуры, коррелятивные аспектам реальности, выраженным в универсальной онтологии. Во-вторых, мы можем понимать реальность математики в смысле прямого соответствия математических понятий с онтологически определенными аспектами реальности. Мы можем, к примеру, понять натуральный ряд чисел как мысленную конструкцию, созданную на основе представления о единичной веши и об операции соединения ее с другой единичной вещью. Реальность первичных математических идеализации может быть понята также и в том смысле, что в отличие от чистых фикций они обладают обязательной интерпретацией в мире опыта. Человеческое познание и сама человеческая деятельность были бы невозможными, если бы эмпирическая реальность радикально расходилась с предстаапениями, выраженными в онтологии. Деятельностный характер объектов, относящихся к форме мышления, предполагает наличие объектов в эмпирическом мире, которые с достаточной точностью воспроизводят основные свойства этих идеальных образов.

С реалистической точки зрения мы вправе говорить об особом статусе объектов арифметики и евклидовой геометрии как специфических идеализации, определенных структурой категориальной онтологии. Мы должны, с этой точки зрения, строго раз-

70

личать теории, принадлежащие к онтологически истинному ядру математики, от теорий, которые являются лишь их формальными обобщениями. Евклидова геометрия — единственная реальная геометрия, покоящаяся на онтологически истинных принципах.

Намеченная, таким образом, концепция математического реализма позволяет придать определенный смысл известным высказываниям К. Геделя о реальном статусе математических объектов. Гедель утверждал, что математика имеет дело со специфическими математическими объектами, существующими во внечувственном мире, до и независимо от математических теорий. Он допускал также, что наряду со способностью к чувственному восприятию человек обладает способностью внечувственного восприятия, обеспечивающего ему доступ в мир математической реальности 7, с. 207; 8, с. 484. С праксеологической точки зрения эти идеи Геделя могут быть поняты как указание на предметную онтологию, существующую независимо от математики в качестве универсальной формы мышления и определяющую структуру исходных математических понятий. Поскольку предметная онтология обладает статусом реальности, то исходные математические идеализации можно считать обуслоаченными реальностью в той же мере, что и законы физики. Идея об аналоге восприятия, раскрывающего мир математических объектов, также получает здесь определенный смысл. Из самого факта онтологического видения мира следует, что наряду с чувственным восприятием предметов человеческое сознание опирается также и на внечувственное видение мысленных объектов типа пространства, времени и т.п. Мы должны признать факт категориальной интуиции, навязывающей нам законы идеальной предметности и выявляющей универсальные формы мышления. Гедель, несомненно, прав в том, что исходные очевидности математики — это не очевидности опыта и не продукт систематизации опыта. Математические предметы однозначно навязаны нам категориальными представлениями о реальности.

Современные теории математического реализма неудовлетворительны вследствие отсутствия подлинного анатиза онтологии математики. Не проясняя связи математических идеализаций с деятельностной онтологией, современный математический реализм сводится либо к обоснованию абстрактного объективизма в духе Канта и Гуссерля, либо к попыткам прямого соотнесения математики с физической реальностью того типа, который дается генетической и эволюционной эпистемологией. Оба эти подхода к пониманию математического реализма должны быть остаалены как совершенно несостоятельные.

Современная философия математики должна согласовать между собой два, несомненно, истинных положения. Мы должны понять, что исходные принципы математики не имеют отношения

71

к опыту и к исторически меняющейся психологии людей, а также понять то обстоятельство, что эти принципы однозначно навязаны нам и, следовательно, имеют прямое отношение к структуре нашего мира, т.е. к некоторого рода реальности. Соединение этих положений возможно лишь на основе понимания универсальной онтологии как особой картины мира, лежащей в основе математического мышления. Математическое знание укоренено в категориальном видении мира, и это обстоятельство дает нам основу для понимания априорности и реальности его исходных принципов.

7. Несостоятельность эмпирической критики математического априоризма

Во второй половине XX в. вследствие крушения программ обоснования математики, тесно связанных с философией априоризма, появились подходы к объяснению математики как определенного рода эмпирической науки. Наиболее основательным из этих подходов яатяется генетическая эпистемология Ж. Пиаже, в которой математические идеализации объясняются как продукт операционального опыта. Опыт, по мнению Пиаже, имеет два уровня: физический (конфигуративный), относящийся к качествам вещей, и логико-математический (операциональный), относящийся к манипуляциям с этими вещами (передвижение, наложение и пр.). Исходные математическике представления, по Пиаже, формируются в сфере операционального опыта, и ошибка старых эмпириков состояла лишь в том, что они пытались поставить математику рядом с физикой, вывести ее представления из опыта, относящегося к физическим качествам вещей.

С праксеологической точки зрения недостаток этой концепции состоит в том, что она превращает математические представления в теоретические, отражающие определенный аспект опыта, а следовательно, и подверженные исторической корректировке. Если бы арифметика действительно была обычным теоретическим знанием, отражающим процесс упорядочения и счета, то мы, несомненно, имели бы некие ее теоретические обобщения, претендующие на опытную достоверность. Между тем история математики демонстрирует нам только логическую линию развития арифметики, характеризующуюся исключительно формальным обобщением понятий.

Другая система эмпирических доводов была предложена И. Лакатосом, который исходил из анализа структуры математического доказательства. Основное допущение Лакатоса состоит в том, что последовательность самоочевидных шагов, к которой сводится всякое доказательство, имеет в конечном итоге только эмпирическое оправдание, а следовательно, исторически относи-

72

тельное значение. Все доводы Лакатоса опираются на предпосылку относительности базовых математических очевидностей и на возможность их опровержения при новом, более тонком подходе к анализу доказательства. С праксеологической точки зрения доводы Лакатоса несостоятельны: они опираются на смешение ассерторических и аподиктических очевидностей. Исходные очевидности математического доказательства — это аподиктические очевидности, очевидности формы мышления, которые имеют вневременное значение и не подлежат критике с точки зрения каких-либо новых критериев строгости. Этот вывод подтверждается и историей математики. Реальная история математики не дает нам повода думать, что доказательства, принятые математическим сообществом в качестве окончательных, могут быть дезавуированы какими-либо более тонкими современными рассуждениями.

Ф. Китчер критикует априоризм на основе анализа понятия математической интуиции. Его основной тезис сводится к тому положению, что любая интуиция является интуицией реального сознания и, следовательно, относительной в своей надежности. Претензии априористской теории на обнаружение зоны абсолютной надежности являются, с этой точки зрения, тщетными. Китчер указывает также на ряд трудностей, с которыми встречается априористская концепция при объяснении фактов реальной математики (9, с. 50—531).

Китчеровскую критику априоризма надо признать последовательной, если встать на позицию психологической теории познания, из которой он исходит. С психологической точки зрения нельзя доказать наличие такой сущности, как аподиктическая очевидность, и с этой точки зрения выглядит вполне законным его тезис о том, что всякая интуиция столь же ограничена и ненадежна как и сила обычного восприятия. Представляется, однако, что сама идея психологической теории познания является несостоятельной. Любая теория познания, прежде всего, должна выявить принципы, имеющие интерсубъективное значение, и по этой причине она не может исходить из фактов психологии и их обобщений. Эти факты приобретают гносеологический статус только тогда, когда они санкционируются целевыми установками познания, т.е. тогда, когда они приобретают праксеологическое обоснование. Психологическая теория познания оставляет без объяснения основные факты, связанные с математикой: непреложность исходных математических утверждений и историческую стабильность признанных математических доказательств.

А.Г. Барабашев подходит к критике априоризма с точки зрения логики развития теоретических концепций. Если кантовский априоризм, считает он, рассматривать как определенного рода научно-исследовательскую программу, то надо признать, что на протяжении двух последних столетий эта программа демонстрировала только регрессивное развитие, характеризующееся постоянным отступлением от первоначально принятых установок [10]. Слабость этого аргумента состоит в том, что он имеет только косвенный характер и не может быть использован в качестве решающего аргумента. Факт регрессивного развития априоризма (который в определенной степени надо признать) сам по себе еще не свидетельствует о его несостоятельности, ибо он может быть понят как временное отступление, имеющее место вследствие его недостаточной зрелости. Очевидно, что мы должны сделать теорию достаточно глубокой, прежде чем требовать от нее объяснительной силы.

Деятельностная трактовка оснований математики полностью устраняет все формы математического эмпиризма, которые могут рассматриваться теперь лишь в качестве заблуждений, проистекающих из недостаточного понимания природы математических идеализации. В настоящее время мы должны направлять свои усилия не на опровержение математического априоризма, а на его углубление, согласующееся с реальной историей и методологией математики.

8. Антропный характер представления об актуальной бесконечности

Мы перейдем теперь к рассмотрению проблем методологии математики, показывающих важность обшей теории априорного знания. В качестве примера рассмотрим некоторые подходы к проблеме обоснования математики и к понятию бесконечности, которое тесно связано с этой проблемой.

В философии математики мы разделяем два типа бесконечности, а именно, бесконечность потенциальную и бесконечность актуальную. Априорный характер представления о потенциальной бесконечности не вызывает сомнения. Поскольку идеальный предмет, будучи присоединен к множеству предметов, не изменяет свойств этого множества (по свойству аддитивности идеальной предметности), то эта операция всегда сохраняет возможность ее повторения. На этом соображении основан аргумент Канта в пользу бесконечной делимости пространства. «...Пространство, — пишет Кант, — есть такое целое, которое при всяком разложении, в свою очередь, все еще представляет собой пространство и потому оно делимо до бесконечности» [5, с. 121]. Это означает, что идея потенциальной бесконечности входит в абсолютно надежное ядро математики.

Понятие актуальной бесконечности является в этом отношении более проблематичным. Поскольку пересчет чисел не может быть закончен, то завершенный

натуральный ряд представляется
74
некоторой фиктивной сущностью, недостижимой даже в мысли. Отторжение актуальной бесконечности в методологии математики связано, прежде всего, с ее восприятием как чисто интеллектуальной конструкции, не имеющей какого-либо реального воплощения.

В действительности мы находимся здесь в плену некоторого фундаментального заблуждения. Справедливо указывалось, что при таком подходе и большие числа натурального ряда надо считать чисто фиктивными. Математическая реальность, однако, есть реальность онтологическая, а не эмпирическая, и ее подлинное оправдание не требует апелляции к эмпирическим процедурам. Мы должны здесь исходить из рассмотрения универсальной онтологии мышления. Проблема состоит в определении места актуальной бесконечности в структуре универсальной онтологии.

Каитовская теория оправдывает представление об актуальной бесконечности как элементе априорного знания. От конечного числа причинных связей, данных в опыте, мы, по Канту, неизбежно переходим к идее Природы, от представления о конкретных психических актах — к понятию Души как безусловной целостности и т.д. Представление об актуальной бесконечности, таким образом, неизбежно для человеческого сознания как представление, выражающее его внутреннюю интенцию к целостности и преодолению конечности. Деятельностная точка зрения оправдывает этот ход мысли. Познавательная деятельность образует не только представления, относящиеся к содержанию мышления, но и представления, выражающие необходимые интенции мышления, проистекающие из его практической природы. Мы оправдываем актуальную бесконечность как необходимую конструкцию сознания, как предстаатение о предельной величине, охватывающей всю совокупность реальных величин.

Мы вправе настаивать на корректности понятия актуальной бесконечности для математики, исходя из того факта, что соответствующее содержательное представление является необходимым элементом в структуре универсальной онтологии. Если априорные представления об актуальной бесконечности необходимы для мышления в целом, то они имеют в себе позитивное содержание, приемлемое для его экспликации в рамках математической теории. Мы можем утверждать, что актуальная бесконечность в той же степени обусловлена универсальной онтологией, как и бесконечность потенциальная. Такого рода общее оправдание понятия актуальной бесконечности, конечно, недостаточно для заключения о непротиворечивости конкретной аксиоматики теории множеств, но оно достаточно для того, чтобы понять полную несостоятельность интуиционистской критики этой теории, которая исходит из тезиса о принципиальной неприемлемости этого понятия для математического мышления.
75

Практика математического мышления также говорит о том, что актуальная бесконечность коррелятивна бесконечности потенциальной и введение одной из них предполагает использование другой. Всюду, где мы утверждаем наличие потенциальной бесконечности, мы неизбежно утвержаем и наличие порождаюшкй функции, относящейся к бесконечному числу элементов, которые эквивалентны друг другу в смысле принадлежности к этой функции. Но такого рода эквивалентность задает класс, состоящий из бесконечного числа элементов, рассматриваемый в качестве единой и завершенной целостности. В методологическом плане, таким образом, наличие потенциальной бесконечности предполагает представление об актуальной бесконечности как о сфере элементов, соответствующих функции бесконечного порождения. Действуя с порождающими функциями как с целостными объектами, мы в действительности действуем с бесконечными множествами, которые они представляют. Очевидно, что любая система уравнений предполагает пересечение множеств решений, которые, в частности, могут быть бесконечными. Но это значит, что актуальная бесконечность, как и бесконечность потенциальная, внедрена в самые основы математического мышления.

Этот момент хорошо осознавал Г. Кантор. «Область изменения функции, — писал он, — не может быть сама чем-то переменным, ибо в таком случае отсутствовало бы всякое твердое основание рассуждений; следовательно, эта область является определенным актуально бесконечным множеством значений» [11, с. 297]. Использование понятия потенциально бесконечного, считает Кантор, имеет понятие актуальной бесконечности в качестве своей необходимой предпосылки. Представляется, что математики XX столетия недооценили аргументы Кантора, проистекающие из анализа фактической логики математического рассуждения.

Современная философия математики все еще нацелена на отделение актуальной бесконечности от потенциальной как понятия проблематичного и требующего особого обоснования. В действительности оба этих представления совершенно симметричны: оба они обуслоааены онтологически и оба они предполагают друг друга в логике формирования понятийных систем. Чем больше мы углубляемся в механизм познания, тем более ясно осознаем, что процесс формирования понятий основан на представлениях, выходящих за пределы опыта и связанных с понятием актуальной бесконечности. Даже такие понятия, как точка и прямая, в действительности уже содержат в себе представление о завершенной бесконечности. Можно утверждать, что представление о целостном (завершенном) множестве является онтологическим фундаментом математики в той же мере, что и представление о потенциальной бесконечности.

76

Но в таком случае у нас нет оснований сомневаться в том, что возможна непротиворечивая формальная экспликация этого фундаментального представления.

Критика актуальной бесконечности в математике основывается, прежде всего, на идее параллелизма между миром математических понятий и миром опыта. Она проистекает из философии математики, требующей для каждого математического понятая некоторого коррелята в действительности. Эта натуралистичекая логика хорошо видна в подходе Гильберта. Если потенциальную бесконечность Гильберт рассматривает как оправданную опытом и абсолютно надежную, то актуальную бесконечность он понимает только в качестве искусственной конструкции, требующей финитного обоснования. «Мы видели, что бесконечное не реализуется нигде, оно не присутствует в природе, а без специальных мер предосторожности оно недопустимо и в качестве основы нашего мышления. Уже в этом я усматриваю некоторый важный параллелизм природы и мышления, основополагающую согласованность между опытом и теорией» [12, с. 459].
Деятельностная теория математических идеализации устраняет этот ложный параллелизм, закрывающий путь к пониманию природы исходных математических понятий. Надежность высших математических принципов проистекает не из их близости к опыту, но из их близости к универсальной форме мышления. Мы вправе утверждать полную симметрию актуальной и потенциальной бесконечности, состоящую в том, что оба эти представления в одинаковой мере обусловлены универсальной онтологией мышления и оба они, несомненно, допускают непротиворечивую формальную экспликацию. Мы должны осознать то обстоятельство, что утверждение актуальной бесконечности, как и утверждение бесконечности потенциальной, не имеют никакого отношения к опыту и к системе теоретических представлений, основанных на опыте. Обе эти идеи представляют собой лишь регулятивные формы мышления, проистекающие из его практической ориентации. Они остались бы теми же самыми при любом положении дел в мире, оставляющим возможность для мышления и действия. Мы можем вывести отсюда заключение о том. что аксиома бесконечности, утверждающая существование счетного множества, принадлежит к сфере онтологически истинной математики и может рассматриваться как элемент абсолютного обоснователь-ного слоя, совместимый с логикой и со всеми другими онтологически истинными суждениями математики.

Б. Рассел высказывал мнение, что аксиома бесконечности может быть истинной в одном мире и ложной в другом. С натуралистической точки зрения это, конечно, верно.

в том, что число атомов во Вселенной конечно, то можно утверждать, что аксиома бесконечности является ложной во всех мирах. Эта аксиома, однако, является, безусловно, истинной для всякого теоретического мира, ибо она есть лишь необходимая часть универсальной онтологии мышления. Она была бы необходимой предпосылкой мышления и в том случае, если бы окружающий нас мир был конечен во всех своих структурных характеристиках. Конечно, нельзя считать, что все типы математической бесконечности укоренены в онтологии мышления. Онтология оправдывает лишь утверждения о существовании простых видов бесконечности, к которым можно отнести счетную бесконечность и бесконечность континуума. Все остальные типы бесконечностей имеют чисто операциональное значение и должны быть обоснованы из их функции в теории.

9. Онтологическое обоснование математики

Все программы обоснования математики являются априористскими в том смысле, что они постулируют абсолютную истинность некоторых утверждений и абсолютную надежность некоторых методов рассуждения. Они постулируют, таким образом, наличие обосновательного слоя, который не подлежит обоснованию вследствие своей абсолютной надежности. Главная методологическая трудность всех программ обоснования состоит в определении природы и границ этого слоя.

Гильберт соглашался с Кантом в том, что чистое созерцание является наиболее глубоким фундаментом математики. Он считал, однако, что Кант не дал адекватного определения сферы априорного знания. *«...В* кантовской теории, — писал Гильберт, — все еще остаются антропоморфные шлаки, от которых она должна быть очищена, и после того, как они будут удалены, останется лишь та априорная установка, которая лежит в основе чисто математического знания. По существу, она и есть та финитная установка, которую я охарактеризовал в ряде своих работ» [12, с. 461]. Гильберт, таким образом, принимает априоризм как строгий финитизм, и проблема обоснования математики получает смысл как обоснование бесконечного на основе конечного.

Эта программа, однако, оказалась нереализуемой. Итог исследований в основаниях математики в XX в. можно свести к тому тезису, что бесконечное не может быть обосновано на основе конечного. Мы должны, таким образом, либо отказаться от построения программ обоснования математики вообще, либо некоторым образом реабилитировать бесконечное, поместив его в круг априорных предпосылок математического знания. Ценность деятельностной теории познания состоит в том, что она указывает нам на возможность реализации второй альтернативы.

Принципиально важно, что в рамках праксеологического анализа мы обосновываем не только априорность аксиом элементарной математики, но и априорность таких утверждений, как аксиома бесконечности и аксиома выбора. Мы расширяем сферу априорного знания на основе понятия онтологической истинности и отказываемся от финитизма как критерия априорности и границ обосновательного слоя.

Праксеологический анализ обосновательного слоя ведет к существенному усилению существующих программ обоснования математики. Обоснование априорности принципов классической логики позволяет оправдать универсальность закона исключенного третьего и отбросить как необоснованные соответствующие ограничения в метатеории. Мы получаем тем самым существенное расширение возможностей формалистского подхода. В частности, получают полную реабилитацию генценовские подходы к обоснованию формальной арифметики, основанные на принципе трансфинитной индукции. То же самое является справедливым и применительно к другим программам. Логицизм, как известно, достигает определенных успехов в редукции математики к логике и ограничивается экзистенциальными аксиомами, которые не могут быть редуцированы к общезначимым принципам логики. Это аксиома бесконечности и аксиома выбора. Однако если мы можем обосновать принадлежность экзистенциальных аксиом к априорной основе математики, то мы получаем полную редукцию основных математических теорий, включая и теорию множеств, к обосновательному слою, не внушающему подозрения в плане его истинности и непротиворечивости. Многие соображения говорят о реальности и перспективности такого подхода.

Праксеологическая трактовка априорного знания позволяет оправдать непосредственный переход от онтологической истинности принципов к их абсолютной непротиворечивости. Мы можем принять здесь то положение, что любая система онтологических истин обладает абсолютной внутренней непротиворечивостью. Мы вправе говорить о логической совместности в системе онтологических истин, а следовательно, и об абсолютной непротиворечивости всех математических теорий, основанных на аподиктически истинных аксиомах. Разумеется, не всякая содержательная интерпретация математических аксиом обосновывает их непротиворечивость, поскольку сама она может содержать в себе противоречивые положения. Этот дефект, однако, исключен в случае онтологической истинности. Аксиомы реальной логики, арифметики и евклидовой геометрии, безусловно, непротиворечивы, поскольку они лишь фиксируют различные аспекты идеальной предметности, представляющей категориальную основу математики.

79

Это значит, что новая программа обоснования математики может отказаться от обоснования непротиворечивости элементарных аксиоматик, сдвигая тем самым всю проблему к обоснованию математического анализа и теории множеств. Исследования Г. Крайзеля и Г. Такеути показывают, что из непротиворечивости арифметики вытекает непротиворечивость математического анализа и существенных фрагментов теории множеств. Обоснование аксиомы бесконечности в качестве онтологически истинной открывает путь к обоснованию непротиворечивости некоторых простых, но вместе с тем достаточно сильных аксиоматик теории множеств [13, с. 86—101].

Новая обосновательная методология, таким образом, становится возможной через критику финитизма и через оправдание некоторой части трансфинитной математики в качестве онтологически истинной. В этой новой стратегии обоснования математики основная проблема состоит не в отделении конечного от бесконечного, а в отделении бесконечного, которое нуждается в обосновании, от того бесконечного, которое имеет непосредственное онтологическое обоснование.

П. Бернайс в свое время выдвинул критерий приемлемости программы обоснования, согласно которому судьба каждой такой программы зависит от того, в какой мере она справляется с задачей обоснования математического анализа. Есть все основания предполагать, что определение обосновательного слоя, проведенное в рамках праксеологической концепции априорности, открывает путь к построению программы, удовлетворяющей этому условию. Скептические выводы относительно перспектив обоснования основных математических теорий, преобладающие в настоящее время в методологии математики, проистекают, с этой точки зрения, только из ложной философии математики, произвольно сужающей границы обоснорательного слоя.

Некоторые идеи, связанные с непосредственной опорой на онтологическую истинность в процессе обоснования математики, были высказаны К. Геделем в его статье «Расселовская математическая логика» (1944). Основная направленность рассуждения Геделя состояла в критике номиналистического обоснования математики, а именно тех программ, которые на основе конечных, номиналистически интерпретируемых понятий пытаются ввести всю систему определений и принципов, необходимых для оправдания теории множеств. Таковы не-класс концепция множеств Рассела, которая конструирует понятие класса на основе понятий логической функции и значения, и финитистский подход Гильберта, нацеленный на оправдание бесконечных множеств в рамках финитной

математики. Идея Геделя состояла в том, чтобы некоторые из высших принципов математики, связанных с бесконечностью, при-
80
нять на основе их непосредственной истинности в качестве безусловно ясного описания математической реальности. «...Нужно взять, — писал Гедель, — более консервативный курс, который состоял бы в том, чтобы сделать значение терминов "класс" и "концепт" более ясными и построить непротиворечивую теорию классов и концептов как объективно существующих сущностей» [7, с. 255]. Идея Геделя состоит в том, чтобы не конструировать понятие класса из более элементарных понятий, а описать его в самоочевидных свойствах как автономно существующий и первичный объект.

Эта стратегия кажется малооправданной, ибо вся обосновательная критика классической математики была направлена на то, чтобы устранить обыденные и неконструктивные интуиции из математики как чреватые противоречиями. Интуитивная ясность определений, как показывает практика, не дает нам гарантий их совместности. Идея Геделя, однако, приобретает смысл, если мы имеем обоснование априорности (онтологической истинности) тех или иных абстрактных математических принципов. Ценность праксеологической теории априорного знания состоит в том, что она позволяет выработать такое обоснование, по крайней мере, по отношению к части математических истин. Несомненно, что возможно строгое обоснование априорного и, следовательно, предельно надежного характера принципов классической логики, арифметики и элементарной геометрии. Из приведенных выше соображений следует, что мы можем подойти также и к обоснованию ряда аксиом теории множеств, таких как аксиома объемности, аксиома выделения и аксиома бесконечности. Как показывает специальное рассмотрение, система этих аксиом достаточна для обоснования математического анализа и значительной части теории множеств.

Наш общий вывод может состоять в том, что деятельностиая теория позволяет указать истинные границы априорной математики и дать, таким образом, рациональные аргументы для оправдания обосновательного слоя в конкретных случаях.

С точки зрения эмпирической философии науки, математические определения никогда не достигают полной однозначности, математические доказательства никогда не гарантированы от скрытых лемм, математическая интуиция не обладает никакими преимуществами перед обычной эмпирической очевидностью, уязвимой для контрпримеров. С этой точки зрения обосновательный слой всегда относителен и подвержен корректировке. Праксеологической анализ исходных математических идеализации показывает несостоятельность этих установок. Математика имеет свои истоки не в опыте, а в категориальной онтологии и представляет собой знание, радикально отличное от знания, основанного на опыте. Онтологически означенная система математических принципов
81
представляет собой обосновательный слой, не нуждающийся в каком-либо дополнительном обосновании. Подлинное обоснование математики есть только евклидианское обоснование, базирующееся на онтологически истинных принципах. Такого рода обоснование абсолютно, и имеются основания думать, что оно достижимо для всех основных теорий современной математики.

Программы обоснования математики, появившиеся в начале XX в., были обречены на неудачу вследствие слабости своих методологических и философских предпосылок. С достаточной определенностью можно предполагать, что прогресс в решении проблемы обоснования зависит сегодня не столько от изобретения новых методов логического анализа, сколько от углубления философии математики, от прояснения наших представлений о природе математического мышления и путей рационального оправдания обосновательного слоя. Изложенные соображения показывают, что праксеологическое обоснование математического априоризма дает нам возможность существенного продвижения в этом направлении.

Примечания

[1] Идея такого рода релятивистского априоризма как единственного согласующегося с представлениями современной науки защищается в работе А.Н. Кричевца |4|.

[2] Кант хорошо осознавал эту трудность. «Ведь явления, — писал он, — могли бы быть такими, что рассудок не нашел бы их сообразными с условиями своего единства...» [5. с. 186].

[3] На этот момент обращал внимание Г. Фреге в своей критике философии арифметики Дж.Ст. Милля (см.: *Фреге Г.* Обоснование арифметики, М., 2000. С. 11).

Слисок литературы

1. *Гуссерль Э.* Логические исследования. Спб., 1909. С. 101.
2. *Гуссерль Э.* Начало геометрии. Введение Жака Деррида. М., 1996. С. 163. 240 и др.
3. *Фоммер Г.* Эволюционная теория познания. М., 1998. С. 163.
4. *Кричевец А.Н.* Об априорности, открытых программах и эволюции // Вопросы философии. 1997. № 7.
5. *Кант И.* Соч.: В 6 т. М., J964. Т. 4. Ч. 1.
6. *Лосский И.О.* Трансцендентально-феноменологический идеализм Гуссерля // Логос. 1991. № I.
7. *Godel K.* Russells mathematical logic // Pears D.F.(ed). Bertrand Russell. Collection of critical essays. N. Y., 1972.
8. *Godel K.* What is Cantor's continuum problem // Philosophy of mathematics. Selected readings. N. Y., 1964.
9. *Kitcker Ph.* The Nature of Mathematical Knowledge. N. Y., 1983.
10. *Барабашев А.Г.* Регресс математического априоризма // Наст. сб.
11. *Кантор Г.* К учению о трансфинитном// Кантор Георг. Труды по теории множеств. М., 1985.
12. *Гильберт Д.* Избранные труды. М., 1998. Т. 1.
13. *Крайзель Г.* Исследования по теории доказательств. М., 1981. С. 86—101.

КОММЕНТАРИИ

В.А. Бажанов

Василий Яковлевич давно и последовательно отстаивает крайнюю позицию априоризма (или во всяком случае весьма близкую к ней). О праксеологическом априоризме говорится им, например, в книге «Развитие предстаапений о надежности математического доказательства» (М., 1986. С. 96). В настоящей статье эта точка зрения представлена еще более выпукло.

Идея крайнего априоризма вряд ли может быть опровергнута, так сказать, фактами, она может быть только поколеблена ими. Ситуация здесь где-то аналогична традиционному разделению философов на материалистов и идеалистов. Та или иная точка зрения является больше предметом веры, нежели признания аргументов разума. Опровергнуть материализм (идеализм) рационально невозможно. Другое дело, насколько эта точка зрения удовлетворяет принципу «экономии мышления» (принципу Оккама). Вот здесь-то, на мой взгляд, и кроются изъяны крайнего априоризма, выражаемые в его следствиях, на уровне конкретных положений.

Посмотрим под этим углом зрения на текст Василия Яковлевича.

1. Автор склонен не видеть между практикой и опытом ничего общего. Он утверждает, что «математика радикально отличается от теорий, основанных на опыте», а в другом месте провозглашает, что «исходные математические идеализации можно считать обусловленными реальностью в той же мере, что и законы физики». Как это связать с утверждением о том, что «математика внедрена в наше сознание наряду с логикой и категориями как априорная форма мышления»? Если настаивать на априоризме математики (и логики), то таковыми — по идее — должны быть и математические

абстракции. В противном случае недопустимо говорить об идеализациях, поскольку само понятие идеализации подразумевает некоторую (явно или неявно) заданную реальность, отягощенную второстепенными деталями, которыми можно пренебречь.

2. Крайний априоризм ведет к абсолютистскому истолкованию категорий, когда они теряют статус наиболее обших и исторически обусловленных понятий и провозглашаются заданными раз и навсегда. В той мере, в какой исторична практика, в той же мере должны быть зависящими от ее уровня и категории. В противном случае как можно объяснить тот факт, что, скажем, в античности понятие атома имело статус философской категории, а позднее оно стало проходить совсем по иному «ведомству» и в ином качестве?

83

Имеет ли опыт (и если да, то какое?) отношение к практике? Об этом статья ничего не повествует. Между тем там сказано, что «знание должно быть соединено с практикой, а следовательно, оно должно быть подчинено категориям практики, безотносительно к сфере опыта». Это достаточно сильное суждение, которое требует особой аргументации.

3. Автор, как и ранее (см.: Априорность и реальная значимость исходных представлений математики // Стили в математике. Социокультурная философия математики. М., 1999. С. 80), настаивает на «первичности интуитивной основы математики» и «внеисторичес-ком характере этой основы». Отсюда Василий Яковлевич выводит, что «очевидное для Евклида является очевидным и для нас». Этот тезис должен как бы убедить во внеисторическом характере нашей первичной интуиции (фундаменте априоризма). Однако никак нельзя согласиться с тем, что «очевидность» — особенно в доказательстве — носит внеисторический характер. Хорошо известно (и есть масса высказываний, ряд из которых приведен в упомянутой выше книге автора), что критерии доказательности весьма подвижны, То, что признавалось строгим доказательством в 1800 г., в 1900 г. вовсе не являлось доказательством. 2000 год в этом смысле также вряд ли составит исключение. Стоит ли здесь пытаться представить себе «впечатления» Евклида от математики 2000 г.? Впрочем, если выбрать 1800 г., то ситуация вряд ли будет более радужной.

Как можно объяснить, с точки зрения Василия Яковлевича, не только подвижные, эволюционирующие стандарты доказательства, но и обычные для математиков, иногда весьма досадные, *ошибки,* расцвет, а затем фактическое *забвение* громадных разделов математической мысли (скажем, теории конических сечений), признание одними математиками каких-то результатов и *непризнание* этих же результатов другими математиками? Как можно объяснить иногда очень долгий — десятилетия, а порой и столетия! — путь к тем или иным результатам (даже в рамках, казалось бы, одной теории или ветви математики, скажем, в анализе)?

Эта точка зрения подразумевает и крайнюю форму презентизма без какой-либо примеси антикваризма, она в принципе не оставляет математику права на ошибку, на пересмотр достижений этой науки, придает ей внеисторический статус.

Думается, что только историческая «привязка» априоризма, означающая его эволюцию вместе с эволюцией всей математической деятельности и относительный характер, т.е. принятие версии «умеренного априоризма», позволяет дать ответы на поставленные вопросы.

4. Мне лично очень импонирует деятельностный подход (который я воспринял от И.С. Алексеева из длительного общения с этим глубоким мыслителем). Но этот подход вряд ли совместим

84

с признанием *внеисторического* характера деятельности. Василий Яковлевич пишет, что «категории и логические принципы априорны в том смысле, что они не зависят от опыта и эмпирических подразделений вообше... Индивид, не обладающий обшей логикой и системой категорий в качестве *самоочевидных* (выделено мною. — *В.Б.)* оснований мышления не может быть включен в социальную коммуникацию и социальное поведение».

После знаменитых экспериментов Выготского и Лурии. установивших существование двух принципиально различных типов мышления — категориального и ситуативного — и обусловленных как раз-таки характером деятельности, об ее внеисторичности говорить нельзя, равно как и об «очевидностях разума, имеющих деятельностную основу». Если и утверждать наличие такого рода очевидностей, то только в рамках конкретной деятельности в конкретный исторический период. Деятельность вариабельна, связана (используя термин, который употреблял и И.С. Алексеев) с процессом распредмечивания, она имеет более фундаментальный онтологический статус, нежели существование отдельных объектов-вещей, и тем самым определяет содержание понятий (и категорий!), которыми мы оперируем.

Одним словом, позиция Василия Яковлевича, как мне кажется, уязвима в следствиях, тогда как *идея* априоризма, выраженная им в крайней форме, имеет право на существование в условиях такой демократической ветви знания, как методология науки, и, в частности, обогащает спектр точек зрения в философии математики. Мы можем быть благодарны автору за его последовательность и готовность терпеть критику и достойно на нее отвечать.

А. Г. Барабашев

В.Я. Перминов последовательно защищает априористскую концепцию математики, и эта настойчивость не может не вызывать уважения. Согласно автору, та «наклонная плоскость», по которой математический априоризм постепенно сползает в направлении все более и более слабых версий, порождена отсутствием должного теоретического обоснования и стремлением опереться на имманентные свойства сознания (субъекта) в генерации априорных синтетических созерцаний. По глубокому убеждению автора, можно и должно остановить такое движение математического априоризма нахождением действительной основы математики, глубинных и неизменных структур практической деятельности, в свою очередь проистекающих из предметной онтологии. Автор настойчиво утверждает, что при правильном обосновании математический априоризм станет стабильной концепцией, хорошо объясняющей фунда-

ментальные факты математики (отличие математических ообъекто от объектов реального мира и неизменность однажды установленных результатов) и устанавливающей область неопровержшмых оснований математики.

Насколько обоснованны эти претензии? Во-первых, следуем отметить ряд сильных допущений, принимаемых В.Я. Перминовым. Если противопоставлять мир изменчивого опыта миру стабильной практической деятельности как таковой и говорить, что любой опыт выходит на эквифинальные принципы деятельности, то почему все-таки эти принципы деятельности абсолютно неизменны для всех поколений (внеисторичны) и вообще такювьт для всех (возможно) действующих существ? Ответ автора следующий: эти принципы основываются на предметной онтологии (состоящей из онтологических предпосылок предметной деятельности и из идеализированных представлений о предмете деятелтъности). В предметную онтологию входят основные категории (бытие, причина, пространство и время, необходимость и возможность и т.д.) и представление об устойчивости предметов деятельности в отношении оперирования с ними. Но почему, в свою очередь, категориальный аппарат и представление об устойчивости предметом внеисторичны? Потому, указывает автор, что иначе деятельность не смогла бы осуществляться. Но это утверждение спорно: может быть, мы действуем не лучшим образом вследствие излишней «жесткости» нашей предметной онтологии и наши достижения связаны с отступлениями от нее? Не следует ли сказать, что предметная онтология эволюционирует, что современные категории причины и следствия, части и целого, бытия и небытия и т.д. сильно отличаются от категорий Парменида, Аристотеля, Ньютона и т.д.? Мой опыт работы со студентами показывает, в чаостности, что самым трудным моментом при проработке диалога «Парменид» является именно достижение понимания относительно используемых Платоном понятий «единое» и «существует». Многие студенты настойчиво утверждают, что рассуждения диалога некорректны, поскольку Платон вообще не обладал ясным пониманием этих категорий. Их примеры, иллюстрирующие должное понимание этих категорий, сплошь относятся к современной практике и науке. Не естественнее ли в таком случае полагать, что предметная онтология исторически изменяется?

В.Я. Перминов полагает, что в математике может бытгь выделен слой исходных (первичных) объектов, непосредственно соотнесенных с предметной онтологией. Этот слой и есть абсолютная основа математики, приоритетная по отношению к любой формальной системе аксиом. Программы обоснования математики, предлагающие в качестве инструментов обоснования формализацию, логическую редукцию одних формальных систем к другим и поиск непротиворечивости исходных систем, не могут выполнить свое предназначение, поскольку само формально-логическое обоснование является следствием более глубинных представлений. В этом я полностью согласен с автором. Однако насколько можно точно и «навсегда» очертить границы такого слоя? Неизменно ли в него входят положения (принципы) реальной логики, арифметики натурального ряда, евклидовой геометрии? Не станут ли долгие годы и десятилетия (а может, столетия) работы со все более совершенствующимися компьютерами в виртуальных средах предпосылкой радикального сдвига в составе обосновательного слоя? Будут ли, например, геометрические образы наших потомков на глубинном уровне «раскодироваться» ими через евклидовы геометрические образы, а не через другую систему условных соотнесений? Я бы не стали однозначно отвечать на этот вопрос.

Кратко перечислю некоторые другие вопросы, ответ на которые важен при создании удовлетворяющей самым высоким требованиям коницепции математического априоризма. Каков статус тех частей теоретической математики, которые не входят в ее обосновательный слой? Есть, ли там неизменность однажды доказанного или нет? Каак существуют конструируемые в таких разделах математические объекты? Тем более как соотносятся «прикладные» математические модели и математические теории? Эти вопросы в статье оставлены без ответа, но важно уже то, что тяжелейшая проблема обоснования математического априоризма с максимальным сохранением его исторически сложившегося содержания преобразована В.Я. Перминовым в ясную программу, предлагающую нетривиальные утверждения и стремящуюся эти утверждения представить в качестве обсуждаемых аргументов.

А.А. Гршгорян

Мне близка мысль В.Я. Перминова о том, что «математика имеет свои и истоки не в опыте, а в категориальной онтологии и тем самым предоставляет собой знание, радикально отличное от знания, основанного на опыте». При этом автор статьи считает, что исходные математические интуиции априорны и что их априорность может быть обоснованна в рамках праксеологически-ориентированной гносеологии. Но напрашивается естественный вопрос: каковы критерии отнесения той или иной математической «праинтуции» к онтологически-праксеологически обоснованным, а следовательно, и (в этом смысле) к априорным. Например, нужно ли относить представление здравого смысла о том, что «случайность есть отсутствие закономерности», к числу тех фундаментальных предпосылок, которые лежат в основе математической теории вероятностей?

Представление здравого смысла о том, что случайность есть отсутствие закономерности, не подвергалось сомнению со стороны научного мышления вплоть до

XVII—XVIII вв. И только в 1712 г. была издана работа Я. Бернулли, в которой содержался закон больших чисел — первая попытка найти и выделить закономерность в случайности. При этом идея о том, что случай может подчиняться определенным закономерностям, была настолько неожиданной и непривычной, что как сам Бернулли, так и его последователи (в особенности Лаплас) склонялись к тому, что теория вероятностей отражает не объективно существующие закономерности «случайных» событий, но лишь уровень нашего знания (или, скорее, незнания) объективно существующих однозначных (в современной терминологии — динамических) закономерностей.

В дальнейшем, однако, объективность существования случайности в природе становится одним из фундаментальных принципов новой физики. Соответственно в научном сообществе утверждается идея о наличии особого типа закономерностей — статистических закономерностей, управляющих событиями, которые мы называем «случайными». Эта идея подкрепляется философскими утверждениями типа: случайность — это форма проявления необходимости и дополнение к ней. Языком выражения статистических закономерностей стала теоретико-мерная теория вероятностей, использовавшая в качестве своего интерпретационного механизма частотный подход. При этом представление о случайности как отсутствии закономерности оказалось не у дел. Показательно, что применение частотного подхода в качестве интерпретационного механизма теоретико-мерного формализма не включало в себя использование «принципа иррегулярности» — наиболее ценной идеи концепции Мизеса, в неявном виде использовавшего представление о случайности как отсутствии закономерности.

Однако теория алгоритмов, позволяющая на точном математическом языке определить такие понятия, как «правило», «закономерность», дала возможность восстановить в правах и выявить рациональный смысл естественного представления о случайности как отсутствии закономерности. Более того, финитная алгоритмическая теория вероятностей, в основе которой лежит это самое представление, формализованное с помощью алгоритмической теории сложности, может рассматриваться как достаточно разумное обоснование применимости теоретико-мерной теории вероятностей!

Можно ли интерпретировать данный сюжет из истории теории вероятностей, более подробно изложенный мною в статье, помещенной в этой книге, в рамках концепции, защищаемой автором комментируемой статьи? Было бы интересно познакомиться с мнением В.Я. Перминова по этому вопросу.

88

Г.Б. Гутнер

Замысел праксеологического априоризма, представленный В.Я. Перминовым, является в известной мере развитием той ориентации на активность субъекта познания, которая была задана самим Кантом. Намерение обнаружить априорные основания практической (не в кантовском, а скорее марксистском понимании) деятельности кажется, с одной стороны, вполне оправданным, но с другой — весьма непростым в реализации. Статья В.Я. Перминова убеждает и в том и в другом. У меня по крайней мере возникли два вопроса, относящихся к существу представленной концепции. Во-первых, остается неясной сама возможность аподиктического знания. Вслед за Кантом автор связывает аподиктичность с априорностью. Однако оправданность такой связи оказывается сомнительной из-за различения формальной и содержательной сторон знания, на котором (также вместе с Кантом) настаивает Перминов. Априорной, строго говоря, является только форма. Но одна форма не может гарантировать всеобщего и необходимого характера знания, так как последнее возникает при наличии множества случайных эмпирических условий. Чтобы сохранить аподиктический характер математики, Кант использовал идею чистого созерцания. В.Я. Перминов (совершенно, на мой взгляд, справедливо) счел эту идею неясной, но ничего другого не предложил — по крайней мере явно.

Во-вторых, вызывает определенные сомнения попытка автора совместить априоризм с реализмом. В статье (если я правильно понял) намечается следующая позиция. Существуют, с одной стороны, априорные структуры сознания, являющиеся основными формами практической, предметной деятельности человека. С другой стороны, существуют глубинные структуры реальности, выступающие как формы организации внешней среды, в которой разворачивается человеческая деятельность. Ее успех обусловлен тем, что структуры сознания соответствуют структурам реальности. Этот реалистический тезис порождает вопрос о природе упомянутого соответствия. Если оно есть результат адаптации к среде, то ни о какой априорности, универсальности и аподиктичности знания не может быть и речи. Автор отвергает поэтому эволюционную эпистемологию. По той же причине должна быть, кстати, отвергнута и марксистская теория социальной детерминации знания. Другая возможность — концепция предустановленной гармонии, но с ней В.Я. Перминов также не выражает солидарности. По всей видимости, упомянутый дуализм сознания и реальности должен быть как-то преодолен без потери универсальности структур сознания. Это удается сделать традиционному априоризму, но и он не-

89

90

приемлем для В.Я. Перминова, поскольку несовместим с реализмом. Но совместим ли с ним вообще какой-либо априоризм? Этот вопрос, на мой взгляд, является самым трудным для рассматриваемой концепции.

А.Н. Кричевец

Как мне представляется, уважаемый автор напрасно обрушивается на И. Канта и эволюционных эпистемологов. Проблема, которую они пытались решить, действительно очень трудна. В.Я. Перминову, возможно, удалось продвинуться несколько дальше, но основной кантовский вопрос «как возможно априорное знание» по-прежнему не решен.

Один из тезисов В.Я. Перминова гласит: «Кантовский трансцендентальный идеализм... состоит в утверждении, что существует система представлений, независимая от опыта и предполагаемая всяким опытом как необходимая форма его синтеза, а также в предположении, что эта система представлений трансцендентально идеальна, обусловлена только сущностью разума и не имеет отношения к вещам в себе. С праксиологической точки зрения мы должны принять первую точку зрения и отвергнуть вторую». Автор утверждает далее, что эта система имеет отношение к реальности, поскольку является нормативным условием всякой деятельности.

Критика в отношении Канта справедлива, если не учитывать эволюцию кантовской позиции. Проблема становится яснее, если ее изложить в терминах более поздней «Критики способности суждения». В этой работе Кант уже не употребляет понятие «вещь в себе», но говорит о сверхчувственном источнике познания. Смысл сдвига, по-моему, состоит в том, что поделить этот источник между субъектом и объектом невозможно. Это — источник познания, а мы находим себя уже всегда в потоке, этим источником порожденном. Источник порождает и субъекта с его способностью познания, и мир явлений, поддающийся познанию именно так оснащенного субъекта. Вопрос о причинах, основаниях и т.п. в отношении самого источника неразрешим средствами, с которыми мы находим себя в потоке.

Эволюционист-эпистемолог К. Лоренц счел, что именно последний вопрос ему удалось решить: такую согласованность двух сторон познания обеспечивает эволюция вида Homo sapiens. Формы мышления, а точнее, способности их усвоить в процессе развития и воспитания, врожденны организму как внесубъектные достижения его вида, которые гарантированно соответствуют реальности (особой для каждого вида). Это, однако, не решение, а переадресация вопроса эволюционной теории, совершенства которой нынче находятся под сомнением. С точки зрения сомневающегося вопрос, над которым бьется эволюционная теория: как происходит развитие и усложнение видов, — это другая версия того же кантовского вопроса с неминуемым кантовским ответом: вопрос об источнике неразрешим, когда мы находимся в потоке, этим источником произведенном.

В.Я. Перминов дает свое решение кантовского вопроса о сверхчувственном источнике познания: система априорных форм познания является условием возможности деятельности в человеческом универсуме (мезокосмосе, как сказал бы Г. Фоллмер). В чем состоит сдвиг по сравнению с кантовской точкой зрения? В том, что связка «явление—познание» дополняется третьим членом — «деятельность». Это совершенно справедливо, это несомненное развитие кантовских взглядов. Решен ли при этом вопрос о «вещи в себе»? Разумеется, нет. Вопрос об источнике всей замечательно эффективной системы «явление—познание—деятельность», вопрос о мире-в-себе по-прежнему не решен.

Самое замечательное, что его решение, если бы оно даже и было, не может дать ничего существенного для второго интересного вопроса, который поднимает В.Я. Перминов, — о проведении границ между необходимыми условиями возможности деятельности в мире, заданном «универсальной онтологией» (необходимыми категориями, необходимой логикой и необходимой математикой), и произвольными фантазиями математиков. Утвердительный ответ на вопрос о правомочности введения в круг необходимых математических понятий также и бесконечности в двух ее ипостасях, актуальной и потенциальной (совершенно согласен с автором, что эти понятия тесно связаны и их невозможно корректно разделить), опирается не на «универсальную онтологию», описывающую универсум деятельности, а на универсальные формы мышления. Действовать в предметном мире можно и без понятия бесконечности, а вот сформулировать теоретическую арифметику, не вводя явно или неявно бесконечности, действительно невозможно.

Только ссылка на Бога, который дал нам эти формы в виде откровения (с последующей канонизацией текстов Декарта и Канта), могла бы соединить ответ на вопрос о происхождении форм мышления с ответом на вопрос о границах области необходимых форм. При всех других ответах вопрос о границах нуждается в ином подходе. Наиболее перспективным в статье В.Я. Перминова мне кажется рассмотрение мышления в связи с нормами деятельности в предметном мире и математического мышления как формы регулирования этой деятельности. Однако нормы по статусу — это отнюдь не необходимые формы. Не стану говорить, что они конвенциальны, но даже богоданные или закрепленные эволюцией нормы могут развиваться и пересматриваться. Это устанавливает границы притязанию на установление абсолютных границ.

ОТВЕТ АВТОРА

Выдвинутые возражения, как мне кажется, не опровергают основных тезисов моей статьи, хотя и указывают на необходимость уточнения некоторых моментов.

А.Г. Барабашев задает вопрос, почему принципы деятельности надо понимать как внеисторические и абсолютно неизменные. Наиболее точный ответ на этот вопрос состоит в том, что в теории познания мы рассматриваем деятельность в ее самом абстрактном, сущностном или эйдетическом плане, при котором она становится соразмерной самой возможности познания и самого бытия человека. В этом абстрактном плане структура деятельности не зависит от эволюции, она является внеличностным и внесоциальным инвариантом нашего бытия и, как следствие, основой категориального видения мира и универсальных форм мышления. В некотором смысле, конечно, все изменяется, но я не вижу условий, которые могли бы изменить причинно-следственную структуру деятельности или ее ориентацию на эффективность.

Вопрос о границах обосновательного слоя требует уяснения двух положений. Во-первых, мы должны понять сущностную иррациональность обосновательного слоя, состоящую в том, что он не может быть задан в каких-либо строгих теоретических понятиях. Это отрицательная сторона дела. Но здесь имеется и позитивная сторона, состоящая в том, что для конкретных принципов мы можем провести надежное содержательное рассуждение, обосновывающее их априорность, а следовательно, и их принадлежность к обосновательному слою. Несомненно, мы можем показать эмпирическую некорректируемостъ законов реальной логики, принципа причинности, аксиом арифметики и т.п. Я пытался показать, что это относится также и к простым суждениям о математической бесконечности, как потенциальной, так и актуальной. Но это значит, что отсутствие общих критериев обосновательного слоя не мешает нам рационально обсуждать его состав в конкретных случаях и делать рациональные утверждения о его надежности.

Что касается статуса математики за пределами обосновательного слоя, то я согласен здесь с тем мнением, что эта математика, в общем, должна рассматриваться как нуждающаяся в обосновании. Дело в том, что системы аксиом, находящиеся за этими пределами, не могут быть приняты в качестве непротиворечивых без некоторого логического или методологического рассуждения.

В.А. Бажанов ставит вопрос о соотношении практики и опыта. Моя основная идея, в какой-то мере отраженная в статье, состоит в том, что человеческое познание как вовлеченное в деятельность создает одновременно и картину мира, основанную на эмпиричес-

92

ких подразделениях, и рефлексивную картину мира, относящуюся к структуре деятельности. Причем деятельность берется не в психологическом, а в гносеологическом плане, который соразмерен с познанием и самим существованием человека. Именно в этом абстрактном, эйдейтическом плане деятельностные представления предшествуют эмпирическим, являясь основанием их синтеза.

В 60—70-е годы понятие деятельности исследовалось многими нашими философами, в числе которых надо назвать и И.С. Алексеева. Эти исследования, однако, были слабо дифференцированными в том смысле, что гносеологические и психологические подходы были соединены в единое целое. Деятельность рассматривалась в эмпирических и предметных подразделениях как зависящая от личностных и социальных условий и подверженная эволюции в своих формах. При таком рассмотрении она не могла быть соединена с идеей беспред посыл очности и инвариантности. Современная обосновательная философия требует, на мой взгляд, принципиально другого, более рафинированного анализа этого понятия. Мы должны строго отделить гносеологическое рассмотрение от психологического, рассмотреть деятельность в максимально абстрактной сущностной структуре и, таким образом, соединить ее с рационалистическими учениями об абсолютных основаниях мышления.

Факты ошибок, забвений и пр. не опровергают априоризм при его правильном, гносеологическом понимании. Признание априорности некоторого принципа не означает, что его нельзя забыть или ошибиться в его использовании, а означает лишь то, что этот принцип коррелятивен определенным аспектам универсальной онтологии.

А.А. Григорян поставил задачу проверить мои общие установки через их приложимость к метафизике теории вероятностей. Это, конечно, правильный подход, ибо гносеологическая концепция должна сопоставляться с фактами науки. Что касается положений типа «случайность есть отсутствие закономерности» или «случайность — форма проявления закономерности», то они, на мой взгляд, являются специфическими системными утверждениями и не относятся к абстрактной деятельностной онтологии. Этим объясняется и их историческая вариабельность. Возможность более глубокого анализа затруднена здесь тем обстоятельством, что на сегодняшний день мы не имеем сколько-нибудь ясной типологии метафизических принципов, вовлеченных в структуру научного знания.

Я не могу согласиться с А.Н. Кричевцом в его понимании эволюционной теории как некоторой фундаментальной основы современной теории познания. Эта теория, конечно, необходима для философии науки. Достаточно очевидно, что такие принципы познания, как принцип простоты или принцип симметрии, имеют

93

прямое отношение к эволюционной и экономической природе знания. Но эволюционная теория заведомо не объясняет высших априорных структур сознания, каковыми являются категории и законы логики. Эти структуры продиктованы сущностной функцией сознания и не имеют отношения к его эволюции.

Я не могу также согласиться с тем, что деятельностная теория априорного знания не дает ответа на вопрос: Как возможно априорное знание? Априорное знание, с точки зрения деятельностной концепции, необходимо вследствии универсальной практической ориентации мышления, которая неизбежно навязывает ему универсальные и абсолютные нормы. Можно, конечно, возражать против самой идеи деятельностной детерминации, но в принципе ответ полон, так как указывает и на необходимость, и на реальную основу априорных представлений. Вопрос о «вещи в себе» в деятельностной концепции решается отрицательно. Кантовское разделение «вещи в себе» и «вещи для нас» при деятельностном понимании опыта теряет смысл.

В комментариях Г.Б. Гутнера содержатся два вопроса: о природе чистого созерцания и о правомерности соединения априоризма и реализма. Я думаю, что в праксеологической теории познания кантовское чистое созерцание должно быть заменено деятельностной интуицией, которая обеспечивает выделение объекта познания до процесса познания. В отличие от кантовского чистого созерцания, которое принадлежит сущности разума и берется как нечто исходное, деятельностная интуиция может быть рационально объяснена в своих истоках как специфический механизм различения, выработанный ориентацией мышления на деятельность. В этом плане мы можем понять наличие в каждом акте познания некоторого рода предваряющих интуиции, проистекающих из видения объекта, необходимого для деятельности. Чистое созерцание, таким образом, может быть объяснено из анализа функции познания без догматического отнесения его к природе разума.

В решении вопроса о соединения априоризма и реализма мы должны исходить из того, что первичные математические идеализации не фикции, что они навязаны нам однозначно, а следовательно, относятся к некоторому аспекту реальности. Идея, лежащая в основе моих рассуждений, состоит в том, что математическая реальность — не что иное, как определенный аспект универсальной онтологии, система специфических требований к предметности вообще, продиктованная деятельностной ориентацией мышления. С этой точки зрения онтологические основания математики имеют тот же статус, что и категориальные представления о мире, которые, будучи безусловно априорными, тем не менее характеризуют реальность в плане объективных условий деятельности. Очевидно,

94

что объяснение генезиса этих представлений не предполагает обращение к опыту или к предустановленной гармонии. Очевидно также, что не может быть никакого противоречия между априорностью и реальностью математических идеализаций. Если мы указываем на категориальное основание этих идеализации, то онтологическая реальность есть необходимая сторона априорности, и наоборот. Я убежден, что все наши трудности в понимании математического реализма проистекают из непонимания онтологического статуса математических идеализаций.

Вопросы и возражения, которые я получил, в своем большинстве существенны и направлены на прояснение действительно трудных моментов. Однако в них ясно ощущается все еще непреодоленное засилье в наших умах релятивистской философии науки. Преобладающее желание моих оппонентов состоит в том, чтобы все принципы свести к опыту и включить их в процесс эволюции. Наряду с прямолинейным эмпиризмом изобретаются такие эрзацы, как эволюционный априоризм, умеренный априоризм, культурологический априоризм и другие априоризмы, основная цель которых состоит в релятивизации кантовских априорных представлений. Это, однако, ложное направление мысли. От Канта мы должны двигаться не к релятивизму, а к более строгому антипсихологическому априоризму типа того, который был декларирован Э. Гуссерлем в «Логических исследованиях». Основное, что я хотел сказать, состоит в том, что такая, более последовательная априористская философия математики возможна и что она может получить полное обоснование в деятельностной теории познания. В этом плане я вижу возможности существенного сдвига в общей теории познания, а также и перспективы для разработки более глубоких программ обоснования математики.

В.А. Бажанов

УМЕРЕННЫЙ АПРИОРИЗМ И ЭМПИРИЗМ В ЭВРИСТИЧЕСКОМ АСПЕКТЕ. ИСТОРИЧЕСКИЙ КОНТЕКСТ*

Часто априоризм и эмпиризм, особенно в области философии математики и логики, противопоставляют друг другу. Понятно, что крайняя форма априоризма, которая провозглашает «первичность интуитивной основы математического рассуждения» и «внеисторический характер этой основы» (1, с. 80), действительно несовместима с крайним эмпиризмом, суть которого выражена, например, У. Джеймсом в положении, что содержание знания полностью определяется опытом или сводится к нему и лишь это знание может стать достойным предметом философского дискурса. Однако историческая ретроспектива заставляет задуматься: стоит ли утверждать антагонизм априоризма и эмпиризма в логико-математическом знании и его развитии? Какова реальная (хотя, быть может, и не универсальная) практика логико-математического дискурса, переосмысленная под углом зрения сочетания априористских и эмпиристских компонентов творческого процесса? Нельзя ли найти позицию не антагонизма, а гармонии этих двух традиционно противопоставляемых позиций? И, наконец, допустимо ли утверждать наличие значительного эвристического потенциала у какой-либо (или обеих) из этих точек зрения — априоризма или эмпиризма, потенциала, который обнаруживается в той или иной познавательной ситуации?

Я склонен утверждать (преднамеренно в категоричной форме, обнажая все углы и не делая каких-либо, порой уместных, оговорок), что умеренная форма априоризма вовсе не противоречит умеренному же эмпиризму, реальная практика логико-математического дискурса может продемонстрировать весьма любопытные сочетания априористских и эмпиристских составляющих творческого процесса, что вполне мыслимо найти в этой практике гармоническое сочетание этих позиций. Более того, эмпиризм (равно как и априоризм) в определенных ситуациях обладает значительным эвристическим потенциалом и уже не раз демонстрировал свою эвристическую насыщенность.

Возможно, что трактовка априоризма в данной работе определенным образом соответствует мысли А. Г. Барабашева о регрессе математического априоризма [2].

---

* Работа выполнена на финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (квд проекта: № 00—06—80149).

Умеренный априоризм

Как известно, Кант был первым, кто предложил определенную трактовку активной роли субъекта в познании, активности сознания в аспекте познания. Современное прочтение положения Канта об априоризме предполагает, что реальность (объект) рассматривается не в качестве объекта пассивного созерцания, а как подвергающаяся активному переосмыслению со стороны субъекта познания, что логические категории играют роль формирующего фактора по отношению к объектам познания, что теоретическая система, будучи «наложенной» на эмпирический материал, формирует систему объектов научного знания [3, с. 180—184], что, скажем, физическая реальность вовсе не тождественна объективной

96

реальности, а представляет собой некоторого рода теоретизированный мир физики [4, с. 190—192]. Иными словами, те знания и представления, которыми обладает в данный момент субъект познания, формируют своего рода призму, сквозь которую «просматривается» реальность (в случае логики и математики называемой, например, универсумом рассуждений). Эти знания и представления можно сравнить с сетью, которая забрасывается в реальность, вылавливая все, что соразмерно величине ее ячеек. Здесь, разумеется, имеет значение целеполагание субъекта, подчиняющее его познавательную активность определенным задачам и переформирующее систему его априорных категорий в соответствии с конкретными целями. Как однажды заметил Н. Бор по поводу, близкому к обсуждаемому: «To a boy with a hammer all things seems like a nail (для мальчика с молотком все вещи — гвозди)», а А. Эйнштейн — «Лишь теория решает, что мы можем наблюдать». Здесь также можно вспомнить эффект Кулешова, который заставляет задуматься над активным характером не только сознания, но и подсознания. Аналогично можно утверждать и активный характер языка, который используется в процессе познания.

Итак, умеренный априоризм не предполагает первичность интуитивной основы и ее внеисторический характер, а состоит в признании активности субъекта, определяемой совокупностью его знаний и предстаааений, имеющей, разумеется, исторический характер, активности, которая предписывает ракурс видения и расчленения реальности. Активность субъекта познания не абсолютна, а относительна его — субъекта — «наполнения» и целеполагания.

Довольно интересно было бы выяснить концептуальное отношение умеренного априоризма и математического платонизма, но это отдельный вопрос, который увел бы меня в сторону от главной цели настоящей работы.

Умеренный эмпиризм

Крайняя форма эмпиризма предполагает, что содержание знания полностью определяется опытом или сводится к нему. В истории философии исходные позиции этой разновидности эмпиризма находятся, по-видимому, в философской системе Д. Юма. Между тем реальная практика логико-математических рассуждений свидетельствует в пользу того, что порой прорыв в новые области логико-математических исследований совершается в контексте, который отвечает позиции умеренного эмпиризма.

Умеренный эмпиризм подразумевает, что опыт, основные составляющие которого предопределяются концептуальным багажом субъекта познания, играет важнейшую роль в формировании знания и часто оказывает решающее (в том числе эвристическое) влияние на развитие теоретических представлений субъекта познания.

97

Эвристическая роль эмпиризма в развитии логики и математики

Анализ творческого наследия Н.И. Лобачевского позволяет достаточно определенно утверждать, что ученый внутренне симпатизировал эмпиризму: он строил воображаемую геометрию, исходя не из абстрактных понятий, а из конкретного факта — соприкосновения тел, да и кредо свое научное выражал с помощью мысли Ф. Бэкона — «спрашивайте природу, она хранит все истины и на вопросы Ваши будет отвечать Вам непременно и удовлетворительно» [5]. Так, в работе «О началах геометрии» он пишет, что «первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, должны быть ясны и приведены к самому меньшему числу... Такие понятия приобретаются чувствами, врожденным не должно верить». Или в «Новых началах геометрии» Лобачевский замечает, что «первыми данными, без сомнения, будут всегда те понятия, которые мы приобретаем в природе посредством чувств». Геометрические зависимости, по его мнению, не отличаются от зависимостей, которые изучаются в физике.

Такая мировоззренческая ориентация и методологическая установка Лобачевского вовсе не препятствовали, а напротив, предполагали особый акцент на необходимости выработки и поддержания строгих канонов математического доказательства, на пристальном внимании к основаниям математического знания. «Взгляды Лобачевского близки к взглядам английской эмпирической школы (Локк, Юм, Беркли) и к сенсуализму Кондильяка», — пишет наиболее глубокий исследователь творчества ученого А.В. Васильев [5, с. 209].

Главное же, что эта явным образом выраженная — как ее сейчас следовало бы назвать — умеренно-эмпиристская позиция Лобачевского оказывала эвристическое влияние на ход его мысли в процессе создания и развития неевклидовой геометрии. Не случайно новая система геометрии была им названа «воображаемой» и не случайно он предполагал, что она имеет отношение к реальному пространству и времени, и предпринимал попытки определить их геометрию, имея в виду, что она должна быть неевклидова.

Н.А. Васильев, идейный предшественник ряда неклассических логик (многозначной, паранепротиворечивой, многомерной), был достаточно выраженным сторонником умеренного эмпиризма. В своих логических работах он прямо связывал новые формальные системы с устройством воображаемых миров. Существа этих миров, как подчеркивал Н.А. Васильев, обладают иными в отличие от земных «ощущательными» способностями, которые, собственно, и диктуют необходимость принять новую логику [6, 7]. Воображаемый мир *n* измерений и соответствующее ему психологическое устройство живых существ, по Н.А. Васильеву, предполагает новые виды отрицаний и новые логики, составляющие множественность равноправных и равновозможных логических систем [8, с. 86—89]. В этих логиках уже не действуют законы (не)противоречия и(или) исключенного третьего; их эмпирические основания предписывают принятие иных законов (и, стало быть, иных логик).

Можно возразить, что Н.И. Лобачевский и Н.А. Васильев использовали одну «воображаемую» методологию, пусть эвристически насыщенную, но не типичную и не показательную для логико-математического дискурса. Не смея делать далеко идущие обобщения, я тем не менее склонен утверждать, что эмпиризм способен и играет эвристическую роль и в не столь явно выраженных ситуациях.

В известном смысле слова и платонизм может считаться особой эмпирической философией. Ведь речь здесь идет о работе с некоторым образом предзаданным универсумом, генерирующим соответствующий тип (допустим, теоретико-множественного) опыта.

Даже в том случае, когда имеет место решение какой-либо задачи создания аппарата для описания той или иной предметной области, эмпирические соображения здесь играют первостепенную роль. Весьма показательна здесь ситуация с созданием релевантной логики.

И.Е. Орлов, превозносивший — что и естественно в интеллектуальной обстановке 1920—1930-х гг. — диалектический метод мышления, стремился сконструировать особый тип логики, построенный на интенсиональном (а не экстенсиональном, как строились до определенного момента) принципе, который соответствовал бы диалектике в формальном смысле. *Это* означало переход от «логики объема» к «логике содержания». Иначе говоря, эта логика, названная им логикой совместности предложений, должна была бы учитывать отношения антецедента и консеквента по содержанию и тем самым приближаться к диалектической логике (естествознания, которое осмысливалось Орловым), небезразличной к содержательному аспекту, который определялся конкретной предметной областью. В логике, позже получившей название релевантной и инспирированной желанием формальными средствами воссоздать особую логику естествознания, совпадающую с теорией познания и диалектикой, Орлов пытался преодолеть парадокс материальной импликации и связать компоненты рассуждения смысловой зависимостью [9; 10]. Таким образом, опыт диалектического истолкования естествознания диктовал те или иные ограничения на формальные структуры логики совместности предложений Орлова. Однако само истолкование естествознания происходило в контексте диалектического «препарирования» реальности. Орлов в данном случае был подобен мальчику с молотком — персонажу, который фигурирует в афоризме Н. Бора.

99

Ситуация с созданием логики совместности предложений Орловым, кажется, достаточно наглядно (хотя эта ситуация далеко не столь хрестоматийна, как с воображаемой геометрией или воображаемой логикой) показывает механизм переплетения априористских и эмпиристских компонентов творческого процесса. Первые определяют угол сечения реальности, а вторые — опыт, извлекаемый из нее и предопределяющий характер когнитивных конструкций.

Здесь уместно вспомнить забытую и должным образом недооцененную идею В.Н. Тростникова о биологической (или, быть может, точнее — нейрофизиологической) предопределенности математики и ее отдельных фрагментов. Так, В.Н. Тростников с помощью анализа устройства человеческого перцептивного пространства обосновывал, что, скажем, теорема Кантора о системе вложенных отрезков, лежащая в основе теории действительных чисел, принудительно должна возникать в нашем мышлении. Особенности зрительного анализатора человека таковы, что система вложенных отрезков непременно должна иметь общую точку — «ту самую точку, которая в перцептивном пространстве *есть* наша система отрезков» [11, с. 247].

Если такая предопределенность действительно имеет место, то она заставит нас существенно пересмотреть многие аспекты традиционной эпистемологии и, в частности, пересмотреть характер взаимоотношения эмпиризма и априоризма, как, собственно, и уточнить содержание понятия априоризма.

Список литературы

1. *Перминов В. Я.* Априорность и реальная значимость исходных представлений математики // Стили в математике. Социокультурная философия математики. СПб, 1999. С. 80-100.
2. *Барабашев А. Г.* Регресс математического априоризма // Наст. Сб.
3. *Чудиков Э.М.* И. Кант и эйнштейновская концепция физической реальности // Наука в социальных, гносеологических и ценностных аспектах. М, 1980. С. 177-187.
4. *Баженов В.А., Панченко А.М.* Структура физической реальности (логико-алгебраические аспекты) // Наука в социальных, гносеологических и ценностных аспектах. М., 1980. С. 188-201.
5. *Васильев А.В.* Николай Иванович Лобачевский (1792— 1856). М., 1992.
6. *Бажанов В.А.* Николай Александрович Васильев (1880—1940). М., 1988.
7. *Bazhanov УЛ.* The imaginary geometry of N.I. Lobachevsky and the imaginary logic of N.A. Vasiliev // Modern Logic, 1994. Vol. 4, N 2. P. 148-156.
8. *Васильев Ti.A,* Воображаемая логика. М., 1989.

9 . *Бажанов В.А*. Ученый и «век-волкодав» // Вопросы философии. 2001. N11. С. 125-135.
10. *Бажанов В.А.* Очерки социальной истории логики в России. Ульяновск, 2002.
11. *Тростников В.Н.* Конструктивные процессы в математике. М., 1975.

КОММЕНТАРИИ

А.Г. Барабашев

Я считаю, что можно дополнить соображения В.А. Бажанова таким образом, чтобы далее развить и укрепить его позицию.

1. Прекрасно аргументирована идея о том, что априоризм и эмпиризм должны быть разделены на крайнюю и умеренную версии. Мне представляется, что здесь можно пойти дальше и утверждать, что как априоризм, так и эмпиризм представляют собой два «спектра» концепций, в каждом из которых есть как крайние, так и умеренные и слабые версии. Интересной задачей было бы концентрированно описать критерии ослабления позиций априоризма и эмпиризма по их содержанию и построить некую «шкалу» с постепенным переходом (ранжировкой) от сильных к слабым версиий. Конечно, в качестве предварительного условия такой работы потребуется более точно определить, что понимать под априоризмом и под эмпиризмом как таковыми (в статье В.А. Бажанова и в ряде других статей настоящего сборника, включая мою, такие соображения представлены. В основном они, я полагаю, не противоречат друг другу и могут быть объединены в общее понимание априоризма и — в меньшей степени — эмпиризма).

2. В.А. Бажанов полагает, что умеренные версии априоризма и эмпиризма не противоречат друг другу и могут использоваться «кооперативно» при исследовании процессов математического творчества. Его позиция такова: крайности расходятся, а средние сходятся. Мне хотелось бы иначе посмотреть на эту идею. Во-первых, эффективность использования умеренных версий априоризма и эмпиризма при создании нового знания, прекрасно проиллюстрированная автором на примерах творчества Н.И.Лобачевского, НА Васильева и И.Е.Орлова, не предполагает того, что умеренный априоризм и умеренный эмпиризм не противоречат друг другу. Все-таки их посылки различны: одна говорит о том, что субъект активен и определяет математический дискурс и сами объекты исследования, а другая посылка (умеренного эмпиризма) утверждает, что опыт, понимаемый в первую очередь как воздействие внешней реальности, определяет выбор объектов и приемов математического исследования. Если вдуматься, эти посылки как бы расположены в разных «плоскостях», они не пересекаются друг с другом, поскольку говорят о разных аспектах субъект-объектного отношения. Другими словами, характеристика «непротиворечия» умеренного априоризма и умеренного эмпиризма слишком слаба. В данном случае речь должна идти не о «не противоречии» как совместном применении разных тезисов к одному и тому же,

а о расхождении (разделении) предметов исследования умеренного априоризма и умеренного эмпиризма. Одно направление интересуется субъектом, его активностью, а другое — опытом, воздействием реальности на процесс создания мира математических образов и конструкций. Что же касается крайних версий априоризма и эмпиризма, то они как раз сходятся, поскольку обе утверждают абсолютность только одного основания математического познания — субъективного или объективного соответственно. Резюмируя, я предлагаю следующее соотношение априоризма и эмпиризма в изучении математики: их крайние версии сходятся (точнее, «сталкиваются»), вступая в спор на ограниченной территории (что приоритетно — опыт или активность субъекта), а умеренные версии расходятся, разделяя свои объекты и территории исследования.

С.Н. Бычков

Идея вынесения антитезы априоризма и эмпиризма на очную ставку с историей представляется весьма плодотворной. Анализ творчества Н.И.Лобачевского, Н.А. Васильева, И.Е. Орлова достаточно убедительно, на мой взгляд, демонстрирует несостоятельность крайних версий априористского и эмпиристского толка. Вместе с тем сразу же возникает естественное стремление предложить собственный вариант «гармонизации» рассматриваемых полярных позиций, который я и попытаюсь представить.

Если индивид в своем «априорном» отношении к реальности опосредован социально обусловленными целями познавательной деятельности, языком межиндивидуального общения, то не логично ли тогда в качестве субъекта познания рассматривать общество, в котором индивид живет и готовыми плодами деятельности которого, хочет он того или нет, вынужден пользоваться. Делая при удачном стечении обстоятельств дальнейший шаг вперед в этом — коллективном — деле. В таком случае можно выдвинуть гипотезу, что при рассмотрении крупных научных открыгий с точки зрения подобного «большого» субъекта, которые, естественно, разделены довольно большими промежутками времени, умеренно априористская позиция всегда оказывается одновременно и умеренно эмпиристской. Само собой понятно, что для этого круг анализируемых примеров придется значительно расширить, но в случае успеха это и было бы обоснованием концепции автора.

Два замечания относительно детааей изложения. Платон, по-видимому, согласился бы с допустимостью рассмотрения его философии как особого рода эмпиризма, поскольку в «Федре» душа в промежутках между вселением в человеческие тела всматривается в занебесную область идей. Я, честно говоря, не понимаю, как подобную интерпретацию можно сделать каким-либо иным — неплатоновским — способом, и было бы полезно несколько развернуть аргументацию автора относительно данного пункта.

Далее, мне не очень понятна идея В.Н. Тростникова насчет «биологической предопределенности» теоремы Кантора о вложенных отрезках. Особенности зрительного анализатора у Аристотеля и у Кантора одинаковы, но Стагирит, по-моему, просто не понял бы утверждения последнего, так как для него отрезок не является собранием точек. «Априорные» установки Аристотеля и Кантора в отношении понятия бесконечности были диаметрально противоположны, что не могло не сказаться и на их взглядах на континуум. Впрочем, данное соображение, видимо, также свидетельствует в пользу основной идеи автора работы.

С.С.Демидов

Реальный математик в своей работе, как правило, не следует ни одной из методологических доктрин — в одной и той же работе можно подчас найти элементы разных, зачастую антагонистических подходов. Действительно (и здесь мы не можем не согласиться с автором), математик в своей практической деятельности выступает подчас как априорист в понимании одних математических положений и как эмпирик в подходе к другим. Однако я полагаю, анализируя его рассуждения, имеет смысл не смешивать эти подходы, постоянно подчеркивая их принципиальную нестыкуемость в рамках единого описания. И если один из подходов позволяет нам лучше понять один из фрагментов авторского текста, а другой, дополнительный к первому, наилучшим образом разъясняет некоторый другой фрагмент, то методологически правильнее и практически плодотворнее говорить не о «гармоничном сочетании» двух таких подходов, а об их дополнительности. Равно как мы не можем говорить о том, что некоторый оптический феномен можно трактовать до известной степени как отвечающий волновой природе света, а до известной степени — корпускулярной. Хотя вполне возможно говорить о том, что некоторые свойства объекта лучше высвечиваются в рамках волнового подхода, а некоторые — корпускулярного.

Эмпиризм и априоризм в своей интенции суть подходы антиномичные. Мы же действуем в смысловом поле, напряжение в котором задается их антагонизмом. Пытаясь же их примирить, как это делает автор, утверждая, что «вполне возможно найти в этой практике (имеется в виду «реальная практика логико-математического дискурса». — С.Д) их «гармоническое сочетание», он, по сути, затушевывает реальное противоречие. Противоречие же это, которое, несмотря на постоянные усилия первоклассных умов, преодолеть не удается, указывает на то, что мы сталкиваемся здесь

103

с вопросом из разряда «проклятых»: либо мы трактуем обсуждаемую проблему в неверном смысле и следует ставить ее совершенно иначе, либо, наоборот, «зачистив» эти подходы — сделав их до конца несовместимыми друг другу, — нужно строить дополнительные описания, в своей антагонистичности дающие действительно полное описание феномена.

А.Н. Кричевец

В.А. Бажанов, разумеется, прав: истина лежит посередине между априоризмом и эмпиризмом. Поэтому одновременно прав и умеренный априоризм, утверждающий, что априорные формы чувственности и структуры мышления исторически зависимы, прав и умеренный эмпиризм, утверждающий, что исторические изменения условий возможности опыта находятся в связи с приобретаемым опытом. Остается вопрос, как это возможно. Каковы должны быть условия возможности того, что опыт субъекта, который осуществляется в рамках форм, усваиваемых субъектом из человеческого его окружения, приводит к изменению самих этих форм и становится элементом окружения, пригодным для последующего усвоения субъектами нового опыта? Как опыт переводится в априорные формы — вот в чем вопрос.

Автор предлагает следующий ответ: опыт эвристичен, т.е. он наталкивает нас на идеи, перерастающие в новые теоретические представления, хотя сам эти идеи и эти представления не содержит. Но если опыт их не содержит, откуда берутся новые теоретические представления?

В.А. Бажанов апеллирует к нейрофизиологии. Если я правильно экстраполирую последний абзац статьи, то речь может идти о каких-то врожденных основаниях для приобретения в опыте вполне предопределенных математических форм. Такую точку зрения развивает эволюционная эпистемология, в частности в отношении математики — И. Рав. Я посвятил критике таких взглядов ряд работ (см.: Вопросы философии. 1997. № 7). Суть критики состоит в том, что эволюционный подход не может быть одновременно строгим и непротиворечивым.

Мой же ответ на вопрос о происхождении новых теоретических представлений, увы, и ответом не вполне может считаться. Эти представления берутся ниоткуда, т.е. не имеют достаточных оснований в опыте, как и в биологических или нейрофизиологических структурах организма. В статье в данном сборнике я утверждаю также, что таких оснований нет и в культурном окружении человека. Именно невозможность совместить на теоретическом уровне умеренный эмпиризм и априоризм и заставляет меня делать такое агностическое утверждение.

104

ОТВЕТ АВТОРА

Благодарю своих коллег А.Г. Барабашева, С.Н. Бычкова, С.С.Демидова и А.Н.Кричевца за внимание к моему тексту и весьма интересные соображения, которые позволяют увидеть те моменты, которые должны быть либо более тщательно продуманы и аргументированы, либо развиты.

Пожалуй, я склонен согласиться с замечанием С.Н. Бычкова, которое касается того факта, что умеренно априористская позиция в определенном смысле оказывается и умеренно эмпиристской. Здесь, действительно, было бы весьма интересно проанализировать, как предлагает А.Г. Барабашев, процесс постепенного ослабления априористской и эмпиристской позиций и как он влияет на осознание тех или иных познавательных ситуаций. Возможно, в действительности точнее было бы говорить, следуя перспективной мысли С.С. Демидова, не столько о «гармоническом сочетании», сколько о своеобразной дополнительности двух подходов, задаваемых априористскими или эмпиристскими установками.

С.Н. Бычков и А.Н. Кричевец обратили внимание на упоминание давно забытой (и, как мне кажется, незаслуженно) гипотезы В.Н. Тростникова об известной предопределенности нашего перцептивного пространства нейрофизиологическими особенностями человека. Если С.Н. Бычков считает ее не очень понятной (возможно, стоило бы обратиться к известной книге В.Н. Тростникова, увидевшей свет еще в 1975 г.), то А.Н. Кричевец эту *гипотезу* фактически оценивает как полновесный аргумент, который я выдвигаю в пользу своей точки зрения. Во-первых, эта мысль В.Н. Тростникова приводится мною именно как предположение (которое при определенных обстоятельствах и научном *обосновании* может стать аргументом), а во-вторых, и другие авторы независимо приходили к аналогичным догадкам и версиям, которые касались биологической предопределенности тех или иных познавательных механизмов человека (см., например: *Матурана У., Варела Ф.* Древо познания. М., 2001; *Лоренц К.* Кантовская доктрина априори в свете современной биологии // Человек. 1997. № 5). По всей видимости, идея эта «носится в воздухе» и имеет некоторый шанс быть подтвержденной в ходе дальнейшего прогресса науки. Вряд ли здесь конструктивно утверждение А.Н. Кричевца, что «теоретические утверждения берутся *ниоткуда* (выделено мной. — *В.Б.),* т.е. не имеют достаточных оснований в опыте, как и в биологических или нейрофизиологических структурах организма». Суждения с аргументом «ниоткуда» означают прекращение любых попыток анализа феномена и, по существу, закрывают проблему. Спрятать голову в песок, как делает одна известная птица, не значит снять проблему. Полагаю, что она вполне реальна и заслуживает обсуждения.

И, наконец, действительно было бы важно и интересно знать, как опыт переводится в априорные формы, — вопрос, который ставит А.Н. Кричевец. Здесь возможны различные подходы; мной предложен один из мыслимых вариантов, который несовместим с позицией провозглашения принципиальной непознаваемости этого процесса. Omnium quidem rerum primordial sunt dura.

В.Б. Губин

ОБ ОТНОШЕНИИ МАТЕМАТИКИ К РЕАЛЬНОСТИ

О субъективном порождении границ

Автор настоящей работы пришел к «математической» тематике вполне неожиданно — как к некоторому следствию результатов, полученных при исследованиях в двух других направлениях.

Одно из них заключалось в попытке разобраться в проблеме обоснования термодинамики и статистической механики. В этой проблеме есть две фундаментальные трудности. Одна связана с непосредственной (фактически — объективистской и редукционистской) несовместимостью детерминизма и вероятности, с разницей размерностей фазовой траектории (и тем более фазовой точки) и фазового объема. Вторая — с невозможностью (опять же объективистской и редукционистской) согласовать термодинамическую необратимость с обратимостью механики. Обе эти трудности проявляются при введении и изучении характера и поведения классической термодинамической величины — энтропии. На ее примере поясню упомянутые трудности.

Для традиционного определения энтропии следовало в первую очередь определить степень неравновесности распределения частиц (скажем, по объему), т.е. как-то обоснованно ввести функцию распределения, чтобы оценить вероятность состояния. Замечу, что в некоторых курсах статистической механики текст неожиданно чуть ли не прямо начинается с предложения: «Возьмем распределение...». Однако оказывается, что какого-то объективно выделенного, преимущественного разбиения области на части не существует, поэтому, формально говоря, энтропия системы механических частиц в объеме никаким естественным образом, чисто объективно не определима. Вообще говоря, эта трудность давно известна. О ней написано, например, даже в популярной книжке Б.В. Гнеденко и А.Я. Хинчина [1], но в учебниках для вузов и в подавляющей массе курсов для специалистов о ней не упоминают. Явно многие авторы, хорошие прикладники и преподаватели, о ней просто не задумывались и уж во всяком случае не придают ей принципиального значения. Так что в учебниках вероятность состояния традиционно иллюстрируют картинкой объема, разбитого пополам с небольшим числом частиц в одной части и с большим в другой, простодушно не подозревая субъективной обусловленности выбора такого разбиения из несчетного множества других абстрактно возможных, которые привели бы, естественно, к другим оценкам состояния. Это первый субъективный момент структурирования отражения состояния. Без этого шага, без вмешательства субъективного ни о термодинамическом состояния и ни о каком ином, отличном от механического (предполагаемого исходным в модели), не могло быть и речи. Более пристальный анализ показал, что в действительности разбиения определяются (и задача о вероятности обнаружения того или иного распределения частиц ставится однозначно) в каждом случае конкретными действиями субъекта (например, реальным введением перегородок), причем эти действия очень просты и грубы по сравнению, скажем, с большинством абстрактно возможных и, кроме того, весьма единообразны у одного субъекта и у разных, что создает впечатление естественности, единственности и объективности разбиения.

Но пусть некоторое разбиение выбрано, и более или менее интуитивно приемлемая оценка значения энтропии системы задана, определена. И пусть теперь в начале процесса состояние явно неравновесно по обычным представлениям, например есть выделенный сгусток частиц. Термодинамика вслед за обычным опытом, утверждает, что этот сгусток рассосется и в дальнейшем навсегда установится равновесное состояние. Однако механическая природа системы не допускает этой необратимости. Теорема Пуанкаре о возвращении даже указывает время, за которое система по крайней мере один раз вернется к исходному состоянию с заданной точностью. В итоге получается, что на том уровне, на котором существует механика, термодинамика не получается, отсутствует.

Как разъяснил М. Смолуховский в начале прошлого века [2], термодинамическая необратимость есть не объективная вещь, не закон природы самой по себе (без субъекта), а впечатление субъекта, который не может наблюдать очень долго и попросту не может дождаться чрезвычайно редкого возврата заметно неравновесного состояния (а возвращения мелких отклонений легко наблюдаются в микроскоп). Это объяснение — правильное. Таким образом, есть и второй субъективный момент структурирования реальности (в данном случае мера временного поведения систем), в результате

107

которого перед субъектом возникает специфический образ реальности (необратимая термодинамика), сам собой не следующий из субстрата системы, не порождаемый им.

Итак, получается, что термодинамическая система не возникает сама, а выделяется некоторыми действиями, ограничениями и предпочтениями субъекта. Субъект в соответствии со своими свойствами и обстоятельствами бытия набрасывает сеть окон, через которые видит мир, и мир предстает перед ним в виде объектов, которых в формально-строгом виде нет (хотя они и зависят от материала, который отражают, на котором строятся). Так, реально происходят отдельные удары частиц о стенки, а не действует какое-то постоянное, размазанное по поверхности объема давление, но тем не менее оказывается возможным в некоторых рамках представить, изобразить мир как термодинамический, да так убедительно, что многие о нем так и думают на самом деле.

Во всяком случае, объект появляется в отражении после некоторого действия по его выделению, по структурированию — не физическому, не реальному, а как бы навязываемому материалу в процессе его отражения [3].

Добавлю, что обязательным моментом, необходимым для существования и работоспособности подобной схемы выделения объектов, структур и теорий, является существенное, принципиальное присутствие в каком-то пункте некоторой допустимой [приемлемой для субъекта(ов)] неточности, обеспечивающей выделенному объекту в меру определенную устойчивость. Не слишком большие различия в обстоятельствах или действиях или неадекватности отражения не приводят к кардинальной практической несостоятельности (неработоспособности) картины, принятой в качестве руководства к действию. Хотя подобную неточность явно или неявно постоянно имеют в виду, подразумевают при рассмотрениях адекватности теорий, однако все же ее методологическое значение недооценивалось и она не входила явно во многие методологические схемы. Например, без учета допустимой неточности работы теории не может работать принцип соответствия, что как раз и показывал П. Фейерабенд, фактически требовавший полного совпадения теорий для возможности вообще их сопоставления. Однако в формулировках принципа соответствия этот момент отсутствует. Именно в связи с этим до сих пор не преодолены трудности получения классической механики как предела квантовой при $h \to 0$ (ведь, к примеру, дискретный спектр допустимых состояний частицы в яме ни при каком сколь угодно малом значении h не становится непрерывным).

Источник и основание допустимости этой неточности выявился с другой стороны — из анализа некоторых принципиальных черт наблюдателя, чего мы сейчас кратко коснемся.

108

Вторым направлением была попытка разобраться с критериями живого. Получилось, что принципиальной гранью, разделяющей все сущее на две непересекающиеся части, является наличие или отсутствие ощущения (отношения) по меньшей мере типа «хорошо—плохо». Работа аппарата ощущения (как формальная, так и по результатам) представляет особый интерес.

В модели мира с неисчерпаемой и бесконечно делимой материей никаких самостоятельных границ и, следовательно, самостоятельных, четко выделенных объектов нет (на чем и основывал Беркли свое отрицание материализма, как будто материализм требует существования материи в форме предметов!). Именно ощущение, порождающее импульс к деятельности и, в свою очередь, давление на себя деятельности, нуждающейся в указаниях ощущения, приводят к неизбежной выработке какого-то из относительно немногочисленных состояний ощущения. В некотором смысле каждое из них соответствует (вырабатывается в ответ) целому множеству состояний отражаемого материала, так что отклик — ощущение — оказывается относительно устойчивым и лишь при переходе через некоторую меру сменяется другим. Вот замечательные слова Лессинга по этому поводу: «В природе все тесно связано одно с другим, все перекрещивается, чередуется, преобразуется одно в другое. Но в силу такого беспредельного разнообразия она представляет собою только зрелище для беспредельного духа (т.е. только бесконечно способное существо могло бы в ней разобраться. — *Б.Г.).* Чтобы существа ограниченные (это, конечно, мы. — *В.Г.)* могли наслаждаться ею, они должны обладать способностью предписывать ей известные границы, которых у нее нет, способностью абстрагировать и направлять свое внимание по собственному усмотрению. Этою способностью мы пользуемся во все моменты нашей жизни; без нее наша жизнь была бы немыслима; из-за бесконечного разнообразия ощущений мы бы ничего не ощущали. Мы непрестанно были бы жертвою минутных впечатлений, мы бы грезили, не зная, о чем грезим» [4, с. 565].

В конечном счете на ощущениях строится в отражении картина мира с относительно устойчивыми областями, разделенными границами, даже когда резких границ в отражаемом нет. Ввиду относительной устойчивости ощущения объекты и теории, возникающие в отражении, никогда точно не описывающие реальности, все же могут быть приемлемыми в некотором круге условий и обстоятельств.

В итоге две указанные сферы вопросов — о выделении объектов субъектом в отражении и об основных особенностях выработки ощущения — сблизились, прояснив механизм возникновения образов мира в отражении в виде объектов и теорий и обеспечив
109
обоснование существования теорий. Основным фактором, толчком, источником структурирования мира в отражении оказалась процедура выработки ощущения.

Математика как формализация структурирующей деятельности отражения

А теперь зададимся вопросом: какая наука или отрасль науки явилась бы формальным изображением или имитацией действия (работы) ощущения?

Посмотрим на порядок и форму действия ощущения. Имеется некоторое распределение материала, воздействующего на аппарат выработки того или иного состояния ощущения. По-иному можно сказать, что аппарат применяется к данному материалу. Ощущение вырабатывает отклики разного качества в зависимости от материала и самого аппарата выработки отклика. Оглядывание материала приводит к представлению, что материал разделен на области (объекты) с некоторыми границами.

По каким основаниям и законам аппарат вырабатывает то или иное состояние ощущения, мы не знаем, но вырабатывается оно всегда, пока субъект функционирует в своем главном, существенном качестве. Если бы мы захотели имитировать выработку ощущения, то нам пришлось бы задать правила выработки отклика (включая меру или набор их) и предоставить материал для упорядочения и оценки. То есть формальной имитацией выработки ощущения явилась бы схема применения системы правил получения того или иного отклика на заданный материал (среду). Эта схема действия есть дедуктивная схема. По способу действий и по сути подразделения оцениваемого материала на классы с соответствующими границами она соответствует математике.

Вообще существуют два вида возможных формализации (или формальных имитаций) деятельности, связанной с ощущением.

С одной стороны, наличие ощущения бессмысленно без действий, причинно следующих за тем или иным его состоянием. С другой стороны, без ощущения, яатдющегося некоторым отношением, отличным от простого точного «физического» воздействия, сама деятельность лишена смысла, отличного от простой и непосредственной физической реакции в ответ на физическое воздействие. Без этого нового уровня, без сферы субъективного отношения ничего, кроме «физических»

взаимодействий, не было бы. Деятельности нет без ощущения, как и ощущения без деятельности. И вот весь этот комплекс получения оценки состояния и причинно следующей за ней деятельности в зависимости от оценки может быть формализован, формально имитирован двумя связанными
110
системами: алгоритмом причинно обоснованного вывода следствий (действий) — формальной логикой и алгоритмом оценки состояния, разграничивающей материал для заинтересованного оперирования им — математикой.

Характерные черты и элементы оценочного этапа деятельности напоминают операции, производимые в математике: те же выработка решения (отклика), установление границ на основании некоторой меры (которой нет в формальной логике!), выделение целого, объектов, их перечисление, группирование, объединение в классы и т.д. Все эти операции — порождение и средство деятельности, поэтому можно полагать, что чистая математика изучает возможности и результаты в принципе произвольной (но формально обусловленной) модельной деятельности по структурированию произвольного модельного материала, а также разрабатывает модельные свойства возможного материала [5; 6]. В.Я. Перминов указывал [7, с. 35], что Ж. Пиаже и Ф. Китчер считали исходные математические идеализации связанными с операциями деятельности. Правда, Ф. Китчер имел в виду [8, с. 24] операции — как мысленные, так и реальные. Но последних нет как раз без «мысленного» структурирования, так что в конечном счете все структурирование происходит от мысленного. Именно система операций этапа предварительного, субъективного структурирования материала и служит основой элементов и принципов математики [6], и математика есть инструмент для расширения и развития возможностей оценки предъяапяемой среды с помощью ее структурирования по типу выработки ощущения.

Границы и непротиворечивость появляются одновременно. Соответствующая логика, разумеется, двузначная: или по одну сторону границы, или по другую, третьего не может быть. Принципы деятельности, связанные с применением меры, установлением границ, отнесением состояний по ту или иную сторону границы и т.д., едины для всего живого, не зависят от конкретного мира, в котором находится субъект. По этой причине и математика — сама по себе — в разных мирах одна и та же. Существование равенства 2 x 2 = 4 не зависит от физики мира, в котором есть субъект, потому что оно возникает просто из перебора границ, реальное существование которых в этом мире вообще необязательно. В связи с разными условиями, опытом и историей в этих мирах неизбежно будут разными общий уровень реальных математических разработок и области интереса, но математики разных миров в принципе смогут понять друг друга. Более того, и предыдущее отсюда следует, вся математика потенциально однозначно определена, т.е. как бы вся уже существует в потенции: для любого вида модельного материала и каждого способа работы с ним верный результат не
111
зависит от конкретного математика, который «только» обнаруживает его в математическом мире.

Дедуктивные математические системы есть аналог основанного на ощущениях механизма упорядочения, оформления, структурирования материала в отражении его субъектом. Но они не только аналог. В действительности они есть развитие способностей субъекта к субъективному структурированию и оценке материала. Они приготаашваются для пользователя как инструмент для выработки оснований для действий. То, что они чисто формальны, не позволяет им работать с реальным, неисчерпаемым миром самостоятельно. Требуется, чтобы материал для их применения поставлялся другими, диалектическими науками, например физикой. Это науки, способные строить частные, конечные модели мира, с которыми уже могут работать формальные методы. Науки, изучающие природу, разумеется, не могут быть дедуктивными.

О различии математики и наук о реальном мире

Вообще познание направлено на то, чтобы мы знали мир и могли выяснять те или иные последствия по типу решения задач в рамках данной аксиоматики. И в физике, и в математике цель — построение дедуктивных схем. Однако каких схем? В физике — в каком-то смысле близких к реальности, что тем или иным способом проверяется, оценивается. В математике — просто формально верно построенных, без оглядки на какое-то соответствие с реальным миром. В этом физика и математика кардинально различаются вплоть до такой степени, что идеал цели, научности и правильности математики оказывается неприменимым к наукам о реальном мире. Непонимание этого приводит многих к превратным представлениям о достижениях и ценностях многих теоретических конструкций, а также к неправомерным и несостоятельным требованиям и претензиям по отношению к вполне научным подходам неформальных наук (еще одна по существу формальная наука — кибернетика, наука об управлении объектами). В математике доказательство заканчивается точкой и остается в таком качестве верным навсегда, как бы сильно ни развилась математика впоследствии. А в физике и во всех науках о реальности, решающих обратные (и всегда конечные) задачи в неисчерпаемо сложной реальности, доказательство не заканчивается никогда. Оно бывает лишь относительно законченным. Странным было бы наличие в наборе математических утверждений (теорем) более и менее убедительных, твердо установленных и сомнительных, да еще в разной степени. А в физике такая ситуация совершенно обычна. Даже после появления некоторой интерпретации, принятой практически всеми, возможно ее неприятие некоторыми учеными, так как невозможно

112

формально доказать, что она — единственно правильная. И у физика должна быть выработана интуиция оценивать теории по степени их обоснованности. В качестве примера можно привести стандартное для учебников разрешение так называемых парадоксов Гиббса (об аддитивности энтропии) с помощью учета квантовомеханической тождественности частиц. «Правильный» (с хорошей интуицией) физик еще до упорядоченных, отчетливых размышлений должен отнестись к этому объяснению как к одному из самых сомнительных в физике. Он должен почувствовать, что это объяснение не встраивается в общую физическую картину. И верно. Оно ведь означало бы, что в классическом мире (без квантовой механики) аддитивности энтропии не было бы, так что тепловая машина работала бы как-то странно, на что вряд ли бы кто согласился [9].

Математика в классификациях наук стандартно проходит как естественная наука. Однако если отстроиться от ее применений и тем более от наиболее обычных — к физике, то приходится заключить, что сама по себе она естественной наукой не является. В ней нет требования соответствия ее аксиоматических конструкций чему-то природному или общественному и вообще внешнему [10]. Поэтому говорить по отношению к ней в связи с опытом и реальностью — это говорить всего лишь о ее применении как вспомогательном инструменте. Ее можно только использовать для взаимного согласования конечных и обозримых объектов, выделяемых науками о реальном мире — например, физикой или экономикой. Она или язык (о чем только обычно и говорят, если ее считают инструментом), или набор методов и схем оценки материала, причем заданного в удобном для обработки виде — не необозримого, а представленного ей другими частными науками в виде конечных (обозримых для ее аппарата) объектов.

Эйнштейн писал [11]: «Чисто логическое мышление само по себе не может дать никаких знаний о мире фактов; все познание реального мира исходит из опыта и завершается им. Полученные чисто логическим путем положения ничего не говорят о действительности. Галилей стал отцом современной физики и вообще современного естествознания именно потому, что понял эту истину и внушил ее научному миру».

Интересно, что вполне отчетливое понимание математики как чисто формальной науки, в принципе не зависящей от наук о природе (и обществе), отнюдь не повсеместно распространенное и ныне, выказал еще в позапрошлом веке Вл. Соловьев: «Вообще, математику можно игнорировать самое существо зоологии или ботаники, от этого его наука нисколько не изменится… Знание математики в известной мере необходимо для физика, но нельзя сказать обратно, чтобы знание физики было необходимо для математика.

113

Напротив, так как математика изучает лишь общие количественные отношения всего существующего (тут, сославшись на "все существующее", он выразился неточно, но его заключение правильно. — *В.Г.),* то для нее всякое частное бытие безразлично. Изучая чистые формы пространства и времени, числа (и здесь сами пространство и время совершенно необязательны, автор все-таки сужает природу математики: речь должна идти о зависимостях вообще и об установлении границ вообще. — *В.Г.*)*,* математику совсем не нужно знать, какие конкретные вещи и явления подлежат этим формам. Всякое применение математических форм к конкретным явлениям положительным — физическим и химическим — есть для математики только частный случай, не имеющий никакой необходимости. Физические и химические яатения подчиняются известным математическим законам, но нисколько этими законами не объясняются... Физика зависит от математики, но математика нисколько не зависит от физики etc.» [12].

Довольно известен (по крайней мере пока еще) вопрос, заданный Е. Вигнером о причине «непостижимой эффективности математики в естественных науках» [13].

Вопрос можно понять, во-первых, в следующем смысле; почему именно математика применяется — для чего? — в конкретных науках и почему именно ее использование придает такие мощь, действенность и результативность применяющим ее наукам, так что без нее они не смогли бы быть настолько эффективными, т.е. успешными, с большой точностью и в чрезвычайно разнообразных обстоятельствах? Ответ на вопрос: для чего? — сам говорит об основаниях ее применения: она применяется как инструмент для систематического упорядочения (включая применение мер) материала и как язык для выражения связей между объектами, а также для законообразного сохранения этих связей в процессах (при интерполяциях и экстраполяциях), т.е. для сохранения точности связей при переходе к другим условиям, когда закономерности этих связей установлены. А с малой точностью и в узком диапазоне обстоятельств можно было бы работать и без математики, что когда-то только и делалось на заре человечества и делается в массе случаев сейчас. Более того, она предоставляет удобную возможность задавать новые вопросы, позволяющие уточнить знания, поставить задачу для эксперимента, ибо при затруднениях выразить полученные данные закономерно они не могут быть сохранены и тогда сам вопрос об их получении отпадает или вообще не возникает. Примерно как письменность нужна в первую очередь для выражения (включая и сохранение) сложных мыслительных построений.

А в остальном математика эффективна по той же причине, по какой вообще эффективна деятельность. Эффективно, во-первых,

114

уместное применение математики, а именно — подходящее применение ее к упорядочению связей конечных (обозримых) объектов, выделенных конкретными науками, а не к самой реальности, что есть забота конкретных наук о природе и обществе. Во-вторых, эффективность возникает лишь при допустимости некоторой неточности результатов. В противном случае никогда никакого успешного предсказания нельзя было бы сделать и не было бы повторения экспериментов — основы научного подхода. Ни сама математика не способна описать точно мир и ориентироваться и работать в бесконечно сложном реальном мире, ни абсолютно точный результат никогда не может быть получен, и удовлетвориться реальным результатом можно только при ограниченной требовательности. А при наличии двух указанных условий ее применения могут быть эффективными.

В связи с тем, что чистая математика не является естественной наукой, не есть наука о природе или обществе, не требует согласования с чем-то внешним по отношению к ней, для работающих в ней ученых нет внутренней надобности изучать теорию познания реального мира, его устройство и отношение к нему субъекта, а также отношения между субъектами. В математике формально царствует чистая формальность, и многие в ней работающие не понимают самой сути и методологии других наук. Мы и наблюдаем в действительности, что многие математики, весьма неуверенно ориентируясь в реалиях других наук, очень часто без опаски подают «туземцам» советы, якобы снимающие их трудности. Фейнман очень верно подметил: «Математики имеют дело только со структурой рассуждений, и им в сущности безразлично, о чем они говорят. ...Другими словами, математик готовит абстрактные доказательства, которыми вы можете воспользоваться, приписав реальному миру некоторый набор аксиом. Физик же не должен забывать о значении своих фраз. Это очень важная обязанность, которой склонны пренебрегать люди, пришедшие в физику из математики. Физика — не математика, а математика — не физика. ...в физике вы должны понимать связь слов с реальным миром» [14, с. 55—561.

О месте математики в науках о реальном мире

С другой стороны, ученые, исследующие природу, не понимая достаточно отчетливо места математики в развитии своей науки, тоже, бывает, не слишком правильно относятся к математике, используя ее не всегда уместно, точнее — ошибочно опираясь на нее тогда, когда надо опираться на конкретную научную теорию или на опыт. Автор этой работы в свое время с удивлением обнаружил, что несколько групп ведущих в своей области ученых строили модели объектов, смешивая реальный объект с его аппроксимацией,

которая, конечно, слишком проста для выдачи обоснованных предсказаний во всем спектре свойств объекта и не обеспечивает законности слишком смелых экстраполяции.

Другой пример многолетних заблуждений обнаружился в области, где работали одни из самых квалифицированных теоретиков. Это было математическое «доказательство» теоремы Гиббса об энтропии смеси газов разных сортов. В процедуре доказательства дифференциал энтропии разбивали на сумму дифференциалов соответственно парциальным давлениям отдельных газов в исходном объеме [15]. Ну и соответственно получали, что энтропия смеси в данном объеме равна сумме энтропии разных составляющих газов по отдельности, помешенных каждый в свой объем, равный полному исходному.

Вообще-то явно чувствуется, что ответ откровенно неверен. Так, если бы все частицы были различными, то пришлось бы суммировать слишком уж много систем, которые заняли бы место размером побольше самой Земли. В нормальной термодинамике такая модель кажется чрезвычайно странной. Однако почтение перед математикой подавляет сомнения и заставляет закрывать глаза на эту несообразность. Однако (скажем еще раз) ошибка здесь не математическая, а методологическая, потому что использованное здесь прямолинейное применение математического равенства в данном случае необоснованно. Приравнять что-то в физическом выводе можно, лишь если физика доказала, что нечто в левой части правильно моделируется тем, что пишут в правой части. Показать это — дело не математики, а физики. И если физика желает выяснить, можно это делать или нет, то она это должна делать сама, а не спрашивать математику. И лишь после одобрения физикой следовало приравнивать дифференциал сумме «парциальных» дифференциалов. А тут поступали как раз наоборот, и исходное арифметическое приравнивание одного дифференциала сумме «парциальных» должно означать в этом случае взятие за исходное положение того, что получают в качестве вывода.

В действительности в той термодинамике, для которой намеревались доказать теорему, парциальные давления, наводящие на мысль разбить дифференциал на части, вообще не являются наблюдаемыми. При наличии в качестве измерительного прибора поверхности одного объема наблюдаемым является только полное давление в нем. Это мы и механика знаем, что газы разные, но в обычной работе с газами, результаты которой порождают представление об обычной термодинамике, это никак не используется и разносортность газов скрывается одной и той же макроскопической динамикой — зависимостью давления при данном объеме только от полной энергии, но не от вида газа. Так что не было ни-

какого основания записывать исходное равенство. Описанное доказательство есть чистая тавтология.

В книге [15] только что изложенное «доказательство» дублируется аналогичным «физическим», основанным на разделении смеси газов с помошью полупроницаемых перегородок на несколько объемов, равных каждый по величине исходному, с отдельными газами. И здесь совершается аналогичная методологическая ошибка: в той же обычной термодинамике нет полупроницаемых стенок, поэтому доказательство к ней не относится.

В обшем, можно сказать, что в тандеме математики и некоторой частной науки о мире ведущей является именно та конкретная наука, а не математика, которая должна выступать как служанка науки о реальном мире. Возможно, эта служанка может замечательно умыть, причесать и затянуть в корсет свою госпожу, но все же никогда не должна становиться всевластной хозяйкой, чтобы самой золотой рыбке не пришлось стать Золушкой.

Об особом характере математического моделирования

Что же касается раздела прикладной математики, где занимаются экстракцией математических зависимостей, так или иначе описывающих поведение объектов и свойств, выделяемых конкретными науками из реальности (математическое моделирование), то это особая наука, не совпадающая с чистой математикой, и вся она должна быть проникнута научной методологией. Вклад внематематического происхождения, привязывающий классифицирующие (выбирающие решения) математические операции к реальности, в таких работах совершенно очевиден, и работающие здесь специалисты обычно довольно хорошо осознают качественное и «генетическое» различие этих вкладов и предпринимают усилия по развитию и совершенствованию обеих сторон проблемы.

Принципиальной чертой этих задач является то, что они обратные и, следовательно, не имеют, вообще говоря, единственного решения, а бывает, что и никакого (переопределенные задачи). Для переопределенных задач приходится придумывать в качестве выхода некоторые близкие в определенном смысле решения, т.е. требуется обдумывать и волевым образом придавать смысл некоторому искусственному решению, вводя в рассмотрение вопросы адекватности решения задачи чему-то стоящему вне ее (понимаемой в узко-постановочном смысле), причем понимание адекватности может быть весьма разнообразным и уж во всяком случае отнюдь не совпадающим с требованием точного описания как сущности, так и формы явления — все, как при общем познании. Адекватность может пониматься примерно так же, как ее понимает нормальная

теория познания: отражение, разумеется, не совпадает с отражаемым, но зависит от него, как бы частично содержит его в другой форме. Полезно обратить внимание на обычный в математическом моделировании выбор из множества возможных решений (обратной задачи) наиболее гладкого (или простого) в некотором смысле решения. Например, применяется регуляризация задачи аппроксимации данных путем обрыва аппроксимирующего ряда. Этот прием — следствие осознанного или неосознанного использования принципа «бритвы Оккама», одного из самых важных и мощных общенаучных принципов познания [16]. В данном случае он применяется как момент выполнения задачи познания при нормальном реалистическом понимании адекватности решения (теории). Для самой же математики этот методологический прием совершенно чужд, его в ней нет. Выбор варианта регуляризации — это не математическая задача.

О критериях правильности

Напомню, что формалисты типа Фейерабенда, частично повторяя Беркли («одна простая идея может быть образцом или изображением только другой идеи. Пока же они различны, одна не может походить на другую», «...На что может быть похоже ощущение, кроме ощущения?» [17, с. 47]) и, утверждая непереводимость смыслов и несовместимость теорий, понимают адекватность именно как полное совпадение, которое, естественно, невозможно, в силу чего и ударяются в более или менее полный произвол — эпистемологический анархизм [18]. Им бы логично и последовательно было восклицать: *«Anything goes!»* -— с позиций отношения математики ко множеству формально допустимых решений, а не с позиций познавательной задачи: именно для математики никакое из этих решений не лучше и не хуже другого, но не для методологически правильного познания. Почему-то сторонники эпистемологического анархизма, увлекаясь формальной логичностью, не обращают внимания на то, что наличный опыт все-таки что-то говорит нам о мире, а не совсем уж бесполезен. Этот момент важен при анализе применимости математического идеала правильности — полной и строгой доказанности — к выводам наук о реальном мире. Некоторые требуют совсем строгих доказательств во всех без исключения вещах (правда, обычно от других). Принять понимание и подход Фейерабенда всерьез означало бы признать полную бессмысленность математического моделирования в целом.

Дефектом неуместного формализаторства (или формализаторства в неуместной степени) является непонимание нереалистичности подхода с требованием перенесения математического критерия полной формально-логической законченности доказательств во все

другие науки. Под логикой доказательств понимают чисто формальную логику, применение которой нереально для неисчерпаемо сложных явлений, которые невозможно полно и точно охватить никакими наборами характеристик и описаний. В действительности сами требующие такой «строгости» обычно в своих примерах, советах и рекомендациях, не умея выделять главных звеньев реальных проблем, ограничиваются простейшими комбинациями куцых обрывков смехотворных банальностей вплоть до мистических и религиозных. Наихудшим следствием подобного формалистского взгляда является непонимание и отбрасывание истинно реалистического и научного — диалектического — рассмотрения событий и дел в их историческом возникновении, связях и развитии. В общем, принципиальное отличие задачи математики от задачи физики и других наук о реальности отчетливо и существенно разводит математические и физические критерии и идеалы научности (ср. с [19]) при сближении физических с общими идеалами и критериями научности при изучении реального мира. И это сближение таково, что даже философия, подобно бесспорно научной физике, оказывается научной в той степени, в какой и поскольку в ней научными методами систематически изучаются вопросы о том, что и в каком смысле существует в мире и как мы это познаем (см. дискуссию о том. является ли философия наукой, публиковавшуюся в 1989 г. в журнале «Философские науки» начиная с № 6).

О преподавании физики не как математики

Дополнительно хотелось бы указать на одну особенность изучения физики, по-видимому, существенно отличную от изучения математики. Работники вузов, имеюшие отношение к приемным экзаменам по физике, отмечая относительно слабую подготовку абитуриентов по ней, обычно объясняют это тем, что в школе ее не проходят как точную науку. Но, похоже, это объяснение несколько поверхностно, и оно в значительной степени основывается на представлении о близком подобии духа физики духу математики, что в действительности неверно. Физике невозможно хорошо научиться, не научившись чуть ли не зрительно, чувственно (так и напрашивается сказать: физически) представлять картину, соответствующую задаче. Если в математике по крайней мере большая часть задач решается формальной техникой, то в физике после формулировки задачи требуется на самом деле ее себе правильно поставить, для чего и надо представить себе процесс в его взаимосвязях и движении. А пока учащийся не научится так ставить себе задачу, т.е. сначала заниматься именно построением в голове соответствующей картины, которую он потом должен адекватно отразить подходящими уравнениями, он будет «плавать». Поэтому начальное преподавание физики должно быть медленным, преподаватель должен вплоть до показа руками пояснять процессы, их варианты и суть, объяснять школьникам то, что они много раз видели, но не осознавали и не приводили в согласованный вид. Первоначальное обучение должно сопровождаться решением большого количества простых задач для выработки «физического мышления». В этом отношении представляется совершенно ошибочной и вредной замена комплекта учебника и задачника по физике (типа старого заачника под редакцией П.А.Знаменского) одним учебником с вкрапленными в него немногими почти случайными задачами. Впрочем, последнее относится и к математике.

В качестве примера чрезвычайной легкости появления неправильного (что показано в [5, 20, 21]) понимания весьма простой по идее и форме задачи можно привести объяснение Пригожиным термодинамической выделенности направления стрелы времени при симметрии ее в механике. Для получения эффекта движения приготовленной в неравновесном состоянии системы только к равновесию (замечу — в редукционистском подходе, т.е. как следствие собственного поведения частиц системы) Пригожий запрещает природе реализацию неподходящей половины априори возможных начальных микросостояний (это его «принцип отбора» [22], [23, с. 227]). При этом он в объяснение вынужденности этой меры ссылается на природу: *«Вопрос о том, что физически реализуемо и что нереализуемо, эмпирический»* [23, с. 229]. Однако рассматриваемая им задача — чисто модельная, к природе уже не имеющая никакого отношения, в ней можно получить обычные термодинамические эффекты (при нормальном наблюдателе), и нет и неоткуда взять закон природы, запрещающий реализацию обращенных скоростей.

Список литературы

1. *Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. М., 1982.

2 . *Смолуховский М.* Доступные наблюдению молекулярные явления, противоречащие обычной термодинамике // Эйнштейн А., Смолуховский М. Брауновское движение. Л., 1936; Молекулярно-кинетические исследования по вопросу об обращении термодинамически необратимых процессов и о возврате аномальных состояний // Там же.

3. *Губин В.Б.* О роли деятельности в формировании моделей реальности // Вопросы философии. 1997. № 8. С. 166—174.

4. *Лессинг !'.Э.* Гамбургская драматургия. Статья LXX // Лессииг Г.Э. Избр. произв. М., 1953.

5. *Губин В.Б.* Физические модели и реальность. Проблема согласования термодинамики и механики. Алма-Ата, 1993.

6. *Губин В.Б.* Математика как формализованная имитация этапа структурирования мира в отражении субъекта // Философские науки. 1996. № 1—4. С. 196—206.

7 . *Перминов В.Я.* О «математическом натурализме» Ф.Китчера // Методологический анализ оснований математики. М., 1988. С. 32—36.

8. *Китчер Ф.* Математический натурализм // Там же. С. 5—32.

9. *Губин В.Б.* Некоторые требования к правильному разрешению парадоксов Гиббса // Журнал физической химии. 1985. Т. 59. Вып. 2. С. 517—520.

10. *Губин В.Б.* О связи стилей математического и физического мышления с природой задач математики и физики // Вопросы философии. 1998. № 11. С. 142-148.

11. *Эйнштейн А.* О методе теоретической физики // Эйнштейн А. Физика и реальность. М., 1965. С. 61-66.

12 . *Соловьев Вл.С.* Вера как основание науки / http://www.philosophy.nsc.ru/life/journals/philscience/l_95/10_sol.htm. 1995.

13. *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Этюды о симметрии. М., 1971.

14. *Фейнман Р.* Характер физических законов. М., 1968.

15. *Гельфер Я.М., Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И.* Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике. М., 1975.

16. *Губин В.Б.* Об одном варианте принципа бритвы Оккама // Философские науки. 1998. Вып. 2. С. 136-150.

17. *Беркли Дж.* Сочинения. М., 1978.

18. *Фейерабенд П.* Избранные труды по методологии науки. М.. 1986,

19. *Кезин А.В.* Научность: эталоны, идеалы, критерии. М., 1985.

20. *Губин В.Б.* Прав ли Пригожин? {Согласование термодинамики с механикой и деятельностный механизм формирования объектов) // Философские науки. 1995. Вып. 5-6. С. 140-151.

21. *Губин В.Б.* История с энтропией // Философские науки. 1997. Вып. 3—4. С. 98-120.

22. *Пригожин И.* Время, структура и флуктуации // Успехи физических наук. 1980. Т. 131. Вып. 2. С. 185-207.

23. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М., 1985.

КОММЕНТАРИЙ

В.Я. Перминов

В принципе я согласен с истолкованием математики как формализации структурирующей деятельности отражения. Это означает, что математика имеет дело с возможными операциями над идеальными (субъективно выделенными) объектами, которые обусловлены только принятыми свойствами идеальных объектов и законами логики. Я согласен с тем, что математика не является естественной наукой и что равенства типа 2x2 = 4 покоятся на представлении о единице, которая не реализуется в мире, и в особенности с тем положением, что истоки математических представлений надо искать в деятельностном отношении человека к миру. Автор справедливо подчеркивает различие методов опытного и математического мышления и указывает на нежелательные

следствия их смешения. Попытки чисто «математического» обоснования закона Гиббса и обоснования направленности времени у Пригожина показывают, что эти смешения присутствуют и в современной науке, причем в соображениях, имеющих принципиальное значение для науки и научного мировоззрения. Я согласен также и с тем положением автора, что в тандеме математики и частной науки ведущей всегда *является* частная (содержательная) наука. Несомненно, что в своих приложениях математика выполняет преимущественно систематизирующую, но не обосновательную функцию.

Некоторые тезисы, однако, вызывают сомнение. Почему мы должны связывать генезис математики с ощущением и с отношением «ощущение — отклик»? Структура деятельности не есть структура ощущения, и границы предметных идеализации устанавливаются не в актах ощущения, но в актах деятельности. Если исходные математические представления проистекают из деятельности, то они имеют не эмпирическую, а онтологическую основу и связаны не с операцией отражения, а с операциями деятельности.

Автор впадает в некоторую крайность, утверждая независимость математики от физики. В логическом плане применительно к отдельной теории это, конечно, так. Но в генетическом плане математические структуры существенно опосредованы физической структурой мира и во многих случаях предвосхищают ее теоретический анализ. «Непостижимая эффективность» математики в физике не может быть объяснена без прояснения глубинной корреляции математических и физических структур, которая не объясняется в рамках логической необходимости.

С этой точки зрения представляется слишком радикальным и часто повторяемый автором тезис о субъективности и произвольности делений, которые мыслящий субъект накладывает на систему реальных отношений. Если бы границы математических объектов определялись произвольно, то факт устойчивости математических теорий и их повседневной приложимости к реальности был бы совершенно непонятным. Система связей между математическими и физическими структурами является в действительности более глубокой и не раскрывается формалистскими определениями математики, подчеркивающими ее независимость от опытных наук.

Не вполне ясен также тезис автора о том, что «вся математика существует в потенции». Как можно определить существование в потенции? Можно ли сказать, что все люди, которые еще появятся на Земле, существуют в потенции? Очень сомнительно, что понятию «существовать в потенции» можно придать какой-то разумный смысл в отношении будущих математических теорий.

122

ОТВЕТ АВТОРА

Я не думаю, что ощущение так уж четко отделимо от деятельности, оно само уже есть деятельность (которая не обязана быть сознательной и преднамеренной), дающая результат в виде некоторой картины, структуры мира. Именно ощущение структурирует реальность, устанавливает границы, на базе чего и совершается дальнейшая деятельность. Деятельность по ее сути не может осуществляться без оснований для нее, без опоры для координации. Без них она не существует как деятельность, а они и поставляются теми или иными состояниями ощущения. Деятельность только выбирает, по какую сторону границы, указанной ощущением, следует шагнуть. Вообще деятельность не есть только структурирование, а в общем есть преследование результата с некоторой целью. Она использует картину структур, обнаруженных ощущением. В более развитом виде структуры выделяются уже в процессе деятельности, развивающей структурирующую деятельность ощущения, в частности, с помощью математики, работающей с полуобработанным материалом, выделенным, так сказать, промежуточной деятельностью (например, физика).

В.Я. Перминов: «Автор впадает в некоторую крайность, утверждая независимость математики от физики. В логическом плане, применительно к отдельной теории это, конечно, так. Но в генетическом плане математические структуры существенно опосредованы физической структурой мира и во многих случаях предвосхищают ее теоретический анализ».

Примерно это же в плане исторического процесса «открытия» математики я и утверждаю. Но не важно, что человек догадался построить некоторую конструкцию под влиянием конкретной практической потребности: если бы он ее построил просто случайно, то она не перестала быть математической и имеющей право на существование. Он ее просто построил формально правильно, и это делает ее математически состоятельной независимо от приложений.

В.Я. Перминов: «"Непостижимая эффективность" математики в физике не может быть объяснена без прояснения глубинной корреляции математических и физических структур, которая не объясняется в рамках логической необходимости».

Конечно, здесь нет логической необходимости, а есть возможность для математики быть эффективной в применении к физическим моделям, изображающим бесконечный мир в виде конечных, да еще и довольно простых структур, что оказывается удовлетворительным в приложениях ввиду относительной устойчивости ощущений. Без этой устойчивости конечные (простые) модели не могли бы быть работоспособными, а бесконечно слож-

123

ные модели и невозможны, и не поддавались бы математическому анализу.

В.Я. Перминов: «С этой точки зрения представляется слишком радикальным и часто повторяемый автором тезис о субъективности и произвольности делений, которые мыслящий субъект накладывает на систему реальных отношений».

Я говорил о выделении объектов соответственно свойствам материала и методам и средствам деятельности с ним. Так что результат в любом случае оказывается зависящим как от материала, с которым происходит деятельность, так и от способа «видения» субъекта. Эту совместность важно подчеркивать, поскольку обыденными являются представления даже крупных ученых (в основном я имею в виду физиков) о чистой объективности открываемых законов и видимых структур и явные или неявные склонности понимать связь теорий чисто редукционистски, абсолютизация чего к добру не приводит.

В.Я. Перминов: «Если бы границы математических объектов определялись произвольно, то факт устойчивости математических теорий и их повседневной приложимости к реальности был бы совершенно непонятным. Система связей между математическими и физическими структурами является в действительности более глубокой и не раскрывается формалистскими определениями математики, подчеркивающими ее независимость от опытных наук».

Вообще успешность применения математики состоит в ее способности описать некоторое закономерное (причинное) следование развития (или связи) конечных объектов, описываемых количественно. Науки о реальности предоставляют эти достаточно хорошо очерченные объекты. Природа же оказалась такова, что в некоторых рамках обеспечивает устойчивость (применимость) этих структур и их связей в деятельности и, следовательно, возможность описать их развитие (связь) не слишком сложными, практически осуществимыми математическими конструкциями.

Математика «прикладывается» не к реальности, а к упрошенным структурам, выделенным частными науками как приближенные модели реальности. Когда мы говорим, что математика успешно работает, то как она работает? Приближенно, конечно, как и те относительно простые структуры (модели мира), которые предложены в конкретных случаях частными науками. А модели эти не так уж и разнообразны. Думаю, что не ошибусь, если скажу, что гораздо более половины полезных и результативных не совсем элементарных (типа 2x2 = 4) приложений основаны на применении приближений не выше первого (линейного). Другими словами, пресловутая эффективность математики базируется на возможности (практической эффективности, удовлетворительности для субъекта) простых описаний (моделей) мира. Реально применяется

124

не так уж много вариантов математических структур, и их верное применение требует только согласования параметров (объектов и критериев) с данными. А при понимании природы математики вообще важно осознавать, что деятельность математика остается математической независимо от связи выбираемых им структур с реальным миром, лишь бы это была деятельность с границами.

В.Я. Перминов: «Не вполне ясен также тезис автора о том, что "вся математика существует в потенции". Как можно определить существование в потенции? Можно ли сказать, что все люди, которые еще появятся на Земле, существуют в потенции? Очень сомнительно, что понятию "существовать в потенции" можно придать какой-то разумный смысл в отношении будущих математических теорий».

Вся математика существует в потенции как набор всевозможных разрешенных математически комбинаций систем и структур. Совершенно так же, как набор всевозможных логических построений. Все, что может быть построено формально правильным способом, относится к математике. Все математическое, что построено в одном мире, остается математическим в любом другом независимо от законов реальности в нем. Вся математика существует в потенции так же, как физика не существует для нас в потенции. Например, потенциально существуют произведения чисел из двух множеств, хотя никто их реально не считал. Но не все, что может быть построено правильно с точки зрения физических правил, окажется реально верным и может считаться физикой. Реальность может оказаться совсем другой. Для математики нет критерия сходства с чем-то реально существующим, поэтому никакого внешнего отбора для нее нет.

Любая математическая конструкция, построенная, скажем, ради физических приложений, могла бы быть построена и независимо от этой потребности. Можно сказать, что в мире потенциальной математики она уже была. Полезной или не полезной она оказалась — это не влияет на ее математичность.

Вся математика существует потенциально априори как числа, как 2х2=4. Физика априорно не существует. Она строится соответственно образцу. Потенциальную математику, т.е. всю возможную, и проверять не надо, это будет нормальная («правильная») математика.

Итак, математика существует потенциально так же, как, скажем, возможность перебрать все произведения каких-то наборов чисел. Физика же таким образом — вне опыта — не существует. Это различие принципиально и практически важно как для понимания полной независимости потенциальной математики, т.е. самой математичности, от всякой реальности, так и для правильного понимания физики, и, следовательно, заслуживает быть специально отмеченным.

125

В.К. Петросян

МАТЕМАТИКА КАК ТЕХНИЧЕСКАЯ НАУКА: ВОСПОМИНАНИЕ О БУДУЩЕМ

Представляемая в настоящей статье трактовка математики как технической науки нового поколения (ментально-технической науки) является частной прогностической (футурологической, если угодно) интерпретацией разрабатываемой автором *теории ментальных объектов* (ТМО) — общефилософской концепции, рассматривающей всю осознанную целенаправленную умственную деятельность человека как производство (генерацию, разработку, проектирование и т.д.) внедрение и обращение искусственных ментальных объектов (ментальных артефактов произвольного уровня сложности), оцениваемых и сравниваемых между собой по степени эффективности, осмысленности и определенности, уровню общности и другим социально и гносеологически значимым параметрам.

В рамках ТМО любой продукт осознанной целенаправленной умственной деятельности человека (ментальный артефакт) — будь то математическая теория или литературное произведение — осмысляется и определяется как *нематериальный (информационный) технический объект,* характеризуемый прежде всего с точки зрения соответствия своему общественному назначению, т.е. эффективности в смысле удовлетворения некоторой осознанной ментальной потребности человека (человеческого сообщества).

Это позволяет рассматривать ТМО как *отрицание отрицания* (на новой аксиологической и теоретико-методологической основе) классической античной трактовки всех родов и видов человеческой деятельности (в первую очередь всех разновидностей осознанной целенаправленной творческой умственной активности людей) как *искусств,* совершенно незаслуженно, на наш взгляд, отвергнутой в Новое и Новейшее время.

Разумеется, речь не идет о восстановлении безнадежно морально устаревшего античного разделения основных видов человеческой деятельности на «механические» и «свободные» искусства, а последних — на «тривиум» (грамматика, диалектика и риторика) и «квадривиум» (арифметика, геометрия, астрономия и музыка), однако нетривиальный латентный смысл и фантастические гносеологические возможности, заключенные в идее *«универсального искусствоведения»,* заслуживают сегодня, на наш взгляд, самого пристального внимания.

В основе ТМО лежит представление об историческом процессе как о перманентной борьбе людей за существование и развитие,
126
осуществляемой путем создания и непрерывного совершенствования различных (прежде всего ментальных, нематериальных) орудий и/или технологий осознанной целенаправленной деятельности, способствующих выживанию и экзистенциальному прогрессу человеческого сообщества. Эта трактовка отличается от прочих определений исторического процесса (например, от марксистского) главным образом тем, что в ней высшим общественным приоритетом наделяются средства (орудия, устройства, технологии, техники и т.д.) ментальной (умственной, нематериальной) деятельности, которые рассматриваются в качестве необходимого условия создания материальных технических объектов (материальных артефактов).

Иначе говоря, все продукты осознанной целенаправленной человеческой деятельности в ТМО представляются как *искусственные объекты (артефакты)* и делятся на две группы — *ментальные* и *материальные,* первые из которых рассматриваются как базовые, первичные, имеющие высший аксиологический приоритет, а вторые — как производные, эманативные, выполняющие второстепенные утилитарные функции по непосредственной поддержке жизнедеятельности общества.

Соответственно все продукты научной деятельности человека (включая результаты так называемых «естественных наук», не говоря уже о науках собственно «технических») определяются в ТМО как *ментальные технические объекты (ментальные артефакты),* отличающиеся друг от друга общественным назначением (интегральной технической функцией), формой, содержанием и различного рода ограничениями (в первую очередь аксиологическими), накладываемыми на процесс их создания и обращения в общественном сознании.

Несмотря на естественность приведенных выше посылок, последний тезис существенно противоречит классическому пониманию научной деятельности, сложившемуся в последние столетия человеческой истории. Действительно, большинство философов, логиков, математиков, представителей различных «естественных наук» и т.д. в настоящее время отнюдь не склонны трактовать свою ментальную деятельность как *техническую, изобретательскую и проективную* по своей природе, предпочитая создавать и закреплять в общественном сознании различные неадекватные реальности и самопротиворечивые мифологемы типа «истина превыше всего», «наука для науки».

По нашему мнению, единственная реальная причина, руководящая (возможно, на подсознательном уровне) стремлением различных (в первую очередь «естественных») наук, понимаемых как самостоятельные институционализированные субъекты определенным образом формализованной ментальной деятельности, позицио-
127
нироваться в общественном сознании в качестве *«отдельно* (в том числе друг от друга) *стоящих башен из слоновой кости»,* состоит в их желании обезопасить себя от внешнего

ценностного и целеполагающего воздействия. На самом же деле с упорством, достойным много лучшего применения, претендуя на априорную внеаксиологичность и внетелеологичность, стремясь любой ценой избежать «некомпетентного контроля» со стороны общества как целого, «естественные» и прочие «нетехнические» науки лишь во все возрастающей степени попадают в зависимость от внешних социальных факторов (в первую очередь от политических решений и источников финансирования), а также неуклонно утрачивают внутренние стратегические стимулы к прогрессивному развитию.

Если абстрагироваться от ложной и контрпродуктивной аксиофобии большинства современных ученых-естествоведов и образуемых ими частных научных сообществ, то никаких «объективных причин» целенаправленно самоотчуждаться от своей технической природы и сущности у науки как одной из наиболее эффективных социальных форм познания, достаточно осознанно и целенаправленно (строго говоря, искусственно) созданных человеком, не существует. Более того, отрицание своей имманентной аксиологичности и телеологичности объективно ведет науку к догматизации гносеологических ценностей и целей тысячелетней давности и к полной качественной стагнации (если не деградации).

Как представляется, ключ к пониманию и разрешению дихотомии *естественное — искусственное* лежит в понятии *истины* и способах его определения и интерпретации. Существует множество самых различных трактовок данного понятия, из которых наука традиционно предпочитает две: *истина как соответствие действительности* (корреспонтентская концепция) и *истина как самонепротиворечивость знания* (когерентная концепция).

На наш взгляд, обе названные трактовки истины необходимы, но недостаточны. Дело в том, что они применимы в процессе познания только после того, как в той или иной мере определены базовые ценности, цели и предмет той или иной научной дисциплины, сформирован ее понятийный аппарат, заданы аксиоматика, методология и т.д. Первичный же выбор названных составляющих любой науки и ее общественный статус в целом регулируются отнюдь не соображениями адекватности реальности и непротиворечивости продуцируемого знания (во всяком случае, не только и не столько ими).

Чтобы та или иная научная дисциплина обрела существование в качестве легитимного и поощряемого к развитию социального института, лица, принимающие соответствующие решения, должны заранее (априори) убедиться тем или иным образом, что потенциальное знание, предлагаемое обществу будущей наукой (независимо от уровня его соответствия действительности и степени самонепротиворечивости), в каком-то смысле экзистенциально ценно (жизненные ресурсы человечества конечны и должны расходоваться максимально эффективно).

Сказанное справедливо и для уже существующих (легитимизированных в общественном сознании) наук и входящих в них научных дисциплин. Как только в рамках той или иной научной дисциплины совокупное мнение научного сообщества начинает склоняться в сторону табуизации (или маргинализации) различного рода аксиологических и/или телеологических изысканий и нововведений, можно однозначно прогнозировать, что эта отрасль человеческого знания вступает в стадию стагнации и догматизации своих ментальных оснований и, следовательно, начинает терять свои позиции в качестве источника прибавочной экзистенциальной (в первую очередь, ментальной) силы человеческого сообщества.

Другими словами, вкладывая дефицитные экзистенциальные ресурсы (человеческие мозги высокого качества, деньги, оборудование, ранее накопленную информацию и т.д.) в тот или иной вид научного познания, общество не может не думать о максимизации своего экзистенциального потенциала (совокупной способности людей к адаптации и преадаптации к условиям существования), о получении прибавочной экзистенциальной силы, даваемой эффективным знанием. А в этом смысле различные науки и отдельные направления научных исследований отнюдь *неравноценны.*

Поэтому вопрос о степени истинности того или иного знания — это всегда (кроме прочего) вопрос о его сравнительной экзистенциальной ценности для человеческого сообщества и стоимости приобретения.

Если мы принимаем изложенную выше точку зрения, что истинность — это, вообще говоря, преимущественно аксиологическая категория, то к признанию всех наук (включая «естественные» и «формальные») *техническими науками* не остается никаких препятствий (кроме аксиологических же, разумеется).

Итак, признавая аксиологический характер истины (необходимо понимать, кроме прочего, что адекватность знания — реальности, era непротиворечивость и т.п. критерии истинности — не более чем ментальные ценности определенного рода), высокую степень ее детерминированности некоторыми заранее (априорно) заданными ценностями, мы можем любую отрасль научного знания с полным основанием рассматривать как *техническую науку.*

Эта посылка влечет множество важнейших общегносеологических и социальных следствий, некоторые из которых и будут рассмотрены ниже на примере математики.

129

1. Признание математики технической наукой позволяет, в частности, достаточно гармонично, на наш взгляд, разрешить давний спор о соотношении *эмпиризма* (апостериоризма) и *априоризма* (не- или антиэмпиризма) в процессе математических исследований и разработок.

Здесь необходимо пояснить, что когда ниже пойдет речь о синтезе эмпиризма и априоризма в процессе математического творчества, в понятие *априоризм (априорное знание* или *понимание)* мы будем вкладывать совершенно иной смысл, нежели тот, на котором настаивал И. Кант *(безусловная независимость от опыта, необходимость* и *строгая всеобщность* как критерии чистого априорного знания). На наш взгляд, ни одно из известных человеческих понятий не может удовлетворить названным признакам — ни всем одновременно, ни даже каждому по отдельности. Кантовская же отсылка ко «всем положениям математики», как предсташшется, совершенно несостоятельна, поскольку: а) практически все основные математические понятия и положения, как известно из истории, были получены в результате осуществления операций формализации, абстрагирования, обобщения, идеализации и т.п. над вполне эмпирическими по своей природе ментальными объектами и, следовательно, имеют четко выраженные «родовые пятна» эмпиризма; б) ни одно из них не необходимо (каждое математическое понятие вполне может быть заменено на отличный по определению и свойствам, но сходный по назначению ментальный объект) и в) ни одно из них не всеобще (всегда может быть найдено исключение на онтологическом уровне или построен альтернативный математический аппарат, не использующий любое конкретное математическое понятие на выбор или включающий в себя данное понятие в существенно модифицированном виде).

С учетом сказанного под *априоризмом* (или, что тождественно, *гармоническим априоризмом)* далее будет пониматься некоторый более или менее обоснованный (аксиологически или как-то иначе — не важно) или даже произвольный (включая совершенно случайный) *внеэмпирическии выбор* субъектом математического творчества некоторого конкретного математического объекта (понятия, утверждения или ценностной нормы) из множества возможных альтернатив при разработке какой-либо математической теории или ее составной части. При этом никаких трансцендентных «нагрузок» (ментальных сверхзадач типа безусловной необходимости, всеобщности, тотальной интерсубъективности и т.д.) избранное математиком-разработчиком понятие (положение) нести не обязано и может быть в любой момент заменено на более функционально эффективное при создании некоторой новой математической теории (субтеории).

130

Суть вышеаннотированного решения спора *эмпиризма* и *(гармонического, неотехницистского) априоризма* состоит в осмыслении математического творчества как *свободного изобретательского процесса,* направленного на создание искусственных (технических) все более экзистенциально эффективных математических устройств (теорий, метатеорий, аксиоматик, теорем и т.д.) и технологий (алгоритмов, сложных исследовательских и вычислительных методик и т.п.) определенного функционального назначения с заранее заданными потребительскими свойствами.

В более широком (историческом) смысле совокупное математическое творчество можно определить как целенаправленный (в перспективе — управляемый) эволюционный процесс, представляющий собой прогрессивную смену качественно различных поколений математических артефактов (формальных ментальных устройств произвольного назначения, теорий, метатеорий, технологий, понятий, алгоритмов и т.д.).

Искусственность (техногенность) происхождения математических объектов произвольного назначения и уровня общности не означает, разумеется, их несоответствия действительности (хотя в рассматриваемом контексте вполне правомерно вести речь о разработке — кроме прочего — специальных математических аппаратов для описания и анализа актуально несуществующих или даже невозможных миров); речь идет лишь о том, что соотношение *эмпирического* и *(гармонического) априорного* начал в той или иной математической теории — это всегда вопрос более или менее свободного осознанного *аксиологического и семантического выбора* ее автора (авторов).

Каждое *математическое изобретение* (некоторый завершенный продукт математического творчества, ментально-инженерное решение определенного назначения) может быть с исчерпывающей полнотой охарактеризовано как нетривиальный (в смысле новизны и общественной полезности) синтез некоторого множества *известных из уровня математики* (а также вновь эмпирически найденных или просто выдуманных — без оглядки на действительность) *математических объектов* и/или закономерностей и фиксированного набора ментальных (в первую очередь аксиологических) регуляторов, выполняющих различные формальные и содержательные функции. Эта трактовка полностью снимает проблему соотношения эмпирического и априорного начал в математике.

Другими словами, математик-творец (шире — математическое сообщество в целом как совокупный субъект творчества), в достаточно полной мере осознающий техническую природу своей науки, совершенно свободен в том, какие математические объекты (теории, аксиоматики, принципы, понятия, алгоритмы и т.д.), созданные предшественниками, выбирать в качестве прототипов своих математических изобретений (и опираться ли на них вообще), а также в том, какие гносеологические эффекты (известные, вновь найденные эмпирическим путем или придуманные формальные и количественные зависимости между произвольными объектами) и аксиологические нормы (в том числе системообразующие критерии функциональности, истинности, строгости и т.д.) ему использовать в своей инновационной деятельности и в каком соотношении.

Вопрос лишь в уровне новизны и экзистенциальной эффективности (реатьной общественной потребительской стоимости, ментатной ценности) создаваемого им конечного продукта (нового инструмента математического мышления).

2. Осознание математики в качестве технической науки резко повышает гносеологический статус такой отрасли знания, как *философия математики.*

Это связано как с необходимостью создания в будущем специальных ментально-технических научных дисциплин, изучающих аксиологию (явно заданную или латентную) различных математических теорий, так и с грядущим появлением в математике таких новых сфер исследований, как *метаонтологизация* (схематизация и семантическая унификация математических объектов различной природы в целях использования их в качестве элементов и «узлов» более крупных математических объектов — теоретических и вычислительных устройств различного назначения), *метаабстрагирование* (абстрагирование от некоторых конкретных свойств математических объектов — понятий, вычислительных процедур, норм и т.д., рассматриваемых в качестве компонентов различных математических теорий, вычислительных техник и т.д.) и *метаидеализация* (присвоение математическим объектам искусственно усиленных или модифицированных теоретических свойств, которыми они в принципе не могут обладать как элементы конкретных математических теорий алгоритмов и т.д.).

Дело в том, что осознание математических теорий и вычислительных систем (алгоритмов, методик и т.д.) различного назначения и уровня общности в качестве ментальных артефактов (технических ментальных объектов) резко повышает аксиологичность, вариативность и комбинаторный потенциал математического знания, позволяет осуществлять серийную модификацию и модернизацию исходных математических теорий и любых других формальных объектов, а также синтезировать принципиально новые математические аппараты с заранее заданными теоретическими и потребительскими свойствами.

132

В качестве примера может быть приведена следующая аналогия. В первобытном обществе все жизненно важные операции производились одним или несколькими инструментами (палкой, оббитыми кусками кремня и т.д.). Проблем с их классификацией, типологизацией, таксономизацией и т.д. у наших пращуров, естественно, не возникало на протяжении тысячелетий. С развитием материальной техники в последние столетия исторического процесса люди получили в свое распоряжение сотни тысяч и миллионы материальных артефактов различного назначения и устройства, в совокупности существенно повысивших качество человеческого существования, но одновременно потребовавших специальных усилий человека по их классификации и взаимной гармонизации.

Потребность в осмыслении, упорядочении и развитии накопленного многообразия технических устройств различного назначения с необходимостью привела к появлению таких понятий, как *принципиальная схема инженерного объекта, абстрактный (материально-)технический объект, идеальное (материально-)техническое устройство* и т.д., которые в настоящее время стали базовыми для многих (материально-)технических наук, эффективно универсализируя разнородное (материально-техническое знание и экспоненциально ускоряя его расширенное воспроизводство и качественную эволюцию.

Нечто подобное ждет и математику по мере ее самоидентификации в качестве (ментально-) технической науки. Пока математика состояла из «четырех сосен»: арифметики, геометрии, алгебры и анализа (не считая мелких «кустарников»), особых проблем с (само)идентификацией и классификацией математических теорий не было. Но как только начнется процесс осознанной всесторонней аксиологизации математики и тотальной пантеоретической и пантехнологической комбинаторики различных математических устройств и технологий, потребность в понятиях типа *принципиальная инженерная схема математического объекта (теории, субтеории, метатеории и т.д.), абстрактная математическая теория (субтеория, метатеория), идеальная математическая теория (субтеория, метатеория)* и т.д. резко возрастет.

Вопрос даже не в том, что число различных по своим аксиологии и семантике математических теорий (или каких-либо других крупных единиц математического знания) будет измеряться миллионами и их нужно будет как-то сравнивать (в том числе по уровню гносеологической и экзистенциальной эффективности) и классифицировать.

Основной смысл метаонтологизации, метаабстрагирования и *метаидеализации* в математике состоит в возможности появления

133

полноценной *инженерии математического знания,* а также формализованных технологий частично или полностью автоматизированной разработки новых, все более эффективных в различных (заранее заданных) отношениях универсальных и глубоко специализированных инструментов математического мышления (интегрированных единиц математического знания).

Как следствие прогрессирующей технизации математики с необходимостью возникнет и такое (кажущееся сегодня полной экзотикой, если не тавтологией) направление философско- и инженерно-математических исследований, как *математизация математики.* Заранее оговоримся, что речь здесь не идет о том вырождающемся направлении математической мысли, которое сегодня называется *метаматематикой* и которое с исчерпывающей полнотой и строгостью можно определить как *«искусство доказательства недоказуемого - непротиворечивости противоречивого».* Под *математизацией математики* в рамках излагаемой концепции понимается вполне рациональный процесс разработки математических моделей и формального проектирования математических теорий, пакетов вычислительных алгоритмов и других таксономических единиц математического знания, становящихся все более разно-функциональными, сложными и многоуровневыми искусственными ментальными устройствами.

Другими словами, технизация и обусловленная ею математизация математики позволят математическому сообществу в обозримом будущем перейти от дедуцирования отдельных теорем к *метадедуцированию* (формализованному или полностью формальному выводу) нетривиальных и эффективных математических теорий, их разветвленных семейств, прикладных математических аппаратов недостижимого сегодня уровня сложности и эффективности. А это — магистральный путь к искусственному интеллекту в самом высоком смысле данного понятия.

3. Технизация математики создает объективную возможность появления и ускоренного развития еще одной колоссальной по своему научному и общесоциальному значению сферы деятельности — сферы патентования математических изобретений любой природы и специфики.

В настоящее время экономика математического знания напоминает театр абсурда: математики-творцы практически бесплатно или за мизерную академическую зарплату (включая унизительные «благотворительные» гранты) делают фундаментальные математические открытия, изобретают все новые теории и вычислительные алгоритмы, а математики-ремесленники без особого напряжения

и лишних угрызений совести используют все это в сюих прикладных программных продуктах, часто забывая даже упомянуть имена разработчиков, не говоря уже о материальных компенсациях, и получают совершенно незаслуженные сверхприбыли.

Если провести аналогию с нормальной экономикой, то это выглядело бы следующим образом: заводы, занимающиеся производством средств производства (станков, оснастки, базовых технологий, сырья, полуфабрикатов и т.д.), поставляют все это на рынок совершенно бесплатно, а предприятия, вырабатывающие предметы широкого потребления, забыв даже сказать «спасибо», включают все это в себестоимость продукции и продают собственные товары втридорога. Совершенно очевидно, что подобная экономика долго не просуществовала бы в силу быстрого полного свертывания производства средств производства.

В математике же подобная ситуация — норма (благо, математические теории не подлежат *физическому износу,* хотя и достаточно быстро устаревают морально). Легко видеть, что эта вопиющая несправедливость и иррациональность — главная причина многовековой идейной стагнации оснований математики.

Создание эффективной международной системы патентования математических изобретений в рамках общего процесса технизации математики в корне поменяло бы ситуацию. Появилась бы реальная моральная и материальная заинтересованность ученыхфундаменталистов разрабатывать принципиально новые отрасли математики и разнообразные математические устройства качественно более высоких поколений, чтобы, эффективно контролируя использование созданного ими знания в прикладных целях и получая адекватное денежное вознаграждение, инвестировать затем заработанные средства в еще более перспективные исследования и разработки по своему (а не спонсорскому) разумению.

Другими словами, создание системы патентования математических изобретений могло бы стать реальным шагом на пути к индустриализации и непосредственной самоокупаемости фундаментальных исследований и разработок в математике и к экспоненциальному росту их качества. А это — основное условие необходимого для «вертикального прогресса» математической науки опережающего развития фундаментальной математики по отношению к прикладным математическим исследованиям и разработкам.

4. Грядущая технизация математики, с неизбежностью порождая взрывной рост количества взаимно альтернативных (как в аксиологическом, так и в семантическом смыслах) фундаментальных математических парадигм и металарадигм, объективно будет нуж-

135

даться и в принципиально новых сверхмощных инструментах верификации и фальсификации истинности (экзистенциальной эффективности) вновь генерируемого экстремально разнообразного математического знания, не сводимых к традиционной дедукции и обычным математическим экспериментам.

Это означает, что в обозримом будущем важным инструментом ускоренного развития математики с высокой степенью вероятности станет разрабатываемый в рамках ТМО *метааксиоматический метод (метод ментальных войн),* позволяющий сравнивать и всесторонне оценивать различные (в том числе актуштьно несоизмеримые) аксиоматики и метааксиоматики (включая аксиологические системы), лежащие в основаниях конкурирующих математических теорий.

Основу метааксиоматического метода составляет идея, альтернативная ключевой интенции известного *«парадокса бесконечного регресса»,* направленного на дезавуирование целесообразности метаизысканий в области обоснования критериев истинности знания в произвольной предметной области. Эта идея, условно называемая *«принципом гармонического прогресса»* (или, иначе, *«принципом метапрогресса»),* сводится к тезису о чрезвычайной гносеологической и — шире — экзистенциальной эффективности многоуровневых и многоитерационных обоснований все более общих критериев и метакритериев истинности (в первую очередь аксиологической адекватности) знания вообще и математического знания — в особенности.

На наш взгляд, именно специальным образом организованные полисубъектные будущие споры (ментальные войны) о наиболее экзистенциально эффективных критериях и метакритериях истинности математического знания, освобожденные от «дамоклова меча» парадокса бесконечного регресса, и станут переломной точкой, отделяющей затянувшуюся на тысячелетия фазу «младенчества» математики от фазы ее цветущей «юности», в которой установится даже не представимый сегодня уровень творческой свободы.

В заключение важно отметить, что вышеизложенная в предельно обших чертах идея технизации математики отнюдь не исчерпывает концепцию *«универсального искусствоведения»,* лежащую в основе ТМО. Параллельное развертывание контурно обрисованных выше на примере математики процессов осознанной технизации ментальной деятельности в различных науках и искусствах может дать кумулятивный гносеологический и экзистенциальный эффект такой силы, что впору будет говорить о полной смене «ментальных миров» в голове каждого человека.

136

КОММЕНТАРИИ

С.Я. *Бычков*

Математики в большинстве своем не склонны к философской рефлексии по поводу своей науки. Примеры А. Пуанкаре, Д. Гильберта, Л. Брауэра, Г. Вейля, Н.Н.Лузина своей исключительностью лишь подтверждают общее правило. Вместе с тем, как отмечал Л. Витгенштейн, ни в одном вероисповедании нет такого злоупотребления метафизическими выражениями, как в математике. Этот парадокс «бессознательного философствования» при искреннем отвращении к осознанной философской рефлексии и составляет, на мой взгляд, одну из главных трудностей, осложняющих продвижение в решении проблем философии математики.

Если для математика путь к «метафизическим» вопросам его науки пролегает через сложности с обоснованием ее утверждений, будь это анализ, теория множеств или теория вероятностей, интерес философа к древнейшей из наук вызван обычно его собственными — философскими — проблемами. В первом случае прикосновение к философским вопросам математики не доводится до потребности выстраивания цельной мировоззренческой концепции, где математике отводится всего лишь одно из мест. Во втором случае ситуация иная: задача построения последовательного философского учения требует интерпретации в его рамках и такого уникального феномена, как теоретическая математика. Излишне говорить, что эти два подхода к философии математики могут приводить не только к гармонии, но и к конфронтации друг с другом. Диапазон исканий в современной философии, в том числе и в философии науки, гораздо шире возможных поисков ответов изнутри сферы оснований математики, что не может не вызывать напряжения в исследовательском поле.

О степени подобного напряжения в столь, казалось бы, далекой от жизненных страстей области, как философия математики, можно судить по статье В.Я. Перминова «Ложные претензии социокультурной философии науки» в сборнике «Стили в математике». В этом сборнике, контекст которого, на мой взгляд, лучше приспособлен для обсуждения комментируемой работы, нежели проблема «Математика и опыт», большинство авторов представляют первую из указанных позиций, обращаясь к философии лишь в той мере, которая требуется анализируемым аспектом математического знания. Философская доминанта, подчиняющая себе методологический аспект математики и влекушая рассмотрение проблематики по схеме от «общего» (философия) к «частному» (математика), налицо только у трех авторов «Стилей»: упомянутого В.Я. Перминова,

137

М.А. Розова и автора комментируемой работы В. К. Петросяна. Позиция В.Я. Перминова абсолютно бескомпромиссно заявлена уже в эпиграфе вышеназванной работы: «Мировоззрения могут спорить, но наука решает и ее решения несут на себе печать вечности». Эти слова раннего Гуссерля как нельзя лучше характеризуют общефилософскую позицию и самого Василия Яковлевича: философия не должна ставить под сомнение достижения науки вообще и математики, в частности, она должна лишь прояснять их основоположения, что самой науке без помощи философии не под силу. Позиции двух других авторов диаметрштьно противоположны.

М.А. Розов интерпретирует математику как воспроизводимый посредством социальных эстафет механизм, состоящий в подражании образцам мыслительной деятельности. В рамках этой концепции прекрасно объясняется указанный ранее парадокс бессознательного философствования математиков, объясняющий поразительную невосприимчивость математиков к изменчивой философской моде и заранее вероятное прохладное отношение их к комментируемой концепции В. К. Петросяна математики как технической науки. Все, что исходит из внешних по отношении к математике целей, а priori рассматривается математиками с подозрением. Можно себе представить, каких усилий стоило Кантору и его сторонникам сломать прежнюю парадигму математического знания и поставить на ее место теоретико-множественную идеологию. Без встречного движения со стороны математики, в рамках которой зрели задачи, требующие понятийного аппарата теории множеств, этого бы никогда не произошло и авторитет Гильберта сам по себе был бы здесь бессилен. Постараемся, однако, имея все это в виду, вычленить «имманентно-математическую» часть концепции В. К. Петросяна.

Хорошо это или нет (см. выступления В. И. Арнольда и С.П. Новикова), но на сегодняшний день теоретико-множественная парадигма является господствующей в математике. Интуиционизм Л. Брауэра и конструктивизм А.А. Маркова и Э. Бишопа не составляют сколько-нибудь серьезной альтернативы теоретико-множественной математике. Теория множеств в ее «наивном» варианте рассматривает свои объекты как завершенные, «непополняемые» образования и при этом не ставит под сомнение абсолютный характер закона противоречия. Обнаружение парадоксов в наивной теории множеств повлекло ограничения на способы конструирования множеств в соответствующих аксиоматиках, а также проблематизировало закон противоречия: для наличия уверенности в его выполнении необходимо было доказать непротиворечивость системы аксиом, что, правда, так и не удалось сделать. Недоказанность непротиворечивости аксиом теории множеств не означала вместе с

138

тем, что закон противоречия ставится иод сомнение. Просто математики свыклись с мыслью, что использование представлений теории множеств в классических разделах математики не приводит к противоречиям, и этого оказалось вполне достаточно для успешного функционирования их науки в XX в. Можно сказать, что современная математика взяла из теории множеств ровно столько, сколько сочла полезным, а все «метафизические» ее проблемы, волновавшие математиков вплоть до разрешения П. Коэном континуум-гипотезы, постепенно отошли на задний план. Тем не менее в рамках этого прагматического самоограничения ни «актуальность» объектов математики, ни закон противоречия не ставились под сомнение.

Теперь самое время сказать, на что именно обратил внимание в своих работах В.К. Петросян, оставаясь в рамках двух вышеназванных «аксиом» современной математики. Ему посчастливилось заметить, что диагональная процедура Кантора, не ставящаяся под сомнение современной математикой (ее отрицание повлекло бы пересмотр всех систем аксиом теории множеств), несовместима с непротиворечивой трактовкой актуальной бесконечности. Это не затрагивает классические разделы математики, но оказывается довольно болезненным для теоретико-множественной теории алгоритмов, где «диагональные рассуждения» играют весьма важную роль.

Канторовская диагональная процедура содержит одновременно рассуждения в духе «логического настоящего» и «логического будущего», а последние, как нетрудно усмотреть непредубежденным взглядом, несовместимы с представлением о завершенном характере объектов математики. Если теперь встать твердо на позицию противопоставления актуальной бесконечности потенциальной (а Кантор пытался это делать), то тогда станет очевидным «потенциал истский» характер понятия взаимно-однозначного соответствия множеств, возникнут трудности с непротиворечивым пониманием арифметики, геометрии и анализа. А это, в свою очередь, дает автору основание для взгляда на математику как на «техническую» (в смысле «теории ментальных объектов») науку, не отличающуюся резко от естественных и технических наук.

Я не утверждаю, что рассуждения Вадима Кармленовича не могут быть подвергнуты критике с точки зрения иных сугубо *философских* постулатов (говорить об этом в сборнике по философии *математики* было бы не вполне целесообразно). Но все известные мне попытки возражений ставят под сомнение одновременно и существующую саморефлексию современной математики, опирающуюся на «актуальность» ее объектов и закон противоречия. Единственный приходящий мне на ум способ не «затрагивать» со-

139

держание основных построений математики в свете рассуждений В. К. Петросяна состоит в том, чтобы избавиться в ней от доказательств от противного (или по крайней мере привести их к виду, использующему лишь более слабый, нежели закон противоречия, закон контрапозиции, допускающий корректные выводы и в случае «глобальной» противоречивости математической теории).

Я хорошо представляю, насколько странными должны казаться для современного математика рассуждения в работах В. К. Петросяна, где последовательно проводится критика существующей математики с позиции недопустимости потенциальной бесконечности в строгих логических рассуждениях. Однако мне кажется, что они не более странны, чем аналогичные рассуждения Г. Кантора для математиков XIX в., многие из которых превратились сегодня в рутину.

В.Я. Перминов

В. К. Петросян высказал довольно большое число радикальных тезисов, с которыми я не могу согласиться. Почему в математике должен начаться некоторый процесс глобальной аксиологизации, когда математики и без того всегда проводили различие между принципами, формулами, доказательствами и т.п. с точки зрения их ценности в теории и в приложениях? Почему мы должны включать в понятие истинности некоторые ценностные характеристики и даже делать их основными? Давно выяснено, что соединение истинности и полезности искажает гносеологическое понятие истинности. На каком основании мы должны отождествлять теоретические науки с техническими? В некоторых аспектах аналогия между математической теорией и техническим устройством полезна и неоднократно использовалась в методологических рассуждениях, но, по большому счету, мы всегда отличаем теоретическое знание, направленное на прояснение принципов, описывающих объективное состояние дел, от технического знания, использующего эти принципы для практически реализуемых процедур. Если в технической науке мы полностью определены критериями ценности и эффективности, то в сфере теоретического знания эти критерии имеют только косвенное значение. Развитие математической теории остановилось бы, если бы оно было подчинено принципу непосредственной эффективности, который действует в отношении технических устройств. Совершенно неясны также и основания критики объективности теоретических принципов. Прежде чем использовать натуральный ряд, мы должны принять его как некоторую структуру, имеющую объективное

140

значение, независимое от области приложения. Причем следует подчеркнуть, что мы ни в какой степени не изобретаем натуральный ряд и возможности человеческого произвола здесь равны нулю.

Трудно принять также и предложенное автором переосмысление понятия априорного знания. Введение нового понятия предполагает достаточно ясные дефиниции и пояснения на примерах. Поскольку ни того ни другого в тексте нет, то трудно говорить о качестве нового определения самого по себе. Здесь, однако, можно принять общую рекомендацию автора и встать на ценностную точку зрения, т.е. задать вопрос: зачем это нужно? Нужно ли новое определение априорного, общность которого с историческим априорным состоит только в названии? Ни Поппер, ни кто-либо другой из релятивистов XX в., коль скоро они последовательно настаивали на относительности всех принципов и оценок, не пытались ввести новое понятие априорного. Они доказывали, что априорного знания как знания необходимого и универсального не существует, и не пытались строить каких-то его релятивистских аналогов. И эти философы поступали правильно, ибо они

хорошо осознавали, что никто не будет использовать понятие априорного знания в смысле чего-то совершенно относительного, т.е. в явном противоречии с его традиционным истолкованием. Очевидно также, что это новое понятие, как бы мы его ни определили, ни на шаг не приблизит нас к решению дилеммы априорного и эмпирического, поскольку сама эта дилемма получает смысл только при традиционном разделении этих понятий. Решение этой дилеммы может состоять либо в безупречном обосновании гносеологического релятивизма типа попперовского (в философии математики это подходы И. Лакатоса, М. Клайна и др.), либо в обосновании существования априорных (универсальных и необходимых) принципов в структуре человеческого знания. В.К. Петросян в соответствии с его общим настроем мог бы попытаться продвинуться в дальнейшем обосновании математического релятивизма или в опровержении аргументов, на которых строятся доводы современных априо-ристов. Ни того, ни другого в приведенных рассуждениях нет и, таким образом, их трудно считать каким-либо продвижением к истине. Намеченное в тексте новое определение априорного знания в логическом плане, конечно, ничему не противоречит (мы имеем множество определений истины, свободы, культуры и т.п.), но очевидно, что само по себе оно никуда не ведет, ибо в философии математики нас пока интересует вопрос о существовании (или несуществовании) априорного знания в его традиционном, кан-товском смысле.
141

ОТВЕТ АВТОРА

В.Я. Перминову

В своем комментарии на мою статью Василий Яковлевич высказал довольно большое число не менее радикальных, чем я, тезисов, с которыми мне согласиться не менее трудно, чем ему с моими. Рассмотрим эти тезисы поцитатно, дабы избежать обвинений в неверной интерпретации.

1. В.Я. Перминов: «Почему в математике должен начаться некоторый процесс глобальной аксиологизации, когда математики и без того всегда проводили различие между принципами, формулами, доказательствами и т.п. с точки зрения их ценности в теории и в приложениях? Почему мы должны включать в понятие истинности некоторые ценностные характеристики и даже делать их основными?»

Если абстрагироваться от декларированного в моей статье тезиса, что осознанная многоуровневая аксиологизация математики повлечет за собой экспоненциальный рост качественного разнообразия и гносеологической эффективности математического знания (хотя это само по себе чрезвычайно важно), то аксиологизация математики необходима уже для того, чтобы некоторая — одна — аксиология не имела статуса «общематематической инквизиции» и не пыталась «укладывать» аксиологически и содержательно альтернативные математические теории в «прокрустово ложе» насквозь самопротиворечивой классической математической традиции.

Другими словами, «различие между принципами, формулами, доказательствами и т.п. с точки зрения их ценности в теории и в приложениях» можно проводить в самых различных аксиологических системах и с совершенно непредсказуемыми (в том числе прямо противоположными) результатами. Попытки же обеспечить *вечное и полное доминирование* какой-либо одной (априорной, универсальной и т.д.) математической аксиологии рано или поздно будут пресечены самим фактом существования в сфере математики научных сообществ, исповедующих взаимно альтернативные аксиологические установки.

Отсюда не следует, что различные аксиологические парадигмы несоизмеримы и равноценны (в том числе равно истинны). Сказанное означает лишь, что о математических ценностях можно и нужно спорить (для этого мною предлагается механизм *инновационной войны) и* что ни одна аксиологическая парадигма не должна иметь априорного приоритета над другими. Современная математика, разумеется, пока весьма далека от принятия такого подхода.

2. В.Я. Перминов: «Давно выяснено, что соединение истинности и полезности искажает гносеологическое понятие истинности».

142

Отрадно, что для В.Я. Перминова все уже «давно выяснено». О себе, к сожалению, такого сказать не могу. В частности, абсолютно не уверен не только в том, что «соединение истинности и полезности искажает гносеологическое понятие истинности», но даже в том, что в современной обшей гносеологии существуют корректные определения таких понятий, как «истина», «полезность» и т.д. Напротив, я убежден в том, что многовековое царствование в математике и гносеологии в целом печально известного *«парадокса бесконечного регресса»,* тотально блокировавшего все попытки поиска и сравнения метаоснований (метакритериев) истинности, полезности, ценности, определенности, непротиворечивости, осмысленности и т.п. метапредикатов, привело к состоянию, когда современные представления о названных материях ни на йоту качественно не продвинулись со времен античности и пребывают во вполне первобытной ментальной ипостаси.

3. В.Я. Перминов: «На каком основании мы должны отождествлять теоретические науки с техническими?»

На том основании, что все теории (без ограничения общности) и так являются *ментальными артефактами* определенного класса гносеологической эффективности, т.е. *искусственно* созданными людьми (весьма маломощными — пока — по своей познавательной силе) *инструментами мышления (ментальными устройствами* и *технологиями).* Если отбросить тезис об априорности некоторых классических математических теорий в кантовском смысле, т.е. утверждение их абсолютности (универсальности, всеобщности, беспредпосылочности и т.д.) и богоданности, этот факт станет самоочевидным.

Кроме того, само понятие «теория» имеет, на мой взгляд, весьма субъективный и исторически ограниченный характер. В рамках «неотехницистского подхода» легко мыслимы и другие — принципиально новые — формы организации знания, многократно превосходящие по своей гносеологической эффективности те весьма примитивные по своей конституции ментальные объекты, которые мы сегодня называем *теориями.* Поэтому, если «теоретические науки» готовы окончательно выродиться и умереть, но «не поступаться принципами», параллельно с ними (и вместо них) рано или поздно будут возникать и развиваться многократно более гносеологически и экзистенциально эффективные научные, метанаучные и постнаучные (мета- и посттеоретические) дисциплины неотехницистской ориентации, не имеющие к первым никакого отношения.

4. В.Я. Перминов: «Развитие математической теории остановилось бы, если бы оно было подчинено принципу непосредственной эффективности, который действует в отношении технических устройств».

143

Я утверждаю, что развитие математики уже давно — еще в античности — «остановилось» в смысле перехода к новому качеству, что, кстати, косвенно подтверждает и сам В.Я. Перминов, столь ревностно отстаивая тезис об априорности (универсальности и всеобщности, т.е. принципиальной инвариантности, необратимой «заторможенности») оснований классического математического знания. И «остановка» эта обусловлена именно искусственной стагнацией базовых аксиологических норм, де-факто запрещающих развитие принципиально новых математических устройств и технологий (не путать с экспоненциальным экстенсивным ростом дедуктивного знания в рамках достигнутого в античности качества). Поэтому слышать тезис о том, что технизация математики (по определению, основанная на идее *непрерывной смены поколений* различных по своему *качеству* ментальных устройств и технологий) повлечет «остановку» ее развития, довольно странно. Это сильно напоминает полемический прием, кратко определяемый как «перекладывание с больной головы на здоровую».

Важно подчеркнуть также, что мы с В.Я. Перминовым, по-видимому, совершенно по-разному понимаем термин «эффективность». Под эффективностью произвольно взятой математической теории я понимаю сравнительную (относительную) *гносеологическую силу* данного математического устройства (аппарата), его способность извлекать из универсума все более глубокие математические истины (ментальные решения), способствующие «вертикальному» экзистенциальному прогрессу человеческого сообщества. Что под словосочетанием «непосредственная эффективность» имеет в виду В.Я. Перминов, мне неведомо.

5. В.Я. Перминов: «Трудно принять также и предложенное автором переосмысление понятия априорного знания. Введение нового понятия предполагает достаточно ясные дефиниции и пояснения на примерах. Поскольку ни того ни другого в тексте нет, то трудно говорить о качестве нового определения самого по себе. Здесь, однако, можно принять общую рекомендацию автора и встать на ценностную точку зрения, т.е. задать вопрос: зачем это нужно? Нужно ли новое определение априорного, общность которого с историческим априорным состоит только в названии?».

Я думал, что выразил свою точку зрения по вопросу о классическом и новом (техницистском или, иначе, гармоническом) понимании априоризма (хотя это и не было основной темой моей статьи) достаточно определенно. Коль скоро В.Я. Перминов так не считает, выскажусь более точно.

Считаю, что предлагаемое мною новое понимание априоризма нужно как минимум для того, чтобы преодолеть логическую несостоятельность (противоречивость) классического кантовского определения исходной дихотомии. И дело тут не в названии.

144

Проблема в том, что на самом деле существует не дихотомия «эмпирическое — априорное (в кантовском смысле)», а дихотомия «эмпирическое — не-эмпирическое». Сфера «не-эмпирического» не сводится к кантовскому априоризму, а делится на две части, которые можно назвать соответственно *«дисгармоническим не-эмпирическим» («дисгармоническим, кантовским априоризмом»)* и *«гармоническим не-эмпирическим» («гармоническим априоризмом»)* (см. схему I).

«Эмпирическое познание» («эмпиризм»)	«Не-эмпирическое познание» («не-эмпиризм»,«априориэм»)	
	«Дисгармонический, кантовский априоризм»	«Гармонический априоризм»

Схема 1. Структура дихотомии «эмпирическое — не-эмпирическое»

Определения:

Эмпиризм — это тип познания (и/или изобретательской деятельности), при котором некоторое удовлетворительное по своей эффективности (в том числе истинности) ментальное решение является конечным результатом гносеологического процесса, осуществляемого путем многократной последовательной верификации и/или фальсификации промежуточных ментальных решений на основе опытных данных (как правило, путем проб и ошибок).

Не-эмпиризм, априоризм — это тип познания (и/или изобретательской деятельности), при котором некоторое разрабатываемое и принимаемое без доказательств (в то.м числе эмпирических) ментальное решение (система аксиом или определений, например) является первичным (безусловным в каком-то точно фиксированном смысле) ограничительным и направляющим регулятором гносеологического процесса произвольного уровня общности (в том числе эмпирического познания).

Дисгармонический (инвариантный, кантовский) априоризм — это вид не-эмпирического познания, при котором некоторые результаты изобретательской и/или гносеологической деятельности людей (ментальные решения) на основании каких-либо аксиологических или иных субъективных предпочтений без достаточных на то оснований объявляются окончательными (абсолютно истинными, универсальными, всеобщими и т.д.) и не подлежащими изменению в будущем (качественно, сущностно инвариантными).

Гармонический (вариативный, не-кантовский) априоризм — это вид не-эмпирического (интуитивного, «инсайтического», умозрительного, спекулятивного, транслогического, эмпатического и т.п.) познания, при котором все реальные и возможные результаты изобретательской и/или гносеологической деятельности человека (ментальные решения произвольного уровня общности) рассматрива-
145
ются как *относительно* истинные, универсальные и всеобщие и подлежащие неизбежному последующему оптимизирующему изменению. При этом мотивом изменений могут быть как *не-эмпирические* (новые — более гносеологически «сильные» — интуиции, идеи и ценности), так и *эмпирические* (обнаруженные ошибки, вновь открытые факты и т.д.) *причины.*

И. Кант совершенно неадекватным, по моему мнению, образом устранил из дихотомии «эмпирическое — не-эмпирическое» *гармонический априоризм,* чем перевел исходное отношение из разряда *контрадикторных* в разряд *контрарных*. При этом отношение «эмпирическое — инвариантное (дисгармоническое) априорное» в течение нескольких сотен лет совершенно ошибочно трактовалось научным сообществом (вслед за Кантом) как *контрадикторное.*

Моя предварительная трактовка *априоризма* вообще как единства *дисгармонического априоризма* и *гармонического (вариативного, релятивного) априоризма* устраняет допущенную И. Кантом *логическую ошибку подмены контрадикторного контрарным.*

Кроме того, при рассмотрении дихотомии «эмпирическое — не-эмпирическое» И. Кант допустил, как предстаатяется, еще одну содержательную и логическую ошибку — существенно более серьезную, чем первая. Название этой ошибки в содержательном плане — *абсолютизация относительного.* Объявление античного математического знания не подлежащей изменению ни при каких условиях истиной в последней инстанции *для всех времен и народов* — это не что иное, как совершенно немотивированный в содержательном и аксиологическом планах ментальный произвол.

Что же касается логической ошибочности данного подхода, то *кантовский (дисгармонический, инвариантный) априоризм* — это объединение утверждений о *прошлом, настоящем* и, главное, *будущем* в одном суждении (группе суждений) или, иначе, в одном «логическом флаконе».

Фактически И. Кант утверждает следующее: (1) *никогда не будет создана новая — альтернативная античной в своих базовых положениях — арифметическая (и/или геометрическая) система, равная классическому образцу (или превышающая его) по своим гносеологическим свойствам,* и (2) *в традиционных арифметических и геометрических системах никогда не будут найдены противоречия или другие серьезные недостатки (дефекты), способные привести к полному пересмотру оснований классической математики.*

Напомню в связи с этим, что утверждения о будушем (по Аристотелю) не имеют права на истинностную оценку (не являются истинными или ложными). Следовательно, идея *кантовского (дисгармонического) априоризма* не только бездоказательна в содержательном плане, но еще и логически ошибочна, и мы имеем полное
146
право удалить ее из исходной дихотомии *«эмпирическое — не-эмпирическое».*

Таким образом, в конечном счете (после элиминации кантовского априоризма) остается лишь дихотомия *«эмпирическое — гармоническое не-эмпирическое (гармоническое априорное)»,* о чем и говорилось в моей статье.

При этом рассматриваемая дихотомия — в силу показанной пыше паралогичности (дисгармоничности) кантовской трактовки — является *контрадикторным* (т.е. логически вполне корректным и самодостаточным) отношением двух полностью альтернативных по существу, но *взаимно дополнительных* в технологическом плане типов познания. Важно отметить также, что не только классический априоризм, но также и традиционный эмпиризм нуждается в серьезном переосмыслении (гармонизации) с изложенных в моей статье *неотехницистских* позиций.

Надеюсь, что на сей раз я выразился достаточно определенно.

6. В.Я. Перминов: «Ни Поппер, ни кто-либо другой из релятивистов XX в., поскольку они последовательно настаивали на относительности всех принципов и оценок, не пытались ввести новое понятие априорного. Они доказывали, что априорного знания как знания необходимого и универсального не существует, и не пыта-нись строить каких-то его релятивистских аналогов. И эти философы поступали правильно, ибо они хорошо осознавали, что никто не будет использовать понятие априорного знания в смысле чего-то совершенно относительного, т.е. в явном противоречии с его традиционным использованием».

Я согласен с Поппером и К° в том, что касается отрицания *кантовского (дисгармонического) априоризма,* хотя и не считаю их аргументы интерсубъективно убедительными (в противном случае проблема фальсификации кантовского априоризма была бы уже давно снята с повестки дня). Что же касается их отрицания априоризма вообще, то с этим я совершенно не согласен. Отрицание *гармонического априоризма* семантически и логически эквивалентно отрицанию аксиоматического, гипотетико-дедуктивного и других методов познания, использующих идеализированные (или каким-то другим искусственным образом трансформированные) ментальные объекты вообще. Поэтому я настаиваю на необходимости признания *гармонического априоризма* в качестве важной — если не ключевой — составной части гносеологического процесса, объединяющего как *эмпирическое,* так и *не-эмпирическое (гармоническое априорное)* начала.

Относительно тезиса В.Я. Перминова о том, что «никто не будет использовать...» Это — разновидность *аргумента к авторитету; аргумент к традиции.* Не принимается.
147

7. В.Я. Перминов: «Очевидно также, что это новое понятие, как бы мы его ни определили, ни на шаг не приблизит нас к решению дилеммы априорного и эмпирического, проскольку сама эта дилемма получает смысл только при традиционном разделении этих понятий. Решение этой дилеммы может состоять либо в безупречном обосновании гносеологического релятивизма типа попперовского (в философии математики это подходы И. Лакатоса, М. Клайна и др.), либо в обосновании существования априорных (универсальных и необходимых) принципов в структуре человеческого знания. В.К. Петросян в соответствии с его общим настроем мог бы попытаться продвинуться в дальнейшем обосновании математического релятивизма или в опровержении аргументов, на которых строятся доводы современных алриористов. Ни того, ни другого в приведенных рассуждениях нет, и, таким образом, их трудно считать каким-либо продвижением к истине».

Рискну утверждать, во-первых, что осмысленность и логичность традиционной трактовки рассматриваемой дилеммы в свете высказанных контраргументов весьма проблематична, и, во-вторых, что ни попперовская, ни кантовская дороги *«не ведут к Храму».* Первая — в силу своего имманентного плохо скрытого агностицизма (отрицания не-эмпирического, априорного типа познания вообще), а вторая — в силу показанной выше дисгармоничности (содержательной необоснованности и логической некорректности).

Что касается отсутствия у меня (по мнению В.Я. Перминова) *«опровержения аргументов, на которых строятся доводы современных априористов»*. Не знаю, о каких аргументах здесь идет речь, но в смысле фальсификации кантовского априоризма имею сказать (дополнительно к п. 5) следующее.

В 1995 г. я предложил математическому сообществу концепцию гармонической арифметики, альтернативную классической арифметике и целиком построенную на *абстракции актуальной бесконечности* (см., например: *Петросян В.К.* Основные положения концепции оснований гармонической арифметики // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. М., 1997. С. 48—66). Гармоническая арифметика вполне может рассматриваться как естественное прямое опровержение кантовского априоризма (противоречий в этой — многократно более гносеологически мощной, чем классическая, — арифметической системе не найдено до сих пор).

Так что проблема не в отсутствии у противников кантовского априоризма (у меня, в частности) опровергающих аргументов, а в сверхустойчивом нежелании априористов-традиционалистов (неокантианцев) их непредвзято рассматривать и принимать.

148

Относительно «смысла дилеммы» априорного и эмпирического в п. 5 сказано достаточно. Исходя из этого, утверждаю, что единственно корректное, по моему мнению, решение этой «дилеммы» — синтез *эмпирического* и *гармонического априорного* (или, поскольку *кантовское априорное* содержательно и логически некорректно, дисгармонично, синтез *эмпирического и априорного)* типов познания в рамках целостной неотехницистской парадигме гносеологического процесса.

8. В.Я. Перминов: «Совершенно неясны также и основания критики объективности теоретических принципов. Прежде чем использовать натуральный ряд, мы должны принять его как некоторую структуру, имеющую объективное значение, независимое от области приложения. Причем следут подчеркнуть, что мы ни в какой степени не изобретаем натуральный ряд и возможности человеческого произвола здесь равны нулю».

Есть, по моему мнению, как минимум два перманентных основания критики любой математической теории (в том числе классической арифметики и евклидовой геометрии): (1) недостаточная — с точки зрения классических или вновь сформулированных критериев — *гносеологическая сила* и (2) наличие актуальных или потенциальных (если они еще не выявлены к моменту начата-рассмотрения) противоречий.

Первый пункт означает, что всегда существует возможность создания гносеологически более мощной математической доктрины, альтернативной доминирующей теории предшествующего поколения (т.е. математического устройства, основанного на принципиально иных ментальных основаниях).

О том, что уже создана не-канторовская арифметика, базирующаяся на *абстракции актуальной бесконечности* (в противовес классической арифметике, основанной на идее *потенциальности* натурального ряда), говорилось в п. 7. Возможны и другие неклассические арифметические системы.

Второй пункт означает, что во всех существующих и возможных математических системах неизбежно имеются самопротиворечия (явные, выявленные или латентные, еще невыявленные). Это связано с гарантированно недостаточным (для всех возможных гносеологических ситуаций и требований) уровнем определенности (точности, формализованности, внутренней упорядоченности и т.д.) используемых в математике объектов и связей между ними.

В развитие этого тезиса скажу, что совершенно не разделяю уверенности Василия Яковлевича в невозможности жесткой фальсифицирующей критики (строго говоря, полного опровержения) классической арифметики и евклидовой геометрии, являющейся, по-видимому, основным источником его вдохновения в деле под-

149

держки априоризма в околокантовской (праксеологической) редакции.

Классическая арифметика, на мой взгляд, уязвима для критики настолько же, насколько уязвима абстракция потенциальной бесконечности. А последняя, безусловно, весьма уязвима (проблематизируема и фальсифицируема) в том смысле, что она объединяет в одном статическом объекте (натуральный ряд) и существующие (актуальные), и еще несуществующие (потенциальные, возможные) элементы (натуральные числа). Как представляется, рано или поздно — в зависимости от темпов развития темпоральной логики, основная идея которой принадлежит Аристотелю (знаменитое «завтрашнее морское сражение»), — математическое сообщество обратит внимание на тот очевидный, по моему мнению, факт, что объект (классический натуральный ряд), совмещающий *действительное* и *возможное* в одно время и в том же отношении, нельзя (вопреки сложившейся паралогичной традиции) квалифицировать как *существующий* в математически строгом смысле этого слова.

Что же касается геометрии Евклида, то могу привести (просто для примера) одно логически вполне корректное рассуждение, показывающее ее фундаментальную самопротиворечивость. Как известно, в евклидовской геометрии возможность построения прямой гарантируется исключительно первым и вторым постулатами. Можно показать, однако, что реально прямую в рассматриваемой геометрической системе построить нельзя (логически невозможно).

Суть дела в следующем. Евклидова геометрия основана на принципе идеальности используемых инструментов (линейки, циркуля, карандаша), имеющих разрешающую способность «до точки». Если принять аксиому М. Паша: «Между двумя точками прямой всегда существует третья точка той же прямой» (или даже какой-либо ослабленный вариант этой аксиомы), — а не принимать чего-либо подобного мы не можем из-за отрицания Евклидом (и современной геометрией) принципа лимитрофности (пограничности) точек, — то оказывается, что прямую в классической геометрии невозможно построить, поскольку как бы близко ни находилась любая вторая точка (a1) к первой (исходной) точке (a0), между ними есть точка $a_{г}$, а между a_0 и a_2 — точка a_3 и т.д. Другими словами, *готовый к движению по идеальной линейке идеальный же карандаш вообще не может тронуться с места (отойти от точки* a_0), *поскольку совершенно непонятно (логически невозможно точно определить), к какой точке* a_s *(S ~ произвольно большое натуральное или трансфинитное число) он должен переходить уже в первом своем шаге.*

Таким образом, действительно имеем противоречие с первым и вторым постулатами геометрии Евклида, совершенно безосновательно (и, как выясняется, абсолютно неправомерно) гарантирующими беспроблемное построение (и последующее потенциально бесконечное продление) прямой. Ослабление принципа идеальности геометрического инструментария ситуацию не спасает (просто «точки» будут становиться все более «крупными» с тем же эффектом). Данная ситуация легко разрешима в геометрии, построенной на абстракции актуальной бесконечности, т.е. в *«юниметрии»* (см.: *Петросян Е.К.* Общий кризис теоретико-множественной математики и пути его преодолении. М., 1997. С. 81—93, 124—138), но геометрия Евклида от этого менее самопротиворечивой не становится. Кстати говоря, приведенное выше фальсифицирующее евклидову геометрию (и ее современные аналоги) рассуждение было найдено мною именно в процессе разработки геометрической системы нового поколения, основанной на абстракции актуальной бесконечности.

Разумеется, я не настолько наивен, чтобы думать, что указанное самопротиворечие в геометрии Евклида хоть сколь-нибудь серьезно поколеблет убежденность В.Я. Перминова и других адептов античной мудрости в *априорной истинности кантовскоео априоризма ,* однако имеется вполне отчетливая (и ускоряющаяся) тенденция к накоплению современными исследователями целой коллекции подобных вышеизложенному самопротиворечий классических математических систем. Рано или поздно количество перейдет в качество.

Поэтому — на месте В.Я. Перминова — я бы не был столь уверенным в абсолютной содержательной, логической и, как следствие, аксиологической незыблемости античной математики. Хотя если расчет В.Я. Перминова и его сподвижников строится на силе аксиологической инерции математического сообщества, лет 20—30 они еше, конечно, могут выиграть. Но это уже будет не *априоризм,* а *априотабуизм* (синонимы: *априоаксиологизм, априокантотеизм* и т.д. в этом духе).

9. В.Я. Перминов: «Намеченное в тексте новое определение априорного знания в логическом плане, конечно, ничему не противоречит (мы имеем множество определений истины, свободы, культуры и т.п.), но очевидно, что само по себе оно никуда не ведет, ибо в философии математики нас пока интересует вопрос о существовании (или несуществовании) априорного знания в его традиционном, кантовском смысле».

Во-первых, учитывая полное нежелание современных априористов непредвзято рассматривать контраргументы оппонентов, я бы сказал, что их интересует, скорее, вопрос о *безусловном гарантировании существования* «априорного знания в его традиционном, кантовском смысле». Думается, это более точно.

Во-вторых, в противоречие В.Я. Перминову считаю, что предложенное мною *гармоническое* (или, иначе, *неотехницисткое,) по-*
151
нимание априорного знания *«ведет»* как минимум к ясному самосознанию математики в качестве *ментально-технической науки* и к преодолению ею того тотального застоя в сфере своих оснований, в котором она пребывает последние несколько тысяч лет. Это, как представляется, немало.

С.Н. Бычкову

Начну с того, что я очень признателен С.Н. Бычкову за благожелательный и глубокий комментарий моей статьи.

1. В начале своего комментария С.Н. Бычков пишет о «серьезном напряжении в исследовательском поле», вызываемом различиями в метафизических подходах к интерпретации тех или иных философско-математических проблем. Это очень верное наблюдение. Оно настолько верно, что, если бы не наличие в российском философско-математическом сообществе нескольких человек, обладающих инновационным типом мышления и пытающихся объективно разобраться во всех существующих взаимно альтернативных позициях, моя личная мотивация публично излагать свои философско-математические взгляды была бы, вероятно, чрезвычайно близка к нулю или даже представляла бы собой отрицательную величину. Подобный пессимизм объясняется тем, что для большинства представителей ортодоксальных философско-математических платформ любые более или менее фундаментальные нововведения не просто неприемлемы, а неприемлемы *абсолютно,* по определению. Ниже это будет показано на примере позиции В.Я, Перминова. В этом смысле более правильно вести речь не столько о «напряжении» в исследовательском поле, сколько о непреодолимой «Великой китайской стене», отделяющей одну (ортодоксальную) часть этого «поля» от всех других.

Сказанное и есть основная причина, по которой я во всех последних своих работах настойчиво призываю философско-математическое сообщество создать и институционализировать механизм *ментальных (инновационных) войн,* в рамках которого было бы невозможно на основе априорных аксиологических предпочтений ничтоже сумняшеся отбрасывать или искусственно маргинализировать все точки зрения, альтернативные классическим.

И хотя я с уважением отношусь к усилиям организаторов сообщества создать *единое исследовательское поле* в области философии математики («общую теорию философско-математического поля», так сказать), боюсь, без формирования адекватного глубине имеющихся ментальных противоречий институционализированного механизма *борьбы (логико-математических) идей за существование* решить эту грандиозную задачу будет невозможно.

152

2. С.Н. Бычков в своем комментарии довольно жестко связывает мою интерпретацию математики как технической науки с теоретико-множественной проблематикой. Безусловно, такая связь существует. Идея неотехнизации математики в значительной мере является следствием моих попыток создания гармонического логико-математического аппарата, полностью основанного на абстракции актуальной бесконечности и лишенного противоречий канторовской теории множеств.

Вместе с тем замысел, сжато изложенный в статье «Математика как техническая наука: воспоминание о будущем», много амбициознее, чем желание просто легитимизировать в сознании философско-математического сообщества мои теоретико-множественные и логические разработки (сделать их аксиологически равноправными с классическими системами).

В ходе своих исследований в сфере оснований человеческой ментальности я пришел к мнению, что возможны весьма эффективные в экзистенциальном смысле (чрезвычайно полезные в качестве инструментов социальной эволюции) логико-математические аппараты, которые бесконечно шире и глубже существующих в современной науке аналогов (прототипов).

Ментальные (в том числе логико-математические) инструменты этого (эволюционного) типа относятся к «гармонической логике и математике», образно говоря, как «биотопоценоз» — к «кролику», как «биологическая эволюция» в целом — к жизненному циклу отдельно взятой «биологической особи».

К сожалению, создание универсального инновационного конструктора, представляющего собой множество множеств взаимно дополнительных классификаций ментальных объектов различного назначения, формы и содержания, специализированных ментальных пространств и времен, правил и метаправил проектирования всевозможных формальных систем и оперирования объектами внутри них, а также ими самими как единицами ментальной эволюции, само по себе совершенно нетривиальная научно-исследовательская и креативная задача. Решение этой задачи (после многих лет непрерывных усилий) сегодня довольно близко к завершению.

Проблема в том, что даже «гармоническая арифметика» и «юниметрия» на протяжении уже почти восьми лет достаточно искусственным образом удерживаются вне поля восприятия математического сообщества.

Что же говорить о «теории ментальных объектов (систем)», представляющей собой — в своей прикладной части — универсальный ментальный конструктор, позволяющий создавать (в том числе автоматизированным путем за счет использования специальных метаалгоритмов) триллионы самых разнообразных логико-математических (и не только) систем новых поколений?

153

Что скажут наши априористы-ортодоксы о «теории ментальных объектов», когда поймут, что полноценные логические и математические системы — полностью отличные от классических и превышающие их по своим гносеологическим возможностям — могут миллионами единиц генерироваться компьютерными программами практически без участия человека?

Вот почему для меня было так важно — в преддверии возможной презентации прикладных подсистем *«теории ментальных объектов»* — подвести под этот замысел достаточно обитую философскую и аксиологическую платформу, каковой является интерпретация математики в качестве (нео)технической науки. Для «гармонической арифметики» и «юниметрии» это была бы просто чрезмерно широкая «рубашка на вырост».

Так или иначе, повторюсь, я благодарен С.Н. Бычкову за его позитивную оценку моих работ по канторовской проблематике, теории актуальной бесконечности и вообще за этот комментарий в целом. До последнего времени я совершенно не был уверен в том, публиковать ли мне результаты по «теории ментальных объектов» (и в каком объеме) или нет, учитывая то очевидное обстоятельство, что большинство членов математического сообщества, очевидно, меня не поймут. Но коль скоро существуют такие читатели и комментаторы, как С.Н. Бычков, попытаться разрушить математическую «Великую китайскую стену», по-видимому, все же стоит.

А.Н. Кричевец

ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНЫЙ СУБЪЕКТ И МНОГООБРАЗИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УСТАНОВОК*

1. Критерии истины в области врожденных идей

С давних времен математическая истина служит примером истины как таковой. Никакие авторитеты, суды, парламенты не смогут поколебать в нас уверенность в таблице умножения и в теореме Пифагора. Характерной чертой подобных математических истин является их очевидность, которая специфическим образом отличается от очевидности видимого факта: факты могут выглядеть так или иначе, но мы не в состоянии даже помыслить ситуацию, в которой 5 + 7 не равнялось бы 12. Мы называем такого рода «непоколебимые» истины аподиктическими.

---

* Работа выполнена при финансовой научного фонда (код проекта: 01— 03— 00351).

Рене Декарт установил критерий выделения «непоколебимых» истин: они должны мыслиться «ясно и отчетливо», а именно с той же степенью отчетливости, как и мысль о нашем собственном существовании, фиксируемая декартовым cogito *ergo sum*. Однако что может гарантировать, что ясность для конкретного человека влечет истинность для всех людей, в каком бы смысле эта истинность ни понималась. Эту проблему Декарт решал *онтологическим* доказательством бытия Бога. Существование Бога выводилось из его *всеблагости*. Поскольку существование есть совершенство, а Бог обладает всеми совершенствами, то он необходимо существует. Точно гак же Бог не может нас обманывать, поскольку обман входил бы в противоречие с его совершенством, следовательно, мы можем доверитъся Богу в вопросе об истине.

Вряд ли такой ход аргументации может убедить скептика, и не случайно обсуждение вопроса, кто, Бог или Дьявол, нас ведет, когда мы мыслим, стало одной из основных тем в «Картезианских размышлениях» М.К. Мамардашвили. Он подчеркивает одну из тенденций в декартовской трактовке упомянутого критерия истины: идея приобретает искомый статус, когда она является идеей «ясного и внимательного ума» [1, с. 84], а не просто ясной и отчетливой идеей какого угодно ума. Таким образом, для того чтобы носпринимать такие идеи, мы должны еще попасть в определенное состояние (состояние сознания, как сейчас принято говорить), и если мы в него попали, то *естественный свет разума* позволяет нам эти идеи разглядеть.

Можно ли обосновать такой критерий как-либо иначе, нежели верой или ее объективацией — верховным существом, гарантирующим данный критерий? Этот вопрос становится в высшей степени актуальным, когда мы оказываемся перед фактом, что ясные и отчетливые идеи в истории науки не накапливаются кумулятивно, но исгупают в сложные отношения и противоречат друг другу даже в мыслительном пространстве одного физического субъекта, не говоря уже о коллективном разуме человечества, в каком бы виде его ни мыслить.

Иной подход к проблеме предложил И. Кант. Он исходил из того, что аподиктические истины математики имеют место как факт для всякого мыслящего существа (по крайней мере если он способен размышлять на темы, поднятые «Критикой чистого разума»). Вопрос состоит в том, как возможны такие аподиктические истины. Кант предлагает решение, которое выглядит более или менее убедительно, однако никакой обязывающей аргументации у Канта нет — даже его «дедукция» категорий из форм суждений фактически не является дедукцией, а только лишь фиксацией коррелятивной связи между формами суждений и категориями.

155

Сопоставляя кантовское трансцендентальное исследование с декартовскими размышлениями в интересующем нас аспекте, мы видим прежде всего, что вопрос о гарантиях истины Кантом не ставится. Мы не будем затрагивать тему гарантий истинности идей самого Канта, а сосредоточимся на математических идеях, которые для Канта являются предметом рассуждения. По Канту, способность постигать истины математики «рождается» вместе с трансцендентальным субъектом и являются частью его определения. Пространство, время и понятия рассудка служат априорной формой мира явлений; пространство чистого созерцания вместе с понятиями рассудка служат формой мысленного конструирования чистых понятий и суждений. Эти понятия и эти суждения и суть математика. Вопрос о времени в каитовской трактовке математики не принадлежит к числу достаточно ясных. Он затрагивается в текстах, посвященных ньютоновской механике, в связи с понятием движения, которое Кант считает эмпирическим. Мы же полностью согласны с Э. Гуссерлем, который в работе «Начало геометрии» геометрией называет «все дисциплины, занимающиеся формами, математически существующими в чистом пространстве—временности» [2, с. 21I]. После этой оговорки мысль Канта можно переформулировать в виде двух тезисов:

1) трансцендентальный субъект «рождается» с готовыми инструментами (интуиции чистого пространства—временности и понятия рассудка), с помошью которых можно построить математику; вопрос о гарантиях истинности математических суждений не ставится, Канта интересует движение *от «факта» истинности* к условиям его возможности;

2) мысленные конструкции, которые субъект возводит в чистом пространстве—временности, реализуемы в мире явлений и согласуются с законами природы (понимаемой по-кантовски — как природа явленная); вопрос об основаниях такой согласованности не решается в рамках естествознания[1].

Слово «рождается» поставлено в первом тезисе в кавычки, поскольку вопрос о врожденности априорных понятий и представлений решался Кантом совершенно недвусмысленно: все понятия и предстааления (в том числе и априорные) *приобретаются* субъектом в процессе его взаимодействия с миром. Однако по своему содержанию априорные понятия не зависят от опыта, а предопределены для субъекта [3, с. 139—140]. В работе «В какой математике возможны стили математического мышления» я оспорил это кантовское мнение. Возможны различные математики, например в области числовых понятий (три числовых теории античных греков — натуральные числа, геометрическая алгебра и теория пропорций — против единой теории вещественного числа в Новое время). Об-

156

неизвестно также противопоставление конструктивного и классического подходов в математике XX в. Исходя из данных «фактов», следуя Канту, двинемся к условиям их возможности.

2. Математика как система норм деятельности

В работах В.Я. Перминова делается попытка обоснования математики как системы норм деятельности в рамках некоторой предметно-практической онтологии. Подразумевается, что имеет место некоторый уровень взаимодействия человека с миром, ниже которого невозможно оказаться, кроме как расставшись со своей человеческой формой[2]. Таким образом, человек необходимо должен действовать в мире по законам, согласующимся с математикой: считать предметы натуральными числами, планировать маршруты в евклидовом пространстве и т.д. Вместо априорных условий опыта В.Я. Перминов вводит априорные нормы деятельности, характерной особенностью которых является опора на некоторое подобное кантовскому чистое созерцание, дающее возможность аподиктически очевидных суждений.

Этот проект обоснования математики неоднократно обсуждался авторским коллективом данного сборника. Один из основных вопросов касался возможности проведения границы, отделяющей такой универсум и такую регулируемую соответствующей математикой деятельность в нем от неаподиктической математики и необязательной для человеческого существа деятельности. Отвечая на этот вопрос, мы можем попытаться развить «нормативное» обоснование математики в направлении, которое, правда, вряд ли окажется приемлемым для автора подхода.

Прежде всего обратим внимание на способ, каким аподиктические истины могут становиться нормами деятельности. Если для нас очевидно, что один плюс один равно двум, то это не означает автоматической очевидности этого равенства по отношению к эмпирическим предметам. Здесь трактовка нормативной теории существенно отличается от трактовки вопроса в кантовской трансцендентальной эстетике, где субъект возникает к жизни с уже заранее согласованными чистым созерцанием, с одной стороны, и формой эмпирического созерцания — с другой, и где «чистые» конструкции математических понятий автоматически реализуемы в эмпирическом мире. В «нормативном» случае между системой понятий и миром явлений образуется зазор: закон, как известно, не содержит условий своего применения и требует для адекватного употребления особой способности — по Канту, способности суждения. Известен, например, следующий «контрпример» к равенству 1 + 1 = 2: одна капля + одна капля = одна большая капля.

Таким образом, вполне в духе работ И. Лакатоса можно сказать, что даже элементарная арифметика применима в эмпирическом мире, т.е. является нормой деятельности лишь в тех именно случаях, когда она применима, и неприменима в других, а границу между первыми и вторыми невозможно положить с помощью ясного и отчетливого критерия.

Но еще более важно, что закон-норма в отличие от кантовских законов рассудка может стать предметом дискуссии. Имеет ли в виду такой поворот темы В.Я. Перминов или не имеет, но, говоря о нормах в нашей нынешней ситуации, мы не можем не учитывать, что эта тема весьма актуальна и обсуждается в более широком контексте. Прежде всего я имею в виду работы Ю. Хабермаса в области этики коммуникативного действия — их аргументацию можно использовать в наших целях.

Имеет место изначальное противоречие между большим разнообразием сводов моральных норм и притязанием на всеобщую значимость каждого из них. На определенном уровне развития субъекта (Хабермас связывает эти уровни развития со степенью «децентрированности» — термин Ж. Пиаже, — т.е. со способностью покинуть «эгоцентрическую точку зрения») проблема взаимодействия с иными системами норм становится моральной проблемой, которую нельзя решить в рамках данной системы. Таким образом, всеобщей значимостью обладает обший моральный подход к действительности, а не система конкретных, например христианских, моральных норм как единственная система морали. В таком случае мы должны предположить моральную инстанцию субъекта, осуществляющую этот общий моральный подход[3]. Это переводит проблему из статической ситуации, описываемой парой «моральные нормы — деятельность», в динамическую, добаатля третий член: «поиск и обсуждение моральных норм». На каком основании может вестись обсуждение? Ответ возвращает нас к Декарту: на основании естественного света разума, который если и может быть гарантирован, то только объективацией веры — Богом в специальной ипостаси гаранта осмысленности нашей добросовестности.

Вернемся к математике и рассмотрим следствия из нашей аналогии. Исходя из факта наличия многообразных математик, мы должны предположить некоторую «общематематическую» способность субъекта, которая в прагматической своей ипостаси выступает как способность суждения, выбирающая для эмпирической ситуации адекватный способ ее математизации (в частности, придумывая новую математику, что будег соответствовать действию рефлектирующей способности суждения у Канта). Это самоопределение субъекта каждый раз особым образом уподобляет его кантовскому трансцендентальному субъекту, снабженному определенной системой
158
созерцаний, системой допустимых операций рассудка и «механизмом» интерпретации мира явлений некоторым согласованным с двумя предыдущими системами образом. Мир видится субъекту через призму квазитрансцендентального аппарата, однако некоторый зазор между субъектом и «призмой» сохраняется.

Трансцендентальный субъект, как мы видим, расслаивается на снабженного определенным познавательным аппаратом частичного субъекта и выбирающего и творящего познавательные аппараты метасубъекта, который способен идентифицироваться со многими частичными субъектами, Кантовская же трансцендентальная эстетика описывает в общем виде частичного субъекта. Как представляется, проблему множественности частичных трансцендентальных субъектов можно решить именно на пути «нормативного» обоснования, однако в нее придется внести существенные коррективы.

Математическая теория является системой норм деятельности в *универсуме идеальных объектов,* которые ею подразумеваются и описываются. Возможность наложения этой системы на эмпирический мир, возможность решения с ее помощью практических проблем представляет собой частный случай общей проблемы идеального, которую мы рассмотрим в одном из следующих разделов. Аналогия с моральными нормами потребовалась нам для того, чтобы обосновать необходимость высшей продуцирующей инстанции в структуре взаимодействующих математических теорий. Эта высшая инстанция, по-видимому, не может быть наделена никакими конкретными математическими способностями. Подобно тому, как Ю. Хабермас пытается решить проблему множественности сводов моральных норм на уровне дискурса, наделяя его субъектов неопределенной способностью к позитивному преодолению проблемы, так и в случае множества математик проблема совмещения решается не на уровне теорий. Друтими словами, не может так случиться, что, например, интуиционистская математика будет признана ложной, или, напротив, ложной будет признана канторовская теория множеств. По моему мнению, ни одна из этих и других теорий не натолкнется на прямое противоречие, как и не сумеет доказать свою непротиворечивость. В то же время трансфинитная индукция ни при каком обосновании не будет выглядеть столь же убедительной, как индукция в рамках натурального ряда. Теорема Банаха—Тарского о «кусочно-изометрическом» отображении одной сферы на две может считаться *своего рода*

опровергающим примером для аксиомы выбора. Он означает, что эта аксиома никогда не сможет встать в один ряд с аксиомами арифметики. Ясно, таким образом, что математические средства работы с идеальными объектами можно, по крайней мере частично, упорядочить по степени согласия со здравым смыслом, но мы никогда не найдем основания
159
для проведения четкого разграничения этих средств на a priori годные и не годные.

Однако вопрос о применимости тех или иных математических средств к тому идеальному универсуму, для которого они предназначались, всегда решается положительно. Более тонкий вопрос — идет ли речь в разных теориях об одном и том же универсуме. Как нам кажется, проблема континуума дает пример сомнительного совмещения двух универсумов: континуального отрезка и трансфинитного ряда.

3. Как возможен трансцендентальный подход вообще

Наши рассуждения затрагивают не только математику. Теперь мы вынуждены перейти к вопросу о трансцендентальном подходе вообще. По распространенному некогда мнению, подразумеваемая в кантовской «Критике чистого разума» геометрия — это не что иное, как евклидова геометрия. В таком случае развитие неевклидовых геометрий в XIX в. требует корректировки кантовской трансцендентальной эстетики. Однако некоторые исследователи кантовского наследия высказывают и противоположную точку зрения: кантовские «Критики» дают общий подход, в который «вписываются» и неевклидовы геометрии, и любые другие геометрии, если они еще будут изобретены.

Для нас не столь важно, на чьей стороне правда. Если правы первые, то трансцендентальное исследование наполняется исторически зависимыми содержаниями. Если правы вторые, то кантовская трансцендентальная эстетика вообще не определяет никакой в математическом смысле содержательной геометрии, т.е. трансцендентальное исследование не приводит ни к каким выводам о конкретной геометрии. *Это* и есть важнейшая альтернатива: трансцендентальное исследование извлекает на свет либо лишенную содержания форму (пространственность вообще, которая отличает лишь Я от не-Я), либо исторически обусловленное содержание.

В пользу последнего вывода свидетельствует и фактическая позиция одного из последних трансцендентальных философов Г. Гуссерля[4]. Разворачиваемая в «Кризисе европейских наук» историческая реконструкция судьбы начатой Галилеем научной революции не соприкасается непосредственно с феноменологическими исследованиями самого Гуссерля. Эта реконструкция может быть легко вписана и в теорию исследовательских программ И. Лакатоса и даже в рамки методологического анархизма П. Фейерабенда. Это значит, что априорные основания такого рода программ (например, исследовательской программы математического естествознания) являются случайными и привходящими для феноменологических реконструкций. В таком случае их статус отличается от статуса тех
160
общих принципов (если такие имеются), которые удается обнаружить непосредственно в феноменологической процедуре.

Говоря «если такие имеются», я имею в виду следующее. Обратим внимание на форму, в которой ведется трансцендентальное исследование в равной степени Декартом и Гуссерлем. Мы как читатели должны проделывать предлагаемые мыслительные операции и убеждаться в их аподиктичности. По словам Гуссерля, мы должны встать на позицию наивного философа и вести трансцендентальное исследование, *начиная с* декартовского cogito. Однако трансцендентальное переживание, связанное с cogito, совершенно пусто и, будучи выражено словами, приобретает смыслы, которые в нем не содержатся безусловно. Именно поэтому разгорелись споры вокруг формы высказывания «cogito ergo sum». Уже первый шаг приводит к утрате искомой аподиктичности, поскольку «ergo» — слово обыденного (в соответствующее время) латинского языка, переводимое, между прочим, на все современные европейские языки, подразумевает логическую в широком смысле связь между «мыслю» и «существую», а Декарт такую связь не подразумевает. Точно так же обстоит дело и с понятием существования. Это понятие разъясняется далее в тексте «Картезианских медитаций» Гуссерля, и разъяснения отсекают материалистическую и идеалистическую трактовки «существования». Но это значит, что *содержание изначального переживания устанавливается и разъясняется текстами.*

Этот частный вывод указывает на общую ситуацию, имеющую решающее значение для попыток разграничения аподиктически очевидной математики от нетаковой. Разумеется, пять плюс семь навсегда останется двенадцатью, но, переживая его очевидность, мы вкладываем в это переживание исторически обусловленное содержание. Одно дело — понимать это равенство как утверждение о сложении чисел, заданных собственными именами, каждое число — своим. Тогда подразумевается лишь одна идеализация — от предметов к небольшим числам.

Другое дело, если 12 записано в позиционной системе. Тогда данное равенство представляет собой частный факт из бесконечного множества системно организованных фактов, которые выступают как в равной степени истинные суждения о потенциально порождаемых числах. Ситуация в математике в этом смысле мало отличается от ситуации в естественных науках, где обнаруживается «теоретическая нагруженность данных наблюдения». Уже в развитии современного ребенка овладение системой именования чисел в позиционной системе предшествует устойчивому овладению числом как орудием счета.

Теперь мы попытаемся развернуть позитивное описание «пространства возможных математик».

161

4. Идеальное по Э.В. Ильенкову. С головы на ноги

Идеальные предметы математики имеет смысл рассматривать в более широком контексте идеального вообще. Я буду отталкиваться от концепции идеального Э.В. Ильенкова и попытаюсь ее несколько модифицировать.

По мнению Ильенкова, «идеальное есть особая функиия человека как субъекта общественно-трудовой деятельности, совершающейся в формах, созданных предшествующим развитием» [5]. Идеальное ни в каком виде не врождено человеку, а усваивается им в процессе деятельного взаимодействия с предметами. Предметы культуры суть специальные средства, организующие деятельность. В процессе овладения этими средствами человек овладевает идеальными содержаниями, которые были вложены в предметы предшествующими поколениями. Процесс распредмечивания и опредмечивания идеального Ильенков описывает формулой «вещь — дело — слово — дело — вещь». Вначале было дело, организованное формами вещей, и лишь потом идеальные содержания «в голове у субъекта»; последние лишь отражают идеальные содержания, впрессованные в культурные предметы и социально поддерживаемую деятельность с ними. «Человек не может передать другому человеку идеальное как таковое, как чистую форму деятельности» [5J. Только предметы позволяют произвести такую трансляцию благодаря присущей человеку универсальной способности «действовать по форме предметов», снимая с них идеальное, заключенное в этой форме.

Материалистическая интенция подхода Ильенкова очевидна. Однако и здесь обнаруживаются трудности. Где возникает новое идеальное? Оно не может быть впечатано в предмет, пока не появилось в деятельности, а деятельность требует субъективного планирования, значит, идеальное возникает первоначально в голове или ином органе отдельного индивида. Для материалиста такой вывод кажется неизбежным, для материалиста Ильенкова он совершенно неприемлем — именно отталкиваясь от такого «физиологического» материализма, он и формулировал свою концепцию идеального.

Я не буду множить и без того уже значительное число сформулированных в послекантовские времена антиномий, но, по моему мнению, и в данном случае речь идет о границах познаваемого. Коротко говоря, новую мысль невозможно локализовать где-либо, а ее содержание невозможно предсказать ни с какой позиции.

Как возникало естествознание Нового времени? Где впервые зародились идеальные содержания, зафиксированные впоследствии

162

в математических текстах и математической научной традиции? Этот иопрос принадлежит к числу принципиально неразрешимых. Нельзя сказать, что новое естествознание «придумывалось» Галилеем и Декартом. Оно рождалось через них, но никто из них не понимал в полной мере тот процесс, который происходил благодаря каждому и никому в отдельности. Декарт, например, полагал, что все действительные числа суть алгебраические. Если бы это было так и если бы решение геометрической задачи алгебраическими средствами не было часто более сложной задачей, чем прямое геометрическое доказательство, то декартовский проект аналитической геометрии выглядел бы действительно поглощающим всю область геометрии, давал бы *метод* в том смысле, какой придавал этому слову Декарт. Однако именно в плоской геометрии аналитическая ее ветвь представляет собой слабое звено. Благодаря координатному методу несопоставимо более серьезные сдвиги возникли в других областях математики, можно сказать, что вся современная математика началась с координатного метода. Если Декарт черпал энергию из своего заблуждения, то это значит, что сама будущая математика действовала его руками[5]. Это значит, что Декарт «опредметил» в виде текстов (к которым отнесем и устные сообщения) те идеальные содержания, которые сам не понимал. Или, возможно, его последователи сумели вычитать из текстов то, что в них не было «опредмечено» Декартом. И в том, и в другом случае за формулой «дело — вещь — дело» обнаруживается продуктивный процесс наращивания идеального содержания. Можно сказать, что в некоторых случаях в процессе интериоризаиии или распредмечивания общественно определенного содержания это содержание может меняться как в сторону дегенерации, что совершенно не удивительно, так и в сторону продуктивного развития. Другими словами, эти предметы и эта деятельность не содержат идеальное (не являются носителем идеального), а чреваты идеальным. В процессе наращивания идеального они служат поводом для продуктивной деятельности индивидов или, напротив, не обеспечивают даже усвоение подразумеваемого.

В некоторых интересных случаях один и тот же предметный материал (предметный в ильенковском смысле, т.е. не только текстовый, но и пребывающий в социально поддерживаемой деятельности) может приводить к различным, даже в равной степени гениальным, прочтениям. Развиваемая Гильбертом программа финитного обоснования математики считывалась его сотрудниками в духе их руководителя. В то же время К. Гедель, знакомясь с трудами Гильберта, сформировал в корне иное, критическое видение гильбертовской программы и доказал ее неосуществимость.

163

Этот пример указывает на обоснованность того хода развития трансцендентальной философии, которое осуществил Ж.-П. Сартр. Способ самоопределения личности в мире является столь же существенным условием возможности познания, как и кантовские априорные формы чувственности. Критически настроенный Гедель сумел разглядеть в формальных построениях Гильберта возможность самоприменимости арифметических формул и виртуозно ее использовал. Что послужило причиной такого кардинального расхождения познавательных установок[6] двух математиков, имевшего столь серьезные последствия?

Скорее всего расхождение установок сформировалось гораздо ранее того момента, когда Гедель впервые столкнулся с программой Гильберта, но вряд ли разумно объяснять его различием в подборе математического материала при воспитании математика Геделя и математика Гильберта. Хотя нельзя заранее отвергнуть психологическое или психоаналитическое объяснение формирования установок, но они мало что дают нашему анализу, для которого более продуктивным будет подход Сартра, считавшего, что в конечном итоге за всеми причинными рядами остается нередуцируемый свободный выбор «фундаментального проекта» личности. Я, однако, не стану настаивать на свободном выборе установок, а сформулирую следующий, более мягкий тезис: в «причинном» ряду, порождающем установки и другие связки субъекта с объектом, которые можно ассоциировать с априорными формами Канта, действие всегда транспендентно превосходит причину. Напомню, что и Кант, описывая *приобретение* субъектом *априорных* понятий, настаивал, что эмпирически фиксируемые причины являются *случайными* (выражение Канта) по отношению к заранее определенным априорным содержаниям, возникающими после (но не вследствие) этих причин — иначе говорить об априорности возникающих понятий было бы невозможно.

Это значит, что из текста может быть считано содержание, которого в нем никогда не было, так же как с порожденных природными процессами предметов может считываться содержание, которое, кроме Бога, в них некому вложить[7]. Особо подчеркну, что это считывание не содержащегося в тексте содержания может осуществлять не только искушенный исследователь на вершине своей образованности, но и школьник, усваивающий стандартный материал нестандартным образом. Более того, влияние исторических и социальных сдвигов на математические познавательные установки, вероятнее всего, и осуществляется на этих низших уровнях образования.

164

5. Математика и опыт

Математические тексты, институцианализированные системы математического образования и все другие материализованные носители математики как системы идеальных содержаний являются *случайными причинами* для фундаментальных процессов развития математики. Мало того, что многообразные причины фундаментальных подвижек далеко выходят за пределы области математики и даже естествознания в целом, результат действия этих причин трансцендентно их превосходит.

В каждый момент ситуация развивающегося и познающего индивида может быть описана как наложение некоторой совокупности познавательных средств (некоторой натуральной совокупности условий возможности опыта) и являющегося благодаря этим Средствам мира. Однако знание, обретенное в этом соединении, не определяется содержанием явленного и не дедуцируется из условий возможности опыта. В частности, содержанием извлеченного опыта может стать непредсказуемое изменение наивной детской «теории» или развитой математизированной научной теории взрослого, или даже познавательной установки, т.е. натуральных условий возможности дальнейшего опыта.

Каждая ориентированная на математическое познание система познавательных средств имеет, подобно кантовской системе чистых созерцаний и рассудочных понятий, некоторую систему созерцаемых очевидностей. И обратно, всякая система созерцаемых очевидностей может по праву быть названа математикой (более или менее богатой и интересной)[8]. Она может остаться «игрой ума», но может также оказаться приложимой к миру явлений. Для её приложения субъект должен увидеть артикулированное в иных мыслительных структурах явленное как данное идеальное, т.е. совершить операцию, подобную преобразованию некоей «вещи в себе» и явленное, в предмет познания.

Математическое познание является частным случаем познания вообще. К миру, явленному ученому-математику, относятся, кроме прочего, математические тексты и ситуации обучения (например, жесты и возгласы преподавателя). Его познавательная установка формируется как в ситуациях, ориентированных на обучение математике, так и в других ситуациях, в том числе и не имеющих отношения к научному познанию. В частности, познавательные установки включают экзистенциальную компоненту — отношение к миру вообще и способы его присвоения данным субъектом.

Трансцендентальное исследование не способно выявить содержательно богатые системы познавательных средств. Это значит, что никакая конкретная отрасль математики не может обладать абсо-

165

лютной привилегией. Однако, по-видимому, можно *прийти к согласию* по поводу оценки *относительной* надежности тех или иных математических средств.

Столкновение и сопоставление познавательных установок представляет собой конфликт, который не может быть решен средствами математики и науки вообще. Обсуждение познавательных установок призывает рефлексию и поэтому превращается в обсуждение норм деятельности и как таковое может производиться только с позиций общечеловеческого здравого смысла. В здравый смысл можно верить, но его эффективность невозможно обосновать.

То, что педагоги привычно называют математикой, представляет собой средство, которое вместе с иными, в том числе и внеобразо-вательными, средствами призвано сформировать математические познавательные установки. Если у ученика воспитать соответствующие установки не удается, то «математика» превращается для него в *совершенно* бесполезную пустую оболочку.

Прнмечанпя

[1] Утверждение о согласованности вводится как принцип способности суждения, т.е. как регулятив деятельности, в «Критике способности суждения».

[2] Подобная аргументация в настоящее время широко распространена и носит имя трансцендентально прагматической: скептик не может эксплицитно отрицать законы логики, поскольку его аргументация против этих законов оказывается логичной, т.е. имплицитно опирается на отрицаемые законы [4].

[3] В крайней прагматической позиции эта инстанция может, например, выбирать систему норм, в рамках которой проще решаются определенные задачи, хотя столь прагматический подход к морали, пожалуй, характеризует его субъекта как аморального. Эту крайность можно сопоставить с крайне прагматическим выбором математических теорий для их приложений.

[4] Не являясь знатоком текстов Гуссерля, я в данном случае высказываю гипотезу, опираюигуюся на его поздние работы — «Картезианские медитации» и «Кризис европейских наук». Если более эрудированный читатель поможет скорректировать гипотезу, буду благодарен в любом случае.

[5] Понятно, что точный смысл последнему утверждению придать невозможно.

[6] Термин «познавательная установка» был введен А.Г. Барабашевым по отношению к культуре в целом: «Познавательная установка представляет собой совокупность как эксплицированных, так и неэксплицированных принципов познания реальности, выработанных в культуре» [6, с. 463]. Я употребляю термин в более узком смысле, каждый исследователь имеет свой вариант познавательной установки, который, разумеется, коррелирует с познавательной установкой культуры, но и обладает немалой свободой в ее рамках.

[7] В «Критике способности суждения» Кант пишет, что частные эмпирические законы в отношении того, что в них остается неопределенным со стороны всеобщих законов природы (которые даются чистым рассудком), должно рассматривать в таком единстве, как если бы их также дал рассудок (хотя и не наш) для наших познавательных способностей, чтобы сделать возможной систему опыта согласно частным законам природы [7. с. 179.].

[8] А.И. Белоусов преформулировал это так: математика — аналитика гипостазированной идеальности.

166

Список литературы

1. *Декарт Р.* Правила для руководства ума // Соч.: В 2 т. М,, 1989. Т, 1. С. 84.
2. *Гуссерль Э.* Начало геометрии. Введение Жака Деррида. М., 1996. С. 211.
1 *Кант И.* Об одном открытии, после которого всякая новая критика чистого разума становится излишней ввиду наличия прежней // Кантовский сборник. Вып. 17. Калининград, 1993. С. 139-140.
4. *Хабермас Ю.* Моральное сознание и коммуникативное действие. СПб., 2000.
5. *Ильенков Э.В.* Идеальное. Философская энциклопедия. М., 1962.
6 . *Барабашев А. Г.* О прогнозировании развития математики посредством анализа формальных структур познавательных установок // Стили в математике / Под ред. А.Г. Барабашева. СПб., 1999.
7. *Кант И.* Соч.: В 6 т. М, 1966. Т. 5. *С.* 179.

КОММЕНТАРИИ

А. Г. Барабашев

Многообразное и сложное содержание данной статьи, как мне представляется, не позволяет точно выделить основную линию ее сюжета. Автор как бы размышляет вместе с читателем о содержании и эволюции априоризма, поднимая ряд принципиальных вопросов и пытаясь наметить такие решения этих вопросов, которые предлагаются философами, «созвучными» Канту в своих построениях.

И все-таки позволю себе «додумать» одну из линий сюжета, возникшую во второй половине статьи и, по моему мнению, вполне способную превратиться в новую концепцию, которую условно можно было бы назвать «трансперсональным априоризмом». Поскольку дальнейшее описание является вторичным продуктом, реконструкцией некоторой части содержания статьи, я хотел бы все достоинства данной конструкции отнести на счет А.Н. Кричевца, а недостатки и возможные противоречия оправдать ущербностью моего понимания замыслов автора.

Согласно А.Н. Кричевцу, различные субъекты могут быть частичными трансцендентальными субъектами, т.е. они могут обладать «ясным и внимательным умом», способным устанавливать математические истины в процессе априорного созерцания пространства и времени как конструирования чистых (математических) понятий и суждений. Отличие друг от друга частичных трансцендентальных субъектов обусловлено их индивидуальной историей: опытом взаимодействия с миром явлений, полученным образованием, кругом профессионального общения и усвоения знаний (в том числе и в виде текстов). Так возникает особая (персональная) конфигурация, актуализирующая возможное априорное содержание. Из-за различия частичных трансцендентальных субъектов, однако, встает проблема их гармонизации, установления полного (трансперсонального) априорного субъекта. А.Н. Кричевец склоняется к мысли, что такая гармонизация не может быть задана свыше. Более того, в момент создания частичным трансцендентальным субъектом нового математического знания невозможно предсказать, как оно окажется «вписанным» в общее направление развития математики, т.е. окажется принадлежащим трансперсональному априорному субъекту. Требуется найти механизм согласования частичных субъектов, их «включения» в «полного» субъекта. А.Н. Кричевец, насколько я понимаю, предлагаег такой механизм описывать как рефлексивный механизм столкновения и сопоставления различных индивидуальных познавательных установок. Именно в силу рефлексивности этого механизма невозможно предсказать, что войдет в состав математики, а что окажется отброшенным.

Предложенная конструкция позволяет, как мне кажется, дать ответы на некоторые вопросы, важные для любой концепции философии математики.

1. В каком смысле математические истины непоколебимы? — Математические истины непоколебимы как коллективные уверенности, за которыми стоят индивидуальные априорные созерцания как чистое

конструирование понятий и суждений. Эти коллективные уверенности, с одной стороны, неопровержимы, поскольку складываются из индивидуальных «жестких» блоков, а с другой стороны, эволюционируют по форме выражения вследствие процесса рефлексивного согласования этих блоков.

2. Как происходит согласование мира явлений (эмпирических созерцаний) и «чистого» (априорного) созерцания? — Такое согласование происходит как исторический процесс рефлексивного взаимодействия частичных трансцендентальных субъектов, обладающих своим индивидуальным опытом взаимодействия с миром и (вследствие этого) своей конфигурацией априорного созерцания. Но тогда математизация не есть абсолютное (вечное, неизменное с момента установления) соединение априорного и апостериорного знания, не накладывание первого на второе, а относительное (исторически эволюционирующее) приспособление субъекта к миру.

Г.Б. Гутнер

В статье А.Н. Кричевца предъявлено три весьма интересных философских сюжета. Хотелось бы назвать их концепциями, но чрезвычайная краткость изложения и его, очевидно, эскизный характер заставляет использовать литературоведческую терминологию. Сюжеты эти таковы.

Во-первых, автор описывает взаимодействие множества познавательных установок, каждая из которых реализуется неким частным субъектом. Частные субъекты ведут спор, арбитром в котором ныступает «мета-субъект», принимающий время от времени сторону одного из частных субъектов и отождествляющий себя с ним. Во-вторых, автор обращает внимание на тот момент математической деятельности, который связан с извлечением идеальных содержаний из материальных носителей: текстов, речей и пр. Это извлечение оказывается весьма нетривиальным актом, поскольку интерпретатор находит то, что совершенно не подразумевалось автором. Здесь было бы уместно заметить, что интерпретация носит творческий характер, однако А.Н. Кричевец не спешит с таким выводом. В-третьих, наконец, в статье звучит гегелевский мотив, представляющий спонтанную самореализацию идеальных содержаний в материальных носителях. Математика последовательно разворачивает свои «гештальты» (этот термин, используемый в «Феноменологии духа», кажется мне вполне уместным), «действуя руками» отдельных математиков.

К сожалению, остается не вполне проясненным отношение каждого из указанных сюжетов к двум другим. С одной стороны, второй и третий сюжеты, по-видимому, вовсе не различены автором, хотя они, на мой взгляд, не тождественны. Можно, конечно, сказать, что интерпретатор находит в тексте то содержание, которое вложено в него в ходе последовательного самополагания идеальных содержаний (т.е. абсолютным духом?). Тогда становится понятным, почему интерпретация текста не рассматривается как творческий акт. Последний подразумевает создание новых идеальных содержаний, в принципе не предопределенных никакими предшествующими обстоятельствами. В данном же случае извлекаемое содержание как раз предопределено, только не замыслом автора текста, а некоей высшей целесообразностью. С другой стороны, не очень ясна связь между первым и третьим сюжетом. Являются ли возникающий в начале статьи «мета-субъект» и «математика, действующая руками Декарта», одним и тем же лицом? Вроде бы да, однако роль у них несколько разная. В первом сюжете речь идет о равноправном взаимодействии многих частных субъектов, а в третьем — о последовательном полагании снимающих друг друга гешгальтов.

Есть еще один вопрос, возникающий в связи со всеми тремя сюжетами. Не является ли как «мета-субъект», так и неявно предполагаемый абсолютный субъект идеальных содержаний «лишней сущностью»? Не можем ли мы обойтись представлением о множестве частных субъектов, спорящих между собой и творчески интерпретирующих друг друга? Здесь, впрочем, опять не хватает важного

168

169

различения между упомянутым частным субъектом и личностью математика. Последняя может показаться чем-то уж совсем не значимым в игре субъектов, но ведь именно отдельный человек, а не трансцендентальный субъект занимается интерпретацией текстов.

В.Я. Перминов

Я хотел бы поддержать предложенный здесь анализ априорного знания в том смысле, что он проводится в рамках субъектно-объектного отношения, т.е. в тех понятиях, в которых он только и может быть проведен. Однако мне кажется, что рассуждения автора нагружены рядом акцентов и предпосылок, затемняющих суть дела.

Я согласен с тем утверждением, что нормативный или праксеологический подход оставляет зазор между между априорной теорией и миром опыта. Это действительно так, и здесь мы имеем важнейшее различие между кантовской и деятельностной концепцией априорного знания. Если, по Канту, априорное знание должно быть идеально реализованным в мире явлений, то с деятельностной точки зрения, в принципе, допустимы эмпирические ситуации, не охватываемые возможностями категориального синтеза. Здесь мы понимаем опыт объективно, как самостоятельно противостоящий субъекту и, таким образом, уже не можем утверждать, что разум предписывает законы природе. Разум формулирует здесь лишь абсолютные рамки знания, совместимые с его практическим назначением. Это, однако, не значит, что арифметика может иметь контрпримеры. В действительности арифметика применяется, только к тому, к чему она может применяться и ситуация типа «1 капля + 1 капля = 1 большая капля» не имеет никакого отношения к арифметической теории, поскольку эта эмпирически фиксируемая ситуация заведомо не удовлетворяет требованиям идеальной предметности, лежащим в основе арифметики. Подобного рода ситуации могут бытъ только эвристическими контрпримерами, указывающими на возможность иной арифметики как непротиворечивой формальной структуры.

В этом смысле не очень понятна озабоченность автора по поводу источников иной (неаприорной) математики. Мы должны с самого начала принять, что современная математика содержит в себе как структуры априорные, покоящиеся на аподиктически очевидных принципах, так и структуры апостериорные, появившиеся на основе опыта или логического конструирования. В настоящее время мы не можем, вслед за Кантом, утверждать, что вся математика априорна, а можем лишь настаивать на том, что математическое знание содержит в себе априорное ядро, коррелятивное универсальной форме мышления. Наличие «иной математики» и «разнообра-

170

зия математик» с этой точки зрения совершенно естественно — оно вытекает из связи математического мышления с опытом и не требует для своего объяснения никаких экстравагантных предпосылок типа экзистенциалистского тезиса о свободе творческой личности.

Если мы принимаем факт существование априорной математики, имеющей особое отношение к универсальной форме мышления, то в таком случае тезис «никакая часть математики не обладает привилегиями» никак не может быть принят в качестве истинного. Любая программа обоснования математики основана на поисках части математики, имеющей особую надежность своих доказательств и абсолютную гарантию от противоречий. Нетрудно понять, что гго и есть априорная часть математики. Современная теория математического априоризма не что иное, как выявление привилегированной сферы математического мышления, обладающей абсолютной надежностью. Такая сфера математических рассуждений, несомненно, существует.

Представляется также сомнительной возможность использования концепции Э.В. Ильенкова для обоснования математики. Мы должны строго различать онтологические и теоретические идеализации. По отношению к последним, конечно, верно, что они подготовлены поколениями ученых в диалектике теории и опыта. Исходные математические идеализации как относящиеся к форме мышления не могут быть обоснованы таким образом. Конечно, существует определенная логика становления понятий прстранства, премени, числа и т.п. в сознании человека, которая может быть выявлена и строго зафиксирована, но это не значит, что она может быть объяснена в соответствии со схемой становления обычных (теоретических) идеализации. С деятельностной точки зрения система первичных математических идеализации связана с универсальной формой мышления и может быть обоснована только в плане телеологического рассмотрения процесса познания в целом.

Автор, как мне кажется, находится в некотором раздвоении между психологией и логикой. С одной стороны, он тяготеет к утверждению априорного статуса математики, объясняющего факт устойчивости исходных математических структур, а с другой стороны, придает существенное значение фактам типа того, что ра-пемство 5 + 7 = 12 в разные эпохи связано с различной системой переживаний. Я думаю, что эта дилемма однозначно разрешается в пользу логики и абсолютности, поскольку изменение личностного носприягия математических равенств никак не колеблет нашего представления о них как абсолютно истинных. Но это значит, что они покоятся не на психологических и эмпирических образах, а на представлениях совсем иного уровня.

171

ОТВЕТ АВТОРА

Благодаря комментариям я несколько по-новому увидел содержание статьи, поэтому решил дать короткое резюме (признаюсь, с переосмыслением некоторых тем), в котором вопросы, поднятые комментаторами, будут акцентированы. В статье я попытался дать систему ориентиров для понятия «трансцендентальный субъект». По моему мнению, трансцендентальная реконструкция познания и познающего субъекта всегда приводит к описанию «частичного субъекта», осуществляющего свои познающие действия в мире, который уже устроен вполне определенным образом (о том, как мир устроен, «частичный субъект» не знает, а знает это проводящий трансцендентальную реконструкцию философ). «Частичный субъект» видит свой аспект мира и, в частности, может считать аподиктически истинными те или иные свои представления.

Например, реконструкция субъекта познания у Канта задает субъекта нововременного математического естествознания (если не учитывать «дыхание» кантовских идей, которое только и дает им возможность переживать классическую, не классическую, а также и постнеклассическую науку). Галилей, Декарт и их современники *еще* не могли в полной мере соответствовать этой реконструкции, они создавали для нее материал. Кантовская реконструкция дает ориентиры, в которых деятели науки XVII в. могут быть поняты — в телеологической перспективе. Современники Канта, наверное, *уже не* соответствовали его реконструкции, поскольку идеи, которые они продвигали (или которые их продвигали), были в конце концов разрушительны для классического математического естествознания,

Частичность трансцендентального субъекта ньютоновского естествознания очевидна. Кто выступает здесь в роли метасубъекта?

Кант, разумеется, хотя и не только он. Усилиями его и следующих поколений преодолевалось представление о мире, описываемом одной математической формулой. Что именно создавалось за разноголосицей нашего времени, не так просто понять.

Мы могли бы взять на себя задачу описания трансцендентального субъекта познания нашего времени. Его основное отличие от кантовского состояло бы в том, что представления и теории не являются для него окончательными онтологиями. Тем не менее сквозь его исследования по-прежнему проступает некоторое «на самом деле», некоторый реальный мир, который, правда, должен мыслиться теперь в какой-то иной модальности, чем мир ньютонианцев, — в какой именно, должен сообщить нам новый Кант.

172

Если бы это удалось, частичность нового субъекта стала бы также очевидна, а его реконструкторы-создатели могли бы быть поняты со следующей позиции, и т.д.

Мое описание можно было бы считать реконструкцией вне-временного трансцендентального развивающегося субъекта, но надо иметь в виду, что в нем незыблемым предполагается некоторое структурное основание, как мне сейчас представляется, коммуникативного плана. Оно является условием возможности серьезного обсуждения проблемы познания. Не подлежит ли и эта инстанция деконструкции (в самом реальном смысле) в ближайшем будущем, невозможно сказать.

В свете этого резюме я попытаюсь ответить на комментарии.

Интерпретация А. Г. Барабашева довольно точна. По п. 1 следует отметить, что проблема согласования конкурирующих аподиктичностей — это проблема нашего времени. Будущее может поставить перед сообществом иные проблемы. Не представляется аподиктически очевидной невозможность изменения в будущем даже и модальности переживания, сопровождающего истины типа 2х2 = 4, и я бы не решился утверждать, что такое изменение может быть связано только с деградацией (это ответ В.Я. Перминову, далее чуть подробнее). Возможно, таким образом проблема аподиктичности будет вообще снята.

По п. 2 — я бы не говорил о приспособлении субъекта к миру, скорее, о конструировании мира.

Г.Б. Гутнеру я попытался ответить самим резюме. Осталось только одно замечание. Наверное, можно было бы исключить, как предлагает Г. Б. Гутаер, лишних «мета-субъекта» и «абсолютного субъекта идеальных сущностей», если бы в коммуникации эмпирических субъектов «хорошие гештальты» появлялись бы как догадки отдельного эмпирического субъекта. Но гештальты появляются лишь в результате труда нескольких поколений. Таким образом, в коммуникации странным образом передается проект исследования, а не его результат, причем этот проект выглядит скорее как общественная одержимость, а не как четкая исследовательская программа. «Мета-субъект» указывает на эту инстанцию эмпирического субъекта, а «абсолютный субъект идеальных сущностей» на будущий «гештальт» или альтернативные «гештальты».

В комментарии на статью В.Я. Перминова я писал, что провести границу между аподиктически очевидными математическими истинами и не являющимися таковыми невозможно. Может быть, не без нашего участия изменится само переживание аподиктической очевидности, как изменился статус ньютоновской очевидности пространства и времени. Мы по-прежнему говорим об одновременности событий, но внутренний критик и сторож всегда напомнит

173

об ограниченности понятия одновременности, когда расстояние между событиями станет достаточно велико.

Точно так же мы всегда будем знать, что 2х2=4, но как мы это будем знать, как будет переживаться очевидность, может со временем и измениться.

К. Ф. Самохвалов

«НОВЫЙ ПОДХОД» ЕРШОВА

И «ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД» КАНТА

Всего менее века назад Кант почитался как самая важная фигура в истории эпистемологии. Однако согласно типичным *современным* прочтениям Канта, его эпистемологические взгляды либо ошибочны, либо безнадежно путаны и темны. Моя цель — как можно проще изложить упомянутые типичные современные прочтения и показать, что из своеобразного подхода Ершова к философии математики можно извлечь еще одно прочтение Канта, при котором его эпистемология не выглядит ни ошибочной, ни темной.

1. Эпистемологический замысел Канта

Рассмотрим следующие три высказывания:

(1) Если Петр выше Ивана, то неверно, что Петр не выше Ивана.

(2) Если Петр выше Ивана, то неверно, что Иван выше Петра.

(3) Петр выше Ивана.

Чтобы убедиться в истинности высказывания (1), не нужно знать ничего, кроме его грамматической (логической) формы. Не нужно знать ни того, кто такой Петр, ни того, кто такой Иван, ни того, что такое «выше». Нужно знать только смысл союза «если..., то», смысл частицы «не» («неверно, что») и грамматические категории слов: «Петр» (индивидная константа), «Иван» (индивидная константа), «выше» (двухместный предикат). Мы могли бы вместо (1) записать: «Если *aPb,* то неверно, что не *aPb»* — и все же не утратить убеждения, что наша запись есть запись некоей истины. Высказывания, подобные (1), истинность (ложность) которых определяется исключительно их грамматикой, называются *логически истинными (логически ложными)* или просто *логическими* высказываниями.

Чтобы установить истинность высказывания (2), уже недостаточно знать только его логическую форму. Нужно дополнительно знать смысл слова «выше», ибо если, например, мы заменим в (2)

174

слово «выше» на слово «уважает», то полученное в результате такой ммены предложение «Если Петр уважает Ивана, то неверно, что Иван уважает Петра» не столь убедительно, как предложение (1). Поэтому высказывания, подобные (2), т.е. такие, истинность (ложность) которых определяется исключительно анализом их смысла, называются аналитически истинными или *аналитически ложными* или просто *ансигитическими* высказываниями. Аналитически истинное (ложное) высказывание нельзя отрицать (утверждать), не исказив при этом его смысл.

Логические высказывания можно, очевидно, считать частной разновидностью аналитических. Просто для установтения истинности или ложности логического высказывания требуется менее полный анализ его смысла (анализ всего лишь грамматической формы), нежели дня аналитических высказываний общего вида.

Предложение (3) носит совершенно другой характер, чем первые два. Чтобы установить, истинно оно или ложно, нужно не только знать его смысл, но нужно также знать кое-что дополнительно к этому. Дополнительно нужно конкретно узнать, кто такой Петр, кто такой Иван, и нужно фактически провести их сравнение по росту. Высказывания, подобные (3), т.е. такие, истинность (или ложность) которых зависит не только от их смысла, но и от дополнительной информации, *не важно, какой и как полученной,* называются *синтетическими.* Синтетически истинное (ложное) высказывание можно отрицать (утверждать), не влияя при этом на его смысл.

Утверждение (3) — частный случай синтетического высказывания, когда дополнительная информация основывается на конкретном *наблюдении.*

Помимо классификации высказываний на аналитические и синтетические существует еше классификация их на априорные и апостериорные. *Априорным* называют всякое высказывание, истинность (ложность) которого может быть установлена — при условии, что уже известен его смысл, — без какого-либо обращения к *опыту. Апостериорным* называют всякое высказывание, которое не является априорным. Очевидно, высказывания (1) и (2) *априорны.* Априорны вообще все логические и аналитические суждения. С другой стороны, высказывание (3) *апостериорно.* Но является ли ипостериорным *любое* синтетическое высказывание? Вот вопрос, ответ на который определил главную особенность кантовской теории познания.

Если мы соединим разграничение аналитических и синтетических суждений с разграничением их на априорные и апостериорные, то получим следующую систему видов высказываний:

(i) аналитические высказывания *a priori;*
(ii) аналитические высказывания *a posteriori*
175
(iii) синтетические высказывания *a priori;*
(iv) синтетические высказывания *a posteriori.*

Примерами первого вида высказываний являются высказывания (1) и (2), а примером четвертого вида — высказывание (3). Ясно также, что второй случай (ii) заранее исключается. Ибо, как мы отметили выше, все аначитические суждения являются априорными высказываниями, поэтому дискуссионной остается третья возможность — высказывания вида (iii).

Около двухтысячелетий в научном сообществе почти абсолютно господствовали взгляды Аристотеля, что наложило характерную печать на ход исследования указанного вопроса [I]. По учению Аристотеля, существуют два источника познания — ощущения (чувственность) и рассудок. Из ощущений возникает опыт, из рассудка — логические и аналитические истины. Объекты чувственности — случайные феномены, объекты рассудка — необходимые истины. Эта доктрина о двух источниках познания говорит о том, что не только все аналитические суждения являются априорными, но и все априорные суждения являются аналитическими высказываниями. Согласно этому учению, синтетические высказывания могут быть лишь апостериорными, следовательно, заранее исключается возможность обнаружить суждение вида (iii).

Интеллектуальная смелость Канта состояла как раз в том, что он рискнул в нарушение многовековой традиции поставить и подвергнуть новому основательному исследованию вопрос о возможности суждений вида (iii), а именно: Кант в «Критике чистого разума» [2] и «Пролегоменах» [3] осуществил попытку обосновать взгляд, что в ходе научного познания встречаются синтетические суждения а *priori.*

Приступая к такой попытке, Кант, в принципе, мог бы пойти более или менее проторенной дорогой. Он мог бы утверждать, скорее следуя Платону, чем Аристотелю, что разум обладает специальной способностью — *интуицией* — непосредственно усматривать (при условии, что удалось должным образом «повернуть глаза души») истинность некоторых синтетических высказываний. Да Кант, собственно, так и делает, когда развивает свои доктрины о пространстве и времени (о геометрии и арифметике), называя, правда, при этом интуицию *чистым наглядным представлением (reine Anschauung).* На этот же путь, кстати говоря, ступают и многие математики, когда считают интуитивно истинными некоторые свои общие аксиомы или теоремы.

Однако Кант не считал этот путь обнаружения синтетических суждений *a priori* единственным или даже просто основным за пределами математики (геометрии и арифметики). Несомненная оригинальность Канта в том, что он предложил находить априорные
176
синтетические суждения в более широкой области, чем математика, исследуя *условия возможности опыта.* Не сам опыт, а именно условия возможности опыта. Желая подчеркнуть новизну такого метода, Кант придумал ему эпитет *трансцендентальный.*

2. Современные прочтения Канта

Что греха таить, терминология Канта не совсем точна и не совсем последовательна. Например, даже ключевое для себя слово «опыт» он в разных местах понимает по-разному, поэтому любая попытка дать однозначное и связное изложение его взглядов неизбежно приводит к более или менее явным натяжкам. Речь может идти лишь о том, чтобы эти натяжки субъективно ощущались находящимися еще в пределах здравого смысла. Все реконструкции доктрин Канта желательно воспринимать с учетом этого обстоятельства.

Современные эпистемологи, обсуждая кантовские разграничения *аналитическое /синтетическое, априорное /апостериорное,* делится на два лагеря: на тех, кто при этом считает допустимым не ссылаться на *трансцендентальный* метод, и на тех, кто так не считает. Первый лагерь весьма типичен для нынешнего философского климата, второй — нет. Как пишет Патриция Китчер, «среди современных эпистемологов вопросы относительно "знания *a priori*" и относительно "аналитического высказывания" без конца дебатируются, но... исследование трансцендентального знания редко всплывает на поверхность» [4, p. 310]. Легко понять, почему именно так обстоит дело, если ясно представить себе, каково ныне наиболее устоявшееся представление о точном смысле разграничений *аналитическое /синтетическое* и *априорное /апостериорное.*

С современной точки зрения [5, гл. 3], любая научная теория h — это гипотетическое утверждение вида

$$\forall x\ (RF(x) \cap S_h(x) \Rightarrow W_h(x)), \qquad (2.1)$$

где квантор $\forall$относится к области всех возможных объектов внимания, а предикаты RF, S_h, W_h имеют следующие смыслы:

RF(*x*) — «*x* есть фрагмент реальной действительности»;

$S_h(x)$ — *«x* есть возможный предмет теории h» или *«x* является одним из тех объектов внимания, которые мы, высказывая h, объявляем интересными»;

$W_h(x)$ — *«x* есть возможный мир теории h» или «*x* является одним из тех объектов внимания, к которым мы, высказывая h, рекомендуем относиться как к реальным фрагментам действительности».

177

Предполагается, что предикаты S_h и W_h задаются автором теории, тогда как частичный (на классе всех возможных объектов внимания) предикат RF принципиально не подлежит авторскому определению: он задан самой действительностью и никогда не бывает полностью известным. Выбор S_h мотивируется желаемой областью исследования, а выбор W_h — характером высказываемого гипотетического утверждения.

Говорят, что *объект* (внимания) *a согласуется с теорией* h, если

$$RF(a) \cap S_h(a) \Rightarrow W_h(a). \qquad (2.2)$$

В противном случае говорят, что *объект a опровергает теорию* h или является *фальсификатором для* h. Таким образом, теория h, сформулированная как гипотетическое утверждение (2.1), есть следующее предположение о реальности: *подлинная картина мира такова, что для любого объекта внимания выполняется условие* (2.2).

Принимая такую теорию, мы тем самым считаем, что любые объекты согласуются с теорией h (не являются фальсификаторами для h). Это предположение заведомо не опровергаемо, если объем предиката W_h включает объем предиката S_h. Если же объем предиката W_h пуст, а объем предиката S_h — нет, то теория h сформулирована абсурдным образом: она либо заведомо опровергается (в случае непустого пересечения объемов предикатов RF и S_h), либо бессодержательна (если объемы предикатов RF и S_h не пересекаются).

Для произвольных двух теорий h1 и h2 мы пишем h1≥ h2 и говорим, что h1 *сильнее,* или *более рискованна, чем* h2, если и только если объем предиката S_{h1} содержит в себе объем предиката S_{h2}, а объем предиката W_{h1} содержится в объеме предиката W_{h2}. Если h1≥ h2, мы говорим также, что h2 *слабее,* или *менее раскованна, чем* h1. Такое словоупотребление оправдано в том смысле, что если h1≥h2, то заведомо всякий фальсификатор для h2 является фальсификатором и для h1. Теории h1 и h2 мы называем:

— *равносильными,* или *равнорискованными,* если и только если hl≥h2 и h2≥hl;

— *сравнимыми,* если и только если h1 ≥ h2 или h2 ≥ h1;

— *несравнимыми,* если не h1≥ h2 и не h2≥ h1.

Мы пишем h1 = h2, если и только если теории h1 и h2 равносильны.

Согласно (2.1), теория h определена, если заданы предикаты S_h и W_h. Так вот, стандартный подход к научным теориям основан на задании этих предикатов некоторым *специальным* образом. А именно: объемы указанных предикатов задаются как классы *интерпретаций* предварительно выбранного первопорядкового (с равенством) языка L сигнатуры Ω. Понятие «интерпретация языка» отличается

178

здесь от понятия «модель языка» и возникает при обсуждении вопроса: как осуществляется классификация моделей языка на фрагменты реальной действительности («реальные фрагменты») и на фрагменты нереальной действительности («нереальные фрагменты»)?

Пусть Ц — язык сигнатуры (P, Q), где P, Q — символы одноместных предикатов, и пусть {К}, {П}, {К, П} — множества, состоящие соответственно из Клинтона, Пегаса, Клинтона и Пегаса; { } — пустое множество. Рассмотрим несколько моделей языка L_1:

M_1 = ({К,П};{},{}); M_1 = ({К,П};{},{К});
M_3 = ({К,П};{},{П}); M_4 = ({К,П};{},{К,П});
M_5 = ({К,П};{К},{}); M_6 = ({К,П};{К},{К});
M_7 = ({К,П};{К},{П}); M_8= ({К,П};{К},{К,П});
M_9 = ({К,П};{П},{}); M_{10} = ({К,П};{П},{К});
M_{11} = ({К,П};{П},{П}); M_{12}= ({К,П};{П},{К,П});
M_{13} = ({К,П};{К,П},{}); $M_{|4}$ = ({К,П};{К,П},{К});
M_{15}= ({К,П};{К,П},{П}); M_{16} = ({К,П};{К,П},{К,П}).

(Фактически здесь перечислены все модели указанной сигнатуры на множестве {К, П}.) В определенном смысле каждая из них является фрагментом действительности уже потому, что она — *объект* внимания. Однако вопрос о том, какие из этих моделей относятся к *реальным* фрагментам действительности, а какие — к *нереальным,* ставит нас в тупик. Это происходит потому, что деление моделей на реальные и нереальные фрагменты зависит от выбора истолкования языка L_1. Вот несколько иллюстраций этой зависимости.

Истолкование I_1 языка L_1. Предикат P трактуется как свойство «быть человеком», а предикат Q — «быть мифическим существом». Тогда модель M_7 есть реальный фрагмент, а остальные пятнадцать моделей суть нереальные фрагменты.

Истолкование I_2 языка L_1. Предикат P трактуется как свойство «быть четным числом», а предикат Q — «быть нечетным числом». Тогда только модель M, является реальным фрагментом.

Истолкование I_3 *языка* L_1. Предикат P трактуется как свойство «быть черноглазым человеком», а предикат Q — «быть мифическим существом». Тогда уже не модель M_7, а модель M_3, есть реальный фрагмент (напомню, что Клинтон голубоглаз).

Истолкование I_4 языка L_1. Предикат P трактуется как свойство «быть одушевленным», а предикат Q — «быть глокой куздрой». Тогда модели M_5—M_8 и модели M_{13}—M_{16} суть реальные фрагменты, в то время как остальные модели — нереальные фрагменты. При этом предполагается, конечно, что полная неясность свойства «быть глокой куздрой» истолковывается как утверждение: глокой куздрой является все что угодно.

179

Если уточнить свойство «быть одушевленным», исключив ш числа одушевленных любые мифические существа, то модели M_{13} — M_{16} превратятся в нереальные фрагменты. Кроме того, дополнительно по-разному конкретизируя первоначально совершенно неясное понятие «глокая куздра», можно отнести к нереальным фрагментам одну, две, три или все из оставшихся четырех моделей M_5—M_8.

Приведенные примеры подсказывают, что и в общем случае любое истолкование языка L позволяет однозначно задать дихотомию требуемого вида на классе MΩ всех моделей этого языка. С другой стороны, сама возможность любой такой дихотомии предполагает какое-то истолкование языка. Иными словами, я хочу сказать следующее.

(а) Если I — какое-то истолкование языка L (сигнатуры Ω), а M — произвольная модель этого языка, то (частичный на классе всех объектов внимания) предикат RF определен на объекте (I, M) и не определен на объекте M.

(б) Истолкованию I однозначно соответствует предикат RF_1, на MΩ (разбиение класса MΩ на две части) такой, что

$$(\forall M \in M\Omega)\ (RF_1(M) \Leftrightarrow RF((I, M))). \quad (2.3)$$

Условимся объем предиката RF_1 обозначать через $|\ RF_1\ |$ и называть *интерпретацией* языка L пару (I, M), где I — истолкование языка L, M — его модель. Согласно (а), фраза: «Модель M — реальный (нереальный) фрагмент» — не является, если судить строго, правильным оборотом речи. Иначе говоря, в качестве реальных и нереальных фрагментов следует рассматривать именно интерпретации, а не просто модели языка L. Причем если мы знаем, что некоторая интерпретация *a, a* = (I, M), есть реальный (нереальный) фрагмент, т.е. знаем, что RF((I, M)) (не RF((I, M))), то интерпретацию *a* будем называть *позитивным (негативным) фактом a.* Установить позитивный (негативный) факт *a* — значит узнать, что RF(*a*) (не RF(*a*)). Такого рода установление называется *опытом*[1]. Очевидно, всякий такой опыт *ob* может быть *представлен* парой (RF, *a): ob* = (RF, *a).*

Согласно (б), каждое истолкование I языка L определяет разбиение класса MΩ на две части: класс моделей $|\ RF_1\ |$ и класс моделей MΩ \ $|\ RF_1\ |$. Однако из (б) и даже из (б) совместно с (а) не следует, что знать истолкование I значит знать и указанное разбиение. Ввиду (2.3), чтобы определить, принадлежит ли модель M классу $|\ RF_1\ |$, требуется *не только знать истолкование* I, но и *установить* позитивный или негативный факт *a* = (I, M). В приведенном выше примере, зная истолкование I_3 языка L_1, мы вправе отнести модель M_3 к реальным фрагментам только тогда, когда установим

180

факт, что Клинтон не черноглаз. Здесь прослеживается аналогия с тем, что знать программу вычисления числа — это еще не значит знать само число. Отсюда, между прочим, следует, что истолкование I языка L не отождествляется с разбиением класса моделей MΩ этого языка на две части (т.е. с предикатом RF_1) и остается в контексте обсуждаемых вопросов *исходным (неопределяемым)* понятием.

Вернемся к обсуждению стандартного подхода к научным теориям. Процедуру задания предикатов S_h и W_h можно теперь поэтапно описать следующим образом.

Этап 1. Выбирается язык L_h (сигнатура Q_h) и истолкование I_h этого языка.

Этап 2. Выбирается аксиоматическая система S_h в языке L_h так, чтобы $S_h \neq P(L_h)$, где $P(L_h)$ — множество всех предложений языка L_h. Объемом | S_h | предиката S_h объявляется класс интерпретаций, определяемый условием

$$|S_h| = \{(I_h, M) \mid M \in Mod(S_h)\},$$

где Mod(A) обозначает класс всех моделей произвольного множества A предложений языка L_h.

Этап 3. Выбирается аксиоматическая система W_h в языке L_h так, чтобы $S_h \subseteq W_h \neq P(L_h)$. Объемом | W_h| предиката W_h объявляется класс интерпретаций, определяемый условием

$$|W_h|=\{(I_h, M) \mid M \in Mod(W_h)\}.$$

Таким образом, научная теория h однозначно задается четверкой $(\Omega_h, I_h, S_h, W_h)$ Представление

$$H=(\Omega_h, I_h, S_h, W_h) \quad (2.4)$$

называется *стандартным представлением* или *стандартной логической реконструкцией (идеализацией),* тройка (Ω_h, S_h , W_h *) — формализмом,* а истолкование I_h — *содержательным базисом* научной теории h[2].

Как я уже отметил выше, цель задания научной теории — сформулировать конкретное предположение вида (2.1). Стандартное представление (2.4) обеспечивает достижение этой цели при дополнительном соглашении относительно того, как от четверки $(\Omega_h, I_h, S_h, W_h)$ перейти к процедуре проверки условия (2.2) для любого объекта внимания *a*. Собственно говоря, такая процедура — это смысл предположения (2.1), а, следовательно, и *смысл теории* h. В качестве процедуры проверки условия (2.2) предлагается следующая последовательность шагов[3].

Шаг 1. Рассматривается (произвольный) объект внимания *a*. Располагая Ω_h и I_h, выясняем, является ли *a* интерпретацией языка

181

сигнатуры Ω_h при истолковании I_h. Если нет, то объявляем, что объект *a* не относится к теории h, не опровергает, следовательно, теорию h, и мы готовы рассматривать какой-то другой объект внимания a_1. Если да, то устанавливаем, какая именно модель M из $M\Omega_h$ является вторым членом интерпретации *a,* и переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Располагая S_h, выясняем, принадлежит ли $a = (I_h, M)$ классу $|S_h|$, т.е. принадлежит ли модель M классу $Mod(S_h)$. Если нет, то объявляем, что объект *a* не относится к предметам теории h, не опровергает, следовательно, теорию h, и мы готовы рассматривать другой объект внимания. Если да, то объявляем, что объект *a* относится к предметам теории h, и переходим к следующему шагу.

Шаг 3. Устанавливаем, является ли предмет теории $a = (I_h, M)$ реальным фрагментом, т.е. имеет ли место соотношение RF ((I_h, M}). Если не RF ((l_h, M)), то объявляем *a* несущественным предметом теории ввиду его нереальности и, если требуется, рассматриваем другой объект внимания. Если да, то объявляем *a* фактом, существенным для теории h, затем переходим к завершающему шагу 4.

Шаг 4. Располагая W_h, выясняем, принадлежит ли существенный для теории факт *a* классу $|W_h|$, т.е. принадлежит ли модель M из $(I_h, M) = a$ классу $Mod(W_h)$. Если да, то объявляем, что факт *a* согласуется с теорией h. Если нет, то объявляем, что факт *a* опровергает теорию h.

Предположение вида (2.1) тривиально в двух крайних (вырожденных) случаях: когда оно заведомо согласуется с любым фактом и когда заведомо существует факт, опровергающий это предположение. Следует заметить, что изложенное соглашение о процедуре проверки теории h (совместно с условием $W_h \neq P(L_h)$ и еще одним не отмеченным нами условием на связь между S_h и W_h [4]) исключают из числа возможных второй случай, оставляя (когда $S_h = W_h$) допустимым первый. Таким образом, в рамках традиционного подхода формулировка заведомо опровержимых научных теорий исключена.

Очевидно, что две произвольные теории $h1 = (\Omega_{h1}, I_{h1}, S_{h1}, W_{h1})$ и $h2 = (\Omega_{h2}, I_{h2}, S_{h2}, W_{h2})$ вида (2.4) сравнимы тогда и только тогда, когда: $\Omega_{h1} = \Omega_{h2}$; $I_{h1} = I_{h2}$; $(S_{h1} \subseteq S_{h2} \subseteq W_{h2} \subseteq W_{h1}) \vee (S_{h2} \subseteq S_{h1} \subseteq W_{h1} \subseteq W_{h2})$. При этом первый дизъюнкт указанной дизъюнкции говорит, что теория h1 сильнее, чем теория h2, второй — что теория h1 слабее, чем теория h2.

Всякую теорию $h = (\Omega_h, l_h, S_h, W_h)$ такую, что $S_h = W_h$, будем называть *минимальной,* или *безрисковой.* Ясно, что для любых двух теорий h и g, если $g \geq h$ и g — минимальная теория, то h = g.

Пусть теория h задана в виде (2.4) и *p* — произвольное предложение языка L_h (сигнатуры Q_h). Говорим, что предложение *p*

182

h-*ложно на* (I_h, M), если $RF((I_h, M)) \wedge M \in Mod(S_h) \wedge M \models \neg p$, и h *-истинно на* (I_h, M) в противном случае. Ясно, что предложение *p б*удет h-истинно на (I_h, M) тогда и только тогда, когда

$$RF((I_h, M)) \wedge M \in Mod(S_h) \Rightarrow M \models p. \qquad (2.5)$$

Предложение *p* называется *h-истинным,* если соотношение (2.5) справедливо для любой интерпретации (I_h, M), т.е. если

$$(\forall M \in M\Omega_h)\,(RF((I_h, M)) \wedge M \in Mod(S_h) \Rightarrow M \models p). \qquad (2.6)$$

Далее, естественно было бы называть h-аналитически истинными как раз такие предложения языка L_h, h-истинность которых можно установить *заведомо,* т.е. по одному лишь стандартному представлению теории h — вне зависимости от того, каков предикат RF. Идею «заведомой h-истинности» легко выразить точно, используя в метаязыке формулировки второго порядка, а именно: мы говорим, что *соотношение* (2.6) *выполняется заведомо,* если

$$(\forall X)\,(\forall M \in M\Omega_h)\,(X((I_h, M)) \wedge M \in Mod(S_h) => M \models p), \qquad (2.7)$$

где *X* — предикатная переменная для одноместных предикатов, определенных на классе $\{(I_h, M) \mid M \in M\Omega_h\}$. Но условие второго порядка (2.7) логически эквивалентно условию первого порядка

$$(\forall M \in M\Omega_h)\,(M \in Mod(S_h) => M \models p),$$

поэтому окончательно мы принимаем следующее определение.

Предложение *p* языка L_h называется:

— h-*аналитически истинным,* если

$$(\forall M \in M\Omega_h)\,(M \in Mod(S_h) => M \models p); \qquad (2.8)$$

— h-*аналитически ложным,* если $\neg p$ — h-аналитически истинное предложение;

— (просто) h-*аналитическим,* если оно h-аналитически истинное или h-аналитически ложное;

— h-*синтетическим,* если оно не h-аналитическое.

Соотношение (2.8) говорит о том, что для данной теории h множество всех h-аналитически истинных предложений совпадает с S_h. В самом деле, предположим, что $p \in S_h$. Тогда (2.8) выполняется очевидным образом. Следовательно, если $p \in S_h$, то *p* — h-аналитически истинное. Следовательно, все предложения из S_h — h-аналитически истинные. Предположим, что $p \notin S_h$. Тогда по теореме о полноте найдется такая модель $M \in Mod(S_h)$, что не $M \models p$. Следовательно, если $p \notin S_h$, то (2.8) не выполняется. Следовательно, в этом случае *p* не является h-аналитически истинным предложением. Следовательно, h-аналитически истинными предложениями являются только предложения из S_h[5].

Легко убедиться, что для любого h-синтетического предложения *p* не только нельзя заранее (т.е. без предварительного установления фактов) обнаружить его h-истинность, но оно и вовсе может быть не h-истинным, а всего лишь h-истинным *на* какой-то *конкретной* интерпретации (I_h, M). Это обстоятельство можно выразить иначе, сказав, что h-синтетические предложения являются h-*апостериорными,* в то время как h-аналитические — h- *априорными.*

Подведу итоги сказанному:

(I) Определенный смысл имеют только *относительные* понятия h-аналитического, h-синтетического, h-априорного, h-апостериорного предложения, а не соответствующие им *абсолютные (безотносительные)* понятия *вообще* аналитического, *вообще* синтетического. *вообще* априорного, *вообще* апостериорного суждения. Последние, с современной точки зрения, выглядят слишком темными.

(II) Если считать *предложениями теории* h предложения языка этой теории, то понятие h-аналитического предложения теории h *равно по объему* понятию h-априорного предложения этой теории, а понятие h-синтетического предложения теории h — понятию h-апостериорного предложения теории h.

(III) Понятие *опыта* уточняется как *применение предиката* RF *к* произвольной *интерпретации* (I_h, M).

(IV) Нигде не потребовалось ссылаться на *условия возможности опыта,* поэтому нигде не потребовалось и уточнять, что это такое.

Учет этих итогов — решающий фактор в формировании современных позиций по отношению к эпистемологии Канта. Напрашивается, например, следующий ход мысли. Согласно (I), кантовские разграничения *аналитическое/ синтетическое* и *априорное/ апостериорное* либо темны, либо должны трактоваться как разграничения h-*аналитическое/* h-*синтетическое* и h-*априорное/* h-*апостериорное.* В такой трактовке главное эпистемологическое заявление Канта выглядит так: существует теория h такая, что множество h-синтетических предложений теории h и множество h-априорных предложений теории h имеют непустое пересечение. Согласно (II), такое утверждение ложно.

Далее, согласно (III), *условия возможности опыта* — это *условия возможности применения предиката* RF к произвольной интерпретации (l_h, M) в связи с проверкой теории h. В принципе они подлежат, вероятно, исследованию и уточнению. Но все дело в том, что согласно (IV) ошибочность главного кантовского заявления устанавливается *независимо* от такого исследования или уточнения. Следовательно, если Кант считает, что его трансцендентальный метод приводит к ожидаемому им эффекту, то здесь Кант неизбежно что-то путает, причем эта путаница не может быть устранена — *с благоприятным для Канта результатом* — за счет любых уточнений условий применимости предиката RF. В этом смысле кантовская идея трансцендентального метода не поддается приемлемому уточнению.

Таким образом, в соответствии с излагаемым ходом мысли кантовская эпистемология и ошибочна (в одной части), и безнадежно темна (в другой части). Этот или близкий к этому ход рассуждения типичен для большинства нынешних авторов, пишущих о Канте, и они-то и составляют первый из двух ранее упомянутых лагерей современных эпистемологов.

Более осторожную позицию занимают те, кто составляет второй лагерь. Они подчеркивают, что термин «опыт» не всегда понимается Кантом в соответствии с (III), а следовательно, и тесно связанное с ним понятие априорности, возможно, не всегда разумно уточнять как «h-априорность». Более того, при этом и само понятие научного знания, возможно, не всегда следует уточнять так, как это было сделано выше. — в виде отдельной научной теории h. В конце концов не исключено, что отмечаемые почти всеми комментаторами неоднозначности кантовской эпистемологической терминологии — вовсе не сбои кантовской мысли, а преднамеренные шаги. Шаги, имеющие целью указать на то, что научное знание — это нечто вроде «изделия двойного назначения». Например, научное знание — это и способ высказать гипотетическое утверждение вида (2.1), и способ формулировать какие-то осмысленные вопросы и искать на них ответы. Причем опять-таки не исключено, что эти две функции, совмещенные в одном научном исследовании, могут находиться друг с другом в очень разных отношениях — от гармонии до конфликта.

Словом, члены рассматриваемой немногочисленной группы философов (Дитер Хенрих [6], Патриция Китчер [4], Дёрк Перебум [7]) призывают шире исследовать подобные возможности и даже намечают здесь некоторые конкретные пути. В частности, Патриция Китчер в цитированной выше работе [4] предлагает альтернативное к (III) понимание и «опыта», и «условий возможности опыта». Предварительно заметив, что «Кант имел дело с когнитивным — в противоположность спортивному или сексуальному — опытом», она далее пишет: «Когда Кант ссылается на возможность опыта вообще, он, я полагаю, ссылается на различные *познавательные задачи* (курсив мой. — *К.С.),* которые составляют весь наш когнитивный репертуар. Чтобы избежать возможности пустых двусмысленностей, я буду описывать Канта как изучающего необходимые условия для той или иной конкретной когнитивной задачи»

185

[4, с. 288—289]. Такое изучение и является, согласно Китчер, тем, что называется «трансцендентальным методом».

Упомянутый «когнитивный репертуар», а потому и «трансцендентальный метод» Китчер полагает нужным описывать в терминах психологии. Отсюда понятно, что ее прочтение Канта, какими бы достоинствами в других отношениях оно ни обладало, обречено все-таки на изрядную размытость при нынешнем уровне развития психологии. Никаких других *более точных* истолкований трансцендентального метода Канта этой группой философов пока не предложено.

Между тем одно такое прочтение можно извлечь, как я уже сказал в преамбуле, из так называемого «нового подхода» к основаниям математики Ю.Л. Ершова.

3. «Новый подход» Ершова

В существующих публикациях [8; 9; 5, гл. 7] «новый подход» изложен применительно к программе Гильберта. Однако он значим и за пределами этой темы, поскольку одна из главных его частей — анализ общего вопроса: как устроен процесс решения математических задач? Именно эта часть важна для дальнейшего, и я постараюсь изложить ее в отвлеченном виде, безотносительно к программе Гильберта.

Когда мы говорим, что «имеем дело с конкретной задачей», то стремимся к двум вещам: сначала — дать корректную *постановку* задаче (точно *сформулировать,* точно *понять* и т.д. задачу), затем — найти ее *решение.* При этом мы никогда не забываем, что осуществление решения, если оно удаюсь, *приносит* нам знание, но часто не учитываем, что осуществление постановки *предполагает* некоторое знание. Такого рода недоучету психологически способствует то обстоятельство, что обычно мы *ставим* задачу (формулируем и понимаем) в рамках одной теории, а *решаем* ее в рамках другой. И почему-то только последнюю теорию и признаем за ту, которой мы пользуемся, обманывая, таким образом, себя и проявляя неблагодарность по отношению к первой теории. Между тем если быть до конца честными и действительно пользоваться *только* одной явным образом фиксированной теорией, то нельзя ли ожидать, что, хотя *решение* рассматриваемой задачи в ней может быть найдено, *поставить* эту задачу в ней невозможно? Нельзя ли думать, что мы попадем в положение некоего мистера Квимси, который «после двадцати лет упорного труда нашел ответ, но к тому времени забыл, в чем состоял вопрос» [10]? Надо полагать, мы уловим существенную особенность процесса решения задач, если выясним, действительно ли возможен подобный конфуз.

186

В связи с этим приобретает актуальность вопрос: что такое вообще осмысленная математическая задача? Согласно [8; 9; 5, гл. 7], ответ таков: осмысленная математическая задача — это то, что формально может быть представлено в виде так называемой «S-задачи». Имеются в виду следующие определения.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ = (S , $\boldsymbol{\phi}$ — упорядоченная пара, где: S — произвольная формальная первопорядковая система в языке L, объемлющем язык арифметики, не содержащая среди своих теорем арифметически ложных утверждений; φ— произвольная формула в L, содержащая ровно одну свободную переменную. Тогда $\boldsymbol{\varphi}$называется *S-задачей (задачей внутри* S), если и только если S и φудовлетворяют специальному ограничению — так называемым «условиям осмысленности» (их формулировки приведены в [5; 8; 9]).

Если $\boldsymbol{\varphi}$ = *(S,* $\boldsymbol{\phi}$ — S-задача, то *S* называется $\boldsymbol{\varphi}$*проблемной системой,* φ *— формулировкой для* $\boldsymbol{\varphi}$а всякая модель M системы S — $\boldsymbol{\varphi}$*проблемной моделью.*

Если $\boldsymbol{\varphi}$— (*S*, $\boldsymbol{\phi}$ — *S*-задача, то натуральное число *n* называется *решением* (или *нерешением) (для)* $\boldsymbol{\varphi}$тогда и только тогда, когда предложение $\varphi(\boldsymbol{n})$ (или $\neg\varphi(\boldsymbol{n})$) выполняется на всех $\boldsymbol{\varphi}$проблемных моделях, т.е. когда $S \vdash \varphi(\boldsymbol{n})$ [или $S \vdash \neg \varphi(\boldsymbol{n})$].

Мотивировку и развернутое содержательное истолкование этих определений читатель найдет в каждой из указанных публикаций. Поэтому здесь я ограничусь минимальным пояснением их в виде трех отдельных замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Представляется разумным полагать, что человек *понимает* беспокоящую его математическую задачу, если и только если любой текст, предъявляемый его вниманию на выбранном им языке, он в состоянии распознать как утоление или как неутоление упомянутого беспокойства. Нелепо, например, говорить, что некто понял задачу, решил ее, но не знает (продолжает беспокоиться), решил ли он ее. Либо он решил чужую (понятную нам, но не ему) задачу, либо он не дорешал свою — ему осталось еще убедиться в том, что найденное решение действительно есть тот текст, который его *удовлетворяет.* Словом, *понятная* человеку задача не может иметь неубедительных для него решений. Неубедительное решение *понятной* задачи — вообще не решение, более того, оно — убедительное *нерешение.* Поэтому если читатель *не в состоянии (не обладает таким запасом знаний, чтобы)* признать решением или нерешением данной задачи *любой* произвольно взятый текст на выбранном им языке, то это гарантия, что рассматриваемая задача ему не вполне понятна, что она для него недоосмысленна. С другой стороны, если читатель *обладает* указанным запасом знаний, но *не знает,* что он им обладает, то и в этом случае

187

нелепо говорить, что он понимает задачу, ибо пришлось бы добавлять: но не понимает, что он ее понимает.

Так вот, эти соображения учтены формулировкой упомянутых условий осмысленности и предлагаемым в «новом подходе» содержательным истолкованием определений. В этом истолковании *S* истолковывается как система рассуждений, используемых человеком при осмыслении задачи, а натуральное число *n* — как текст, претендующий на то, чтобы быть решением или нерешением осмысливаемой задачи (предполагается, что задана нумерация всех текстов выбранного языка).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\varphi = (S, \varphi)$ — *S*-задача, то для любого натурального числа *n* либо $S \vdash \varphi(n)$, либо $S \vdash \neg \varphi(n)$. (Однако утверждение: «Для любого числа *n* либо $S \vdash \varphi(n)$, либо $S \vdash \neg \varphi(n)$» — не означает заведомой разрешимости *S*-задачи φ в *S*. Читателю следует помнить, что *n* кодирует не «ответ», а «обоснование ответа» («решение») задачи φ Поэтому *S*-задача φ *разрешима в S* тогда и только тогда, когда либо $S \vdash \varphi(n)$ для некоторого *n*, либо $S \vdash \forall x \neg \varphi(x)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отнюдь не всякая первопорядковая система *S* (в языке, объемлющем язык арифметики), не содержащая среди своих теорем арифметически ложных утверждений, годится на роль φ-проблемной системы для какой-нибудь *S*-задачи φ Напротив, легко указать такую систему *S*, что никакая пара вида (*S*, φ) не является *S*-задачей. Более того, таковы как раз *обычные* в научной практике системы (см., например, теоремы 7.3.1 и 7.3.2 в [5]).

В соответствии с приведенными определениями слова *«решить* данную *S*-задачу φ» означают: указать такое натуральное число *n*, чтобы *n* оказалось решением для φ Удобно ввести еще одно определение.

Для произвольных *S*, φ, *T* и *n*, если пара $\varphi = (S, \varphi)$ — *S*-задача, *n* — натуральное число, *T* — система (в том же языке, что и система *S*) такая, что $T \vdash \varphi(n)$, то *n* называется *решением (для) S-задачи* φ *в (системе) T* тогда и только тогда, когда *T* — непротиворечивая надсистема (системы) *S*.

В силу замечания 2 очевидно, что для произвольных *S*, φ, *T* и *n*, если $\varphi = (S, \varphi)$ — *S*-задача, *n* — решение *S* -задачи φ в *T*, то *n* — решение S-задачи φ И, наоборот, если *n* — решение *S*~задачи φ, *T* — непротиворечивая надсистема системы *S*, то *n* есть также решение *S*-задачи φ в *T*.

Теперь математическую деятельность, направленную на решение какой-то задачи, можно мыслить состоящей из следующих трех стадий. На первой стадии мы фиксируем некоторую такую тройку (L, *S*, φ). что *S* — аксиоматическая система в языке L, $\varphi = (S, \varphi)$ - *S*-задача, и заявляем (другим или себе), что собираемся решать именно

188

эту задачу. После и только после выполнения этой стадии мы знаем, какие модели языка L вообще интересны в связи с данной задачей — именно те, которые являются φ-проблемными. Вот это знание и является как раз тем, которое выше я назвал знанием, *предполагаемым* постановкой задачи.

При этом подразумевается, что сама указанная стадия называется *постановкой* задачи.

На второй стадии мы дополнительно фиксируем некоторую непротиворечивую *над*систему *T* системы *S* и принимаем план — искать решение нашей *S*-задачи φ в *T*. Дело в том, что поскольку *T* — *надсистема* системы *S*, то найти решение *S*-задачи φ в *T* (установить факт $T \vdash \varphi(n)$) может оказаться практически более легким делом, чем найти это же самое решение в исходной системе *S* (установить факт $S \vdash \varphi(n)$).

Мы говорим, что осуществили *подготовку* к решению задачи, если и только если выполнили обе названные стадии.

На третьей стадии мы пытаемся найти хотя бы одно решение нашей *S*-задачи φ в системе *T*, т.е. доказать в *T* предложение вида (φ***n***) хотя бы для одного числа *n*. Если это нам *не* удалось, то либо наша *S*-задача вообще не имеет решений, либо наш план насчет *T* оказался не совсем удобным для практического исполнения и должен быть исправлен заменой *T* на какую-то другую надсистему *T'* системы *S*. Если же нам *удалось* доказать в *T* предложение вида *(φn),* то в результате мы располагаем знанием, которое выражается следующими тремя утверждениями: *(α)T* ├ *(φ**n**);* (β) *S* ⊆*T ;* (*γ*) *S* — **φ**проблемная система для ***φ***= (*S*, φ). Можно это знание выразить также словами: *n* есть решение *S* -задачи ***φ***

Следует подчеркнуть, что здесь существенны все три утверждения (α), (β), (γ). Если мы располагаем только утверждением (α), мы знаем всего лишь тот факт, что в системе *T* выводимо предложение *(φ**n**)*, и не знаем ничего более интересного. Если мы располагаем только утверждениями (α) и (γ), мы знаем два не связанных общим интересом факта: факт, что в системе *T* выводимо предложение *(φ**n**)*, и факт, что S — **φ** проблемная система. И лишь добавив к (α) и (γ) утверждение (β), мы свяжем интересующим нас образом предыдущие два факта, получив право утверждать, что, доказав в *T* предложение (φ*n*), мы доказали, что *n* есть решение именно S-задачи ***φ***

Следует также подчеркнуть, что каждая из двух систем S и T, с которыми мы имеем дело, вносит свой специфический вклад в окончательный результат. Специфика этих вкладов легко усматривается. Если бы в (α) и (β) вместо системы *T* фигурировала, не нарушая при этом истинности (α) и (β), какая-то отличная от *T* система *T',* то мы все равно имели бы прежний результат. То есть имели бы право сказать: *n* есть решение S-задачи *φ* (хотя теперь
189

и есть уже решение S-задачи ***φ***в *T* ', а не в *T*). Но если мы, оставим без изменения все остальное, заменим в (β) и (γ) систему S на какую-нибудь отличную от нее систему S ' и при этом не нарушим истинности (β) и (γ), то мы получим совершенно другой результат: *n* есть решение S'-задачи **φ**= (S ', φ) (а не S-задачи ***φ***= (*S,* φ)).

Таким образом, единственным случаем, при котором мы можем избежать, пользуясь для *решения* и *постановки* задачи *одной и той же* теорией, конфуза мистера Квимси, является тот, когда мы в качестве системы *T* выбираем фиксированную на предыдущей стадии систему *S* . В силу замечания 3 этот случай практически не встречается (хотя в принципе не исключен). Поэтому важно подчеркнуть, что в общем случае, когда мы говорим, что «имеем дело с конкретной математической задачей», мы имеем в виду подходящую четверку d = (L, *S* , *φ T*) такую, что *(S,* φ) — S-задача, *T* - надсистема системы *S*. Отмеченный исключительный случай характеризуется тем, что для него d = (L, S, φ S).

Важный для философии математики аспект «нового подхода» состоит из учета того, какое значение может иметь описанный анализ математической деятельности для переосмысления «программы Гильберта». Однако, как я предупредил выше, этот аспект, подробно рассмотренный в [5, гл. 7; 9], — не та история, которая интересна сейчас. Сейчас достаточно осознать лишь сам этот анализ.

4. Новое прочтение «трансцендентального метода»

Возвращаясь к возможным прочтениям Канта, хочу специально подчеркнуть, что наука отличается от прочих видов знания своей *ответственностью.* Именно признак ответственности противопоставляет научные разговоры разговорам, так сказать, псевдонаучным. Однако в самой этой ответственности легко различить два аспекта. С одной стороны, ответственность предполагает четкие критерии осмысленности высказываний, а они (эти критерии), в свою очередь, сводятся к *четким требованиям на способы представления* научных теорий. Характер подобных требований — содержание раздела 2 статьи. С другой стороны, ответственность научного знания связана, что, между прочим, отмечается в литературе гораздо реже и менее настойчиво, с еще одной чертой — *целенаправленностью,* т.е. с таким характером знания, который позволяет рассматривать процесс его (знания) получения в терминах «проблема — решение проблемы». Речь идет о том, что если в процессе познавательной деятельности мы не приближаемся к решению никакой *проблемы,* то эта познавательная деятельность не состоятельна в качестве именно *научной.* Если вместе с поэтом мы восклицаем: «Унылая пора! Очей очарованье!», — то этим самым мы подводим,

190

разумеется, итог какого-то познавательного процесса, но констатация печальной прелести осени не есть ответ на какой-либо прежде поставленный вопрос и, стало быть, пе есть *научный* результат. Здесь легко усматривается намек на то, что не всякий опыт в обычном понимании — это обязательно научный опыт и что возможность опыта *быть научным* как-то должна быть связана с *целенаправленностью* научного знания. Собственно говоря, развить именно этот намек — замысел цитированной выше работы Патриции Китчер. В этом же и состоит замысел получить новое прочтение кантовского «трансцендентального метода» из «нового подхода» Ершова.

Как легко понять из определений предыдущего параграфа, найти конкретное решение *n* конкретной S-задачи **φ**= (*S,φ*) — это то же самое, что найти любую такую модель M языка L. которая будет удовлетворять следующим двум условиям: I) M — **φ** проблемная модель; 2) денотат **n[M]** цифры **n** (для числа n) в M принадлежит денотату φM] формулы *φ*в этой модели. Это значит, конечно, что, собираясь решать какую-либо математическую задачу, т.е. какую-либо S-задачу **φ**= (*S,φ*) в языке L, мы бываем заинтересованы в поиске любой такой специальной модели языка L, специфика которой определяется только что отмеченными условиями 1) и 2). При этом заведомо без ущерба для дела мы можем ограничить поле поиска только моделями системы *T,* если мы заранее знаем, что *T* — непротиворечивое расширение **φ**проблемной системы S. В соответствии с определением, приведенным в разделе 3 статьи, мы говорим в этом случае, что ищем решение нашей задачи не где угодно, а как раз в *T.*

Нужно заметить, что *мотивы* для выбора той или иной S-задачи *φ*могут быть (как правило, являются) *содержательными*, а не чисто формальными. Они, следовательно, могут зависеть от того или иного *истолкования* I языка L и от тех или иных *эмпирических* обстоятельств. Тем не менее *специфика* модели, искомой при решении этой уже выбранной S-задачи φ выражается чисто *формально* — не зависит от выбора истолкования I языка и не апеллирует к эмпирическим фактам.

Не так обстоит дело с задачами за пределами математики. За пределами математики научные задачи понимаются таким образом, что не только мотивы для выбора той или иной из них являются содержательными, но содержательной является также и специфика тех моделей, что ищутся в качестве решения выбранной задачи. Как раз здесь лежит водораздел между чисто математическим и, так сказать, *общенаучным* пониманием термина «задача». Если говорить точно, то речь идет о следующих трех определениях.

Пусть, как и прежде, *S* — произвольная формальная первопорядковая система в языке L, объемлющем язык арифметики,

191

φ— формула в L, содержащая ровно одну свободную переменную, ***φ***— пара (S, *φ*. И пусть, кроме того, I — какое-то фиксированное истолкование языка L. Тогда пара **φ**= (**I , φ** называется (I, S)-*задачей,* если и только если **φ**— *S*-задача.

Если пара **φ= (I, φ** является (I, S)-задачей, то пара (I, *S)* называется **φ**-*проблемной системой,* а всякая пара *а* = (I, M), где M — **φ**проблемная модель (модель системы S), называется φ*проблемной ситуацией.*

Пусть пара **φ** = (**I,** ***φ*** — (I, S)-задача. Тогда пара (n, *а)* называется *решением (для)* **φ**, если и только если: (i) *n* — натуральное число; (ii) *a* — ϕ^0-проблемная ситуация (I, M); (iii) денотат **n[M]** цифры **n** (для числа n) в модели M принадлежит денотату ϕ[M] формулы φв этой модели; (iv) *a* — реальный фрагмент действительности, т.е. RF(a).

Согласно этим определениям, для данного числа *n* найти конкретное решение вида (*n, a*) конкретной (I, S)~задачи ϕ^0 — это то же самое, что найти любую такую модель M языка L, которая должна удовлетворять следующим трем условиям: 1) M — φпроблемная модель (модель системы S); 2) денотат **n[M]** цифры ***n*** (для числа *n)* в модели M принадлежит денотату ϕ[*M*] формулы φв этой модели; 3) RF((I, M)). А это значит, что, собираясь решать какую-либо *обшенаучную* задачу, т.е. какую-либо (I, S)-задачу ϕ^0 в языке L, мы бываем заинтересованы в поиске любой такой специальной модели языка L, специфика которой выражается не только формальными требованиями 1) и 2), но — в отличие от чисто математического случая — зависит также от истолкования I и предиката RF (требование 3). При этом нужно заметить, что требования 1) и 3) являются общими сразу для всех возможных — коль скоро фиксированы I и S — (I, S)-задач.

Таким образом, естественно возникает вопрос: нельзя ли описать класс всех моделей языка L, удовлетворяющих условиям 1) и 3), более определенно, чем просто заявив — при постановке (I, *S*)-задачи ϕ^0, — что этот класс содержится в классе всех моделей системы S? Например, нельзя ли предположить, что класс всех моделей языка L, удовлетворяющих условиям 1) и 3), содержится в классе Mod(W) всех моделей некоторой *над*системы *W* системы S? Ведь такое более определенное описание позволило бы облегчить поиск решений любых (I, S)-задач тем, что оно сузило бы исходное поле поиска. К сожалению, из-за условия 3) утвердительный ответ на этот вопрос неизбежно рискован всякий раз, когда он не тривиален, т.е. когда в нем предполагается, что *W — собственная* надсистема системы *S*. Иными словами, статус такого ответа — некоторая специальная («(I, S)-проблемная») научная теория, определяемая следующим образом.
192

Пусть g — теория, имеющая в языке L стандартное представление (Ω, I, S, *W)*. Теория g называется (I, S)-*проблемной* тогда и только тогда, когда пара (I, S) — ϕ^0-проблемная система хотя бы для одной (I, S)-задачи ϕ^0.

По этому определению, если g = (Ω, I, S, *W)* — (I,S)-проблемная теория, то, принимая ее, мы для любой (I, S)-задачи ϕ^0 соглашаемся с рискованным предположением, что все решения этой задачи, если они вообще есть, находятся в классе

$$|w| =\{(I, M)\ M\in Mod(W)\}.$$

Так как класс |W| заведомо не шире класса

$$|S| = \{(I, M) \mid M\in Mod(S)\}$$

всех ϕ^0-проблемных ситуаций, то награда за указанный риск — уменьшение разбросанности поиска решений задачи ϕ^0. В этом смысле всякая (I, S)-проблемная теория является *целенаправленной* (на решение любой из возможных (I, S)-задач). Впрочем, если в каком-либо конкретном случае мы считаем риск, о котором идет здесь речь, вообще недопустимым, мы вправе будем в этом случае считать целенаправленной минимальную (I, S)-проблемную теорию g, т.е. теорию g следующего частного вида: g = (Ω, I, *S, S*),

Любая (I, S)-проблемная теория — это *и* способ высказать гипотетическое утверждение вида (2.1), *и* способ формулировать какие-то осмысленные вопросы и искать на них ответы. Всякая научная теория со стандартным представлением (2.4), не являющаяся (I, S)-проблемной[6], не может совмещать эти две функции.

Стало быть, характеризовать научную деятельность со стороны се целенаправленности можно следующим образом. Всякая такая деятельность D начинается с постановки какой-то конкретной (I, S)-задачи ϕ^0 и затем продолжается поисками одного (или нескольких) из ее решений. При этом процесс поиска предваряется принятием некоторой (I, S)-проблемной теории g и ведется «в рамках» этой теории. В той мере, в какой принятие теории g было не опрометчивым (как-то обоснованным или просто удачным) шагом, упомянугые «рамки», заранее ограничивающие поле поиска, *содействуют* успеху поиска, если он вообще возможен.

Следует подчеркнуть, однако, что приведенное описание несколько схематизирует (и тем самым упрощает) реальную картину научной деятельности. Упрощение заключается в утверждении, что всякая научная деятельность *начинается* с постановки конкретной *задачи*. Если бы дело действительно обстояло именно так, то в научном обиходе встречались бы теории h только лишь частного вида — (1, S)-*проблемные* теории g. Фактически же науку населяют теории, отнюдь не всегда подпадающие под определение (I, S)-проблемных

193

теорий (снова см. замечание 3 раздела 3). Это говорит о том, что научная практика не так прямо обнаруживает себя в качестве целенаправленной познавательной деятельности, как это было бы в идеальном случае. На практике зачастую бывает так, что *вначале* совсем не целенаправленно (или целенаправленно, но не в нашем смысле) выдвигается некоторая теория общего вида (2.4) и только *потом,* если есть к тому специальные мотивы, она рассматривается в связи с той или иной конкретной *задачей.* Иными словами, научной деятельности, как она описана в предыдущем абзаце, на практике зачастую предшествует некий подготовительный этап, который как-то зависит от теории h, не совпадающей, вообще говоря, с теорией g. Здесь нужно высказаться более определенно.

Пусть H — класс всех мыслимых теорий h вида (2.4), G – подкласс класса H, состоящий из всех мыслимых (I, S)-проблемных теорий g, Φ — класс всех мыслимых (I, S)-задач ϕ.

Пара (h, ϕ) из H ×Φ называется *релевантной,* если и только если: h = (Ω, I, S_h, W_h); ϕ — (I, S)-задача в языке L сигнатуры Ω; $S_h \subseteq S$, $S \subseteq W_h$. Если пара (h, ϕ) не является релевантной, она называется *нерелевантной* парой.

Понятно, что пара (h, ϕ) релевантна тогда и только тогда, когда ϕ — (I, S)-задача в языке L сигнатуры Ω и теория h сильнее, чем минимальная (I, S)-проблемная теория (Ω, I, *S*, *S*). Отсюда следует, что если пара (h, ϕ) не релевантна и ϕ— (1, S-задача в языке L сигнатуры Ω, то теория h не сравнима с минимальной теорией (Ω, I, *S, S*): будь она сравнимой с (Ω, I, S, S), она была бы ей равна, и, следовательно, пара (h, ϕ) была бы релевантной.

Отображение f: H ×Φ →G называется *приготовлением* тогда и только тогда, когда: f (h, ϕ) = (Ω, I, S, W_h), если (h, ϕ) — релевантная nара; f(h, ϕ) = Ω, I, *S, S*), если (h, ϕ) — нерелевантная пара. Как видим, приготовление можно считать способом получения из каждой нерелевантной пары некоторой минимальной (I, *S*)-проблемной теории, а из каждой релевантной пары — некоторой (I, S)-проблемной теории, более сильной, чем соответствующая минимальная (I, S)-проблемная теория.

В этих терминах более полное описание целенаправленной научной деятельности D выглядит следующим образом. К произвольной конкретной паре (h, ϕ) из H ×Φ сначала применяют приготовление f — упомянутый предварительный этап. Получают некоторую (I, S)-проблемную теорию g = f (h, ϕ). После чего приступают к поиску решения (I, S)-задачи ϕ, пользуясь, как это было описано выше, теорией g. Очевидно, такой ход исследования однозначно задается четверкой вида (L, I, ϕ, h), где L — язык (сигнатуры Ω); I — истолкование языка L; ϕ — конкретная (I, S)-задача в языке L; h = (Ω, I, S_h, W_h). Тот факт, что конкретная научная деятельность D имеет *представление* (L, I, ϕ, h), выражается записью:

$$D = (L, I, \phi, h) \qquad (4.1).$$

Идея нового прочтения эпистемологии Канта состоит в том, чтобы кантовское «научное знание» воспринимать всякий раз как некоторую научную деятельность D и соотносить остальные ключевые для Канта понятия с соответствующим предстаатением вида (4.1). Эта идея мотивирует введение еще нескольких определений.

Пара *e=(D, ob)* называется *научным (целенаправленным) опытом,* если и только если: D = (L, I, ϕ, h); *ob* = (RF, *a*); *a* = (I, M) — интерпретация языка L при истолковании I.

Пусть: D = (L, I, ϕ, h); g= *f* (h, ϕ); *e*=(*D, ob*); *ob* = (RF, *a)*. Предложение *p* языка L называется *D-истинным (D-ложным) на е,* если и только если оно g-истинно (g-ложно) на *а.*

Пусть D = (L, I, ϕ, h), и пусть g=*f* (h, ϕ). Предложение *p* языка L называется:

— *D-истинным,* если и только если оно g-истинно;

— *D-ложным,* если и только если $\neg p$ — g-истинное предложение.

Из этих определений видно, что всегда можно заранее по одному лишь представлению D = (L, I, ϕ, h), не обращаясь к каким-либо наблюдениям *ob* или опытам *е,* установить D-истинность или D-ложность некоторого предложения *р,* если и только если оно является g-аналитическим. Стало быть, в этом смысле можно все g-аналитические — в том числе и h-синтетические g-аналитические — предложения считать априорными *(D-априорными),* а все g-синтетические — апостериорными (D- *апостериорными).* Поэтому оправданно следующее определение.

Пусть D — (L, I, ϕ, h) и пусть g = *f* (h, ϕ*)*. Предложение *p языка*ка L называется:

— *D-априорно истинным,* если и только если оно g-аналитически истинное;

— *D-априорно ложным,* если и только если $\neg$ *p* — g-аналитически истинное предложение;

— (просто) *D-априорным,* если и только если оно g-аналитически истинное или g-аналитически ложное;

— *D-апостериорным,* если и только если оно g-синтетическое.

Предлагаемое новое прочтение кантовского трансцендентального метода сводится к трем приглашениям. К приглашению всякий конкретный раз воспринимать кантовские слова «научное знание» как наименование для какой-то научной деятельности вида (4.1). К приглашению понимать под «исследованием условий возможности опыта» изучение свойств пар *е* вида (D, *ob),* в частности свойств представлений D = (L, I, ϕ, h). И к приглашению понимать под

«априорными (апостериорными) суждениями» D-априорные (D апостериорные) предложения, а под «синтетическими суждениями *a priori»* — h-синтетические D-априорные предложения.

Если принять эти приглашения, то все основные эпистемологические заявления Канта уже не выглядят «безнадежно темными» или ошибочными. В частности, центральная кантовская идея, что возможны синтетические суждения *a priori,* получает внятное, если не сказать убедительное, обоснование.

В самом деле, пусть D_1 — (L, I, ϕ, h) и пусть при этом (h, ϕ*)* – релевантная пара такая, что: h = (Ω , I, S_{h}, W_{h}*);* ϕ— (I, *S*)-задача (в языке L сигнатуры Ω); $S_h \subset S$, $S \not\subseteq W_h$. Так как (h, ϕ) — релевантная пара, то, согласно определению, приготовления *f*, g = *f* (h, ϕ) = (Ω, I, *S,* W_h*)* . Но тогда очевидно, что существуют h-синтетические D_1-априорные предложения: заведомо таковыми являются, например, все предложения из непустого множества $S \setminus S_h$. Уже отсюда мы заключаем, коль скоро принимается новое прочтение Канта, что синтетические суждения *a priori* действительно возможны.

Мы также придем к этому заключению, если положим: $D_2 = (L, I, \boldsymbol{\phi}, h)$; $(h, \boldsymbol{\phi})$ — нерелевантная пара такая, что $S_h \subset S$.

С точки зрения нового прочтения Канта, лишь в том случае, если бы мы *всегда* полагали, что $D = (L, I, \boldsymbol{\phi}, h)$ и $S_h \supseteq S$, мы не смогли бы обнаружить в ходе научной деятельности синтетические суждения *a priori.*

§ 5. Комментарий

За обилием технических деталей трудно сразу разглядеть квинтэссенцию нового прочтения Канта. Читатель может даже заподозрить, что столь благоприятный для Канта вывод нового прочтения основан просто-напросто на «лингвистической уловке» — на произвольном вкладывании в слова Канта такого смысла, который делает заявления Канта внешне верными, но никоим образом не отражает или даже выхолащивает первоначальную суть дела. Поэтому есть резон продемонстрировать упомянутую «квинтэссенцию» на простом и неформальном примере.

Предположим, что Иван поглощен проблемой: любит ето Марья или нет? Тогда независимо от того, как обстоит дело фактически, Иван *обязан* считать истинным утверждение, что Марья обладает сознанием. Ибо, как только Иван допускает мысль, что Марья ничего не сознает, он сразу теряет интерес к своей проблеме. Можно сказать также, что проблема теряет для него тот смысл, который делал ее захватывающей. Можно также сказать, что имеет место подмена одной проблемы (интересной) другой проблемой (не ясно, какой именно, но ясно, что неинтересной в прежнем смысле).

Таким образом, *если уж* (подчеркиваю: *если уж)* Иван озадачен все-таки именно *первоначальной* проблемой, то ему *вне зависимости от* каких-либо эмпирических или других привходящих обстоятельств *нельзя* сомневаться в утверждении, что Марья имеет сознание, и, следовательно, это утверждение *выглядит* для Ивана истинным *и priori.* С другой стороны, очевидно, что оно *выглядит* для Ивана также и *синтетическим,* ибо Иван сохраняет логическую возможность его отрицать — вместе с потерей интереса к своей проблеме, конечно. Ситуация своеобразная: *вообще-то* Иван *может* сомневаться в том, что Марья обладает сознанием, *но не тогда, когда* он озадачен тем, чем озадачен. Речь, стало быть, идет о том, что *этический* выбор Ивана, т.е. выбор *цели* исследования (выбор *проблемы,* или *задачи) предопределяет* в чем-то его *эпистемологическую* установку — необходимость считать определенное синтетическое высказывание априорно истинным.

Причем вовсе не предполагается, что *выбор* проблемы в свою очередь определяется какими-то эпистемологическими соображениями. Напротив, допустимо или даже естественно предполагать, что Иван здесь подобен Пигмалиону, который, как известно, влюбился в Галатею отнюдь не по эпистемологическим причинам — вовсе не потому, например, что был *уверен* в ее одушевленности. А раз так, то *источником* априорного знания, которым, как вынужден считать Иван, он располагает, служит сама *формулировка* интересующей Ивана проблемы[7].

Вопрос: *на самом ли деле* рассматриваемое синтетическое утверждение *является* априорным или оно только *выглядит* таковым для Ивана? Ответ: в данном случае *выглядеть* и *являться на самом деле* — одно и то же. Это становится более или менее ясным, если учесть, что или вопрос звучит как-то не до конца осмысленным, или его можно переформулировать: не делает ли Иван познавательной *ошибки,* относясь ко всему так, как он *логически вынужден* относиться, озаботившись именно той проблемой, которой он *фактически* озаботился? Предыдущие три абзаца показывают, что не делает и что, напротив, сделал бы, если бы отнесся к рассматриваемому утверждению иначе.

В конце концов еще только приступая к обсуждению темы априорной истинности в разделе 1, можно было бы заметить: любой вопрос о том, истинно ли некоторое конкретное утверждение Х. носит не риторический характер *только* в том случае, когда есть цель, ради которой он задается. Но тогда его реальный смысл заключается в том, чтобы на самом деле спросить: есть ли что-либо, что *заставляет* нас — именно в ходе достижения цели — относиться к Х так, как мы привыкли относиться к слову «истинное». Если это упомянутое «что-либо» — *наблюдение,* то мы говорим, что Х является истинным *a posteriori.* Если — *не* наблюдение, то мы говорим, что *X* является истинным *a priori.* Следуя этому словоупотреблению, мы с самого начала должны были бы отказаться от скрытого предубеждения, что всякое априорно истинное утверждение остается таковым всегда и везде, лишь бы сохранялся язык утверждения вместе со своим истолкованием. В том-то как раз и дело, что это *не* так. Априорная истинность *относительна* — она зависит от *целевого* контекста. Утверждение, что Марья обладает сознанием, априорно истинно в целевом контексте озабоченности Ивана упомянутой проблемой, и оно же, сформулированное в том же самом языке с тем же самым истолкованием, вовсе не обязано быть априорно истинным в каком-либо другом целевом контексте, например, в контексте проблемы, сплела Марья лапти или нет. Учет этого обстоятельства — существенная характеристика *целенаправленности* познавательных устремлений Ивана в рассматриваемой ситуации. Приведенный пример — *частная* иллюстрация специфической зависимости между выбором задачи и эпистемологическими установками в целенаправленном познании. Квинтэссенция трансцендентального метода в новом прочтении заключается в указании на то, что подобная зависимость *присутствует,* должна *учитываться* и может *использоваться* в *любом* научном исследовании. Описание этой зависимости в *общем* виде — главное содержание раздела 4.

Заключение

Итак, каков итог?

Согласно предлагаемому новому прочтению трансцендентальной эпистемологии Канта, научно-познавательная деятельность человека по самой своей природе развивается таким образом, что, прежде чем приступить к поискам решения какой-либо проблемы, надо как минимум понять саму проблему. Но *понять* проблему — это уже кое-что *утверждать.* Хотя бы утверждать то, что в результате предпринимаемого исследования требуется узнать *то-то и то-то,* а не нечто другое. А это значит, что точная (недвусмысленная) формулировка любой проблемы предполагает принятие в качестве отправных пунктов исследования некоторых утверждений, сомневаться в которых нельзя потому, что они — *условия осмысленности* самой *проблемы.* Когда в этих утверждениях сомневаются, проблема дискредитируется — теряет свое первоначальное придававшее ей интерес содержание.

Поэтому, осуществляя окончательный выбор проблемы для исследования (придавая исследованию целенаправленный характер), мы ожидаем получить в результате этого выбора ряд сведений, не подлежащих сомнению именно потому, что мы хотим иметь дело как раз с *этой, а не иной* проблемой. Более того, нам, вообще говоря, ничто не препятствует полученные таким путем «принудительно несомненные» сведения использовать не только для понимания, но и для решения проблемы. В этом — ценность трансцендентального метода,

Вместе с тем очевидно, однако, что трансцендентальный метод *оставляет в тени* и одновременно *делает актуальной* другую — также существенную для полного представления о целенаправленном познании, но все же не эпистемологическую — тему.

Тему о том, существуют ли и если существуют, то каковы *причины, мотивы* или иного рода общие *принципы,* обязывающие нас или позволяющие нам интересоваться в конкретных обстоятельствах конкретными проблемами. Тему, принадлежащую так называемым «практическим» философским дисциплинам — этике и эстетике. В этой связи представляется естественным, что Кант после «Критики чистого разума» — основного своего гносеологического труда — написал еше две «Критики» — «Критику практического разума», посвященную этике, и «Критику способности суждения», посвященную эстетике. Было бы интересно исследовать, в какой мере анализ условий осмысленности задач, осуществленный в новом подходе Ершова, мог бы пригодиться для возведения некоторой части этической и эстетической кантовской проблематики на технически современный фундамент — на нечто вроде логики или аксиоматической теории *целеполагания.*

Примечания

[1] Это, конечно, очень обобщенное по сравнению с обычным словоупотреблением понимание термина «опыт», ибо здесь допускаются к рассмотрению и такие интерпретации $a = (\mathrm{I}, \mathrm{M})$, где M — *бесконечная* модель.

[2] К сожалению, в философской литературе стандартное представление (2.4) скорее молчаливо подразумевается, чем явно указывается. Например, на теорию h ссылаются часто как на тройку (L_h, l_h, W_h), называя ее просто «интерпретированной теорией W_h (в языке L_h)» и тем самым игнорируя S_h.

[3] Вопрос, какими средствами можно (если можно) осуществить исполнение каждого шага из этой последовательности — за пределами темы настояшей статьи.

[4] Речь идет об условии, необходимом для того, чтобы правильно учесть роль теоретических терминов (если они есть) при формулировке и проверке научной теории. В контексте данной статьи проблема теоретических терминов не существенна, поэтому нет необходимости выписывать это условие явно. Ср.: [5, гл. 3].

[5] Поскольку $S_h \subseteq W_h$, множество предложений S_h называют h-*аналитической компонентой,* а множество W_h / S_h — h-*синтетической компонентой (аксиоматической) системы* W_h. h-синтетическая компонента системы W_h в отличие от h-аналитической не является аксиоматической (т.е. дедуктивно замкнутой) системой.

[6] Согласно теоремам 7.3.1 и 7.3.2 из [5] (ср. замечание 3 предыдущего раздела), заведомо такова любая теория $h = (\Omega_h, l_h, S_h, W_h)$. в которой S_h, — надсистема рекурсивной арифметики.

199

[7] Этим выводом, как и самим примером, я обязан своей дочери, заставившей когда-то меня понять с их помощью часть того, что потом оказалось предметом ее диссертации *(Салюхваяова В.К.* Выбор как антропологическая проблема; Автореф.дис. канд, филос. наук. М., 1998).

Список литературы

1. *Нельсон Л.* Замечания о неевклидовой геометрии и о происхождении математической достоверности // Новые идеи в математике. Сб. 8. СПб., 1914. С. 1—30.
2. *Кант И.* Критика чистого разума. СПб., 1993.
3. *Кант И.* Пролегомены ко всякой будущей метафизике, могущей появиться как наука. Соч.: В 6 т. М., 1965. Т. 4.
4. *Kitcher P.* Revisiting Kant's Epistemology: Skepticism, Apriority, and Psychologism // Nous. 1995. Vol. 29. N 3. P. 285-315.

5. *Гончаров С.С., Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* Введение в логику и методологию науки. М., 1994.

6. *H enrich D.* Kant's Notion of a Deduction and the Methodological Background of the First Critique *II* Forster E. Ed. Kant's Transcendental Deductions. Stanford, 1989.

7. *Pereboom D.* Kant on Justification in Transcendental Philosophy // Synthese. 1990. Vol. 85. P. 25-54.

8 . *Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* О новом подходе к философии математики // Структурный анализ символьных последовательностей. Новосибирск, 1984. Вып. 101. Вычислительные системы. С. 141 — 148.

9. *Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* О новом подходе к методологии математики // Закономерности развития современной математики. М.. 1987. С. 85—106.

10. Liepmann H.W. The Rise and Fall of Idea in Turbulence // American Scientist. 1979. Vol.69. P. 221-228.

КОММЕНТАРИИ

А.Н.Кричевец

К.Ф. Самохвалов сформулировал очень интересную схему, касающуюся вопроса, общего для многих авторов данного сборника. Он показал, что постановка проблемы или задачи определяет некоторую рамку исследования, из которой можно вывести и содержательные утверждения о «мире», в котором исследователь надеется найти ответ на свой вопрос. Это значит, что если человек ставит геометрическую задачу, понимая ее смысл, то само это понимание гарантирует некоторый значительный набор истинных фактов о геометрическом мире. Обобщая, всякая постановка задачи, всякий вопрос обладают своим собственным априори истинным основанием. Некоторая неясность остается в вопросе о том, кто совершает трансцендентальное исследование и кто получает синтетические априорные суждения. У Канта это явно два разных субъекта. Первый — сам Кант — проводит трансцендентальное исследование, в котором доказывает, что суждения геометра априорны и синтетичны. Второй — геометр, — не думая об априорности, добывает геометрические истины. Таким образом, ход от суждения или вопроса к условиям возможности, даже если это приводит к содержательным утверждениям о мире, не совпадает у Канта с ходом к открытию истин в рамках априорных форм.

Второе замечание касается реконструкции системы априорных оснований вопроса или проблемы как некоторой «теории» мира. Если я правильно понял автора, то эта «теория» выводится в трансцендентальном исследовании из разрешающей процедуры, которая позволяет субъекту, задавшему вопрос, отличить корректный ответ на него от некорректного (по мнению автора, субъект, не отличающий ответ от не-ответа. не имеет права задавать вопрос). Этот очень интересный ход, кажется, позволяет уловить в трансцендентальном исследовании не только наличные основания наличных теорий и суждений, но и какие-то будущие, еще не обнаруживающиеся априорные формы. Мой вопрос касается статуса разрешающей процедуры. Ограничиваясь математикой, если бы эта процедура могла быть эксплицирована еще до нахождения и принятия ответа, то тем самым и ответ был бы уже получен: нынче этот парадокс, ссылаясь на Платона, называют парадоксом Менона.

На мой взгляд, отношения вопроса и возможных ответов следует еще прояснить, и вряд ли это возможно на языке логики в силу обнаруживающейся парадоксальности.

В.Я. Перминов

Автор исходит из различения принципов, необходимых для решения задачи, и принципов, необходимых для ее понимания, и склонен думать, что последний класс принципов соответствует кантовскому пониманию априорного знания. Такая трактовка априорного знания обладает логической ясностью, но она вносит в понятие априорного знания относительность и входит тем самым в противоречие с кантовским его пониманием как формы мышления, имеющей абсолютное значение. Универсальность и необходимость — центральные требования к понятию априорного у Канта. Но это значит, что предлагаемая трактовка априорного знания отступает от традиционного его понимания и по этой причине не может быть принята в качестве его адекватной экспликации. Эта трактовка ведет нас в ложном напраачении, ибо универсальные и абсолютные формы мышления, имеющие значение для любой задачи, несомненно существуют. Таковы, к примеру, законы логики. Если я правильно понял изложенное здесь понимание априорного знания как относительного по своей сути, то я никак не могу с ним согласиться. В процессе анализа старого понятия мы должны либо защитить его как достаточно осмысленное в своих исходных характеристиках, либо должны доказать, что в современной системе представлений такая защита невозможна. Переопределение понятия с радикальным отступлением от его исходного смысла — плохой выход из положения. Определяя априорное знание как знание существенно относительное, мы определяем в действительности некий значительно более простой объект и существенно обедняем кантовскую концепцию, так как оставляем в стороне глубокое различие между формой и содержанием мышления, которое лежит в ее основе.

В.А. Янков

Основную выраженную в докладе мысль можно сформулировать следующим образом: синтетическое априори в научной теории может выступать только относительным образом, т.е. как содержащееся в тех наших предположениях, которые мы с необходимостью должны выдвинуть, для того чтобы стали осмысленными сами постановки исследуемых нами проблем.

Изложение и аргументация автора исходят из предположений, что и развиваемая, и предполагаемая теория находятся как бы на одном уровне и что обе допускают некоторую точную экспликацию, в частности экспликацию по типу, предлагаемому самим автором. Если это так, то следует сказать, что автор не просто выдвигает свой тезис, но и доказывает его точным образом. Поэтому критические возражения могут относиться только к указанным мною предположениям.

Проведенная «точная» интерпретация Канта не охватывает всего смысла кантовской мысли, ибо априорные формы понимания, по Канту, относятся не только к научным структурам (между прочим, таким было марбургское толкование), но к любому человеческому опыту реальности. А обращаясь к такому общему опыту, мы не вправе ожидать, что объясняемое будет находиться в одной плоскости с объясняющим. Первое может лежать на уровне сознания, второе же быть бессознательным.

И мы не можем априорно предполагать, что обе названные компоненты укладываются в рамки точного языка. Особенно это справедливо относительно подсознательной априорно-синтетической компоненты, которая подлежит еще первооткрытию и описанию посредством свежего, метафорического применения созданных совсем для других целей языковых средств.

Если мы откажемся от точной экспликации, то основная идея доклада все еще может быть разумно понимаема (правда, докладчик может не согласиться с таким отказом). Она означает тогда наличие «априорно-синтетического» фундамента, т.е. предположения, явного или скрытого, для любой ориентации в мире, полной или частичной. Можно спекулятивным образом провести следующее рассуждение по образцу древних скептиков: либо иерархия предположений уходит в бесконечность (подлинно априорно-синтетического нет, есть только цепь относительно априорно-синтетических гипотез), либо она заканчивается автономным априорно-синтетическим (гипотетическое или даже очевидное в интеллектуальной интуиции), либо ее концом является аналитическое — но последнее невозможно, поскольку тогда приобретает аналитичность вся цепочка.

Конечно, перед мыслью вырастают в этом случае трудности, связанные с отказом от точности, но эти трудности естественны, потому что априорное убеждение в возможности наложить точность вневременного на внутривременные мир и мысль само является синтетически-априорной гипотезой, да еще к тому же метафизически-нефальсифицируемого (не говоря уже о верифицируемости) характера.

ОТВЕТ АВТОРА

А.Н. Кричевцу

Что касается неясности «в вопросе о том, кто совершает трансцендентальное исследование и кто получает синтетические априорные суждения», то Ваш же собственный анализ этой неясности (со ссылками на Канта) сам и содержит требуемый здесь ответ. После Вашего анализа не остается, как мне представляется, никакой *неясности* в поднятом Вами вопросе ни в отношении моей статьи, ни в отношении того, как фактически обстоит дело здесь у Канта. Ваш анализ свидетельствует о том, что *получить* некую истину и *квалифицировать* уже полученную истину как априорную синтетическую — это совсем не одно и то же. Трансцендентальное исследование совершает тот, кто *квалифицирует.* Если геометр *не* думает об априорности, ему нет необходимости вдаваться в трансцендентальные рассуждения.

С Вашим вторым замечанием (насчет «статуса разрешающей процедуры» и «обнаруживающейся парадоксальности») мне согласиться несколько труднее. Я *не* считаю, что эксплицитное знание той процедуры, которую Вы именуете «разрешающей», само по себе означает знание хотя бы одного решения (если таковых несколько) интересующей задачи. По-моему, точное знание, *как* я буду различать решения от не-решений (эксплицитное знание «разрешающей процедуры»), не означает точного знания мною, *что* является решением, тем более не означает *получения* хотя бы одного решения.

Я давно, например, знаю (причем очень эксплицитно), *как* отличить большую для меня зарплату от маленькой. Но до сих пор не знаю и не имею ни одного *конкретного* решения задачи — получать большую зарплату. Что здесь парадоксального? По-моему, все очень («до боли») тривиально.

Мне кажется («навскидку», без твердой уверенности), что иллюзия «парадоксальности» возникает по причине смешения двух вопросов; что обеспечивает *понимание* задачи и что обеспечивает *заинтересованность* задачей до того, как найдено ее решение. Первый вопрос — *предмет* моей статьи, второй — *нет.* Вот этот второй вопрос действительно вряд ли может быть прилично проанализирован в рамках одной логики. Здесь, по-видимому, не обойтись без психологии и, быть может, даже метафизики.

В.Я. Перминову

Я совершенно согласен с Вами в том, что «определяя априорное знание как знание относительное, мы определяем в действительности некий значительно более простой объект и существенно обедняем [откровенно говоря, *выхолащиваем*] кантовскую концепцию, так как оставляем в стороне глубокое различие между формой и содержанием мышления, которое лежит в ее основе». Однако я не склонен так категорично, как Вы, утверждать, что внесение относительности в понятие априорного знания входит в явное *противоречием* кантовским пониманием. Мне представляется, что абсолютная трактовка — возможный *частный* случай относительной. Если окажется, что некоторое суждение является априорным *относительно любой* познавательной задачи, то это суждение мы вправе считать априорным в *абсолютном* смысле. Я хочу сказать, что переход от относительной трактовки априорности к абсолютной требует дополнительного исследования. Мне представшется, что Кант такого исследования *не* провел, а заранее *предположил* его результаты.

В.А.Янкову

На Ваш комментарий мне ответить очень легко, поскольку я целиком разделяю Ваши соображения. К сожалению, я не могу подтвердить делом полное согласие с Вами. Движение в указанном Вами направлении предполагает, если я Вас правильно понял, такой глубокий уровень философской рефлексии, отважиться на который я не рискую. Просто не ощущаю себя способным на подобное предприятие, хотя было бы чрезвычайно интересно почитать литературу данного направления.

С.В.Добронравов

ПРОБЛЕМА АПРИОРИЗМА В РУССКОЙ ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ НАЧАЛА XX в.

Без сомнения, проблему априорности можно назвать «основным вопросом» философии математики: и исторически, и логически он всегда оказывался первым при философском осмыслении математического знания. Все другие вопросы и, соответственно, ответы на них находились в зависимости от того или иного решения этой проблемы. Выраженная впервые в мифопоэтической форме в диалогах Платона, она нашла свою четкую формулу в философии И. Канта, ставшего фактическим основателем философии математики как особого направления философских исследований. Именно Кант сделал понятие априорности специально-математической проблемой и задал тем самым направление и характер дискуссий последующих математических и философских изысканий.

Сам Кант, как известно, в своем решении проблемы априоризма исходил из современного ему научного знания (арифметики, геометрии Евклида и основанной на ней физики Ньютона), которое считал «необходимым и всеобщим» уже в силу самого факта его существования. Этой презумцией определились особенности кантовского априоризма, который для многих философов и ученых представлялся сущностью априористической философии. Но последующее развитие математических наук в конце концов поставило под сомнение справедливость взглядов Канта. Обнаружилось, что геометрия Евклида не является необходимым и единственным результатом деятельности мышления человека — были созданы новые геометрические системы, непротиворечивые и совершенно равноправные с первой; наглядность, на которой Кант основывал свой априоризм, все больше и больше исчезала из математики. Серьезным ударом по идее априорности стал тот факт, что в значительной мере эти новые научные достижения были сформулированы при сознательном неприятии и критике кантовского понимания характера математических положений; как известно, Лобачевский выступил в своих работах как сторонник противоположного, эмпирического взгляда на происхождение и сущность положений геометрии. Все это вело к дискредитации априоризма в глазах математиков XIX в., среди которых тогда распространились идеи эмпиризма, главным проповедником которого в это время был Дж.Ст. Милль: благодаря его влиянию среди математиков «укрепился предрассудок математического эмпиризма» [1]. Даже те, кто считал себя последователем Канта, как, например, Гельмгольц, поддались этому предрассудку и эмпирически объясняли происхождение и сущность математических суждений.

Однако априоризм не исчез: на его стороне было то преимущество, что он был не некоей психологической убежденностью, своеобразной идеологией деятеля науки, «освящающей» результаты его деятельности, а логически обоснованной теорией, основанной на непредвзятом изучении содержания «точных наук» и характера научной деятельности. Эмпиризм распространялся среди ученых, обычно не делающих свою деятельность предметом отдельного анализа, а потому легко воспринимающих некоторые обыденные взгляды на познание, большей или меньшей систематизацией которых и является эмпирическая философия. Но неспособность эмпиризма, традиционно слабо изучающего опыт конкретной работы ученого и содержание собственно научных теорий, была для всякого, кто делал это предметом своего исследования, очевидной и отказ от эмпиризма — неизбежным. Полное возвращение ко взглядам Канта, естественно, было невозможно. Послекантовский априоризм пошел по пути более или менее радикального реформирования философии Канта, особенно его понимания сущности математики. Свое выражение эти попытки нашли в неокантианском движении, объединявшем достаточно разнородные направления — от панлогизма Г. Когена до фикционализма Г. Файхингера, наиболее далеко ушедшего от «ортодоксального» кантианства.

Считается, что в русской философии этому движению «не повезло»: наиболее известный отечественный последователь Канта — А.И. Введенский — был «ортодоксальным» кантианцем, послушно воспроизводившим все основные положения «Критики чистого разума»; интересы других кантианцев были сосредоточены в основном на общественных и культурных вопросах, философскими проблемами математики и естествознания они специально не занимались. Таким образом, на первый взгляд, по проблеме математического априоризма в русской философии рассматриваемого периода ничего не было сказано. Однако такое мнение будет ошибочным. В данной статье будет показано, что в начале XX в. в русской философской литературе выступили два достаточно оригинальных автора, предложивших свою концепцию происхождения математического знания в свете дискуссий между априоризмом и эмпиризмом, — Г.И. Челпанов и П.С. Юшкевич.

Георгий Иванович Челпанов (1862—1936) более известен как автор многочисленных трудов по психологии и логике, основатель института психологии в Москве. Его учениками были такие известные философы и психологи, как Г.Г. Шпет, В.В. Зеньковский, П.П. Блонский, К.Н. Корнилов. В самом начале XX в. Челпанов опубликовал в журнале «Вопросы философии и психологии» серию статей по

206

проблеме априоризма, которые позднее составили второй том его исследования «Проблема восприятия пространства с точки зрения априорности и врожденности» (Киев, 1904). Здесь и представлены его взгляды на природу математических объектов.

Рассматривая философию математики Челпанова, следует прежде всего указать, что он понимает под терминами «априоризм» и «эмпиризм», «a priori» и «опыт», поскольку этим пониманием определяются все его последующие рассуждения. Челпанов доказывает, что эмпиризмом следует считать такую гносеологическую концепцию, согласно которой «наше познание складывается только из тех элементов, которые доставляют нам чувства. Познающий субъект от себя ничего не привносит; он оперирует только с тем, что получает от чувств, он соединяет только те элементы, которые получает извне, причем в процессе соединения следует тому порядку, в каком ощущения представляются нашему сознанию» [2, с. 419]. Кратко эту позицию, вслед за некоторыми эмпириками, можно охарактеризовать так: знание есть копия действительности. В истории философии она встречается достаточно редко (Кондильяк, Милль); обычно в сочинениях философов, считающих себя эмпириками, мы находим признание за познающим субъектом некоторой активности (как, например, у Локка, признававшего наряду с восприятием «второй источник» познания — рефлексию). Тем не менее это не опровергает определение эмпиризма, данное Челпановым. Все дело в том, что любое допущение какой-либо активности познающего субъекта эмпириком означает просто непоследовательность его рассуждений, поскольку противоречит его исходным принципам — «наше познание есть копия внешнего мира» [2, с. 420]. Любой эмпиризм, признающий в процессе познания за субъектом хоть какую-то активность сверх пассивной регистрации чувственных данных, внутренне противоречив и, следовательно, является эмпиризмом только на словах. Таким образом, опыт есть не что иное, как совокупность данных восприятия, или «наблюдения»; никакого другого опыта, кроме чувственного, т.е. ощущений, соединенных в той же последовательности, что и «вызвавшие» их предметы, воздействующие на субъект познания, не существует. Из этого следует, что имеющееся в философии различение между «эмпиризмом» и «сенсуализмом» фиктивно; это — два названия для одной и той же философской позиции. Челпанов их и отождествляет, говоря «эмпиризм, или сенсуализм». Соответственно априоризмом будет всякая гносеологическая теория, которая признает, что «к тому материалу, который доставляется чувствами», познающий субъект «привносит нечто, что в них не содержится» [2, 420]. Априорное знание — такое знание, которое не может быть получено индуктивно, выведено из данных наблюдения.

207

Исходя из этих определений, на которых он акцентирует внимание читателя на протяжении всей своей работы, Челпанов ведет свою критику эмпирического понимания математического знания и на ее основе затем выстраивает свою положительную философию математики. «Центр тяжести» его рассуждений сосредоточен на понятии числа (при этом Челпанов оговаривается, что будет рассматривать только понятие натурального числа, поскольку все другие числа являются производными от него). Объектом критики им избрана концепция числа классического представителя эмпиризма Дж.Ст. Милля.

Согласно эмпиризму, понятие числа есть результат индукции. Абстрагируясь от некоторых объективных свойств вещей, мы и получаем понятие числа, т.е. число есть копия некоторых свойств вещей, данных в нашем опыте, и, следовательно, «в самих вещах» «существует нечто такое, за что мы одним вещам приписываем одни числовые свойства, а другим вещам — другие» [2, с. 237]. Такое понимание числа, указывает Челпанов, находится в явном противоречии со всей деятельностью счисления. Из признания понятия числа индуктивным следует, что (в силу неполноты любой индукции) в любых вычислениях не может быть никакой необходимости и надежности, что, например, «2х2» может оказаться равным не «4», а какому-нибудь другому числу. Милль как один из наиболее последовательных эмпириков, должен был признать это; но в таком случае уничтожаются все математические науки, имеющие дело с понятием числа. Тем самым эмпиризм в своих рассуждениях просто игнорирует существование реальной науки, а отнюдь не дает ее объяснения со своей точки зрения. Но это еще не все: признав понятие числа результатом абстракции от объективных свойств вещей, следует указать, что же общего имеется в ряду различных предметов в том случае, когда им приписывается одно и то же числовое свойство. Считать мы можем все что угодно — волны на море, камни на земле, птиц в небе, мысли в своей голове, а что общего может быть у всех этих объектов? Ясно, что ничего. Число имеет универсальную применимость — оно одинаково приложимо к любым объектам как «внешнего», так и «внутреннего» мира, т.е. к «состояниям сознания» — мыслям, чувствам, эмоциям. Это означает, что понятие числа само по себе лишено всякого содержания, чисто формально, раз оно «приложимо к чему угодно» [2, с. 232]. Если бы понятие числа было абстракцией от каких-либо эмпирически данных свойств некоторых объектов, то оно носило бы содержательный характер и могло бы применяться только к тем объектам, от которых оно было абстрагировано, и ни к каким другим, поскольку оно в таком случае неизбежно включало бы в себя некоторые свойства

этих объектов: «Мы имели бы право считать то или другое арифметическое положение истинным только по отношению
208
к тем группам предметов, на которых мы произвели наблюдения, но мы не сочли бы себя вправе переносить результаты числовых наблюдений, которые мы произвели на одной группе предметов, на другие» [2, с. 241]. Например, если бы даже удалось показать, что имеется объективное общее свойство у всех предметов внешнего мира, данное в опыте, то полученное в ходе этой индукции понятие числа уже невозможно было бы использовать для счета «состояний сознания», качественно отличных от всех объектов внешнего мира и их свойств. Следовательно, путем абстракции от данных опыта понятие числа образовано быть не может, поскольку даже при абстракции высшей степени в понятии остается некоторое совершенно определенное содержание, замыкающее полученный результат абстракции в рамках некоторого рода или вида, исключающего все остальные. К тому же помимо того, что объекты разнородны, они еще и считаются по-разному. Объекты, данные в зрительном восприятии (камни, яблоки), сосуществуют, объекты, данные в слуховом восприятии (например, удары маятника), следуют друг за другом во времени и «все сразу» даны быть не могут. «Если для одной группы явлений причиной того, что мы им приписываем числовое свойство, является пространственная раздельность, то для другой группы яатений причиной числового восприятия является временная раздельность. Но, конечно, ввиду того, что между пространственной и временной раздельностью есть огромное различие, мы должны сказать, что нет того общего, что давало бы нам право приписывать вещам числовое свойство» [2, с. 239—240].

Таким образом, формальность понятия числа эмпиризм объяснить не в состоянии. Другой его недостаток — он неспособен объяснить, почему одному и тому же объекту можно приписывать различные числовые свойства без какого-либо изменения его самого. Например, передо мной лежит куча, сложенная из десяти ядер. Относительно этого объекта я могу с равным основанием сказать как «одна куча», так и «десять ядер». «Следовательно, вещи, которые физически производят на меня одно впечатление, я в одно и тоже время приписываю два числовых предиката» [2, с. 242]. Этот факт полностью противоречит эмпирической точке зрения, согласно которой все наши понятия полностью определяются данными опыта. «Опыт» один и тот же, а «выводы» из него совершенно различны. «В восприятии физических свойств вещей не может быть ничего подобного. Например, не можем же мы сказать относительно того или другого воспринимаемого нами цветового качества, что оно может быть в одно и то же время и красным, и синим, или не можем мы о каком-либо вкусовом свойстве сказать, что оно и сладкое, и горькое. Почему? Потому что эти восприятия и ощущения всецело определяются физическими качествами воспринимаемых предметов: мы в нашем восприятии находимся от них в зависимое -
209
ти» [2, с. 242]. Следовательно, в процессе счета мы к данным опыта добавляем нечто от себя, раз одни и те же данные наблюдения мы можем оценивать по-разному. «Таким образом, ясно, что не в изменении физических фактов мы должны искать источник возникновения идеи числа, но в каких-то особенностях самого сознания» [2, с. 243].

На основании этих фактов познания Челпанов и строит свой вариант априоризма. Если эмпирически фиксируемые объекты остаются без изменений, а их арифметическая оценка может быть изменена, значит, «изменяется что-то иное». В нашем примере с кучей из десяти ядер изменяется наша точка зрения на этот объект: в одном случае наше внимание было направлено на один его аспект (целостность), во втором случае — на другой (составные части). «Не физический факт в данном случае имеет значение, а обращение *внимания* на ту или другую сторону вещи» [2, с. 243]. Итак, делает вывод Челпанов, изменение внимания «и есть источник понятия числа» [2, с. 243]. Свою позицию он разъясняет на следующем примере. Допустим, я воспринимаю удары колокола; при их восприятии я замечаю, что мое внимание фиксирует каждый из этих ударов в отдельности, останавливается на каждом из них, почему они и не сливаются в моем восприятии в один непрерывный звук, т.е. я воспринимаю не только тот объект, на который направлено мое внимание, но еще и саму деятельность внимания, его остановки: «Я замечаю, что когда раздался один удар колокола, и я воспринял его, то мое сознание остановилось на восприятии этого звукового ощущения, а потом прекратило эту деятельность. Когда раздался другой удар, то я заметил, что мое сознание снова остановилось на восприятии звукового ощущения и снова принялось за работу, так как пауза была, так сказать, состоянием без деятельности. Я, следовательно, замечаю, что при восприятии ударов колокола мое сознание то работает, то перестает работать, то действует, то перестает действовать» [2, с. 244]. В нашем восприятии отдельный объект есть не только он сам, но еще и «остановка», а группа объектов — «остановка, остановка и т.д.». «Наша память может удерживать ряды таких остановок и замечать *качественные* отличия между одними и другими» [2, с. 246]. Понятие числа возникает тогда, когда эти качественные, разнородные отличия превращаются в количественные, однородные: «Качество переходит в количество именно таким образом, что усматривается своеобразная природа этих остановок, в них усматривается еще общий элемент, т.е. повторение одного и того же» [2, с. 246]. Деятельность внимания отвлекается от объектов, на которых она останавливается, т.е. отвлекается от своего *содержания,* и обращается на саму себя, делая своим объектом уже сами остановки, сами по себе совершенно одинаковые. «Таким образом, счисление возникает из сравнения остановок, которые

сознание констатирует, наблюдая свои собственные процессы» [2, с. 246]. Человек фиксирует свои собственные акты внимания: первоначально совершенно конкретно — жестами («счет по пальцам»), затем абстрактно — словами и символами. Отдельный акт внимания получает свое обозначение (в современной записи — «1»); тогда поскольку «остановки нашего сознания обладают тождественным, неизменным характером» [2, с. 251], то последовательности этих остановок внимания будет предстаатять собой «1» и «1», «1» и «1» и еще «1», и т.д., каждая из которых также может быть отдельно обозначена (скажем, «1» и «1» как «2», «1» и «1» и «I» как «3», и т.д.). Таким образом, число есть определенный комплекс знаков, каждый из которых обозначает отдельный акт внимания (по этому поводу можно вспомнить древнее пифагорейское определение числа как «совокупности единиц»; Челпанов в своем анализе фактически возвращается к нему, добавляя разъяснение, что же представляют собой эти единицы — они есть обозначения актов внимания). «Таким образом, понятие числа есть абстракция, но только абстракция не от каких-либо физических свойств, существующих во внешнем мире, как это принимает эмпиризм, а от *процессов сознания,* однообразно совершающихся в то время, когда мы вещам приписываем числовые свойства» [2, с. 248]. Это означает, что понятие числа не является изначально присущей нашему сознанию формой познания, как это обычно приписывается априористической философии, а *создается нашим сознанием, возникает* в процессе его взаимодействия с данными опыта: чтобы произошла остановка внимания, необходим какой-нибудь данный в опыте объект, на который оно может быть обращено. «Уже из этого можно видеть, что понятие числа есть продукт развития, <...> что оно не существует в уме в готовом виде. <...> Без так называемого внешнего опыта понятие числа не могло бы возникнуть» [2, с. 248, 253]. Но сам опыт является не источником, а лишь условием создания понятия числа, поводом для возникновения создающей понятие числа деятельности внимания. Этим объясняется и формальный характер числа, его безразличие к счисляемым объектам: внимание может быть напраатено на любой объект, оставаясь самим собой.

Таким образом, согласно Челпанову, априорные понятия возникают как некоторые средства человеческой деятельности. Человек ставит перед собой определенные цели; для осуществления этих целей он предъявляет некоторые требования к окружающей его действительности, исходящие из соответствующего направления его сознания; эти требования — условия возможности осуществления его действий, а потому они вытекают не из внешнего мира, а из его собственного существа в его взаимодействии с внешним миром, привносятся им во внешний мир «от себя». Они-то и есть априорные формы познания.

211

Если Челпанов в своих работах выступай защитником априоризма, то другой русский философ, занимавшийся проблемой априоризма в математике, П.С. Юшкевич, с этой философской позицией был совершенно не согласен, что не помешало ему в процессе своего анализа математического знания прийти к выводам, во многом совпадающим с соответствующими выводами Челпанова.

Павел Соломонович Юшкевич (1873—1945) изучающим историю философии известен главным образом как один из оппонентов В.И.Ленина, известный нам по книге Ленина «Материализм и эмпириокритицизм», из которого обычно и черпаются сведения о его философских взглядах. Более подробное исследование даст нам следующие данные: брат известного в свое время беллетриста Семена Юшкевича, активный участник русского социал-демократического движения, переводчик зарубежных трудов по социологии, философии и математике, автор многочисленных статей и эссе по философии, написанных в духе «научной философии» конца XIX — начала XX в., в главных из которых изложил свою собственную философскую концепцию, названную им эмпириосимволизмом, созданную под влиянием развития математики в XIX в. Специально философским вопросам математики Юшкевич посвятил свою работу «Априоризм, эмпиризм, эмпириосимволизм», опубликованную в третьем номере журнала «Вестник жизни» за 1907 г.

Как уже было сказано, априоризм Юшкевич не принимал. Основанием для этого ему служили следующие доводы. Во-первых, априоризм, согласно которому нашему уму изначально присущи некоторые математические принципы, имеющие в силу этого вневременной характер, не в состоянии объяснить, «почему эти априорные формы разума не обнаружились разом, не явились одним цельным блоком», а лишь постепенно проявляются во времени [3, с. 39]. Во-вторых, в современной математике существует несколько равноправных геометрических систем — Евклида, Лобачевского, Римана, — тогда как в случае существования априорных принципов наш «законодательствующий рассудок» мог бы создать только одну какую-нибудь из них — ту, которая воспроизводит присущие ему априорные формы познания, и уж никак не мог выдавать теории, основывающиеся на противоположных принципах и потому исключающие одна другую, как указанные геометрические системы.

На первый взгляд, последний аргумент представляется необоснованным смешением априоризма с теорией «врожденных идей», против которой, как известно из истории философии, априоризм был как раз направлен. Тем не менее он совершенно справедлив. Вспомним утверждения основателя априористической философии И. Канта. Согласно Канту, нашему сознанию изначально присуща определенная «априорная форма созерцания» — пространство, — которая и «отвечает» за построение евклидовой геометрии и ее

212

свойств необходимости и всеобщности; никакой другой геометрической системы из этой априорной формы получить невозможно. Правда, Кант говорит, что другие разумные существа могут обладать иными априорными формами и, соответственно, построить иные геометрии, но к человеку это не относится. Человек имеет только одну форму внешнего созерцания, и следовательно, только ее и способен воспроизводить в своих геометрических конструкциях, поэтому-то евклидова геометрия и имеет, согласно Канту, необходимый характер. Таким образом, кантонские априорные формы действительно представляют собой некий «рудник априорных истин», как иронически пишет Юшкевич, из которого можно добыть только один определенный сорт «вечных истин» и никакой другой.

Приведенные аргументы против априоризма обычно высказывались сторонниками эмпирического понимания математики. Но для Юшкевича отказ от априоризма отнюдь не означал принятия эмпиризма. Последний для него так же несостоятелен, как и априоризм. Эмпиризм Юшкевич понимает так же, как и Челпанов: «все наше знание получается лишь путем индукции из непосредственного чувственного наблюдения» [3, с. 23]. И вот оказывается, что те же самые аргументы, которые выдвигаются против априоризма, являются вместе с тем и убедительным опровержением эмпиризма. В самом деле, «ссылка на опыт... не объясняет все-таки наличность в нашем уме различных систем геометрии. Если бы, допустим, опыт высказался за геометрию Евклида, этим все-таки не объяснялось бы то. что мы имеем в своем мозгу и геометрию Лобачевского, т.е. логически связную систему суждений, противоречащих евклидовой геометрии, противоречащих, следовательно, опыту» *[3,* с. 38]. Как видим, свести всю геометрию на индуктивные обобщения принципиально невозможно в ней сразу же выявляется разрыв с опытом. Обратившись от геометрии к арифметике, получим те же свидетельства несостоятельности эмпиризма. 7 + 5 = 12. «Это получено нами и закреплено в нашем мозгу как результат векового опыта, говорит эмпирик. Но дело в том, что сложение не есть копия чего-то, встречающегося в нашем чувственном опыте... В непрерывном многообразии, каким является картина нашей чувственности, выделяются различные, сходные между собой особи: деревья, люди, камни... Но эти особи не выстраиваются в арифметические группы, не соединяются и не разъединяются между собой» [3, с. 27]. В опыте имеются лишь чисто качественные данные, тогда как предмет математики — количество. Например, известно, что кочевники-скотоводы способны тщательно отслеживать поголовье своего стада, хотя зачастую вообще не умеют считать: для такого человека отсутствие в его стаде, скажем, «двух овец» будет предстаатяться не Количественно, а качественно — не хватает этой овци и еще вот этой. Итак, понятие числа из опыта получить невозможно, «чисел в непосредственном опыте нет» [3, с. 3I]. Любые, даже схожие друг с другом объекты в опыте даны совершенно независимыми друг от друга: в опыте они не складываются друг с другом, не вычитаются друг из друга, не делятся и не умножаются друг на друга. Их разбиение на какие-либо числовые группы и установление определенных отношений между ними («+», «—», «x», «:» и т.д.) — результаты *наших собственных* операций с этими данными опыта. Вот в чем основополагающая ошибка эмпиризма: он совершенно не учитывает факт активности нашего сознания, а потому «сам резко расходится с опытом» [3, с. 23]. Данные восприятия человек способен комбинировать по своему произволу, в соответствии со своими целями и потребностями, выделять одни из них и игнорировать другие, превращать одни из них в заменители других (т.е. в знаки, символы). «Этим открывается возможность для необъятного множества психических новообразований, переходящих границы того сырого эмпиризма, по которому наш ум — лишь послушный копировальщик данных чувственности» [3, с. 23]. Вот эту творческую способность нашего сознания, возможность вносить в данные наблюдения нечто новое, созданное нами и кладет П.С. Юшкевич в основу своего собственного решения «загадки математического априоризма».

Итак, все наши понятия, или идеи, бывают двух видов — данные нам и созданные нами. Данные — например, «человек», «овиа», «камень»; «созданные» — например, «кентавр», «сирена», «гиппогриф». «Математические идеи принадлежат к этой второй группе» [3, с. 42]. Все содержание математики есть ни вывод из данных опыта, ни выявление вневременных априорных форм, а создание нашего сознания, подобно мифологическим и художественным образам. Отличие ее суждений от суждений мифологии или художественного творчества состоит в том, что последние независимы друг от друга и соединяются в одно целое совершенно механически, тогда как суждения математики соединены между собой «имманентной логической связью". «Если мы создали образ гиппогрифа, то мы можем на основании его сказать, что "гиппогриф летает", или "гиппогриф скачет", ибо это вытекает из нашего образа. Но если мы скажем, что "гиппогриф изрыгает пламя", то это уже новое суждение, усложняющее и обогащающее первоначальный образ гиппогрифа, но суждение, независимое от первых двух, самостоятельное и созданное особым, самостоятельным актом творчества» [3, с. 42]. В математике же сознание творческим актом создает несколько исходных понятий, действуя при этом совершенно свободно, «но разданы нам эти предпосылки, выводы вытекают из них с объективной, независимой от нас необходимостью» (3, с. 42] в отличие от суждений об эмпирических объектах, случайных и

214

независимых друг от друга. Математические истины отличаются от эмпирических так же, «как от последних отличаются положения шахматной теории: своим условным, произвольным, но потому и безупречно строгим характером» [3, с. 35].

Действительно, предметы любой игры и правила действий с ними совершенно произвольны, «сделаны» от начала до конца, но следствия, вытекающие из этих правил, будут уже абсолютно однозначны, всеобщи и необходимы, как и положения «чистой» логики и математики. И наоборот, математика имеет такие характеристики, потому что, как и любая игра, создана (а не «открыта») мышлением. Мы задаем (т.е. создаем) некоторые исходные понятия и правила их соединения между собой; согласно этим правилам, получаем «ряд выводов, теорем. Если мы изменим наши условные посылки, то разумеется, и выводы получатся иные» [3, с. 38]. Но изменение исходных условий, создание каких-либо новых понятий, или правил соединения понятий, не устраняет уже существующие математические системы: новая система понятий независима от предыдущей и никак на нее влиять не может, поэтому все они будут равно необходимы в своих следствиях.

Что же представляют собой эти «искусственные» понятия, почему недостаточно одних понятий о данном? Они — средства успешного взаимодействия человека с окружающей средой, отвечает Юшкевич. Как нечто «данное» природа предстает перед человеком «в виде необозримой пестрой массы объектов» [3, с. 32]. Для того чтобы произвести какие-либо действия, человеку необходимо как-то сориентироваться в этом потоке чувственного наблюдения, определенным образом сгруппировать данные своего опыта в соответствии со своими целями и потребностями. Средствами этой группирующей деятельности и являются все созданные идеи; они — не что иное, как знаки, символы определенных человеческих действий, и зависят они не от данных опыта, поскольку, наоборот, определенным образом упорядочивают его, а от практических потребностей человека. «И чем сложнее делаются наши отношения к окружающему, включая в него и общественную среду, тем сложнее и богаче делаются нужные для этого символы» [3, с. 32]. Поэтому математические символы появляются лишь на достаточно высоком уровне развития взаимодействия человека с окружающей средой и зависят, таким образом, от определенных социальных отношений, которые и составляют ближайшую для человека окружающую среду. В связи с вышеизложенным математика как совокупность различных символических систем не может носить замкнутый, завершенный характер, как это следует из учения априористов. С любыми символами мы также можем производить некоторые операции, как и с эмпирически данными предметами, и тогда необходимо создавать новые символы — символы для символов и т.д. Благодаря этому

215

математика способна непрерывно развиваться — и не только количественно («изобретение» новых теорем), но и качественно (формализация и т.д.). Так, «эволюция понятия числа — от целого числа к положительному (т.е. включая и дробные числа), от положительного к рациональному, от рационального к комплексному и т.д. представляет картину наслоения символизации друг на друга, все обогащавших науку чисел» [3. с. 25].

Заключение

Нетрудно заметить, что, несмотря на различное отношение к априоризму, Г.И. Челпанов и П.С. Юшкевич приходят к одним и тем же выводам. И тот и другой отрицают индуктивность математических понятий, считают их продуктом деятельности человеческого сознания и видят в них средства освоения человеком внешнего мира. В свете этого следует заметить, что самооценка Г.И. Челпановым предлагаемой им концепции как априоризма гораздо более адекватна, чем у П.С. Юшкевича, видящего в своем эмпириосимволизме «средний путь» между эмпиризмом и априоризмом, который «возвышается над обеими сторонами» [3, с. 34]. Действительно, признание того, что некоторые элементы познания вносятся познающим субъектом в опыт, а не выводятся из него, и составляет суть априоризма — это его *единственный* признак. Отрицательно априоризм можно определить просто как не-эмпиризм. Являются ли такие элементы свойством самого познающего субъекта или созданы им? Различный ответ на этот вопрос образует различие не между априоризмом и не-априоризмом, а между различными типами априоризма; априоризмом является все, что не есть эмпиризм; таким образом, и кантонское учение об априорных формах созерцания и рассудка, и конвенционализм, и эмпириосимволизм П.С. Юшкевича, и различные социокультурные концепции математики, согласно которым математические теории произведены социально-исторической практикой социального субъекта либо являются выражением его психических особенностей (как у Шпенглера), — все это различные виды одного рода — априоризма. Речь может идти лишь о том, какая из этих форм априоризма является наиболее совершенной. И рассмотренные нами концепции дают на это однозначный ответ. Как было показано выше, традиционный кантовский априоризм не в состоянии объяснить развитие математического знания, особенно в геометрии, и прямо несовместим с этим фактом. Даже Г.И. Челпанов, который считал себя лишь последователем и разъяснителем кантовских идей, в своем учении о числе, в котором, собственно, и сформулирована его версия априоризма, совершенно не использует соответствующие положение Канта; понятие числа для него не имеет никакого отношения к понятию

времени (тогда как связь между ними составляет одну из основ кантовского априоризма), образуется не благодаря какой-либо присущей сознанию трансцендентальной форме, а благодаря деятельности внимания, которая сама по себе относится к сфере эмпирического; вопреки Канту Челпанов утверждает, что вообще все априорное создано сознанием, а не есть нечто изначально ему присущее. Но все созданное, в свою очередь, создается при наличии некоторых условий (на что указывает и сам Челпанов), в число которых неизбежно следует включить условия социального бытия и даже признать их основными: природные факты сами по себе не способны быть такими условиями, иначе человек на любой стадии своего социально-исторического развития мог бы образовывать какие-нибудь математические понятия, чего в действительности не происходит. Итак, последовательное развитие априоризма необходимо должно привести к социокультурному пониманию математики; любой другой путь ведет обратно к априоризму Канта, находящемуся в противоречии с современной математикой.

Список литературы

1. Новые идеи в математике. Сб. 8. СПб., 1914.
2. *Челпанов Г.И.* Проблема восприятия пространства с точки зрения априорности и врожденности. Киев, 1904.
3. *Юшкевич П.С.* Априоризм, эмпиризм, эмпириосимволизм // Вестник жизни. 1907, N° 3.

КОММЕНТАРИЙ

А.В. Михайловский

Одним из важных выводов статьи С.В. Добронравова, безусловно, является строгое разграничение априоризма и эмпиризма и указание специфики априорного знания: «Признание того, что некоторые элементы познания вносятся познающим субъектом в опыт, а не выводятся из него, и составляет суть априоризма; это его *единственный* признак... Являются ли такие элементы свойством самого познающего субъекта или созданы им? Различный ответ на этот вопрос образует различие не между априоризмом и не-априоризмом, а между различными типами априоризма». Впрочем, соглашаясь с таким определением, нельзя не удивиться следующей постановке вопроса: все формы априоризма носят свое имя по праву, поэтому речь может идти лишь о том, какая из этих форм априоризма является наиболее совершенной? Но если относиться к априоризму как *философской* проблеме, не ограниченной рамками «философии математики», вопрос должен быть сформулирован

217

иначе: в какой мере все перечиненные виды априоризма — и кантовский в том числе — способны раскрыть сушность априори как деятельности активного субъекта, осваивающего объекты как некие «нагромождения» эмпирических фактов (в этом смысле, на мой взгляд, неправомочно сопоставлять учение Челпанова с пифагорейским *онтологическим* учением о числах)?

Также весьма проблематичным представляется основной тезис автора, что «последовательное развитие априоризма необходимо должно привести к социокультурному пониманию математики; любой другой путь ведет обратно к априоризму Канта, находящемуся в противоречии с современной математикой». С одной стороны, автор ставит «социокультурные концепции математики» в один ряд с различными неэмпирическими учениями (от Канта до Пуанкаре и Шпенглера), а с другой — говорит о социокультурном понимании математики как некоем необходимом результате (финале?) «развития априоризма». Здесь уместен еще один вопрос: в каком смысле говорится о «развитии» и разве не является возвращение к Канту (а затем и к Платону с его пониманием «априорности» идеи как «первого по природе») единственно возможным путем философского осмысления априорного?

ОТВЕТ АВТОРА

В каком смысле можно говорить о развитии априоризма? Этому вопросу специально посвящена одна из статей нашего сборника («Регресс математического априоризма» А.Г. Барабашева). Вне зависимости от оценок самого факта под развитием (прогрессивным или регрессивным) понимается *изменение* априоризма под воздействием изменений в самом математическом и естественно-научном познании, на статус теории которого и претендует любая версия априоризма, поэтому ее соответствие всей системе научной деятельности — основной критерий ее развитости, автором которого можно считать основателя первой классической версии априоризма — И. Канта, заявлявшего, что в своей философии он исходит из *факта* существования математики и естествознания и строит ее как осмысление этого факта. Таким образом, различные версии априоризма способны раскрыть «сущность a priori» в той мере, в какой они соответствуют реальному положению дел в математике и естествознании, и только от этого соответствия зависит теоретическая значимость подобного рода философских построений. Поскольку же соответствие различных априористических концепций своему предмету может иметь различные степени, что обусловлено изменениями в нем, то они будут иметь различную

степень развития и, следовательно, могут
218
сопоставляться и сравниваться друг с другом как принадлежащие к одному роду, несмотря на все их различия между собой.

Таким образом, «возвращение к Канту» с его апелляциями к наглядности математического знания и прочими утверждениями, отражающими состояние современной ему математики, ничего сегодня не даст нам для понимания и объяснения математики в целом, а потому бессмысленно. Уже менее чем через сто лет после смерти Канта математика стала совершенно иной — даже в тех областях, которые сам Кант брал за «точку отсчета». Не «назад к Канту», а «вперед от Канта» — таким должен быть девиз современного априоризма, если его сторонники желают признания значимости своих построений.

А. В. Михайловский

«НОВОЕ АПРИОРИ» ГУГО ДИНГЛЕРА»

Гуго Динглер в своих исследованиях исходит из ситуации кризиса (крушения) науки, усматривая его причины в отрыве понятий от действительности. Как и Гуссерль, он занят поисками подлинного основания, в которых руководствуется процедурой «эпоху», ведущей к нулевой точке (Nulipunkt). Возводимая заново «система чистого синтеза» является абсолютно недогматической: она весьма серьезно ограничивает чистое описание и чистую теорию, основываясь на практической укорененности человека в мире. Новый проект реконструкции оснований точных наук исходит из «нового» понимания априори, которое сближается с практической сферой.

1. Априоризм Канта и априоризм Динглера

Своеобразие трансцендентализма Канта состоит в том, что от чего-то уже данного, уже наличного, не представляющего в смысле своей значимости проблемы, совершается движение вспять, объясняющее *почему* это необходимо. Это движение *(трансцендентальной) реконструкции.* Его конечным результатом является открытие «условий возможности». В «Критике чистого разума» Кант исходит из того, что: 1) имеются положения, необходимые для мысли, они являются априорными; и 2) опыт никогда не дает своим суждениям истинной или строгой всеобщности, но сообщает им только условную и относительную всеобщность (посредством индукции). Стало быть, необходимость и строгая всеобщность суть верные признаки априорного знания. И далее Кант утверждает, что найти (стоит только поискать!) эти чистые априорные суждения совсем просто — например, указать на все положения математики или
219
положения естествознания. Поэтому первыми вопросами Канта, определяющими ход мыслей в «Критике чистого разума», являются вопросы об обосновании наук: *«Как возможна чистая математика?» и «Как возможно чистое естествознание?».*

Итак, средоточие вопросов КЧР и, в частности, «Пролегомен» таково: *как* можно объяснить знание человеком (изначально) достоверной истины математики и естествознания, иначе говоря, начал евклидовой геометрии и ньютоновской механики? Задавая свой «трансцендентальный вопрос». Кант желает *прояснить* познание, отыскивая его априорную основу, которая лежит глубоко скрытою, но должна открыться через свои проаяпения, если только проследить их вплоть до первых начал (Пролегомены, § 6). Основное различие Канта формулируется так: хотя все наше познание начинается с опыта, однако оно не целиком происходит из опыта (Введение к КЧР). Помимо опыта необходимы независимые от опыта, делающие его возможным «формы» (чистое созерцание времени и пространства, а также категории).

Проблемой *«нового априори»* Динглер специально занимается в своей центральной систематической работе «Эксперимент. Его сущность и история» (1928)[1]. Касаясь «чистого созерцания», Динглер утверждает, что у Канта оно «должно дать абсолютно точное познание эмпирических отношений, как оно присутствует, например, в геометрии. Как в свою очередь может быть обосновано это учение, для Канта более не проблема. Сами его допущения остаются проблематичными... Следовательно, в том, что касается последней значимости, Канта следует назвать догматиком. Что касается последней значимости, то Кант не дошел до последнего основания» (Metaphysik, 278 ff.).

Лишь благодаря тому, что Кант, грубо говоря, приводит в «одно и то же место» формирующую деятельность духа и данное (das Gegebene), которое подлежит оформлению, а именно благодаря тому, что реальность в качестве яыения входит в дух (а вещь сама по себе остается, так сказать, «снаружи»), он способен представить себе возможность непосредственного воздействия априорной формы на данное. Лишь так он может продемонстрировать то, что опыт сообразуется с нашими априорными законами, ибо в действительности результат воздействия есть явление; и поскольку последнее встречается с априорными формами, так сказать, в одном и том же месте, то такое воздействие является чем-то вполне представимым.

В своей критике Канта Динглер останавливается на «априорных законах» (речь идет о законах геометрии, времени, кинематики и чистого естествознания) и обходит вниманием параграфы КЧР, где исследуются остальные априорные формы, а именно область

220

трансцендентальной логики (поскольку, по Динглеру, они не попадают в сферу априорных законов).

«*... Тем геометрическим образованиям (ради простоты мы ограничились лишъ примером с геометрией, но аналогичные тому интерпретации, естественным образом, имеют силу и по отношению к учению о времени и "чистому" естествознанию), которые Кант, не уточняя, рассматривал как данные формы нашего чистого созерцания, мы даем дефиниции, пользуясь определенными (ранее — бессознательными) требованиями[2]. Далее, связь этих определений с реальностью осуществляется не так, как у Канта, где материал переживания, или "явление", смещается в непосредственную близость к якобы чистому созерцанию, а так, что мы, в силу нашей непосредственной связанности с реальностью, (нашими руками) непосредственно изготовляем в реальности такие формы, которые соответствуют нашим определениям.*

Ясно следующее: на этом пути осуществляется подлинное "априори", правда, совсем иное по способу своего устройства, нежели у Канта. Ибо в нашем случае вся совокупность свойств этих фигур (плоскость, прямая, твердое тело = аксиома о параллельных и вся геометрия) констатируется до направленного на них "опыта", т.е. исходя из дефиниции этих образований (Gebtlde), которая дается нами самими заранее (пусть это будет бессознательно, как раньше, или же сознательно, по результатам этой книги). Тогда этот вид априори не есть уже нечто непредставимое или непроясненное в своей сущности (как то было у Канта).

Ведь в тех случаях, когда я способен изготавливать предметы по образованному мной заранее плану, этот вид априори всплывает всегда. Когда мастер строит дом по определенному плану, он в состоянии предсказать на основании своего плана свойства дома. То же применимо и к технику, который строит машину или мост, или к политику, который, обладая властью, организует определенное законодательство или форму экономики.

Отныне этот вид априори ни в кого не сможет вселить страх: ведь мы *постоянно применяем его в повседневной жизни.*

Это новый вид априори, который мы, как кажется, с полным успехом смогли применить в этой книге вместо его кантовской разновидности. Этот вид можно было бы назвать особым именем "дефиниционного априори" или <.,.> "априори изготовления"» (Herstellungsapriori).

Далее следует провозглашение определенной программы:

Пришло время повсеместно освободиться от позиции чистого описания и обратиться, наконец, к фундаментальному значению «точки зрения изготовления».

Для лучшего понимания этой разновидности «априори» можно представить геометрические формы как «цели для специальных
221
действий» (Ziele fur Zweckhandlungen). В этом смысле можно сказать, что Динглер идет дальше Канта, у которого сами априорные формы чувственности и рассудка, целиком и полностью оправданные как условия возможности точного естествознания, остаются непроясненными как заложенные в субъекте в готовом виде. Здесь же априорные «элементарные формы», понятые как дефиниции (т.е. отграниченные посредством определения, definitio), выступают в роли «требований», реализуемых нами в действительности. Таким образом, это отношение ставится на более широкий фундамент действия (Handeln), что в конечном счете и позволяет привести в соприкосновение сферы «чистого» и «эмпирического».

Динглер различает априори в несобственном и собственном смысле. Первое обычно представляется как «мыслительное априори» (Denkapriori). В таком случае основывающиеся на нем «идеальные науки» (арифметика, геометрия, хронометрия и кинематика с механикой) будут являться продуктами мысли. Априори в собственном смысле — это априори для действительности, т.е. «реальное априори» (Realapriori).

Свое отношение к Канту Динглер формулирует и в другом месте. «Для Канта быть a priori — значит оказывать формирующее воздействие на феномены, быть условием возможности опыта. Но у Канта отсутствует абсолютное доказательство для его утверждений. Для него они, так сказать, психологические гипотезы.

В этом отношении ситуация с нашей системой (Aufbau) совершенно иная. У нас формы идеальных наук <...> не наличествуют в природе как всеобщие законы. Напротив, эти формы *«реализуются»* нами самими, т.е. мы сами изготавливаем эти формы» (Die Ergreifung des Wirklichen, 47 ff.).

2. Метафизические выводы из концепции «нового априори»

Согласно Динглеру, высказывания о геометрических образованиях являются для Канта всегда суждениями о данном и прежде всего — умственно данном, которое в то же время — что как раз характерно для него — есть и реально данное...

«В случае Канта встает вопрос, почему мы, «.всматривая» геометрию в реальность, не вкладываем ее туда с абсолютной точностью, но всегда обременяем ее неточностями конкретного измерительного процесса. У Платона идеальные геометрические понятия существуют сами по себе, а какие-нибудь реальные образования, подпадающие под определенное понятие, связаны с ними через "причастие" (metecheiri) (Arist. Metaph. I. 987b). Однако у этих философов высказывания о геометрическом всегда становятся высказываниями о чем-то (каким-то образом) сущем. <...>

222

В основании всех этих точек зрения, равно как и теоретической физики, лежит мысль, заключающаяся в том, что геометрические понятия являются представлениями, например, для прояснения и представления реальности.

В нашем же случае отношения таковы, что, к примеру, пюскость не является простым представлением, а также не обладает непосредственным эмпирическим бытием. Скорее, она есть, так сказать, "цель действий", не смысл, а долженствующее-бытъ (Sein-Sollendes), предмет стремления (Anzustrebendes), изготавливаемый нашими руками, или же — если он уже где-то наличествует в реальности — узнаваемый в качестве соответствующего нашим дефинициям.

Итак, можно было бы с уверенностью сказать, что она — идея, которой в большей или меньшей степени соответствуют реальные объекты. Только у нас эти понятия не являются догмами, как <...> правильно полагает Файхингер; они не могут быть ими, так как никоим образом не сводятся к утверждениям о бытии (что для эмпирика кажется само собой разумеющимся), а к дефинициям, и притом таким, которые из прагматических оснований производят в реальности, однозначно воспроизводимые формы.

Стало быть, можно с полным правом утверждать, что едва ли какой-то предмет (в смысле Мейнонга) мог бы более полно отвечать понятию идеи, чем наши элементарные формы, соответствующие такому пониманию этого понятия, какое имплицитно присутствовало у Платона и в более позднее время развивалось значительнейшими мыслителями (в особенности Кантом)».

Итак, Динглер предлагает называть свои геометрические формы не чистыми формами мысли и не чистыми реальными формами, а «практическими» или «целевыми формами», «энтелехиями»[3].

Благодаря такому пониманию иначе осмысливается задача науки. Речь уже не идет о получении «законов природы» в старом смысле, т.е. об извлечении вечных аподиктических, нагруженных необходимостью законов. Ученый занят тем, чтобы «получить в руки» реальные отношения, конструируя их из воспроизводимых элементов и ограничивая (дефинируя) их настолько, чтобы иметь возможность однозначно изменять эти отношения и благодаря этому овладевать ими. Иными словами, разрушается старое магическое представление о наличии некоей потусторонней сущности под названием «природа», якобы отвечающей исследователю на его вопросы. Она подвергается жесточайшей критике под именем «машины мира». И здесь Динглеру удается *наиболее последовательно сформулировать и разработать первоначальный смысл новоевропейского естествознания, основанный на метафизике господствующего субъекта.*

В сознании современных ученых, как правило, происходит разделение между незаинтересованным исследованием, чистой теорией
223
и практическо-техническим применением ее результатов. В системно-функционалистских рамках теории также сохраняется различие между «чистой» и «прикладной» наукой. Под наукой разумеется сложная система, черпающая свои inputs из предметного мира и превращающая их в outputs, полезные с прикладной точки зрения. Концепция «нового априори» и вырастающая из него программа делает такой образ функционирования научного знания весьма проблематичным. Ведь вопрос, почему наука стала столь успешной именно в техническом отношении, нельзя разрешить в рамках подобного функционалистского подхода. В Новое время связь между наукой и техническим господством над природой является необходимой, при том что техника и проясняющая ее метафизика предшествуют научному познанию окружающего мира. Высказывания отцов

новоевропейского естествознания явным образом свидетельствуют о задачах науки как грандиозного человеческого предприятия. Для Бэкона природа есть «regnum hominis», Декарт именует человека «maitres et posseseur de la nature», Гоббс высказывается о науке как о разновидности основной антропологической категории власти: «scientia propter potentiam». И современная теория науки, похоже, упускает из виду центральную методическую проблему: *как следует строить науку на основании активного, стремящегося к овладению природой субъекта.*

С этой точки зрения, «методическая философия» Динглера представляет собой полезный вклад в разрешение этого вопроса. *Реконструкция оснований точного естествознания, проводимая Динглером, способна показать, что такое нововременное предприятие, как экспериментальное естествознание, является упорядоченно-прагматическим овладением действительностью, исходящим из «воли к однозначности» и оперирующей элементарными дефинициями.*

3 Развитие концепции «нового априори» в позднейшей теории науки: раскрытие смысла «нового априори» как «априори жизненного мира»

Итак, Динглер вслед за Кантом предпринимает попытку априорного обоснования науки. Согласно его «критическому волюнтаризму» или «оперативизму» (так Динглер обозначает свой проект)[4], первые общие положения точных наук должны полагаться и удостоверяться в своей значимости в соответствии с «волей к однозначности», волей к построению науки как «овладения действительным». Геометрические аксиомы должны логически выводиться из описания «идей», которые в качестве идеальных представлений цели руководят изготовлением телесных форм, например плоских поверхностей и, наконец, твердых измерительных приборов. Роль своеобразного индикатора этих изменившихся отношений играет
224
понятие «априори изготовления», которое у последователей Динглера истолковывается как «априори жизненного мира».

Оперативная, или конструктивная, теория точных наук вводит новое методически ориентированное понимание синтетического априори, которое Кант понимал как основную предпосылку математически сформулированной эмпирической физики. Физическую эмпирию делают возможной «синтетические части» точных наук: математика, выводимая из конструктивной арифметики, и теория идеальных форм, обосновывающая измерения длины, времени, массы (неэмпирическая теория измерения). Таким образом, в логике, математике, геометрии, кинематике происходит разработка оперативных моделей, занимающих место аксиоматического метода. Результатом является всеобщая программа «конструктивного метода», требующая сведения наук как дистилляции повседневной практики к «жизненному миру» (ср. проекты Дильтея и Гуссерля).

Линию Динглера во многом продолжает эрлангенская школа конструктивистов (Лоренцен, Яних).

Юрген Миттельштрасс, симпатизирующий конструктивистам, показал, что «априори жизненного мира» складывается из «априори различения» (предикация, различение) и «априори изготовления» (протофизика) и обозначает генетическое (логико-методологическое) начало любого последовательного построения точноД науки («динглеровская система»). В любой практике всегда уже содержится «эмпирическое априори» (дотеоретическое умение различать), равно, как и донаучное умение изготавливать. Его нормированная артикуляция является условием изготовления измерительных приборов («протофизическое априори»). Иначе говоря, донаучный опыт используется для изготовления естественно-научных измерительных и экспериментальных приборов, равно как и для оперативного обращения со знаками в математике. Так образуется *опытное априори* (Erfahrangsapriori)[5].

Динглеровский проект реконструкции точной науки находится в одном русле со значительными философскими попытками 20— 30-х гг., нацеленными на возвращение к истокам и новое обоснование (Neugriindung) теоретического знания (Гуссерль, Хайдеггер). Характерно для Динглера и полемическое размежевание с неокантианством (Кассирер. Понятие субстанции и понятие функции. СПб., 1912), выступавшим под именем «эмпирического матричного априоризма». В этом смысле предсташшется вполне обоснованным сопостааление «нового априори» с «жизненным миром» из «Кризиса европейских наук». Тогда «новое априори» выступает как некий «методический» эквивалент сформулированного Гуссерлем отношения между дотеоретическим и теоретическим «опытным разумом» (Erfahrungsveraunft), а выражение «жизненный мир» обозначает трансцендентально-методический базис конструктивной теории обоснования и совпадает по смыслу с термином донаучный[6].

225

Примечания

[1] Нижеследующие цитаты, выделенные курсивом, приводятся по: *Дингяер Г.* Эксперимент. Его сущность и история // Вопросы философии. 1997. № 12.

[2] Дефинициями геометрических фигур, которые призваны заменить аксиомы евклидовой геометрии, Динглер называет простейшие требования к геометрическим образованиям: плоскости, прямой и точке — «элементарным кирпичикам» (Elementarbaustcine) геометрии. Не из аксиом, а из таких дефиниций выводятся все научные высказывания о свойствах тел, т.е. вся система евклидовой геометрии. Пауль

[3] Наторп. например, называет идеи «методами».

[4] Ср. «операционализм» Бриджмена.

[5] Это словосочетание не является парадоксом, ибо в собственном смысле a priori следует понимать не как «до-опытное», а как «более раннее по своему происхождению».

[6] Здесь необходимо отметить, что, заимствовав идеи динглеровского оперативизма, немецкие конструктивисты отказались от фундаментального для Динглера притязания на «последнее обоснование» науки в донаучной «воле к однозначности», связанной с традицией европейской метафизики.

Источники

1. *Динглер Г.* Эксперимент. Его сущность и история // Вопросы философии. 1997. № 12.
2 . *Dingier H*. Der Zusammenbruch der Wissenschaft und der Primal der Philosophic. Munchen, 1926.
3. Metaphysik als Wissenschaft vom Letzten. Munchen, 1929.
4. Die Grundlagen derGeometrie. Stuttgart, 1933
5. Die Methode der Physik. Miinchen, 1938
6. Die Ergreil'ung des Wirklichen. Hrsg. W. Krampf. Miinchen, 1955.
7. Aufbau der Exakten Fundamentalwissenschaft. Hrsg. P. Lorenzen. Munchen, 1964.
8. Aufsatze zur Methodik. Hrsg, U. Weiss. Hamburg. 19S7.

Список литературы

1. *Динглер Г.* Современная западная философия: Словарь / Сост. В.С.Малахов, В.Л.Филатов. 2-е изд., перераб. и доп. М., 1998.
2. *Динглер Г.* Новая философская энциклопедия: В 4 т. М.. 2000. Т. 2.
3. *Lorenz К.. Mittelstraβ J.* Die Methodische Philosophic Hugo Dinglers // Hugo Dingier. Die Ergreifung dcs Wirklichen. Кар. I—IV. Frankfurt, 1969. S. 7—55.
4. *Sanborn H. C.* Dingler's Methodical Philosophy // Methodos 4 (1952). P. 191-220.
5. *Weiss U.* Hugo Dinglers methodische Philosophic. Mannheim, 1990.
6. *Willer J.* Relativital und Eindeutigkeit. Hugo Dinglers Beitrag zur Begriindungsproble-matik. Meisenheim, 1973.

7. Methodische Philosophie und konstruktive Logik. Bemerkungen zu den Begriindungs-entwurfen von Hugo Dingier und Paul Lorenzen // Kant-St. 64 (1973). P. 497—508.

КОММЕНТАРИИ

А.А. Веретенников

1. Цель моего комментария — рассмотреть один из тезисов, представленных А. В. Михайловским в настоящей статье, а именно возможность рассмотрения понятия «нового априори» Г. Динглера
как коррелятивного по отношению к выдвинутым Э. Гуссерлем понятиям практической и теоретической установки в рамках «жизненного мира». Пункт 2 посвящен краткому обзору концепции «жизненного мира» Э. Гуссерля, 3 — рассмотрению в этом контексте понятия «новое априори» Г. Динглера. Четвертый пункт не имеет прямого отношения к теме, но, на мой взгляд, он необходим, так как содержит некоторые соображения по поводу возможности диалога различных традиций.

2. Для Гуссерля человек подвергает тематизации то, к чему он обращен[1]. Граница возможных тематизации (полаганий) обозначается как «горизонт мира», который зависит от имплицитных переживаний; например, сознание не обращено актуально к задней стороне предмета, она имплицитно полагается[2]. В этом же смысле границей жизненного мира человека является и горизонт полаганий в естественной установке. Естественная установка предполагает понятие дотеоретической рациональности — базиса действия в сфере обыденного опыта: «Естественная жизнь характеризуется при этом как наивная именно благодаря своей вжитости в мир — в мир, который всегда определенным образом осознан как наличествующий универсальный горизонт, но не тематизирован»[3]. В результате перемены установки становится тематизировано то, что ранее ускользало от рефлексии, но полностью отбросить естественную установку невозможно: «При любых обстоятельствах смена установки может быть лишь временной».

Возможны только два случая смены установки, Первый является высшим видом естественной установки — это практическая установка. Она служит «естественным жизненным интересам» и может быть осмыслена как «близкая практической установке политика, который, будучи функционером нации, ориентирован на всеобщее благо, следовательно, хочет служить всеобщей (а опосредованно и своей собственной) практике»[4]. Второй случай есть смена естественной установки на установку теоретическую: «Теоретическая установка, хотя тоже является профессиональной установкой,

---

[1] *Гуссерль Э.* Кризис европейского человечества и философия // Вопросы философии. 1986. № 3.

[2] Понятие горизонта у Гуссерля гораздо сложнее, например: «Феноменологическое понятие горизонта является наиболее обшим гносеологическим эквивалентом понятия контекста, имеющего лингвистический оттенок. В рамках феноменологии речь идет о создании такой модели сознания, которая была бы способна не только схватывать контекст рассуждений, но и любые свои действия осознавать в горизонте соответствующих предметов и проблем» *(Молчанов В.И,* Понятие трансцендентальной субъективности в феноменологии Э. Гуссерля // Проблемы сознания в современной буржуазной философии. Вильнюс, 1983), но здесь на этом останавливаться нет никакой возможности.

[3] *Гуссерль Э.* Указ, соч.

[4] Там же.

226

227

целиком и полностью непрактична. Она основывается, следовательно, на волевом epoche по отношению ко всей естественной, в том числе и высокого уровня, практике в рамках своей собственной профессиональной жизни»[1].

Синтез двух этих установок будет новой практикой отношения универсальной науки к жизненному миру человечества в целом. *Эта* наука существует в форме критики жизни и жизненных целей, культурных образований и собственно человечества с его руководящими ценностями. В развитии эта практика должна привести к отчетливым нормам истины «во всех ее формах», что имеет и моральный оттенок.

Жизненный мир здесь является «забытым смысловым фундаментом естествознания», а о Галилее как отце математического естествознания Гуссерль пишет: «Воспринятая им геометрия и воспринятый им способ "созерцательной" концептуализации уже *не был той изначально данной геометрией:* в этой созерцательности она *утратила свои смысл»*[2]. Уже у греков она была «своего рода techne», далеко удалившись от истоков — непосредственного созерцания, которое привело к геометрической интуиции, оперирующей с идеальными сущностями. Практическое искусство землемерия не оперировало с идеальными сущностями, но его процедуры заложили фундамент для будущего открытия — возможности идеализации. «Роковое упущение Галилея заключалось в том, что он не обратился к осмыслению изначальной смысловой процедуры, которая, будучи идеализацией всей почвы теоретической и практической жизни, утверждала его в качестве непосредственно чувственного мира (и прежде всего в качестве эмпирически созерцаемого физического мира), из коего и проистекает мир идеальных фигур»[3]. Процедуры, воспринятые Галилеем, уже не были «жизненными». Поэтому и представлялось, что геометрия «сама создает собственные, непосредственно очевидные априорные "созерцания" и свою абсолютную истину, приложимость которой есть нечто само собой разумеющееся»[4].

Человек, пребывая в теоретической установке, может ставить свои вопросы, «только находясь внутри *этого мира»,* теоретическое отношение к миру возможно только в горизонте непознанного. Отсюда и возникает «радикальное требование» возврата научного сознания к жизненному миру[5].

---

[1] *Гуссерль Э.* Указ. соч.

[2] Там же.

[3] Там же.

[4] Там же.

[5] Естественно, проблематика теоретическое/жизненное гораздо шире.

3. «Дефиниционное априори» как установка на построение объекта: «В тех случаях, когда я способен изготовлять предметы по образованному мной заранее плану, этот вид априори всплывает всегда. Когда мастер строит дом по определенному плану, он в состоянии предсказать на основании своего плана свойства дома. То же применимо и к технику, который строит машину или мост, или к политику, который, обладая властью, организует определенное законодательство или форму экономики»[1], — смыкается в основных чертах с теоретическими посылками конструктивизма, тогда как гуссерлевское понимание априорности математических объектов близко к интуитивизму К. Циндлера[2]. Именно поэтому Гуссерль говорит о пустоте математики, использующей чисто формальные методы: арифметизаиия геометрии, доминирование идей полной, «универсальной формализации, известным образом ведет к выхолащиванию ее смысла». Проблематичным также должна стать «технизация» естествознания: «Процесс перехода от материальной математики к ее формально-логизированной форме и расширение формальной логики, становящейся самостоятельной в качестве чистого анализа и учения о многообразии, вполне *правомерен* и даже необходим. Это же относится и к процессу технизации»[3]. Возможность и необходимость использования формальных методов не исключает необходимость удержания смысловой нагрузки в случае, когда пытаются избежать «опасных *смысловых сдвигов».* Еще в «Логических исследованиях» Гуссерль утверждал значимость математики как всеобщей «формальной онтологии».

В методологическом смысле «жизненный мир» необходим Гуссерлю как базис нового типа для построения обоснования наук и защиты от релятивизма (в отличие от чистой логики и дескриптивной психологии времен «Логических исследований»), но, как указывают некоторые исследователи[4], это понятие здесь значительно сближается с понятием историчности, и, таким образом, трансцендентальная феноменология Гуссерля в «Кризисе» предстает как вариант историзма[5].

---

[1] *Динглер Г.* Эксперимент. Его сущность и история // Вопросы философии. 1997. № 12.

[2] *Гайденко П. П.* Научная рациональность и философский разум в интерпретации Эдмунда Гуссерля // Вопросы философии. 1992. № 7.

[3] *Гуссерль Э.* Указ. соч.

[4] Например, Мерло-Понти уравнивает понятия естественной установки и жизненного мира, из чего делает вывод о том, что жизненный мир как фундаментальная категория феноменологии порождает неразрешимые противоречия между манифестируемыми задачами феноменологии и результатами использования этого понятия (Феноменология восприятия. М., 2000). В.И. Молчанов (1983) утверждает, что понятия жизненного мира и естественной установки «далеко не равнозначны», «забвение жизненного мира» — это забвение не естественной установки, а забвение рефлексии на наивное восприятие предметов.

[5] Это мнение оспаривают многие феноменологи, например Р. Ингарден.

В контексте феноменологической традиции прояснения языка «новое априори» предстает как один из случаев уточнения понятий, вполне традиционного для Гуссерля. Коррелятивную же функцию это понятие в трехстороннем отношении — естественная установка, практическая установка, теоретическая установка, синтез теоретической и практической установок — может нести применительно к формальному отношению между естественной установкой и практической как ее разновидностью. Значительно более продуктивной представляется ситуация несводимости понятия «нового априори» к простому «методическому эквиваленту», так как функционирование «априори» как характеристики установки на изготовление (построение) объекта в рамках теории несет иную смысловую и операциональную нагрузку, что влечет за собой обогащение и известную гибкость научного языка и философско-научных построений.

4. Возможность текстуального анализа (не оперирования с текстами на уровне интерпретаций) лежит в первую очередь в области совпадения элементарных единиц (понятийного аппарата) языка научной шкалы. Коррелятивными должны быть такие понятия, как, например, «априори», «опыт», собственно постановка проблем в синтаксическом плане и, не в последнюю очередь, некоторое единство методов. Изначально Динглер и Гуссерль принадлежали к одной традиции, а именно, к традиции немецкой философии, где значимыми являлись как понятия «априори» и «апостериори», так и трансцендентальная (Гуссерль) либо волюнтаристская (Динглер) проблематика, по крайней мере, на уровне постановки. Оперирование с подобными терминологическими «монстрами», вырванными из контекста, приводит зачастую не только к потере взаимопонимания, но и к обессмысливанию большей части работы, например: в некоторых случаях употребление терминов «опыт» и «априори» в каком-либо «точном» смысле уже к началу века являлось непродуктивным (см.; *Гуссерль Э.* Идеи чистой феноменологии и феноменологической философии. М, 1999. Т. 1). Построение Динглером концепции «нового априори» является одной из попыток поиска выхода из этой патовой для философии ситуации. Гуссерль указывает на свое употребление термина «априори», это употребление исключительно ситуативно. Возможно, ли говорить об «априорности» либо «апостериорности» математики даже в таком узком контексте, каким является попытка сопоставления части концепции Гуссерля с частью концепции Динглера? Ответ, вероятно, лежит в плоскости именно ситуативного употребления, хотя подобный подход лишает терминологию ее особого статуса по отношению к обыденной речи. Когда-то Гильберт Райл написал в статье о феноменологии, что вдумчивые исследователи всегда

найдут общий язык между собой. Возможно, взаимопонимание на уровне смысла и является необходимой научному сообществу альтернативой.

М.В. Гиленко

Априоризм, в кантовской интерпретации, не способен удовлетворительно решать проблемы, возникающие в философии науки и, в частности, в философии математики. Но своей привлекательности априоризм не потерял. С этим, видимо, связаны попытки найти новое значение (новую формулу) понятия «а priori».

В работе А.В. Михайловского проводится исследование того смысла априорности, который предлагается Г. Динглером. Верно отмечено, что позиция Канта необоснованно догматична в том, что касается априорных законов. Это особенно важно в рамках проекта по поиску основания научного знания. (Например, для религиозного знания подобный догматизм вполне уместен.)

Предлагаемое понимание априорного — «априори изготовления» — является попыткой согласовать априорное и эмпирическое понимание математики. Это неоднократно отмечается в работе.

Априорность в этом смысле, на мой взгляд, можно связать с тем, что не существует языка для фиксации чистых фактов. Описание любого опыта всегда нагружено некоторой теорией, которая априорна для описания. Целью, в данном случае, может быть подтверждение или опровержение теории.

Однако «новое априори» настолько сильно отошло от кантовской формулы, что возникает желание придумать ему другое название. По крайней мере, вопрос об априорности математики, заданный Канту и Динглеру, будет услышан по-разному. Появление словосочетания «опытное априори» наглядно это демонстрирует.

Г.Б. Гутнер

Позиция Динглера, представленная в статье Михайловского, формулируется в противопоставлении с кантовским пониманием априорности. Суть противопоставления в следующем. Кант рассматривает априорные (в частности, геометрические) формы как данности сознания, постоянно присутствующие в нем и сообщаемые им в готовом виде явлениям. Динглер же утверждает, что эти формы вовсе не существуют в готовом виде, но реализуются в предметной деятельности, изготаативаются вместе с производимым предметом. Тем самым наука сближается с техникой, а познание с производством. Хотелось бы, однако, указать на возможность такого прочтения Канта, при котором указанное различие практически исчезает. Напомним, что термин «априори» относится у Канта, прежде всего к форме. Но форма не может быть чем-либо, присутствующим в готовом виде. Она вообще нигде не присутствует, а раскрывается в акте оформления, т.е. обнаруживается «в деле» (ένέργω). Не случайно у Аристотеля оказываются близки понятия формы и действительности (ένέργέια). Кант, конечно, дает повод для многочисленных недоумений своими разговорами о чистом созерцании и априорном знании. Однако понять его можно, лишь учитывая роль воображения как оформляющей деятельности субъекта. При этом деятельность математика, конструирующего воображаемый геометрический объект, оказывается не столь уж отличной от деятельности рабочего, изготавливающего геометрически правильный предмет руками. Концепция Динглера сталкивается, скорее, не с кантовской, а с феноменологической (Гуссерля и еще в большей мере Шелера), согласно которой априорными являются именно *данности* сознания. Но называть эти данности тогда следует не формами, а *сущностями* или *эйдосами.*

Впрочем, в понимание априорной формы Динглером вносится совершенно чуждый Канту аспект — целевой. К сожалению, в статье явно не хватает подробностей при его описании. Совершенно непонятным остается то, что именно все же имеет в виду Динглер под словом «априори». Прежде всего, говоря о цели, уместнее иметь в виду не форму (в указанном выше смысле), а идеальный образец. Кроме того, совершенно естественно представить, что этот образец вовсе не является априорным, а формируется в ходе деятельности. Речь, конечно, должна идти не о единичном акте изготовления, а о производящей деятельности, разворачиваемой в истории. Именно к этой трактовке, кажется, близок и сам Динглер, указывающий на инженера, строящего мост, или политика, работающего над законодательным проектом. Ни проект моста, ни проект закона не являются априорными. Они возникают в ходе деятельности, предшествующей описанным актам. Точно так же можно говорить и о геометрических образцах. Они, несомненно, могут быть рассмотрены как цели, но не априорные, а возникающие в ходе предметной деятельности (как это описано, например, Гуссерлем в «Кризисе европейских наук»; см.: *Гуссерль Э.* Философия как строгая наука. Новочеркасск, 1994. С. 66—70).

ОТВЕТ АВТОРА

В первую очередь хотелось бы поблагодарить Г.Б. Гутнера за интересный опыт прочтения. В самом деле, было бы неверно приводить априоризм Динглера в «столкновение» с Кантом (в статье речь идет все-таки о сравнении). Историческим объектом критики Динглера является, скорее, неокантианство (в частности, работа Кассирера «Понятие субстанции и понятие функции»), которое сводит общезначимость научных высказываний к процедуре введения неких образованных заранее «мыслительных матриц» в «сырой материал» опыта. Для неокантианства это является основанием для построения множества теоретических геометрий, иррелевантных по отношению к практическому опыту экспериментатора. В книге «Эксперимент» Динглер пишет: «Ясно, что "евклидова геометрия" вообще не является чем-то вроде логического шаблона наподобие других (неевклидовых) геометрий. Евклидова геометрия есть скорее нечто совсем особенное, единственное в своем роде, отличное от всех прочих так называемых "геометрий", ибо она есть логическое выражение нашей воли к "однозначности", желания получить воспроизводимые элементарные формы» (известно, что на этом основании Динглер полемизировал и с теорией относительности). Поэтому динглеровскую попытку реконструкции науки я склонен понимать как своеобразное *возвращение к Канту.*

В то же время нельзя не согласиться с тем, что «целевой аспект» динглеровской интерпретации априори чужд Канту (несмотря на присутствующий у обоих мыслителей момент активности субъекта). Поясняя понятие «априори» как «цели для действий», нужно еше раз обратить внимание на «дефиниции элементарных форм» (плоскость, прямая и др.), воспроизводимые в любом месте и в любое время (т.е. общезначимые) и лежащие в основании конструирования измерительных приборов[1]. Согласно Динглеру, такие дефиниции логически предшествуют изготовлению или восприятию соответствующих объектов (поскольку являются требованиями или, если угодно, идеальными образцами), т.е. носят собственно «априорный» характер. Переходя от дефиниций к построению системы науки, Динглер отказывается сводить ее к процедуре получения вечных, аподиктических, нагруженных необходимостью «законов природы». Напротив, задача «подлинной», соответствующей экспериментальной науки состоит в том, чтобы «получить в руки» реальные отношения, конструируя их с помощью воспроизводимых, находящихся в распоряжении у субъекта элементов.

Безусловно, интересным было бы рассмотрение сходств и различий концепций Динглера и Гуссерля (ученика и учителя). И здесь следовало бы уже обсуждать не только подходы к априори, но и проекты построения «чистой науки», которым у обоих мыслителей была отведена ключевая роль.

---

[1] Пример дефиниции: « плоскость – это поверхность, которая обладает тем свойством, что ни на каком ее участке нельзя отличить друг от друга ее стороны».

232

233

Раздел II

СИТУАТИВНЫЙ АНАЛИЗ

Е.А.Зайцев

МАТЕМАТИКА И РИМСКОЕ ЗЕМЛЕМЕРИЕ

Вопреки этимологии геометрия с момента своего возникновения развивалась как теоретическая наука, противопоставляя себя практическому землемерию. В отличие от землемерного искусства геометрия при формировании списка истинных суждений (теорем) сознательно отказывается от использования эмпирических представлений: ее основой являются аксиомы и постулаты (истинность которых внеэмпирична) и логический (дедуктивный) вывод. Верификация геометрического предложения сводится, таким образом, к логическому выводу; фальсификация — к выводу его логического отрицания. Вопрос об «истинности» землемерной процедуры решается иначе: технологическая процедура считается «правильной» или «оправданной», если результат ее применения способствует достижению определенной практической цели. Уверенность в этом приобретается посредством многократного повторения одного и того же алгоритма действий.

В теоретической геометрии есть, однако, разделы, в которых аксиоматическая форма изложения не является необходимой. Это — арифметика (о чем в свое время писала С.А. Яновская) и теория площадей многоугольников. В обеих теориях речь идет об алгоритмах сведения одних задач к другим, более элементарным. Если мы умеем вычислять площадь квадрата, то в предположении о соизмеримости линейных размеров фигур (с практической точки зрения, это условие всегда выполнено) площадь произвольного прямоугольника можно вычислить, разбив его на совокупность равных квадратов (со стороной, равной общей мере сторон прямоугольника). Зная способ нахождения площади прямоугольника, можно (посредством разрезов и наложений) найти площадь произвольного треугольника. И, наконец, зная способ нахождения площади треугольника, можно найти площадь произвольного многоугольника, разрезав его на треугольники.

234

Поскольку теория площадей допускает подобное квазипредметное изложение (с использованием разрезаний и наложений), то возникает соблазн «форсировать» сходство, существующее между методами этой теории и приемами подсчета площадей полей в землемерии. В искушение подобного рода нередко впадали и до сих пор впадают историки математики, видяшие в землемерных процедурах прообразы конструкций плоской геометрии. Однако между двумя дисциплинами существует принципиальное различие: теория площадей геометрических фигур может быть развита лишь при выполнении ряда специальных условий, которые в практике землемерия не являются существенными.

Во-первых, теория площадей плоских многоугольников строится в предположении, что фигуры лежат на плоскости, а не на криволинейной поверхности. Во-вторых, в геометрии многоугольники считаются принципиально отличными от фигур с криволинейными границами. В-третьих, для геометрических фигур выполнен принцип аддитивности, согласно которому при любом разбиении фигуры на части их суммарная площадь будет одной и той же,

Судя по источникам, в древнем землемерии ни одно из указанных условий — отсутствие кривизны поверхности, прямолинейность границ и аддитивность площадей — не являлось принципиальным. Без каких-либо спецификаций одни и те же алгоритмы применялись к полям, расположенным на плоской и на криволинейной поверхности (например, на склонах холмов). В ряде случаев один и тот же алгоритм использовался для подсчета площадей полей независимо от того, являлись их границы криволинейными или прямолинейными. Например, в *Римском землемерном корпусе* для вычисления площади поля, имеющего форму полумесяца, используется тот же самый алгоритм, который в других случаях применяется для полей, имеющих прямолинейные границы. И, наконец, в землемерных источниках мы встречаемся с нарушением принципа аддитивности: когда поле сложной конфигурации разбивается на части различными способами или в задании линейных размеров этих частей есть погрешности, сумма их площадей не является постоянной величиной.

В своем обзоре древневавилонской математики Йорап Фриберг приводит следующий любопытный пример: «На земельных планах, относящихся ко времени правления третьей династии Ур (XXII—XX вв. до н.э.), встречается нетривиальный метод корректировки техники подсчета площади для полей нерегулярной формы. Заданное поле делится на центральную часть, состоящую из участков, по форме близких к прямоугольникам, и пограничную часть, состоящую из "треугольников". К каждому из участков центральной части применяется так называемая "формула ложной площади" $S = a+c/2 \times b+ d /2$, где *a, b, c, d*— величины сторон. Значение площади центральной части поля вычисляется как сумма (ложных) плошадей составляющих ее участков. Затем план поля поворачивают на 180° и по отношению к нему проводят аналогичное вычисление; из-за того, что стороны участков центральной части заданы неточно, получается результат, слегка отличный от предыдущего. Окончательно значение площади центрапьной части определяется как среднее арифметическое полученных величин» [1, с. 13]. Отсутствие аддитивности для площади воспринималось древними землемерами как практическая неизбежность, негативные последствия которой, однако, можно было уменьшить путем усреднения полученных результатов.

Между решением задачи на нахождение площади фигуры в планиметрии и площади поля в землемерии есть еще одно принципиальное различие. В отличие от планиметрии, где поставленная цель (нахождение площади) и средства ее достижения (разбиение фигуры на треугольники) лежат в одной и той же сфере теоретического дискурса, конечная цель (или совокупность целей) земле-измерения выходит за рамки собственно землемерных мероприятий. Смысл межевания участков, определения их площади и т.п. состоит в том, чтобы полученный результат мог быть использован для решения текущих проблем аграрного сообщества. «Правильность» решения той или иной технической задачи определяется (далеко не всегда осознанно) путем сопоставления полученного результата с набором внешних по отношению к самому землемерию целей, в том числе и взаимнопротиворечивых, которые к тому же изменялись во времени в зависимости от изменения условий жизни сообщества.

Приведем пример, иллюстрирующий возможный конфликт целей, возникающих при определении площади земельного владения. В Древнем Риме в рамках переписи населения, или ценза *(census),* проводилось регулярное измерение площадей земельных владений. Поскольку одной из функций ценза было упорядочение налогообложения, то в

перепись вносилась подлежащая налогообложению собственность, в том числе размер земельного владения. Другой не менее значимой функцией ценза была классификация граждан по различным экономическим и политическим признакам для зачисления в одну из триб, через которые осуществлялись их политические права. Если взглянуть на величину земельного владения с точки зрения функций ценза, то нетрудно заметить скрытый конфликт интересов. Занижая размер земельного владения, римский гражданин (который сам сообщал цензорам сведения о налогооблагаемой собственности) тем самым мог снизить уровень налога. Завышая его размер, тот же гражданин
236
мог повысить свой социальный статус или избежать ущемления в правах. Поскольку измерение участка должен был производить сам землевладелец (с привлечением землемеров), возникает непростой вопрос о том, какие методы землеустройства он мог считать подходящими в данный конкретный момент, а какие — нет. Ведь в отличие от геометрической фигуры земельный участок сложной конфигурации можно измерять по-разному.

В литературе, посвященной исследованию технических аспектов землемерия, вопрос о связях техники межевания и нахождения площадей с социально-экономической жизнью аграрного сообщества практически не изучался. В работе [2] была предложена реконструкция происхождения землемерных «формул ложной площади», исходя из понимания площади как количественной оценки затрат труда на обработку земельного участка — именно этот параметр является первичным по отношению ко всем прочим количественным параметрам экономической деятельности. В указанной статье, однако, не затрагивался вопрос о роли упомянутых формул в условиях функционирования более развитых форм аграрной экономики — аренды, земельного налога, купли-продажи земли и т.д.

На эту тему коротко писали дважды. В конце XIX в. М. Кантор выдвшгул гипотезу о том, что в Египте во времена Птолемеев «формулы ложной площади», применение которых приводит к величине, большей истинного значения площади, намеренно использовались для повышения налоговых сборов в пользу государства. Независимо от Кантора аналогичное предположение (на основании тех же источников) выдвинул в 30-е годы прошлого столетия французский специалист по античному кадастру А. Делеаж. Принятие гипотезы Кантора—Делеажа встречается, однако, с определенной трудностью. В древности одни и те же землемерные формулы использовались для подсчета площадей полей, располагавшихся и на равнинах, и на криволинейных поверхностях (холмы и низины). Кроме того, те же формулы использовались для определения площадей участков с криволинейными границами. В случае криволинейности (поверхности или границ) «формулы ложной площади», вообще говоря, не обязательно дают результат, больший истинного значения площади [3, с. 336].

Вопрос о роли землемерных технологий (включая их математические аспекты) в жизни аграрного сообщества является крайне сложным. Дело в том, что непосредственно по источникам практически невозможно проследить, как та или иная техника межевания или подсчета площадей «вписывалась» в конкретно-исторический способ бытия той или иной аграрной цивилизации. Обычно в источниках экономического характера приводится информация
237
о размерах полей (количественный аспект), но ничего не сказано о том, как эта информация использовалась. В юридических источниках, напротив, могут подробно обсуждаться легальные аспекты землепользования (юридические категории полей, пограничные споры или споры о площади), но при этом отсутствуют сведения о том, какая техника использовалась для получения информации количественного характера. В настоящей статье, основываясь на материалах римского землемерия, мы коротко обсудим

некоторые из упомянутых трудностей.

Основным источником римского землемерия является рукописный свод *Corpus agrimensorum romanorum,* составленный из трактатов, написанных профессиональными землемерами времен Империи (I—V вв. н.э.) [4; 5]. Рукописи *Римского землемерного корпуса* восходят к единому архетипу, давшему начало трем основным изводам. У истоков первого извода находится *Codex Arcerianus,* составленный в окрестностях Равенны на рубеже V—VI вв. По своему составу тексты этой рукописи отличаются значительным разнообразием. Чисто технические фрагменты, относящиеся к проведению границ, и описания различных юридических споров соседствуют в рукописи с математическими задачниками и даже краткими размышлениями метафизического характера, навеянными идеями стоической философии.

Второй извод представлен ватиканской и вольфенбюттельской рукописями. Обе рукописи составлены в [X в., одна — в районе Аахена (поблизости от резиденции Карла Великого), другая — в монастыре Корби («геометрической и землемерной столице раннего Средневековья»). Эти рукописи содержат новые элементы — отрывки из кодексов Феодосия (313 г.) и Юстиниана (529 г.), «Начал» Евклида в переводе Боэция (ок. 500 г.), «Этимологии» Исидора Севильского (глава «О полях» и примыкающие к ней), а также оригинальный землемерно-математический текст «Об измерениях в югерах».

Третий, «смешанный», извод — наиболее многочисленный. Он представлен серией рукописей, образовавшихся в результате взаимного влияния текстовой традиции первых двух изводов. Наиболее ранний манускрипт этой серии (написан ок. 800 г.), происходит, вероятно, непосредственно из дворцовой библиотеки Карла Великого. «Смешанный» извод интересен тем, что в своей землемерной части он стал источником для наиболее важной геометрической компиляции раннего Средневековья, известной под названием «Первая геометрия» псевдо-Боэция (начало IX в.). Тексты этого извода легли также в основу так называемой «косвенной традиции», особенностью которой является активное взаимодействие геометрических фрагментов «Начал» и практических приемов римских землемеров.

Таким образом, между временем расцвета римского землемерия в начале императорской эпохи (I—II вв.) и оформлением землемерных текстов в единый корпус (конец V — начало IX вв.) прошло как минимум несколько столетий, в течение которых происходило постоянное расширение корпуса за счет текстов, отсутствовавших в начальной редакции. Математические фрагменты, входящие в состав Римского землемерного корпуса, можно разделить на две группы. Первая состоит из текстов чисто математического содержания, в которых механизм использования математических знаний на практике явно не прописан. Вторая группа представлена текстами технического (землемерного) содержания, в которых в той или иной степени используется математика. Какие из этих фрагментов были в составе начальной редакции корпуса, а какие вошли в него позднее и, значит, не могли использоваться римскими землемерами?

Начнем с первой группы текстов [3].

1. «Первый фрагмент» Варрона (передан в *Codex Arcerianus* и рукописях смешанного извода). Этот текст, приписываемый римскому энциклопедисту, филологу и антиквару Варрону (116—27 гг. до н.э.), содержит следующие фрагменты:

— метрологический список, в котором за основу взят римский фут;

— задачу на нахождение длины окружности по ее диаметру и обратную к ней (используется архимедова аппроксимация для числа π);

— задачи на нахождение площади поля в форме трапеции (явная контаминация землемерной задачи геометрической терминологией);

— задачи на вычисление плошади треугольника по обычной формуле плоской геометрии;

— серию задач на вычисление параметров прямоугольного поля (например, дана площадь поля и известно, что одна сторона вчетверо больше другой, найти обе стороны) и, наконец,

— формулы для вычисления фигурных чисел, используемые для оценки площадей полей в форме правильных многоугольников.

В целом этот фрагмент представляет собой достаточно типичный пример контаминации двух математических традиций — теоретической и практической, характерный для сочинений эллинистического времени. В нем понятия и методы классической греческой геометрии (и даже арифметики) «переведены» на язык практического землемерия. Противоположный феномен наблюдается в сочинениях псевдо-Герона, в которых землемерные задачи излагаются на языке математики. Подобные тексты, призванные

239

продемонстрировать эрудицию автора в различных областях науки и практики, равно как и его способность к (поверхностному) синтезу излагаемых сведений, для реальной практики землемерия значения иметь не могли.

2. «Второй фрагмент» Варрона (передан в рукописях смешанного извода) посвящен решению «школьных» задач с многоугольными числами — нахождение площади поля в форме многоугольника по ею стороне (и обратная к ней), вплоть до десятиугольника. Кроме того, в нем дана точная формула для нахождения площади правильного восьмиугольника и геометрическая формулировка формулы «квадрата суммы двух величин». Подобно предыдущему, этот фрагмент вряд ли мог найти применение в практическом землемерии.

3. Трактат Бальба «Изложение и обоснование всяческих фигур». Этот текст написан римским землемером Бальбом во времена Траяна, т.е. около 100 г. н.э.

Его математическая часть представлена серией определений, построенных по аналогии с определениями Евклида, но относящихся не к линиям и фигурам, а к границам и формам полей (например, вводятся три рода линий — прямые, круговые и кривые). Примеров на вычисление площадей нет. Несмотря на то, что текст в целом практически ориентирован, его математическая часть производит впечатление фрагмента из ученого трактата. Слова Бальба о том, что он решился изложить геометрические сведения только после проведенных им «великих опытов землемерия» — *post magnarum rerum experimenta* — следует понимать как риторическую фигуру. По своему содержанию и стилистике (вместо обычного в землемерных трактатах индикатива или конъюнктива первого лица множественного числа настоящего или будущего времени используются книжные, безличные глагольные формы) геометрическая часть фрагмента Бальба никак не подходит под понятие практического руководства по применению математических методов в землемерии. Для него характерен тот же энциклопедизм, что и для текстов Варрона (например, в нем рассматриваются поля, границы которых состоят из дуг нескольких окружностей) [6, с. 386].

4. Анонимный математический трактат «Книга об измерении площади» *(Liber podismi)*. Этот текст также носит теоретический характер. Все задачи в нем сформулированы по отношению к геометрическим фигурам, а не полям. В нем рассматриваются: задачи на нахождение линейных величин и площадей прямоугольных треугольников и треугольников общего вида, находятся соотношения между их сторонами и площадью по формуле Герона, приводятся примеры пифагорейских троек.

Никаких намеков на возможности исполъзования этих задач в землемерной практике в самом тексте нет.

240

5. «Книга Эпафродита и Витрувия Руфа» — самый объемный математический трактат римского землемерного корпуса. Н.М. Бубнов считал, что Эпафродит — греческий геометр (но не землемер), а Витрувий -— знаменитый римский архитектор, автор трактата

«Об архитектуре» (I в. до н.э.). Подобно предыдущим текстам, этот трактат принадлежит к книжной, «школьной» традиции, совершенно не ориентированной на решение практических проблем. Содержащиеся в нем задачи имеют поразительное сходство с задачами из трактатов Герона (I в.), особенно «Геометрики», Здесь встречаются вычисления площадей плоских фигур, задачи с многоугольными числами, пифагорейскими тройками, задачи на нахождение сумм квадратных и кубических чисел. Даже в тех случаях, когда речь формально идет о решении землемерных проблем, фактически решается геометрическая задача. К числу интересных примеров контаминации двух математических традиций следует отнести вычисления площадей полей, расположенных на холмах: несмотря на землемерную терминологию, речь, по существу, идет о нахождении площади поверхности усеченного конуса.

6. «Задача о нахождении ширины реки». Эта задача, решаемая весьма простым и практичным способом, действительно могла иметь практическое значение в римском землемерии, поскольку найденное расстояние в масштабе переносилось на план поля,

7. «Фрагмент о шестиугольнике и восьмиугольнике» носит теоретический характер. Трудно представить ситуацию, в которой аграрным землемерам пришлось бы решать проблему построения правильного шести- и восьмиугольника.

8. Отрывки из «Начал» Евклида, разумеется, не имели никакого отношения к практике землемерия. Их позднейшее включение в *Римский землемерный корпус* обусловлено формальными соображениями: в одной из рукописей имя Евклида фигурирует в списке римских землемеров, на миниатюре другой рукописи Евклид изображен председательствующим в кругу римских землемеров (миниатюра обладает поразительным композиционным сходством с миниатюрой из греческой медицинской рукописи Диоскурида (ок. 512 г.), где в кругу знаменитых греческих медиков и ботаников председательствует легендарный кентавр Хирон, учитель Асклепия).

9. Трактат «Об измерениях в югерах» *(De jugeribus metiendis)* является, пожалуй, единственным образцом математического текста, ориентированного на запросы практического землемерия. В нем приведены примеры вычислений площадей для полей различной формы:

— прямоугольника, круга (вычисляется площадь квадрата со стороной, равной четверти длины окружности);

— равностороннего треугольника (по формуле $S = a \times a/2$, где *a* — сторона треугольника);

— произвольного четырехугольника *(ager inaequalis)* по стандартной «формуле ложной площади»;

— полумесяца, круга и полукруга в соответствии с архимедовым приближением для числа π.

Вместе с тем и в этом трактате есть две «школьные» задачи, не имеющие практического значения. В первой вычисляется площадь поля в форме сегмента круга. При этом используется нетривиальное приближение $S = \frac{a+b}{2} \times b + \frac{(a/2)(a/2)}{14}$ (здесь: *a* — величина хорды, а *b* — высота сегмента); тот же прием встречается у Герона, который объясняет введение корректирующего члена необходимостью получения формулы, которая была бы верна для полукруга. Вторая задача (текст испорчен) состоит в нахождении площади поля в форме правильного шестиугольника: шестиугольник разбивается на шесть правильных треугольников, площадь которых вычисляется по одной из приближенных формул, также известных из работ Герона.

10. Математический фрагмент из трактата Колумеллы «О сельском хозяйстве» (I в.) вошел в состав Римского землемерного корпуса лишь в сер. IX в. По содержанию этот трактат сходен с «De jugeribus metiendis», т.е. носит практический характер; однако и в

него вошли две «школьные» задачи на вычисление площадей: в одной находится площадь поля в форме кругового сегмента, в другой — площадь поля в форме правильного шестиугольника.

Приведенный обзор показывает, что подавляющее большинство математических текстов *Римского землемерного корпуса* носят абстрактно-«книжный» характер. Вероятно, эти тексты не входили в начальный состав корпуса, а появились в нем позднее, во времена заката Империи (на волне поверхностного энциклопедизма) или даже раннего Средневековья в эпоху Каролингского возрождения. Остается лишь весьма скромная часть математических текстов (прежде всего «De jugeribus metiendis»), практическое значение которых имеет смысл обсудить. Для этого необходимо хотя бы кратко познакомиться с опытом римского землемерия.

Во времена ранней Империи в эпоху расцвета аграрного землемерия римляне различали три типа полей: *ager divisus et adsignatus* (поле, которое поделено на квадраты, внутри которых определены участки землепользования); *ager per extremitatem mensura comprehensus* (поле, измеряемое по границам); *ager arcifmius* (поле неизмеряемое). Нас интересуют первые две категории.

242

Формирование аграрного ландшафта на поле первой категории выглядит так. Сначала на местности, которой предстоит стать полем, выделяется (символический) центр, через который с помощью специального землемерного инструмента *(groma)* проводятся под прямым углом две главные дороги — *cardo maximus* и *decumanus maximus.* Затем параллельно главным дорогам через равные расстояния (ок. 700 м) проводятся прямые линии второстепенных дорог, в результате чего будущее поле оказывается поделенным на квадраты *(centuria),* образующие так называемую «промежуточную структуру». Внутри этих квадратов затем размечались участки землепользования. Возникновение «шахматного порядка» центурий некоторые исследователи возводят ко времени основания Рима. До начала межевания поверхность представляла собой «чистую доску», по которой римский авгур, а затем сменивший его государственный землемер с помощью разнообразных геодезических приемов наносили абсолютно прямые линии границ. Такие поля, покрытые регулярной геометрической сеткой, могли простираться на десятки километров.

На поле данной категории римляне вводили оригинальную «систему координат», напоминающую декартовы координаты на плоскости. Каждая центурия кодировалась двумя числами, игравшими роль координат по «оси абсцисс» и «оси ординат». Кроме того, указывался один из четырех квадрантов, в котором находилась данная центурия. По двум координатам и квадранту можно было легко отыскать на плане участок, лежащий в границах определенной центурии (рис. 1, 2).

Кроме аграрного ландшафта в соответствии с указанной схемой формировались также такие «микрокосмосы» римской культуры, как военный лагерь и городское поселение. И это не случайно: поле, военный лагерь и городское поселение являлись различными репликами одной и той же «небесной» структуры (об интерпретации пространственных структур римской мифологии в рамках неокантианской философии см. работы Э. Кассирера).

Представление о ней дает римская практика гаданий по полетам птиц (ауспиции) и внутренностям жертвенных животных (гаруспиции). С помощью взаимно-перпендикулярных осей — *decumanus maximus* и *cardo maximus* — римские авгуры мысленно разбивали небо на четыре секгора. Затем каждый из секторов делился еще на четыре части, Наблюдая за полетом птиц на фоне сетки из секторов, авгуры осуществляли предсказания. Сходная система разбиений использовалась и при гадании на внутренностях животных (чаще всего печени): по отношению к некоторой стандартной сетке изучалось расположение естественных складок рассматриваемого органа (рис. 3, 4).

243

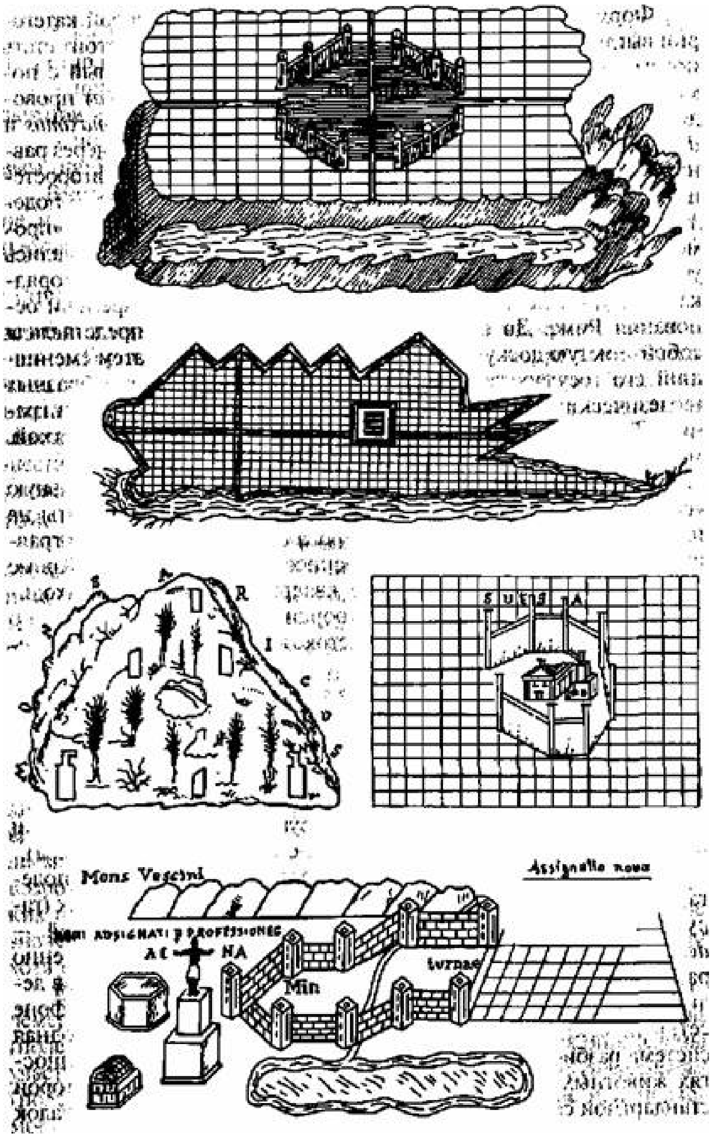
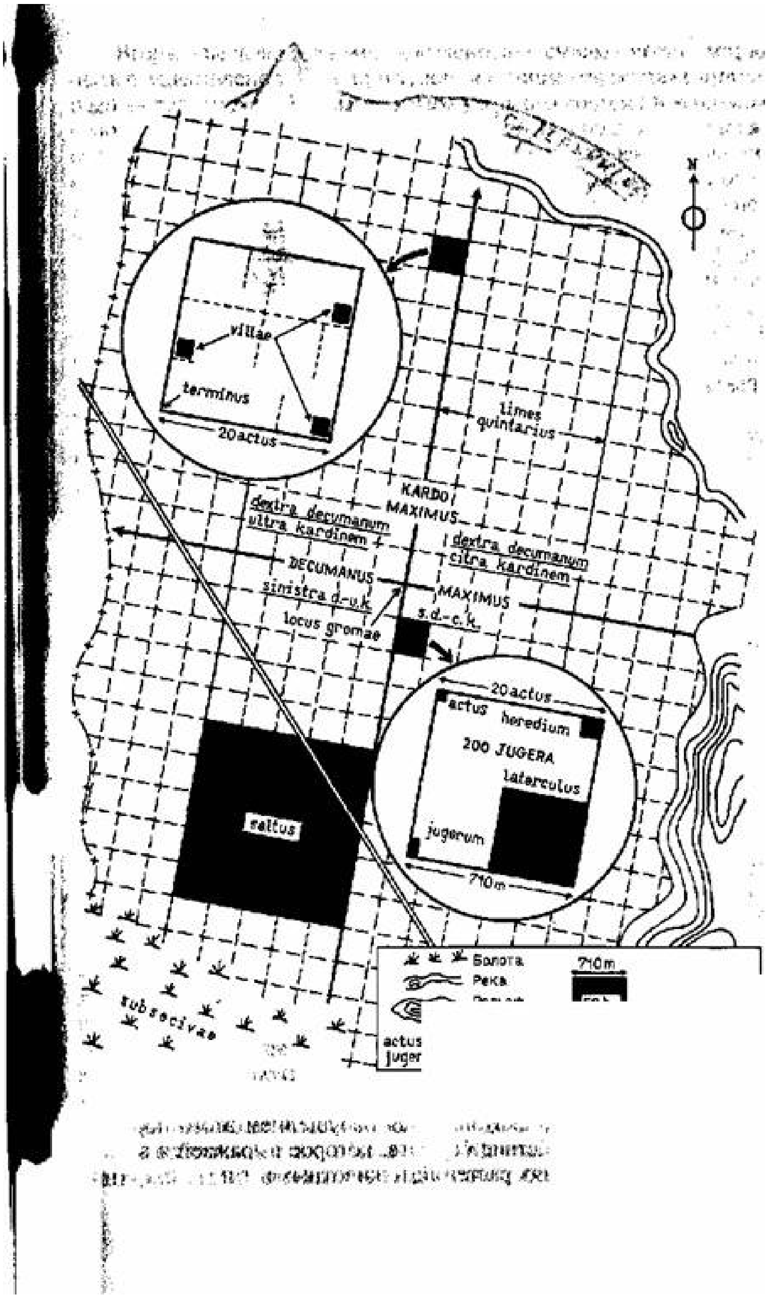


Рис. 1. Иллюстрации из рукописей Римского эемлемерного корпуса



Болота
Река
Рельеф
Actus:120 pedes heredium:2jugera saltus:
jugerum: 2 actus centuria: 100 heredia. 25centuriae

Рис. 2. Рекострукция струхтуры римского аграрного ландшафта

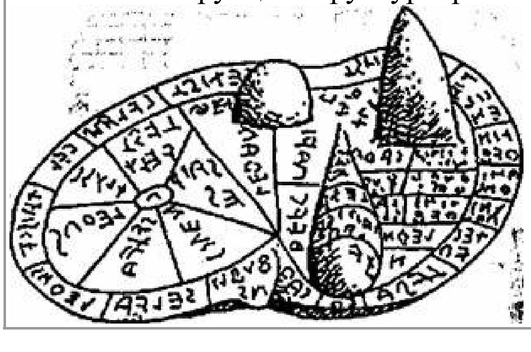


Рис. 3. Схематическое изображение бронзовой модели печени из Пьяченцы, использовавшейся для обучения искусству гаруспиций

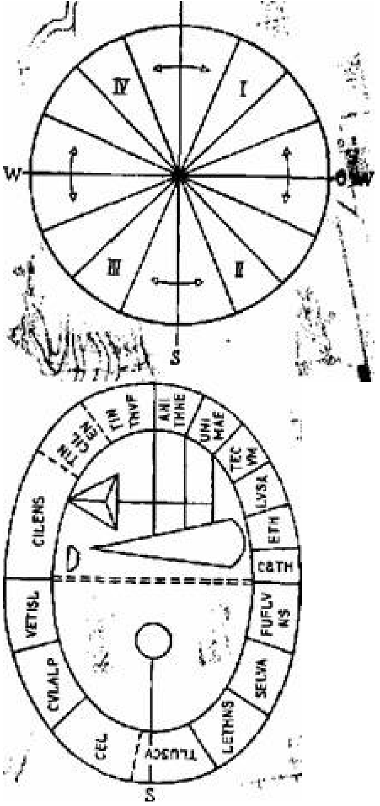


Рис. 4. Разбиение неба (по Плинию) и схема печени

Механизм трансляции сетки границ «с небес на землю» — римский землемер Гигин прямо говорит о «небесном происхождении» *(origo celestis)* землемерного искусства [5, с. 131] — может быть реконструирован следующим образом. Всякая местность на земной поверхности находится под покровительством населяющих ее природных сил или божеств *(genii loci),* устанавливающих на ней свой «порядок». Вмешательство человека (будь то проведение границ или распашка) является нарушением этого порядка, влекушим противодействие божеств, которое выражается в засухе, неурожаях, болезнях растений и животных и т.п.

246

Вторжение человека в мир, населенный «гениями места», могло быть осуществлено только при условии «очищения места» *(lustratio pagi)* — религиозного обряда, смысл которого состоял в «снятии» с поля изначально установленного на нем природного порядка, связанного с особенностями местности (холмы, реки, одиноко стоящие деревья и т.п.). Полю при этом «навязывается» новая пространственная структура, в роли которой выступает сетка «небесных» границ, проводимых по воле Юпитера. Об этом, в частности, говорит содержащийся в *Римском землемерном корпусе* фрагмент псевдоэтрусского пророчества *Vegoia,* [4, с. 350]. Подлинный смысл акта делимитации состоял, таким образом, в передаче будущего поля под «юрисдикцию» Юпитера. Лишь после того, как на поверхности с соблюдением сложного ритуала были проведены главные дороги *cardo maximus* и *decumanus maximus* и размечены границы центурий, можно было приступать к делению «очищенного» места на участки землепользования. Римский землемер Фронтин отмечал, что *cardo* на поле ведет свое происхождение от точки, вокруг которой происходит вращение небесной сферы — *cardo caeli* [5, с. 12]. Другой землемер, Аггений Урбик, упоминает о том, что границы ориентируются по сторонам света [5, с. 22].

Важное обстоятельство состояло в том, что у границ центурий и границ участков землепользования был разный юридический статус. Первые носили сакральный характер и, находясь под защитой государства (по сути, Юпитера), не подлежали изменению; вторые, будучи объектом частного права, были подвижны. Не будет преувеличением сказать, что изначально римлянин воспринимал центурию как «храм», со всеми свойствами, которыми характеризуется храмовое пространство. На границах центурий ставились алтари, там же находились гробницы предков, а межевые камни почитались как боги — в Риме существовал общегосударственный праздник «Межевых камней» — *Terminalia.*

Для нашего исследования важно то, что в процедуре делимитации центурий никакой серьезной математики не применялось, поскольку границы самих центурий были прямыми линиями, пересекающимися под прямым углом. Обычно для их проведения использовали визирование и промер прямых углов. Для этого применяли весьма простой инструмент — грому, который представлял собой штатив с крестовиной, с концов которой свешивались четыре свинцовых грузила (по ним и визировали). Если при этом возникали трудности, связанные с особенностями рельефа, то они носили не математический, а чисто технический характер. О межевании же участков землепользования внутри центурий нам практически ничего не известно. В архаичную эпоху, когда поле считалось собственностью общины *(gens),* границы участков внутри центурий были условны: из земельной собственности, принадле-
247
жавшей одной семье, строго фиксировались только исторические «два югера» (выделенные по преданию самим Ромулом), которые *pars pro toto* представляли весь земельный надел данной семьи. Реальный размер такого надела в архаичную эпоху колебался от 7—10 югер для пахотных земель до 20 югер для пастбищ. Поскольку архаичное римское поле располагалось исключительно на равнине (болота, холмы, ручьи, рощи и прочие нерегулярности оставались во владении «гениев места»), то, скорее всего границы участков землепользования, так же как и границы центурий, были прямолинейны и ортогональны. В этих условиях математика практически не нужна, поскольку и проведение границ, и подсчет площадей (участки землепользования — прямоугольники, и точность подсчета не имеет особого значения) превращаются в техническую процедуру.

Несколько более сложной является ситуация с делимитированным полем времен Империи. Секуляризация аграрной жизни позволила распространить ортогональную сетку на всю территорию колонии, включая холмы, долины, реки и т.д. В связи с включением в состав поля различных «нерегулярностей» на границах поля и даже внутри центурий стали появляться пограничные участки нерегулярной формы, так называемые *subcessivae* («отрезки»). Можно предположить (точных данных у нас нет), что для вычисления площадей этих «отрезков» и применялись «формулы ложной площади». «Отрезки» могли иметь подвижные границы: типичный пример — *subcessivae,* находящиеся в пойме реки, изменявшей свое русло (ситуация характерна, в частности, для долины Роны в Нарбоннской Галлии). Маргинальный характер «отрезков» говорит о том, что они, вероятно, служили в качестве дополнений к основным владениям, имевшим более или менее регулярную геометрическую форму, близкую к прямоугольнику. Добавим, что указанные земли имели сложный, часто менявшийся юридический статус: вначале они вовсе не были в составе земельных владений, потом давались в пользование производившим межевание землемерам, затем Вес-пасиан предпринял попытку отобрать их в пользу государства и т.д. К сожалению, остается невыясненным, как указанные обстоятельства могли влиять на технику и точность подсчета площадей с помощью «формул ложной площади».

Обратимся теперь к единственному фрагменту *Римского землемерного корпуса,*

который можно отнести к первой группе текстов, — в нем речь идет об использовании землемерами некоторых весьма простых математических методов. Это небольшой и крайне плохо сохранившийся текст Фронтина о делимитации полей второй юридической категории — *ager per extremitatem mensura comprehensus* (поле, измеряемое по границам).
248

Начало этого фрагмента (в реконструкции Ф.Т. Гинрикса) звучит так: «Основанием землемерного искусства является опыт [специалиста], производящего измерения *(Principium artis mensoriae in agentis positum est experimento)*. Ибо истинное местоположение и форма [поля] *(veritas loci),* равно как и правдивое значение [его] плошали *(veritas modi),* не могут быть выражены без использования измеримых линий *(sine rationalibus lineis)*. Действительно, извилистая и кривая внешняя граница поля определяется линией, длина которой из-за наличия на ней неравных углов (даже если их число остается постоянным) может уменьшаться и увеличиваться. Ибо если углы и линии между ними не будут фиксированы, то невозможно будет восстановить точное значение расстояний, и, значит, официально декларируемое значение площади будет ложным [7, с. 351]».

В отрывке (целиком он занимает примерно страницу) речь идет о поле сложной конфигурации, извилистые границы которого могут быть восстановлены лишь приблизительно с помошью межевых камней), мское поле не знает изгороди, и поэтому при восстановлении границы обычно исходят из расположения межевых камней). Данный тип поля отличается от делимитированного поля тем, что на нем нет прямоугольной сетки центурий. Судя по технике, описанной в отрывке, землемеру на таком поле приходилось решать две проблемы. Первая состояла в определении (а впоследствии — восстановлении) линии внешней границы поля, с тем чтобы как можно точнее фиксировать его форму и расположение *(veritas loci)*. Эти данные затем в масштабе переносились на земельный план. Вторая проблема состояла в том, чтобы дать официальный отчет о площади этого поля *(veritas modi)*. В отрывке говорится о том, что при решении этих проблем специальным образом проводятся прямые линии, доступные измерению. В первом случае эти линии используются для визирования межевых камней. Техника этого визирования описана неясно (Гинрикс дважды пытался реконструировать ее, но обе реконструкции выглядят неубедительно). Во втором, речь идет о разбиении поля на несколько частей посредством прямых линий с последующим подсчетом их площадей. К сожалению, по отрывку невозможно восстановить сам способ разбиения (Гинрикс реконструирует этот способ как разбиение на прямоугольные треугольники, что снова выглядит не слишком убедительно). Единственная достаточно достоверная информация об использовании математических методов, содержащаяся в отрывке, касается двух технических проблем, связанных с проведением на местности упомянутых прямых линий. Первая состоит в том, чтобы провести такую линию *(interversura)* через область, на которой расположено препятствие — высокий холм, роща, поселение и т.д. В этом случае (по Гинриксу) поступают

249

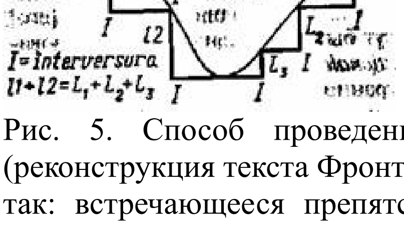


Рис. 5. Способ проведения прямой линии и нахождения расстояний на поле (реконструкция текста Фронтина)

так: встречающееся препятствие огибают, используя при этом ортогональные линии. Метод римского землемера напоминает метод Герона для прокладки туннеля с двух сторон холма (рис. 5, 6).

Второй метод — он носит название *cultellatio* — состоит в проведении прямой линии через долины и впадины. В отличие от первого метода этот прием носит чисто технический характер), хождение количественного параметра сводится к простому измерению): Фронтин советует переносить землемерный шест по пути промера каждый раз на небольшое расстояние, измеряемое затем горизонтально натянутой веревкой (на план наносилась не линия, соединяющая точки на склоне долины, а ее проекция на горизонтальную плоскость). При измерении расстояний до недоступных точек, вероятно, применяли прием, описанный в задаче о нахождении ширины реки.

Подведем итог. Исследование собственно математических текстов *Римского землемерного корпуса* показывает, что лишь очень небольшая их часть была приспособлена для использования в практическом землемерии: к ним относятся грубые землемерные формулы для вычисления площадей и одна задача на определение расстояния до недоступного предмета. Анализ описанной в корпусе практики землемерия также приводит к весьма скромному результату: собственно математическая составляющая делимитации сводится к проведению на местности прямых линий под прямым углом и вычислению площадей прямоугольников. Никакой достоверной информацией о вычислении площадей полей нерегулярной формы — *subcessiva* и *ager per extremitatem mensura comprehensus* – мы не обладаем.

250

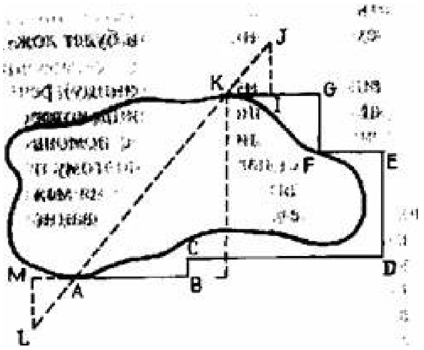


Рис.6. Метод Герона прокладки туннеля

Сложным остается вопрос о применении в римском землемерии «формул ложной плошади». В эпоху, отмеченную живой традицией сакрализации ландшафта (примерно до конца республиканского периода), эти формулы, скорее всего не использовались. Такой вывод можно сделать не только из анализа пространственных структур (их ортогональность), но и из отсутствия в юридической практике этого периода юридических споров о площадях *(controversia de modo).* Когда обсуждался вопрос о покупке или аренде земельного надела, продавец и покупатель выходили на поле и обсуждали детали сделки прямо на местности, имея перед глазами предмет договора в виде «телесного» объекта. Цена этого объекта определялась качеством земли, наличием на ней построек и плодовых деревьев, близостью источников воды, видами на будущий урожай, характером засеваемых культур и т.д. Точное значение площади участка было последним пунктом в сделке, ее проверка производилась лишь в случае, когда возникали подозрения в честности продавца. В целом при составлении договора более важными были вопросы фиксации границ участка или их восстановления по межевым камням: именно эти проблемы приводили к типичным для данной эпохи юридическим спорам о местоположении *(controversia de loco)*.

Иная ситуация складывается во времена Империи, когда в результате политической нестабильности начинает процветать спекуляция земельными участками. Тогда купляпродажа, служившая быстрому приобретению наличных денег, нередко происходила «вслепую»: при совершении сделки покупатель не видел самого участка и исходил только из знания его размеров. В этот период юридически значимыми становятся споры о площади *(controversia de modo).* К сожалению, о роли количественных параметров в этих спорах мы мало что знаем. Известно лишь, что продавец, завысивший размеры продаваемого участка, должен был заплатить штраф, величина которого устанавливалась в зависимости от разницы между декларированной и реальной площадью участка. Как при этом вычислялась площадь, остается неясным.

И, наконец, о слове «опыт» *(experimentum),* которое несколько раз появляется на страницах рукописей римских землемеров. В контексте римского землемерия данное понятие не обладает техническим значением, которое оно приобретает в философии Нового времени. В римских источниках оно служит для указания на метод «проб и ошибок», в результате которых повышалось мастерство землемера и, соответственно, происходил его профессиональный рост. Отметим попутно, что землемерные навыки приобретались будущими профессионалами не на школьной скамье (никакого систематического образования землемеры не получали,

251

кроме, возможно, начал юридических знаний), а непосредственно на поле, сначала под руководством более опытного специалиста, а затем самостоятельно [6]. Эти навыки, если судить по источникам (а не пытаться домысливать того, чего не было) касались чисто технической стороны дела; математика в опыте римского землемерия, по-видимому, оставалась на вторых ролях.

Список литературы

1. *Friberg J.* Mesopotamian Mathematics: A Survey //Ref:Reallexikon der Assyrologie und Vorderasiatischen Archaeologie, Chapter «Mathematik», Preprint N 1991 — 06/ ISSN 0347—2809, Department of Mathematics, The University of Goeteborg, 1991 .
2. *Зайцев Е. А.* Вычисление площадей в землемерной практике // Историко-математнческне исследования. Вторая сер. М., 1997. Вып. 2 (37). С. 262—280.
3. *Folkerts M.* Mathematische Probleme im Corpus Agrimensorum // Die roemische Fedmesskunst (Hrsg. von *Behrends O., Capogrossi Colognesi L),* Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Goettingen, Philol.-Hist. Kl. N 193, Goettingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1992. S. 311—334.
4. *Blume F., Lachmann K., Rudorff K.* Die Schriften der roemischen Feldmesser, 2 Bde., Bd. 1, Berlin, 1848; Reprint: Hildesheim: Olm, 1967.
5. *Thulin C.* Corpus Agrimensorum Romanorum, Leipzig: Teubner, 1913.
6. *Schindel U.* Nachklassischer Unterricht im Spiegel der gromatischen Schriften // Die roemische Feldmesskunst. S. 375 — 398.
7. *Hinrichs F. T.* Die «agri per extremitatem mensura comprehensi». Diskussion eines Frontintextes und der Geschichte seines Verstaendnisses // Die roemische Fedmess-kunst. S. 348—374.

КОММЕНТАРИИ

А.И. Володарский*

Предметом статьи является практическое землемерие в эпоху Римской империи. Интересно сравнить методы, применявшиеся в европейской цивилизации, с тем, что происходило в странах Востока — Китае и Индии.

В древнекитайских текстах аналогом термина геометрия — землемерие — являлось выражение «измерение полей». При этом необходимо было измерить площадь плоской фигуры. Для простоты в «Математике в девяти книгах» прямоугольное или квадратное поле называлось просто полем; порой полем называлась любая плоская фигура.

Для плоских фигур, отличных от прямоугольника и квадрата, существовали специальные термины: треугольник — поле в виде яшмы, трапеция — косое поле, равнобедренная трапеция — поле

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (код проекта: 01—03—00259).

252

в виде совка, круг — круглое поле, кольцо — дырявое поле, сегмент круга — лук для стрельбы, сектор круга — поле в виде лука. Порой необходимо было определить площадь криволинейного поля, имеющего форму рога буйвола, месяца, барабана, змеи, свирели.

Аналогичные задачи стояли и перед математиками Индии. Им также необходимо было вычистить площадь криволинейной фигуры, имеющей форму бивня слона, молодого месяца, ячменного зерна, обода колеса, барабана. Сходство с Китаем здесь несомненное. При этом криволинейная фигура, имеющая форму бивня слона, индийцами рассматривается как треугольник; форму молодого месяца — как два остроугольных треугольника, приложенных друг к другу основаниями; форму ячменного зерна — как два тупоугольных треугольника, приложенных друг к другу основаниями; форму обода колеса — как прямоугольник; форму барабана — как прямоугольник, к большим сторонам которого приложены два равновеликих сегмента. Начиная с IX в. индийские математики выделяют десять геометрических фигур, которые они считают основными и к которым можно свести остальные фигуры: равнобедренный, равносторонний, разносторонний треугольники, квадрат, прямоугольник, четырехугольники с двумя и тремя ранными сторонами, разносторонний четырехугольник, круг, сегмент круга.

Таким образом, нахождение площади криволинейной фигуры последовательно сводилось к двум операциям: дроблению на основные стандартные фигуры и нахождение их площадей по известным формулам. Э.И. Березкина (Математика древнего Китая. М, 1980. С. 245—246) делит древних вычислителей на «инженеров» и «математиков». «Инженеры» рассматривали геометрические модели, максимально близкие к конкретным фигурам, но при этом пользовались приближенными формулами для их вычислений. «Математики» предпочитали точные формулы для правильных фигур, которые довольно сильно отличались от реальных объектов. А.П. Юшкевич (История математики в Средние века. М., 1961. С. 15) делит вычислителей на «астрономов» и «математиков», которые, впрочем, решали задачи, весьма отличные от нахождения площадей криволинейных фшур. Такое деление на «инженеров» и «математиков», на «астрономов» и «математиков», на «прикладников» и «теоретиков», на практическое землемерие и теоретическую геометрию вполне коррелирует с эмпирическим и априорным подходами в догреческой математике *(Перминов В.Я.* О природе доказательного мышления в догреческую эпоху развития математики // Историко-математические исследования. Вторая сер. М., 1997. Вып. 2 (37). С. 180-200).

253

В июне 1913 г. на XIII съезде русских естествоиспытателей и врачей замечательный историк математики В.В. Бобынин выступил с докладом «Об изучении кавказских народных математических знаний» (Труды ХШ-го съезда русских естествоиспытателей и врачей. Тифлис, 1916. Т. VI. С. 519—532). Он выдвинул программу изучения кавказских народных математических знаний, некоторые пункты которой имеют непосредственное отношение к рассматриваемой теме: «Геометрия. Геометрические предстааления и понятия. Измерение расстояний и линий вообще. Употребляемые в ремеслах и искусствах геометрические построения. Способы и орудия этих построений. Рисование и геометрическое черчение. Выделение и формы земельных участков в сельском хозяйстве и строительном искусстве. Измерение площадей земельных участков и вообще поверхностей. Учение о равенстве площадей фигур при равенстве их периметров. Разложение площадей и способы исполнения над ними арифметических действий.

Квадратура круга. Непосредственное измерение вместимости сосудов для жидкостей, а также и помещений зернового хлеба и вообще плодов. Способы посредственного измерения той же вместимости. Измерение объемов. Их сложение и разложение. Приемы и способы предварительного определения необходимых для возведения построек количеств строительных материалов» (С. 531).

Таким образом, задачи, стоявшие перед учеными по изучению математики в древности и в Средние века, вполне сопоставимы с проблемами, которые волнуют исследователей XX в.

А.А. Григорян

В своей статье Е.А. Зайцев анализирует интереснейший пласт позднеантичной и средневековой культуры: землемерную практику и ее отражение в землемерно-математических текстах. На основе этого анализа автор убедительно обосновал утверждение о том, что в землемерных процедурах никоим образом нельзя видеть прообразы планиметрических конструкций. При этом, в принципе, не важно, имеется ли в наличии теоретическая традиция или нет (очень удачно проведение аналогии между позднеантичными европейскими и древневавилонскими землемерными технологиями). Действительно, планиметрическая теория площадей может быть развита лишь при принятии трех предпосылок, которые оказываются абсолютно несущественными в рамках землемерной практики. Речь идет о том, что, во-первых, фигуры должны лежать на плоскости, а не на криволинейной поверхности, во-вторых, границы фигур должны быть обязательно прямолинейны и, в-третьих, численное значение площади инвариантно относительно

способа разбиения фигуры, с помощью которого производится измерение площади.

В статье подробно анализируется комплекс текстов Римского землемерного корпуса и делается вывод о том, что из имеющихся в нем текстов математического содержания в практике землемерия использовалась лишь очень небольшая их часть. К сожалению, в статье не дается ответа на напрашивающийся в связи с этим вопрос: каково было функциональное назначение этих «теоретических» математических текстов в рамках имевшего вполне прагматический характер землемерного кодекса?

С. С. Демидов

Анализ автором Римского землемерного корпуса, положенный в основание обсуждаемого нами текста, заставляет пересмотреть очень многие сложившиеся в культуре Нового времени стереотипы в представлениях о взаимодействии теоретического и прикладного знания — прикладного знания, которое, согласно этим представлениям, с одной стороны, приспосабливает к практическому использованию результаты, полученные теоретиками, с другой — служит источником новых задач для знания теоретического. Автор показывает, что характер этого взаимодействия в Древнем Риме совершенно иной. Эти два вида знания как бы сосуществуют друг с другом, практически не взаимодействуя. Замечательно, что в своих выводах, касающихся римской землемерной практики, он старается следовать исключительно источникам. Всякие, не опирающиеся на них предположения он стремится исключить. Однако Е.А. Зайцев перестает следовать этому правилу, как только переходит к выводам общего характера, что, на мой взгляд, совершенно естественно, особенно в данном случае, когда речь идет о такой деликатной материи, как генезис математического знания, где источники попросту отсутствуют. Автор обсуждает проблему возникновения геометрического знания на материале римской землемерной практики. Традиция (в частности, античная) не связывает его возникновение с Апеннинским полуостровом. Поэтому сам факт привлечения для его рассмотрения римской гсмлемерной практики указывает на то, что Е.А. Зайцев основывает свои рассуждении на не формулируемом явно предположении о том, что вопрос возникновения геометрического знания протекает одинаковым образом везде и всегда — в Египте, у этрусков или у современных индейцев из джунглей Амазонки. Предположении основательном, но все же только предположении.

Автор не проводит жесткого разграничения между процессом формирования геометрических представлений, начало которого
255
мы различаем уже в эпоху неолита, и возникновением теоретической геометрии, что случилось только в Древней Греции. Отсюда и предъявляемое автором сопоставление римской землемерной практики не с геометрической (или псевдогеометрической) практикой обитателей, скажем, Древнего Египта или Вавилона (единственный пример такого рода заимствован им у J. Friberg'a), а с теоретической геометрией Евклида, представленной в «аксиоматической форме». Мне кажется, что конструкции автора, в основе которых лежит целый ряд умозрительных правдоподобных предположений (только одно из которых мы привели выше) не уменьшают убедительность гипотезы о происхождении геометрии из измерительной практики — не обязательно практикующих землемеров (для этого, быть может, нужно не столько мерить землю, сколько размышлять об этой процедуре), — на что указывает этимология термина «геометрия», которую автор при почти полном отсутствии источников не посчитал серьезным аргументом.

К сожалению, мы должны рассуждать на эту тему, не имея прямых, но лишь косвенные аргументы — вроде тех, которые мы можем почерпнуть из римской землемерной практики. Впрочем, можно попробовать извлечь некоторую информацию из других доступных, но пока мало используемых источников, например, тех, которые представляет нам этноматематика и детская психология. Конечно, правомерность привлечения материала из этих двух областей также покоится на умозрительных предположениях, одно из которых (о том, что процесс возникновения геометрического знания протекает одинаковым образом везде и всегда) мы уже упомянули, другое основывается на нашей убежденности в том, что психика ребенка в своем развитии проходит через те же стадии, что и интеллектуальная история человечества. Любой полученный отсюда вывод при всей своей уязвимости для возможной критики способен расширить пространство наших возможностей для обсуждения общих проблем истории науки, в частности проблем генезиса математического знания.

А.Н.Кричевец

Статья Е.А. Зайцева напоминает нам об одном важном обстоятельстве, которое можно упустить, если под математикой понимать только европейскую математику, рожденную Новым временем. Добытые математикой результаты не переходят от поколения к поколению автоматически, и культурный фон может оказывать на передаваемое математическое содержание очень существенное воздействие. К сожалению, из представленного текста нельзя строго
256
заключить, что греческая геометрия существовала в Риме поздней античности в весьма отличном от оригинала виде. Кажется, однако, что полное игнорирование в «прикладном землемерии» достижений «теоретического землемерия», если бы таковое органично входило в римскую культуру, вряд ли было бы возможно. Это еше раз напоминает нам, что доступное в виде текстов математическое знание не обязательно «распредмечивается» адекватным образом культурой, которая имеет познавательные установки, отличные от тех установок, которые были присущи культуре, создавшей это знание. Пусть и не в таком кардинальном виде, но утрата математического знания вполне возможна и при передаче его от поколения к поколению. При нынешних темпах культурных сдвигов проблема

передачи математического знания может оказаться столь же актуальной, как и в ситуации его передачи от утонченных греков к грубоватым римлянам.

ОТВЕТ АВТОРА

А.И. Володарскому

А.И. Володарский справедливо указывает на то, что историки математики традиционно обращают внимание преимущественно на те исторические формы математики, которые могут быть легко проинтерпретированы в терминах современной теоретической математики. При этом без должного анализа остается внушительный пласт той практической математики, которая не укладывается в прокрустово ложе математики современной. Ссылка на В.В. Бобынина в данном контексте весьма уместна. Остается сожалеть о том, что предложенная замечательным русским историком математики программа не была реализована.

А.А. Григоряну

Вопрос: «Каково было функциональное назначение "теоретических" математических текстов в рамках имевшего вполне прагматический характер землемерного кодекса?»

Дело в том, что сам кодекс оформился на рубеже V—VI вв., когда золотое время римского землемерия было далеко позади. В его основу легли «записные книжки», принадлежавшие профессионалам землемерия высокого класса, живших в I—II вв. Что касается чисто математических фрагментов (они — также римского происхождения, но принадлежат иной, «книжной» традиции), то, вероятнее всего, большая их часть вошла в корпус уже на

излете античности или даже в раннем Средневековье. Мне представляется, что в V в. в античной культуре на латинском Западе произошел последний «взлет», который характеризовался составлением сводных трудов энциклопедического характера. Такой «энциклопедией» землемерия и стал Римский землемерный корпус.

С. С. ***Демидову***

Первое из замечаний С.С. Демидова заключается в том, что я обсуждаю проблему генезиса геометрического знания на материале римской практики, в то время как традиция не связывает его возникновение с Апеннинским полуостровом. Второе — в том, что не следует сбрасывать со счетов возможность возникновения теоретической геометрии из землемерия.

1. Дело в том, что вывод о принципиальном отличии землемерной практики от теоретической геометрии (или ее фрагмента — теории площадей плоских фигур) я делаю на основе идей, развитых мною в статье [2], где кроме римских источников использованы шумеро-вавилонские, древнеегипетские, эллинистические (Египет эпохи Птолемеев) и византийские землемерно-матемэтические тексты. В данной же статье, которая задумана как продолжение предыдущей, я попытался ответить на более специальный вопрос о том, как могло бы функционировать математическое знание, зафиксированное в Римском землемерном корпусе, в конкретном социально-экономическом контексте римской эпохи.

2. Основная идея этих двух статей состоит в том, что землемерная практика не была геометрией в том смысле, который мы вслед за греками вкладываем в это понятие, — в ней качественная сторона геометрической формы (прямизна или кривизна) не играла никакой роли. Использование тех или иных землемерных формул определялось

исключительно ее количественной характеристикой — числом сторон измеряемого поля. Я полагаю, что указание на принципиальное различие между землемерием и геометрией является серьезным аргументом, ставящим под сомнение сообщение Геродота о возникновении геометрии из землеизмерения. Если пытаться связывать возникновение теоретической геометрии с практикой, то, прежде всего, следует обратить внимание на те области практической деятельности, в которых прямизна линий и поверхностей играет решающую роль, т.е. на архитектуру и строительство. Интересные соображения на этот счет были недавно высказаны в статье С.Н. Бычкова «(Египетская геометрия и греческая наука» (Историко-математические исследования. Вып, 6 (41). М., 2001. С. 277—284).
258

А.Н. Кричевиу

Римляне были знакомы с теоретической геометрией греков. Как и прочую греческую литературу, математические тексты, в том числе и «Начала» Евклида, они читали в оригинале, поскольку были двуязычны (первый перевод «Начал» на латинский язык был сделан Боэцием лишь ок. 500 г.). Известно высказывание Цицерона о том, что греки достигли значительных высот в геометрии, а римляне взяли из греческой геометрии лишь то, что им нужно было для практики. К сожалению, из текста Цицерона невозможно понять, какие именно фрагменты греческой геометрии были приспособлены римлянами для практических нужд. Известно, однако, что государственные землемеры не обучались в тех школах, где преподавались свободные искусства, но постигали азы ремесла непосредственно на местности под руководством опытного наставника.

Мне представляется, что римляне не сами делали «выборку» из сочинений греческой геометрии, а пользовались текстами, составленными в Египте во времена Герона или чуть раньше. Дело в том, что когда римские императоры инициировали в I в. межевание колониальных земель, то первых землемеров они пригласили из Египта, в котором уже в течение нескольких столетий существовала хорошая землемерная школа. Можно лишь сожалеть о том, что более детальных сведений о взаимодействии греческой математики с римским землемерием у нас нет.

А.Д.Суханов

РОЛЬ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ В СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКЕ*

1. Краткий исторический экскурс — от Паскаля до Гаусса

Проблема взаимоотношений математики и физики издавна занимала умы исследователей. На этот счет существуют достаточно крайние точки зрения типа: «теоретическая физика — это часть математики» (Д. Гильберт), «непостижимая эффективность математики в физике» (Е. Вигнер) и даже «математика — это прикладная физика» (В. И. Арнольд).

Конечно, математические идеи порождаются не только физикой. Однако широкой научной общественностью они эффек-

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (код проекта: 02—03—18148).

259
тивно усваиваются лишь тогда, когда рождаются в «физической оболочке». В этом случае

они воспринимаются как язык описания окружающей природы, органично присущий физике, а не какой-то чужеродный, хотя и полезный математический аппарат.

Яркий пример качественно различного восприятия математических открытий дает сравнение судьбы физических приложений математического анализа и теории вероятностей. Эти два раздела высшей математики зародились примерно одновременно в середине XVII в. в трудах И. Ньютона и Г. Лейбница, с одной стороны, и Б. Паскаля — с другой. Вместе с тем уровень их освоения физиками, а через них — и обществом, оказался совершенно различным.

Исторически сложилось так, что понятия математического анализа вводились в широкий оборот на примерах из физики (производная как скорость, интеграл как работа силы, поток векторного поля как поток жидкости и т.п.) и в дальнейшем нашли применение во многих физических и прикладных задачах. В то же время понятия теории вероятностей были введены первоначально на примерах из азартных игр и оставались долгое время отвлеченными, будучи лишенными физических приложений.

Этому дополнительно способствовало окончательное торжество в конце XVIII в. доктрины Ньютона о возможности классического (регулярного) описания природы на основе детерминистских законов движения отдельных микрочастиц материи. Наиболее отчетливая формулировка подобной доктрины была дана в фундаментальном труде П. Лапласа по небесной механике, в которой он уподобил Вселенную бесперебойно работающему «часовому механизму». В его подходе не оставалось места для физических приложений теории вероятностей, в математическую разработку которой сам Лаплас внес существенный вклад.

Первым; кто попытался применить теорию вероятностей к физической проблеме, был К.Ф. Гаусс. В 1809 г., анализируя метод наименьших квадратов, разработанный незадолго до этого А. Лежандром, он применил его для анализа данных наблюдений о движении планет. Гаусс впервые поставил вопрос о вероятности отклонения при оценке ошибок наблюдений и в связи с этим ввел и обосновал распределение вероятностей, известное как нормальное распределение, или распределение Гаусса.

Начиная с этого момента, идеи теории вероятностей начали проникать в физику. Однако, с принципиальной точки зрения, ничего не изменилось. По-прежнему первичным, или фундаментальным, в физике считалось детерминистское описание природы, основанное на моделях физических объектов, используемых в математическом анализе. Что же касается теории вероятностей, то ей отводилась роль вспомогательного математического аппарата, модели которого не имеют какого-либо отношения к физике и поэтому являются чем-то вторичным, нефундаментальным. Долгие годы областью физических приложений теории вероятностей фактически служила лишь теория ошибок эксперимента.

260

У большинства физиков продолжало господствовать убеждение в том, что с улучшением техники эксперимента и искусства экспериментаторов влияние ошибок на результаты опытов будет сокращаться. В итоге теорию вероятностей, в конце концов, удастся полностью изгнать из физики. На возможность другого подхода, в котором теории вероятностей могла бы принадлежать фундаментальная роль в описании природы, до начала XX в. указывали лишь немногие философы, начиная с Эпикура (IV в до н.э.).

2. Статистическая механика как первый шаг к неклассическому (вероятностному) описанию природы

Впервые серьезная потребность в использовании теории вероятностей в физике обнаружилась, начиная с середины XIX в. в связи с развитием механической интерпретации тепловых яате-ний. Как известно, эта интерпретация не выходила за рамки доктрины Ньютона о принципиальной сводимости макроописания природы к микроописанию. Однако наличие в макроскопических телах огромного числа атомов делало обоснование законов термодинамики из законов механики затруднительным. В условиях, когда сведения о начальных параметрах движения и точное описание каждого отдельного атома практически недоступны, было предложено ограничиться описанием состояния теплового равновесия макрообъектов в целом. В этом состоянии свойства макрообъектов можно было описать небольшим числом макропараметров, подчиненных законам термодинамики. Трактовка этих макропараметров как средних характеристик совокупности движущихся атомов в целом, образующих макрообъект, и привело к использованию вероятностного описания природы на микроуровне.

Для модели равновесного идеального газа такое описание впервые было предложено в 1860 г. Дж. Максвеллом. Чтобы иметь возможность вычислять макропараметры такой системы в тепловом равновесии, он ввел распределение вероятностей молекул газа по скоростям, которое принципиально ничем не отличалось от нормального распределения Гаусса. Впоследствии оно было обобщено Л. Больцманом на случай газа, находящегося во внешнем потенциальном поле. Наконец, вершиной использования вероятностного описания равновесных макрообъектов в фазовом пространстве входящих в них атомов стала статистическая механика, разработанная независимо Дж. Гиббсом и А. Эйнштейном в 1902 г. последовательно реализовавшими идеи Больцмана о взаимосвязи микро- и макроописаний природы.

Сам Гиббс назвал свою теорию методом рационального обоснования законов термодинамики, прежде всего в состоянии теплового равновесия и вблизи него. Отличительной чертой статистической механики Гиббса является, как известно, последовательное вероятностное описание движения микрочастиц в определенных внешних условиях, согласующееся как с законами динамики, так и с законами термодинамики. Однако такое описание отнюдь не фундаментально. В подходе Гиббса детерминистские законы механики по-прежнему являются первичными, а использование вероятностного описания систем из большого числа микрочастиц определяется только неполнотой информации о движении последних. В то же время неявно предполагается, что при появлении такой информации потребность r использовании теории вероятностей исчезнет, так что свойства макрообъектов можно будет выводить непосредственно из свойств микрочастиц.

Следует также отметить промежуточный характер результатов Гиббса даже в рамках сделанных им исходных предположений. Прежде всего, распределение Гиббса позволяет в принципе вычислять только значения экстенсивных макропараметров в тепловом равновесии, например энергии или числа частиц. Что касается интенсивных макропараметров типа температуры, то они задаются изначально как модули распределения Гиббса. Это означает, что реально только часть термодинамических величин может быть расчитана как некие средние характеристики, исходя из известных законов динамики микрочастиц.

Еще более запутанна ситуация, связанная с вычислением характеристик флуктуаций макропараметров. С одной стороны, вероятностное описание в фазовом пространстве совокупности микрочастиц предполагает принципиальную возможность вычислять не только средние значения макропараметров, но и отклонения от них (флуктуации). Для отдельных макропараметров они характеризуются дисперсиями, а для двух взаимосвязанных макропараметров — корреляторами. Это утверждение, разумеется, не относится к флуктуациям температуры и других интенсивных макропараметров, ибо сама температура в подходе Гиббса жестко фиксирована.

Но даже с интерпретацией результатов расчетов экстенсивных макропараметров дело обстоит не так просто. Например, действуя формально, по известному распределению Гиббса нетрудно вычислить дисперсию энергии системы в фазовом пространстве ее микросостояний. Однако интерпретация ее как дисперсии энергии макросистемы весьма затруднительна, ибо в условиях постоянства объема требует обязательного допущения флуктуации температуры системы. Между тем сохранение нулевого начала термодинамики в формулировке Р. Клаузиуса, исходящей из жесткого равенства температур системы и термостата в условиях теплового равновесия, — один из краеугольных камней термодинамики Гиббса, основанной на статистической механике.

Таким образом, вопреки первоначальным намерениям статистическая механика Гиббса не позволяет в полном объеме вывести законы термодинамики из законов динамики. В ней вероятностное описание по-прежнему играет вторичную роль. Фактически она является промежуточной теорией между динамикой и термодинамикой, ибо содержит одновременно и микро-, и макропараметры.

Принципиальная возможность рассмотрения в ней флуктуации экстенсивных величин сообщает ей некоторые черты неклассической теории. Однако многие величины в подходе Гиббса либо вообще не флуктуируют (температура), либо вычисление соответствующих дисперсий дает неверные результаты (давление). В этом смысле подход Гиббса можно назвать квазиклассическим, промежуточным между классическим (чисто детерминистским) и неклассическим (чисто вероятностным) описаниями природы. На это обстоятельство обращал внимание ряд исследователей и, в частности, из математиков — В.П. Маслов.

Изложенные соображения позволяют заключить, что метод Гиббса отнюдь не является вершиной вероятностного описания природы. В связи с этим вековые усилия, потраченные на его обоснование и, в частности, на проблему эргодичности закономерно дали ограниченные, с физической точки зрения, результаты. В связи с этим многие математики, например Б. Мандельброт, высказывались в том смысле, что макроописание природы не обязательно в полном объеме следует из ее микроописания. Поэтому полное обоснование термодинамики из динамики и невозможно, и никому не нужно.

В этих условиях вместо проблемы вывода законов термодинамики из законов динамики принципиальным оказывается вопрос о том, какое описание природы — классическое (детерминистское) или неклассическое (вероятностное) — является первичным, фундаментальным как на микро-, так и на макроуровне. Ответ на него сегодня может быть найден в современных фундаментальных теориях физики.

3. Квантовая динамика как фундаментальное вероятностное описание природы на микроуровне

Исходный толчок к кардинальному пересмотру роли теории вероятностей в физике был дан открытием в 1900 г. закона теплового излучения М. Планка. Хотя это обстоятельство и было осознано не сразу, из анализа этого закона следует, что на микроуровне первичным, фундаментальным является неклассическое (вероятностное) описание природы. Последнее связано с тем, что на микроуровне любой материальный объект испытывает неконтролируемое квантовое воздействие, мерой которого служит постоянная Планка. Эта величина определяет минимальную долю воздействия, которой способны обмениваться любые объекты, в том числе объект и сам исследователь при изучении свойств объекта.

В этих условиях число характеристик, совместно задающих физическую реальность, как бы удваивается. Наряду с привычными характеристиками объектов самих по себе (энергия, заряд и т.п.) не меньшую роль играют характеристики состояния объекта, учитывающие наличие неконтролируемого квантового воздействия окружения (длина волны де Бройля, плотность вероятности обнаружения микрочастицы и т.п.).

Многолетняя история утверждения квантовой теории как фундаментального описания природы на микроуровне характеризуется несколькими этапами. На первом этапе (1900—1925) приходилось иметь дело лишь с полуклассическими представлениями, прежде всего с моделью атома Бора. Сегодня ее можно трактовать как квазиклассическое приближение, в котором классическое описание еще не стало явным и последовательным.

После завершения создания квантовой механики (1925—1927) в работах В. Гейзенберга, П. Дирака, Э. Шрёдингера и М. Борна центром дискуссии стал вопрос о первичности, фундаментальности микроописания природы в квантовой динамике. В течение многих десятилетий предпринимались попытки доказать его вторичность либо путем введения так называемых «скрытых параметров», либо истолковывая поведение микрообъектов как своеобразную диффузию. Следует, однако, отметить, что еще в 1932 г. Дж. фон Нейман доказал, что всякая теория, в которой операторы координаты и импульса не коммутируют, не может быть истолкована как теория со «скрытыми параметрами» локального типа.

В 60-е гг. XX в. Дж. Белл показал, что вопрос о существовании подобных параметров можно решить путем экспериментальной проверки ряда неравенств между наблюдаемыми физическими величинами. В последние десятилетия подобные эксперименты были поставлены, и они с высокой точностью подтвердили справедливость представлений о том, что квантовая динамика дает первичное вероятностное описание природы.

Определенную трудность все эти годы представляло и то обстоятельство, что в квантовой динамике помимо понятия плотности вероятности используется и комплексная амплитуда вероятности. Это приводило к тому, что довольно долгое время многие математики не рассматривали квантовую динамику как математически корректную теорию и тем более как часть теории вероятностей.

264

Однако во второй половине XX в. эта точка зрения изменилась. Как было показано в работах Дж. Макки и А.С. Холево, квантовая динамика представляет собой еще одну, более изощренную статистическую модель, которая органично входит в современную математическую теорию вероятностей.

Иными словами, сегодня большинство и физиков, и математиков рассматривают квантовую динамику как фундаментальную неклассическую теорию вероятностного типа, дающую максимально полное описание природы на микроуровне. Это описание является первичным, фундаментальным, а детерминистткое описание следует из него лишь в среднем при наличии определенных условий.

Внешним признаком, позволяющим отнести квантовую динамику к истинно неклассическим теориям, можно считать наличие в ней флуктуации любых микропараметров. При этом в произвольном микросостоянии одновременно флуктуируют пары сопряженных величин, например координата и импульс. Более того, средние дисперсии этих величин в простейших случаях связаны между собой соотношениями неопределенностей Гейзенберга, Это означает, что в природе не существует таких микросостояний, в которых значения этих величин были бы одновременно абсолютно точными. Наконец, корреляция флуктуации сопряженных величин в этом случае может быть названа корреляцией «в противофазе», поскольку соответствующие дисперсии обратно пропорциональны друг другу. Тем самым, выбирая микросостояние, в котором дисперсия координаты больше, мы одновременно убеждаемся в том, что дисперсия импульса в нем оказывается меньше, и наоборот.

Надо, правда, отметить, что при описании микромира приходится встречаться и с соотношениями неопределенностей типа «энергия — время» или «число частиц — фаза», в которых только одной из величин можно сопоставить эрмитов оператор, а другая величина (например, время или фаза) при этом носит числовой характер. В этом случае соотношения неопределенностей, связаннее с некоммутативностью операторов двух сопряженных величин, уже не имеют места. Тот факт, что корреляция флуктуации в этих случаях все-таки имеется, заставляет задуматься о необходимости использования соотношений неопределенностей более общего типа, чем соотношения неопределенностей Гейзенберга.

4. Статистическая термодинамика как фундаментальное вероятностное описание природы на макроуровне

Традиционно принято считать, что вершиной применения вероятностных методов при макроописании природы является статистическая механика Гиббса и основанная на ней термодина-
265
мика. Выше уже было отмечено, что это далеко не так. В методе Гиббса, исходя из функции распределения в фазовом пространстве, удается вычислить только некоторые макропараметры и их флуктуации. Поэтому этот метод имеет смысл квазиклассического приближения к истинно неклассической теории, дающей последовательное описание макромира.

Такой теорией сегодня является статистическая термодинамика, в которой функция распределения задается непосредственно в пространстве макропараметров. Она зародилась в 1903—1910 гг. в основополагающих трудах Эйнштейна и в дальнейшем получила развитие в 20—30-е гг. XX в. в работах Л. Сциларда, Л. "Орнштейна, Р. Фюрта, Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. Основу статистической термодинамики состаштяют теория термодинамических флуктуации и теория броуновского движения, заложенные Эйнштейном.

В математическое обоснование теории броуновского движения существенный вклад внесли Н. Винер в 20-е и Э. Нельсон в 60-е гг. XX в. Что касается теории флуктуации Эйнштейна, то интерес к ней среди математиков возродился в 50-е гг. XX в. после появления работ Мандельброта. В последние десятилетия математическим обоснованием статистической термодинамики в целом активно занимались Ф. Шлёгль, Б. Лавенда, С. Уффинк и др. авторы, привлекавшие для этой цели современные методы математической статистики (Р.Фишер, С. Кульбак, Е.Дынкин, Г. Джеффрис).

Интересно отметить, что исходным толчком к развитию статистической термодинамики также послужило открытие Планком закона теплового излучения (1900). Дело в том, что в закон Планка входят не одна, а две фундаментальные константы — постоянная Планка и постоянная Больцмана, физический смысл которых был впервые выяснен Планком. С его точки зрения, постоянная Больцмана играет роль характеристики неконтролируемого теплового воздействия на объект на макроуровне, анатогичную роли постоянной Планка на микроуровне.

Решающий шаг в становлении статистической термодинамики был сделан Эйнштейном. Он первым предложил отказаться от жесткой формулировки нулевого начала термодинамики, использовавшейся и Клаузиусом, и Гиббсом. Вместо нее он предложил положить в основу макроописания природы утверждение, согласно которому в тепловом равновесии температура объекта совпадает с температурой бесконечного термостата лишь в среднем. Она способна испытывать флуктуации, величина которых растет с ростом температуры и убывает при увеличении теплоемкости объекта.
266

Исходя из новой формулировки нулевого начала, Эйнштейн в 1903 г. начал построение новой версии термодинамики — статистической термодинамики, в которой на равной основе флуктуируют все макропараметры. Вычисление средних значений флуктуирующих макропараметров и отклонений от них в этой теории производится на основе экспоненциального распределения в пространстве макропараметров, которое внешне весьма напоминает каноническое распределение Гиббса в пространстве микропараметров. В дальнейшем, в 50-е гг. XX в., в трудах А.Я. Хинчина и Э. Джейнса было показано, что экспоненциальная форма, характерная для канонического распределения, должна возникать в любом пространстве в условиях теплового равновесия, исходя из требований максимальности функционала энтропии при выполнении условий сохранения средней энергии и нормировки.

Современное развитие статистической термодинамики позволило установить общность основ теории флуктуации и теории броуновского движения Эйнштейна. Более того, оно положило конец доктрине редукционизма Ньютона. Было установлено, что отнюдь не все макропараметры имеют прообразы на микроуровне. Последнее приводит к необходимости отказаться от идеи, неявно принятой в статистической механике Гиббса, согласно которой обобщенные координаты и импульсы атомов играют роль «скрытых параметров» при описании природы на макроуровне.

Тем самым статистическая термодинамика имеет статус самостоятельной неклассической (вероятностной) теории на макроуровне описания природы, в которой существенную и равноправную рать играют характеристики ее окружения (например, температура), от которых зависит макросостояние системы. Это описание является первичным, фундаментальным, а детерминистское описание следует из него лишь в среднем при наличии определенных условий.

Как и в случае квантовой динамики, внешним признаком, позволяющим отнести статистическую термодинамику к истинно неклассическим теориям, можно считать наличие в ней флуктуации любых макропараметров. При этом в произвольном макросостоянии теплового равновесия одновременно флуктуируют пары термодинамически сопряженных величин, например внутренняя энергия и температура.

Новым обстоятельством, окончательно осознанным лишь в последние десятилетия, явилось наличие в статистической термодинамике не только флуктуации сопряженных величин, но и корреляций этих флуктуации. Воплощением последних служит соотношение неопределенностей Эйнштейна между флуктуациями энергии и температуры, а также между флуктуациями других пар сопряженных макропараметров. 267

Важно отметить, что сам факт наличия соотношения неопределенностей Эйнштейна в статистической термодинамике концептуально сближает эту теорию с квантовой динамикой как другой не классической теорией. Однако на этом аналогия заканчивается. Соотношения неопределенностей Эйнштейна в статистической термодинамике и исходные соотношения неопределенностей Гейзенберга в квантовой динамике оказались качественно различными. Среди макросостояний в тепловом равновесии не существует таких, в которых значения внутренней энергии и температуры системы были бы одновременно точными. Вместе с тем корреляция соответствующих флуктуации может быть названа корреляцией «в фазе, поскольку их характеристики прямо пропорциональны друг другу. В итоге для любого равновесного макросостояния реальной системы флуктуации ее внутренней энергии и температуры убывают и возрастают синхронно.

С математической точки зрения, существенно, что в статистической термодинамике соотношения неопределенностей имеют место для флуктуации величин, задаваемых числами, а не операторами. Тем самым многолетняя традиция связывать наличие соотношений неопределенностей с некоммутативностью соответствующих операторов оказалась ограниченной. Это позволило по-новому оценить смысл подобных соотношений для величин типа «энергия—время» и в самой квантовой динамике, в которой время является числовой, а не операторной характеристикой.

5. Возможность установления взаимосвязей между двумя фундаментальными неклассическими теориями

Таким образом, современная физика основана на двух неклассических теориях вероятностного типа — квантовой динамике на микроуровне и статистической термодинамике на макроуровне. Обе теории соответствуют первичному фундаментальному описанию природы. И в той, и в другой теориях любые физические величины флуктуируют относительно своих средних значений, а между флуктуациями пары сопряженных величин имеются корреляции. В связи с этим возникает вопрос о возможности установления взаимосвязей между этими теориями на основе теории вероятностей, тем более что в современной физике можно обнаружить такие явления и такие условия проведения эксперимента, когда одновременно имеют место и квантовые, и тепловые флуктуации.

Постановка данного вопроса оправдана еще и тем, что, несмотря на мощь и разработанность указанных неклассических теорий, каждая из них не является замкнутой. Сегодня можно утверж-

268

дать, что в каждой из них имеются недоработки и даже взаимные противоречия. Прежде всего, корреляции сопряженных величин в этих теориях совершенно различны. В первоначальной формулировке квантовой динамики мы имеем дело с корреляцией «в противофазе». Она отражает наличие соотношений неопределенностей Гейзенберга для флуктуирующих микропараметров, которым сопоставляются некоммутирующие эрмитовы операторы. В то же время в статистической термодинамике мы имеем дело с корреляцией «в фазе». Она отражает наличие соотношений неопределенностей Эйнштейна для флуктуирующих макропараметров, которым сопоставляются обычные числа. В результате, хотя в обоих случаях и имеет место корреляция флуктуации, ее последствия совершенно различны. В частности, флуктуации пары физических величин в первом случае обратно пропорциональны, а во втором — прямо пропорциональны друг другу.

Далее, неполностью разработанным разделом в традиционной квантовой динамике является теория измерений, в которой важнейшей проблемой является редукция волновой функции. В последние годы ее пытаются решить в рамках так называемой «теории декогеренции»[1]. В связи с этим интересно "отметить, что, как подчеркивает Б.Б. Кадомцев, в процессе декогеренции микросостояния системы качественно изменяются, приобретая некоторые термодинамические особенности.

Наконец, в последние десятилетия был открыт ряд эффектов (Казимира, Хокинга, Унру), в которых открытые квантовые системы обнаруживают тепловые свойства. Наиболее разработанной с этой точки зрения моделью является черная дыра. Для нее и квантово-динамический, и термодинамический расчеты дают во многом одинаковые результаты. Из них следует, что эти чисто квантовые объекты объединяют отличные от нуля значения энтропии и, соответственно, температуры. В связи с этим возникает необходимость заново проанализировать начала термодинамики. В частности, новый смысл приобретает утверждение третьего начала о недостижимости абсолютного нуля температуры.

На самом деле предпосылки установления взаимосвязей между двумя неклассическими теориями были известны давно, но до последних лет не были востребованы. Напомним в связи с этим, что и Планк, и Эйнштейн большинство своих открытий сделали «в термодинамической оболочке». В частности, закон теплового излучения Планка, положивший начало развитию неклассической физики, в общем случае зависит сразу от двух фундаментальных констант — постоянных Планка и Больцмана, характеризующих наличие одновременно и квантового, и теплового неконтролируемых воздействий окружения на систему. И только в пределе низких

269

или высоких температур термостата в этом законе остаются характеристики только одного типа воздействия — либо квантового, либо теплового, соответственно. В связи с этим есть все основания полагать, что, следуя идеям Планка и Эйнштейна, можно построить единую теорию флуктуации, объединяющую квантовые и тепловые флуктуации.

Важнейшим элементом такой теории могли бы стать обобщенные соотношения неопределенностей, впервые полученные Э. Шрёдингером еще в 1930 г. Они являются воплощением неравенства Коши-Буняковского-Шварца в наиболее общем пространстве состояний — комплексном гильбертовом пространстве. В левую часть неравенства в таких соотношениях неопределенностей, как, впрочем, и в других случаях, входит произведение дисперсий соответствующих физических величин. В правую часть неравенства входит целостная характеристика корреляции флуктуации этих величин. Она включает в себя два слагаемых, знакомых по отдельности из соотношений неопределенностей Гейзенберга и Эйнштейна.

Одно из них является вкладом среднего значения коммутатора соответствующих операторов и представляет собой правую часть соотношения неопределенностей Гейзенберга. Другое слагаемое является вкладом среднего значения антикоммутатора тех же операторов. Его важнейшей особенностью является то обстоятельство, что в квазиклассическом пределе оно сводится к коррелятору флуктуации, стоящему в правой части соотношения неопределенностей Эйнштейна в статистической термодинамике. Иными словами, два этих слагаемых отражают два типа корреляции флуктуации — «в противофазе» и «в фазе», причем в общем случае они имеют место одновременно. Что же касается соотношений неопределенностей Гейзенберга или Эйнштейна самих по себе, то они справедливы только в частных случаях, когда тот или иной тип корреляции флуктуации оказывается единственным.

Интересно отметить, что даже в тех случаях, когда имеют место оба типа корреляции флуктуации, их относительная роль может зависеть от времени. Более того, в квантовой динамике возможны ситуации, когда корреляция флуктуации имеет характер корреляции «в фазе», что качественно близко к ситуации в статистической термодинамике.

Таким образом, сегодня есть веские основания полагать, что дальнейшее развитие квантовой динамики и статистической термодинамики может в обозримом будущем привести к созданию целостной физической теории неклассического типа, основанной на современной теории вероятностей. В этой целостной теории

270

центральное место, бесспорно, займет теория флуктуации любых физических величин и корреляции между ними. Тем самым сама теория вероятностей, пройдя трехсотлетний путь развития как сугубо математическая дисциплина, сможет наконец в полной мере опираться на физические понятия и модели.

Список литературы

1. *Башкиров А.Г., Суханов А.Д.* Энтропия открытых квантовых систем и распределение Пуассона // Теоретическая и математическая физика. 2000. Т. 123. № 1. С. 107-115.
2. *Суханов А.Д.* Обобщенные соотношения неопределенностей «энергия—время» // Теоретическая и математическая физика. 2000. Т. 125. № 2. С. 221—241.
3. *Рудой Ю.Г., Суханов А.Д.* Термодинамические флуктуации в подходах Гиббса и Эйнштейна // Успехи физических наук. 2000. Т. 170. Вып. 12. С. 1265—1296.
4. *Суханов А.Д.* Новый подход к соотношениям неопределенностей «энергия-время» // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2001. Т. 32. Вып. 5. С. 1177-1221.

КОММЕНТАРИИ

В.Б.Губин

Я вынужден возразить по существу вопроса. Автор пишет: «...Многие математики, например Б. Мандельброт. высказывались в том смысле, что макроописание природы не обязательно в полном объеме следует из ее микроописания. Поэтому полное обоснование термодинамики из динамики и невозможно, и никому не нужно».

По-моему, это «поэтому» слишком поспешно, нелогично и слишком узко по взгляду на вопрос. Сама невозможность обосновать термодинамику из динамики широко известна уже не менее ста лет — во всяком случае, не позже появления возвратной теоремы Пуанкаре. И даже найдены факторы, которые помимо динамики (лучше говорить о микромеханике или просто механике частиц) ответственны за появление термодинамических эффектов у систем из механических частиц. Об этих факторах говорил еще Пуанкаре *(Пуанкаре А.* Ценность науки // О науке. М., 1983. С. 238—239), а Смолуховский подробно исследовал и описал их *(Смолуховский М.* Доступные наблюдению молекулярные явления, противоречащие обычной термодинамике // *Эйнштейн А., Смолуховский М.* Брауновское движение. Л., 1936. С. 166—198; *Смолуховский М.* Молекулярно-кинетические исследования по вопросу об обращении термодинамически необратимых процессов и о возврате аномальных состояний // Там же. С. 273—307).

Далее автор пишет: «В этих условиях вместо проблемы вывода законов термодинамики из законов динамики принципиаль-

271

ным оказывается вопрос о том, какое описание природы — классическое (детерминистское) или неклассическое (вероятностное) является первичным, фундаментальным как на микро-, так и на макроуровнях».

Хотелось бы заметить, что принципиальным является все же вопрос о возможности и механизме возникновения термодинамики ***при*** той или иной микромеханике. Я подчеркнул ***«при»*** для специального отличения от «**из**», как только и представляли(ют) себе этот механизм метафизические редукционисты, которым не пошел впрок урок Смолуховского. Увод же вопроса в сторону выяснения первичности реальных законов природы, с одной стороны, оставляет проблему согласования механики и термодинамики нерешенной и даже ненужной, что довольно-таки удивительно, а с другой — сам по себе является совершенно ошибочным с точки зрения нормальной теории познания, которая говорит, что последних законов природы мы узнать не можем — это было бы знание бесконечно сложной абсолютной истины. И эта ошибка отнюдь не нова. Г.Я. Мякишев утверждал в книге *(Мякишев Г.Я.* Динамические и статистические закономерности в физике. М., 1973), что статистические законы более фундаментальные, чем динамические, и успешно защитил этот смешной тезис в своей докторской диссертации по философии.

Автор продолжает: «Ответ на него сегодня может быть найден в современных фундаментальных теориях физики, ...Сегодня большинство и физиков, и математиков рассматривают квантовую динамику как фундаментальную неклассическую теорию вероятностного типа, дающую максимально полное описание природы на микроуровне».

Это мнение сродни бывшему распространенным у нас в конце 40-х и в течение 50-х гг. представлению об истинной элементарности тогдашних элементарных частиц (что оставило следы даже в «Теории поля» Ландау и Лифшица), По его поводу автор первой работающей теории составных элементарных частиц Сеито Саката *(Саката С.* Новые представления об элементарных частицах // Вопросы философии. 1962. № 6. С. 129—140) пошутил: «Нужно помнить, что, по-видимому, нейтрино так же неисчерпаем, как и атом». Так сказать, конкретные теории приходят и уходят, а диалектика остается. X. Казимир справедливо призывал отличать мир от математических построений: «Хотя подобный анализ общих принципов измерения и вопроса о недопустимости скрытых переменных и т.п. несомненно, представляет большую ценность для прояснения самого существа наших идей, я всегда ощущаю известный скептицизм, как только в результате такого анализа возникают предсказания о невозможности существования тех или иных теории вообще, ибо я всегда опасаюсь того, что

272

наш ум недостаточно всеобъемлющ, чтобы точно предвидеть все многообразие мыслимых парадоксальных ситуаций. Конечно, они (ситуации. — *В.Г.)* не разрушили бы изложенного математического доказательства — они просто стояли бы вне его рамок» (Успехи физических наук. 1970. Т. 101. Вып. 2. С. 328).

Изложенное затем в п. 4 представление о самостоятельности (фундаментальности) статистической термодинамики является естественным продолжением и реализацией отказа от попыток согласовывать микромеханику и термодинамику, т.е. от принципа «бритвы Оккама». Конкретно это означает допущение формально самопротиворечивых свойств мира даже в идеальной модели, поскольку взаимно не согласованные термодинамические и механические характеристики и тенденции должны прилагаться одновременно к одному и тому же объекту. Постулирование всерьез фундаментальности статистической термодинамики фактически запрещает исследовать связь микро- и макропараметров. В частности, это означает призыв не выяснять, почему в очевидной модели обычной тепловой машины с газом из классических частиц, которую изучают все инженеры, потребуется холодильник.

С.С. Петрова

Становление «вероятностной картины мира» — необычайно интересный предмет исследования. Я вспоминаю завораживающие доклады Ю.И, Манина и С.П. Новикова на подобные темы, проходившие в 70-е годы, увы, уже прошлого века в стенах Московского университета и собиравшие многочисленные аудитории.

Ни в коей мере не являясь компетентной в столь сложной области, я хочу сделать несколько замечаний исторического характера. Мне кажется, что говорить о том, что теория вероятностей прошла 300-летний путь как сугубо математическая дисциплина, не совсем правильно. В истории математики имеется масса примеров математических теорий, созданных как бы впрок, так как длительное время они оставались без приложений. Классическим примером такого рода является, как известно, теория конических сечений Аполлония, востребованная спустя 19 столетий. Однако этого нельзя сказать о теории вероятностей. С начала XIX в. вероятностные методы находили многочисленные приложения: в теории артиллерийской стрельбы, в теории ошибок (кстати, этот пример приводил сам докладчик), в демографии, страховом деле и т.д. В конце XIX в. благодаря созданию теории случайных процессов число новых применений теории вероятностей сильно возросло.

Небезынтересно, на мой взгляд, также небольшое дополнение, относящееся к столь важным в современной физике соотношениям неопределенностей, связанным с некоммутативностью операторов. Малоизвестным фактом истории математики является то, что понятие некоммутативных операторов было введено в 60-х гг. XIX в. в работах британских математиков по интегрированию дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

ОТВЕТ АВТОРА

Я согласен сутверждением С.С. Петровой о существовании многочисленных приложений теории вероятностей, но все эти приложения находятся вне физики. Приведенная в статье характеристика теории вероятностей как изначально сугубо математической дисциплины дана по отношению именно к физике. Замечание комментатора по поводу возникновения важного для квантовой теории понятия некоммутативных операторов в работах по интегрированию дифференциальных уравнений, разумеется, немаловажно с точки зрения истории науки.

Ответу на возражения В.Б. Губина я хотел бы предпослать замечание общего характера. В моей статье речь идет *о новых акцентах* в проблеме взаимоотношений микро- и макроуровней описания природы и *о современном понимании* этих описаний на каждом уровне, получивших распространение в последние десятилетия XX в.

Прежде всего, непонятно, в связи с чем вообще нужно обосновывать термодинамику из динамики. Главное здесь понятие целостности состояния макросистемы и ее характеристик, прежде всего температуры, которые не имеют никакого отношения к характеристикам составляющим ее микрообъектов, которые существуют сами по себе.

Сама постановка вопроса о «возможности» и механизме возникновения термодинамики при той или иной микромеханике звучит сегодня как анахронизм. Главное, что отличает термодинамику, — это ее независимость от какой-либо микромеханики.

Проблема согласования механики и термодинамики была полностью решена Гиббсом и Эйнштейном в начале XX в., но реально в тех пределах, в которых это вообще оказалось возможным. Именно экстенсивные макропараметры имеют смысл средних значений некоторых микропараметров. Однако у интенсивных макропараметров типа температуры нет прообразов на микроуровне, так что здесь нечего и согласовывать. Что касается вопроса о термодинамических флуктуациях, то он подробно изложен в статье моей и Ю.Г. Рудого (Успехи физических наук. 2000. Т. 170. Вып. 12). Термодинамика, основанная на статической механике Гиббса, по отношению к современной статистической термодинамике играет роль квазиклассического приближения, что аналогично соотношению между теорией Бора—Зоммерфельда и квантовой механикой.

Я согласен с утверждением, что «последних законов природы мы узнать не можем». Однако из него ничего не следует относительно первичности или вторичности вероятностного описания природы. Комментатор невольно стоит на позиции, что первичность детерминистского описания является абсолютной истиной. В данном контексте особенно удивляет ссылка на Г.Я. Мякишева, который не является ни крупным физиком, ни крупным философом. Если говорить о философии и прежде всего о современной теории познания, то можно было бы рекомендовать книгу М.К. Мамардашвили «Классический и неклассический идеалы рациональности» (М., 1995).

Вопрос о полноте квантовомеханического описания природы не является до конца решенным. Однако при всех его решениях возврат к детерминизму исключительно маловероятен. Этот вывод основан на экспериментах последних десятилетий по проверке неравенств Белла.

Я согласен с мнением X. Казимира о том, что нужно «отличать мир от математических построений». Но, как известно, все наши теории — это математические построения на основе каких-либо моделей. Поэтому речь может идти лишь о сравнении одного математического построения с другим, а не о его сравнении «с миром». По-видимому, автор комментария настолько уверовал в идею истинности взглядов Демокрита, что считает их «миром», а не началом конкретного математического описания.

Провозглашение даже столь уверенного утверждения, как принцип «бритвы Оккама», библейской истиной само по себе не очевидно. Но в нем сказано «без надобности», так что каждый раз вопрос о надобности решается конкретно. Признание независимости термодинамики от динамики оказалось «надобно».

Независимость и самостоятельность статистической термодинамики ничего не отменяет в возможности вычисления некоторых и дажемногих макропараметров на основе динамики. Единственное, что она запрещает, — вычислять из динамики все макропараметры. Целостность макросистемы и ее характеристики — это качественно новое свойство, отсутствующее в динамике. Потребность тепловой машины в холодильнике — это вопрос только термодинамики. Он не имеет никакого отношения к «очевидной» (это, интересно, для кого?) модели тепловой машины с газом из классических частиц. Кстати, это понимал еще С. Карно, а сейчас не могут понять некоторые философы, застрявшие на позициях диалектического материализма.

275

В.А. Янков

ОПЫТ И ОНТОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

1. Я хотел бы защитить здесь тезис, что отдельные выдающееся показания опыта или же общий его характер могут оказывать влияние на философию математики, но только тогда, когда они попадают в контекст некоторого осмысления реальности. С этой целью делается обзор двух этапов развития математико-философской мысли. Первый начинается с пифагорейской математики и доходит до различных платоновских интерпретаций. Второй начинается с Декарта и доходит до Огюста Конта.

2. В ранней греческой математике большую роль сыграло открытие, что музыкальные интервалы определяются рациональным отношением длин струн. Открытие было сделано ранними пифагорейцами и не исключено, что самим Пифагором. Оно если не вызвало, то, во всяком случае, способствовало пониманию реальности как построенной из чисел (точнее, телесных чисел), да и пониманию самого числа.

Пифагор искал в реальности нечто устойчивое, способное противостоять текучести анаксиман дрова алейрона. Началом для такой устойчивости он провозгласил перас, определивающее. Числа, т.е. построенные из монад материальные конструкции, обладают относительной устойчивостью. Арифметика — наука об этих числах. Опытным подтверждением этому для пифагорейцев и были музыкальные числовые соотношения, показывающие отражения числовых принципов в музыкальных данных.

«Подлинная» геометрия первоначально мыслилась тоже монадическим образом, так что две будущие науки имели одну и ту же онтологию. Они были науками об общей относительно устойчивой структуре реальности.

3. Открытие бесконечной делимости величин пифагорейцами школы Гиппаса отделило геометрию от арифметики и заставило искать для первой новую онтологическую основу. Это и привело к созданию «геометрии величин», где последние и выступали основными объектами геометрии, видимо, отождествляясь с объектами реальными. Статус точки, линии и поверхности оставался неопределенным там, где речь шла о вырождении измерений. Вопрос о том, что такое геометрия, как бы отрывался от опыта и решался спекулятивным образом в зависимости от мировоззрения. Можно угадать попытку Анаксагора привязать геометрию к телесной действительности, введя «семена» качеств, являвшиеся актуальными бесконечно малыми. В качестве примера выступали,
276
вероятно, «роговидные углы», меньшие любого прямолинейного угла, но остававшиеся углами.

4. Следующая эпоха, однако, выступает против стремлений осознать геометрию бесконечной делимости как что-то телесно-реальное. Она-то как раз не доверяет спекулятивным построениям и исходит из опыта действительности как она есть, т.е. из некоторой чувственно данной «поверхности».

Зачинатель движения Протагор выступает с критикой математики. До нас дошли только его аргументы по поводу «роговидных углов», направленные, надо полагать, против Анаксагора. Чувства говорят нам, что шар и цилиндр не касаются плоской поверхности в точке, а лежат на ней, образуя площадку касания.

Этот первый скепсис приходит к отвержению геометрии величин и к отрицанию бесконечной делимости. Делаются даже попытки основать новую математику, согласующуюся с непосредственным чувственным опытом. От нее к нам дошло антифонтово решение квадратуры круга.

Суть этого решения, как известно, в приближении круга правильным многоугольником с большим числом сторон. Рассуждая, как Протагор, Антифонт утверждал, что на некоторой стадии построения произойдет совпадение окружности и многоугольника, после чего обе длины становятся доступными измерению.

Есть основания полагать, что к этой же софистской математике относится и гиппиева квадратура с помощью «квадратиссы». Ван дер Варден предполагает, что целью построения кривой была трисекция угла. Однако в рамках софистской математики неделимых, т.е. опытно неделимых величин, вряд ли такая задача имела интерес: разделить угол можно подбором. Вместе с тем некоторые авторы (Прокл) недвусмысленно говорят о гиппиевой квадратуре. Вероятно, Гиппий устанавливал нужное равенство дуги и отрезка с помощью «протагоро-антифонтовых» расуждений, и такое доказательство действительно может быть реконструировано.

5. В это время Демокрит выдвигает свою дискретную математику «математически неделимых, основанную на физической теории, т.е. на «глубинном», а не «поверхностном» понимании опыта. Оба вида дискретной геометрии существуют рядом с традиционной, анаксагоровой и пифагорейской, но последняя вряд ли чувствует себя уютно. Представляется, что именно это время пришло к понятию «айтемы», требования принять определенные положения без обсуждения, для того чтобы иметь возможность развивать геометрию. Тем самым последняя приобретает как бы гипотетический характер, но это вполне согласуется с духом диалектики и риторики, требующих уметь вести рассуждения из воображаемых ситуаций.

277

В общем же ситуация предстааляется таковой: «втиснуть» геометрию в действительность после протагоровой критики не удается. Новая, основанная на «опыте» геометрия неудовлетворительна, старая же вынуждена обращаться к предположениям.

6. Новые возможности открываются при Платоне. Отделение мира «бытия» от мира «становления» позволило поставить вопрос об онтологическом статусе математических объектов в первом из них. Сам Платон в своем «неписаном» учении склоняется к приписыванию числам идеального характера. Числа у него даже «порождаются» в мире идей из «Одного» с помощью неопределенной «Двоицы». Геометрия в то же время принадлежит миру становления. Более того, «пространство» (chora) лежит в основе становления, являясь восприемницей идей, так что все-таки геометрические образования как-то причастны идеальному и имеют промежуточный характер.

Неоплатоники в последующем — уже в совсем другой исторической обстановке — нашли особое место для пребывания «промежуточного» геометрического мира, а именно мир *воображения.* Такую концепцию мы находим в известном комментарии Прокла к первой книге «Начал». Исследователи возводят ее по крайней мере к Порфирию.

Числа между тем еще Августин (в трактате «О музыке») помешает среди идей — прообразов Бога.

7. Нужно сказать, что основная вещественно-телесная концепция геометрии, противопоставляемая платонизму, т.е. концепция Аристотеля, выглядела неубедительно. Геометрические структуры рассматривались как реальные структуры в отвлечении от всех других свойств, кроме геометрических. Поскольку актуальная бесконечность систематически изгонялась Аристотелем из физики, то реальные тела не могли воплощать идеальные геометрические объекты. Точки, правда, определялись как концы отрезков, линии — как границы поверхностей и т.д. Но чем должна была быть прямая? Конечность космоса не давала также возможности определить параллелизм.

Словом, мы видим, что опытный материал в новом понимании — по сравнению с древней бесконечной актуальной делимостью, например, — не давал опоры для телесной интерпретации геометрии, в то время как платоническое мышление создавало противоположные возможности.

8. Венцом платонизма в этом отношении следует считать концепцию новых измеряющих чисел, которую мы находим у Омара Хайяма. Речь идет о совокупности всевозможных антанарейзисов (т.е. цепных дробей), которую Хайям трактует как многообразие положительных чисел нового рода, допускающую ариф-

278

метические операции и неравенства, могущую служить для измерения, но в ее целостности недоступную человеческому уму. Это, по сути дела, является понятием положительного вещественного числа. Хайям в своем комментарии к Евклиду не указывает способ существования новых чисел. Однако его философские трактаты, примыкающие к философии Ибн-Сины, позволяют понять, что числа как орудия измерения могут существовать в производных от Бога Божественных Интеллектах. Бог ислама, чье отношение к миру одностороннее — он является творцом и правителем, но Сам Себя миру не отдает, как христианский Бог, — создает пространство, в котором возможна хайямовская концепция.

9. Обратимся теперь к Европе Нового времени. В начале его мы видим оживление мысли о материальной геометрии. Она была поддержана опытом новой математической физики (кинематики, динамики) в трудах Кеплера и Галилея. Главным представителем этой мысли был Декарт. Его основные положения представляют очень связную систему.

1) Пространство (протяженность) отождествляется с телесной материей, которая, разумеется, мыслится как нечто положительное, т. е согласно традициям христианства (низшее тварное бытие), а не платонизма.

2) Пространство мыслится как нечто обсчитываемое. Декарт понимает геометрию по-новому — как геометрию координатного пространства (аналитическую). Обсчитываемость касается и стабильной пространственной картины, и самого движения материи-протяженности.

3) Само понятиие числа — инструмента обсчитывания — расширяется Декартом (впрочем, у него были предшественники) до числовой прямой, еще не являющейся полной вещественной прямой, но включающей в себя все доступные описанию в то время иррациональности.

Опыт, на который ссылался Декарт, играет в этом случае такую же роль, как звуковые интервалы у пифагорейцев. Но за этими ссылками скрывается мышление о предназначении человека к штсти над природой и математической науке как инструменте этой власти.

10. Декартовская концепция пространства вызвала оживленные споры среди метафизиков эпохи. Выдвигаемые идеи родственны неоплатоновским,'только речь идет не о пространстве евктидовой геометрии, а об исчисляемом пространстве геометрии аналитической, Мальбранш считает, что прообраз такого пространства (протяжения) является Божественной идеей и именно посредством нее Бог позволяет нам увидеть реальное пространство. Спиноза, как известно, делал протяженность одним из атрибутов Бога, выражавшим его Существо.

279

Новое внес Лейбниц, различавший пространство от наполнявшей его субстанциональной материи. Пространство, по Лейбницу, виртуально, т.е. является неким общим знаменателем, согласующим между собою перцепции монад, но не имеющим реального существования. Это близко к геометрии воображения Прокла, но ориентировано не столько на занятия геометрией как подготовку к размышлению над идеями, сколько на общее понимание аналитической геометрии как инструмента научного познания.

Таким образом, споры эти при всей близости к платонизму отражали научно-познавательный дух времени.

11. За временем «глубинной» метафизики XVII в. последовало время Просвещения и философии «поверхности», во многом напоминающее софистское Просвещение. Сила

новой науки была такова, что скепсис, свойственный такому духу мысли, не смог остановить развитие, однако же он проявлял себя.

Если Кондильяк считал, что геометрия, а до какой-то степени даже механика, «вычитываются» из видимой (а по его теории, по сути дела, осязаемой) поверхности и развиваются с помощью тождественных преобразований, то Юм по-иному видел поверхность вещей и, подобно математикам-софистам, отказывался признавать бесконечную делимость и заявлял о существовании «видимых неделимых». На отвержение старой математики и замену ее на новую, как это делали в свое время Антифонт и Гилгтий, Юм все же не отваживался: математика (классическая геометрия, алгебра и развивающийся анализ) имеет право на существование, поскольку она приводит к практически правильным результатам. Математика поэтому повисала в воздухе как что-то полезное, но не имеющее онтического фундамента.

12. Интересно, что время выдвигаю решения, напоминавшие о платонизме. Речь идет о ведущем представителе шотландской философской школы Томасе Риде. Именно он предложил считать объекты геометрии и других дисциплин объектами воображения, как в свое время это объяснял Прокл.

Конечно, воображение у неоплатоников и у Рида мыслилось по-разному. Для первых оно как бы располагалось между ощущениями и умом, так что его предметы оказывались промежуточными между ощущаемым и идеальным. Рид же боролся с «идеями» предшествующих ему мыслителей (картезианцев, Локка, Юма), но оставался, верен британскому натурализму. Воображение не соединяло у него человека с чем-то высшим, но было важной функцией разума, которая позволяла держать перед собой в уме отвлеченное от ощущений предметное содержание, не приписывая ему существования. Здесь предчувствуется теория предметности Мейнонга и феноменология Гуссерля.

280

13. Так было указано направление освобождения объектов математики от телесной онтологии. Кант делает это в отношении геометрии. Мир идей-архетипов был закрыт, но Кант открывает новое a priori — творческую природу познавательных способностей человека. «Чистая чувственность» создает протяженность как априорную форму всякого внешнего восприятия. «Чистое понимание» строит, исходя из протяженности, геометрию априорным образом, да и не только геометрию, но и ньютоновскую механику. Так геометрия и механика, определяя предметы внешнего мира, получают независимый источник происхождения.

14. В дальнейшем эти мысли развивались кантианцами, но новый статус математических предметов требовался и самой математике. Решающее значение здесь принадлежит Огюсту Конту, взглянувшему на опыт позитивных наук, накопленный к тому времени, с новой и трезвой точки зрения.

Конт предлагает свою известную классификацию наук, имеющую ступенчатое строение так, что более высокая наука базируется на предшествующих. В основание кладется математика. При этом оказывается, что математика исследует не реальные предметы, как это делается на последующих ступенях, но общие схемы предметности, поэтому она оказывается пригодной как инструмент высших ступеней.

Концепция Конта никуда не помещает математические объекты, поскольку его общая позиция является антиметафизической. Ее можно понять, исходя из уровня, достигнутого науками ко времени Конта, т.е исходя из современного ему опыта, но надлежащим образом истолкованного. Развитие показало, что природные законы не сводятся непосредственно к законам механики, но как бы распадаются на группы, определямых своеобразием материала. Математика, применимая к некоторым из этих групп (или даже ко всем, но в разной степени), должна, поэтому мыслиться именно контовским схематическим образом.

15. От этих мыслей, а также от открытия неевклидовых геометрий открывается путь к мышлению о математических предметах как о просто сущих, безотносительно к

телесному существованию. Фактически это старый мир идей, но без его экзистенциальной нагрузки как спасительного прибежища. По этому пути идут и Кантор, и Фреге с его онтологией функций, на которой он строит новую логику.

16. Какие выводы можно сделать из сравнения двух эпизодов истории математики, очень параллельных между собой? В каждом случае развитие начиналось с опыта, порождавшего представление о том, что математические объекты можно считать принадлежащими вещной действительности. Следовало другое, феноменальное осмысление опыта, и математика готова была рухнуть. Она находила свое спасение в идеальном мире. Но мотивы для этого в рассматриваемых развитиях различны. В развитии античного осмысления математики ее объекты находили свое место в мире идей или в мире воображения только потому, что зтот мир открывался и объекты чувствовали себя в нем как дома. В развитии XVII— XIX вв. такого дома не было, и понимание математики как идеальной сферы имело за собой и новый сложный научный опыт двух предшествующих столетий.

КОММЕНТАРИИ

Е.А. Зайцев

Статья В.А. Янкова посвящена сравнительному анализу двух этапов философско-математического развития — античного (от пифагореизма до неоплатонизма) и нововременного (от Декарта до Кантора и Фреге). Автор считает, что между двумя периодами существует параллелизм идей, выражающийся в том, что в начале каждого из этапов математика строится на основе опыта, а в конце ее объекты оказываются в сфере идеального.

К сожалению, краткость статьи не позволяет дать ее развернутый анализ. Для прояснения положений статьи можно было бы привлечь дополнительно работы автора по истории античной философии и математики, опубликованные в «Историко-математических исследованиях» за 1997—2001 гг. (Вып. 2, 5. 6). Но даже в этом случае анализ статьи затрудняется тем. что нововременной этап развития описан слишком кратко, поэтому я ограничусь лишь одним замечанием.

Автор считает, что у истоков каждого из рассмотренных этапов находится опыт. По отношению к пифагореизму речь идет об опыте, подтверждающем наличие числовых соотношений в основе музыкальной гармонии. Этот опыт действительно нагляден и по крайней мере в рамках данного исследования не нуждается в уточнении. К. сожалению, столь же отчетливой характеристики опыта, стоящего за аналитической геометрией Декарта, в статье нет. «Опыт, на который ссылался Декарт, играет в этом случае такую же роль, как звуковые интервалы у пифагорейцев» — вот и все, что сказано по этому поводу в статье В.А. Янкова.

Мне представляется, что соотнесение опыта пифагорейцев с «опытом» Декарта без соответствующих корректирующих замечаний вряд ли оправданно. Одним из основных положений Декарта является тезис о бесконечной делимости протяженности (пространства) и материи. Этот тезис, однако, не обладает такой же степенью достоверности, как положение о наличии определенных числовых соотношений в гармонических созвучиях. Для представления о бесконечной делимости прямого чувственного опыта недостаточно. Можно разорвать листок бумаги на две части, затем одну из оставшихся частей еще на две и т.д., но скоро обнаружится, что дальнейшее деление невозможно. Поэтому непонятно, какого рода чувственный опыт мог бы привести к рождению этой идеи.

Однако в случае с Декартом догадки можно оставить. К выводу о бесконечной делимости пространства Декарт — прекрасный знаток геометрии — приходит, исходя из возможности деления геометрического отрезка пополам. За этим стоит не опыт, а геометрическая теория, положения которой ни с каким чувственным опытом не соотносятся. Что же касается представления о бесконечной делимости материи, то к нему Декарта приводит идея о Божественном всемогуществе. Вот его аргументация: «Если мы даже вообразим, будто Бог сделал какую-либо частицу материи столь малой, что ее нельзя разделить на еще меньшие, мы все же не вправе заключить из этого, что она неделима: если бы Бог и сделал частицу столь малой, что невозможно было бы ее разделить чему-либо сотворенному Богом, то самого себя он не мог бы лишить власти разделить ее, ибо совершенно невозможно, чтобы Бог умалил свое всемогущество...» П.П. Гайденко, из книги, которой взята эта цитата, считает, что аргумент от всемогущества Божия является «последним основанием для идеи бесконечной делимости материи у Декарта» (Эволюция понятия науки (XVII-XVIII вв. М., 1987. С. 158). Равно как и делимость отрезка, идея Божественного всемогущества не имеет никакой опытной основы. Она является плодом логических упражнений позднесредневековых схоластов (ее отцом является Оккам), в духе которых Декарт в данном случае и рассуждает.

А.В. Родин

Интерпретируя некоторые важные эпизоды истории математики и истории философии математики, В.А. Янков предлагает схему, которой, как считает автор, следует подчинить развитие математической и философской мысли. Эта схема предполагает три основные этапа и выглядит следующим образом. Сначала (1) математика понимается как непосредственное осмысление реальности, основанное как на обыденном опыте, так и на специальных экспериментах (как в случае пифагорейских экспериментов с монохордом). Затем (2) возникает некоторое принципиально иное понимание того же опыта (или несколько альтернативных пониманий, как в случае Протагора и Демокрита), что приводит к апориям и кризису в существующей математике. Наконец, (3),

283

по словам автора, «математика находит свое спасение в идеальном мире», т.е. избегает проблем, возникающих на втором этапе, на основании того аргумента, что эти проблемы к ней на самом деле не имеют отношения. По мнению автора, эта схема была реализована в истории дважды: один раз в античности и второй раз — в Новое время.

Я не берусь судить, насколько правомерной является предложенная автором аналогия между античной и новой историей математики и насколько хорошо предложенная схема согласуется с историческими фактами. То, что меня интересует в рассуждении автора, это само противопоставление опытной и «идеальной» математики.

Постулирование существования некоторого идеального мира, в котором математические предметы существуют отдельно от тех вещей, которые мы познаем на опыте, вполне аналогично переводу всей математики в гипотетический модус, который, если следовать автору, был ответом на ту же самую критику и преследовал те же самые охранительные цели. Предположение о существовании специальным образом устроенного мира математических объектов — это *гипотеза,* принимая которую, математик избавляется от некоторых неудобных для себя вопросов. Пока эта гипотеза не сформулирована более точно, ее невозможно критиковать содержательно. Однако такая содержательная критика и не является сейчас нашей целью. Проблема, которую ставит перед нами автор и которая интересует и меня в первую очередь, — это не проблема обоснованности той или иной гипотезы по поводу природы математических объектов, а проблема роли опыта и гипотез (экспериментирования и гипостазирования) в математике и философии.

Математики и философы заняты тем, что находят и решают проблемы, приводя решения различных проблем в общую систему и создавая, таким образом, то, что называется теориями. Рассмотрим такую математическую проблему: даны две прямые *a* и *b*, которые пересекает третья прямая с, так что сумма внутренних углов при пересечении меньше двух прямых; обязательно ли прямые *a* и *b* пересекутся или они могут быть параллельными? Я настаиваю на том, что это хорошо поставленная математическая проблема, когда формулировка задачи вполне понятна, а ответ не очевиден. Однако в отличие от многих других случаев (например, от случая теоремы о внешнем угле треугольника) «проблему параллельных» не удается решить убедительным образом. Отложить решение этой проблемы на потом тоже не получается, поскольку оказывается, что эта проблема далеко не частная и от ее решения зависит решение многих других проблем (например, такой: является ли сумма внутренних углов одной и той же для всех треуголь-

284

ников?). В этой ситуации греческие математики (Евклид или его предшественники) сделали следующее: они *предположили,* что проблема параллельных решена, причем определенным образом (первый вариант ответа), а затем, пользуясь этим предположением, доказали множество других теорем «евклидовой» геометрии.

Впервые столкнувшись с такой ситуацией, ученик, изучающий геометрию, мог бы заподозрить своих учителей в ханжестве: только недавно учителя ему/ей объяснили, что в геометрии ответ на всякий поставленный вопрос обязательно должен быть аргументированным, что всякое утверждение в математике (кроме самых очевидных) должно быть *доказано,* а теперь, не сумев справиться с постаатенной задачей, эти учителя просто *объявляют* ее решенной, произвольно выбирая ответ таким образом, чтобы им было проще решать другие задачи. История пятого постулата показала правоту этого воображаемого ученика, по крайней мере, в том смысле, что *альтернативная* гипотеза не только имеет право на существование, но и дает не менее богатую теорию. Означает ли открытие неевклидовых геометрий, что проблема параллельных была фиктивной, что на поставленный вопрос нельзя ответить однозначно? И да, и нет, причем скорее нет, чем да. Да, поскольку у нас теперь много геометрий, и то, что верно для одной геометрической теории, может быть неверно для другой. Нет, поскольку Гаусс и Лобачевский, догадавшись о различных возможностях, которые дает наш рассудок и воображение, по сути, вернулись к исходной постановке вопроса в его эмпирической трактовке: какова геометрия *нашего мира* пересекутся ли соответствующим образом построенные прямые *в реальном пространстве?* Именно этот эмпирический аспект открытия Гаусса и Лобачевского впоследствии позволил Эйнштейну построить теорию оносительности и ответить на поставленный вопрос, правда, в переформулированном виде: геометрия физического *пространства—времени не* евклидова.

Этот пример (как и многие другие, которые можно было бы привести) показывает следующее:

(1) Гипостазирование в математике является допустимым приемом, однако пользоваться им следует очень ограниченно. Если бы математики ничего не доказывали, а только давали предположительные ответы на поставленные вопросы, то математика перестала бы быть наукой. Если бы, с другой стороны, греческие математики не воспользовались этим приемом в случае проблемы параллельных, то они вообще не смогли бы построить развитую геометрическую теорию и геометрия представляла бы собою набор проблем и аргументацию в пользу различных решений этих проблем (т.е. была бы похожа на то, чем исторически является философия). Справившись с проблемой параллельных

285

методом разрубания гордиевого узла, математики смогли сформулировать и решить тысячи других проблем, а затем вернуться к проблеме параллельных на новом уровне (и передать ее, в конце концов, физикам).

(2) Прибегая к гипостазированию, важно отдавать себе в этом отчет. Наряду с

попытками обосновать (доказать) принятые гипотезы необходимо таким же образом рассматривать альтернативные гипотезы.

(3) Теоретическая возможность строить различные теории на основе различных гипотетических решений одной и той же проблемы не означает, что эта проблема не имеет смысла и не допускает более определенного решения; могут быть найдены аргументы, делающие одни гипотезы более обоснованными, чем другие.

Наконец, рассмотрим вопрос о том, насколько допустимым является гипостазирование в *философии*. Конечно, ответ зависит от того, что мы хотим от философии, в частности от философии математики: чтобы она была для математиков убежищем, в котором можно было бы, говоря словами автора, «спасаться» от самых неприятных проблем, или, наоборот, чтобы философия не давала математикам расслабиться и чувствовать себя спокойно, постоянно проблематизируя основания математических теорий и обнажая их гипотетический характер (и открывая, таким образом, возможность для построения теорий, основанных на альтернативных гипотезах). Хотя я склонен выбрать второе, я все же признаю, что в философии, как и в науке, гипостазирование может оказаться уместным. Можно упрекать Платона, Канта и Фреге в том, что эти мыслители каждый на свой лад придумывали гипотетические математические «миры», в той или иной мере защищенные от опыта и, значит, от глубоких проблем в основаниях математики, однако каждый такой «математический мир» предстаапяет собой не что иное, как гипотетическое решение некоторого набора таких проблем, которые без этого решения вряд ли могли бы быть даже ясно сформулированы. Философское гилостазирование, как и математическое, отнюдь не исключает возможности выдвижения альтернативных гипотез и, более того, может помочь найти основания для выбора между этими альтернативными гипотезами.

ОТВЕТ АВТОРА

Е.А. Зайцеву

Должен признаться, что я дал повод для критики, употребляя многозначное многострадальное слово «опыт» в различных смыслах.

286

Основной интерес моего выступления заключался в слежении за концепциями соотношения математических и реальных объектов в их историческом развитии; опытные основания этих концепций были на втором плане. Тем не менее, они все же были действенны, но «опыты» пифагорейцев все же отличались от «опыта», подкреплявшего декартову философию математики.

Когда я говорил о последнем, то имел в виду успехи новой математизированной физики, представленной трудами Коперника, Кеплера, Галилея, да и самого Декарта («Оптика»). Эта-то физика и явилась основанием для основного декартовского откровения — тезиса об обсчитываемости пространства и связанного с ним тезиса о тождественности материи и пространственности. Наблюдения и эксперимент, разумеется, входили в ткань новой физики, но отнюдь ее не исчерпывали, так что слово «опыт» в применении к ней имеет смысл более общий. Сам Декарт переоценивал теоретическую компоненту этого «опыта», считая ее данной нам a priori посредством врожденных идей.

В связи с этим он и полагал, что его концепция пространственности, содержавшая в себе разбиравшееся мною понимание онтологии математических предметов, устанавливается простым обращением к априорным очевидностям, а опыт, в узком смысле слова, имеет только наводящее значение. Да и предшествующее ему математическое естествознание не использовалось как доказательство, но, разумеется, без него не могла бы возникнуть и сама эта концепция.

Е.Л. Зайцев совершенно прав, указывая на то, что опыт в узком смысле, скорее, мог быть использован против математической философии картезианцев. Да так оно и было у скептиков, в частности у Юма, аргументировавшего против бесконечной делимости, ссылаясь на зрительное поле.

А.В. Родину

Я не усмотрел в разбираемом выступлении прямой критики моих наблюдений (а глубокой теории у меня и не было). Автор вместо этого выдвигает свои собственные соображения, и именно к ним будут относиться мои критические замечания.

По-моему, неправильно постаапен знак равенства между идеальным и гипотетическим. С большим пафосом близкую концепцию проводила некогда марбургская школа, но с тех пор «вилка» между математическим и физическим настолько увеличилась, что сейчас защищать такую точку зрения стало довольно трудно.

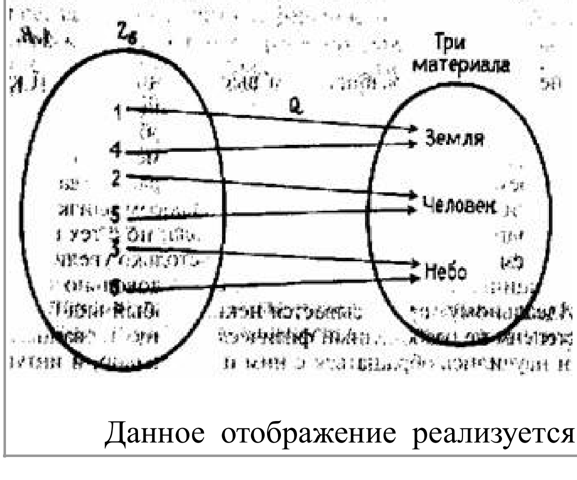
«Идеальному» приписывается некий особый вид бытия, ни в коей степени не озабоченный физическим существованием. Математики научились обращаться с ним и формально, и интуитивно;
287
последнее несколько загадочно и даже содержит в себе какой-то намек на связь с временно-пространственной реальностью, но намек этот все же не прочитывается как реализация математических предметов.

Физически эти идеально-формальные теории время от времени проявляют себя плодотворными и находят себе воплощение. Но для того, чтобы отсюда вывести заключение, что любып математические конструкции (особенно теоретико-множественные) не более чем гипотезы о физическом мире, сложенные в запасной ящик и терпеливо ожидающие своего звездного часа, нужно иметь убедительную и конкретную их онтологию, базирующуюся на онтологии реального мира.

А.А. Крушинский

ГЕКСАГРАММЫ И ОБОБЩЕНИЕ

Гексаграмма «И цзина» — это любой из кортежей длины шесть $a = a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ над множеством $A = \{—, - -\}$. Ясно что имеется всего $2^6 = 64$ различных таких кортежей. Теперь отвлечемся от конкретных гексаграмм и рассмотрим, так сказать, «гексаграммную *схему»* — одни незаполненные гексаграммные *позиции,* т.е. кортеж, состоящий из шести первых натуральных чисел $Z_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Этот кортеж наделен различными дополнительными структурами, важнейшей из которых является следующее отображение $Q : Z_6 \rightarrow$Три материала = {Небо, Земля. Человек}:



Данное отображение реализуется посредством следующего наложения троичной схемы Трех материалов на шестерицу гексаграммных позиций:

6 Небо
5 Человек
4 Земля
3 Небо
2 Человек
1 Земля

Нетрудно заметить, что добавление тройки к номеру любой гексаграммной позиции не меняет ее принадлежности к тому или иному материалу: 1 (т.е. начальная гексаграммная позиция) есть число Земли, но и 1+3 = 4 (четвертая гексаграммная позиция) также есть число Земли, 2 (вторая гексаграммная позиция) есть число Человека, но и 2 + 3 = 5 (пятая гексаграммная позиция) также является числом Человека; 3 (третья гексаграммная позиция) есть число Неба, но и 3 + 3 = 6 (заключительная гексаграммная позиция) также есть число Неба.

Таким образом, гексаграммная шестеричность мыслится как удвоенная троичность Трех материалов: «Объединив Три материала, удваивают их. Так, «И [цзин]» из шести черт образует гексаграммы» [38 , цз. 17, с. 266]. Получается, что начальная гексаграммная позиция в определенном смысле *тождественна* четвертой позиции, вторая — пятой, а третья — заключительной.

Ближайшим аналогом ицзиновской гексаграммной схематики в *нашей* культуре является библейский шестоднев — сказание о шестидневном сотворении мира как оно представлено в первой главе «Бытия». Сходство здесь не только поверхностно-количественное (там шесть позиций — тут шесть дней), но и глубинно-структурное: шестичастность библейского космогенеза осознается позднейшими экзегетами как удвоенная троичность (так же осмысляется шестеричность гексаграмм в китайской комментаторской традиции), причем наблюдается поразительная близость между способом наложения троичной схемы на шестеричность гексаграммных позиций и скрытой троичностью, пронизывающей череду шести дней творения. По словам Филона Александрийского (20—10 гг. до Р.Х., — 40 гг. по Р.Х.): «За шесть дней, говорит он (Моисей. — *А.К.*), был сотворен мир — не потому, что Творящий нуждался в некоей временной протяженности, ибо Богу, не только когда Он повелевает, но и когда замышляет, свойственно все делать сразу, — но потому, что возникающим
289
[вещам] был необходим порядок. Порядку же свойственно число. А по законам природы из всех чисел самое важное при возникновении есть число шесть. Ибо после единицы оно — первое совершенное, [то есть] равное произведению своих частей и их сумме; половины — троицы, трети — двоицы и шестой части — единицы. По природе, можно сказать, что оно и мужское, и женское, и образовано умножением друг на друга. Ибо мужским является в сущих нечетное, а женским четное. Так, начало нечетных чисел есть троица, четных — двоица, а их произведение — шестерица. Ибо следовало, чтобы мир, будучи совершеннейшим из возникших, был утвержден в соответствии с совершеннейшим числом шесть, а кроме того, поскольку ему надлежало в себе самом содержать возникновения из сочетаний попарно, то образоваться он должен был в соответствии со смешанным числом, первым четно-нечетным, заключая в себе идею семенного мужского и воспринимающего семя женского» [22, с. 52—53].

Независимо от приведенного выше филоновского пифагоризирующего толкования шестоднева в устройстве последнего наблюдается очевидная симметрия божественных дел творения, запечатленная троичным делением. Для демонстрации этого замечательного факта воспользуемся следушей схематизацией последовательности дел творения, содержащейся в популярной книге известных итальянских библеистов Э. Гальбиати и А.

Пьяцца [6, с. 70-75]:

Свет: день и ночь

а) И сказал Бог:
б) да будет *свет;*
в) и стал свет,
г) и отделил Бог *свет* от *тьмы.*

д) И назвал Бог свет *днем,* а тьму
ночью;

е) И увидел Бог свет,
что он хорош;
ж) И был вечер, и было утро:
день один.

Твердь: небо и вода

а) И сказал Бог:
б) да будет *твердь* посреди *воды.*
в) И стало так;

г) И создал Бог твердь;
и отделил воду, которая
под твердью, от воды,
которая над твердью,
д) И назвал Бог *твердь* небом.

ж) И был вечер, и было утро:
день второй.

Появление земли

а) И сказал Бог:
б) да соберется вода...
и да явится *суша,*

в) И стало так.
д) И назвал Бог сушу *землею...*
е) И увидел Бог, что это хорошо.

Солнце, луна и звезды

а) И сказал Бог:
б) да будут *светила,*
в) и стало так;
г) и создал Бог два светила
великие... большее для
управления *днем...* меньшее
для управления *ночью...*
и поставил их... отделять *свет*
от *тьмы.*
е) И увидел Бог,
что это хорошо;
ж) И был вечер, и было утро:
день четвертый.

Птицы и рыбы

а) И сказал Бог:
б) да произведет *вода*
пресмыкающихся...
и птицы... да полетят по
тверди небесной;
г) И сотворил Бог рыб
больших…
и всякую птицу пернатую…

д) И благословил их Бог, говоря:
плодитесь и размножайтесь...
ж) И был вечер, и было утро:
день пятый.

Земные животные

а) И сказал Бог:
б) да произведет *земля* душу
живую... скотов... гадов
и зверей земных...
в) И стало так;
г) И создал Бог зверей земных...
скот... и всех гадов земных...

Трава и деревья	**Человек**
а) И сказал Бог:	а) И сказал Бог:
б) да произрастит земля зелень, траву... дерево.	б) сотворим человека по образу нашему…
в) И стало так.	в) И стало так.
г) И произвела земля *зелень, траву,,,* и *дерево..*	г) И сотворил Бог человека по образу Своему...
	д) И благословил их Бог, и сказал: ...плодитесь и размножайтесь... вот, Я дал вам всякую *траву...* и всякое *дерево... ,*
ж) И был вечер, и было утро: *день третий.*	ж) И был вечер, и было утро: *день шестой.*

Как видим, при разбиении библейского текста на два параллельных (симметричных и взаимодополнительных со стороны содержания) столбца — когда *светила* четвертого дня симметричны и дополнительны по отношению к *свету* первого дня, *небо и земля* второго дня очевидным образом необходимы для размещения *птиц и рыб* пятого дня, а *земные животные и человек,* увенчивающие шесть дней творения, суть предустановленные обитатели *суши* и потребители укорененной в земле *растительности* (земля и растительность возникли на третий день) — четко прослеживается

291

соответствие дел *первого* и *четвертого, второго* и *пятого, третьего* и *шестого* дней творческого шестоднева. Недвусмысленным свидетельством подспудной троичности шестоднева, разбивающей его на две симметричные части (первая из которых является той «основой», над которой надстраивается вторая — «дополнительная — часть, восполняющая творение до совершенного целого), звучит следующая итоговая констатация: «Так совершены небо и земля и все воинство их» (21, 2-1][1].

Что касается Китая, то шестеричная схема, воплощенная в 64 гексаграммах «И цзина», несмотря на свою относительную простоту и почти вызывающий (на вкус современного человека) априоризм — чтобы не сказать произвольность — проявила там себя удивительно успешно в качестве универсальной мироописательной схемы. В этом своем качестве она вполне удовлетворяла методологические потребности не только китайской философской, но и научной мысли, и математика не является тут исключением. Предвзятость до сих пор еще бытующих мнений о якобы сугубой практичности и эмпиричности математики Древнего Востока (по крайней мере применительно к Китаю) на самом деле не нуждается в опровержениях — достаточно обратиться к текстам источников, чтобы убедиться, что теории там предостаточно. Вопрос лишь в том, каким образом эта теория может быть *релевантной* разбираемым там математическим проблемам, ведь речь идет об идеологии, восходящей к ицзиновской символике и прежде всего к обсуждаемой шестеричной схеме.

Думается, что научно значимая сторона ицзиновской символики, с ее подчас причудливыми образами и зачастую малопонятными числами, во многом сводится к способности символов «И» успешно играть роль *общих* понятий в китайской науке.

Глубокую и детальную разработку понимания символа как обобщения особого рода мы находим у А.Ф. Лосева: «Символ... есть смысловая общность, которая является принципом получения бесконечною ряда относящихся к ней единичностей» [17, с. 198]. «Уже всякое рациональное число в арифметике только при грубом употреблении его в качестве орудия счета не обнаруживает своего символического функционирования. Теоретически и научно всякое число даже просто натурального ряда предполагает целую бесконечность дробей, отделяющих его от соседнего числа. Всякие иррациональные числа вроде √2, √3, √5 —тоже есть символы в нашем смысле слова, поскольку всякое иррациональное число есть только известный метод порождения бесчисленного количества десятичных знаков... по образцу математики и все другие науки, чем более совершенны, тем больше пользуются символическими категориями, потому что такая общность, которая не яв-

292

ляется законом для подчиненных ей единичностей, очень слабая общность, только предварительная или только предположительная» [17, с. 187—188]. Поэтому не нужно смущаться тем обстоятельством, что в китайской методологии многообразный символизм явно преобладает над эксплицитной понятийностью в привычном для нас со времен Аристотеля родовидовом оформлении.

Здесь уместно вспомнить принципиальную альтернативу идущему от Стагирита *обобщению через абстракцию,* принятому в традиционной формальной логике: «В логике Аристотеля переход от единичного к общему совершается путем выявления у данного объекта определенных абстрактных свойств и отбрасывания остальных, так что два объекта подпадают под одно и то же понятие или принадлежат одному и тому же роду, оба они обладают выделенными свойствами. Такого рода описательная классификация, например, описание растений в ботанике и животных в зоологии, ориентирована на реально существующие объекты. Можно сказать, что Аристотель мыслит в терминах субстанции и акциденции, в то время как идея функции господствует при формировании математических понятий. Возьмем, например, понятие эллипса. Любой эллипс на плоскости xy есть множество E точек (x, y), заданное квадратным уравнением

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1,$$

коэффициенты a, b и c из которого удовлетворяют условиям

$$a > 0,\ c>0,\ ac - b^2 > 0.$$

Множество E зависит от коэффициентов a, b, с; мы получаем некоторую функцию E (a, b, с), порождающую конкретный эллипс, если переменным коэффициентам a, b, с придадим определенные значения. Переход от конкретного эллипса к соответствующему общему понятию не требует отбрасывания каких-либо специфических различий, он совершается благодаря тому, что некоторые характеристики (в нашем примере они представлены коэффициентами) превращаются в переменные, область значений которых a priori обозрима (у нас она задана приведенными выше неравенствами)» [4, с. 8].

Таким образом, «против логики родового понятия, стоящей как мы видели, под знаком и господством понятия о субстанции, выдвигается логика математического понятия о функции» [11, с. 34].

Как видим, «словесности» (абстрактной общности родового понятия), не дающей никакого правила, по которому можно было бы восстановить обобщаемые единичности, противопоставляется «математичность» (конкретная общность математической формулы). В Древнем Китае общность реализовывалась именно в виде

293

«конкретной общности математической формулы». Первое из возникающих при таком ответе недоумений выливается в вопрос: как же возможны формулы без буквенных переменных? Действительно, случайность буквенных обозначений глубоко противоречит изобразительному, пиктографическому в своей основе духу китайской письменности. Поэтому такая «пустота» буквы, при которой ее возможные значения пробегают произвольно сопоставленную ей область определения, совершенно чужда иероглифическому символизму, о некоторых существенных чертах которого говорилось выше. Это различие подлинного и мнимого символа хорошо проведено у А, Ф. Лосева:

«Далее, представители точных наук называют употребляемое ими при вычислениях буквы тоже символами. Но мы спутаем весь наш анализ, если будем называть символами буквы, употребляемые математиками в своих математических операциях. Математики употребляют для обозначения своих отвлеченных понятий буквы латинского, греческого, готического, немецкого и даже еврейского алфавита, а также разного рода искусственно придуманные знаки и значки. Но, рассуждая теоретически, совершенно безразлично — называть ли бесконечно малое приращение буквой d или буквой a, а отношение диаметра к окружности греческой буквой "пи" или греческой буквой "альфа" и т.д. и т.п. Связь между отвлеченными понятиями математики и знаками, которые употребляются для их выражения, совершенно случайна, поскольку буквенный образ и обозначаемое им математическое понятие совершенно диспаратны. Таковы же знаки, например, и в химии. Предоставим математикам и химикам называть свои знаки теми или другими символами; это нам не помешает. Однако для нашего анализа будет существенной помехой, если мы спутаем символ и отвлеченно-диспаратную связь обозначающего и обозначаемого. Во избежание недоразумения необходимо сказать, что установленное здесь нами отвлеченно-диспаратное значение обозначающего и обозначаемого не имеет ничего общего с тем чисто математическим пониманием символа, о котором говорилось выше. Алгебраическое уравнение, например, есть действительно символ, потому что оно есть такое общее, которое содержит о себе закон для получения единичного. $\sqrt{2}$ есть действительно подлинный символ, потому что он является таким общим обозначением корня, которое содержит в себе принцип и модель для порождения дроби с бесконечным числом десятичных знаков. Но сами по себе взятые математические обозначения, вроде буквенных обозначений в алгебре, отнюдь не являются какими-нибудь символами, потому что они не содержат в себе никакого принципа конструирования, зажатого здесь и не развернутого бесконечного ряда величин... Правда, ничто не ме-
294
шает любое число натурального ряда представлять как состоящее из бесконечного количества дробей известного вида, и тогда даже каждое целое число в арифметике окажется тоже некоторого рода символом... Однако для этого необходима уже специальная математическая теория, которая отсутствует при обычном пользовании числами натурального ряда» [17, с. 149—150].

Таким образом, отсутствие в Древнем Китае привычных нам буквенных переменных отнюдь не отменяет возможности иным — *символическим* — способом (в частности, посредством небуквенных переменных) выразить требуемую степень общности, причем алгебраическое по сути *правило подстановки,* заменяющее переход от общего к частному (столь принятый в традиционной логике), также является ключевым моментом оперирования этой символикой. Вспомним элементарный для ицзинистики факт впечатляющей широты образных и числовых значений основных ицзиновских графем — гексаграммных черт и особенно триграмм (кортежей длины три). Понимание ицзиновской комбинаторики как своеобразной «алгебры мироздания» является крупным завоеванием современной китайской ицзинистики и возводится обычно к точке зрения Фэн Юланя, высказанной им еще в начале 60-х гг. [32, с. 74—75]. Между прочим, из очевидной справедливости такой трактовки «И цзина» автоматически следует утвердительный ответ на вопрос о наличии понятия «переменная» (или какого-либо его функционального аналога, вроде произвольных чисел в роли параметров у Диофанта [2, с. 12—13]) в древнекитайских теориях.

Мы попытаемся показать в дальнейшем, что в Китае символичность—математичность при образовании общих понятий, безусловно, доминировала[2].

Ниже мы рассмотрим две взаимодополняющие концепции китайской теории *обобщения:* понятие *сокращения (*юэ) и понятие *приведения* (тун).

Для древнекитайской аргументации очень важна категория «род, класс, целое» (иероглиф лэй), сообщающая необходимую общность дискурсу. В связи с этим основным требованием являлось умение по предъявленной части восстановить целое и соответственно неспособность сделать это («незнание рода» — бу чжи лэй) расценивалась китайскими мыслителями как типичная методологическая погрешность. Так, например, прославленная педагогическая максима Конфуция (551—479 гг. до н.э.) гласит: «Не возвращайся [с наставлениями к тому, кто] по предъявлении [ему] одного угла, [не сможет] в ответ [назвать] три [оставшиеся] угла» [28, с. 139]. Согласно классическому комментарию ханьского Чжэн Сюаня (127—200 гг.), речь здесь идет о тех, кто «не разумеет [всего] рода обсуждаемых предметов» [28, с. 139][3].

295

Более причудливый, нематематический пример «незнания рода» находим у Мэн-цзы (ок. 372—289 гг. до н.э.): «Вот у [человека] согнут и не разгибается безымянный палец, что не причиняет ему ни боли, ни неудобства. Но если бы нашелся некто могущий разогнуть его, то [недужный] не счел бы далеким путь из Цинь в Чу только ради того, что у него безымянный палец не такой, как у других. Когда у человека палец не такой, как у людей, так он умеет чувствовать недовольство, а когда у него сердце не такое, как у других, так он не умеет чувствовать его. Это называется "незнанием рода"» [29, с, 464]. Пафос притчи в акцентировании, казалось бы, очевидной, но зачастую неосознаваемой («незнание рода»!) нераздельной *целостности* человеческой личности, *частями* которой являются и малозначительный безымянный палец, и наиважнейшее сердце (мы бы сказали, «душа»).

Поскольку одна и та же вещь вполне может оказаться частью *различных* целостностей, постольку более предпочтительно умение опознать *большую* из них, подразумеваемую этой их общей частью. На этот счет в конфуциевых «Беседах и суждениях» имеется следующий примечательный диалог: «Обращаясь к Цзы-гуну. Учитель спросил: "[Из вас двоих] кто кого превосходит, ты или Хуэй? "Цзы-гун ответил: "Разве я, Сы, посмею сравнивать себя с Хуэем? Если Хуэй, услышав об одном, знает о десяти, то я, Сы, услышав об одном, знаю [всего лишь] о втором". Учитель сказал: "Я согласен с тобой. Ты не можешь сравниться [с ним]"» [18, с. 116].

Часть, возводящая к целому, может выделяться и намеренно. Так, Сюнь-цзы (ок. 335—238 гг. до н. э.) дает сравнительно развернутое изложение своеобразной «экономии» познания: «Сердце [благородного мужа] мало, но [его] Дао велико: видит и слышит [лишь] ближайшее [к нему], но осведомлен и воспринимает отдаленнейшее [от него]. Каким образом это [происходит]? Таков [результат применения] техники схватывания. Поэтому чем теснее (юэ)хватка, тем грандиозней свершения. Пятивершковый угольник исчерпывает квадраты Поднебесной, поэтому благородный муж не спускается из опочивальни и кабинета, а между тем все обстоятельства [имеющие быть] среди [четырех] морей концентрируются там [у него]. Таков [результат применения] техники схватывания» [31, из, 2, с. 120].

В отличие от привычных нам (по отечественным и западным переводам и толкованиям подобных пассажей вроде прославленных слов Лао-цзы относительно возможности «не выходя со двора, знать Поднебесную») туманно-мистических истолкований традиционный комментарий вполне прозаично растолковывает фразу о пятивершковом угольнике ссылкой на «метод меньшего

296

и большего катетов и извлечение квадратного корня», т.е. отсылкой к теореме Пифагора. Как видим, у Сюнь-цзы *часть* — конкретная тройка пифагоровых чисел (а именно 3, 4, 5), представленная своей третьей компонентой (т.е. числом «пять») — указывает на *целое* («метод большего и меньшего катетов», иначе говоря, множество *всех* целочисленных прямоугольных треугольников, т.е. пифагоровых треугольников). Таким образом, пифагоровы числа 3, 4 и 5 представляют *все* целочисленные пифагоровы тройки — другими словами, египетский треугольник представительствует за *все* пифагоровы треугольники, Намек на причины, по которым это может происходить, содержится в слове *«утеснение–*

(иероглиф юэ), совершенно не случайно присутствующем в вышеприведенной сюньцзыевой цитате. Дело в том, что данное слово имеет специальное математическое

значение сокращения дробей (2 иероглифа юэ фэнь). Вот, например, как трактует данный термин прославленный своими комментариями к древнекитайскому математическому девятикнижию Лю Хуэй (ок. III в.): «[Что касается] сокращения дробей, [то когда] численность или размеры вещей нельзя исчерпать целым [числом, тогда] приходится прибегать к дробям (букв.: "частям, долям"), чтобы говорить о них. Дробь же является таким числом, которым трудно пользоваться, если оно усложнено. Предположим, что имеется [дробь] две четвертых. [Если] говорить о ее усложненном [варианте, то] она также может быть представлена в виде четырех восьмых. [Если же] говорить о ее сокращенной [версии, то это будет] одна вторая. Хотя формулировки различны, но как числа [все они] сводятся к одному и тому же [числу]» [36, цз. I, с. 94]. Об осознании китайскими математиками древности основного свойства дробей см. [3, с. 130—132].

Как известно, рациональные числа — это классы эквивалентности, а та или иная конкретная дробь из любого такого класса является представителем такого содержащего ее бесконечного класса. Наоборот, всякий такой класс характеризуется любой из принадлежащих ему дробей. Принято отождествлять рациональное число с *наименьшей,* т.е. несократимой дробью из соответствующего класса эквивалентности. Ее получают сокращением какой-либо дроби данного класса на наибольший общий делитель ее числителя и знаменателя. Эта *операция сокращения на наибольший общий делитель и терминологизируется иероглифом*. Простейшая пифагорова тройка — 3, 4 и 5 — на первый взгляд могла бы мыслиться Сюнь-цзы в качестве представителя всего бесконечного класса *непосредственно производных* от нее пифагоровых троек. Пример такой производности засвидетельствован следующим комментарием Чжао Шуана (ок. III в.) к самому раннему китайскому математико-астрономическому трактату «Счетный канон о чжо-

297

уском гномоне» (ок. I в. до н.э.): «"Подождать, пока длина его тени вырастет до шести локтей", [означает следующее:] чтобы меньший и больший катеты взаимооткликались, [треугольник, в котором] меньший катет равен 3, больший катет равен 4 и гипотенуза равна 5, [должен перейти в треугольник, в котором] меньший катет равен 6, больший — 8, а гипотенуза — 10» [37, цз. 1, с. 26].

Однако далеко *не все* пифагоровы тройки непосредственно производны от чисел египетского треугольника в указанном выше смысле (как, например, числа 5, 12 и 13. также образующие пифагорову тройку). Тогда на каком же основании нами утверждается сводимость целого к его, по-видимому, не столь уж и представительной части?

Заметим, что одним из следствий малой теоремы Ферма $a^P \equiv a$ (mod p)*,* где p — простое число и a — целое число, не делящееся на p*,* является следующая замечательная теорема: произведение длин сторон пифагорова треугольника делится на 60. Другими словами, *все* пифагоровы треугольники сравнимы с нулем по модулю 60 и египетский треугольник будет среди них *наименьший*. Точнее, множество произведений трех компонент каждой из целочисленных пифагоровых троек образует множество кратных числа 60, а произведение тройки, четверки и пятерки есть *наименьший* элемент этого множества. Получается, что благодаря удачно выбранному модулю сравнения ситуация с пифагоровыми треугольниками оказывается полностью аналогичной положению с рациональными числами, описанному выше. Вот так конкретная пифагорова тройка 3, 4, 5 получает возможность представительствовать за *все* целочисленные пифагоровы тройки.

Стоит подчеркнуть осознанность связи простейшей пифагоровой тройки с числом 60. Дело в том, что китайский 60-ричный календарный цикл — так называемый цзяцзы

( ) — представляет собой древнейшую систему фиксации времени с непрерывной историей. Цзя обозначает 10 небесных стволов (цзя, и, бин, дин, у, цзи, гэн, синь, жэнь, гуй), а цзы — 12 земных ветвей (цзы, чоу, инь, мао, чэнь, сы, у, вэй, шэнь, ю, сюй, чай). Четные номера первого набора циклических знаков всевозможными способами сочетаются в пары с четными номерами второго набора, аналогичный процесс осуществляется и для нечетных номеров обоих наборов. В результате получаем 60 различных пар — это и есть цзяцзы, в котором 60-ричный цикл именуется по его первой компоненте. Другими словами. 60 есть наименьшее общее кратное 10 и 12. Кроме того, 60 является составной частью принятого в Китае округленного до десятков числа дней в году (360 дней), его производных и других важных календарных единиц (например, юань — эра, эпоха). Поэтому привязка числа 60 к пифагоровой тройке 3, 4, 5 обычно проявляется в виде календарно-астрономических ассоциаций, сопутствующих этой пифагоровой тройке.

Здесь для начала заметим, что самое раннее из известных китайских доказательств теоремы Пифагора (для частного случая египетского треугольника) открывает древнейший математико-астрономический трактат «Счетный канон о чжоуском гномоне», причем 3, 4 и 5 появляются там как раз при обсуждении вопроса происхождения календарных чисел. Примечательно, что ответом на этот вопрос является утверждение о происхождении «метода» (фа) этих чисел из круга (т.е. округленной длины единичной окружности, равной трем) и квадрата (длины периметра единичного квадрата, равной четырем). В своем комментарии к разбираемому месту «Чжоуского гномона» Чжао Шуан достаточно прозрачно говорит о приведении к наименьшему общему кратному тройки, четверки и пятерки, что дает число 60.

Наконец, в китайской традиционной и более современной историографии имеются прямые указания на связь календаря с «методом меньшего и большего катетов» [27, с. 2207; 33, с. 845].

Итак, согласно «Чжоускому гномону» и комментариям к нему Чжао Шуана, число 60 является, с одной стороны, начатком пифагоровых треугольников, а с другой — родоначальником основных календарных чисел.

Согласно классическому определению Мэн-цзы, «когда говоря о близком, намекают на далекое — это искусная речь; [способ, при котором] соблюдена краткость (юэ), а действие его обширно — это искусный способ» [29, с. 594]. Поскольку сокращение всего множества пифагоровых треугольников до единственного (египетский треугольник), несомненно, является примером такого «искусного способа», постольку древнекитайским мыслителям казалось достаточным в своих теоретических построениях оперировать лишь с этой избранной пифагоровой тройкой. Вот почему как в изначальном китайском доказательстве теоремы Пифагора для частного случая египетского треугольника [37, цз. I, с. 14], так и в выведении тождества $3^2 + 4^2 = 5^2$ из гексаграммы № 11 Тай (см. подробнее: [14, с. 142]) речь идет не просто о частном случае, а, учитывая вышесказанное, *о доказательстве теоремы Пифагора в полном объеме, т.е. во всей общности.* В том, что китайские математики древности здесь не заблуждались, мы легко убеждаемся из существующих реконструкций вышеупомянутого доказательства (см., напр.: [41, p. 26—27]). По словам крупнейшего современного историка математики Ван дер Вардена: «Доказательство (теоремы Пифагора в "Чжоуском гномоне". — *А.К.*) осуществлено только для треугольника (3, 4, 5), но идея

доказательства обладает полной общностью» [41, p. 26].
299

Думается, что математическим соображением, лежащим в основе *метода сокращения, является* идея *рекурсии* — «возвращения» от неизвестного к известному. Иными словами, возможность восстановления всего искомого рода (разумеется, в той мере, в которой это требуется в каждом данном случае) по предъявленной произвольной части этого рода, мыслится как способность вернуться от искомого целого (или искомой его части) к предъявленной части, наводя тем самым мосты от известного к неизвестному.

Соответственно, «незнание рода» следует понимать как неспособность связать друг с другом две по видимости несхожие между собой веши, неумение усмотреть связывающую их взаимозависимость (см. приведенный в начале пример Мэн-цзы с пальцем и сердцем). Аналогично восхождение от данной части к целому (или к другим частям этого целого) эксплицируется как «достраивание» известной части согласно некоему правилу до целого (или же до иных — более обширных — фрагментов целого). Примерами такого рода являются приведенные в начале нашего сообщения «геометрические» и «арифметические» притчи из «Бесед и суждений» Конфуция об углах четырехугольника, о первом и о втором, и об одном и десяти.

Искусство сокращения как раз и сводится к умению *минимизировать масштаб задачи,* к выбору *наименьшей,* но при этом достаточной для восстановления целого части этого целого. Причем обычно дается лишь результат подобного сокращения — минимальная часть (вроде одного угла четырехугольника), в свернутом виде содержащая целое без явного указания правила перехода от нее к другим частям. Возможно, подобные правила являлись принадлежностью устной традиции.

Вышесказанное проливает дополнительный свет на тайну древнекитайского математического девятикнижия «Цзю чжан суань шу» (III в. до н.э. — I в. н.э.) как теоретического обоснования древнекитайской математики, а не просто тематического сборника задач с ответами. По мнению современных китайских историков науки, главная особенность древнекитайских научных теорий состоит в их модельном (а не аксиоматическом, как на Западе) характере. Поэтому их отличает алгоритмичность— вычислительность и алгебраичность в противоположность доказательности и геометричности классической греческой науки [25, с. 1—4].

В отношении общности выстраивается иерархия возможных реализаций (т.е. *конкретных математических структур,* а не предложений языка некоторой теории), где общее выражается одной из этих структур, а вовсе не предложением с квантором всеобщности (аксиомой). Так, по всей видимости, конкретные и утилитарные задачи из «Математики в девяти разделах» замышлялись
300
их авторами и толкователями как простейшие реализации некоторых важных алгоритмов. В их группировке прослеживается отчетливая типизация вычислительных задач. По утверждению Э.И. Березкиной, «если автор имеет целью показать класс задач, он сначала приводит самую четкую, простую, "каноническую", а затем по мере усложнения демонстрирует, насколько широк такой класс задач; затем дает алгоритм сведения других задач к уже решенным, расширяя таким образом указанный класс задач. Именно так построена вся "Математика в девяти книгах"...» 3, с. 24. Ей вторит А. К. Волков, замечая по поводу манеры Лю Хуэя рассматривать лишь отдельные частные случаи решения той или иной задачи (вместо обсуждения решения в общем виде), что на самом деле «рассматриваемый частный случай является в некотором смысле общим, поскольку им фактически задается схема рассуждений или необходимое дополнительное построение» [5, с. 102].

О том, что соотношение общего и частного применительно к задачам из «девяти разделов» и их всевозможных модификаций-приложений является лишь вопросом выбора нужного масштаба, специально писал Лю Хуэй. Комментируя обычный зачин к большинству задач «Математики в девяти разделах» — «пусть имеется», «пусть теперь» (цзинь ю), Лю Хуэй истолковывает его как обозначение тройного правила (правила пропорции — вычисление по трем заданным величинам четвертой — неизвестной — величины x, образующей с ними пропорцию). Вдобавок он объявляет это правило главным инструментом для возвышения единичного до всеобщего, благодаря которому конкретные задачи девятикнижия, так сказать, «перерастают себя самих», открывая бесконечные перспективы на целые классы родственных им задач: «К этому [словам "пусть имеется"] сводится все правило. Ведь числа *девять* [достаточно] для поименования глав ["Математики в девяти разделах" потому, что задачи этих глав] можно широко распространить посредством коэффициентов [пропорциональности] — что называется "сообщишь о прошедшем и [уже] знает грядущее"[4], "по предъявлении одного угла [называет] в ответ три [оставшихся] угла". [С помощью этого правила мы] и в самом деле можем распутывать переплетения чисел, избавляться от всевозможных заторов, сообразно с вещами образовывать коэффициенты, учитывая различия, именовать дроби — выравнивать их перекосы и уравновешивать их асимметрию — так что в конце концов не остается ничего, что не возвращалось бы к этому правилу» [36, цз. 2, с. 114].

Уже знакомый нам приточный образ *квадрата* появляется в приведенной выше характеристике тройного правила, судя по всему, далеко не случайно. Известно, что в античности у греков

301

было принято располагать члены четырехчастной пропорции по углам квадрата [1, с. 721]. Понятие пропорциональности связывалось (видимо, благодаря входящей в него идее четверичности) с образом квадрата и в Древнем Китае. Прямым текстуальным подтверждением этого является следующая дефиниция квадрата, принадлежащая Хань Фэй-цзы (III в. до н.э.): «Квадратом называется взаимоотклик (сян ин) внутреннего и внешнего, взаиморавновесие речей и поступков» [34, с. 100]. Если мы вспомним приведенные нами ранее слова Лю Хуэя о «взаимоотклике меньшего и большего катетов» египетского треугольника, не теряющегося при переходе от этого канонического треугольника к *подобному* ему треугольнику («чтобы меньший и больший катеты взаимооткликались, [треугольник, в котором] меньший катет равен 3, больший катет равен 4 и гипотенуза равна 5, [должен перейти в треугольник, в котором] меньший катет равен 6, больший — 8, а гипотенуза — 10»), то сможем воспринять математическую суть предполагаемой понятием квадрата гармонии между «внутренним и внешним», с одной стороны, и «речами и поступками» — с другой, сводящуюся к равенству отношений двух следующих пар: внутреннее/внешнее = речи/поступки[5].

Не будем сейчас останавливаться на многочисленных и многообразных этических и социальных преломлениях идеи пропорциональности — квадратности. Отметим только удивительное сходство тут с античными числовыми спекуляциями (когда, например, «справедливость» воспринималась как «квадратное число» [букв.: «равностно равное число»]).

Парной к обобщению—*сокращению* является концепция обобщения— *приведения* (тун *pf*). Дуальным по отношению к наибольшему общему делителю (далее НОД) понятием является понятие наименьшего общего кратного (далее НОК). Роль НОК в мировоззрении древних китайцев огромна. Дело в том, что нахождение ОК, и в частности НОК, есть математическая основа гносеологической процедуры, парной к вышеописанной процедуре обобщения—сокращения. В силу очевидных соображений мы назовем ее «обобщением через *приведение*».

Рассмотрим следующее (может быть, не слишком исторически достоверное, но тем не менее канонизированное впоследствии) этимологизирование иероглифа (ван — царь) «ханьским Конфуцием» Дун Чжуншу (II в.): «Древние творцы письменности, [начертав] тройку черт и соединив их середины, назвали эту [фигуру] "Ваном": тройка черт суть Небо, Земля и Человек, а соединение их середин сводит их дао [воедино]. Взять середины Неба, Земли и Человека для того, чтобы, пронизав, сделать их

302

тройственно приведенными (цань тун), — кто кроме Вана способен на такое» [26, цз. II, гл. 24, с. 6].

Иероглиф тун (— проникновение — продвижение — сообщение — приведение) применительно к *дробным* числам означает приведение их к общему знаменателю (иными словами, нахождение ОК, в частности НОК, знаменателей приводимых дробей), о чем свидетельствует математический термин тун фэнь (– приведение дробей). Относительно взаимосвязи ОК и НОК в соответствующих древнекитайских алгоритмах [3, с. 123— 130]. Касательно же *целых* чисел операция «приведения» указывает на сведение их к таким объемлющим их числам, как ОК (в частности, НОК). О переходе от приведения дробей к проблеме НОК см.: [3, с. 123—130]. Ицзиновская концептуализация этой проблематики и некоторые небезынтересные детали терминологического оформления соответствующей теории обсуждаются в [24, с. 39-41].

Математическое значение выражения «взаимоприведение—взаимопроникновение» (сян тун) обнаруживает себя в следующем пассаже, подытоживающем изложение учения о «трех единствах» (сань тун) в музыкальной части раннеханьских «Записей о [музыкальных] трубках и календаре»: «Три единства взаимопроникают, поэтому длины [музыкальных] трубок — Хуан Чжуна, Линь Чжуна и Тай Цоу — все без остатка выражаются в целых вершках» [23, цз. 21, с. 963]. Обратим внимание на следующее обстоятельство: чуть ранее «три единства» — Небо, Земля и Человек — приравнивались Лю Синем (46 г. до н.э. — 23 г. н.э.), на работу которого опирался Бань Гу (32—92 гг.), составляя данный раздел «Ханьской истории», к Хуан Чжуну, Линь Чжуну и Тай, Цоу, соответственно, с указанием их длин (9 вершков — для Хуан Чжуна, 6 — для Линь Чжуна и 8 — для Тай Цоу) [23, цз. 21, с. 961]. Тогда согласно предложенному истолкованию «приведения—проникновения» (тун) взаимопроникновению Трех единств должно отвечать приведение к НОК (или ОК) 9, 6 8, что дает число 72 или числа, кратные 72. Нам действительно предъявляются подобные числа, хотя уже в другой, календарной части «Записей», но в схожем контексте — в качестве резюме пространного рассуждения о тех же Трех единствах (на этот раз трактуемых не столько в музыкальном, сколько в календарном ключе — как обозначение трех видов годового цикла в зависимости от отсчета начального месяца года): «Три сокровенных и образуется явное, три явных и образуется образ, два образа, восемнадцать превращений и образуется гексаграмма, четыре действия и образуется перемена. [Все это] дает

303

число семьдесят два — [итог] взаимоперемножения утроенной троицы, объединяющей двоицы и четверицы времен. Утраивая его, получаем [число] стеблей тысячелистника [гексаграммы] Цянь. Удваивая его, получаем [число] стеблей тысячелистника [гексаграммы] Кунь» [23, цз. 21, с. 985].

Знаменательно, что в обеих цитатах (музыкальной и календарной) числа, составляющие обе итоговые тройки, явно перекликаются друг с другом: помимо совпадающей в обеих тройках девятерицы (сиречь «утроенная троица») шестивершковой длине Линь Чжуна (воплощающего собой «земное единство») вторит земная же «объединяющая двоица», а восьмивершковому Тай Цоу (ответственному за «человеческое единство») откликается «четверица времен» (мыслимая в данном контексте как *третье* к Небу и Земле [23, цз. 21, с, 972].

Кроме того, как следует из вышеприведенной цитаты, число 72 примечательно еще и тем, что, являясь, с одной стороны, НОК для канонических длин музыкальных трубок-камертонов (подробнее о связях ицзиновских чисел с китайской музыкальной теорией см.:

[9, с. 21—26; 7; 40, vol. 2, p. 118—128]), оно в то же самое время есть НОД «чисел янских и иньских стеблей» ( ), т.е. тех количеств гадательных стеблей тысячелистника, которые необходимы для получения двух начальных гексаграмм: для гексаграммы Цянь их требуется 216 (216 = 72 • 3), а для гексаграммы Кунь — 144 (144 = 72 • 2). Ничуть не удивительно, что число 72 служит Лю Синю отправной точкой в его календарно-числовых спекуляциях, ведь согласно «Сицы чжуани», сумма 216 и 144, равная 360, «соответствует дням срока» [38, цз. 14, с. 223], т.е. округленному числу дней года.

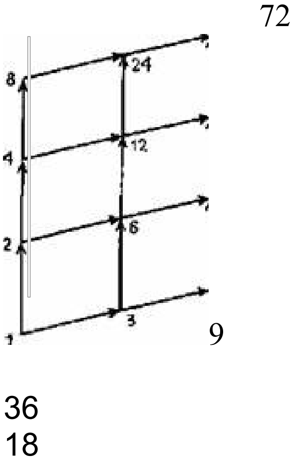
Другим связующим звеном между числом 72 и календарем является учение о «Пяти стихиях» — наложение 5-ричной классификационной схемы на округленную величину года дает именно такую продолжительность «царствования» каждой из них в течение одного года (360:5 = 72) [26, цз. 13, с. II; 35, цз. 3, с. 43]. Отсюда и доныне используемое в китайском календаре деление года на 72 пятидневки, так называемые «предуведомления» [39, vol. 2, p. 106—118].

Итак, устройство иероглифа (царь) подразумевает приведение к НОК соответствующей тройки чисел. С другой стороны, согласно хрестоматийному толкованию этого иероглифа, которое уже приводилось нами выше, его вертикальная черта знаменует собой объединение всех трех планов бытия (Неба, Земли и Человека), изображенных посредством горизонтальных черт. Таким образом, кажущаяся метафоричность и расплывчатость этого образа уступают неожиданно место математической определенности и отчетливости, когда мы обращаемся к математическому, числовому значению царя. Оно оказывается равным НОК трех чисел, приуроченных к трем горизонтальным чертам означенного иероглифа: 9 есть число Неба (верхняя горизонталь), 6 — Земли (нижняя горизонталь), а 8 — Человека (средняя горизонталь). Итак, числовое значение царя однозначно вычисляется по числовым параметрам отвечающей ему триадической классификационной схемы и равно семидесяти двум = НОК [9, 6, 8].

Как видим, процедура обобщения имела в Древнем Китае достаточно прочное математическое основание — операцию взятия НОК чисел, являющихся гематриями обобщаемых предметов. Очевидна календарно-астрономическая подоплека описанного выше понимания обобщения. Оно мыслится как вычисление общего периода кругообращения различного числа небесных тел (в вышеприведенном случае с царем это число равно трем), сводимых воедино процедурой приведения—обобщения. Опираясь на алгебраический смысл понятия НОК, — как известно, НОК есть наименьшая верхняя грань двух чисел в решетке, образуемой множеством делителей какого-либо фиксированного числа, частично упорядоченным отношением «делимости», — можно предложить логическую экспликацию концепции приведения—обобщения.

Чтобы яснее представить алгебраическое устройство *числа вана,* которое задается упорядоченным относительно делимости множеством его делителей, изобразим это упорядоченное множество посредством следующей диаграммы.

Эта схема состоит из двух цепей кратных, начинающихся от единицы и сходящихся к семидесяти двум. Любые два числа схемы имеют как НОК, так и НОД (наименьшую верхнюю и наибольшую нижнюю грани), т.е. мы здесь имеем решетку делителей числа семьдесят два (далее L_{72}). L_{72} представляет собой пример брауэровой решетки — важного обобщения понятия булевой алгебры, называемой поэтому иногда псевдобулевой алгеброй. Поскольку, как мы показали выше, *обобщение* мыслилось китайцами с помощью концепций сокращения (деления на НОД) и приведения (нахождения НОК), постольку есть все основания говорить о вполне осознанном использования китайскими мыслителями решеточной структуры множества делителей фиксированного натурального числа, в частности структуры L_{72}[6].



Итак, приведение дробей к ОК (в частности, к НОК) — это необходимое условие для осуществления с ними простейших арифметических операций, таких, например, как сложение [36, цз. 1, с. 95—96]. Это более чем понятно. Но какой смысл приводить *целые* числа к ОК (НОК)? Здесь стоит обратиться к объяснениям Лю Хуэя, разъясняющего смысл и способ приведения—породнения чисел: «Числа одного рода не далеки [друг от друга], числа разных родов не близки [друг другу]. [Если числа] далеки [друг от друга], но при этом по своему строению являются [взаимно] приведенными (тун ти), то хотя они и принадлежат к разным [цифровым] разрядам, однако являются взаимосхожими. [Если числа] близки [друг другу], но при этом различаются формой, то — хотя бы они стояли в одном ряду — все же они будут взаимонесхожими» [36, цз. I, с. 96].

Как видим, у Лю Хуэя в вышеприведенном рассуждении фигурируют целые числа, а не дроби (причем эти числа у него легко отождествляются тут с цифрами чисел, выкладываемых на счетной доске). Его исходный постулат: числа бывают разных *родов,* и этим детерминируются их взаимоотношения («близость—отдаленность»), т.е. их, так сказать, «операциональная близость» — возможность их сравнения и оперирования с ними. Проще говоря, речь идет о таком тривиальном условии, необходимом для оперирования *именованными* числами (т.е. числами, выражающими различные — в том числе и *неоднородные* — величины), как предварительная приведенность их к одной и той же общей единице измерения, что достигается взаимоперемножением чисел, выражающих разнородные величины[7].

Итак, условием однородности чисел является их приведенность к ОК как к объемлющему их роду. Числа, приведенные к ОК, объединяются им как общим родом и замкнуты в отношении делимости, подобно тому, как единицы одного и того же разряда замкнуты этим разрядом-родом по определению. Потому-то приведение к ОК произвольных чисел — это способ их *породнения.* Таким образом, обобщение-приведение *целых* чисел означает, вообще говоря, образование ими решеточной структуры делителей их ОК. Решеточная структуризация чисел, задаваемая обобщением—приведением, является своеобразной *координатизацией* действительности (вспомним решетку L_{72}, рассмотренную выше, и упорядочивающее действие, которое царь оказывает на окружающий мир и своих подданных, вероятно, не без ее участия) — введением определенной системы координат в пространство высказываний о мире, социуме и т.д.[8]

Математический аспект обоих видов обобщения находит свое теоретическое обоснование в комментариях Лю Хуэя к правилу

306

сложения дробей, где они напрямую возводятся к «И нзину». Этой цели у Лю Хуэя служит так называемое «правило уравновешивания к объединения» (ци тун шу *).* «Обоюдное перемножение знаменателя и числителя называется "уравновешиванием", взаимоперемножение [всего] множества знаменателей называется "объединением". Объединение — [это] сведение сопоставляемых [величин] к одинаковой единице измерения, приведение [выражающих их дробей] к общему знаменателю. Уравновешивание — [это] уравновешивание числителя со знаменателем [для того, чтобы] не потерялось исходное число. "Квадрат собирает посредством рода, особь разделяет посредством множества"[9]. Таким образом, суть правила уравновешивания и объединения — в сплетении чисел и мер; когда приводишь его в действие, то возникает гармония, оно подобно носимому на поясе костяному шилу для распутывания узлов — к чему ни применишь, все упорядочивается им. Умножаешь, чтобы размельчить их (числа. — *А.К.*), сокращаешь, чтобы собрать их (числа. — *А.К.*), уравновешиваешь и объединяешь, чтобы привести их [к общему знаменателю]. Такова основа [всех] вычислений!» [36, с. 96].

Уравновешивание (с последующим сокращением «уравновешенной» дроби — «сокращаешь, чтобы собрать») есть математическая версия *обобщения—сокращения,* а объединение («умножаешь, чтобы размельчить») — соответственно *обобщения—приведения*. Далее, как явствует из приведенного выше рассуждения Лю Хуэя, уравновешивание и объединение (а стало быть, и оба вида обобщений) подводятся под ицзиновскую характеристику взаимодополнительных в своей противопоставленности действий квадрата и особи. С другой стороны, в то время как данная пара (квадрат и особь) истолковываются посредством триграмм Кунь ☷ и Цянь ☰ соответственно, обобщение—сокращение и обобщение—приведение локализуются во второй и пятой гексаграммных позициях[10].

Для уяснения смысла означенной корреляции нужно принять во внимание два следующих момента: во-первых, прозрачность мотивации с выбором именно этих гексаграммных позиций для символизации идеи обобщения, ведь они представляют собой две взаимоскоординированные *середины* произвольной гексаграммы — нижняя (вторая гексаграммная позиция — середина нижней триграммы) и верхняя (пятая гексаграмма позиция — середина верхней гексаграммы). В терминах троичной схемы Небо—Земля—Человек (являющейся основой гексаграммной шестеричности) обе гексаграммные середины суть не что иное, как «расщепле-

307

ние—удвоение» единой человеческой позиции исходного триединства (см. отображение Q). Последняя же, в свою очередь, знаменует середину троичной схемы, причем Человек мыслится тут как производная двух крайних членов этой схемы, являясь *обобщением* Неба и Земли. Небо — это *Ян,* Земля — это *Инь,* а Человек — это смешанный разряд, объединяющий в себе *Инь* и *Ян.*

Применительно к математике намеченное выше понимание обобщения находит свое выражение в следующих историко-математических фактах: при выполнении операции умножения на китайской счетной доске было принято помещать произведение в *середину* (Человек) — под множителем (Небо) и над множимым (Земля), так же и понятие пропорции, как известно, неразрывно связано с понятием середины (достаточно вспомнить такие классические *средние* значения, как среднее арифметическое и среднее пропорциональное).

Идентификацию образов, фигурирующих в процитированном Лю Хуэем ицзиновском отрывке, посредством триграмм Кунь и Цянь следует понимать как указание на заполненность второй и пятой гексаграммной позиций прерванной (иньской) и непрерывной (яньской) чертами соответственно.

Теперь, наконец, обнаруживается скрытая за мантической кажимостью та занимающая нас сейчас ипостась гексаграммного символизма, которая ответственна за логику обобщения. Иньская черта, стоящая в нижней середине гексаграммы, обобщает выделением наименьшего из множества предметов, сводимых воедино той или иной

пропорцией (например, наименьшая рациональная дробь a/b из класса эквивалентности, определяемого пропорцией ab = x/y, где x/y - другая рациональная дробь; другой пример – наименьшее из равноостаточных чисел). Вот так "квадрат собирает посредством рода". Янская же черта, занимающая верхнюю середину гексаграммы, обобщает посредством наложения на обобщаемые предметы решеточной структуры, за счет чего и происходит разделение первоначально хаотичной, неупорядоченной массы на отдельные индивиды ("особь разделяет посредством множества"). В числе примеров укажем на математическую операцию приведения дробей к НОК и на ее социально-космический аналог – упорядочение действительности, осуществляемого царем. Недаром в символической "табели о рангах" гексаграммных позиций пятая позиция обозначает именно царя. В заключение заметим, что в обоих случаях – как при обобщении-сокращении, так и при обобщении-приведении – результат подобного обобщения принимает символическую, т.е. предельно конкретную форму вплоть до его персонификации в образах "благородного мужа" и "царя" соответственно.
308

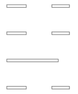
Примечания

[1] В славянской Библии (восходящей к "[Переводу] семидесяти» — Септуагинте) в коние данной фразы вместо «воинства» стоит слово «украшение» (κόδμος), в то время как русский синодальный перевод следует здесь масоретской версии Пятикнижия (ριςτζ— «их армии»). Упомянутая выше библейская космическая троица (Небо—Земля—их Воинство) очевидным образом перекликается с китайским троичным делением мироздания на так называемые «три материала» (Небо—Земля—Человек).

Э. Гальбиати и А. Пьяцца объясняют описанную выше симметрию дел творения исключительно стилистическими особенностями прозы Древнего Востока, в частности литературными условностями древнееврейской художественной прозы, служащими, по их мнению, достаточным оправданием «искусственности и схематизма» библейского рассказа [6, с. 71—72]. Однако приведенные нами выше компаративистские наблюдения (согласно китайским традиционным воззрениям, «шестерица — это число «И цзина» [30. с. 1283]) заставляют подозревать, что в случае шестоднева мы имеем дело с чем-то большим, нежели просто художественный прием и литературная схема.

[2] Нельзя сказать, что специфика китайского понимания общности не привлекала к себе внимания ученых. В свое время В.С, Спирин среди прочего поставил эту проблему [19]. Вслед за этим А.И. Кобзев основательно над ней потрудился [12; 13. с. 178—214]. М.В.Исаева также затрагивает этот вопрос в своей недавно увидевшей свет монографии [8. с. 136—139]. В указанных выше работах содержится богатый фактический материал, множество, ценных наблюдений и проницательных догадок (особенно в работах А.И. Кобзева). Однако при этом, к сожалению, остается в тени собственно логическая сторона поднятой проблемы (в лучшем случае, констатируется достаточно очевидное несходство китайского понимания обобщения с обобщением через абстракцию традиционной европейской логики). Напротив, предложенные объяснения пошли по ложному пути неоправданного терминотворчества («генерализация» вместо «обобщения», см.: [12]), малосодержательного «семиотического» занаучивания языка (все и вся объявляется «знаком»: текст — самый сложный знак, предложение — менее сложный знак, синтагма — еще менее сложный знак и т.п., см.: [8, с. 234]), подчеркивания произвольно-конвенционального, ценностно-нормативного, аксиологического и т.п. характера китайской версии обобщения.

[3] Любопытно, что приведенное нами высказывание Конфуция подводится Чжэн Сюанем под концептуальную схему гексаграммы № 4 Мэн («Незрелость») представляющую собой парадигму процесса обучения как в его



общности, так и в поэтапной расчлененности. Главные персонажи этого процесса суть учитель и ученик, важнейшие черты их взаимоотношений описываются афоризмом к гексаграмме «Незрелость» следующим образом: «Не я стремлюсь к юношески незрелому, а юношески незрелый стремится ко мне. По первому гаданию — возвещу. Повторное же и третье гадания — докука. А раз докука, то не возвещу. Благоприятна стойкость» [38, цз. 2. с. 33]. Первая половина афоризма, говорящая о «стремлении», подразумевает взаимоотношения второй черты (изображает «я», т.е. учителя) и пятой черты (символизирующей «юношески незрелого» ученика) в составе гексаграммы «Незрелость" .

Вторая часть афоризма (насчет «докуки») как раз и толкуется Чжэн Сюанем посредством обращения *к.* конфуциевой педагогической максиме: «Когда ученик спрашивает в первый раз, то ему отвечают намеком на суть дела. [Если он] не додумается до остальных трех углов, соотнесенных [с предъявленным ему углом] и в ответ обратится за объяснениями, то это будет утруждением учителя и вдоба-

309

вок с ничтожным результатом, что является бедствием для процесса обучения. Когда докучают вопросами, тогда не отвечают — [тем самым] хотят заставить подумать и догадаться» [28, с. 139].

Таким образом, иероглиф *ду* (докучать) прочно закрепился за понятием избыточного вопрошания, в чем, например, удостоверяет принадлежащая знаменитому китайскому математику Лю Хуэю (ок. III в.) характеристика прозрачных формулировок и иллюстративных чертежей, благодаря которым достигается «полное постижение без избыточного вопрошания» [36, с. 91].

[4] Слегка измененная цитата из «Бесед и суждений»: «Учитель сказал: «Сы! С вами, уже можно говорить о "Книге песен". Когда я вам говорю о том, что ушло, вы уже знаете о том, что придет» [28, с. 99].

[5] Рассматривая понятие квадрата под предложенным ракурсом, удается более удовлетворительно, чем это имело место до сих пор, истолковать довольно темное определение квадрата в «Каноне» (гл. 40—43) трактата «Мо-цзы», датируемого IV— III вв. до н.э.: «Квадрат — четыре взвешивания между центральным столбом и углами (сторонами) () [10, с. 107, 111]. А. М, Карапетьянц (чьим переводом этого весьма трудно понимаемого места мы воспользовались) полагает, что речь здесь идет о «взвешенном размещении, т.е. размещении на равных расстояниях от центра» [10, с. 108]. Скорее же всего туг имеется в виду взаимосбалансированность относительно центра квадрат четырех величин, размещенных по его углам.

[6] Приведем еще два перекликающихся друг с другом контекста, где фигурирует это образцово «решеточное» число 72 (причем в первом случае ему сопутствует ключевое слово «обобщение— приведение»): «Учеников у него (Конфуция – *А. К.),* вероятно, было около трех тысяч человек. Но тех, кто глубоко проникал (букв.:«собой пронизывал» — шэнь тун) в суть шести искусств, насчитывались семьдесят два человека» [20, с. 146]; «Конфуций обращаясь к Лао-цзы, сказал: [Я], Цю, считаю, что давно изучил шесть канонов — «Стихи», «Предания», «Обряды», «Музыку», «Перемены», «Весны и Осени». Достаточно разобрался в их основаниях, чтобы снискать [аудиенции] семидесяти двух царей...»(39, цз. 4, с. 234). Стоит заметить, что число семьдесят два является одним из знаменательных чисел и нашей культуры, хотя этот факт часто маскируется обычаем округлять его до семидесяти. Вспомним, что семдесят два — это число языков, которые произошли от смешения при строительстве Вавшюнской башни. Древнейший перевод Ветхого Завета на греческий язык был осуществлен усилиями семидесяти двух толковников-переводчиков (округление этого числа до семидесяти и дало их труду его дошедшее до нас название — «Септуагинта»). Наконец, об избрании семидесяти — по некоторым древним кодексам, семидесяти двух — апостолов повествует евангелист *Лука* [21, т. 3. с. 187].

[7] «Всякий вопрос, который приводит к умножению, начнется проблемой изменения системы единиц: 5 мешков по 300 яблок (переход от мешков к отдельным яблокам): 2,75 м материи по 28,45 франков за I м (раньше мы считали в метрах, а теперь во франках) и т.д. [15, с. 30].

[8] Примечательно, что аналогичный, по существу, замысел был у Лейбница с его знаменитым проектом «универсальной характеристики», ведь в нем он предлагает использовать простые числа и разложения целых чисел на простые множители для описания мира высказываний. Причем так, чтобы различные вопросы об этих высказываниях в дальнейшем могли бы решаться посредством простых арифметических соображений и прежде всего делимости. Так, в лейбницевых наметках «универсальной характеристики» отношение делимости предлагается им в качестве основы предикации в частности аналитичности: «...мне пришло в голову, что понятия, если они правильно проанализированы

310

и в должном порядке расположены, могут выражаться в числах и соответственно истинны, рассматриваемые в той мере, в какой они зависят от разума, будут доступны проверке исчислением... Я заметил, что понятие, предицируемое о другом понятии, присутствует в нем так же, как умножаемое число в произведении. Так, человек в такой же мере называется разумным животным, как шестеричное число называется трижды двоичным, т.е. 6 равно 2x3, если называть двоичным всякое четное число, т.е. делимое на 2, а троичным — всякое число, делимое на 3. Установив однажды этот принцип, я позднее открыл способ, благодаря которому можно доказать с помощью чисел все логические формы, да и вообще этот прием оказался приложимым ко всем расчлененным понятиям» [16, с. 459]. «Для введения универсального исчисления необходимо придумать для каждого термина характеристический знак, так, чтобы из последующей связи знаков сразу же можно было бы установить истинность предложений, построенных из этих терминов. Наиболее удобными знаками я считаю числа. ...Характеристические числа каждого данного термина образуются в том случае, когда характеристические числа терминов, и которых складывается понятие данного термина, будучи помноженными друг на друга, производят характеристическое число данного термина. Поэтому необходимо, чтобы в любом истинном общеутвердительном предложении характеристическое число субъекта могло точно делиться на характеристическое число предиката. Пусть «всякое золото есть металл». Точно так же — «всякий треугольник есть трехсторонник». Такого рода предложения говорят только о том, что предикат находится в субъекте и потому характеристическое число предиката находится в характеристическом числе субъекта и будет включаться так, как об этом было сказано, т.е. множители будут входить в результат умножения, равно как делители — в делимое, что результат такого умножения всегда может быть точно разделен на множитель» [16. с. 533].

[9] Цитата из «И цзина», см.: [38, цз. 3, с. 206].

[10] На обосновании последнего утверждения ввиду исключительно филологического характера аргументации мы не станем сейчас останавливаться.

Список литературы

1. *Аристотель.* Соч.: В 4 т. М.. 1984. Т. 4.
2. *Башмакова И.Г.* Диофант Александрийский и его «Арифметика» // Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах. М., 1974. С. 5-27.

3. *Березкина Э.И.* Математика Древнего Китая. М., 1980.
4. *Вейль Г.* Математическое мышление. М., 1989.
5. *Волков А.К.* О доказательстве в древнекитайской математике // XV НКОГК. М., 1984. Ч. 1.
6. *Гальбиати Э., Пьяцца А.* Трудные страницы Библии (Ветхий Завет). Милан; М., 1992.
7. *Исаева М.В.* Музыкально-теоретическая система люй и методологический аппарат традиционной китайской историографии // История и культура Восточной и Юго-Восточной Азии. М., 1986. Ч. 1.
8. *Исаева М.В.* Представления о мире к государстве в Китае в III—VI вв. н.э. (по данным «нормативных историописаний»). М., 2000.
9. *Карапетьянц А.М.* Древнекитайская системология: генеральная схема и приложения. М., 1990.
10. *Карапетьянц А.М.* Понятийный аппарат доханьской геометрии и математики // XVIII НКОГК. М., 1987. Ч. 1.

311

11. *Кассирер Э.* Познание и действительность (Понятие о субстанции и понятие о функции). СПб.. 1912. Репринт.
12. *Кобзев А. И.* Генерализация в классической китайской философии, НАА. М., 1986. № 5.
13. *Кобзев А.И.* Учение о символах и числах в китайской классической философии. М., 1994.
14. *Крушинский А.А.* Логика «И цзина»: дедукция в Древнем Китае. М., 1999.
15. *Лебег А.* Об измерении величин. М,, 1938.
16. *Лейбниц Г.В.* Соч.: В 4 т. М., 1984. Т. 3.
17. *Лосев А.Ф.* Проблема символа и реалистическое искусство. М., 1976.
18. *Мартынов А.С.* Конфуций. Лунь юй. СПб., 2000.
19. *Спирин В.С.* О «третьих и пятых» понятиях в логике Древнего Китая //Дальний Восток. Сб. ст. по филологии, истории и философии. М., 1961.
20. *Сыма Цянь.* Исторические записки. Т. 6. М., 1992.
21. Толковая Библия или комментарий на все книги св. Писания Ветхого и Нового Завета. Пб, 1904-1913. 2-е изд.: В 3 т. Стокгольм. 1987.
22. *Филон Александрийский.* Толкования Ветхого Завета. М., 2000.
23. *Бань Гу.* Хань шу (История [династии] Хань): В 12 т. Пекин, 1964. Т. 4.
24. *Дун Гуанби.* «И» сюэ юй кэчжи (Ицзинистика и наука с техникой). Шэньян. 1997.
25. *Дун Гуанби.* Кэсюе юй чжунго чуаньтун вэньхуа: сы да наньти ды сыкао («Наука и китайская традиционная культура: размышления о четырех трудных вопросах») // Исюе юй кэсюе (Ицзинистика и наука). Пекин. 1998. № 2.
26. *Дун Чжуншу.* «Чуньцю» фаньлу (Обильная роса [на летописи] «Чуньцто»). Т. 2. Б. м., б. г.
27. *Ли Гуанди.* «Цнмэн» фулунь (Дополнения к «Введению [в ицзинистику]») // Исюе цзинхуа (Лучшее в ицзинистике). Пекин, 1996. Т. 3.
28. *Конфуций.* Лунь юй (Беседы и суждения) // Чжу цзы цзи чэн. Т. 1. Пекин, 1988.
29. *Мэн-цзы* (Учитель Мэн) // Чжу изы цзи чэн. Т. 1. Пекин, 1988.
30. *Сюй Шэнь.* Шовэнь цзецзы (Толкование [простых] письмен и разъяснение [составных] иероглифов. Цзинань, 1994.

31. *Сюнь-цзы.* «Сюнь-цзы» цзицзе (Собрание разъяснений [трактата] «Сюнь-цзы») // Чжу цзы цзи чэн. Т, 2. Пекин. 1988.
32. *Фэн Юлань.* «И» чжуань ды чжэсюе сысян (Философия ицзиновских чжуа-ней) // Чжэсюе лньизю. Вып. 3. Пекин. 1987.
33. *Хан Синьчжай.* И шу оудэ (Случайные находки в [области] ицзиновских чисел), цз. 1. Госюе цзи яо. Сб. 1. Вып. 4; В 2 т. Тайбэй, 1968. Т. 2.
34. *Хань Фэй-цзы.* «Хань Фэй-цзы» цзицзе (Собрание разъяснений вХань Фэй-цзы») // Чжу цзи цзи чэн. Пекин, 1988. Т. 5.
35. Хуайнань-цзы (Философы из Хуайнани) // Чжу цзы цзи чэн. Т. 7, Пекин, 1988.
36. Цзю чжан суань шу (Математика в девяти книгах) // Суань цзин ши шу. Цянь Баоцзун цзяо дянь (Счетные каноны в 10-ти книгах. Критический текст *Цянь Баоцзуна).* Пекин, 1963. Т. 1.
37. Чжоу би суань цзин (Счетный канон о чжоуском гномоне) // Суань цзин ши шу. Цянь Баоцзун цзяо дянь (Счетные каноны в 10 книгах. Критический текст *Цянь Баоцзуна).* Пекин, 1963. Т. 1.
38. «Чжоу И» цзицзе. (Тан) Ли Динцзо сюань (Собрание разъяснений «Чжоу И»; состав. [танский] Ли Динцзо) // Сы ку исюе цункань. Шанхай, 1990.
39. *Чжуан-цэы.* «Чжуан-цзы» цзиши («Чжуан-цзы» с собранием пояснений) // Чжу цзы цзи чэн. Пекин, 1988. Т. 3.
40 *Fung Yu-lan.* A History of Chinese Philosophy. Princeton, 1952, 1953. Vol. L 2.
41. *Van der Waerden B.L.* Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Berlin; Heidelberg; N. Y., 1983.

КОММЕНТАРИИ

А.Н.Кричевец

Данный комментарий представляет собой результат обсуждения недавнего доклада А.А. Крушинского на семинаре «Естественный и искусственный интеллект» в РГГУ. Я не претендую даже на авторство высказываемых суждений, точнее, претендую на собственное авторство лишь в той мере или в том случае, когда остальные участники семинара с этими суждениями не согласны.

Что улавливается столь туманными, на европейский взгляд, речами китайских мудрецов? А.А. Крушинский указал на родство содержаний, улавливаемых иизиновскими гексаграммами и вообше некоторыми важными общими понятиями китайцев с тем, что в наше время именуется схемами мышления (с большей или меньшей отчетливостью ассоциируемыми с кантовскими схемами рассудочных понятий). Известное кантовское высказывание о схемах (быть может, самый цитируемый отрывок из кантовской «Критики чистого разума») гласит, что загадочность рождения схем вряд ли поддастся усилиям исследователей. Возможно, именно схемы и обобщаются гексаграммными понятиями.

Усилиями Аристотеля была создана родовидовая иерархия понятий, в которой понятия характеризуются рядоположенными признаками и эта структура стала модельной для научного и философского мышления. В обыденном же языке понятия образуются каким-то загадочным образом, с трудом поддающимся систематизации, с точки зрения логики родов и видов. По этой причине нелепость определения человека как двуного существа без перьев очевидна здравому смыслу, но не так уж и уязвима с логической стороны.

В обыденных языках понятия могут, например, связываться по сфере употребления. Этимология европейских языков, так же как и исследования речи в онтогенезе, нередко показывают фонетическую близость понятий, соответствующих вещам, участвующим в едином процессе, но не имеющим сходные признаки (связи типа «кузнец — кузница»).

Создание иерархической структуры понятий в развитии западных языков, ориентированном на научное употребление, представляет собой некоторое упрощение по способу образования понятий по сравнению даже с обыденными языками, а именно,

из языков вытесняются содержания, которые не могут улавливаться совокупностями рядоположённых признаков, т.е. структурами, допускающими максимальную строгость в обращении. Нет нужды повторять вслед за Кантом, что схемы, напротив, представляют собой наиболее трудно поддающиеся строгому обращению структуры.

Возможно, именно иерархию схем и пытаются построить китайские мыслители (возможно даже, что это им давно удалось), иерархию, основанную на каких-то аналогиях структур деятельности. Без сомнения, некоторые примеры статьи А.А, Крушинского (важнейшие: обобщение—сокращение и обобщение—приведение) наводят на подобное истолкование. Так же, на наш взгляд, не приходится сомневаться, что предложенная интерпретация нуждается в последующей разработке.

В.А. Янков

Мне кажется, что в докладе очень хорошо поставлена и освещена проблема, каким все-таки образом математики Востока, не обладая всей полнотою доказательного аппарата греков, приходили к общим результатам и осознавали их как общие.

Гениальный математик индиец Рамануджан, когда его спрашивали, как он приходит к своим результатам, отвечал, что ему сообщает их богиня сна. Он, разумеется, отшучивался, но в его словах находит выражение то несомненное обстоятельство, что математическое мышление может происходить на недискурсивном, полуинтуитивном уровне. Да и мы, погружаясь в размышления о предмете, отдаем себя волнам интуиции. Однако человек европейской традиции, придя к результату, всегда сможет сформулировать словесное доказательство, в то время как для Рамануджана как раз это и было трудностью.

Изучение таких интуитивных возможностей — дело трудное, и оно похоже на изучение восточного математического мышления.

В докладе предметом исследования является древнекитайская математика. Особого внимания заслуживает вопрос, такая же картина встречается в математике других восточных цивилизаций и не будет ли там своих цивилизационных особенностей?

Основной тезис докладчика: китайские мыслители, в том числе математики, владели искусством «модельного» рассуждения, при котором конкретный пример служил представителем всего класса. Заложенное здесь умение восстанавливать род по представителю, а равно целое по части, считалось, как показывает доклад, частью общей культуры. Речь идет именно об интуитивном навыке, позволяющем понимать и математические, и философско-этические контексты.

314

На мой взгляд, следует приветствовать исследования А.А. Крушинского. Мне лично хотелось бы узнать, как с высказанных позиций следует понимать древние китайские математические тексты (получить развернутый комментарий к ним), какое место «модельные» навыки древних математиков занимают в китайской культурной типологии и в чем их своеобразие на фоне другой восточной математики.

ОТВЕТ АВТОРА

Анатолий Николаевич чутко уловил и точно акцентировал одну из основных интенций моей статьи. Я рад, что попытка объяснения природы ицзиновских гексаграмм обращением к понятию схемы (восходящему к кантовскому схематизму рассудочных понятий) встретила понимание. Грубое, но, на мой взгляд, полезное противопоставление хорошо отрефлексированного родовидового схематизма менее понятному схематизированию по типу деятельности может высветить истинную роль «И цзина» в китайской культуре. Эта последняя в настоящее время затемнена ходячими клише о якобы сугубо мантической направленности «И цзина» (пережиток полемики со стандартным конфуцианским представлением о месте этого памятника в системе традиционной китайской науки).

Подлинный raison d'etre гексаграмм в китайской культуре заключается прежде всего в их креативности — способности выступать в качестве схем порождения образов и выстраивания различных отношений между ними.

Так, например, история цивилизации традиционно мыслилась китайцами как последовательность открытий (вроде изобретения рыболовных сетей и охотничьих силков, лемеха и сохи, лодок и весел, рынков и товарообмена и т.д.) принадлежащих «совершенномудрым правителям древности» — культуротвор-цам, причем решающую роль в этих культурных новациях играли гексаграммы, точнее, образы и их взаимоотношения, репрезентируемые той или иной гексаграммой и служащие в данном случае прооообразом, прототипом вводимых в бытие вещей и институтов — основ материальной культуры.

Вот почему так интересен анализ ицзиновского схематизма с «конструктивистской» точки зрения — имея в виду поиск тех алгоритмов, которые подразумевались гексаграммами (или с ними ассоциировшшсь) и благодаря которым они оказывались столь продуктивными.

315

При всей полезности упомянутого выше разведения двух видов схематизма некоторые сомнения все же вызывает у меня обоснованность и целесообразность их противопоставления друг другу по признаку «строгости—нестрогости» (соответственно, «научности—ненаучности»). Напротив, противополагание их по линии «простоты—сложности», «прозрачности—непрозрачности» отвечающих им алгоритмов представляется перспективным. В любом случае нельзя не согласиться с А.Н. Кричевцом в том, что поднятая тема пока находится лишь в начальной стадии разработки.

В.А. Янкову

Польщен положительной оценкой моих скромных усилий, направленных на постижение особенностей древнекитайской рациональности. В частности, я попытался наметить возможные подступы к решению старой загадки видимого отсутствия в древнекитайских математических текстах эксплицитно выраженных общих методов (при наличии числовых выкладок, очевидным образом опирающихся на эти методы).

Думается, что ключ к решению вышеуказанной загадки в выявлении рационального измерения «И цзина», являющегося логико-методологической основой традиционной китайской науки, в том числе и математики (хотя «И цзин» представляет собой многоуровневый и многоаспектный памятник, но наличие у него сколько-нибудь существенного рационального пласта — вещь далеко не общепризнанная).

Я намеренно акцентирую момент рациональности и теоретической разработанности, так как у меня вызывает известную настороженность соскальзывание в привычную дихотомию «дискурсивного» и «интуитивного (если только при этом не подразумевается фундаментальное кантовское различение дискурсивности и конструктивности, но мне показалось, что В.А. Янков имел в виду другое). Я бы не стал сводить «модельные» приемы рассуждения (искусство по части восстанавливать целое) китайских ученых древности лишь к неким иррациональным «интуитивным навыкам». Наоборот, мне хотелось на этом примере показать логико-методологическую роль «Книги перемен» как теоретической основы подобного «модельного» способа рассуждений.

Именно ицзинистика предосташшет тот теоретический контекст, который позволит в будущем дать желаемый «развернутый комментарий» к псевдопрактическим по форме и с виду теоретически выхолощенным математическим трактатам Древнего Китая. Ближайший шаг в этом направлении мне видится в анализе символического значения конкретных чисел, фигурирующих в условиях тех или иных задач «Математического девятикнижия». Ведь вполне возможно, что

316

роль этих чисел вовсе не ограничивается лишь указанием количественных характеристик материальных объектов, а — раз уж конкретное берется вместо общего — заключает в себе и отсылку к ассоциируемым с этими числами теоретическим конструкциям «И цзина».

Что касается компаративистского вопроса о своеобразии китайской математики на фоне других восточных культур, то боюсь, что это задача отдаленного будущего — дай Бог, хоть немного разобраться с теоретическими основами китайской математики.

А.В. Коганов

ЭМПИРИКО-ЭТАЛОННЫЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ*

1. Введение

Характерной особенностью современной науки стало использование математического языка для регистрации, обработки и интерпретации экспериментальных данных. Этот процесс, получивший название *математизация,* позволяет снизить уровень субъективности оценок эмпирических результатов, обеспечить адекватную передачу данных между исследовательскими центрами, оценить надежность сделанных выводов, которая никогда не бывает абсолютной в науках о природе. Но наиболее эффективна математика в становлении научного языка, обеспечивающего однозначную интерпретацию описаний объекта исследований. При этом объект может иметь много описаний и моделей, несовместимых друг с другом, но каждое описание не порождает внутренних противоречий. Весьма распространено применение математики для построения прогнозов как при использовании результатов науки в практической деятельности, так и в самой науке при подготовке новых исследований. Прогноз математической модели может уступать человеческой интуиции в учете скрытых или трудно поддающихся формулировке факторов, но зато явно указывает на причинные связи предсказания с известными фактами и принятыми гипотезами. Это позволяет использовать модель, даже в случае ошибки прогноза, для корректировки научных представлений о прогнозируемом объекте. Интуитивные прогнозы в случае ошибки совершенно бесполезны.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта: N9 01—01—00754).

317

В то же время сама математика в последние десятилетия приобрела тенденцию к самоизоляции своих «чистых разделов» от прикладных работ. Видимо, это связано с высокой сложностью современных внутренних проблем математики, решение которых требует полного сосредоточения исследователей на логической структуре формальной постановки задач. Эта тенденция носит субъективный и скорее всего временный характер, однако сегодня разрыв между прикладной и чистой математикой очень ощутим.

Все сказанное делает понятным интерес широкого круга ученых разных специальностей к математике. Оставляя математические тонкости профессионалам-математикам, представители других наук хотят понять связь математических абстракций со своими эмпирическими реальностями. И прежде всего необходимо устранить несоответствие интерпретации терминов в математике и ее прикладных областях.

В данной работе будет прослежена динамика проникновения математических описаний и моделей в некоторые области эмпирического знания. Кроме того, будет исследовано происхождение логики и современного математического языка из непосредственного человеческого опыта путем эталонизации смысла некоторых терминов и методов составления из них осмысленных конструкций. Интересно проследить также эволюцию социальной и психологической среды, в которой развивались контакты математиков и эмпириков.

2. Особенности математического мышления

Выделение математики из других наук произошло по способу конструирования объектов. Это был длительный (и еще далеко не завершенный) процесс постепенного отделения умозрительного образа внешнего мира человека от его сенсорного прототипа.

Все другие науки берут объекты, уже существующие во внешнем мире (или создают их там), и закрепляют за ними специальные термины. Свойства объектов не вытекают из тех слов, которыми они названы, а выясняются только в результате натурных наблюдений или направленных экспериментов. Слова, которыми описываются эти свойства, только фиксируют опыт оперирования с реальными телами или процессами и не являются следствием названия. По сути, описание объекта — это тоже название природных объектов, являющихся частями или свойствами исходного.

В математике сами объекты создаются из интерпретации слов и их сочетаний, входящих в словесное определение термина, называющего этот объект. Все свойства объекта следуют из этого определения и выявляются в процессе логического (в переводе с

318

латинского — словесного или законного) анализа. По сути, и это важно, логическая выкладка является в математике экспериментом над определением. К этой интерпретации логики мы вернемся позже. Пока же заметим, что подобное отношение к словам и к реальности — это уникальное свойство математики среди других наук.

Даже философы, по сути своей, безусловно, теоретики, но в своих рассуждениях все время явно или между строк обращаются к наблюдаемым и известным свойствам реалий, стоящих за терминами и именами. Если речь идет об абстрактных классах, то в качестве аргументов используются известные или интуитивно правдоподобные свойства отдельных представителей этих классов в их реальном, а не умозрительном воплощении,

Только в математике нет наблюдений вне рассуждений. Если в математическом определении объекта не учтено какое-то его очевидное свойство, то использовать это свойство в логической выкладке категорически запрещено. Например, в классической геометрии нельзя пользоваться шириной линии или площадью точки, хотя в любом воплощении эти параметры, очевидно, не нулевые. Такое положение вешей может иногда приводить к сильной неадекватности математических выводов с интуицией или опытом. Однако именно это несоответствие и будет аргументом для модификации определения. Ценность адекватной математической модели не столько в ее свойствах (которые часто известны чаранее из опыта над прототипом модели), сколько в тех факторах, которые пришлось учесть, формируя подходящее для использования математическое определение. Это и есть *существенные свойства объекта,* определяющие его наблюдаемое поведение.

Надо отметить также сильное отличие математики от искусства, где, казалось бы, тоже истинной считается выдуманная реальность, описанная словами, звуками илш изображениями. Художник предполагает за каждым человеком право на личную интерпретацию его произведения. Однозначность интерпретации противопоказана искусству именно потому, что превращает искусство в математическую схему, неизбежно упрощающую реальный мир. А творчество зрителя в художественном восприятии досказывает то, что не уместил в своем произведении автор.

Такая свобода в математике означала бы смерть этой науки. Вся ценность математики в объективности ее построений, т.е. в независимости свойств определяемых понятий от субъекта восприятия. Объективизация математических построений выше, чем у реальных наблюдаемых явлений, на которые возможны иногда несовместимые точки зрения. Каждый математик-прикладник знает, что выяснение смысла слов, употребляемых специалистами в других областях, приводит к их лавинообразному размножению

319

путем деления терминов на уточненные варианты. Достижение однозначности интерпретаций окупается буквальной вечностью математических объектов. Квадрат для учеников Пифагора означал ровно то же, что и для учеников современных школ. За две с половиной тысячи лет математическое понятие не изменилось. За это время рухнули циклопические сооружения древних, которые мы теперь наблюдаем только в руинах, потеряла облицовку пирамида Хеопса, взорвалось множество звезд, рушились империи, пересохли реки, изменился климат... Самой прочной оказалась словесная математическая конструкция.

3. Как достигается однозначность интерпретации

Распространено мнение, что уточнить интерпретацию фразы можно, добавив к ней еще несколько фраз. Против этого возражали многие писатели, считая многословие признаком бездарности и беспомощности автора. Точность достигается не большим числом косноязычных слов, а предъявлением минимального числа ясных образов. Для литературы это блестяще показал А.П. Чехов в «Чайке», описав устами персонажа ночь бликом луны на колесе телеги.

Что касается науки, то бесконечное уточнение смысла слов через другие слова может закончиться только исчерпанием словарного запаса или порочным кругом зацикливания определения слова через него самого. Слов всего конечное число, и поэтому любая цепочка уточнений приведет нас к словам, которые уже нельзя объяснить словами. Как же вводить интерпретацию самых начальных слов, выражающих базовые понятия науки? Выход только один. Смысл начальных понятий надо пояснять предъявлением реальных предметов, действий или процессов непосредственно от учителя к ученику. И если мы хотим добиться однозначной интерпретации, то требовать это надо от процесса *натурного обучения* основам математики.

Такие не определяемые, а предъявляемые понятия, обладающие свойством адекватного восприятия большинством людей, естественно назвать математическими эталонами, по аналогии с их метрологическими собратьями в Палате мер и весов. Специальное исследование, проведенное автором, позволило выявить те эталоны, которые легли в основание современной математики. Кроме того, найден ряд ранее использовавшихся, но потом признанных недостаточно однозначными эталонных понятий, которые до сих пор применяются для предварительного пояснения смысла строгих определений и формирования эффективной математической интуиции, например, интеграл — как площадь под графиком функции.

320

4. Перечень математических эталонов

1) Носитель информации (место записи теории и/или объекта) Формируется предъявлением бумаги и записи на ней или других средств занесения и хранения символов. Эталонные свойства:

1.1) носитель имеет места, где можно записывать любые символы;

1.2) этих мест достаточно для данной теории;

1.3) эти места адресуемы и упорядочены (обычно порядок линейный);

1.4) сделанная запись неизменно сохраняется во времени, но может быть изменена волевым путем по мере развития теории.

2) Алфавит теории (набор различимых и узнаваемых символов) Формируется предъявлением букв, цифр, иероглифов, особых
значков. Эталонные свойства:

2.1) алфавит состоит из набора значков, одинаково узнаваемых и различаемых всеми людьми (расширение набора допустимо только такими знаками, которые не путаются с ранее введенными, поэтому эталоном яатяется не сам знак, а весь набор знаков);

2.2) два значка либо всегда отождествляются, либо всегда различаются;

2.3) каждый значок может тиражироваться на носителе в количестве, достаточном для теории, и в форме, отождествляемой с исходной.

3) Линейный порядок (последовательность элементов)

Этот объект интерпретируется как во времени, так и в пространстве.

Его свойства похожи на аксиомы натурального ряда чисел. Имеется первый объект. За каждым объектом либо имеется следующий, либо он последний. К любому объекту порядка можно подойти от первого элемента последовательными переходами к последующему элементу.

Формируется предъявлением пространственных рядов или временных последовательностей действий и событий. Вводит слова: «раньше», «позже», «ближе», «дальше», «выше», «ниже», «больше», «меньше» и т.п. Имеются нейрофизиологические данные о врожденном характере интерпретации и понимания линейного порядка человеком.

4) Совокупность элементов

Формируется как эталон предъявлением конечных наборов предметов или бесконечных наборов точек в геометрических фигурах. Очень тесно связан с эталонами алфавита и линейного порядка.

321

Свойства конечных совокупностей включают в себя выполнимость основных операций над множествами, таких как объединение нескольких совокупностей в одну или выделение совокупности объектов, входящих сразу в несколько указанных совокупностей. Можно формировать совокупности предметов, входящих в одну заданную совокупность, но не входящих в другую. Можно формировать совокупности из совокупностей.

Однако все эти действия эталонизируются только для конечного набора предметов. Аналогичные свойства бесконечных совокупностей не являются эталонными и вводятся уже на уровне логических построений.

5) Произвольный выбор из данного множества альтернатив

Формируется выполнением ответных действий на просьбу «выбери один предмет из этого набора». Имеется прямая связь с эталоном совокупности, но важным собственным свойством является проявление волевого фактора в действии, происходящем в условиях неопределенности задания. Например, реакция на просьбу взять красный шар из набора разноцветных шаров не входит в формирование произвольного выбора (это относится к эталону цветового алфавита). А вот задание «взять один шар» из того же набора уже включает принятие волевого решения.

6) Шаг рассуждений или построений

Формируется демонстрацией вычислений, геометрических, конструкторских или логических построений как элементарный этап этих действий. В последнее время возникла интерпретация через шаг алгоритма или команду программы компьютера. Этот эталон связан с интуитивным образом времени. К существенным свойствам этого эталона нужно отнести требование предварительной подготовленности тех объектов, которые требуются для выполнения шага. Кроме того, шаги образуют линейный порядок, подготавливая условия для выполнения последующих шагов.

7) **Подстановка/таблица/отображение**

Формируется демонстрацией замены части текста на другой текст или предмета на предмет по описанным в форме таблиц правилам. Тесно связан с носителем информации и алфавитом. Все вычисления, логические правила и операции вводятся через этот эталон.

8) Тиражирование математического объекта

Формируется демонстрацией копий геометрических структур, графических схем, текстов описаний математических объектов, наглядных пособий и т.п. Эталонным яаляется сохранение в копии всех математических свойств оригинала при различимости копии и оригинала. Кроме того, повторная копия от копии и раз-

322

ные копии оригинала признаются математически равноценными и попарно различными. Над разными копиями можно производить независимые действия, которые влияют на свойство только одной копии. Измененная копия перестает быть копией исходного объекта, приобретая новые математические средства.

9) Обязательное действие в описанной ситуации.

Предполагает обучение распознаванию ситуаиии по описанию и запрет на все действия, кроме предписанного. Кроме того, имеется эталонная активащция действия или запрет на бездействие. Этот эталон включает в себя и понятие запрет. Обучение обычно ведется на играх (обязательные ходы) и использует более ранние элементы воспитания детей.

10) Заучивание текста, действия или образа человеком

Этот эталон независим от остальных, хотя, может показаться, что он только частный случай записи на носитель. Фактически в математике только заученная человеком информация может играть активную роль. Относится сюда и обучение эталонам.

11) Дополнительные эталоны

Введенных эталонов 1—10 достаточно, чтобы построить современный математический язык. Однако имеются и другие эталоны, которые сегодня используются в интуитивном мышлении математика, причем для построений, выполненных с помощью этих дополнительных эталонов, существуют стандартные средства перевода на язык их не использующий. Однако как эталоны они независимы, и такая редакция связана с ограничением на использование их свойств при «современном уровне строгости» в математике. Однако эти дополнительные свойства часто оказываются очень удобными для усиления человеческой интуиции при постановке и решении задач. К таким дополнительным эталонам нужно отнести:

11.1) эталоны простейших геометрических форм (круг, квадрат, отрезок прямой, треугольник, угол, пересечение отрезков);

11.2) геометрические преобразования на плоскости типа сдвига, поворота, совмещения точек фигур при сдвиге, построения циркулем и линейкой;

11.3) отождествление интеграла функции с площадью под ее графиком, а дифференциала — с касательной к графику;

11.4) изображение связей стрелками на графе;

11.5) понятие поощрения и наказание при описании цели действия. Само понятие цели и успеха также является вспомогательным эталоном, однако здесь трудно говоришь о строгой однозначности интерпретации, если не введена система поощрений.

323

Имеется ряд других наглядных приемов, обычно не приводящих к серьезным ошибкам, но помогающих почувствовать математическую задачу.

Нижеследующие эталоны не используются в математической логике непосредственно, но совершенно необходимы математику на семантическом уровне формальной логики. Без них математика не могла бы быть понята.

12) Пример для общего понятия (частный случай)

Формируется демонстрацией конструктивных примеров объектов, свойства которых удовлетворяют всем требованиям словесного определения класса объектов. При обучении используются задачи на построение таких примеров для заданных определений.

Важным эталонным свойством является неоднозначность перехода от общего определения к частному объекту. Другое эталонное условие — наличие четко сформулированных свойств, определяющих класс. На стадии обучения возможна игра с использованием побочных смыслов слов, входящих в определение.

Этот эталон предшествует логике и фактически лежит в основе понятия интерпретации математической теории.

13) Обобщающее логическое определение для набора объектов

Формируется обучением выделять общие признаки у разных конструктивных или реальных объектов. Важным эталонным свойством является неоднозначность перехода от набора объектов к общему определению. При этом свойства определяемого класса зависят только от определения, а не от исходных объектов. В частности, при изменении определения могут меняться некоторые примеры объектов класса, но исходные объекты при правильном определении всегда являются примерами. Указанные неоднозначности означают, что эталоны примера и определения не являются взаимнообратными операциями, но психологически они взаимнодополнительны.

14) Введение эталона

Имеется еще не вполне сформированный *Эталон Введения Эталонного Понятия.* Ближе всего к нему в современной науке подошли, видимо, метрологи и педагоги. Но в математике он никогда не использовался в явном виде. Главным признаком эталонности термина является адекватность его трактовки разными людьми. Это проверяется совпадением действий и их результатов при выполнении разными людьми инструкций, в состав которых входит этот термин. При обнаружении неадекватности необходимо обратить на нее внимание обучаемых и дать дополнительные разъяснения на уровне словесных описаний или демонстрации с использованием пособий и тренажеров. Последнее очень распро-

324

странено в математике при обучении геометрическим и программистским терминам.

Можно только предполагать, что расширение прикладного использования математики сделает актуальным систематизацию приемов эталонизации терминов. Видимо, эта область всегда будет относиться к метаматематике.

5. Как определить саму математику

Попыток определения математики в истории науки было множество. Была даже попытка сделать обязательным для всех и всегда определение Ф. Энгельса: «Математика — это наука о количественных соотношениях». По иронии истории к этому времени логик Дж. Буль ввел в обиход совершенно неколичественную алгебру высказываний, за которой последовали многочисленные разделы математики, далекие от чисел.

Отражением сложности этопо вопроса явилась позиция К.Ф. Гаусса, предложившего считать математикой то, что интересует выдающихся математиков. Хотя такое определение, конечно, было шуткой, в нем заложен большой потенциал. Математика определялась не логически, а эмпирически, с использованием самих математиков в роли «измерительных приборов».

Физик-теоретик Р. Фейнман неоднократно указывал, что есть хорошая и плохая математики, причем используются обе, потому что природа не позволяет все свести только к идеальным постановкам задач. В «плохой математике» возможно введение дополнительных постулатов по ходу рассуждений, исходя из нестрогих аргументов, не вытекающих из исходных определений, но имеющих обоснование в прикладной интерпретации теории. Самое неприятное, что эти постулаты не учитываются в других местах той же теории. Такие рассуждения — не редкость в физике и технике. Иногда они поразительно эффективны. Но если дополнительные постулаты не могут быть введены как общие аксиомы для всей теории, математической модели не возникает, и их следует рассматривать только в качестве правдоподобных пояснений в подгонке результата под заранее известный ответ.

Думаю, не будет большой натяжкой считать математической любую теорию, построенную на использовании только эталонных терминов, производных от них определений и эталонного логического вывода. Однако эталонизация теории не означает эталонизацию мышления математиков-людей. Поиск самих аксиом, определений, теорем и их доказательств — дело глубоко творческое и неординарное.
325

В заключение раздела приведу спонтанное высказывание одного школьного учителя математики; *математика — это то, о чем людям удалось договориться.*

6. Как строятся математические модели

:Последовательное построение современной математической логики из введенных эталонов не входит в задачу данной статьи, и автор предполагает знакомство читателя с понятиями правил вывода, поля вывода, логических операций и аксиоматики теории. Существенным для понимания будет тот факт, что на каждом шаге логического вывода в традиционных логиках выбор очередного правила вывода и его операндов осуществляется произвольно из всего наличного на этом шаге набора. На каждом шаге вывода набор правил вывода остается неизменным, но в поле вывода возникают новые объекты, к которым можно применять эти правила.

Общий взгляд на нестрогое описание задачи состоит в том, что в процессе вывода на носителе будут возникать недопустимые, с точки зрения принятой логики, сочетания объектов. Задачу *предматематики* теперь можно сформулировать так: каким образом следует менять систему аксиом (исходных объектов) при обнаружении нестрогости модели? Желательно не потерять те теоремы, которые можно получить из прежних аксиом в допустимых состояниях. Уже в этой очень абстрактной формулировке видно, что при появлении нестрогости приходится отказываться от идеи произвольного выбора очередного правила вывода и выполнить какие-то обязательные «профилактические» действия. Кроме того, следует ожидать неоднозначности возможных модификаций теории, что означает разветвление теории на несколько альтернативных вариантов. Эта *бифуркация теории* на шаге проявления нестрогости модели соответствует ветвлению функции истинности на множестве возможных утверждений о свойствах моделируемого объекта. При моделировании природных явлений такое расщепление обычно отражает только степень нашей неосведомленности и предполагает в дальнейшем экспериментальное уточнение модели. Но при изучении произведений искусства именно и этом разветвлении интерпретаций и может заключаться главная информация.

7. Модификация математической модели

Можно выделить два подхода к модификации теории — интуитивный и методический. Интуитивный подход содержит только один явно сформулированный шаг: при обнаружении в поле вывода нестрогости (недопустимого сочетания записей) прекра-
326
тить дальнейший логический вывод. Далее следует совершенно не эталонная рекомендация искать новые аксиомы, но для каждой предложенной аксиоматики требуется возобновить вывод в эталонной логике. Этот путь очевиден, но его нельзя считать эталонным процессом в силу неопределенности способа поиска аксиом.

В методическом подходе регистрация строгости теории приводит к изменению поля вывода по определенным правилам, не допускающим разночтения. В результате формируется новая аксиоматика и система определений, возможно, в нескольких вариантах, а также новые ограничения на использование правил вывода, позволяющие в дальнейшем избегать той же самой нестрогости. При появлении новой нестрогости процесс повторяется. Такой метод будет эффективен, если удастся наращивать теорию, не теряя того, что получено до возникновения нестрогости. В этом случае мы уже инеем модель предматематики на эталонном уровне. Однако следует понимать, что никакой метод не даст всего, что можно сделать творческим путем, и за эталонность действий придется платить упущенными вариантами теории. В то же время методический путь интересен тем, что для борьбы с нестрогостью используется сама логика и формализация становится предметом изучения.

Один на вариантов ветвящейся логики для правил вывода логики предикатов и формул предложен в [1], [2], [7]. Анализ показал, что этот метод дает тот же набор теорем, что и метод границ, допускающий доказательство теорем только без прохода через противоречие. Но в результате вывода теоремы располагаются по теориям, в которые введены новые аксиомы и в которых уже нет противоречий. Одна теорема может оказаться в нескольких теориях, вообще говоря, несовместимых друг с другом.

8. Потенциал эталонного порождения множеств

В теоретической физике часто возникает вопрос о возможности порождения бесконечных множеств из конечного начального набора объектов. Например, рассматривается возможность порождения всего пространства—времени из конечного числа взаимодействий частиц. Анализ этой постановки задачи, привел к утверждению, что такие конструкции всегда неявно подразумевают наличие некоторого бесконечного ресурса, скрытого за неэталонной терминологией.

Теорема. *Эталонная конструкция множества, построенного* с *использованием только конечного числа N эталонных исходных объектов, может содержать не более* 1,5N *элементов.*

Для доказательства достаточно заметить, что построение каждого нового объекта требует минимум двух эталонных операций:

327

выбор из существующих объектов подмножества, как конструкта нового объекта и размещение его на элементе носителя теории. Сами шаги вывода тоже являются ресурсом теории, поэтому на формирование нового объекта расходуются три элемента ресурса: два шага и одно место. Всего *N* исходных объектов могут породить *N/3* новых объекта. Сумма соответствующей геометрической прогрессии равна 1,5N, что и оценивает сверху потенциал эталонного порождения множества.

Проведенный выше анализ ставит вопрос о правомерности рассмотрения бесконечных множеств в рамках эталонной логической теории. Начальный эталон совокупности объектов предполагает либо ее конечность, либо буквальную обозримость неопределенно большого числа точек в геометрических фигурах. С другой стороны, эталон носителя информации в любом воплощении допускает только конечное число мест. Фактически это означает, что бесконечное множество не может быть непосредственным эталонным объектом. Проблемы, порожденные теорией множеств Г. Кантора, связаны именно с тем, что множеством считалась любая формально описанная конечным числом признаков совокупность объектов, определения которых удовлетворяют принципу исключенного третьего. Оказалось, что такие описания сами по себе не всегда эталонны и допускают неоднозначные трактовки.

Парадоксы теории множеств, построенные Б. Расселом, основаны на одновременном использовании разных трактовок одного описания. Однако исторически первым был парадокс Г. Кантора о самом большом кардинале, за которым должен следовать еще больший кардинал. Он также связан с неэталонностью операции тиражирования объектов в бесконечном числе. Формально можно образовать множество всех существующих множеств. Это самое большое множество уже содержит все возможные объекты, и добавить к нему нечего. Но нет запрета на тиражирование, и это позволяет столь же формально получить копии всех подмножеств этого множества и образовать из них новое множество. Диагональным процессом доказывается, что мощность такого множества всегда больше, чем исходная, если число элементов исходного множества больше двух. Таким образом, неэталонное применение операции тиражирования порождает противоречие. Это тиражирование в классической теории множеств неявно присутствует в аксиоме Цермело.

С другой стороны, даже минимальный бесконечный тип - множество всех натуральных чисел — предполагает бесконечный носитель информации, который не входит в исходную эталонизацию. Это наводит на мысль, что каждое увеличение мощности множества сверх максимально постулированного в теории на предыдущих шагах требует новой независимой аксиомы существования. Это относится даже к конечным числам, что хорошо известно математикам-вычислителям, постоянно работающим под угрозой переполнения памяти компьютера. С другой стороны, нет никаких оснований запрещать объединение в множество объектов, каждый из которых имеет определение через базовые эталоны. Последнее обстоятельство следует рассматривать как разрешение на введение аксиомы существования таких множеств и их мощностей.

Таким образом, эталонизация множеств требует кроме общей аксиоматики теории еще и отдельного постулата существования для каждой из конкретно рассматриваемых мощностей, причем вводить ее надо как мощность множества предварительно строго определенных объектов. При таком подходе в теории, основанной на конечном логическом выводе теорем, может быть рассмотрено только конечное число разных мощностей множеств. Это очень близко подходит к теории типов Б. Рассела, но фактически требует еще большей дисциплины. Парадоксы при таком подходе, вероятно, не возникают, но по ходу рассуждений может потребоваться шаг введения нового постулата существования нужной мощности. Следовательно, эталонная теория множеств может существовать только в форме ветвящейся аксиоматики.

Если требовать строгого определения линейного порядка всех введенных мощностей, то применима теорема П. Коэна о непротиворечивости теории при условии непротиворечивости натуральной арифметики. Наличие такой упорядоченности следует проверять форсированной операцией, применяемой после каждого введения нового постулата мощности. Эта операция должна быть эталонно определенной процедурой, которая устанавливает место новой мощности в ряду мощностей, ранее введенных в теорию. Если эта процедура окажется неприменимой к новому множеству, определяющему вводимую мощность, то его следует удалить из теории.

Покажем, как исчезает парадокс Г. Кантора при эталонном подходе. Термин «Множество всех множеств» (МВМ) в эталонной теории может означать только множество всех *введенных ранее* множеств как объектов, определенных на поле вывода теории, иначе будет нарушено требование эталонности описания всех элементов вводимого множества. Но тогда множество его подмножеств (ПМВМ) будет состоять из новых объектов, определяемых, например, как бинарные функции на МВМ. Поскольку мощность ПМВМ выше всех мощностей ранее введенных множеств, то требуется введение аксиомы существования носителя для него. Но противоречия уже не возникает, так как новое множество введено в поле вывода после формирования МВМ, а повторное введение множества всех множеств будет относиться уже к новой аксиоматике и отлично от МВМ.

В заключение раздела дадим ответ на вопрос, что фактически происходит в теориях, порождающих бесконечные пространства из конечного числа объектов. Как показано выше, само существование нужной мощности приходится постулировать. Однако для этого необходимо предварительно указать эталонный формат записи каждого элемента формируемого множества. Именно такой формат, обычно в виде формул некоторой алгебры, и предлагается в качестве «порождения точек пространства». Можно сказать, что эти теории не порождают новую бесконечность, но *форматируют* постулированную.

9. Приоритетная эталонизация

Природа большинства начальных эталонов математики в настоящее время не выяснена. Можно предположить физиологическую основу для некоторых эталонных понятий, таких как линейная упорядоченность, осуществимость произвольного выбора, и др. Однако в ряде случаев можно говорить об особой эталонизации, не имеющей объективной основы.

Наиболее ярко необоснованность эталонизации видна в выборе стандартных имен для новых объектов теории. Такие имена после первой публикации становятся обязательными к употреблению и изменить их можно только сложной процедурой оповещения всех заинтересованных лиц и внесения поправок в основные учебники. Еще большей инерцией обладают алфавиты основных языков, которые практически невозможно существенно изменить. Математические обозначения основных операций не меняются столетиями. Их необязательность видна из того, что некоторые операции веками имеют два и более обозначений (например, производная функции, скалярное произведение векторов и даже простое умножение чисел).

Этот тип эталонов роднит математику с другими науками, где названия и обозначения столь же произвольны. Достаточно вспомнить имена созвездий в астрономии. В математике эти эталоны не являются базовыми, поскольку их можно синтезировать на носителе из алфавита, а знаки входят в эталонный алфавит. Но они совершенно необходимы для обеспечения научного общения внутри математики и с представителями других областей. Важность этой функции имен и знаков отмечена даже в законодательстве, охраняющем авторские права на эмблемы товаров и организаций. В математике адекватность имени объекту обеспечивается *эталонной подстановкой определения объекта вместо имени* при логическом выводе. Во всех остальных видах деятельности людей это соответствие специально не определяется, а является основным смыслом используемого языка.

Установление таких эталонов связано с динамикой развития и носит исторический характер. Общепринятыми именами и обозначениями новых объектов обычно становятся первые предложенные варианты. Однако из них выбираются наиболее выразительные и социально подходящие. Выявление законов установления этих эталонов — задача, скорее, психологии и социологии. Но важность их для математики неоспорима. Поскольку для их формирования главным фактором является приоритет, в дальнейшем будем называть их *приоритетными эталонами,* а процесс их становления — *приоритетной эталонизацией.*

Особую роль приоритетные эталоны играют в кибернетике и информатике. Алгоритмические языки фактически являются такими эталонами. Из сотен изобретенных языков программирования практика отобрала около десятка, оказавшихся удобными для программистов. Другой класс приоритетных эталонов составляет дизайн интерактивных систем. Попытка отказаться от двухоконного интерфейса в системе Windows в пользу более развитого многооконного вызвала неудовольствие пользователей, и в систему ввели двухоконные элементы. Этот пример показывает, что в приоритетной эталонизации имеются существенные объективные компоненты, которые пока учитываются чисто эмпирически. Однако важную роль играет и активность в распространении продукции фирмы-изготовителя, успевающей навязать свой стандарт большому числу пользователей. Не обходится без парадоксов: в современных алгоритмических языках операция присвоения значения переменной имеет около десяти разных обозначений.

Вероятно, некоторые принципы построения базовых эталонов возникли путем выделения объективных факторов в приоритетной эталонизации. Например, все алфавиты построены как комбинации стандартных элементов типа крючков, петель, кружков, крестов и точек.

Одним из способов находить логические эталоны может оказаться выделение общих понятий в разных языках, особенно древних и у мало общавшихся народов. У всех народов имеются понятия «прямой», «кривой», «близко», «далеко», «быстро», медленно». Это подсказка: порядок и метрика близки к первичным эталонам.

Можно заключить, что ранняя стадия эталонизации понятий — эго приоритетная эталонизация, позволяющая постепенно выделить объективно предпочтения человека как биологического вида в каждой области его деятельности.

10. Время в математике

Как процесс построения теорий и накопления знаний и методов математика всегда была связана с временем. Кроме того, все математические методы подразумевают последовательную выкладку
331
или конструкцию во времени. Тем не менее от Евклида и Аристотеля идет традиция изгнания из математических теорий понятии времени и его явного упоминания. Это было связано с представлением о времени как об эфемерной составляющей нашего мира, которая никогда не повторяется. Математические же теории строились навечно. Даже аксиомы считались самоочевидными фактами, навечно установленными богами. Эта традиция перешла в христианскую Европу через канонизацию Аристотеля.

Алгоритм измерения отрезков Евклида явно содержал развернутую во времени последовательность действий: *если* единичным отрезок не уложился в измеряемом отрезке целое число раз, *то* его надо уменьшить в десять раз и продолжить прикладывать к остатку. Но соответствующая теорема даже не содержала намек на время: *каждый отрезок представим десятичной дробью через единичный.*

Такое противоречие методов и формулировок сохраняется в чистой математике до сих пор и не вызывает протестов как профессиональный стиль. Отдельно формулируются процедуры, а отдельно теоремы, утверждающие существование этих процедур. Как правило, сама конструкция процедуры при этом составляет доказательство теоремы. Эта забавная ситуация не пережила вторжения программирования в вычислительную практику. Программисты прямо поставили вопрос о реальном времени счета, а теоретикам пришлось задуматься, что получится быстрее: вывести аналитическую формулу или построить алгоритм.

К этому времени вера в богоданность и самоочевидность аксиом сильно пошатнулась. Аксиомы стали, скорее, прагматической потребностью теории, чем безусловными началами знания. Кроме того, античное представление об уникальности момента времени сменилось осознанием однородности свойств всех моментов. Если воспроизвести совокупность причин, то воспроизведется и следствие. Математика приобрела форму условных утверждений, не претендующих на абсолютность выводы, но только на его обусловленность перечисленными свойствами. Например, теоремы геометрии верны только при условии истинности аксиом данной геометрии. Это также способствовало реабилитации времени в математике.

Другой путь проникновения времени в математическую парадигму — потребность оценить безошибочность вычислений и доказательств. Увеличение сложности вывода

теорем и еще более возросшее число вычислительных операций сделали невозможным непосредственную проверку. Вероятность ошибки проверяющего стала выше, чем у проверяемого, поскольку проверка требует большего числа шагов. В вычислительной практике прочно обосновались статистические методы тестирования программ, явно ис-
332
пользующие время. Правильность теоретического вытвода, содержащего десятки тысяч элементарных предложений, все чаще проверяется голосованием по группе экспертов в данной области. Фактически приходится говорить не о правильности доказательства, а об установлении временного статуса необнаруженности ошибки. Динамика явно вошла в математику.

Возникла также область математики, оценивающая надежность вычислительных средств. По сути, нестабильность работы аппаратуры (так же как и ошибка человека в логико-вычислительной выкладке) означает неэталонность выполняемых операций. Борьба с этим тоже ведется средствами математической статистики тестирования.

В программирование время входит вместе с его физической мерой. Оценивается метрологическая длительность» отдельных операций и их цепочек, возможных при выполнении программы. Для среднестатистической частоты операций введена даже новая единица измерения — один флопс (flops). Отличие от традиционных герц заключается в недетерминированной длительности одной операции. Таким образом, информатика использует математические эталоны совместно с метрологическими. Но в других областях математики до этого не дошло.

Фактически время проникает и в структуру моделей. Метрологическое время обычно вводится в модель как числовой параметр, имеющий стандартную интерпретацию через показания эталонных часов. Этот прием, вероятно, впервые был сформулирован Декартом, предложившим использовать числовые прямые для всех измеряемых переменных. Тем самым время заменялось на характеристику, имеющую пространственную интерпретацию, проблемы с обратимостью времени в теоретической механике свяаны именно с этим допущением.

Но не всегда эталонное метрологическое время адекватно отражает ритмику и длительность моделируемого процесса. Приложения часто требуют использования событийного времени. Время измеряется числом специально распознаваемых и регистрируемых событий. Эти события отражают специфику процесса в отличие от внешних тактов универсального метрологического времени. Это могут быть особые воздействия на моделируемый объект или его реакции. Имеется много работ, в которых показано, что в собственной событийной шкале времени несколько процессов имеют одинаковую модель, хотя очень разнятся в универсальной мере времени. Примером могут служить процессы размножения различных видов животных, имеющие близкие описания, если за единицу времени взять одно поколение.

Введение такого времени требует от математика разработки *эталонной логико-измерительной процедуры распознания и регистра-*
333
ции событий. Использование субъективных способов распознания событий или их регистрации в модели может порождать серьезные неоднозначности оценок и прогнозов, лишающие модель ценности. Событийные шкалы времени могут сильно разниться по своим свойствам даже для одного объекта моделирования. Формализованные методы распознавания составляют отдельное направление в современной кибернетике. Их анализ выходит за рамки данной статьи, но стоит остановиться на различных способах эталонной регистрации событий. Именно с ними связаны главные различия событийных шкал времени.

10.1. Потенциально равномерные событийные шкалы

Если распознанные события последовательно записываются на носитель информации, а мерой времени считается количество таких записей, то равномерность шкалы времени по метрологическому эталону зависит от статистических свойств самой последовательности событий.

При статистической стационарности процесса возникновения эталонно распознаваемых событий возникает шкала времени, равномерная по метрологической на больших интервалах длительности, за которые происходит в среднем достаточно большое (по критериям сходимости статистики) число событий. Однако на малых длительностях возможны флюктуации темпа хода событийных часов.

Если сама последовательность событий не стационарна по метрологическому эталону времени, то соответственно ведет себя и событийная шкала времени. Например, песочные часы пригодны для измерения номинальных метрологических длительностей периода полного пересыпания песка. Однако промежуточные длительности измеряются метрологически не равномерно по числу пересыпавшихся песчинок, поскольку давление на нижние песчинки верхней колбы убывает по мере уменьшения в ней песка. Таким образом, событийная шкала замедляется относительно эталона. Если мерить время развития социума числом технических изобретений, то событийная шкала даст значительное ускорение в периоды НТР и замедление в периоды интеллектуального упадка.

10.2. Шкалы с потенциально нарастающей разрядкой

Если регистрируются не все распознанные события, а имеется критерий отбора, то число зарегистрированных событий может замедляться относительно метрологического эталона даже при стационарности процесса их возникновения. Примером таких шкал является регистрация рекордов, т.е. событий, имеющих некоторые количественные показатели, превосходящие все ранее зарегистрированные. Если эти показатели распределены в эталонном метрологическом времени стационарно, то метрологические интервал dl между регистрациями начинают неограниченно возрастать: если $F(x)$ — функция распределения показателя $x(i)$, то

$$E\{dt(N+1)\}=1/(1-F(max\{x(i)\mid i=1,...,N\})).$$

10.3. Циклические событийные шкалы времени

Эти шкалы возникают при учете событий, имеющих числовые характеристики $x(i)$, $i = 1, 2,...$ Если их суммировать в циклическом счетчике

$$T(N) = \mathrm{Summ}\ \{x(i)|\ i = 1,..., N\}\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{M}),$$

то на значение событийного времени T влияют только последние события, произошедшие после последнего сброса счетчика. Выбор модуля цикличности М надо выбирать, исходя из содержательных соображений, чтобы не потерять еше не устаревших данных.

10.4. Событийные шкалы с убыстрением

Такие шкалы возникают при стационарном потоке событий в метрологическом времени, если одно событие может быть многократно учтено в счете времени. Модельным примером такой шкалы может служить регистрация всех событий с прибавлением к счетчику числа всех записанных событий при каждом распознавании:

$$T(N) = T(N-1) + N; \text{ тогда } T(N) = N(N+ 1)/2.$$

Иногда использование шкал этого типа бывает осмысленным, например, при учете цены сделок в расчете национального дохода. В цену каждой новой сделки входит цена ей предшествующих.

10.5. Шкалы с забыванием событий

Такие шкалы возникают, когда события оцениваются с точки зрения их причинной связи. При этом учитывается только совокупность событий, которая достаточна для логического порождения текущего состояния объекта.

Моделью подобной регистрации может служить формирование, в качестве состояния множества A всех распознанных событий x с учетом момента i появления каждого из них и с отбрасыванием прежнего события при его повторении. Время T измеряется по старшему из зарегистрированных событий. Если распознана последовательность событий $X=x(1) \ldots x(N)$, то

$$A(N) = \{(x,i) \mid i = \max\{ j \mid x(j) = x \text{ ; } 1 <_{=} j <_{=} \mathrm{N}\}, x \text{ in } X \};$$

$$T(N) = max\{ N\text{-}i \mid (x,i) \ in \ A(N)\}.$$

335

Если поток событий бернуллиевски стационарен с вероятностью $f(x)$ для события x, то средний возраст события x до его замены на двойника в состоянии A равен $1/f(x)$ независимо от длительности наблюдений N.

Подобные шкалы, если пользоваться ими некритически, могут порождать иллюзии сжатия исторического времени. Дело в том, что реальная причина некоторых характеристик текущего состояния системы может заключаться не в последней подходящей для этого причине, а в том, что произошло раньше. Такие шкалы бывают прагматически удобными, если задачей является компактная запись текущего состояния путем логического сжатия информации. Например, ими пользуются при создании учебников, не ставящих задачей полный исторический обзор. Путь ученика к последним достижениям значительно короче пути предшественников. Но очень опасно принимать длину учебного курса за длину реально пройденного пути. Такие ошибки привели в последнее время к созданию спорных историографических концепций.

Сейчас значительно возрос научный интерес к эволюции самих математических теорий в реальном историческом времени. Здесь существенно учитывать как событийный поток математических открытий, так и логику эволюции «строгих» понятий, методов их введения в теорию. История математики становится частью математики и в какой-то мере объектом ее исследования. Возможно, в будущем учебники будут предлагать несколько альтернативных введений математического объекта с разъяснением исторического смысла каждого варианта. Интересно, что в работах по искусственному интеллекту одним из эффективных методов стал режим совета человеку на основе ранее накопленного опыта в текстовой форме без использования собственно математической модели. Наверное, полезно было бы ввести и в математические учебники содержательные неформальные цитаты классиков науки. Необходим также анализ тупиковых напраа1ений и существенных ошибок, преодоленных наукой. Таким образом, время непосредственно войдет в математику.

11. Динамика математических приложений

В этом разделе статьи будет рассмотрен процесс эталонизации знаний в нескольких областях науки. Будем считать, что эталонизация начинается с письменной регистрации фактов и знаний, хотя язык такой регистрации может быть далек от эталонности. Дело в том, что сама запись является эталонным объектом, а смысл ее может уточняться последующими записями.

336

За основу анализа динамики эталонизации науки примем ключевые этапы изменения ее информационной структуры. Автор сознает некоторую субъективность выбора этих этапов, однако эталонизация этого понятия в настоящее время, видимо, невозможна. В качестве компенсации на схемах предлагается подробный перечень этапов, что позволит читателю внести изменения по своему усмотрению.

На схемах 1, *2* , 3 показаны распределения этапов эталонизации понятий для физики, биологии и информатики. Все эти схемы указывают на ускорение процесса в двадцатом столетии, и его ступенчатый характер в прошлом. Характерна очень долгая фаза начальных описаний объектов науки, приходящаяся на период Древнего Египта. Все диаграммы имеют стагнацию в период Средних веков. Однако это было время распространения в Европе достижений эллинского периода бурного развития науки, что и породило в конечном счете эпоху Возрождения и подготовило современный скачок. Обращает на себя внимание сравнительно длительный описательный период в биологии, сменившийся особенно крутым скачком в двадцатом столетии.

В целом эти диаграммы показывают ступенчатый характер внедрения математики в приложения. За периодами бурного роста следуют длительные интервалы освоения достигнутого уровня.

На начальном этапе математизации реальные объекты используются для формирования логических понятий. В Древнем мире так возникла геометрия и абстрактное понятие числа. В Новое время — понятия графа, топологии, автомата и сетей. На более зрелом этапе в каждой науке начинается обратный процесс: математические понятия, полученные логическим анализом моделей, воспринимаются как новые реальные характеристики природных объектов (ускорение, энтропия, информация, энергия, импульс, кривизна пространства—времени, струны, калибровочный класс частиц и т.п.)

Крутые скачки диаграмм математизации связаны с созданием относительно изолированных научных центров на базе общественной поддержки. В древности так возникли школа Пифагора, финансируемая римским городом Рене, и несколько академий, поддерживаемых Империей. В Новое время скачок совпал с созданием систем учебных и исследовательских институтов, как государственных, так и на базе фирм.

Плотная серия новых этапов в эти периоды не означает замену ступенчатого развития на монотонное. Дело в том, что такие этапы, как правило, непоследовательны в причинно-следственном смысле, а представляют собой параллельную серию прорывов в разных направлениях. Каждый такой прорыв порождает длительный период исследовательской работы, без новых этапных изменений.

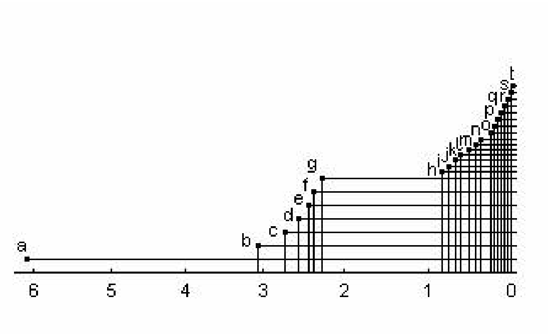
Эта закономерность хорошо видна на примере открытия Архимедом десятичной записи чисел. Он использовал ее для доказательства отсутствия самого большого числа. Числа записывались камнями, лежащими в корзинах, которые были поставлены в ряд. Таким образом, от любого натурального числа можно было породить сдедующее, а роль нуля играла пустая корзина. Несмотря на очевидный прорыв, изобретения десятичной арифметики не последовало. Надо было догадаться еще до таблиц сложения и умножения. На это ушло в Европе более полугора тысяч лет. Идея родилась в Индии, возможно, не без влияния европейской науки, и вернулась в Европу через арабских ученых уже в эпоху раннего Возрождения.

Еще выразительнее история двоичной системы исчисления. Ее открыл Пифагор в форме разложения любого числа по степеням двойки. Ряд степеней двойки был объявлен священным. Однако создания двоичной арифметики (гораздо более простой, чем десятичная) за этим не последовало. Ее особая роль была осознана лишь в двадцатом столетии, когда выяснилось, что она обеспечивает наибольшую надежность автоматических вычислений. Столь больной период освоения открытия, видимо, связан с начальной мистической установкой нумерологии, где главной считалась религиозная суть числа, а вычисления были делом низменным и второстепенным.

Однако система государственной поддержки в социумах, где наука носила жреческий характер, порождала длительную консервацию основных представлений и

методов. Примером такой застывшей научно-религиозной системы может служить Древний Египет или Вавилон. Достигнув на ранних этапах высокого уровня, они тысячелетиями потом поддерживали его, запрещая изменения. Иосиф Флавий цитирует египетского историка, рассказывающего об изгнании с позором жреца, пытавшегося ввести в храмовый обиход солнечные часы. Пифагор был вынужден бежать из Греции в зарождающуюся Римскую империю под страхом смерти после попытки заниматься наукой в дельфийском храме. Его знания вернулись туда только век спустя с учениками, образовавшими Пифагорейское братство после разгрома школы (возможно, по политическим мотивам). Похожие явления можно было наблюдать при столкновении религиозных и научных интересов в эпоху Возрождения (инквизиция) и даже в Новейшее время (изоляция Лобачевского за неклассические научные взгляды, изгнание Эйнштейна из Германии в период фашизма, борьба с генетикой и кибернетикой в сталинский период). Вероятно, прогресс требует еще и демократизации знаний, их прямой и эффективной связи с общественной практикой – ремеслами, хозяйствованием и политикой.
338

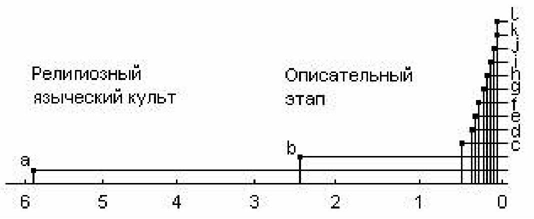
Этот анализ не затрагивает развития внутриматематических понятий и методов. Логика развития чистой математики несколько отлична от прикладных дисциплин, однако эталонная структура определений и вывода в полной мере присуща всей математике.



тыс. лет назад

Схема 1. Этапная динамика математической физики

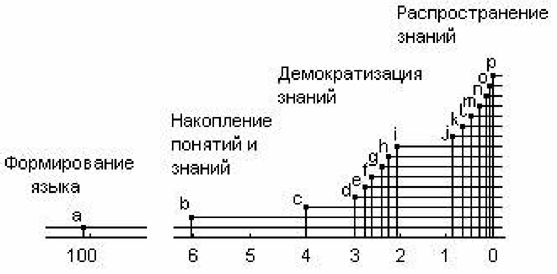
a— календарь (Египет); b— нумерология (каббала); c— эмпирическая геометрия и арифметика (Пифагор); d— логика (Платон); e— аксиоматика (Евклид); f— эмпирическая механика, пропорции (Архимед); g— механическая модель космологии (Птоломей); h— гелеоцентрия (Коперник); i— координаты (Декарт); j— кинематика (Галилей); k— динамика (Ньютон); 1 — электричество (Кулон, Гальвани, Фарадей); m— энтропия, термодинамика (Клаузис. Фурье, Больцман); n— энергия, импульс, инварианты (Гамильтон); o— кванты (Планк); p— релятивизм (Эйнштейн); q— тензоры, кривизна пространства—времени (Эйнштейн, Минковский, Гильберт); г— квантовая электродинамика (Фейнман); s— калибровка поля; t— струны, суперсимметрия



тыс. лет назад

Схема 2. Этапная динамика математики в биологии

a— культовое описание животных (Вавилон, Египет, Индия); b— научное описание наблюдаемых свойств животных и растений (Аристотель); c— электрофизиология наблюдения и измерения (Гальвани); d— систематика (Линней); e— эволюционная теория (Дарвин); f— генетика (Мендель); g— инстинкты; h— условные рефлексы (Павлов); i— нейрофизиология; j— теория автоматов и сетей Петри; k— расшифровка хромосом и генов; 1— модели биоценоза
и экологии
339



тыс. лет назад

Схема 3. Этапная динамика математической информатики

а - наскальные рисунки; b — иероглифы; с — алфавит; d — абстрактные числа; е — софистика; f — геометрические чертежи (Пифагор); g — логика (Платон); h — пропорции (Архимед); i — механические модели (Птолемей); j — десятичный счет; k — уравнения и координаты (Декарт); 1 — уравнения в прирашениях (Ньютон, Лейбниц): m — математическая логика (Буль); п — универсальный алгоритм (Тьюринг, Марков, Колмогоров); о — системное программирование; р — сетевое программирование

Список литературы

1. *Коганов А.В.* Метод расщепления истины в пародоксной защите логики. XI международная конференция «Логика, методология, философия науки. Обнинск, 1995. Т. 2. С. 37.
2. *Коганов А.В.* Анализ произведений искусства методом расщепления истины // Математика и искусство. Труды конф. М., 1997. С. 170—172.
3. *Мальцев А..И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1986.
4. *Слинин Я.А.* Современная модальная логика. Л., 1976.
5. Исследования по теории множеств и неклассическии логикам. М., 1976.
6. *Флавий Иосиф.* О древности иудейского народа. СПб.. 1895.
7. *Коганов А.В.* Эталонные основы математического языка// Интегральная геометрия. Математические модели. Понимание изображений. М., 2001. С. 52—80.

КОММЕНТАРИЙ

А.Н. Кричевец

Описание математики, данное в работе А.В. Коганова, направлено на решение сразу нескольких задач. Я остановлюсь только на одной из них — педагогической. Подход А.В. Коганова здесь имеет определенное сходство с подходом Ж. Пиаже. Последний описывал становление математических понятий в процессе развития ребенка как объединение разрозненных мыслительных схем в систему. Понятие числа, по его мнению, образуется из схем сериации (расположение предметов в серию по отношению «больше—меньше»), взаимно-одноначного соответствия и сохранения количества. Другие логические, математические и физические понятия также опираются на относительно изолированные схемы мышления.

Эталоны А.В. Коганова играют примерно ту же роль, но в контексте, объединяющем как начальную математику, описанную Пиаже, так и современные математические теории. Обращает на себя внимание отсутствие среди эталонов некоторых схем Пиаже, например взаимно-однозначного соответствия. Значит ли это, что множество эталонов должно быть дополнено, не берусь утверждать.

ОТВЕТ АВТОРА

Автор согласен с тем, что эталоны в матемаике играют двойную роль: это и основа для построения матемической логики, и система обучения базовым понятиям. В даньй статье сделан упор именно на обоснование метаматематичекой логики, поэтому приведен список эталонов, достаточны для построения математической логики как в смысле конструктивной математики, так и в смысле разветвленной теории типов. Разумеется, речь идет о тех эталонах, которые обнаружил автор, поскольку эта работа первая в данном направлении. Вне всякого сомнения, могут быть найдены и другие эталоны, при этом они могут как изменить эталонную базу уже имеющейся метатеории, так и расширить возможности логики. Очень «подозрительно» в этом смысле направление квантовых вычислений.

В статье специально отмечено, что эталон выработки эталона в настоящее время отсутствует. Имеется только несколько критериев эталонности объекта в метрологии, но их трудно перенести на эталоны умозрительной природы. В данной статье приведен минимальный список базовых понятий, позволяющий выразить все другие понятия, необходимые сегодня для математики, с помощью логических конструкций. Но тут нет строгой иерархии. Приведенный список эталонов частно сам выражается через другие понятия, если их принять за базовые. Это похоже на систему команд универсальной вычислительной машины. Разные системы команд выражаются друг через друга (правда, ценой увеличения времени вычислений). Кстати, команды компьютера — это тоже эталоны, Но их принято описывать через операции подстановки на словах в заданных алфавитах.

Для полного описания современной математической системы оказалось достаточно десяти первых эталонов, приведенных в статье. Под номером 11 приведена группа эталонных понятий, которые используются сегодня не для построения математики, а для обучения ей. Это удобный иллюстративный материал, позволяющий дополнить сухой формализм живой интуицией человека. Среди этих вспомогательных эталонов, безусловно, можно поместить и все эталоны Ж. Пиаже. Однако те из них, которые не попали в основную группу эталонов 1—10, могут формально через них быть выражены. Кроме того, надо помнить, что эталонные понятия всегда относятся к объектам конечного (обозримого) типа. В этом смысле, например, возможно внелогическое обучение взаимно-однозначному соответствию (биекции) только на конечных совокупностях объектов. В теории множеств это понятие не эталонное. Оно вводится дедуктивным определением через свойство единственности образа и прообраза. Эксплуатация этого понятия возможна только через логический вывод. За это неудобство мы получаем компенсацию в виде теории бесконечных мощностей.

Следует понимать, что логически введенное понятие не эквивалентно своему эталонному прототипу. Эталон вводится на уровне оперирования с объектами внешней среды. Логические объекты имеют чисто информационную природу и существуют только в форме кодовых записей. Например, если ученик устанавливает биекцию в форме нумерации списка слов, то он находится в зоне действия логически определенного понятия соответствия. Но если он вербально нумерует реальные объекты, то это действие связано с таким внелогическим актом, как распознавание человеком образов внешнего мира. Еще дальше от логики находится развешивание на вешалке номерков. Тут происходит не только распознавание, но и физический акт, которому никакое рассуждение не эквивалентно. Сколько ни пересчитывай крючки, номерки от этого на них не повиснут. Поэтому, когда автор пишет о выразимости понятий в логике через эталоны, он относит это только к построению теорий, но не к замене реальных действий и объектов на логические конструкции. В этом смысле все эталоны независимы. При таком подходе их список можно наращивать неограниченно.

Таким наращиванием совокупности реальных эталонов занимаются метрология и естественные науки. В биологии, например, каждый вид животного, мира — это отдельный эталон. Его учатся распознавать непосредственно в природе. Логическое определение дает только частичное описание этой совокупности особей. Иначе можно было бы обойтись без наблюдений и экспериментов. Так обстоит дело во всех науках, кроме математики. Об этом, собственно, и написана статья. Ценность фиксации

342

небольшой, но достаточно универсальной совокупности эталонных понятий — в достижении однозначных трактовок описаний.

Сказанное выше позволяет рассматривать математическую логику как модель реального мышления, но не его замену. Для устранения некоторых неоднозначностей математики были вынуждены перейти в своих теориях на эту модель реальной логики. Но живое мышление, конечно, базируется на непосредственных интерпретациях слов в образах внешнего мира. С этими интерпретациями и были связаны неоднозначности трактовок математических понятий. Но поскольку задачей обучения математике является развитие мышления, а не формализма, то при обучении используется значительно более широкий класс действий и объектов, чем минимально необходимый для метаматематики. Каждая эпоха добавляет свои объекты в список наглядных пособий. Сегодня это и машины (поезд из пункта А в пункт В) и компьютеры с их кодировками и вызовами программ (эталон подстановки). Не все такие объекты эталонны. Многие из них допускают существенные вариации трактовок, но человеку очень важно научиться в неформальной ситуации находить математическую модель.

А.Ф. Кудряшев

ПАРАДИГМЫ МАТЕМАТИКИ

В статье последовательно обсуждаются вопросы: 1) что можно считать парадигмами математики? 2) какие парадигмы наиболее существенны для математики в целом? 3) о свободе в математике; 4) об одной парадигме математики в особенности, а именно о парадигме «математика как физика»; 5) об итоговой парадигме математики (вместо заключения).

Парадигмы, о которых здесь будем говорить, понимаются нами весьма просто, поскольку берутся вне системы понятий, развитой Томасом Куном и включающей в себя «научную революцию», «научное сообщество», тезис о несоизмеримости старой и новой парадигм, концепции антикумулятивизма, историцизма и пр. Возможно, что методология Т. Куна способна найти более целостное и более продуктивное применение к процессам развития математики, чем использование одного только понятия «парадигма», тем более что отчасти это уже было сделано теми, кто в развитии математики нашел научные революции (например, Георгий Иванович Рузавин). Но нам достаточно взять поня-

343

тие парадигмы в самом тривиальном значении как устойчивое, содержательно наполненное направление исследований, задаваемое определенными принципами. Последние неизменны, потому что не сохраняются непринципиальные методологические детали, входящие в данную парадигму. Применительно к математике понятие парадигмы может обозначать выбранное направление математических исследований, попросту говоря, некоторую ее модель.

Оставим вне обсуждения метафоры типа: «математика — царица наук» или «математика — гимнастика ума». В то же время стоит признать отнюдь не переносное значение «математики как спорта (соревнования)» или, что вовсе безусловно, «математики как учебного предмета». Внутри математики можно выделить, прежде всего, алгебраическое и геометрическое направления, составляющие две альтернативные парадигмы, связь между которыми была обнаружена в аналитической геометрии. Можно проследить связь и того, и другого направления с теоретико-множественной концепцией математики, замечательно выраженной Никола Бурбаки посредством понятия математической структуры. Все это позволяет объединить алгебраическое и геометрическое направления в парадигму алгебро-геометрического дуализма. Однако и их мы не будем здесь обсуждать, как и возможности рассмотрения тех парадигм, которые заложены в так называемых некканторовских математиках, в интуиционистской и конструктивной математике и в неевклидовых геометриях. Ясно и так, что все указанные «математики» весьма различны.

В статье выделяются существенно более крупные парадигмальные образования, в основном долго живущие и потому проверенные временем: берутся во внимание такие планы изучения, где математика фигурирует как целое. Среди них есть давние, абсолютно несомненные в силу своей исторически сложившейся внутренней стройности, и относительно новые, может быть, развитые не настолько, чтобы вполне утвердиться в качестве несомненных.

Перечислим некоторые парадигмы современной математики, рассматриваемой главным образом не на уровне отдельных ее теорий, различающихся своими объектами, а на уровне подходов более крупного масштаба, каждый из которых пригоден для изучения нескольких математических теорий. Наиболее объемлющие парадигмы: 1. Математика как особая наука; 2. Математика как совокупность математических методов; 3. Математика как логика; 4. Математика как физика; 5. Математика как язык науки; 6. Математика как искусство. Для всех перечисленных

344

случаев находятся их апологеты, у которых имеется большее или меньшее число сторонников.

Понимания математики или как системы математических знаний, или как определенной профессиональной деятельности входят по большей части в 1. Случай 1 — предметный в том плане, что подразумевается существование особого предмета математики. Случай 2 — такой, что предметность математики отрицается. В 3-м случае проводится логицистская точка зрения, которую, как нам представляется, нельзя сбрасывать со счетов. В случае 4 не видят принципиальных отличий математики от физики. В случае 5 математика рассматривается как особая семиотическая система. Эта парадигма имеет своего исторического предшественника в виде утверждения-философемы: математика — язык природы. Случай 6, пожалуй, наиболее оригинальный, но, в принципе, неудивительный, поскольку известные аналогии между музыкой и математикой (не только арифметикой и алгеброй) вполне могут быть проведены в более общей форме, например в той, какая обозначена здесь числом 6. Парадигма 6 ориентируется на концепцию, согласно которой человеческое творчество — удел искусства; тогда, если считать математика способным к творчеству в своей области, сферу его занятий — математику — надо причислить к разновидностям искусства, а математический метод — к совокупности художественных средств.

Возможно, что парадигмы, о которых тут говорится, не умрут, пока живет математика. До какой-то черты, чем больше парадигм и сильнее конкуренция между ними и их сторонниками, тем богаче возможностями содержательное развитие математики, тем интереснее споры и дебаты, плодотворнее научная деятельность, разнообразнее тематика диссертаций и пути обновления образовательных программ. Однако, несмотря на такой обширный «шестиаспектный» охват, намеченное рассмотрение математики оставляет ощущение недостаточности. Кажется, что в перечне парадигм, даже взятом вместе с напрашивающимися уточнениями и конкретизациями, чего-то не хватает, может быть, самого главного. Но об этом, как было заяалено в плане статьи, — в ее конце.

Вопрос о сущности математики вполне определенным образом решался Георгом Кантором. Широко известен его афоризм: «Сущность математики заключается в ее свободе», воспроизводимый, разумеется, с точностью, зависимой от перевода. Г. Кантор имел в виду не безграничную, ничем не обусловленную свободу-произвол. Он подразумевал свободу математической деятельности. Но даже и в математике для Г. Кантора дозволено далеко не
345
все, что можно было бы создать в воображении ученого. Ограничения накладывает, конечно же, принцип непротиворечивости, регулирующий математические рассуждения и доказательства. Редуцируем высказывание Г. Кантора к виду: «Сущность математики — в ее свободе». Предположим, что от этого смысл всего высказывания не изменился, хотя в варианте, более близком к оригиналу, наверняка содержатся дополнительные нюансы смысла.

Совершенно иное в содержательном отношении, но по форме близкое высказывание получаем на основе анализа взглядов Жана-Поля Сартра. Французский философ много рассуждал о свободе человека, который для него «сначала существует» [1, с. 323], «просто существует» [1, с. 327], но так, что «осужден быть свободным» [1, с. 327]. Феноменологическое описание человека, чем был занят Ж.-П. Сартр, не должно идти «вглубь», поскольку «нет никакой природы человека» [1, с. 323], явление и сущность совпадают. Но это только с одной стороны. С другой — сущность есть и для Ж.-П. Сартра-феноменолога, так как не секрет, что «феноменологическое учение о бытии имеет своим средоточием сущность, или природу, человека» [2, с. 51], и человек у него все же «определяется» [1, с. 323]. Тезис Ж.-П. Сартра: «Человек — это свобода» прочитывается на языке гегелевской философии как высказывание: «Сущность человека — это свобода», — и сартровская свобода (сознание, выбор, ничто) в том же языке должна трактоваться как эссенциальное, а не экзистенциальное понятие. Иначе говоря, смысл воззрений Ж.-П. Сартра на человека не пострадает, если его выразить фразой, сходной по структуре с тезисом Г. Кантора о сущности математики: «Сущность человека — в его свободе». Кстати, в такой трактовке взглядов Ж.-П. Сартра нет ничего нового, но, как видим, она не лежит на поверхности. Для наглядности расположим две интересующие нас фразы в виде столбца:

«Сущность математики — в ее свободе»;
«Сущность человека — в его свободе».

Мы не будем поддаваться искушению, и выписывать скоропалительные обобщения типа: «Сущность X — в X-а свободе», где X — какой угодно объект. У нас также отсутствует намерение отождествить человека с математикой на основе сходства высказываний: конечно же, человек и математика — далеко не одно и то же. Тем не менее, возьмем эти высказывания как систему, рассмотрение которой позволяет предположить, что свобода как метафизическая сущность проявляется и в математике, и в человеке, т.е. математика и человек предстают как явления
346
свободы, которые можно совместить. Тогда проявления свободы найдем на пересечении человека и математики. Это – математика в человеке и человек в математике (в обоих случаях речь идет, видимо, о профессионале-математике). Лаконичность словосочетаний «математика в человеке» и «человек в математике» позволяет по-разному их интерпретировать. Интерпретации кратких высказываний включают более развернутые формулировки вместе с соответствующими им смыслами и, по идее, должны быть такими, чтобы не возникала проблема их собственных интерпретаций. Некоторые интерпретации оказываются, очевидно, неразумными и их легко разоблачить. Скрытую неразумность

других, когда она есть, надо демонстрировать. Пример неразумной интерпретации первого словосочетания — «Все содержание математики находится в каком-то определенном человеке». Резонно предположить, что продолжение размышлений о математике в человеке при адекватной трактовке способно дать значимые результаты. Но этим мы заниматься, не намерены. Ограничимся обсуждением, и притом небольшим, человека в математике.

В чем конкретно свободен математик? Он выбирает не только парадигмы, направления исследований. Гораздо чаще он сталкивается с необходимостью выбора задач, которые он затем принимается решать. Однако еще более часто математик имеет дело с вопросами. Понятно, что в составе всякой задачи есть вопросы, но вопросы (может быть, другие) формулируются еще тогда, когда данная задача до поры до времени не поставлена.

В вопросах выражается суть проблемы, и нормой яатяется то, что множество окончательных ответов меньше имеющегося множества вопросов. Как они появляются? Вопросы могут рождаться из осмысливания наблюдений. Математик внешне наблюдает записи уравнений и их систем, формулы, отдельные символы, рисунки фигур и геометрические построения на плоскости, пространственные тела, которым соответствуют определенные мыслительные образования и их внутреннее наблюдение. Посредством мышления математик переводит внешнее во внутреннее и наоборот, хотя, будучи целостным, оно, прежде всего, констатирует то, что созерцается, и это последнее, т.е. предмет созерцания в его элементарных формах, не продуцируется мышлением, а фиксируется в нем как нечто данное. Тем самым во внутреннем наблюдении заложена пассивность, проявляющаяся в безразличии к тому, что им запечатлевается. Речь идет, разумеется, о конечных объектах математики, которые «ведут себя» нормально, никак не «пугают» того, кто их наблюдает, хотя удивлять неожиданностями вполне в состоянии. Монстры появляются, когда пытаются представить бесконечность. Ординарные случаи конечных множеств в принципе не должны вызывать испуг.

Когда объект неподвижен и находится в органичной для него и, в свою очередь, неизменной среде, тогда достаточно простого созерцания, которое ее не портит, не травмирует, не наносит ущерба, не возмущает ее. От созерцания не страдают ни объект, ни его непосредственное окружение, входящее в «картинку» созерцания: она вмешает в себя несколько больше того объема, какой занимает сам объект. Например, математическое наблюдение числа 2 как объекта теории чисел составляет его «чистое» созерцание, но в окружении, прежде всего чисел 1 и 3, ближайших к числу 2 элементов натурального ряда и находящихся с этим числом в определенных фиксированных отношениях.

В том случае, когда в «картинке» возникает движение, скажем, движется объект, созерцание переходит в наблюдение, организованное более сложно. Кроме того, наблюдатель вынужден находиться в напряжении, опасаясь упустить непредвиденное, обусловленное не только внутренними причинами объекта самого по себе, но и изменениями во внешней среде. Наблюдатель, как ученый, не ограничивается полученной из наблюдения информацией. В этом смысле он отнюдь не пассивен, поскольку производит необходимые мыслительные процедуры: он сравнивает, обобщает, анализирует, умозаключает. Все это тесно связано с задаванием вопросов, и в первую очередь себе. Однако для наблюдателя характерна установка на бездействие по отношению к объектам, и поэтому он воздерживается от действий с ними. Так что нетрудно установить сходство между наблюдением в математике и физическим наблюдением.

В деятельности математика и физика можно найти аналогию не только наблюдению, но и эксперименту. Правда, отличия весьма существенны. Известны, например, социальные запреты на проведение опасных физических экспериментов. От подобных ограничений математический эксперимент свободен, так как это, во-первых,

мысленный эксперимент, а во-вторых, эксперимент, производимый над «бездушными» сущностями. С учетом сказанного имеет смысл назвать его «квазиэкспериментом» (термин Леонарда Эйлера) [3, с. 25]. Однако в процессе математического квазиэксперимента производятся действия, такие, как сложение, умножение и т.д., над объектами, подобно тому, как активно воздействует на исследуемые объекты физик-экспериментатор. С эволюцией математики увеличивается количество вопросов; хотя ответов тоже становится все больше и больше, растет и число вопросов, на которые весьма затруднительно ответить. Ответы в математике переформулируются в виде теорем
348
и содержат доказательства (тогда, когда ответ найден), а когда доказательства математического утверждения нет, ответ предстает как некое множество гипотез и не является окончательным.

Свобода субъекта в математике заключается, прежде всего, в вопросах, которые он задает сам себе), о может делать и коллективный субъект), коллегам, а теперь еще и компьютеру. Можно надеяться, что и в поисках ответов на поставленные вопросы математик действует, имея некоторые альтернативы, а не просто как заранее запрограммированное кем-то логическое устройство. Физик-экспериментатор в отличие от математика всегда более насторожен. Он постоянно контролирует свои действия, для того чтобы не допустить нарушения социальных и методологических запретов. Главное же, что его беспокоит, — это возможность и вызванное ею ожидание от объекта экспериментирования какой-либо неожиданности.

Как отмечал Джордж Пойа, сравнивая «физические и математические» ситуации, в «физических ситуациях» следствия выводятся из двух посылок, первая из которых совпадает с посылкой в «математических ситуациях», а вторая посылка отличается своим гораздо более смутным уровнем: употреблением характеристик «менее правдоподобно» вместо «ложно», «более правдоподобно» вместо «истинно» [3, с. 251—252]. «Это отличие мне кажется существенным; дополнительные трудности физических ситуаций могут им объясняться», — пишет Д. Пойа [3, с. 252]. Математик же более категоричен, чем физик.

В математике есть и удивительное, и неожиданное, но «пугать» математика могут люди — те, кто стоят выше по административной лестнице и причастны к власти, те, кто имеют более весомый социальный статус, «крики беотийцев» и т.п. Внутри самой математики аналогичной способностью обладает только бесконечность, но никак не конечный объект. Физик, задавая вопросы не только себе, но и природе, вынужден ее остерегаться, поскольку она остается свободной. Свободна природа в целом, свободен и объект физического исследования, по окончании которого всегда будет остаток, напоминающий ученым о кантовской «вещи в себе». Поэтому свобода физика ограничена свободой его «визави» — природы и природных объектов, на которые направлен его исследовательский интерес. Концепция «диалога» человека с природой как раз и пытается учесть наличие этой «второй» свободы.

Трудные вопросы, не получающие ответов, создают у математиков ощущение несвободы. Однако сходство между математикой и физикой является более глубоким, чем можно было бы предполагать, будучи приверженцем какой-либо парадигмы, от-
349
личной от точки зрения «математики как физики». Математические объекты, даже самые знакомые, оказываются гораздо более независимыми и свободными, чем хотелось бы.

Вещь, задействованная в эксперименте, может меняться или сильно, или слабо. Слабые изменения незначительны и таковы, что протекают малозаметным, если судить по результатам, образом. В отличие от слабых сильные изменения таковы, что подверженный им объект утрачивает свою идентичность. При повторном эксперименте требуется использовать другую вещь, похожую или почти тождественную, но все равно другую. Таким образом, следует отметить, что экспериментатор, повторяющий — и не один раз — опыт для объективности научного исследования, должен иметь запас экспериментального материала.

При таком же подходе к объектам математики (а в рамках парадигмы «математика как физика» это обязательно должно быть, так как здесь главенствуют принципы физики), математик обязан иметь запас математических объектов. Разумеется, прежде всего, запас натуральных чисел.

Возьмем, бесспорно, принадлежащее всякому натуральному ряду число 2 (относительно 1 и тем более 0 как начал натурального ряда возможны сомнения. В любом случае, с какого бы числа натуральный ряд ни начинался, он нуждается в числе 1). Пока математик, имея объектом созерцания, число 2, «всматривается», «вслушивается» («внутренним взглядом», «внутренним слухом») в него, с ним ничего не происходит. Но вот он начинает с ним «экспериментировать», т.е. производить операции: 2x2 = 2^2 (теорема), В записи этого равенства использовано несколько двоек (если мы будем их пересчитывать, то нам понадобится дополнительно найти еще несколько штук). Двойки берутся из натурального ряда. Можно предположить, что когда-то был первый натуральный ряд, в котором число 2 впервые появилось как число натурального ряда. В парадигме «математика как физика» начало «исходного» натурального ряда должно было выглядеть так (с единицей в роли первого числа): 1, I, 1, ... , 1, 2, 2, 2, ... , 2, 3, 3, 3,..., 3,... . Поскольку исторический опыт «работы» с числами велик, то остается признать: тот натуральный ряд давно «растащили» по кускам. Чтобы продолжать и дальше «работу» с целыми положительными числами, мы вынуждены предположить, что каждого из них сколь угодно много. Конечно, хорошо было бы уметь перенумеровывать двойки, но для этого надо было бы иметь запас натуральных чисел. Откуда же их брать в нужном количестве, пока не завершен самый первый натуральный ряд? Даже взять двойку (понимаемую как сумму 1 + 1), чтобы пометить ей единицу, следующую за первой единицей, мы сможем не сразу: двойки появятся после того, как будет выписано достаточное число единиц. Желание сначала выписать все единицы и затем их перенумеровать, очевидно, невыполнимо не просто потому, что не будет, например, двойки, но потому, что мы не сможем выписать все единицы (именно поэтому не будет и двойки). При нумерации мы не сможем пойти дальше первой единицы, на которой все и остановится.

Сходная ситуация была описана Зеноном в известной апории «Дихотомия» с ее аргументом в той форме, какая приводит к выводу, что движение не может начаться. Или мы все продолжаем и продолжаем строить натуральный ряд, начиная с числа I (но тогда откуда берутся новые единицы?), или мы заранее имеем бесконечное множество единиц, безжалостно расходуемых на получение других чисел? В последнем случае натуральный ряд надо начинать с числа 2. Заметим: предположение, будто целые положительные числа могут существовать сами по себе и поэтому их можно найти вне натурального ряда, сталкивается с проблемой их различимости, которая решается просто, если множество чисел упорядочено их вхождением в натуральный ряд.

Физика, как видим, подталкивает к тому, чтобы ввести понятие потенциальной бесконечности. Однако, дабы перейти от числа 1 к числу 2, приходится вводить актуальную бесконечность единиц. И в случае потенциальной, и в случае актуальной бесконечности можно заключить, что их введение есть результат цивилизацион-ного развития. Вместе с тем ситуация с введением бесконечности по своим последствиям значительно превосходит последствия введения аксиоматического метода, увы, не такие уж благополучные: «...конструкция, порожденная разумом, — последовательность целых чисел, эта простейшая и самая прозрачная для конструктивного ума вещь, — обретает аналогичную неясность и ущербность, если подходить к ней с позиций аксиоматики. Но, тем не менее, это факт, отбрасывающий зыбкий отблеск на взаимосвязь опыта и математики», — пишет Герман Вейль [4, с. 23].

Не будем здесь останавливаться на вопросе о субстанциональности каждого из чисел натурального ряда и на возможности числовой монадологии. Тем не менее, отметим, что физическая трактовка математики подводит к предположению об убывании запасенного количества чисел, происходящего вместе с их ростом: чем больше натуральное число, тем меньший запас этого числа требуется человечеству. Это — общая, но не монотонная тенденция, ибо запасы степеней целых чисел, прежде всего степеней 10, требуются более обширные, чем запасы других больших и в особенности сверхбольших чисел.

Парадигма «математика как физика» побуждает оптимиста-математика к тому, чтобы признать: «Хорошая физика называется математикой».

351

Другая трактовка числа 2 отличается от предыдущей своим «невещным» характером. В ней двойки полностью отождествляются. Их нельзя перенумеровать: индексы к числам не «прилипают» по определению, согласно которому числа, входящие в одно и то же гнездо натурального ряда, абсолютно тождественны. Поэтому двойки полностью взаимозаменяемы и таковы, что извлечение их из недр натурального ряда в нем ровным счетом ничего не меняет, ряд после извлечения остается точно таким же, каким он был до такой операции. Объект, полученный в результате рассматриваемой трактовки, и есть по-настоящему специфический объект чистой математики. Соответствующая парадигма (присвоим ей номер 7) при узком ее толковании, отличающем ее от всех шести вышеперечисленных парадигм математики, может быть теперь озаглавлена «математика как математика». Возвращаясь к словам Г. Кантора, мы можем дать им и такую интерпретацию: актуальная бесконечность есть самое живое проявление свободы самой математики. Но в достаточно широком смысле парадигма «математика как математика» вбирает в себя все остальные парадигмы, включая и ту, которая только что была помечена номером 7 и была названа «узкой». Эта широкая парадигма и будет итоговой парадигмой математики.

Список литературы

1. *Сартр Ж.-П.* Экзистенциализм — это гуманизм // Сумерки богов. М., 1989.
2. *Киссельъ М.А.* Философская эволюция Ж.-П. Сартра. Л., 1976.
3. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М., 1975.
4. *Вейль Г.* Математическое мышление. М., 1989.

КОММЕНТАРИЙ

С.Н. Бычков

В работе обсуждаются шесть парадигм математики, понимаемых как наиболее распространенные среди образованных людей взгляды на сущность этой науки. Наибольшее внимание по понятным причинам уделено четвертой из перечисленных парадигм — «математика как физика». Сильной стороной работы является то обстоятельство, что банальность характера выбранного предмета анализа не стала препятствием для получения свежих и во многом неожиданных выводов.

Математика-профессионала могут шокировать рассуждения насчет представлений о натуральном ряде чисел в «физической парадигме». Но подобное неудовольствие означает лишь, что математик, сам того не сознавая, находится в седьмой парадигме

352

«математика как математика» (понимаемой в узком смысле). Это очень удобная для математического сообщества позиция, но она абсолютно «нерефлексивна», так как сама не только не побуждает математику к самоосмыслению, но и «косо поглядывает» на попытки со стороны философов или представителей других наук анализировать другие ее парадигмы. Видимо, этим и объясняется, что А.Ф. Кудряшев сразу же переходит от «узкой» к «широкой» парадигме «математика для математики», включая в нее все шесть первых способов понимания сущности данной науки. Возможные претензии к автору со стороны «чистого математика» вроде бы сняты, однако не все так просто: шестая парадигма со множественными единицами и двойками не отброшена как ненужная для «чистой математики», а всего лишь «вобрана». И вот здесь хочется задать уточняющий вопрос: каким именно образом?

Шестая парадигма является естественной для древних математиков, когда еще не было выработано представление о «невещественной» двойке, поэтому проблемы статуса чисел и обсуждались в Платоновской академии Спевсиппом и Ксенократом. Интересно, обсуждались ли они в математике Индии или Китая? Если верить автору работы, то должны были обсуждаться. Я полагаю, что ключ к ответу на поставленный выше вопрос и лежит в аккуратном философском исследовании соответствующих вопросов истории древней и современной математики. Может быть, Александр Федорович поспособствует не только возникновению интереса к этой проблеме, но и сам ее разрешит?

ОТВЕТ АВТОРА

Попытаюсь сжато пересказать вопросы Сергея Николаевича и по возможности ответить на них. До всего этого не могу не сказать, что Сергею Николаевичу я благодарен не только за заинтересованное прочтение данного текста: уже порядочное время его конструктивные комментарии помогают мне в научном росте.

Во-первых, вопрос, каким именно образом парадигма «математика как физика» входит в итоговую парадигму «математика как математика» (в широком смысле)? Я полагаю, что весьма скромным образом. Парадигма «математика как физика» в настоящее время представлена несколькими (немногочисленными) именами, да и содержательно ее аспектность в сопоставлении с другими (хотя и не всеми) парадигмами математики предстаагяется более фрагментарной. Приводимые в статье рассуждения относительно «исходного» натурального ряда (подчеркну употребление кавычек) основаны на предположении главенства принципов физики и носят характер логических следствий, имеющих к реальной истории математики внешнее и неорганичное отношение, доходящее до уровня пародии при буквальном понимании описанной ситуации.

353

Во-вторых, вопрос, обсуждались ли проблемы статуса чисел в математике Древней Индии и Китая? Мне представляется, что, вряд ли обсуждались. Математику Древней Индии, которую в логическом плане можно ставить выше древнекитайской математики, подавляла грандиозная философская мысль, и там подобные вопросы могли решаться, прямо исходя из философских допущений, без специального их обсуждения и внутриматематической рефлексии. Но, так или иначе, нужны исторические факты и системная аналитическая разработка вопроса. Априорная схематизация ответа, разумеется, может оказаться ошибочной. Сергей Николаевич, собственно говоря, сам об этом хорошо написал.

В-третьих, вопрос, могу ли я поспособствовать возникновению интереса к этой проблеме истории и философии математики? Хотел бы. Но способен ли я ее разрешить? Вряд ли: проблема лично меня подавляет неимоверной сложностью.

С.Н. Бычков

МЕТАМАТЕМАТИКА И ОПЫТ

Проблема «Метаматематика и опыт» не выглядит особо значимой по сравнению с вопросом о соотношении с эмпирической действительностью самой математики. Действительно, суть гильбертовского замысла заключалась в обосновании непротиворечивости классических математических конструкций посредством оперирования их формальными записями в рамках «наглядных средств» элементарной теории чисел[1]. Корректность использования «идеальных объектов математики» гарантировалась бы в случае успеха метаматематической редукции заведомой корректностью оперирования «конструктивными объектами» метаматематических рассуждений, принадлежащих сфере непосредственного человеческого опыта[2]. С теоремой Геделя о неполноте надежды на осуществимость «эмпирического обоснования» непротиворечивости математики стали более чем призрачными. Первым вывод о необходимости использования абстрактных понятий для доказательства непротиворечивости классической теории чисел сделал в 1935 г. П. Бернайс. Однако наибольшую известность в плане выводов из неудачи первоначальной гильбертовской программы получила вышедшая в 1958 г. работа [4] самого автора этого фундаменталь-
354
ного метаматематического результата. Абстрактные понятия, согласно Геделю, «охватывают не свойства и отношения *конкретных объектов* (например, комбинаций знаков), а относятся к *мысленным образам* (например, к доказательствам, осмысленным высказываниям и т.д.), причем при рассмотрении доказательств используется такое понимание последних, которое получается не из комбинаторных (пространственно-временных) свойств представляющих их знаковых комбинаций, а из их смысла» [4, с. 299].

В финитной установке гильбертовской метаматематики различаются две составные части: «Во-первых, конструктивный элемент, который состоит в том, что речь о математических объектах может идти лишь постольку, поскольку они могут быть предъявлены или фактически построены. Во-вторых, специфически финитистский элемент, требующий, сверх того, чтобы объекты, о которых делаются высказывания и которые служат исходными данными построений и получаются в результате, были "наглядными", что означает, в конце концов, пространственно-временное сопоставление им элементов, все особенности которых, за исключением равенства и различия, несущественны» [4, с. 301]. От этого второго требования Гедель и считает необходимым отказаться.

В результате, как видим, проблема обоснования корректности использования идеальных объектов переносится из математики в метаматематику. И пусть в метаматематике объем используемых абстрактных понятий существенно меньше, нежели в математике «объектной», все равно подозрение в обоснованности их применения не может не сохраниться.

Мы не будем специально рассматривать вопрос о возможности расширения границ финитной установки Гильберта с сохранением достаточно надежных гарантий удостоверения непротиворечивости «объектных» теорий[3]. Речь пойдет о другом подходе к проблеме «Метаматематика и опыт», связанном с различиями в логических аппаратах метаязыка и языка формализованной математической теории. Основной тезис, обосновываемый в дальнейшей части работы, заключается в следующем: акцентирование вещественно-пространственного характера объектов в финитном подходе Гильберта приводит к использованию родовидовой логики Аристотеля. В то же время формальное исчисление предикатов фактически опирается на неаристотелевский вариант формальной логики, восходящий к учению стоиков. Подобное рассогласование ставит под сомнение обоснованность ряда моментов в доказательстве теоремы Геделя о неполноте формальной арифметики, как в семантическом, так и в синтаксическом его вариантах. Но обо всем по порядку.

355

1. Родовидовая логика и опыт

В современной формальной логике представление о роде не имеет сколько-нибудь явной связи с чувственным опытом. Так, в одном из базовых учебников для высшей школы *род* определяется просто как универсум $\mathbf{U}$, по которому пробегает некоторая предметная переменная α. *Вид* при этом отождествляется с видовым отличием $\mathbf{A}(\alpha)$, выделяющим из универсума предметы, подпадающие под понятие α $\mathbf{A}(\alpha)$ [6, с. 186—187].

Зачатки подобного понимания можно найти уже у Аристотеля, когда он приводит последнее из значений, в которых употребляется термин «род»: «Основная часть определений при обозначении сути вещи — это род, видовые отличия которого обозначают свойства» (Метафизика, 1024 b 5—6). Первые два значения рода у Аристотеля, однако, имеют четкое «биологическое происхождение», ибо в них «говорится о роде: касательно непрерывного рождения [существ] одного и того же вида; касательно первого двигавшего того же вида, что и порожденное им» (там же, 1024 b 7— 8)[4]. И совершенно не случайно то обстоятельство, что поначалу реальный род был неразрывно связан с физическим временем.

Как отмечается в [8, с. 85], вневременной характер математических объектов был осознан в Платоновской академии. Это и дало толчок тому чисто количественному пониманию родовидовых отношений, которое принято на вооружение формальной логикой [8, с. 80] и которое используется в классической математике.

Такие разделы классической математики, как арифметика, алгебра, анализ, имеют дело не с высшими, а с промежуточными родами. Как показано в [9], это приводит к тому, что в доказательствах от противного в этих науках на деле используется не закон исключенного третьего, а более слабый закон контрапозиции

$$(A \to B) \to (\rceil B \to \rceil A).$$

Этот закон генетически связан с родовидовой логикой, в которой отрицание понимается как *внутреннее,* осуществляемое внутри рода. В качестве примера можно привести следующее умозаключение: если из равенства сторон треугольника вытекает равенство противолежащих этим сторонам углов, то, наоборот, неравенство углов треугольника влечет за собой и неравенство соответствующих сторон. Отрицание равенства углов треугольника преобразуется здесь в их неравенство. Это *определенное* отрицание — в противовес неопределенному отрицанию «неверно, что углы α и β треугольника равны», из которого нельзя вывести никакого следствия без предварительного его преобразования из сугубо негативного суждения в утвердительное суждение о неравенстве углов. Эта, казалось бы,

356

совершенно безобидная логическая процедура, отождествляющая внешнее и внутреннее отрицания суждения[5] в контексте содержательного математического рассуждения, приводит к осложнениям в теории множеств, родовидовой статус понятий которой далеко не столь очевиден, как в разделах классической математики.

2. Родовидовая логика и канторовская диагональная процедура

В косвенном рассуждении от противного, обосновывающем невозможность пересчета точек континуума натуральными числами, также содержится преобразование внешнего отрицания суждения во внутреннее отрицание. После того как для построенного по произвольному отображению $f\colon X \to P(X)$ «диагонального» объекта Z показано, что он не может принадлежать образу $f(X)$ множества X, делается молчаливый вывод, что построенная совокупность Z является тем подмножеством множества X, которое не охвачено «пересчетом» при помощи отображения f. Иными словами, утверждение «совокупность Z не является множеством вида $f(t)$ ни для какого $t \in X$» преобразуется в утверждение «совокупность Z является подмножеством множества X, отличным от множеств вида $f(t)$ для $t \in X$». В работах [9—11] уже анализировалось существенное отличие подобного преобразования внешнего отрицания суждения во внутреннее от аналогичных операций в разделах классической математики. А именно, на примерах было показано, что это преобразование никак не вписывается в закон контрапозиции, достаточный для проведения косвенных рассуждений от противного, например, в геометрии и теории чисел. Вместе с тем возможно и прямое рассуждение, демонстрирующее некорректность указанного перехода с точки зрения аристотелевской логики.

В «наивной» теории множеств для того, чтобы некоторая совокупность X могла рассматриваться в качестве множества, должно выполняться естественное «минимальное требование»: для произвольного объекта x из «универсума»[6] должно выполняться либо условие $x \in X$, либо противоположное условие $x \notin X$ (это условие предполагается автоматически выполненным и во всех вариантах аксиоматической теории множеств)[7]. Если принять это за *определение* понятия множества в «наивной» теории множеств, отделяющее множества от совокупностей, заведомо множествами не могущими быть, то *не-множествами* тогда окажутся те совокупности X, для которых относительно некоторого объекта x выполняются одновременно два условия $x \in X$ и $x \notin X$[8] либо ни одно из них[9]. В математике стремятся оперировать достаточно определенными совокупностями, так что всегда допускается принципиальная возможность в отношении любого объекта x из универсума ответить исчерпывающим образом относительно его принадлежности к рассматриваемой в рассуждении совокупности. Поэтому (неявно) предполагается, что возникающая в процессе математических рассуждений совокупность может не оказаться множеством только по первой из вышеназванных причин.

Когда в диагональной процедуре демонстрируется, что совокупность Z, состоящая из всех тех элементов x, принадлежащих множеству X, которые не являются элементами подмножества f(x), не охватывается «пересчетом», задаваемым отображением f, *форма противоречия* «$t \in Z$ и $t \notin Z$» относительно «гипотетического элемента» $t \in X$, для которого допускается возможность равенства $f(t) = Z$, оказывается в точности такой же, как и в парадоксе Рассела[10]. Почему же в этом случае не делается вывод о том, что «диагональный объект» Z в действительности множеством не является? Только потому, что совокупность Z с самого начала предполагается множеством[11].

«Ранний» Кантор придерживался иного взгляда на понятие множества. В работе 1883 г. «Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном» он так сформулировал свое понимание: «Под "многообразием" или "множеством" я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое, т.е. всякую совокупность определенных элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона, и таким образом я думаю определить нечто, родственное платоновскому εἶδος или ιδέα...» [12, с. 101]. Трудно представить, каким образом «диагональный объект» Z можно сопосташшть с платоновским εἶδος 'ом. Это еше можно было бы допустить, если бы платоновский εἶδος каким-либо образом «помогал» производить процедуру проверки принадлежности каждого из элементов t множества X собственному образу $f(t)$. Но поскольку само отображение f считается существующим лишь *на время* косвенного рассуждения от противного, то надежда на помощь платоновской онтологии в данной конкретной ситуации едва ли будет оправданной...

Какие аргументы помимо «позднего» канторовского понятия множества можно привести против попытки рассматривать *форму противоречия* «$t \in Z$ и $t \notin Z$» как свидетельство того, что «диагональный объект» Z множеством не является? Прежде всего

тот, что для *конечного* множества *X* совокупность *Z* множеством все же *являться* будет. Но вследствие чего это мы в этом уверены? Никакой είδος здесь ни при чем, просто для конечных множеств у нас есть алгоритм, позволяющий поочередно сравнивать эле-
358
мент *t* с элементами подмножества *f(t)* множества *X*. В терминологии теории алгоритмов это означает, что *Z* мы считаем множеством лишь постольку, поскольку оно является *разрешимым множеством.* Понятие разрешимого множества уже никак с платоновским είδος 'ом не связано, поскольку опирается не на актуальную, а на потенциальную бесконечность. Именно по этой причине, кстати, его использование и считается допустимым не только в математике, но и в метаматематике.

Нетрудно видеть, что канторовская диагональная процедура была бы корректной с точки зрения родовидовой логики не только для конечного, но и для счетного множества *X,* если бы мы каким-то образом были уверены в том, что счетная совокупность *Z* является разрешимым множеством в смысле теории алгоритмов. Нетрудно видеть, однако, что Z могло бы быть разрешимым только в предположении «конструктивности» отображения *f*, а ограничение подобного рода никак с существом «наивной» теории множеств не связано. По этой причине *Z* фактически не может рассматриваться и как разрешимое множество.

Если в теории алгоритмов все же говорят, например, о перечислимых неразрешимых множествах, то только потому, что отсутствие какого-либо алгоритма для установления принадлежности некоторого элемента *t* множеству *Z* не считается достаточным основанием для заключения о том, что совокупность *Z* множеством не является (вспомним, что в математике не место неопределенности!). Тля того чтобы закрыть место неопределенности (т.е. исключить вторую из перечисленных ранее «причин», не позволяющих совокупность считать множеством), в математическую логику и вводится понятие *алгоритма с оракулом*[12]. Его назначение в том, чтобы не ограничивать класс счетных множеств одними разрешимыми множествами.

Важное, с точки зрения проблемы «Метаматематика и опыт», замечание относительно сущности понятия оракула принадлежит В.А.Успенскому и А.Л.Семенову: «...Теория алгоритмов... формализует некоторые стороны деятельности человека (в отличие от других математических дисциплин, которые формализуют нечто не предполагающее непременного присутствия человека). В частности, теория алгоритмов использует понятие *элементарной операции.* Понятие элементарности — существенно «человеческое» понятие... Можно считать, что человек, осуществляя вычисление, непрерывно обращается к некоторому оракулу, только оракул этот отвечает на столь "элементарные" вопросы (типа "Тождественны или нет эти два символа?"), что даже не замечается. Можно представить себе более мощный, чем у человека, запас вычислительных средств, подразумевающий, в частности, обращение к некоторому
359
нетривиальному (с человеческой точки зрения) оракулу (который в рамках этих средств не осознается скорее всего, как внешний оракул, а признается частью самих этих средств)» [7, с. 98—99]. Таким «сверхчеловеческим» средством (вместе с содержащимся в нем оракулом) для теории алгоритмов и является «поздняя» канторовская теория множеств, сознательно ориентированная на Бога, а не на человека [9, с. 306—314]. Если теория алгоритмов вводит вместе с понятием оракула в метаматематику неразрешимые множества, то нечего и надеяться на какое-либо облегчение проблемы «Метаматематика и опыт» по сравнению с более общей «Математика и опыт»: опыт, по определению, может быть только *человеческим* опытом.

Общепринятая в современной «наивной» теории множеств (а вместе с ней и в опирающейся на теорию множеств теории алгоритмов) родовидовая схема носит, таким образом, следующий характер:

{конечные множества} ⊂{разрешимые множества}⊂
⊂{А-разрешимые множества} ⊂

$\lhd$ {А-разрешимые множества и не-множества}.

Этому случаю соответствует неаристотелевская логика, в которой отождествляются внешнее и внутреннее отрицания[13].

Если же ограничить используемые в метаматематике средства (подобно классической «доканторовской» математике) родовидовой аристотелевской логикой, то родовидовая схема для счетных множеств[14] будет выглядеть совсем иначе:

{многообразия «раннего» Кантора} $\subset$
$\lhd$ {разрешимые множества} $\subset$
$\unlhd$ {совокупности: множества и не-множества[15]}.

Действительно, если множество элементов может быть связано в единое целое по образцу платоновского егбо а (наподобие множества четных чисел или множества квадратов), то для него нетрудно построить и алгоритм[16]. Неразрешимое в смысле теории алгоритмов множество не будет при этом и множеством с точки зрения родовидовой логики. В случае отсутствия алгоритма, выясняющего однозначным образом для некоторого натурального n его принадлежность части Z множества натуральных чисел, для Z может выполняться как первая, так и вторая возможности, характерные для не-множеств. С точки зрения родовидовой аристотелевской логики правомерно, таким образом, рассматривать форму противоречия «$n \in Z \;\; n \notin Z$» как признание совокупности Z не-множеством.

360

В доказательстве теоремы Геделя о неполноте, как известно, используются рассуждения «диагонального» характера. Важно поэтому выяснить, не отражается ли на корректности используемых в доказательстве рассуждений полученное (в результате анализа специфики родовидовой логики применительно к диагональной процедуре) ограничение класса счетных множеств лишь разрешимыми множествами.

3. Родовидовая логика и теорема Геделя о неполноте

Все семантические доказательства теоремы о неполноте первопорядковой арифметики так или иначе опираются на факт существования перечислимого неразрешимого множества (см., например, [13, с. 41—42]). Поскольку существование подобного множества не может быть обосновано в рамках родовидовой логики, то доказательство теоремы Геделя требует использования «канторовской» логики, отождестатяющей внешнее и внутреннее отрицания и потому принципиально несоотносимой с опытом.

Не так просто дело обстоит с синтаксическими доказательствами.

Рассмотрим сначала восходящее непосредственно к Геделю доказательство из [14, с. 115—159]. После построения формулы

$$\forall x2 \urcorner \mathrm{W1}(\overline{\mathrm{m}}, x2),$$

(**)

утверждающей свою собственную невыводимость в формальной арифметике S, вторая часть предложения 3.31 «Если S ω-непротиворечива, то формула $\urcorner$ (**) невыводима в *S*» доказывается путем вывода из предположения $\vdash\urcorner$ (**) его отрицания «неверно, что $\vdash\urcorner$ (**)». Пусть *T*— совокупность теорем формальной арифметики, тогда полученный в доказательстве результат означает, что *T*— не-множество «расселовского» типа.

Примечательно, что у этого утверждения есть аналог в математической логике —

утверждение о нерекурсивности[17] совокупности $T_к$ геделевых номеров элементов T[18]. Так как геделеву нумерацию можно выбрать допустимой[19], то тогда и T также будет неразрешимым множеством. Тем самым приведенная выше интерпретация *формы противоречия* как указания на «не-множественность» совокупности T в геделевском доказательстве получает подтверждение в виде известной теоремы математической логики.

Следует, однако, заметить, что конструкция Россера, использующая аналогичную, но более тонкую идею построения формулы, утверждающей, что в случае существования ее вывода в S должно выводиться также и ее отрицание, свободна от отмеченного недостатка [14, с. 160—162]. Может создаться впечатление, что за счет перехода от семантики к синтаксису удается избавиться от затруднений, связанных с неопределенностью понятия неразрешимого множества в родовидовой логике. Однако и здесь не все гладко. Чтобы разобраться в этом, следует вернуться к самим основам математической логики и рассмотреть с точки зрения различения родовидовой и канторовской логик саму концепцию теорий первого порядка в математической логике.

4. Родовидовая логика и теории первого порядка

Аксиомы теории первого порядка подразделяются *на логические* и *собственные. В* исчислении предикатов, где отсутствуют собственные аксиомы, как показано в [16], под знаком $\urcorner$ может подразумеваться только внешнее отрицание. На примере наиболее компактной аксиоматики из [14, с. 65] данное обстоятельство можно проиллюстрировать на том же примере предиката, что и в [16], взяв в схеме аксиом

$$(\urcorner B \supset \urcorner A) \supset ((\urcorner B \supset A) \supset B) \qquad (1)$$

в качестве B предикат «число 9 есть голубое».

Если под $\urcorner$ B понимать внутреннее отрицание «число 9 есть не-голубое», а в качестве A взять, например, «1 = 0», то антецедент $(\urcorner B \supset \urcorner A)$ формулы (1) будет истинным суждением, а консеквент $((\urcorner B \supset A) \supset B)$, очевидно, ложным. Следовательно, вся формула (1) окажется ложной. Но тогда под $\urcorner$ B может подразумеваться только суждение «число 9 не является голубым», т.е. внешнее отрицание.

В то же время в формальной арифметике, как это видно из [1, с. 330—331] на примере доказательства формулы

$$a \neq 0 \rightarrow \exists x\, (x' = a),$$

отсутствие равенства между элементом a и 0 интерпретируется как *неравенство* элемента соответствующей индивидной области предметной константе из этой же предметной области. Это вытекает из того обстоятельства, что элемент а, не будучи равным 0, в то же время считается подпадающим под действие собственных аксиом формальной арифметики. Последнее означает, что собственные аксиомы этой теории «высекают» род из ничем не ограниченного универсума исчисления предикатов, а операция отрицания «незаметно» преобразуется из операции внешнего в операцию внутреннего отрицания. Ясно, что это можно расценить только как проявление непоследовательности в построении Гильбертом оснований математической логики — непоследовательности, связанной с отказом им от представления об *универсальной индивидной области,* которого придерживались Фреге и Рассел[20].

Завершая анализ сюжетов, связанных с «эмпирической» интерпретацией результатов метаматематики, подчеркнем, что этим последняя никак не затрагивается, если только метаматематику рассматривать не как дисциплину, созданную для обоснования «извне» математической науки, а как собственный ее раздел. В таком случае было бы неуместно для ее анализа применять родовидовую логику Аристотеля, поскольку после создания теории множеств она была вытеснена де-факто в основаниях математики «канторовской» логикой, в которой внешнее и внутреннее отрицания отождествляются. Если же пытаться сохранить верность исходному гильбертовскому замыслу и стремиться ограничивать набор используемых в метаматематике приемов средствами, применяемыми в «эмпирических» науках и таких разделах классической математики, как теория чисел или геометрия, то тогда возникнет задача пересмотра всего ее инструментария с точки зрения именно аристотелевской родовидовой логики. Эта задача актуальна ровно в той мере, в какой метаматематика претендует на право называться общенаучной — «философской» — дисциплиной.

5. Еще раз о логике

Приведенная критика построений метаматематики опирается на ту же самую родовидовую логику, которой (пусть не всегда последовательно) пользуется сама метаматематика. Возможна и «внешняя» критика метаматематических результатов, основывающаяся на идее другой — гармонической — логики. Подобная критика представлена в работах [17; 18]. Выводы этих работ ставят под сомнение часть результатов, представленных в [9—11; 16]. Следует, однако, отметить, что указанная критика не затрагивает аргументацию настоящей работы.

Метаматематика, согласно ее *исходному замыслу,* не вправе опираться на идеализации теории множеств (в том числе и на понятие вычислимости с оракулом). По этой причине она и вынуждена ограничить объем понятия множества разрешимыми (в смысле теории алгоритмов) множествами. Неразрешимые множества «канторовской» теории алгоритмов становятся, с точки зрения «аристотелевской» теории алгоритмов, тогда примерами не-множеств, причем представление о них основывается на абстракции потенциальной бесконечности. Такая трактовка не-множеств не противоречит выводам работы [18].

363

Более проблематичной выглядит ситуация с использованием в [16] «смыслового» (а не чисто лингвистического) противопоставления внешнего и внутреннего отрицаний, корректность чего как раз и ставится под сомнение в [17]. Суждение «число 9 есть не-голубое», с точки зрения [17], не ложно, а просто бессмысленно. Но подобное возражение ставит под сомнение не столько формализацию арифметики, сколько формализацию самого исчисления предикатов. Проблематизация же исчисления предикатов затрагивает не конкретный раздел метаматематики, а весь ее замысел в полном объеме. В настоящей работе критика теоремы Геделя велась *изнутри,* а не извне метаматематики. Вместе с тем необходимо отметить, что, поскольку проблема «Метаматематика и опыт» далеко не исчерпывается обсуждением вопросов, связанных с теоремой Геделя, содержащиеся в [17—181 аргументы критического характера заслуживают отдельного обсуждения.

Примечания

[1] Возможности подобных средств интуитивной арифметики иллюстрируются в [1] на примере доказательства иррациональности √2.

[2] В недавних работах Е.Д. Смирновой содержатся аргументы в пользу того, что этот «метаматематический опыт» у Гильберта не так уж и непосредственен, а носит, скорее, трансцендентальный характер в духе построений Канта [2, 3].

[3] Этот вопрос обсуждается, например, в [2; 5].

[4] Интересно в этой связи сопоставление базовых понятий современной теории алгоритмов с терминами биологии в [7. с. 25].

[5] Для последующего изложения вполне достаточно сугубо формального — лингвистического — различения этих двух видов отрицания в зависимости от расположения частицы «не» по отношению к связке «есть».

[6] Под универсумом понимается совокупность всевозможных объектов, могущих рассматриваться в качестве элементов каких-либо множеств. Более формально в соответствии с традицией это можно определить как совокупность объектов x, удовлетворяющих соотношению $x = x$.

[7] Проверка принадлежности произвольного элемента универсума некоторой совокупности X считается, таким образом, более простой и фундаментальной операцией, нежели удостоверение факта принадлежности X к классу множеств.

[8] Эта ситуация возникает в парадоксе Рассела.

[9] Если совокупность задана столь неопределенным образом, что не для всякого x из универсума можно зафиксировать хотя бы одну из рассматриваемых альтернатив.

[10] В работе [9, с. 315] отмечено то обстоятельство, что Рассел пришел к формулировке своего парадокса именно в результате анализа канторовской диагональной процедуры.

[11] Соответствующую аксиому «Всякая частичная совокупность множества является множеством» Кантор, как показано в (9, с. 313—314], сформулировал лишь в 1899 г. в письме к Дедекинду. В аксиоматической теории множеств Цермело—Френкеля это предположение формулируется в виде аксиомы выделения, входя тем самым в самый фундамент данной теории.

364

[12] В этом обобщении понятия алгоритма назначение оракула как раз и состоит в том, чтобы давать ответ на вопрос о принадлежности объектов некоторому фиксированному — вообще говоря, *неразрешимому* — множеству A. Отсюда другое название алгоритма с оракулом *А — алгоритм относительно А.*

[13] Как показано в [9. с. 322], фактическое отождествление двух типов отрицания через аксиому «Всякая частичная совокупность множества является множеством» произведено Кантором именно в связи с диагональной процедурой.

[14] В метаматематике в ее исходном гильбертовском замысле достаточно, очевидно, только счетных множеств.

[15] Класс не-множеств при этом будет шире, чем в ранее приведенной схеме, включая в себя не только «расселовские» множества, но и «недостаточно определенные».

[lfi] Обратное, как можно убедиться, неверно. Произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел является разрешимым множеством в смысле теории алгоритмов, однако многообразием в смысле «раннего» Кантора может и не быть [10, с. 24].

[17] В [14] вместо термина «разрешимость» используется «рекурсивность».

[18] Следствие 3.36 в [14].

[19] См.: [15, с. 63 – 64].

[20] [1, с. 211].

Список литературы

1. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М, 1979.
2. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. М., 1996.
3. *Смирнова Е.Д.* Логика в философии и философия логики // Логические исследования. Вып. 7. М., 2000. С. 217-231.
4. *Гедель К.* Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения // Математическая теория логического вывода. М.. 1967.
5. *Крайзель Г.* Исследования по теории доказательств. М., 1981.
6. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* **Основы логики. М., 1999.**
7. *Успенский В.А., Семенов А.Л.* Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М., 1987.
8. *Мочалова И.Н.* Концепция научного знания в ранней Академии // Некоторые проблемы истории античной науки. Л., 1989.
9. *Бычков С.Н., Зайцев Е.А., Шашкин Л.О.* Диагональная процедура Г. Кантора и теория множеств (историко-научный и логический контекст) // Историко-математические исследования. Вторая сер. Вып. 4 (39). М., 1999. С. 303—324.
10. *Бычков С.Н., Шашкин Л.О.* К критике канторовской диагональной процедуры доказательства несчетности континуума // Традиционная логика и канторовская диагональная процедура. М., 1997. С. 22—29.
11. *Бычков С.Н., Шашкин Л. О.* Канторовская диагональная процедура и непротиворечивость теории

множеств // Историко-математические исследования. Вторая сер. Вып. 5 (40). М„ 1999. С. 290-300.
12. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М., 1985.
13. *Успенский В.А.* Теорема Геделя о неполноте. М., 1982.
14. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1984.
15. *Смальян Р.* Теория формальных систем. М., 1981.
16. *Виннер Д.И.* Виды отрицания и исчисление предикатов первого порядка // Математические методы решения инженерных задач. М., 1999. С. 51—53.
17. *Петросян В.К.* Критика аристотелевской теории отрицания. М., 2001.
18. *Петросян В.К.* Критика канторовской «диагональной процедуры». М., 2001.

КОММЕНТАРИИ

В.А. Бажанов

Можно восхищаться теми учеными, которые отваживаются на критику известных и общепринятых концепций, если, конечно, эта критика проводится уважительно (для предмета критики) и тонко. В статье С.Н. Бычкова (которая, как мне известно, многократно шлифовалась и переписывалась) имеет место именно такого рода критика. Я ни в коей мере не могу считать себя специалистом по теории множеств или математической логике, но тем не менее также отважусь высказать некоторые сомнения по поводу оснований такого рода критики. Полагаю, что здесь автор пополняет давний и довольно длинный список критиков того же Кантора, пополнившийся отечественными учеными, особенно в последнее время (например, критика Кантора И.Е. Орловым в середине 1920-х гг. воспроизведена в статье: *Бажанов В.А.* Ученый и «век-волкодав». Судьба И.Е. Орлова в логике, философии, науке //Вопросы философии. 2001. № 11), или Эйнштейна. Впрочем, и сейчас фигура Кантора и предложенные им математические новации привлекают пристальное внимание. Правда, не вполне в смысле критики, а в плане уточнения позиций и поиска более надежных философских оснований теоретико-множественной идеологии (см.: *Feferman S*. Infinity in mathematics: is Cantor necessary? // Feferman S. In the light of logic. Oxford, 1998. P. 28—73).

На уровне моего понимания аргументация С.Н. Бычкова включает следующие *основные* моменты: I) критику понимания Кантором множества как некоторой совокупности, которая может мыслиться как единое целое;.2) утверждение, что это канторовское понимание множества сводит теорию множеств к теории фактически *разрешимых* множеств (т.е. множеств, относительно которых есть способы определения принадлежности или непринадлежности элемента X); 3) различение *внешнего и внутреннего* отрицаний, действительно имеющего некоторое значение для традиционной логики, но которое, по мнению автора, делает неправомерным диагональный метод со всеми вытекающими отсюда последствиями; 4) попытку оперировать множествами (совокупностями, которые удовлетворяют определению) и **не**-множествами (фактически выводя последние из-под эгиды математики).

Данная статья опирается на результат, полученный в 1997 г. в работе: *Бычков С.Н., Шашкин Л.О.* К критике канторовской диагональной процедуры доказательства несчетности континуума // Традиционная логика и канторовская диагональная процедура. М., 1997. С. 22—29. Поэтому следует прежде всего обратиться к анализу содержания этого материала.

Авторы там, в частности, пишут: *Пусть а* (1) < *а* (2) < *а (3)* < ... — *некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел, при построении каждого последующего члена которой не принимаются во внимание никакие дополнительные условия помимо того, что он должен быть больше предыдущего. Относительно любого* *натурального n, для которого уже сформировано как минимум n членов данной бесконечной совокупности, не более чем за n проверок можно выяснить, входит ли данное n в нее или нет. Поэтому по современным представлениям мы должны рассматривать совокупность {a(* 1), *a(2), a(3), ...} как множество (и даже разрешимое множество в смысле теории алгоритмов). В то же время ясно, что, по Кантору, данную совокупность множеством назвать никак нельзя, поскольку неопределенность значения каждого нового члена последовательности исключает наличие какого-либо (пусть даже неизвестного нам} закона».* Это место явно сомнительно, поскольку последовательность может состоять и из единственного элемента, и, кроме того, условие превосходства последующего элемента над предыдущим уже есть (пусть и слабый) закон.

Далее, авторы замечают, что *«в канторовском доказательстве теоремы о том, что мощность множества подмножеств P(X) множества X больше мощности самого X, можно выделить «позитивную часть», относящуюся собственно к диагональной процедуре. Для произвольного отображения f: X →P(X) указывается объект* Z, *который не может принадлежать f(X). Z однозначно определяется как часть множества X, состоящая из всех элементов x, каждый из которых не принадлежит соответствующему подмножеству f(x)».*

А если *X*= *X* или *Z*= Ø? Тогда Z принадлежит *f*(*X*).

Большую смысловую нагрузку авторы возлагают на утверждение, что канторовская диагональная процедура корректна с точки зрения родовидовой логики для конечного и даже счетного множества, если оно является разрешимым. Известно, между тем, что логика может быть построена либо на экстенсиональном (объемном, родовидовом), либо интенсиональном (связь посылок и следствий по содержанию) принципе. Логики, построенные на интенсиональном принципе, принадлежат семейству неклассических логик (оперирующих интенсиональной импликацией, подразумевающих семантику возможных миров, соображения релевантности и т.д.) и, насколько мне известно, в данной ситуации не задействуются. Поэтому рассуждения (явно или неявно) строятся на экстенсиональной (родовидовой) логике. Отсюда зарождается сомнение в справедливости следующего фрагмента:

367

«...Необходимо постулировать, что Z по построению является множеством. Но тогда при специализации требований к Z (что оно должно совпадать с f(t) для некоторого t) противоречие должно, в соответствии с требованиями аристотелевой логики, получаться не с родовым, а именно с видовым признаком (при рассмотрении двух противоположных видов внутри общего рода невозможно выйти за пределы этого рода). На самом же деле противоречие имеет вид "Z не является множеством", поскольку нашелся такой x, что x ∈Z и x ∉Z».

Разделение совокупностей на множества и не-множества представляется искусственным, хотя и может иметь смысл, если накладывать на понятие «множества» сильные ограничения. Во всяком случае весьма общее понимание Кантором множества (как некоторой совокупности, которая может *мыслиться* (выделено мной. — *В.Б.*) как единое целое) не подразумевает такого рода ограничения.

Ситуация здесь сопоставима с определением *понятия* в традиционной логике. Если мы в этой логике не можем точно и однозначно определить объем некоторого понятия (достаточно общий случай), то речь должна, согласно требованиям автора(ов), идти о **не**-*понятиях*. Таковыми, нетрудно догадаться, будут являться большинство человеческих понятий. Эта ситуация уже проигрывалась при появлении первых работ по формализации неформализуемых понятий (см.: *Непейвода Н.Н.* Об уровне знаний и умений // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М., 2000. С. 25).

Наконец, различие внутреннего и внешнего отрицаний для математической логики (и ее, так сказать, универсума) не важно; на уровне сложных суждений, которыми, собственно, и оперирует последняя (равно как и теория множеств), это различие стирается (достаточно вспомнить законы де Моргана; см. также: What is negation? / Eds. Gabbay D., Wansing H. Dordrecht, 1999).

Вышеприведенное определение множества Кантора, вообще говоря, не запрещает одновременной принадлежности и непринадлежности множеству некоторого элементов *X* и не-*X*, хотя в аксиоматике, скажем, *ZF* это уже исключается. Наивная теория множеств «богаче» любой аксиоматической версии; паранепротиворечивая теория множеств, кстати, более соответствует духу оригинальной версии Кантора. Вообразим ситуацию, которая описывается высказываниями *X* не-*X*, когда *X*= не-*X*: по поводу неполучения зарплаты гражданином Н. (столь знакомой отечественным ученым и «прочувственной» ими; эта ситуация воссоздана по мотивам одного из разговоров с Н.Н. Непейводой).
368
Кто-то по поводу этой ситуации выразился: «Н. получил шиш», а кто-то: «Н. получил ни шиша». Одно и то же («пустое» в смысле наличия определенной суммы денег в виде зарплаты) множество описывается утверждениями *X* и не-*X* одновременно. Или это **не**-множество?

Кроме того, если бы диагональный метод действительно был бы порочен (ненадежен), то, вероятно, можно было бы усомниться и в производных результатах, прямо или косвенно основывающихся на теоретико-множественной математике или теоремах Геделя. Однако, скажем, известные результаты Париса—Харрингтона, воспроизводя ситуацию на математическом (а не метаматематическом уровне), только убеждают в справедливости теорем Геделя.

Одним словом, если считать, что доказать — это убедить, то на уровне моих знаний и умений (безусловно, весьма слабых в области теории множеств) аргументация и настоящей статьи, повторяющей главные пункты статьи 1997 г. и нацеленной на опровержение диагонального метода (равно как и доказательства теорем Геделя), мне представляется пока недостаточной. Тем не менее нельзя не отдать должное остроумию, оригинальности и остроте мышления С.Н. Бычкова, который привлек нетривиальные соображения для критики диагонального метода Кантора.

Д.И. Виннер

Актуальность пересмотра инструментария метаматематики с позиций, приведенных в статье С.Н. Бычкова «Метаматематика и опыт», не вызывает сомнения у автора данного комментария. Поводом к написанию последнего послужила излишняя, на взгляд комментатора, осторожность, с которой автор статьи использует результаты указанных в списке литературы работ [9—11; 16]. Вне всякого сомнения, эта осторожность не является безосновательной, что подчеркивается автором статьи в пятом параграфе «Еще раз о логике», где он приводит ссылки на оставшиеся без опубликованного ответа работы В.К. Петросяна [17; 18]. Эти работы содержат принципиальные критические замечания к работам [9— 11], а также к работе автора данного комментария «О различении внешнего и внутреннего отрицания в традиционной логике», послужившей основой для работы [16]. И хотя аргументы, приведенные в статье «Метаматематика и опыт», позволяют ее автору обеспечить замкнутое доказательное изложение без ссылок на критикуемые В.К. Петросяном положения указанных выше работ, рассмотрение последних, и прежде всего работы «О разли-
369
чении внешнего и внутреннего отрицания в традиционной логике», в свете данной статьи мне кажется уместным, поскольку даст возможность читателю более полно обозреть обсуждаемые в статье вопросы о соотношении родовидовой логики с опытом, теориями первого порядка и канторовской диагональной процедурой.

Прежде всего хочу отметить, что существует один общий момент, с которым согласны все без исключения авторы указанных выше статей, несмотря на расхождения по другим вопросам, и который впервые прямо был указан в работе «О различении внешнего и внутреннего отрицания в традиционной логике» — в *родовидовой логике возможно отождествление внешнего и внутреннего отрицания.* Возможность этого отождествления возникает благодаря тому, что операция отрицания в родовидовой логике может быть замкнута внутри рода (не выводит за рамки рода), что позволяет получать конструктивные отрицательные утверждения. Проблема только в том, что описание родовидовой структуры требует обращения к семантическому уровню предметной области, что невозможно в рамках инструментария *формальной* логики. И хотя В.К. Петросян отрицает кантовское определение формальной логики как логики, отвлекающейся от всякого содержания, в работе [17, с. 31, 58] при описании своей гармонической логики он совершенно определенно выносит семантический уровень за рамки формального аппарата. На вход формальному аппарату в гармонической логике разрешено подавать только «актуальную родовидовую иерархию».

На мой взгляд, это остается единственно правильным путем развития логических систем с точки зрения предотвращения различного рода парадоксальных ситуаций, о чем косвенным образом свидетельствуют выводы статьи «О различении внешнего и внутреннего отрицания в традиционной логике». Более того, тенденция к созданию иерархических родовидовых логических систем отчетливо прослеживается в истории развития систем логического программирования (системы Ван Роя), что лишает практической новизны изыскания В.К. Петросяна в этой области.

Здесь необходимо отметить, что сам вопрос различения внешнего и внутреннего отрицания в логике впервые был поставлен в рамках семинара «Естественный и искусственный интеллект», именно отталкиваясь от практики логического программирования, т.е. исходя из эмпирических оснований. И, считая указанный выше путь развития логических систем единственно правильным с точки зрения устранения причин логических парадоксов, я в то же время склонен рассматривать его как тупиковое направле-

370

ние в смысле продолжения *логической парадигмы искусственного интеллекта.* Безусловно, этот комментарий требует детального и строгого обоснования, которое не может быть проведено в рамках комментария к статье. Поэтому позволю себе здесь ограничиться лишь постулированием тезиса, который в общем виде может быть сформулирован следующим образом: основной задачей логических систем в рамках систем искусственного интеллекта является организация *вывода,* который в общем случае следует понимать как построение решений. *Системы, которые в качестве входных параметров используют иерархическую родовидовую структуру предметной области, осуществляют не вывод, а поиск в рамках уже имеющегося в этой структуре пространства решений, что позволяет относить их скорее к системам поиска в БД, чем к системам вывода.* Таким образом, получается замкнутый круг: чтобы избежать парадоксов различного характера, необходимо на уровне семантики жестко ограничить родовидовую структуру, что и предлагает сделать В.К. Петросян. Но создание родовидовой структуры фактически означает построение пространства решений задачи (класса задач), и формальному аппарату остается только осуществлять поиск в этом пространстве. Доказательство этого тезиса в общем виде, как было сказано выше, выходит за рамки данного комментария. Что же касается частного случая с гармонической логикой, то она пока существует только в проекте, который, к сожалению, еще очень далек не только от программной реализации в качестве системы программирования, но и от формального выражения в виде исчисления. А как показывает практика критического анализа существующих логических систем, понять степень решения посредством их вышеупомянутых вопросов можно только одним способом: отделить их от человеческого фактора и доверить решение конкретной задачи с их помощью компьютеру. Именно этот момент — тупиковый характер родовидовых систем, с точки зрения продолжения логической парадигмы искусственного интеллекта, — и является основным камнем преткновения в моей полемике с В.К. Петросяном, о чем и было заявлено во время выступления последнего на семинаре «Естественный и искусственный интеллект» с критикой различения внешнего и внутреннего отрицания. И именно поэтому работа [18] осталась без опубликованного ответа — автор данного комментария не счел необходимым ломать копья на частных вопросах, в то время когда есть не просто глобальные противоречия, а скорее, непонимание оппонентом самой постановки проблемы.

С.Л. Катречко[1]

Обращение к анализу используемых в (мета)математике логических средств и выявление лежащих в основании метаматематики онтологических и гносеологических допущений, составляющих (на мой взгляд) лейтмотив данной работы, представляется крайне важным для осмысления статуса современного математического знания (как математико-метаматематического комплекса), основанного на теоретико-множественной парадигме. В рамках культурологической концепции Ф. Клейна, который выделял «творческие» и «критические» периоды в развитии математики, данный подход, несомненно, относится к «критической» работе. Однако подобная, я бы сказал, схоластическая проработка необходима для дальнейшего движения вперед и перехода к новому «творческому» периоду.

Разделяя в целом этот схоластический настрой, связанный с проработкой концептуальных основ современного математики, я хотел бы высказать ряд дополнительных замечаний, не учтенных или не выявленных в данном анализе.

Сначала дам свое видение представленной в статье проблемы и попробую «восстановить» некоторые из ее важнейших и неявно принимаемых пресуппозиций, поскольку без этого не будет понятен смысл моих замечаний.

Математика оперирует с достаточно абстрактными — математическими — «объектами», статус и способы введения-обоснования которых принципиально отличаются от чувственно-воспринимаемых (опытных) объектов, имеющих «временной характер» (парафраз С.Н. Бычкова из раздела 1). Особенностью современной математики (математики XX в.) является использование в качестве своего концептуального основания *теории множеств,* восходящей к построениям Г. Кантора. Однако обнаружение теоретико-множественных (а впоследствии и логико-семантических) парадоксов привело к необходимости уточнения исходных теоретико-множественных понятий и разработке особых обосновательных — метаматематических — процедур с целью недопустимости подобных парадоксов в будущем. Речь здесь идет прежде всего о гильбертовской финитной метаматематике. С другой стороны, новый концептуальный базис математического знания требовал и изменения его логических оснований, а именно замены традиционной силлогистики на современную логику, построенную по фрегевской концептуальной схеме *«функция-аргумент»*[2], принципиально иной по сравнению с традиционно-логическим *субъектно-предикатным* подходом к анализу предложений[3]. Вычленение же из состава математики обосновательных метаматематических процедур предполагает решение проблемы концептуальной согласованности математики и метаматематики, т.е. сходства их логико-онтологического базиса. Отсутствие явной экспликации и попыток решения этой проблемы, по мнению автора статьи, составляет один из «парадоксов» современной

---

[1] Полный электронный текст комментария см.: http://www.philosophy.ru/library/ksi/philmath_2001.html

математики, приведший к появлению ряда результатов об ограниченных возможностях современных математических формализмов, среди которых видное место занимают известные теоремы Геделя. Общая схема предлагаемого в статье решения — выявление «рассогласования» в логическом базисе математики и метаматематики с целью его устранения.

Перейдем теперь к критической части комментария и выскажем общий контртезис (имеющий иерархическую структуру) к предлагаемому тексту (формат комментария не позволяет контртезис аргументировать подробно).

Существующая математика и метаматематика прежде всего благодаря работе Г. Фреге и Б. Рассела вполне согласованны. Единым онтологическим базисом современного логико-математико-метаматемического комплекса является *номиналистическая установка,* постулирующая наличие только единичных объектов (индивидуумов) и единого (универсального) универсума, что делает излишним введение родовидовой иерархии [или расселовского теоретико-типового структурирования, что оказалось «тупиковой» программой развития (обоснования) математики, хотя и в этом случае реализуется идеал единого математического универсума, структурированного вертикально]. Логическим базисом этого математического комплекса является единая логика фреге-расселовского типа (подробнее об этом типе формализмов см., например, работу В.А. Смирнова «Логические методы анализа научного знания» или работы Е.Д. Смирновой). То есть вся современная логика успешно — за счет различных редукций, погружений, дефинициональных (эквивалентных) переформулировок — «перестроена» на базе единой, восходящей к Г, Фреге концептуальной схеме «функция — аргумент».

---

[2] Заметим, *что* на этой основе возможно создание единого логико-математического комплекса, так как и логика и математика становятся сходными «функциональными» дисциплинами.

[3] В работе эта новая логика названа «канторовской», однако концептуальный базис этой логики был заложен Г. Фреге (частично Дж. Пеано), Б. Расселом и Д. Гильбертом, в то время как сам Г. Кантор опирался в основном на булеву логику классов, которая в рамках нашего дискурса вполне может быть квалифицирована как традиционная — аристотелевская — логика.

1. Существенной чертой данной номиналистической установки является экстенсионально-синтаксический характер построения современных (математических) формализмов. В этом смысле *«финитный подход Гильберта»* не может *«акцентировать внимание на вещественно-пространственном характере [метаматематических] объектов»* (С.Н. Бычков). Метаматематические, как, впрочем, и математические, объекты у Д. Гильберта имеют ярко выраженный *синтаксический*, или "знаковый", характер (что, кстати, вполне разделяет и К. Гедель в процитированном месте работы [4, с. 299]). Математические (метаматематические) объекты рассматриваются Гильбертом (я думаю, что и большинством современных математиков) как знаковые, или синтаксические, конструкции, требующие определенных, строго фиксированных синтаксически "правил работы" с ними. Поэтому (отмечаемый Геделем в цитате) "пространственно-временной" характер метаматематических объектов имеет явно метафорический смысл, так как пространственно-временной статус математических (или метаматематических) объектов принципиально отличается от пространственно-временного статуса (физических) вещей. Здесь, скорее, можно говорить о структурно-комбинаторном "пространстве" гильбертовской (формальной) установки, что впоследствии было с блеском реализовано на методологическом уровне в неопозитивизме (логическом позитивизме), провозгласившем отказ от "смысла" в пользу чисто экстенсионального подхода (в этом смысле можно говорить о невостребованности призыва Геделя к использованию "смысла", "мысленных образов" в последующей логико-математической традиции), а в прагматическом отношении выразилось в мощнейшем развитии алгоритмо-машинных математических процедур, основанных на *чисто синтаксических {формальных) процедурах* (реализованных, например, в машине Тьюринга, которую не отменяет и

привлечение более мощных *алгоритмов с оракулами*).

1.1. Однако синтаксическое единство современных логико-математических формализмов не учитывает глубоких семантико-онтологических различий современной и традиционной – родовидовой, в терминологии автора статьи, – логик. [Заметим, что используемое в статье название "родо-видовая логика" представляется не совсем удачным, так как существует несколько отличных друг от друга традиционных логик, различным образом решающих вопрос о взаимосвязи предикатного (внешнего) и акцидентного (внутреннего) отрицаний. См. по этому поводу, например, работу В.А. Бочарова "Аристотель и традиционная логика", где выделены различные "родовидовые" логики: например, собственно ари-

374

стотелевская логика, традиционная (школьная) логика (как правило, именно она выдается за родовидовую логику как таковую и преподается в российской высшей школе), лейбницевская, больцановская, кэрроловская...] Поэтому вопрос о "согласовании" семантико-онтологических оснований двух типов логик остается не только нерешенным, но даже и незамеченным (в этом отношении я солидарен с автором статьи). Наиболее перспективным, т.е. учитывающим семантические различия, здесь представляется подход В.А. Смирнова, который предложил комбинированные – в частном случае двухуровневые – логики (см.: Логико-философские труды В.А. Смирнова / Под ред. В.И. Шалака. М., 2001), поскольку данный подход показывает (а это главное!) принципиальную возможность "согласования" традиционного и современного
логического подхода.

2. В рамках обрисованной выше номиналистической онтологии и пропозиционально-предикатной структуры современной математической логики, по существу, теряет смысл один из важнейших аргументов данной статьи, опирающийся на различение внешнего и внутреннего отрицаний. Замечу, что на уровне пропозициональной логики никаких внутренних отрицаний в принципе быть не может. Поэтому приведенная в разделе 4 (см. также другие работы С.Н. Бычкова и Д.И. Виннера) интерпретация ⌉ *В как внутреннего отрицания "число 9 есть не-голубое*" неправомерна, так как в пропозициональной логике внутренняя структура высказывания вообще не анализируется. При переходе же к следующему структурному уровню – логике предикатов первого порядка, отождествление внутреннего и внешнего отрицаний вполне оправданно номиналистической – индивидной – переформулировкой статуса логических (математических) объектов и введением единого, без родовидового – "горизонтального" – разбиения, универсума, что на синтаксическом уровне реализуется введением (либо в аксиоматике, либо в правилах вывода) соответствующих редукций отрицаний разной степени глубины.

2.1. Поднимаемая в данной и предшествующих статьях автора (вместе с соавторами) тема различения внешнего и внутреннего отрицаний, безусловно, интересна, так как высвечивает одну из неявно принимаемых посылок современных математических рассуждений. Однако проводимое в них различение не учитывает ряд принципиальных моментов, на которых я и хотел бы остановиться (см. подробнее об этом в моей работе "К вопросу о различении отрицаний": http://www.philosophy.ru/library/ksl/negol.html). Во-первых, как по-

375

казывает предварительный анализ, в силлогистической логической форме суждения *S есть P»,* помимо собственно «внешнего» — пропозиционального — отрицания *(«**Неверно**, что S есть P»),* формально можно построить следующие четыре «внутренних» отрицания: 1. Отрицание субъекта суждения *«**Не**-S есть P»; 2.* Отрицание содержательного признака *(акцидентное отрицание)* суждения «*S есть*

***не**-P»;* 3. Два предикатных отрицания (отрицание связки суждения) *«S не есть P»:* 3.1. «*S* (**не есть**) *P» — субстанциальное отрицание* связки «есть»; и 3.2. «*S* (**не**) (есть *P)»* — (собственно) *предикатное отрицание* «есть *P* Приемлемой *интерпретации* субъектного отрицания (случай 1) не существует, а случай 3.2 может быть отождествлен с акцидентным отрицанием (случай 2). Поэтому для более точного и полного анализа надо рассмотреть взаимосвязь не двух (внешнего и внутреннего), а по крайней мере трех различных отрицаний, причем с учетом того, что на месте субъекта могут находиться четыре типа объекта (индивиды, неопределенные индивиды Фреге—Уемова, (распределенные) классы Рассела, собирательные классы («кучи») Ст. Лесьневского, множества Кантора). Отметим, что наш предварительный анализ показал эквивалентность пропозиционального, предикатного и акцидентного отрицаний в случае индивидуумов (обратим внимание на то, что в примере, с помощью которого демонстрируется различие отрицаний, в качестве субъекта фигурирует общий термин «число»). Во-вторых, интересно было бы установить связь между различением внешнего и внутреннего отрицаний и пониманием отрицания в интуиционистской (конструктивистской) логике, так как неприятие закона исключенного третьего и снятия двойного отрицания свидетельствуют об отличном от классической логики (математики) понимании «свойств» отрицания. Понятно, что в случае интуиционистской математики тезис статьи «подвешивается» и, видимо, должен быть «сужен» лишь до области классической математики. В-третьих, мощным подспорьем при анализе операции отрицания может служить глубокое замечание русского логика Н.А. Васильева о том, что операция отрицания (в отличие от других логических операций) является не непосредственной, а опосредованной — двухсоставной — операцией. «Отрицание» какого-либо признака — например, красноты —- предмета происходит так: сначала (на чувственном уровне) постулируется «позитивный» факт (в нашем случае, например, синева предмета), а уже потом (умозаключая) вводится собственно «негативный» факт отсутствия соответствующего признака.

3. Следующим интересным развитием темы статьи является концептуальное обсуждение базисного для современной математики понятия «множества». Однако при этом надо иметь в виду существенное концептуальное переосмысление исходной канторовской интуиции множества, осуществленное впоследствии Расселом, на которое до сих пор не обращали должного внимания (подробнее см. мой текст «Теоретико-множественная парадигма математики и ее возможные альтернативы»: http://www.philosophy.ru/library/ksl/mathlekl.html). Если говорить коротко и несколько огрубление, то вместо канторовского понятия *множества* (или ряда понятий «множества», с учетом неоднозначности и флуктуации данного понятия у самого Кантора, о чем упоминает и автор), в современных формализмах математики используется именно расселовское понятие *класса* (хотя реальная ситуация выглядит не так однозначно с учетом различных аксиоматизаций теории множеств, среди которых аксиоматика Цермело — Френкеля, видимо, максимально близко в концептуальном плане соответствует канторовской интуиции множества).

Остановлюсь на различении *«множество vs. класс»* подробнее. Развитая математическая практика должна уметь работать с разными — по степени общности— абстрактности — типами объектов (проблема «части — целого»). В традиционной логике эту функцию осуществляла идущая от Платона и Аристотеля *родовидовая иерархия* (см. цит. выше работу В.А. Бочарова). Современная математика, начиная с Г. Кантора, отказавшись от традиционной концептуальной схемы «вид — род», предложила альтернативные способы решения проблемы «часть — целое». Прежде всего на роль этой замены предлагается отношение «элемент – множество», *отношение принадлежности* (∈, однако, как показал Г. Фреге (см., например, его статью «Логика в математике»), вместе с этим в теории множеств с необходимостью вводится и другой — более прямой «наследник» отношения «вид — род» — аналог отношения «часть — целое», а именно *отношение включения* ($\subseteq$), причем эти два в общем-то разных отношения не различаются и трактуются как единое — в концептуальном плане — отношение [например, предложения «Сократ есть человек» (отношение принадлежности) и «Человек есть животное» (отношение включения) могут анализироваться сходным образом]. Анализ Фреге показал, что именно это неразличение и является одним из источников парадоксальности теоретико-множественной концепции[4]. Дальнейшее осмысление этой «несогласованности» канторовской интуиции породило ряд альтернативных линий развития теоретико-множественной установки. Во-первых, это по-своему последовательное решение Цермело —Френкеля, которые в рамках своей аксиоматики теории множеств фактически отказались от оперирования понятием «элемент», заменив его на понятие «подмножество». Во-вторых, это являющийся развитием различения Фреге подход Ст. Лесьневского, который четко различил выделенные Фреге отношения и развел их по разным структурным уровням математической теории: отношение принадлежности фигурирует у него в *онтологии* (первый уровень теории), а отношение включения — в его *мереологии* (второй уровень теории, где, собственно, и формализуется отношение «часть — целое»). Своеобразное — третье — решение указанной проблемы было предложено Расселом, которое, как я уже говорил выше, является неявным базисом современной математики. В концептуальном отношении оно заключалось в замене канторовского понятия «множества» на понятие «класс». Вот как Рассел вводит понятие «класс»: «В настоящей главе [глава «Классы»] мы будем обсуждать ***слово the во множественном числе****:* обитатели Лондона, сыновья богатых людей и т.п. Другими словами, мы будем иметь дело с классами (выделено мной. — *С.К.)» (Рассел Б.* Введение в математическую философию. М, 1996. С. 165). Заметим, что это принципиально отличается от канторовской интуиции «множества», которое (при всех флуктуациях его позиции) мыслится как нечто «целое» (ср. с платоновским «эйдосом»), т.е. как самостоятельная сущность следующего онтологического уровня, в то время как расселовский класс мыслится как «множественное the». Согласно терминологии Лесьневского, расселовский класс является *распределенной множественностью,* в которой исходные элементы не теряют своей индивидуальности, т.е. это не новое онтологическое образование, не новое «целое», а как бы временное (гносеологическое) объединение определенных — «хорошо различимых» (Кантор) — индивидуумов (в английском языке этому соответствуют грамматические конструкции с определенным артиклем the), с каждым из которых как таковым мы можем работать и дальше. Понятно, что таким образом Рассел достигает определенной «гомогенности» математического универсума и введение онтологической родовидовой «неоднородности» излишне. Канторовское понимание «множества» задает принципиально другое — «слоистое» — строение математического универсума, что является альтернативой традиционной родовидовой иерархии (заметим, что именно поэтому представлять родовидовую иерархию, используя отношение включения, не совсем корректно), так как «множества» выступают как сущности следующего (мета)уровня, причем они являются полноценными (цельными) «объектами», с которыми можно работать (хотя и по особым правилам) наравне с индивидуальными объектами. Анализ работ Кантора показывает (см. предшествующие статьи автора), что его мысль бьется над экспликацией введенной им исходной интуиции:

---

[4] Удивительно, что Фреге подпал под «гипноз» расселовского парадокса, так как все «средства» для его разрешения у него уже были; о нашем подходе к разрешению подобных парадоксов см. «О парадоксе Рассела»:
http://www.philosophy.ru/library/ksl/paradox 1.html

в частности, позже он выделяет «неконсистентные множественности», которые собственно *множествами,* т.е. чем-то «целым», из-за своей неконсистентности не являются (в этой связи заметим, что понятие расселовского класса — в отличие от канторовского множества — является «всеядным»: в расселовские классы мы можем объединять все что угодно, сущности любого рода).

Судя по всему, полноценная экспликация канторовской интуиции *множества,* определенный шаг в направлении к которой уже сделан в комментируемой статье, — дело будущего. Здесь же рискну предложить одну аналогию, проясняющую, на мой взгляд, канторовскую интуицию. Представляется, что канторовские множества можно рассматривать как «слитки», в которых исходные составляющие элементы (т.е. те, из которых образован этот слиток) «исчезли» (например, из ста золотых монет сплавили 100 г золога, исходные монеты исчезли и превратились в «цельный» золотой слиток). В этом смысле образование множеств — необратимая операция, так как исходные элементы исчезли, «растворились» в составе образованной целостности: конечно, мы можем снова подучить из слитка какое-то количество («вторичных») частей-элементов, но это не будет тождественно исходным — «первичным» — элементам. «Мощность» множества может быть соотнесена с «объемом» полученного слитка, а операция взятия подмножества — с последующим разделением слитка на «вторичные» элементы-подмножества. Вводимая же Кантором знаменитая диагональная процедура — попытка демонстрации того, что из слитка можно получить гораздо большее количество «вторичных» элементов (например, 101-й «элемент»; закавыченность здесь указывает на «вторичный» характер этого элемента). В принципе, полученное превосхождение числа исходных элементов не удивительно, так как предшествующая история математики показывает, что именно *обратные операции* (вычитание, деление, взятие радикала) приводят к «выходу» за рамки существующих математических объектов и существенному расширению исходного математического универсума.

379

А.В. Коганов

Аксиома о существовании множества всех подмножеств любого множества сама по себе не только не очевидна, но и не выполняется в некоторых уточненных модификациях теории множеств.

Например, множество алгоритмов для заданной универсальной машины не конструктивно. Нет алгоритма, перечисляющего все алгоритмы. Но более широкое множество программ для той же машины вполне конструктивно. Это натуральный ряд чисел. Некоторым числам, интерпретированным как программы, соответствуют процессы, не дающие остановки за конечное время работы машины. Они не являются алгоритмами по определению. Поэтому их и не удается отсечь алгоритмически.

Можно рассмотреть полуопределенные конструктивные множества, в которых возможна проверка на принадлежность каждого их элемента, но не обязательно возможна проверка на несоответствие требованиям включения в это множество каждого внешнего объекта. Тогда множество алгоритмов попадает в этот класс. Каждый алгоритм (с фиксированными исходными данными) даст остановку за конечное время. Но поскольку их конструктивный пересчет невозможен, это подмножество множества программ несчетно. Само же множество всех программ счетное. Таким образом, на классе полуопределенных конструктивных множеств возможно несчетное подмножество у счетного множества. Это нарушает другую аксиому классической теории множеств о том, что мощность подмножества не выше мощности объемлющего множества.

В интуиционизме, где каждая теория оснащена наибольшим допустимым числом ***N***, все множества конечны. Это гарантирует существование всех подмножеств у любого множества в интуиционистской теории. Число элементов А любого множества в такой теории не выше N. Но тогда число подмножеств 2^K и при $K > \log(N)$ имеем $2^K>N$. Это означает, что из существования каждого подмножества у некоторого множества не следует существование множества всех этих подмножеств. Аксиома теории множеств о существовании множества при существовании каждого его элемента также оказалась недостоверной при уточнении смысла термина «множество».

В частности, в интуиционизме нет множества всех двоичных последовательностей. Длина каждой последовательности равна N, а число различных последовательностей $K=2^N$. При всех **N** выполнено недопустимое для множества условие $K > N$.

Это показывает, что внешнее отрицание в теории множеств связано с изменением типа логики. Например, в теореме Г. Кантора

380

о диагональном процессе отрицание возможности нумерации континуума можно трактовать как его несчетность, а можно интерпретировать как несуществование самого континуума (в некоторой логической системе).

Интересно, что этот факт получен в конструктивной и даже в конечной модели теории множеств. В данном случае внешнее отрицание интерпретируется через неоднозначность выбора логической системы. Заметим, что при снятии требования «часть меньше целого» исчезает и парадокс Кантора о множестве всех множеств. Множество его подмножеств одновременно и больше по мощности, и лежит внутри максимального по вложению множества. Это показывает эффективность внешнего отрицания при анализе парадоксов теории. Снять парадокс можно пугем расширения интерпретаций теории.

В. К. Петросян

По существу комментируемой статьи имею сказать следующее.

1. По моему мнению, метаматематика — в ее гильбертовской и постгильбертовской версиях — изначально глубоко наралогичная квазинаучная дисциплина, поскольку она пытается (кроме прочего) решить две априори неадекватные задачи: а) обосновать возможность доказательства непротиворечивости математической теории вообще и б) доказать непротиворечивость изначально противоречивой канторовской теории множеств.

а) Доказательство непротиворечивости произвольно взятой математической теории невозможно, поскольку единственным источником самопротиворечивости в математике является недостаточная степень определенности употребляемых терминов (использование в той или иной теории объектов, де-факто — зачастую латентным образом — обладающих свойствами А и не-А, например, потенциальностью и актуальностью, завершенностью и незавершенностью и т.д., одновременно и в том же отношении).

Следствием изначальной недостаточной определенности терминов любой математической теории является ситуация, когда в результате серии непротиворечивых дедуктивных рассуждений латентная самоконтрадикторность свойств того или иного объекта (одновременность А и не-А) проявляется в явном виде как самопротиворечивость теории в целом. Устранить подобную противоречивость можно только путем апостериорного переопределения самопротиворечивого объекта теории (элиминирования из множества его свойств либо А, либо не-А). Как правило, подобное переопределение (уточнение смысла) объекта теории влечет и

381

необходимость полной реконструкции данной математической теории.

Иными словами, ни одна математическая теория (вопреки догматам метаматематики) не может быть изначально абсолютно непротиворечивой в силу неустранимости возможной латентной неопределенности (недостаточной логической точности, семантической амбивалентности) ее основных объектов. Тем не менее всякий раз, когда то или иное конкретное противоречие выявляется, его можно достаточно легко устранить путем элиминирования одного из двух взаимно альтернативных свойств ранее недостаточно точно определенного объекта, порождающих проявленное самопротиворечие.

Очевидно, что метаматематика, пытающаяся *любой ценой* доказать непротиворечивость канторовской теории множеств *невзирая на доказанность ее противоречивости* (по крайней мере на уровне существования «парадоксов», не говоря уже об аргументации, приводимой в моих работах) к подобного рода рассуждениям абсолютно нечувствительна, хотя приведенная выше критика является вполне *«внутренней».* Это говорит о превращении метаматематики в своего рода самодостаточную квазирелигию со своими *богом, раем, адом,* догматикой, ритуалом и прочими необходимыми атрибутами и аксессуарами. В этом смысле любая критика метаматематики — «внешняя» или «внутренняя», не важно — никогда не будет признана корректной ведущими адептами этой паралогичной ментальной традиции.

б) Доказательство непротиворечивости канторовской теории множеств невозможно как в силу пункта а), так и в силу того, что к сегодняшнему дню выявлены конкретные самоконтрадикторные свойства базовых объектов этой теории, порождающие ее противоречия (потенциальность — актуальность, не-завершенность — завершенность, быть числом — быть множеством чисел и т.д.) (см. работу [18] из списка литературы, приложенного к статье С.Н. Бычкова).

Таким образом, изначальная *внутренняя* паралогичность и жесткая аксиологическая детерминированность метаматематики не могут быть устранены *внутренними* же средствами, и любые попытки логически корректных рассуждений в рамках ее базовых интенций, принципов и понятий, по моему мнению, заранее обречены на неудачу.

2. С.Н. Бычков был совершенно прав, когда говорил, что моя работа [17] проблематизирует исчисление предикатов и метаматематику в целом в семантическом аспекте. Возможно, что семантизация логики, осуществленная мною в [17], действительно имеет «внешний» характер по отношению к метаматематике, хотя, по моему мнению, это не так, поскольку эта научная дисциплина перенасыщена паралогичной семантикой и тезис о ее априорной внесемантичности не более чем «пропагандистское прикрытие». Это легко показать на примере теоремы Геделя о неполноте, о которой шла речь в комментируемой статье С.Н. Бычкова.

Теорема Геделя о неполноте паралогична, на мой взгляд, не потому, что в ней в каком-то виде используется самопротиворечивая канторовская «диагональная процедура» (это уже n-й уровень логической неадекватности упомянутой теоремы), а главным образом по причине изначальной внелогичности решаемой в ней проблемы и общего замысла доказательства.

В своих ранних работах («О разрешимости парадоксов...», «Общий кризис...» и др.) на примере парадокса «Лжец» и ему подобных квазикорректных рассуждений я показывал, что метапредикаты, предикаты суждений (истинно—ложно, доказуемо—недоказуемо, выводимо—невыводимо, противоречиво-непротиворечиво и т.д.) в принципе неприменимы к самому суждению, содержащему эти оценки, т.е. не могут быть использованы самореферентным образом, поскольку такое суждение просто перестает быть суждением.

В этом смысле использование в механизме любого доказательства изначально паралогичного объекта-суждения, «утверждающего *собственную невыводимость»,* — это уже «логический криминал». Если же учесть, что рассматриваемый объект у Геделя даже *не суждение,* а *число,* это многократно больший «логический криминал», поскольку *числу* совершенно произвольным образом приписываются свойства *суждения* (объекта совершенно иной природы), которыми первое в принципе обладать не может.

По моему мнению, невыразимая по степени своей паралогичности *абсолютная* *семантическая всеядность* метаматематики, процветающая под вывеской *«полной свободы от всякой семантики», —* это ментальный феномен, который еще будет всесторонне изучаться будущими историками математики как пример массовой семантико-логической галлюцинации, аналогичной по своей природе «платью голого короля».

3. С.Н. Бычков утверждает, что критика формальной логики и теории множеств Г. Кантора, представленная в моих работах [17; 18] «не затрагивает аргументацию настоящей работы». Это неверно в двух отношениях.

Во-первых, я утверждал в [18] (и остаюсь при этом мнении сейчас), что понятие «потенциальная бесконечность» само по себе изначально самопротиворечиво в том смысле, что оно пытается объединить в одном объекте-множестве и *уже* существующие, и *еще не*-существующие элементарные объекты (числа, точки, подмножества и т.д.) — в противоречие известному (и совершенно

383

справедливому) положению Аристотеля о невозможности истинностной оценки суждений о будущем (или, что тождественно, о настоящем и будущем одновременно).

Поэтому пытаться основывать *не-множества* на этот раз на абстракции *«потенциальной бесконечности»* еще более контрпродуктивно (противоречиво), чем на понятии *«актуальной бесконечности»,* как ранее.

Во-вторых, суть моей критики (в [18]) позиции С.Н. Бычкова—Л.О. Шашкина относительно их идеи *не-множеств (совокупностей)* сводилась к двум основным тезисам: (I) *объект М (немножество,* или *совокупность),* обладающий свойствами А и не-А одновременно и в том же отношении, изначально не может быть (в противоречие тому, на чем настаивают С.Н. Бычков и Л.О. Шашкин) легитимным объектом теории множеств Кантора (в любой из ее классических и современных разновидностей), поскольку это противоречит *принципу когерентности (самонепротиворечия),* являющемуся ключевым основанием этой теории; (2) даже если (условно) принять правомерность (легитимность) существования самопротиворечивого *объекта М (не-множества)* в теории множеств Кантора, то *отсутствие предположения, что некоторый объект S является множеством,* еще не делает *S* автоматически *не-множеством (объектом М, совокупностью);* это утверждение нужно доказывать, т.е. опровергать утверждение, что *S — множество,* чего в работах [9—11] сделано не было.

Я считаю, что приведенные критические доводы применимы к понятию *не-множества* в общем случае — независимо от того, в какой предметной области оно используется (в том числе в сфере метаматематики).

Л.О. Шашкин

В рассуждениях пункта 2 комментируемой статьи различение множеств и «не-множеств» не предполагает смыслового противопоставления внешнего и внутреннего отрицаний, рассматривавшегося в приведенных в списке литературы комментируемой статьи работах [9—11]. Однако хотя в указанных работах подобное противопоставление использовалось *в общем виде* в качестве одного из аргументов, в действительности, как будет показано ниже, для сохранения сформулированных в них результатов достаточно рассмотреть *возможность* различения отрицаний в конкретных случаях. Это позволяет снять возражения, касающиеся работ [9—11], упомянутые С.Н.Бычковым в последнем параграфе статьи.

384

Одно из критических замечаний, содержащихся в работе [18], на которые ссылается С.Н. Бычков, выглядит следующим образом: «По моему мнению, утверждение, что "в современной теоретико-множественной математике актуальная и потенциальная бесконечности не противопоставляются друг другу" [цитата из работы С.Н. Бычкова, Л.О.

Шашкина "Канторовская диагональная процедура и непротиворечивость теории множеств"] — весьма странное заблуждение или осознанная попытка искажения фактов» [18, с. 50]. Тем самым авторам упомянутой работы вменяется в вину оперирование некоторой *неопределенной* бесконечностью. В действительности, и это весьма существенно для концепции указанных работ, подобная неопределенная позиция присуща большинству работающих математиков, стремящихся обходить острые углы, связанные с нерешенными проблемами философского обоснования математики. Например, с позиции образного мышления сама бесконечность может восприниматься как неопределенность (см.: *Барабашев А.Г.* Бесконечность и неопределенность // Бесконечность в математике. М., 1997). За пределами собственно теории множеств (в алгебре, теории чисел, геометрии, математическом анализе) выбор абстракции бесконечности (потенциальной либо актуальной) не столь существен для получения конкретных математических результатов. Различие оттенков можно обнаружить, например, при сравнении формулировок, использующих конструкции «...для каждого...» и «...для всех...». Так, для теоремы о существовании нуля непрерывной функции, значения которой на концах отрезка имеют разные знаки, не важно, под каким углом зрения рассматривается совокупность всех подобных функций: в теореме рассматривается (произвольная) фиксированная функция, относительно которой только и доказывается утверждение. Утверждение можно уточнить, применяя формализм теории множеств. В этом случае речь пойдет об актуально бесконечном множестве всех непрерывных на отрезке знакопеременных функций. Однако подобная теорема имеется и в конструктивном математическом анализе, который не использует актуальную бесконечность.

Обращение к бесконечным множествам, в частности, применение доказательства от противного при анализе их свойств (как это происходит в [18]), предполагает непротиворечивость самого понятия актуальной бесконечности. Известно, что «наивная» канторовская теория множеств при обращении к понятию бесконечности сталкивается с парадоксами. Непротиворечивость актуальной бесконечности в аксиоматической теории множеств связана с центральным вопросом — непротиворечивостью той или иной системы аксиом, выбранной для формализации данной теории.

385

Формализация сама по себе гарантирует только выполнение «слабого» варианта закона тождества: неизменный знак фиксирует устойчивость отражаемого им «смысла» («смысл» при этом зафиксирован выбранной системой аксиом). Утверждение об отсутствии противоречий, о «самотождественности» объектов теории требует доказательства, в противном случае оно является лишь постулатом, с которым можно и не соглашаться. Рассуждение же работ [9—11] проходит и для бесконечности *неопределенного* характера (именно с такой неопределенной бесконечностью имеют дело алгебра, теория чисел, геометрия, математический анализ), поскольку критика канторовской диагональной процедуры в указанных работах не предполагает непротиворечивости понятия актуальной бесконечности.

Очевидно, что понятие бесконечности шире понятия бесконечного множества, и представление о потенциальной бесконечности неприменимо к *множеству* (в канторовском смысле), так как после добавления каких-либо элементов следует говорить уже о двух множествах — старом и новом. В теории множеств рассматриваются только актуально заданные конечные и бесконечные множества. Математика, основывающаяся на теоретико-множественных представлениях, «позволяет себе рассуждать о "бесконечных множествах" как о законченных неконструктивных "объектах"» *(Марков А.А., Нагорный Н.М.* Теория алгорифмов. М., 1996. С. 11). Таким образом, в рамках канторовской теории потенциальную бесконечность правильнее представлять как актуально бесконечную систему конечных множеств. Другой способ моделирования потенциальной бесконечности заключается в определении отношения линейного порядка на счетном множестве, задающего «последовательность добавления элементов». Таким образом, понятия потенциальной и актуальной бесконечности могут не только противопоставляться, но и выражаться одно через другое.

Что касается различения внешнего и внутреннего отрицаний, которое также подвергается критике, то здесь я ограничусь обсуждением специфики «диагональных рассуждений» с учетом особенностей использования отрицания в каждом конкретном случае, как это сделано применительно к теореме Геделя С.Н. Бычковым. Корректность отождествления внешнего и внутреннего отрицаний в этом случае означает корректность доказательства существования объектов, построенных посредством диагональной процедуры. Подобные объекты используются, например, в доказательстве существования несчетных множеств, которое анализируется в работах [9—11].

386

Вопрос о степени «естественности» и логической обоснованности введения несчетных множеств сохраняет актуальность и в отношении бесконечных множеств в целом. Действительно, из опыта (явным перечислением элементов) могут быть получены только конечные множества. В рассуждениях о бесконечных множествах можно было бы потребовать, чтобы они во всем походили на конечные, поскольку и те и другие называются множествами. Подобное требование неизбежно приводит к противоречиям, так как бесконечным множествам присущи некоторые «странные» свойства: числовое множество может не иметь наибольшего и наименьшего элемента, биективно отображаться на собственное подмножество и т.д. Наличие указанных противоречий порождает альтернативные способы построения теории: следует либо отказаться от дальнейшего изучения (и применения в математике) таких необычных совокупностей, либо постулировать, что бесконечные (например, счетные) совокупности также являются множествами, но с новыми свойствами (по этому пути пошел Г. Кантор). Далее можно перейти к рассмотрению несчетных множеств, которые отличаются от счетных, и снова либо остановиться (полагая, что таких множеств «не может быть»), либо повторно расширить класс множеств. В канторовской теории множеств вопрос «законности» решается сразу для всей лестницы мощностей при помощи аксиомы степени, *постулирующей существование* множества подмножеств, и аксиомы выделения.

Аналогичная альтернатива возникает и при рассмотрении упорядоченных бесконечных множеств. Можно заметить, что структура доказательства теоремы о втором числовом классе подобна структуре антиномии Бурали—Форти о совокупности всех порядковых чисел. В первом случае к противоречию приводит предположение о счетности второго числового класса, во втором — предпо-можение о том, что совокупность всех порядковых чисел является множеством. В каждом из случаев показано, что рассмотренные пнюкупности не являются множествами в ранее известном смысле этого слова, однако выводы относительно рассматриваемых обьектов делаются противоположные: второй числовой класс признается множеством, а совокупность всех порядковых чисел — нет.

Подобную ситуацию можно продемонстрировать и на более принычном примере — числах. Для приближенных расчетов вполне достаточно рациональных чисел, например, карманный калькулятор оперирует конечным множеством чисел с фиксированным количеством знаков в мантиссе. Этому множеству не принадлежат $\sqrt{2}$ и π. Возможно ли «доказать», что они и им подобные
387
являются числами? Доказательство отсутствия у некоторого уравнения рациональных (либо положительных, действительных) решений не является доказательством существования иррациональных (соответственно, отрицательных, комплексных) чисел. Так как в практических вычислениях можно обходиться без иррациональных чисел, имеются две возможности: следует либо считать числами только рациональные и не рассматривать такие объекты, как $\sqrt{2}$ или π. (выражая, например, отношение длины окружности к ее диаметру числом 3,14), либо ввести класс действительных чисел и

постулировать существование чисел, отличных от рациональных. Во всех рассмотренных выше случаях имеются теоремы, опровергающие предположение о принадлежности объекта некоторому классу, однако необходимость расширения класса объектов не вытекает автоматически из такого опровержения, а требует отдельного обоснования.

В статье С.Н. Бычкова рассматриваются совокупности, не обязательно являющиеся множествами. В какой мере можно признать их «законными»? С точки зрения «наивной» теории множеств, необходим выбор: назвать эти совокупности множествами либо же считать их «несуществующими». Проведя некоторые рассуждения относительно свойств последних, можно доказать, что они не являются множествами, но именно возможность таких рассуждений и их результаты позволяют рассмотреть более общее (по сравнению с множеством) понятие «совокупность». При этом появляется возможность говорить о незавершенных, потенциально бесконечных объектах метаматематики.

В.А. Янков

I. О доказательствах Кантора и Геделя.

Нарушение аристотелевской логики эйдосов подмечено правильно. Кантор использует на самом деле еще не сформулированную в его время аксиому выделения Цермело как определяющую подмножества какого-то множества, и отрицание для универсума этих подмножеств корректным образом понимается как внутреннее.

Появляющееся с помощью диагонального определения гипотетическое множество между тем имеет именно «эйдетическое» определение, и это не случайно, потому что множеств с «только существованием» из аксиомы выбора и более сильных аксиом для содержательной математики не хватает.

Те же соображения mutatis mutandis применимы и к геделевскому доказательству неполноты формальной арифметики. Ана-
388
лиз автора, указывающего на переход от рекурсивных к перечислимым множествам, правилен, что не означает, однако, замены внешнего отрицания внутренним, поскольку переход предшествует применению отрицания. Но, разумеется, в обоих доказательствах нужно сначала расширить понятие множества «за пределы опыта», т.е. за пределы «эйдетических», или разрешимых, множеств.

2. Об отрицании в исчислении предикатов.

Мне не очень понятно, почему под отрицанием в исчислении предикатов нужно понимать «внешнее» отрицание. Как вообще понимать это исчисление, отвлекаясь от предметных областей? Рассказ о нем следует вести именно с квантором по области значений переменных. Иначе непонятно, о чем речь.

3. С общим выводом я согласен. Если метаматематика призвана интерпретировать математику, ей нужны абстрактные принципы. Интересно было бы очертить границы применимости «эйдетической» («родовидовой», по терминологии автора) логики в этом направлении.

ОТВЕТ АВТОРА

Начну с ответа В.К. Петросяну, без критических работ которого данная статья если бы вообще и появилась, то, во всяком случае, не «так скоро». Не буду спорить, построение актуальной родовидовой иерархии для универсальной предметной области, увенчивающее авторский замысел гармонической логики, свело бы значение представленной работы к нулю. Вместе с тем, и это никакой не секрет для Вадима Кармленовича, «гармонизация» умопостигаемого универсума — глубоко нетривиальная задача. Укажу в связи с этим на одну из трудностей, которая требует своего разрешения.

В случае построения указанной родовидовой иерархии различие между внешним и внутренним отрицаниями в логике должно стать чисто формальным, т.е. лингвистическим. В нынешнем, «промежуточном» состоянии гармонической логики это условие пока не выполняется, причем как раз в отношении этих двух видов отрицаний. Внешним отрицанием метасуждения «Суждение *p* истинно» (*p* — логическая переменная) является метасуждение «Суждение *p* не яазяется истинным» или, эквивалентно, «Суждение *p* является неистинным». Последнее же в гармонической логике может быть заменено на следующую строгую дизъюнкцию: «Суждение *p* либо бессмысленно, либо является недостаточно определенным, либо ложно». Внутренним отрицанием исходного мета-

389

суждения (в предположении, что для содержания суждений *p* задача отождествления внешнего и внутреннего отрицаний решена) должно стать метасуждение «Суждение *p* ложно», которое не тождественно внешнему отрицанию.

В приведенном рассуждении в качестве суждений *p* достаточно взять только суждения, касающиеся реального мира и входящие в обиход современной человеческой мысли. Если считать для них тождественность внешнего и внутреннего отрицаний имеющей место, то на метауровне различие двух видов отрицаний все равно должно проявиться. В окончательной редакции гармонической логики все проблемы подобного рода, связанные с соотношением объектного уровня и метауровней, должны быть удовлетворительным образом разрешены. Отсутствие в этом полной ясности сохраняет, на мой взгляд, актуальность рассмотрения вопроса о степени «всеобщности» теоремы Геделя по отношению ко всему человеческому знанию с позиций «старой» аристотелевской логики.

Рассмотрим, далее, конкретные замечания В.К. Петросяна, касающиеся степени «защищенности» работы «Метаматематика и опыт» от содержащейся в его работах критики формальной логики и канторовской теории множеств.

Понятие потенциальной бесконечности, к которому Гильберт сознательно прибег в своей метаматематике, чтобы «спасти» понятие актуальной бесконечности собственно в математике, противоречиво только с точки зрения «сильного закона тождества» (закона противоречия), который великий немецкий математик не собирался ограничивать на объектном уровне. Напротив, доказательство непротиворечивости аксиоматических систем и должно было обосновать «сильный закон тождества» в теоретико-множественной математике при помощи более слабого закона тождества, утверждающего на неформальном уровне необходимость вкладывать в одни и те же слова постоянный смысл, а на формальном математическом языке записывающегося соотношением $a = a$ в исчислении предикатов с равенством. Дедуцировать средствами метаматематики сильный закон тождества из его слабой версии не получилось, однако это лишний раз подтверждает, что на содержательном метауровне Гильберт вовсе не предполагал закон противоречия a priori выполненным. Но в таком случае его не должна была волновать возможная противоречивость потенциальной бесконечности (слова «не должна» следует понимать с точки зрения естественного в данном контексте *историко-научного* подхода). Во всех рассуждениях статьи мною везде использовался только слабый закон тождества и «релевант-

390

ный» ему закон контрапозиции вместо более сильного закона противоречия, поэтому возможная противоречивость потенциальной бесконечности, недопустимая для теории множеств, но не доставляющая неприятностей гильбертовской метаматематике, которая не предполагает априорной выполнимости постулатов теории множеств на метауровне, не страшна и для содержащегося в статье анализа геделевской критики замысла Гильберта.

Что касается корректности обоснования утверждения пункта 3 о том, что совокупность *T* теорем формальной арифметики является не-множеством «расселовского» типа, то это утверждается исключительно в рамках аристотелевской родовидовой логики (в рамках современной «канторовской» логики и в рамках создаваемой гармонической логики данное утверждение теряет силу). В его обосновании использовалось только сравнение формы получающегося противоречия «$n \in T$ и $n \notin T$» *с* правилами родовидовой логики, а также ограничение класса множеств только теми совокупностями, для которых по отношению к произвольному элементу x из универсума выполняется либо условие $x \in X$", либо противоположное условие $x \notin X$.

Почему в статье уделяется столь большое внимание именно аристотелевской родовидовой логике? Это вызвано двумя различными обстоятельствами. Во-первых, в ней в отличие от современной формальной логики (и гармонической логики тоже) два вида отрицания различаются не только лингвистически, но и по смыслу. Во-вторых, что особенно существенно с точки зрения проблематики конференции, именно аристотелевская логика в отличие от ее современной «канторовской» версии «близка» к опыту, как это обосновывается в первом параграфе работы. Гармоническая логика в отличие от «канторовской» также будет благодаря родовидовой структуре хорошо согласована с опытом, но для этого необходима актуальная родовидовая иерархия не только понятий, отражающих чувственную реатьность, но и *всех* осмысленных «абстрактных конструктов». Последнее от аристотелевской логики не требуется.

Теперь о замечаниях В.А. Бажанова. При оценке тех или иных новаций всегда уместен «здоровый консерватизм», отсеивающий сходу концепции, единственная цель которых ограничивается «сотрясением основ». Именно с этой точки зрения я рассматриваю чрезвычайно деликатные критические соображения, содержащиеся в комментарии Валентина Александровича. Постараюсь в меру сил откреститься от подозрений в «революционаризме».

Замечания В.А. Бажанова относительно корректности разделения в работах [9—11] совокупностей на множества и не-множе-

391

ства заслуживают обстоятельного ответа, от которого здесь меня удерживают два извинительных, на мой взгляд, обстоятельства: вполне понятные ограничения на его объем и, что более существенно, моя осознанная попытка обосновать в данной статье указанное разделение на иных, *более прямых,* соображениях, которые я повторил несколькими строчками выше. Да, эти соображения «экстенсиональны» и не учитывают возможностей интенсионального подхода, но, по моему глубокому убеждению, интенсиональная логика в настоящее время фактически не используется в «эмпирических» науках и потому в контексте «Метаматематика и опыт» может — пока?! — не рассматриваться. На этом же основании я не хотел бы сопоставлять свой анализ и с подходом, основывающимся на паранепротиворечивой логике: в *настоящее время* и она не используется в качестве прикладного инструмента в эмпирических науках.

Что касается ссылок на различные математические результаты (в том числе теорему Париса—Харрингтона), то вопрос о том, в какой мере они согласуются не только с фактически использованной «канторовской» логикой, но и с аристотелевской, заслуживает всяческого внимания. Под «подозрение» ставится не их чисто математическая значимость, а значимость их для наук за пределами собственно математики (в том числе для философии), поскольку те де-факто пользуются аристотелевской логикой.

Резюмируя: в работе проблематизируется не математическая, а общенаучная (и лишь постольку — метаматематическая) значимость теоремы Геделя. Поэтому появление важных применений неклассических логик в естественных и гуманитарных науках побудило бы к пересмотру и выводов рассматриваемой работы.

При обсуждении замечаний В.А. Янкова и С.Л. Катречко нам удобно будет остановиться сначала на моментах, связанных с содержанием понятия множества, отложив анатиз проблематики соотношения внешнего и внутреннего отрицаний на самый конец.

В.А. Янков не согласен с утверждением о «неэйдетическом» характере «диагональной совокупности». В качестве дополнительного аргумента в защиту «неэйдетичности» можно привести соображения, связанные со сложностью выделения элементов подмножества *A* множества *X* из *n* элементов. Если количество элементов подмножества *A* порядка *n,* то для отделения их от не входящих в *A* элементов *X* требуется порядка n^2 операций сравнения. Если же подмножество *Z* задается не простым перечислением своих элементов, а при помощи диагональной процедуры, то для «определивания» каждого из подмножеств вида f(x), где $x \in X$, требуется такое же число сравнений, а вместе с проверкой условий $x \notin f(x)$

392

это даст в результате n^3 операций. Иными словами, «диагональная совокупность» *Z* устроена, с алгоритмической точки зрения, сложнее любого задаваемого непосредственным перечислением элементов подмножества *A*. Для больших значений *n* произвольные подмножества множества *X* вряд ли вправе претендовать на эйдетичность. Тем меньше оснований для этого у «диагональной совокупности».

Предложение о расширении понятия множества за пределы «эйдетических», или разрешимых, множеств выглядит естественным, однако каким образом это можно сделать, мне совершенно не ясно. Форма противоречия «$t \in Z$ и $t \notin Z$» должна вступать в конфликт с любым родовидовым расширением аристотелевской логики, допускающим рассуждения о «логическом будущем», ввиду минимальности требований, предъявляемых совокупности для того, чтобы быть множеством.

С.Л. Катречко предлагает воспользоваться более совершенными представлениями о природе множеств, развитыми Б. Расселом и другими исследователями. На мой взгляд, подобный подход должен развиваться параллельно изысканиям в области логики. Если же сохранить аристотелевскую логику, то форма противоречия «$t \in Z$ и $t \notin Z$» будет одинаково «неудобна» как для «платонистской», так и для «номиналистической» трактовок понятия множества.

Перейдем, наконец, к замечаниям, связанным с использованием различения внешнего и внутреннего отрицания применительно к анализу первопорядковых теорий в математической логике. При их рассмотрении я воспользуюсь идеями Д.И. Виннера из подготовительных материалов к работе [16], не включенных в ее окончательный вариант.

Суть замечаний В.А. Янкова сводится к тому, что в исчислении предикатов предикат следует считать заданным только в том случае, если указана его область определения. Тогда противопоставление внешнего отрицания внутреннему потеряет смысл и построениям математической логики ничто угрожать не будет.

Заметим, что это условие фактически лишено смысла применительно к предикатам, входящим в схемы чистого исчисления предикатов, поскольку к ним могут добавляться нелогические аксиомы любого характера, и, следовательно, они могут «обслуживать» любую предметную область. Попробуем, однако, реализо-иать на практике идею фиксации области определения предиката.

Пусть $P(x)$ — предикат «четный». Областью его определения является множество целых чисел, задаваемое предикатом «целый» $Q(x)$. Внутреннее отрицание предиката «четный» будет тогда задаваться формулой

393

$$\rceil(P(x)) = Q(x) \,\&\, \rceil P(x),$$

где $\rceil P(x)$ — предикат «не являющийся четным». Здесь предикат $Q(x)$ отвечает за проверку аргумента на соответствие области определения предиката $P(x)$. Таким образом, для получения отрицания предиката необходимо задать как минимум два предиката — сам отрицаемый предикат и предикат, задающий его область определения. Но задание предиката $Q(x)$ требует, в свою очередь, задание и его области определения, которой соответствует третий предикат $R(x)$. В результате получается, что требование соблюдения внутреннего характера операции отрицания предполагает построение явной родовидовой иерархии предметной области. В случае последовательного применения этой идеи к чистому исчислению предикатов дело свелось бы к построению актуальной родовидовой иерархии в универсальной предметной области (на это, заметим, и претендует гармоническая логика В.К. Петросяна). Так как в математической логике этим специально не занимаются, то в результате и приходится трактовать операцию отрицания «внешним» образом.

Что касается замечания из п. 1.2 комментария С.Л. Катречко, то складывается впечатление, что оно навеяно внешним видом взятой в исчисление предикатов в готовом виде из пропозиционального исчисления схемы аксиом

$$(\rceil B \supset \rceil A) \supset ((\rceil B \supset A) \supset B).$$

Исчисление предикатов в отличие от исчисления высказываний внутренне приспособлено (хотя бы посредством произнесения соответствующих фраз на естественном языке) к отражению субъектно-предикатной структуры суждения, и ссылка на номиналистическую переформулировку статуса логико-математических объектов, как представляется, ничего не меняет в сути аргументации работы [16].

Построение в п. 2.1 различных видов отрицаний представляет интерес с точки зрения логики как таковой (замечу, что подобного рода построения содержатся в цитированной в статье работе [17]), однако вряд ли существенно в контексте более узкой проблемы «Метаматематика и опыт», как я это уже отмечал в ответах на замечания В.А. Бажанова. Современная формальная логика в некоторых аспектах не менее далека от реальной практики «эмпирических» наук, нежели теоретико-множественная математика. Особая роль аристотелевской родовидовой логики в статье вызвана именно ее ролью вне «канторовской» математики и новейших разделов современной формальной логики.

Григорян А.А.

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ: ЗДРАВЫЙ СМЫСЛ И ПРОБЛЕМА ОБОСНОВАНИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРЕТИКО-МЕРНОЙ ТЕОРИИ К РЕАЛЬНЫМ СЛУЧАЙНЫМ СОБЫТИЯМ

Х. Крамер, размышляя над историей теории вероятностей, заметил, что «если в 1920 году она едва ли заслуживала название математической теории, то в 1945 году вступила в послевоенный мир в качестве хорошо организованного раздела чистой математики, обладающего собственными задачами и методами и постоянно расширяющимися сферами приложения в других науках, так же как и в различных видах практической деятельности»[1]. Действительно, переворот в теории вероятностей, завершившийся появлением и признанием научным сообществом фундаментальных результатов А.Н. Колмогорова, не только кардинально преобразовал уже существующее знание, но и открыл принципиально иные возможности получения мощных математических результатов, существенно расширивших область применения теоретико-вероятностных методов. Однако было бы неверным утверждать, что теоретико-мерную аксиоматику приняло подавляющее большинство ученых, многих из которых отталкивали ее абстрактность и возникающие интерпретационные трудности. Не случайно, публикуя в 1961 г. написанную еше в 1934 г. статью Хинчина с критикой теории Мизеса, Б. В.

Гнеденко отмечал, что «внешне привлекательные и убедительные на первый взгляд концепции Мизеса продолжают находить многочисленных сторонников, особенно среди представителей внематематических направлений исследований»[2]. Более того, работы Э. Бореля, написанные им после появления теоретико-мерной аксиоматики, в которых он из принципиальных соображений не использует аппарат теории меры, свидетельствуют о том, что и для математика, стремящегося к приложению теоретико-вероятностных методов, аксиоматика Колмогорова могла быть камнем преткновения из-за наличия ряда интерпретационных проблем.

Интерпретационная схема, предложенная Колмогоровым в 1933 г., не разъясняла, почему приложение теоретико-мерной теории вероятностей к решению естественно-научных проблем должно давать хорошие результаты, однако удивительным образом рецепт применения, предложенный Колмогоровым, никогда

395

не подводил. Поэтому в течение нескольких десятилетий после создания аксиоматики основные усилия ее сторонников были сосредоточены на получении далеко идущих математических результатов, в то время как проблема обоснованности применений стояла на втором плане. При этом ученые, применявшие теоретико-мерную теорию вероятностей, пытались дать неформальное обоснование эффективной применимости, пользуясь, как это ни парадоксально, языком отвергаемой ими в качестве логической основы теории вероятностей частотной концепции Мизеса. «Я уже высказывал точку зрения, — писал в 1963 г. Колмогоров, — что основой применимости математической теории вероятностей к случайным явлениям реального мира является частотный подход к вероятности в той или иной форме, неизбежность обращения к которому горячо доказывал фон Мизес... Я иногда выдвигал частотный подход к вероятности, включавший сознательное использование не вполне формальных соображений о "практической достоверности" "приблизительного постоянства частот при больших сериях испытаний" без точного описания того, какие серии "достаточно велики" и т.д.»[3]

Интерпретационные трудности были связаны прежде всего с истолкованием понятия вероятности. Обычно предполагалось, что при условии достаточно большого числа испытаний отношение количества благоприятных исходов к общему количеству испытаний всегда дает число, близкое, а в пределе равное вероятности {или, пользуясь языком аксиоматики Колмогорова, мере) рассматриваемого события. «Однако сказать "всегда" здесь было бы неверно: строго говоря, это происходит не всегда, а лишь с вероятностью 1 (а для конечных серий испытаний с вероятностью, близкой к 1. Тем самым понятие вероятности произвольного события определяется через понятие события, имеющего вероятность, близкую (а в пределе равную) единице, которое, следовательно, уже нельзя определить таким способом без явного логического круга"[4]. Таким образом, неформальное использование частотных соображений без использования аксиом Мизеса не помогало прояснению ситуации. Правда, формулировка самих аксиом Мизеса была совершенно неудовлетворительной с логической точки зрения[5].

Поиски выхода из создавшегося положения, а также путей преодоления методологического кризиса в области, связывающей теорию вероятностей с ее приложениями, и привели наряду с другими факторами к созданию в начале 60-х гг. алгоритмического подхода в теории вероятностей. Наибольший вклад и построение новой концепции внесли А.Н. Колмогоров, Д. Соломоноф и ПА. Мартин-Леф. Важнейшей работой Колмогорова,

396

непосредственно предшествовавшей выдвижению алгоритмических идей в теории вероятностей, была написанная в 1956 г. глава «Теория вероятностей» в обзорном труде советских математиков «Математика, ее содержание, методы и значение».

В процессе построения теоретике-мерной аксиоматики Колмогоров и его последователи из всего комплекса философско-методологических проблем теории вероятностей обсуждали главным образом их собственно методологическую часть (уровень абстрактности аксиом, принципы построения аксиоматики, выбор основных, неопределяемых понятий). Но в упомянутой нами работе Колмогоров вполне определенно ставит и пытается анализировать онтологические и гносеологические проблемы, связанные с определением понятий случайности и необходимости, со статусом вероятностных и статистических закономерностей в структуре реальности.

Одним из фундаментальных представлений здравого смысла является представление о том, что случайность события означает отсутствие всякой закономерной связи между событием и комплексом условий, при котором зафиксировано его появление. Разумеется, такое представление не может стимулировать создание и развитие науки о случайном, ибо в структуру понятия науки необходимым образом входит понятие закона (закономерности). В связи с этим стоит напомнить, что с точки зрения частотной концепции Мизеса говорить о каких-либо закономерностях появления единичного случайного события бессмысленно — законы теории вероятностей могут давать ответ на вопрос о поведении больших совокупностей событий—коллективов, в то время как утверждение о численном значении вероятности какого-либо отдельного события в рамках данной концепции не является допустимым.

Колмогоров вслед за А.А. Марковым[6] считает вполне возможным в теории вероятностей утверждение о вероятности появления отдельного случайного события *A*. Такая точка зрения неявно предполагает наличие определенной закономерности между событием *A* и комплексом условий *S,* при котором оно происходит или не происходит. Это предположение, столь необходимое для приложения математической теории вероятностей на практике, соответствует онтологическому принципу диалектической философии (как материалистической, так и идеалистической), гласящему, что случайность есть проявление необходимости. Надо отметить, однако, что упомянутый философский принцип, стимулируя поиски закономерностей, управляющих случайными явлениями, сам по себе мало что проясняет в суще-
397
стве проблемы создания прозрачной интерпретационной схемы приложения теории вероятностей.

Естественно считать, что природа закономерностей, описывающих яаления, которые мы называем случайными, существенно отлична от закономерностей, управляющих событиями, называть случайными которые у нас нет достаточных оснований. Поэтому в отличие от динамических или однозначно определенных закономерностей закономерность, связывающую случайное событие *A* с комплексом условий S, мы вслед за Колмогоровым будем называть вероятностной. Так, можно говорить о существовании вероятностной закономерности, связывающей попадание в цель единичного выстрела при данных условиях стрельбы, или срок службы какого-либо прибора — с качеством исходных материалов и технологией его изготовления.

Как отмечал В. Феллер. говоря о теоретико-мерной теории вероятностей, «успех современной математической теории вероятностей приобретен следующей ценой: теория ограничивается лишь некоторыми сторонами общего предмета»[7], а именно тем, что «может быть названо физической, или статистической, вероятностью»[8]. Другими словами, отвергая частотный подход Мизеса как принцип построения теории, математическая теория вероятностей формулирует лишь такие вероятностные закономерности, которые, будучи интерпретированными, могут быть выражены через закономерности частотного типа (или статистические, как их принято называть), которые Мизес сделал единственным предметом своего исследования. Только тогда, когда существует устойчивость частот появления или непоявления данного события в больших сериях испытаний, современная математическая теория вероятностей может быть использована для утверждения о наличии вероятностной закономерности. При этом статистическая закономерность лишь отражает вероятностную закономерность, связывающую событие *А с* комплексом условий S.

В работе, опубликованной в 1956 г., Колмогоров приводит пример вероятностной закономерности, связывающей срок службы лампы с качеством материалов и технологией ее изготовления. Он замечает, что если рассмотреть графики ν(T), выражающие процент ламп, служащих не менее *Т* часов, то оказывается, что эти графики при различных (но достаточно больших) сериях ламп мало отличаются друг от друга. Основываясь на этом свойстве больших совокупностей ламп, мы имеем возможность утверждать о существовании вероятностной закономерности, связывающей срок службы лампы с условиями ее изготовления. «Вероятностный закон, — отмечает Колмогоров, — задается при помощи функции *Р(Т),* где *Р(Т)* — вероятность того, что
398
отдельная лампа (произведенная при данных условиях) будет гореть не менее *Т* часов»[9]. При этом существенно, что утверждение о существовании у события *А* (срок службы отдельной лампы) определенной вероятности *Р(А) = Р* заключается в том, что в различных, достаточно больших сериях испытаний частоты появления события *А* [в данном случае *ν(А)*] будут приблизительно одинаковы и близки к *Р* . Гипотеза о существовании константы *Р ,* описывающей связь между событием А и условиями (в данном случае — это условия изготовления лампы), «к которой частоты оказываются, "вообще говоря", тем ближе, чем больше число испытаний n, хорошо оправдывается для широкого класса явлений. Такого рода явления, — заключает Колмогоров, — естественно называть вероятностно-случайными (или стохастическими)»[10]. Нетрудно заметить определенную расплывчатость рассуждений о «близости» вероятности и частоты, однако эта расплывчатость в данном случае неустранима, ибо утверждение о близости Р и ν имеет лишь вероятностный характер.

Таким образом, отход от представлений здравого смысла о природе случайного приводит на основе использования теоретико-вероятностных методов к выделению вероятностно-случайных явлений. Эти случайные явления характеризуются наличием статистических закономерностей, которые отражают более фундаментальные, вероятностные закономерности. При этом если статистических закономерностей обнаружить не удается, то предположение о существовании каких-либо закономерностей, упраатяющих случайными явлениями, требует дополнительного обоснования. Отсюда следует особая важность самостоятельного научного и философско-методологического анализа статистических закономерностей, на чем определенно настаивал Мизес.

Чисто эмпирическое исследование статистических закономерностей вряд ли представляется возможным, тем более что теория вероятностей обеспечивает возможность после установления экспериментальным путем некоторых исходных закономерности логически выводить новые. При этом не поддающийся полной формализации реальный смысл основных вероятностных понятий никак не влияет на полную формальную отчетливость аксиоматизированной теории вероятностей. Однако при таком подходе интерпретационние трудности не преодолеваются: они либо сглаживаются на уровне неформальных рассуждений, либо Новее игнорируются. Насколько велики должны быть по своей численности серии испытаний, чтобы можно было уверенно говорить о наличии или отсутствии свойства устойчивости частот интересующего нас события? Каковы могут быть допустимые отклонения частот друг от друга и от вероятности (или числа,
399
к которому «сходятся» частоты) при тех или иных численностях серий испытаний, чтобы считать применение теоретико-вероятностных методов обоснованными.

Уже получить ответ на эти вопросы оказывается очень непросто, хотя, как отмечает Колмогоров, закон больших чисел и предельные теоремы теории вероятностей в определенной мере проливают свет на имеющиеся здесь неясности. «Существеннее другая скрытая в наших формулировках неясность, относящаяся к способу формирования тех серий, в которых должна наблюдаться устойчивость частот появления события А»[11]. Действительно, способ формирования серий испытаний принципиально важен с точки зрения экспертизы явления на «случайность». Поэтому естественно, что «желая... искусственно создать но возможности чисто случайные явления, специально заботятся о том, чтобы никакими доступными средствами нельзя было заранее выделить те случаи, в которых явление A будет иметь тенденцию появляться чаше, чем с некоторой нормальной для него частотой»[12]. Руководствуясь именно такими указаниями, составляются, например, тиражи государственных займов. Отсюда можно заключить, что проблема формирования серий испытаний подспудно толкает исследователя к восстановлению в правах представления здравого смысла, гласящего, что случайность есть отсутствие закономерности.

Проблема формирования серий испытаний была одной из центральных проблем мизесовской концепции, что нашло свое отражение во второй аксиоме коллектива (принцип иррегулярности). Мизес, правда, не дает строгих определений и однозначного алгоритма формирования серий, что, как позднее отмечал Колмогоров, трудно было от него ожидать, ибо строгое определение самого понятия «алгоритм» появилось значительно позже. Тем не менее принцип иррегулярности Мизеса, его стремление в явном виде иметь некоторые правила формирования серий содержали большой эвристический потенциал, о чем свидетельствует дальнейшая история теории вероятностей. Однако, как показывает анализируемая работа 1956 г., Колмогоров не сразу осознал принципиальную важность решения проблемы формирования серий испытаний. Он пытается обойти эту проблему, включая принцип формирования серий в комплекс условий S. «Итак, — пишет Колмогоров, — говорить о том, что событие A является "вероятностно-случайным" и приписывать ему определенную вероятность $P= P(A/S)$ можно только тогда, когда указан класс допустимых способов формирования серий испытаний. Указание этого класса мы будем считать включенным в условия S»[13]. Приведенные здесь рассуждения дают возможность Колмогорову сформулировать важное философско-методологическое следствие: «При заданных условиях свойство события A быть вероятностно-случайным и иметь вероятность $P= P(A/S)$ выражает объективный характер связи между условиями S и событием A. Иначе говоря, не существует событий абсолютно случайных, события являются случайными или необходимыми в зависимости от того, в какой связи они рассматриваются, но в определенных условиях событие может быть случайным совершенно объективно, и это свойство не зависит от состояния знаний какого бы то ни было наблюдателя»[14].

Заметим, что этот вывод не яапяется беспредпосылочным. Отказ от представлений здравого смысла требует определенного упрощения реальной ситуации, примирения с определенной расплывчатостью формулировок, более того, фактического игнорирования на данном этапе проблемы формирования серий испытаний. Некоторым оправданием последнего может служить то обстоятельство, что в реальных ситуациях часто само формирование серий происходит без вмешательства исследователя, независимо от него, как, например, в случае движения молекул в газе, носящего вероятностно-случайный характер.

Хинчин, отвергая претензии Мизеса на построение теории случайных явлений и считая его концепцию совершенно неудовлетворительной, был убежден в адекватности сушеству дела теоретико-мерной аксиоматики теории вероятностей. Подобный взгляд, абсолютно противопоставлявший два подхода и отвергающий возможность формально-математического развития идей Мизеса, некоторое время разделял также и Колмогоров.

(Сам Мизес был решительным противником попыток формально-математического изложения своей теории.)

«Наличие аксиоматизированной теории вероятностей, — писал Колмогоров в 1956 г., — избавляет нас от соблазна "определять" вероятность способами, претендующими на соединение их непосредственной естественнонаучной убедительности с приспособленностью к построению на их основе формально строгой математической теории. Такие определения приблизительно соответствовали бы в геометрии определению точки как того, что получится, если бесконечное число раз обрезать со всех сторон физическое тело, уменьшая каждый раз, скажем, вдвое, его диаметр»[15]. Именно к такого рода определениям Колмогоров не без оснований относит определение вероятности по Мизесу как предела частот при неограниченном увеличении числа испытаний. Дело в том, что допущение о тенденции частот группироваться вокруг постоянного значения (вероятности) подобно допущению о «случайности» какого-либо явления верно лишь при

401

сохранении условий, которые практически не могут сохраняться неограниченно долго с неограниченной точностью. Следовательно, не имеет смысла говорить о точном переходе к пределу. Но более существенно то, что «формулировка принципа устойчивости частот при обращении к такому предельному переходу требует определения допустимых способов отыскания бесконечных последовательностей испытаний, которое тоже может быть лишь математической фикцией»[16]. Мизес не давал строгого математического определения допустимых способов формирования серий, Колмогоров же в 1956 г. еще не был убежден в перспективности перевода интуитивных идей Мизеса на формально строгий математический язык. «Все это нагромождение понятий, — писал Колмогоров о частотной концепции, — могло бы еще подлежать серьезному рассмотрению, если бы в результате получилось построение теории столь своеобразной, что иными путями до ее строгого обоснования нельзя было бы дойти. Но, как указано выше, обоснование математической теории вероятностей при современном состоянии теории меры производится просто добавлением условия $P(\Omega) = 1$»[17]. Тем более, утверждал Колмогоров, что в реальной ситуации гипотеза о вероятностном характере очень редко обосновывается непосредственной статистической проверкой, что обусловлено либо физической невозможностью ее проведения, либо экономическими соображениями[18].

Однако уже статья Колмогорова, опубликованная в индийском статистическом журнале «Sankhya» в 1963 г.[19], показывает значительную эволюцию его философско-методологических представлений в области теории вероятностей, изменение его отношения к основополагающим идеям мизесовского подхода. В этой статье ученый отмечал, что теоретико-мерная аксиоматизация теории вероятностей, позволившая устранить большинство трудностей в построении математического аппарата, обеспечившего возможность многочисленных и успешных приложений, на многие годы отодвинула на задний план проблему отыскания причин применимости математической теории вероятностей к реальным случайным явлениям. Вопреки мнению многих исследователей Колмогоров не считает, однако, эту проблему второстепенной. Напротив, устранение трудностей на пути построения прозрачной интерпретационной схемы приложения теории вероятностей напрямую связано с решением этой непростой методологической проблемы.

«Я уже высказывал точку зрения, — писал Колмогоров. — что основой применимости математической теории вероятностей к случайным явлениям реального мира является частотный подход к вероятности в той или иной форме, неизбежность обра-

402

щения к которому горячо отстаивал фон Мизес. Тем не менее в течение длительного времени я считал, что (1) частотный подход, основанный на понятии предельной частоты при стремящихся к бесконечности чисел испытаний, не позволяет обосновать применимость результатов теории вероятностей к практическим задачам, в которых мы имеем дело с конечным числом испытаний; (2) частотный подход в случае большого, но конечного числа испытаний не может быть развит строго формально, чисто математически»[20]". Далее Колмогоров фиксирует эволюцию своей позиции, обусловленную прежде всего осознанием принципиальной важности идей Мизеса для обоснования приложений теории вероятностей и, в частности, для решения проблемы формирования серий испытаний (или правил выбора подпоследовательности). Правила выбора теперь не включаются им в комплекс условий осуществления события, но рассматриваются отдельно в контексте теста на случайность. «Я по-прежнему придерживаюсь первого из указанных положений, — отмечал Колмогоров. — Что касается второго, то я пришел к выводу, что понятие случайного распределения может быть введено строго формально, а именно: можно показать, что в достаточно больших совокупностях распределение некоторого свойства может быть таким, что частота его появления будет примерно одинако-ной для всех достаточно больших выборок, если только закон иыбора достаточно прост. Полное развитие такого подхода предполагает введение меры сложности алгоритмов»[21].

В цитируемой статье Колмогоров впервые строит свою конструкцию допустимых алгоритмов выбора подпоследовательности, отмечая при этом, что она правильно отражает замысел Мизеса, во всей полноте сохраняя основное его ограничение — при определении того, входит ли член последовательности в получаемую подпоследовательность, не используется само значение этого члена. При этом основным отличием от подхода Мизеса являются строго финитный характер концепции и введение количественной оценки устойчивости частот[22]. Первый камень здания алгоритмического подхода в теории вероятностей был заложен.

Теоретико-мерное и алгоритмическое обоснования теории вероятностей могут быть рассмотрены как родственные отрасли знания, поскольку понятия, которыми оперируют ученые, работающие в одной теории, находят свои аналогии в другой. Однако это и независимые теории в чисто математическом плане, так как и изначальный понятийный базис обеспечивают математические формализмы, относящиеся к принципиально различным областям математического знания. Теория меры и теория множеств, лежащие в основе первого подхода, относятся к непрерывной
403
(континуальной) математике, в то время как алгоритмический подход базируется на теории алгоритмов, принадлежащей дискретной математике.

Следует отметить, что применение теории алгоритмов в теории вероятностей было обусловлено не только внутренними потребностями развития этой науки, но и общим осознанием возрастания роли дискретных методов как в математике, так и в естествознании, и, в частности, пониманием того, что алгоритмическая перестройка теории информации, базировавшейся ранее на теоретико-вероятностном (континуальном) фундаменте, оказалась чрезвычайно успешной и плодотворной. Остановимся на этом несколько подробнее.

«Чистая математика, — говорил Колмогоров на международном математическом конгрессе в Ницце в 1970 г., — благополучно развивается как по преимуществу наука о бесконечном. И сам основатель формализованной полностью финитной математики — Гильберт предпринял свой титанический труд лишь для того, чтобы обеспечить за математиками право оставаться в "канторовом парадизе" теории множеств. По-видимому, это положение вещей глубоко обосновано устройством нашего сознания, с большой легкостью оперирующего с наглядными представлениями о неограниченных последовательностях, предельных переходах, непрерывных и даже "гладких" многообразиях и т.п.»[23]. С этим, очевидно, и было связано то, что в математическом естествознании вплоть до начала 60-х гг. господствовало моделирование изучаемых явлений на основе средств континуальной математики. На самом деле, однако, у нас нет веских оснований считать, что непрерывные модели лучше дискретных; в частности, мы не можем с достаточной уверенностью утверждать, что некоторый реальный процесс более адекватно описывается на языке дифференциальных уравнений (непрерывная модель), чем с помощью соответствующих разностных схем (дискретная модель). И тем не менее даже в тех случаях, когда те или иные явления носили по преимуществу «дискретный» характер, исследователи до недавнего времени строили сначала сильно идеализированные непрерывные модели и лишь после их разрешения переходили к адекватным дискретным описаниям. И это несмотря на то, что человеческий мозг математика функционирует главным образом в дискретном режиме!

Развитие современных вычислительных средств, постановка проблемы создания искусственного интеллекта существенно повлияли на возникновение устойчивого интереса к методам дискретной математики. «Пользуясь своим мозгом как данным от господа бога, математик мог не интересоваться комбинаторны-
404
ми основами его работы, — замечает Колмогоров, — но искусственный интеллект машин должен быть создан человеком, и, человеку приходится погрузиться в неизбежную при этом комбинаторную математику»[24].

Бурное развитие теории алгоритмов и почти одновременное ее применение в теории информации и теории вероятностей, по сути дела, и отражали принципиальные изменения в соотношении использования дискретных методов в математике и естествознании. Появляется убеждение в том, что для решения ряда проблем, в частности, при изучении сложно организованных систем, способных перерабатывать информацию, вместо того чтобы сначала строить сильно идеализированные (хотя и привычные) континуальные модели, целесообразно сразу же перейти к более адекватным, хотя и более громоздким и менее эстетичным дискретным моделям. Построение алгоритмической теории информации было одним из первых крупных достижений на пути признания богатых возможностей теории алгоритмов.

Первоначальное развитие математической теории информации было основано на применении теоретико-вероятностных понятий. Это проявилось уже в том, что основное понятие теории информации — «количество информации» — определялось через понятие вероятности (Шеннон), что сразу же позволило получить ряд важных результатов, используя весь разветвленный аппарат математической теории вероятностей.

Полученные результаты касались прежде всего проблем «передачи по каналам связи "массовой" информации, состоящей из большого числа не связанных или слабо связанных между собой сообщений, подчиненных определенным вероятностным закономерностям»[25]. Решая подобного рода проблемы, можно отождествлять вероятности и частоты в пределах одного достаточно длинного временного ряда, не опасаясь перейти границу, за которой огрубления будут неприемлемыми. Более того, такой способ действий получает строгое обоснование в гипотезе «быстрого перемешивания». «Практически можно считать, например, вопрос об "энтропии" потока поздравительных телеграмм и "пропускной способности" канала связи, требующегося для их своевременной и неискаженной передачи, корректно поставленным в его вероятностной трактовке и при обычной замене вероятностей эмпирическими частотами, — писал Колмогоров. — Если здесь и остается некоторая неудовлетворенность, то она связана с известной расплывчатостью наших концепций, относящихся к связям между математической теорией вероятностей п реальными случайными явлениями вообще»[26].
405

Ясно, однако, что возможность введения понятия количества информации на основе понятия вероятности и решения при этом ряда важных задач не гарантирует факта онтологической или гносеологической первичности понятия вероятности по отношению к понятию информации (или количества информации). Напротив, можно, по-видимому, согласиться с мнением А.С. Кравца, утверждающего, что «информация и вероятность являются в одинаковой мере суверенными и полноправными общенаучными понятиями»[27].

Поиски альтернативы шенноновскому подходу в теории информации особенно активизировались в начале 60-х гг. «Информация по своей природе не вероятностное понятие»[28], — замечал Колмогоров в статье, написанной в 1965 г. В другой статье, вышедшей в свет в том же году, он очень ярко проиллюстрировал свою мысль: «Какой реальный смысл (с точки зрения подхода Шеннона. — *А.Г.)* имеет, например, говорить о "количестве информации", содержащейся в тексте "Войны и мира"? Можно ли включить разумным образом этот роман в совокупность "возможных романов", да еще постулировать наличие в этой совокупности некоторого распределения вероятностей...»[29]

Более того, многие ученые уже тогда стали высказывать соображения о возможности и плодотворности определения самого понятия вероятности на основе построенной независимо от теории вероятностей теории информации. «Может ли теория вероятностей рассматриваться как ветвь теории информации, а не наоборот, как делалось раньше?»[30] — задавались в 1962 г. вопросом Р.С. Ингарден и К. Урбаник, считая, что реализация положительного ответа вполне осуществима. Подобную мысль в уже упомянутой статье 1965 г. высказывал и Колмогоров: «Возможно… что отношения между теорией информации и теорией вероятностей радикально изменятся... Отношения эти могут быть обратными современным, и не теория вероятностей будет основой высших разделов теории информации, а в основе теории вероятностей будут лежать понятия теории информации»[31]. Не прошло и нескольких лет, и стало ясно, что подобные заявления в определенной мере были пророческими. Но вначале были заложены основы независимой от теории вероятностей алгоритмической теории информации[32].

Ясно, что если какой-либо объект устроен «просто», то его можно описать с помощью достаточно небольшого количества информации. И напротив, если объект «сложен», то его описание связано с использованием большого объема информации. На основе этих соображений Колмогоров вначале вводит понятие «сложности» конечного объекта, определив его как минимальное

406

число двоичных знаков, в которых содержится вся информация об объекте, достаточная для его восстановления (декодирования). Данное определение сложности зависит от способа кодирования информации с помощью двоичных знаков. Однако на основе общей теории алгоритмов удается дать инвариантное определение сложности, используя доказанную Колмогоровым теорему существования оптимального способа программирования (кодирования), при котором сложность α не превышает сложности для любого другого способа кодирования с точностью до аддитивной константы, равномерной при всех α. Введение понятия сложности позволило независимо от теории вероятностей определить понятие «количество информации», которое имеет то преимущество, что оно относится и к индивидуальным объектам. Заложив, таким образом, основы алгоритмической теории информации, Колмогоров делает два важных вывода, касающихся дальнейших перспектив алгоритмического подхода:

«1. Основные понятия теории информации должны и могут быть обоснованы без обращения к теории вероятности и так, что понятия "энтропия" и "количество информации" оказываются применимы к индивидуальным объектам.

2. Введенные таким образом понятия информации могут лечь в основу новой концепции случайного, соответствующей естественной мысли о том, что случайность есть отсутствие закономерности»[33].

Именно теория алгоритмов, позволяющая на точном математическом языке определить такие понятия, как «правило», «закономерность», дает возможность восстановить в правах и выявить рациональный смысл естественного представления о случайности как отсутствии закономерности. Кроме того, при обращении к бесконечным последовательностям двоичных знаков алгоритмическая теория сложности позволяет математически точно развить плодотворные идеи Мизеса в полном соответствии с установками Колмогорова, изложенным им в уже упомянутой работе «О таблицах случайных чисел»[34].

Кратко, не вдаваясь в технические детали, введем основные понятия алгоритмической концепции случайного. Пусть у нас есть конечный класс *А* конечных объектов. Пусть *К* — число элементов этого класса. Ясно, что для задания любого элемента этого класса достаточно log*К* двоичных знаков: заданием элемента может служить двоичная запись его номера. Если элемент обладает какими-то особыми свойствами, другими словами, закономерностями, то возможно его более краткое описание. Это соображение и идея о случайности как отсутствии закономерности оправдывают определение случайного (или абсолютно случайного)

407

элемента класса *А* как такого, сложность которого максимальна, т.е. равна log*К*. Если речь идет о последовательностях, то, несколько огрубляя, можно сказать, что случайная последовательность не может быть задана иначе, как просто выписыванием целиком всех ее членов (ее сложность максимальна среди всех последовательностей, равных ей по длине). Отклонение сложности от log*К* является дефектом случайности конечной последовательности (элемента).

В алгоритмической теории вероятностей говорится о случайных бесконечных объектах. Так, бесконечная двоичная последовательность называется случайной, если каждый ее начальный «кусок» случаен в классе двоичных конечных последовательностей той же длины.

В алгоритмической теории вероятностей изучаются свойства случайных объектов. В частности, доказывается (в нефинитной теории), что любая случайная последовательность удовлетворяет любому конструктивному закону теории вероятностей. Под конструктивным законом теории вероятностей понимается свойство двоичных последовательностей с вероятностью 1 (в смысле теоретико-мерной аксиоматики, по лебеговой мере), удовлетворяющее ограничению конструктивности, состоящем, грубо говоря, в определимости свойства на специальном языке. Конструктивными являются практически все полезные в приложениях законы теории вероятностей.

В финитном случае для различных классов *А* больших размеров доказывается, что случайные элементы этого класса удовлетворяют ряду свойств, которые в обычной теории вероятностей имеют при надлежащем распределении вероятность, близкую к единице.

Говоря о необходимости развития алгоритмического подхода, Колмогоров приводит следующее рассуждение: «любые результаты наблюдений могуг быть запрограммированы в виде конечной, хотя иногда и весьма длинной записи. Поэтому когда говорят об отсутствии в результатах наблюдений закономерности, имеют в виду отсутствие достаточно простой закономерности. Например, последовательность из 1000 цифр 1274031274031..., сменяющихся с периодом в 6 цифр, мы с несомненностью отнесем к "закономерным", а не "случайным" событиям. Последовательность первой тысячи десятичных знаков дробной части π 1415..., как известно, обладает свойствами "случайных последовательностей". Узнав ее закон образования, мы и ее откажемся признать "случайной". Но если нам выпишут многочлен 999-й степени, значения которого при x= 1,2,3,..., 100 составляют последовательность целых чисел *P(x),* заключенных в пределах

408

от 0 до 9, полученных в результате честных случайных испытаний типа игры в рулетку, то наличие такого многочлена не помешает нам продолжать считать последовательность "случайной"»[35].

При внимательном анализе данного рассуждения можно заметить, что, употребляя одно и то же выражение — «случайная последовательность», Колмогоров говорит о двух разных смыслах, вкладываемых в этот термин. С одной стороны, это представление о случайности как отсутствии закономерности, с другой стороны — это так называемая стохастическая случайность, являющаяся предметом математической теоретико-мерной теории вероятностей и характеризующаяся свойством устойчивости частот. «Если тем или иным способом, — продолжает Колмогоров, — мы пришли к выводу, что последовательность результатов каких-либо испытаний не допускает полного описания в приемлемой для нас в отношении сложности форме, то мы скажем, что эта последовательность разве что частично закономерна, отчасти же "случайна". Но это еше не та "случайность", которая нужна для применимости выводов теории вероятностей. Применяя теорию вероятностей, мы не ограничиваемся отрицанием закономерности, а делаем из гипотез о случайности наблюдаемых явлений определенные положительные выводы»[36]. Колмогоров показывает, что практически значимые выводы теории вероятностей обосновываются как следствия из гипотез о предельной сложности изучаемых явлений. Таким образом, алгоритмическая концепция в теории вероятностей призвана согласовать несомненно заслуживающее внимания представление о случайности как отсутствии закономерности со «стохастическим» пониманием случайного, лежащим в основе интерпретационной схемы применения математической теоретико-мерной теории вероятностей.

Любопытно, что идеи о связи случайности и сложности рассматривал еще в начале XX в. Анри Пуанкаре. Анализируя различные подходы к определению понятия случайного, он писал: «Когда мы обнаруживаем простой результат, например, когда мы получаем круглое число, мы говорим, что такого рода результат не может быть делом случая, и мы ищем для его объяснения причину неслучайную. И действительно, вероятность того, чтобы из десяти тысяч чисел случай привел нас к круглому числу, скажем, именно к числу 10 000, очень незначительна; она составляет один шанс из десяти тысяч. Но есть также один шанс из десяти тысяч, что мы пришли бы к любому из остальных чисел. И все-таки такой результат нас не удивит, и мы спокойно Припишем это случаю... В чем же тут дело? Есть ли это простая тюзия с нашей стороны, или бывают случаи, в которых эта

409

точка зрения законна? Надо думать, что это так, ибо иначе никакая наука не была бы возможна»[37]. Как видим, Пуанкаре не может объяснить описанный им парадокс несоответствия обыденной точки зрения и теоретико-вероятностных выводов. И, конечно, обыденная точка зрения в отношении примера, приводимого Пуанкаре, вряд ли законна. Однако Пуанкаре прав, что есть случаи, в которых точка зрения здравого смысла оказывается более адекватной, чем точка зрения классической теории вероятностей. Для того чтобы показать это, рассмотрим, например, 100 бросаний симметричного (правильного) шестигранного кубика. Если кто-либо скажет, что ему удалось в результате этих бросаний получить 100 шестерок, то мы откажемся признать такой результат случайным, подозревая сообщившего в нечестности. При этом мы согласимся считать случайной, скажем, последовательность из чисел от 1 до 6 той же длины, выдаваемой датчиком случайных чисел. Но дело в том, что вероятность любой последовательности из 100 чисел, заключенных между единицей и шестеркой, одинакова и равна $^1/_6$ в сотой степени,

Таким образом, с точки зрения классической теории вероятностей (как и, впрочем, теоретико-мерной) обе последовательности неотличимы друг от друга по отношению к их случайности или неслучайности! Но с точки зрения алгоритмической концепции последовательность из одних и тех же цифр максимально неслучайна, ибо она имеет минимальную сложность (ее можно описать с помощью лишь одного элемента)!

Приведенный пример показывает, что алгоритмический подход позволяет выявить рациональный смысл обыденных представлений о случайности. Наряду с этим, как уже отмечалось, алгоритмический подход дает возможность согласовать интерпретационную схему теоретико-мерной теории вероятностей с представлением о случайности как отсутствии закономерности. А поскольку интерпретационная схема, о которой идет речь, во многом сводится к частотному подходу, развивавшемуся прежде всего Мизесом, то естественно, что развитие алгоритмической теории вероятностей было связано с переосмыслением и развитием идей Мизеса. Это касается главным образом принципа иррегулярности Мизеса, ядром которого является идея допустимых правил выбора подпоследовательности.

Общая схема мизесовского подхода тестирования последовательности на случайность, подхода, получившего строгое обоснование в алгоритмической теории, заключается в следующем. Сначала выбирается некоторое основное свойство, которым должна обладать случайная последовательность (у Мизеса это существование предела частот). Затем фиксируется некоторый класс допустимых правил выбора подпоследовательности. Под «правилом выбора» понимается отображение, сопоставляющее каждой бесконечной последовательности нулей и единиц другую последовательность, являющуюся подпоследовательностью исходной. После этого последовательность объявляется случайной, если при применении к ней любого допустимого правила пмбора всегда получается последовательность, обладающая указанным основным свойством. Сам Мизес не дал строгого опреснения допустимых правил выбора, отметив, что существенной их чертой является то, что принадлежность любого члена исходной последовательности к выбираемой подпоследовательности должна определяться независимо от его значения. Это ограничение, наложенное Мизесом, является недостаточным. Так, если мы объявим допустимыми правилами выбора такие, которые сопоставляют последовательности $A1, A2, A3...$ подпоследовательность $An(1), An(2), An(3), ...$, где $n(T)$ — любая целочисленная функция, то случайных последовательностей не будет вовсе, так Как одно из правил наверняка преобразует исходную последовательность в подпоследовательность из одних нулей или единиц.

Таким образом, «разумное определение случайности требует шраничения класса допустимых правил выбора»[38]. При этом, разумеется, желательно, чтобы определенные таким образом случайные последовательности подчинялись всем законам математической (теоретико-мерной) теории вероятностей. Так, определение случайной последовательности, по Черчу, давшему первую формализацию мизесовского подхода, с этой точки зрения оставляет желать лучшего, ибо случайные, по Черчу, последовательности не удовлетворяют закону повторного логарифма.

Нефинитная алгоритмическая теория вероятностей дает необходимые средства для такого определения допустимых правил выбора, при котором к последовательностям, называемым «случайными», применимы все законы теории вероятностей. Действительно, как показал А.Х. Шень в уже цитированной статье[39], определение случайной бесконечной последовательности эквивалентно определению коллектива, если правила выбора понимать в более широком смысле, чем это делал сам Мизес. С другой стороны, случайности достаточно для выполнения теоретико-вероятностных законов. Поэтому на основе алгоритмического понятия случайности можно строить теорию вероятностей, которую позволительно рассматривать как заполняющую логические пробелы полную формализацию частотной теории Мизеса. Следует подчеркнуть, что с чисто математической точки зрения алгоритмическая теория вероятностей не обладает никакими преимуществами перед теоретико-мерной, скорее наоборот, ибо формализм алгоритмической теории значительно более громоздок.

411

Однако генетическая связь алгоритмической теории с концепцией Мизеса обеспечивает возможность построения более приемлемой, чем у теоретико-мерной, интерпретационной схемы нефинитной алгоритмической теории. Эта схема предлагает следуюший рецепт применения теории.

1. Рассмотреть реальную случайную ситуацию. Поставить ей в соответствие бесконечный математический объект (некую последовательность).

2. Проверить (или поверить, если нельзя проверить), что эта последовательность случайна, и использовать свойства случайных последовательностей, изучаемые в математической теории вероятностей.

3. Сделать соответствующие выводы о реальном процессе.

Однако для того, чтобы из асимптотических свойств бесконечных объектов получить свойства допредельных реальных конечных совокупностей испытаний, вновь нужны дополнительные допущения. И здесь на помощь приходит финитная алгоритмическая теория вероятностей.

Эта теория также имеет идейные связи с учением Мизеса. Коллективам Мизеса ставятся в соответствие индивидуальные случайные объекты. При этом доказывается, что случайные конечные последовательности обладают приблизительной иррегулярностью по отношению к просто задаваемым правилам выбора. Важно отметить, что, являясь строгой математической теорией, финитная алгоритмическая теория является еше более громоздкой, чем ее нефинитная сестра.

Интерпретационная схема финитной алгоритмической теории, которую, как и для нефинитного случая, можно рассматривать как обоснование применимости теоретико-мерной теории вероятностей; выглядит следующим образом.

1. Рассматривается реальный случайный процесс, в соответствие которому ставится конечный математический объект *x*.

2. Устанавливается, каким закономерностям удовлетворяет реальный объект. При этом, исходя из этих закономерностей, выводятся свойства соответствующего математического объекта. Множество всех объектов, обладающих этими свойствами, и будет нашим классом *A* (см. выше, с. 408).

3. На основании некоторых соображений, относящихся к частной науке, изучающей рассматриваемое явление, постулируется, что других закономерностей в объекте не более, чем С бит (величина С — своя для каждой ситуации и есть тот самый «дефект случайности»).

4. Определяются свойства, которым удовлетворяют все элементы класса *A* с дефектом случайности, не превышающем С.

412

Для этого, как правило, с помощью методов теоретико-мерной теории вероятностей находят свойства подходящих случайных (с теоретико-мерной точки зрения) объектов и из них выводят свойства случайных элементов класса *A*. Важно отметить, что при теоретико-вероятностных вычислениях почти всегда используются близкие к рассматриваемым конечным объектам бесконечные объекты. Таким образом, здесь может быть использована вся теоретико-мерная теория вероятностей.

5. Делается вывод, что *x* обладает установленными в (4) свойствами.

6. На основании (5) делается прогноз о свойствах изучаемого явления. При этом здесь уже не требуется дополнительных допущений о скорости сходимости частот, ибо прогноз делается на основе сопоставления «протокола» реального эксперимента и конечного математического объекта.

Описанную схему можно считать достаточно удовлетворительной. Разумеется, остается пункт (3), где постулируется случайность объекта, но если не налагать никаких ограничений на объект, то нельзя сделать никаких содержательных выводов о его свойствах. Все же заметим, что если объект неслучаен, то гипотезу о его случайности в принципе можно экспериментально фальсифицировать. Однако верификация гипотезы о случайности объекта, который действительно случаен, в общем случае принципиально невозможна.

В заключение сделаем несколько выводов о взаимоотношениях различных концепций построения теории вероятностей.

1. Частотная теория Мизеса (в частности, в связи с тем, что Мизес считал теорию вероятностей не математической, а естественно-научной теорией) не может претендовать на роль логического обоснования теории вероятностей. Непосредственная ее формализация является достаточно трудным предприятием. К тому же она не позволяла получить все необходимые для приложений математические факты. Однако хотя интерпретационная схема мизесовской теории и обладала серьезными дефектами, все же она рассматривалась как удовлетворительная — за неимением лучшего.

2. Теоретико-мерная система обоснования теории вероятностей логически безупречна и чрезвычайно плодотворна с точки зрения получения мощных математических результатов. Однако ее интерпретационная схема, построенная на основе использования ряда соображений частотного подхода, не позволяет понять причины эффективного применения математической теории к исследованию реальных явлений.

413

3. Алгоритмическая теория вероятностей, идейно и генетически связанная с мизесовским подходом, но при этом использующая специально для нее разработанный нетривиальный математический аппарат, так же как и теоретико-мерная теория вероятностей, является строгой математической дисциплиной. Однако вследствие громоздкости ее построений она вряд ли когда-нибудь станет на место теоретико-мерной теории в качестве системы логического обоснования теории вероятностей.

Интерпретационная схема нефинитной теории вероятностей, построенная на основе алгоритмического подхода, сходна с интерпретационной схемой частотной теории и страдает теми же пороками, что и мизесовский интерпретационный механизм (выводы о реальных конечных последовательностях делаются на основании исследования идеализации — бесконечных последовательностей). Однако, имея значительные преимущества перед интерпретационной схемой теоретике-мерной теории, она может быть искусственно присоединена к последней в качестве интерпретационного механизма ее применения.

Что касается финитной алгоритмической теории, то она еще менее удобна с чисто математической точки зрения, однако надо думать, что ее интерпретационную схему можно рассматривать как обоснование применимости теории вероятностей, построенной на основе аксиоматики Колмогорова.

.

Примечания

[1] *КрамерХ.* Полвека с теорией вероятностей. Наброски воспоминаний. М., 1979. С. 38,

[2] *Гнеденко Б.В.* О статье А.Я. Хинчина «Частотная теория и современные идеи теории вероятностей» // Вопросы философии. 1981. № 1. С. 91.

[11] *Колмогоров А.-Н.* О таблицах случайных чисел // Семиотика и информатика. Вып. 18. М., 1982. С. 4. (Впервые опубликована в индийском журнале «Sankhya» в 1963 г.)

[4] *Звонкий А.К., Ленин Л.А.* Сложность конечных объектов и обоснование понятий теории информации и случайности с помощью теории алгоритмов // Успехи математических наук. 1970. Т. XXV, Вып. 6. С. 111.

[s] Подробный анализ концепции Ми^еса см. в статье; *Григорян А.А.* Теория вероятностей Р. фон Мизеса: история и философско-метологические основания // Историко-математические исследования. Вторая сер. Вып. 3(38). М.,1999.

[6] См. переписку Маркова с Чупровым, в которой обсуждался, в частности, вопрос о том, следует ли в теории вероятностей говорить о вероятности отдельного события [О теории вероятностей и математической статистике (Переписка А.А. Маркова и А.А. Чупрова). М., 1977].

[7] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М., 1967. С. 14.

[я] Там же.

[9] *Колмогоров А.И.* Теория вероятностей // Математика, ее содержание, методы и значение. М,, 1956. С. 253.

414

[10] Там же. С. 254.

[11] Там же. С. 270.

[12] Там же.

[13] Там же. С. 271.

[14] Там же.

[15] Там же. С. 274.

[16] Там же. С. 274-275.

[17] Там же. С. 275.

[18] Так, для того чтобы статистически обнаружить постоянство частот с точностью до 0,0001, необходимо пользоваться сериями примерно 1 000000 000 испытаний. Поэтому гипотезы о верятностно-случайном характере явлений обосновываются, как правило, косвенным образом, например на основании соображений симметрии.

[19] См.: *KotmogorovA.N.* On cables of random numbers// Sankhya. 1963. Series A. 25, 4. P. 369—376. В 1982 г. эта статья в переводе А. Шеня была опубликована на русском языке. В предисловии к переводу А.Н. Колмогоров, в частности, писал, что сгатья отражает определенный этап его попыток осмыслить частотную интерпретацию вероятности Мизеса (см.: *Колмогоров А.Н.* О таблицах случайных чисел. С. 3).

[20] *Колмогоров А.Н.* О таблицах случайных чисел. С. 4.

[21] Там же. С. 4—5.

[22] См.: там же. С. 3, 6—7.

[23] *Колмогоров А.Н.* Комбинаторные основания информации и теории вероятностей // Успехи математических наук. 1983. Т. 38. Вып. 4, С. 28.

[24] Там же.

[25] *Колмогоров А.Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. Т. 1. Вып. 1. 1965. С. 6.

[26] Там же.

[27] *Кравец А.С.* Природа вероятности (философские аспекты). М., 1970. С. 87.

[28] *Колмогоров А.Н.* Проблемы теории вероятностей и математической статистики //' Вестн. АН СССР. № 5. С. 95.

[29] *Колмогоров А.Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации». С. 6—7.

[30] *Ingarden R.S., L'rbanic K.* Information without probability // Colloquium Mathematician. 1962. Vol. IX. N 1. P. 136.

[31] *Колмогоров А.Н.* Проблемы теории вероятностей и математической статистики. С. 95.

[32] Первые публикации, содержащие замысел «перестройки» теории информации, у Соломонофа (США) и Колмогорова были в 1964 и 1965 гг. соответственно. Затем разработкой новой концепции основательно занялся шведский математик Мартин-Леф, работавший в середине 60-х гг. в Москве.

[33] *Колмогоров А.Н.* К. логическим основам теории информации и теории вероятностей // Проблемы передачи информации. Т. 5. Вып. 3. 1969. С. 6.

[44] См.; Там же. С. 5.

[35] *Колмогоров А.Н.* Комбинаторные основания теории информации и теории вероятностей // Успехи математических наук. 1983. Т. 38. Вып. 4. С. 31.

[36] Там же.

[37] *Пуанкаре А.* О науке. М., 1983. С. 336.

[38] *Швнъ А.* Частотный подход к определению понятия случайной последовательности // Семиотика и информатика. 1982. >й 18. С. 19.

[39] См.; Там же. С. 34-39.

415

КОММЕНТАРИИ

А. И. Белоусов

Статья представляет собой очень хороший историке-научный экскурс в весьма актуальную проблему оснований современной теории вероятностей. В этом комментарии я хотел бы акцентировать внимание на одной чисто философской проблеме, к размышлению над которой подталкивает текст А.А. Григоряна, но которая в нем недостаточно выявлена (впрочем, может быть, это и не было задачей автора).

Успехи алгоритмической теории вероятностей могут создать иллюзию, что категория случайного в принципе устранима и является лишь отражением нашего временного неполного знания о мире. Между тем современные исследования (в частности, работы И. Пригожина) показывают, что случайность есть фундаментальная *онтологическая* категория, не сводимая ни к сложности, ни к нечеткости, ни к чему-либо, что отражает «неполноту» нашего знания, неполноту, потенциально устранимую. Такое воззрение возрождает, по существу, хотя и в модернизированном варианте, известное кредо классического детерминизма: «Наука — враг случайности». Но, несмотря на то что алгоритмическая теория вероятностей позволяет строго определить понятие индивидуального случайного объекта (точнее, индивидуальной случайной последовательности), она не может принципиально устранить объективную ограниченность всякого наблюдения и знания, которую Пригожий называет временным горизонтом, т.е. устранить принципиальную непредсказуемость «индивидуального поведения на любом уровне нашего знания»[1]. Тем не менее такая непредсказуемость вовсе не свидетельствует о «конце науки»: просто наука должна четко осознавать пределы своей компетенции. С философской точки зрения, это означает, что наука на каждом этапе своего развития должна по-новому ставить кантовскую проблему критики «чистого» (если угодно, *научного)* разума (вспомним о названии одной из фундаментальных работ К. Хюбнера). Сложнейшей проблемой этой критики будет тогда проблема «квантовой» неразделимости субъекта и объекта, принципиальной неустранимости наблюдателя из картины мира. На новом уровне мы приходим к кантовской вещи самой по себе и. по-видимому, вынуждены признать неосуществимость эйнштейновского идеала абсолютно объективного знания. Наверное, можно даже сказать, что попытки элиминировать случайность, как бы изощренно они ни обстаашлись и как бы ни тешили научное сознание, равносильны попыткам элиминировать время. С этой точки зрения, мне кажется не совсем убедительным пример с сотней шестерок, выпадающих на игральном кубике. Я думаю, что появление такой чудесной серии есть ничуть не меньшая случайность, чем появление какой-либо другой *конкретной* последовательности ста чисел — нет никаких гарантий, что за пределами наблюдаемого отрезка поведение кубика не станет абсолютно случайным (с точки зрения алгоритмической теории). Эту абсолютную безразличность случая к чему-либо индивидуальному и схватывает классическая теория. Вспомним, что Гегель определял случайное как то, что имеет основание и одновременно не имеет его, т.е. как то, что *одновременно закономерно и не закономерно.* Однако, насколько мне известно, гегелевская диалектика случайного не становилась предметом серьезного математического обсуждения, хотя, на мой взгляд, это принесло бы большую пользу математике. Во всяком случае, обыденное предстаатение о случайном как о лишенном закономерности не столько естественно, сколько *кажется* таковым. Что такое отсутствие закономерности? Хаос? Но что такое хаос? И тут мы опять «естественно» приходим к пригожинской трактовке хаоса как препятствия на пути к полному описанию индивидуального поведения, и вряд ли столь же естественно мы придем к понятию хаотического как «очень сложного».

Сказанное не следует понимать как негативную оценку алгоритмической теории вероятностей в целом: эта теория наряду с другими математическими теориями имеет свою сферу применения. Но надо заметить, что ведь и теория алгоритмов, служащая базой алгоритмической трактовке вероятностей, сама не свободна от тяжелых внутренних

Пригожин И., Стенгерс И. Время, хаос, квант. М,, 2000. С. 72.

проблем (о которых, правда, специалисты предпочитают не говорить). Так, теория алгоритмов, в некоем зеркальном соответствии с классической теорией вероятностей, *не может объяснить причин* неразрешимости той или иной массовой проблемы, *а может только констатировать факт* неразрешимости, погрузив данную массовую проблему в «коллектив» равносильных (т.е. взаимно сводимых) проблем. Не следует ли ей в таком случае привлечь на свою сторону методы классической теории вероятностей, построив теоретико-мерную концепцию вычислимости[2]? Это вписывается в несомненную тенденцию, усиливающуюся в современной дискретной математике, которую можно охарактеризовать как «тоску по непрерывности» (одним из проявлений этой «тоски» является мощная топологизация прежде чисто комбинаторных разделов: теории грамматик и языков, теории автоматов и т.п.). Так отражается совершенно естественная связь логики и геометрии: структуры мышления должны быть как-то фундированы свойствами пространства-времени. Тогда случайность и классическая вероятность оказываются теми принципами, которые позволяют с единой точки зрения взглянуть на логику и геометрию, причем алгоритмическая теория вероятностей вносит существенный вклад в трактовку понятий сложности, информации, энтропии.

Так или иначе, но можно говорить о дополнительности (в боровском смысле) дискретного и непрерывного в математических моделях. Алгоритмическая и классическая теории вероятностей должны тогда *взаимно* обосновывать друг друга. И здесь не нужно бояться «круга» в рассуждениях. Такой «круг» неизбежен, лишь только речь заходит именно об *основаниях* той или иной науки. «Решающее — не выйти из круга, а правильным образом войти в него» (М. Хайдеггер). И это, скорее, не круг, а неразмыкаемая *спираль* субъект-объектных связей. Методы классической математики в большей степени онтологичны, пытаются схватить бытие «в-себе», характеризуют *замкнутое,* т.е. находящееся за пределами некоторого горизонта, бытие; методы же дискретной математики в большей мере характеризуют наблюдателя, описывают *размыкаемое* бытие. Но как раз в «круге» таких попыток разомкнуть неразмыкаемое и движется вся наука.

С. И. Бычков

Проблема, рассматриваемая в работе А.А. Григоряна, относится к числу тех вопросов, над которыми изучающие математическую теорию вероятностей задумываются редко, что, наверное, правильно, так как раздумья над данным вопросом могут увести очень далеко. Чтение статьи приводит к выводу, что в «теоретико-мерном» варианте и в нефинитной алгоритмической теории вероятностей в настоящее время отсутствует удовлетворительная интерпретационная схема, и лишь в финитном случае существует последовательный подход, объясняющий совпадение предсказаний идеальной математической модели с реальностью. Проанализируем более внимательно п. 2 и 3 приведенного в конце работы описания применительно к двум простейшим реализациям схемы Бернулли: бросание монеты и погода в Москве в один и тот же день календаря в разные годы.

И в том, и в другом случае адекватность описания физического процесса при помощи схемы Бернулли устанавливается на основе методов нелинейной динамики. Независимость отдельных испытаний оказывается следствием отсутствия детерминации результата испытаний начальными условиями. При подбрасывании монеты необходимо, чтобы она перевернулась в воздухе несколько раз, а в

---

[2] См., в частности, постановку такого рода в работе: *Белоусов Л.И.* Алгоритмическое пространство // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер, Естественные науки. 2002. № 1, С. 3-17.

случае с погодой важно, чтобы период времени между двумя «испытаниями» превышал две недели. После этого в п. 4—6 уже чисто математическими средствами гарантируется правомерность математической модели.

Наиболее важным и интересным обстоятельством здесь, на мой взгляд, является то, что п. 2 и 3 требуют выхода за рамки математики. Получается, что, несмотря на наличие аксиоматики, современная теория вероятности требует для обоснования своей применимости обращения к естествознанию, а значит, как и во времена Лапласа и Пуанкаре, оказывается не строго математической, а естественно-научной дисциплиной. Не означает ли в таком случае использование финитного алгоритмического варианта для объяснения практической эффективности теории вероятности отход от замысла Гильберта сделать данную науку чисто математической дисциплиной?

В.Я. Перминов

Изложенные факты интересны в том смысле, что они выявляют логику совершенствования математической теории в ее историческом соединении с практикой. Несомненно, что мы должны проводить четкое различие между внутренней строгостью математической теории и надежностью ее выводов, относящихся к внематематичеекой реальности. Непосредственное заключение от строгости к надежности (достоверности) покоится на предпосылке полной адекватности интерпретации, которая не во всех случаях имеет место. Проведенный автором анализ развития теории веро-нтпостей показывает, что понятийное вызревание теории постепенно меняет ситуацию к лучшему. Мы видим, что экспликация интуитивных принципов Мизеса в алгоритмических понятиях ниляется одновременно и обогащением аппарата теории, и уточнением критериев выбора вероятностной ситуации. Вопрос, однако, в том, можем ли мы считать выявление этой закономерности полным решением вопроса о механизме соединения математической теории с опытом. Представляется, что мы выявляем здесь лишь одну сторону дела. Формальная структура не определяет сферы своего приложения, а это значит, что между ней и миром эмпирических ситуаций всегда остается неопределенность, преодолеваемая только на основе здравого смысла, аналогии и интуиции. Иными словами, некоторая степень иррациональности здесь всегда остается, и, по-видимому, она зависит прежде всего от качества

419

понятий в описываемой области. В этой связи было бы интересно исследовать конкретные примеры использования теории вероятностей, с тем чтобы выявить вес интуитивных и собственно математических критериев в определении степени достоверности ее выводов применительно к физике, биологии, социологии и т.п. Здесь, на мой взгляд, имеет место градация достоверности, с которой мы должны считаться в оценке вероятностных методов в различных областях знания. Я думаю, что вопрос о сфере применения теории вероятностей будет открытым до тех пор, пока эта градация не будет исследована и объяснена.

ОТВЕТ АВТОРА

А.И. Белоусову

Содержательный и интересный комментарий Алексея Ивановича далеко выходит за рамки тех проблем, которые я анализировал ь своей статье. В свете своих дальнейших размышлений и хотел бы сформулировать в виде вопросов наиболее заинтересовавшие меня идеи комментария.

1. Возможно ли и каким образом серьезное математическое обсуждение гегелевской диалектики случайного?
2. Каким образом и насколько недостатки теории алгоритмов, о которых говорится в комментарии, ограничивают возможности алгоритмической теории вероятностей?

3. Каким образом философские представления о случайности и, в частности, отмеченные в комментарии идеи И. Пригожина могут стать методологической основой рассмотрения классического (теоретико-мерного) и алгоритмического подходов в теории вероятностей как взаимно дополнительных (в боровском смысле) и обосновывающих друг друга?

По поводу одного из конкретных замечаний хочется сказать особо. Известно, что при бросании правильной монеты среди всех серий «орел—решка» наибольшее среднее время ожидания имеют те серии, которые состоят только из «орлов» или только из «решек». Например, до появления серии, состоящей из *N* «орлов», нужно произвести в среднем (в смысле математического ожидания) почти в два раза больше бросаний, чем до появления серии, состоящей из *(N*— 1)-го «орла» и одной «решки»[1]. В то же время вероятности пояаления этих серий одинаковы. С точки же зрения

---

[1] См.: *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М., 1990. С. 61.

алгоритмической теории вероятностей последовательность из N «орлов» имеет максимальный для всех возможных последовательностей дефект случайности! И именно об этом нам настойчиво свидетельствует наш здравый смысл. Аналогично обстоит дело и с игральным кубиком. Так, при бросании правильного кубика шестерка, как, впрочем, и любая другая грань, появится два раза подряд в среднем при 7 бросаниях, а три раза подряд при 43 бросаниях[2]. Именно эти соображения я имел в виду, говоря о максимальной «неслучайности» последовательности из ста шестерок, хотя вероятность появления этой последовательности равна вероятности выпадения любой другой конкретной последовательности. И действительно, на это указывают не только наш здравый смысл икупе с алгоритмической концепцией случайности, но и рассуждения, проводимые в рамках классической теории вероятностей! Все это, впрочем, не ставит под сомнение утверждение Алексея Ивановича о том, что достижения алгоритмической теории не означают, что случайность как фундаментальная онтологическая категория сводима к понятию сложности.

С.Н. Бычкову

Прежде всего хотелось бы выразить Сергею Николаевичу признательность за то, что он обратил мое внимание на интересные результаты, изложенные в статье физика Дж. Форда[1]. Разобранные в этой статье и упомянутые в комментарии примеры ценны юм, что совершенно конкретно показывают, каким образом алгоритмическая теория и нелинейная динамика совместными усили-ими обосновывают возможность применения классических теоретико-вероятностных представлений. Эти примеры, несомненно, подтверждают то, что пункты 2 и 3 интерпретационного механизма выходят за рамки математики. Однако значит ли это, что современная теория вероятностей оказывается не математической, м естественно-научной дисциплиной, как это фактически обстояло во времена Лапласа? Думается все-таки, что это не так. Дело в том, что алгоритмическая теория вероятностей играет сейчас ту же роль для теоретико-мерной теории вероятностей, какую в свое время играла естественнонаучная по своему построению частотная концепция Р. фон Мизеса. А именно, алгоритмическая теория вероятностей, как и до ее появления частотная теория служит

---

[1] См.: Там же. С. 66.

[1] См.: *Форд. Дж.* Случаен ли исход бросания монеты? // Физика за рубежом, Сер. А. М., 1984.

мостом между чисто математической теоретико-мерной теорией вероятностей и конкретными научными теориями, вроде нелинейной динамики. Другое дело, что реализующая одну из важнейших идей Мизеса — принцип иррегулярности — алгоритмическая теория свободна от противоречий и ограничений мизесовского подхода. Именно поэтому, как утверждается в статье, финитная алгоритмическая теория может считаться достаточно приемлемой интерпретационной схемой теоретико-мерной математической теории вероятностей. Однако благодаря комментарию Сергея Николаевича я должен сделать существенное уточнение, состоящее в том, что финитная алгоритмическая теория вероятностей вряд ли может считаться чисто математической теорией, поскольку для конечных последовательностей характерна лишь приблизительная иррегулярность. Причем «мера» этой «приблизительности» определяется соображениями, характерными для предполагаемой области применения теории вероятностей.

В заключение, хочется еще раз выразить авторам комментариев искреннюю признательность за доброжелательные замечания, наводящие на весьма плодотворные размышления.

В.Я. Перманову

Не могу согласиться с Василием Яковлевичем в том, что появление алгоритмической теории полностью решает вопрос о механизме соединения математической теории вероятностей с опытом. Алгоритмическая теория вероятностей лишь позволяет строго определить понятие индивидуального случайного объекта, что дает возможность выделить класс объектов (последовательностей), для исследования свойств которых применение теоретико-мерной теории вероятностей можно считать достаточно надежно обоснованным. При этом критерии эффективности применения теории вероятностей определяются главным образом внематематическими обстоятельствами. Так, например, исследуя проблему корреляции некоторых признаков и строя уравнение регрессии, исследователь сталкивается с необходимостью решить, насколько важна для него в каждом конкретном случае оценка значимости уравнения и его отдельных параметров. Таким образом, градация достоверности, о которой идет речь в комментарии, зависит не столько от самого математического аппарата теории вероятностей, сколько от тех требований к «качеству» конечного результата, которые определяются особенностями конкретной предметной области.

А.А. Зенкин

АПРИОРНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ СУЖДЕНИЯ С НУЛЕВОЙ ОНТОЛОГИЕЙ

1. Математика и современное мульти-медийное экспериментирование

В конце XX в. возникло и быстро обрело черты взрывоподобного развития новое, я бы сказал, *научно-технологическое* направление научного познания, имеющее прямое отношение к философской проблеме «Математика и опыт». С точностью до несущественных терминологических нюансов это направление называют «Экспериментальной математикой» или «Визуальной математикой». Методологическую основу этого направления составляет когнитивная компьютерная графика (ККГ) и основанная на ней ККГ-технология семантической визуализации математических абстракций с целью порождения принципиально нового математического знания [1—16].

Как известно, Эйлер, Гаусс и многие другие выдающиеся математики широко использовали математические вычисления как иажную в прямом смысле слова *экспериментальную* составляющую своих научных теоретических изысканий: нередко именно результаты такого (естественно, ручного) вычислительного эксперимента подсказывали им новые математические идеи и гипотезы. Сегодня ККГ-технология визуализации математических абстракций открывает принципиально новые возможности математического экспериментирования: математик впервые получает возможность прямого общения с абстрактными объектами своих теоретических исследований на концептуальном уровне одновременно по нескольким мульти-медийным каналам, а именно, по визуально-цвето-музыкально-динамическим и даже художественно-эстетическим каналам [1; 9—11].

Использование ККГ-технологии математического экспериментирования порождает ряд новых теоретико-познавательных и логико-философских вопросов. В частности, как связаны платоновское «существование» идеальных (абстрактных) математических сущностей с *реальным* существованием их мульти-медийных ККГ-образов, как эти образы воздействуют на кантовскую «интеллектуальную интуицию», порождая в голове человека принципиально новые идеи, относятся ли такие идеи к области изобретаемых или открываемых сущностей, какие «априорные формы мышления» актуализируются в процессе визуального погружения в се-

423

мантику той или иной предметной области математики, какие когнитивные способности интуиции и образного мышления математика в интерактивной системе «человек — ККГ-образ» являются «врожденными, приобретенными или иными», являются ли и в какой мере ККГ-образы математических абстракций легитимными «субъектами» достоверного математического познания и т.д., и т.п.

Некоторые из указанных выше проблем ранее рассматривались в [1; 6—9]. В настоящей работе излагаются результаты, подсказанные ККГ-визуализацией парадокса «Лжеца» [13; 14] и канторовской проблемы континуума [17; 9] сточки зрения «онтологического наполнения» потенциально-бесконечных форм соответствующих парадоксальных «рассуждений».

2. О связи семантики понятия и его онтологии

Онтология, по определению, есть наука о бытии. Онтология (абстрактных) понятий есть проблема связи их содержания с внеположным бытием их семантики или, другими словами, с вопросом о существовании прототипа (модели, интерпретации) этой семантики в «объективной реальности». Учитывая иерархическую структуру процесса абстрагирования, связь семантики (содержания) понятия с ее онтологическим прототипом может быть весьма отдаленной, опосредствованной и далеко не очевидной. Это приводит к тому, что для понятий высших уровней абстрактности и, следовательно, общности (таких, как «пространство», «время», «бесконечное» и т.п.) установление связи «семантика — онтология» является процедурой весьма нетривиальной и даже поводом для «подозрений» в том, что в некоторых случаях такой связи просто не существует, а потому соответствующие понятия имеют якобы чисто априорный, т.е. внеонтологический, характер.

3. Безынерционное мультиплицирование сущностей как фундаментальное условие рационального мышления

В настоящей работе я рассматриваю особый тип логических и математических понятий и суждений, которые имеют изначально априорный характер, т.е., вообще говоря, обладают нулевой онтологией, но не потому, что они являются априорными формами нашего мышления в кантовском смысле, а потому, что такие понятия и суждения являются результатом запредельных (т.е. недопустимых, с точки зрения классической логики) мыслительных процедур абстрагирования, обобщения и экстраполяции. Сама

возможность подобного выхода «за границы всякого возможно-
424
го опыта» обусловлена уникалъным свойством нашего мозга — *безынерциотостъю мышления,* что связано с очевидным нарушением основных законов «диалектики природы» и прежде всего закона перехода количества в (новое) качество.

Например, с точки зрения энергетических и временных затрат, *представить себе,* т.е. вообразить, нарисовать на «экране» нашего внутреннего зрения песчинку или целую галактику — совершенно одно и то же, хотя, с другой стороны, очевидно, что, для того чтобы изменить, например, положение в пространстве песчинки или галактики потребуются несоизмеримо различные величины реальных энергетических и временных «затрат». Другим характерным примером нарушения законов диалектики *безынерционностью* нашего *мышления* является наше представление о конечном и бесконечном. Эталонным примером бесконечного со времен Пифагора является ряд натуральных чисел: 1, 2, 3, ... Как известно, Гегель назвал бесконечность этого ряда «дурной». Логическим основанием для такого неоправданно пренебрежительного «определения» данного типа бесконечности является тот факт, что, с точки зрения фундаментального свойства «быть натуральным числом», переход от n к $n + 1$ не зависит от величины n, т.е. такой переход не порождает никакого нового качества относительно применимости операции «+1» к очередному n, независимо от того, каким бы большим ни было это n. т.е. здесь вновь нарушается диалектический закон перехода количества в новое качество. Тем мс менее мы без труда можем представить себе одну «вещь», две, три, десять, сто, тысячу и т.д. Правда, уже после первой сотни онтологическое «наполнение» числительных начинает размываться, и после первой тысячи все числительные «коллапсируют» в абстрактное «много». Однако при этом уникальная способность нашего воображения мультиплицировать любое количество таких абстрактных «многих» сохраняется.

Я нигде не встречал сколько-нибудь приемлемого (с точки зрения классической логики) определения словосочетания «формы мышления». Еще меньшей логической определенностью обладает словосочетание «априорные формы мышления», и что в таком случае означает, например, «дополнительное» словосочетание «апостериорные формы мышления»? Мне, однако, представляется, что указанная *способность* нашего мышления к *безынерционному мультиплицированию* «вещей» любого уровня абстрактности если и не является «формой мышления» в традиционно-туманном значении этого термина, то, во всяком случае, представляет изначальный психофизиологический базис и необходимое условие для любого типа (как конкретного, так и абстрактного,
425
как интуитивного, так и рационального, как априорного, так и апостериорного) мышления.

Рассмотрим несколько примеров хорошо известных логических и математических конструкций, которые имеют явно внеэмпирическое происхождение, с одной стороны, но столь же явно выходят за границы любой осмысленной рациональности — с другой.

4. Потенциально-бесконечная форма парадокса «Лжеца»

Одна из канонических формулировок этого парадокса звучит так [18]. Некто утверждает: «Я — лжец», — лжец ли он? Если он лжец, то он лжет, когда утверждает, что он лжец. Следовательно, он не лжец. Но если он не-лжец, то он говорит правду, когда утверждает, что он лжец. Следовательно, он — лжец. Обозначая А = «Я — лжец», получаем следующую традиционную формальную запись «Лжеца»:

$$[A \rightarrow \neg A] \ \& \ [\neg A \rightarrow A]. \qquad (I)$$

Анализу парадокса «Лжеца» посвящена обширная литература, предложено множество его «решений» [18—20], однако ни одно из этих «решений» не является пока удовлетворительным и общепризнанным.

С точки зрения, анонсированной в заглавии данной статьи, представляет интерес анализ так называемых бесконечных форм парадокса «Лжеца».

По-видимому, первым, кто вплотную подошел к интерпретации «Лжеца» как бесконечного «рассуждения», был Б. Рассел. В своей «Автобиографии» [21, с, 149—150] он пишет: «Противоречие, совершенно подобное Эпименидову, может быть получено следующим образом. Человеку предлагают лист бумаги, на котором написано: «Утверждение на обратной стороне этого листа — *ложно».* Человек *переворачивает лист* на другую сторону и на этой стороне читает: «Утверждение на обратной стороне этого листа — *истинно».* Любой человек, который впервые знакомится с этим парадоксом, начинает, не без удивления, переворачивать этот лист с одной стороны на другую, и прервать эту «познавательную процедуру» могут, вообще говоря, различные причины, но ни одна из них не является по своей природе логической или математической».

Назовем для краткости этот парадокс Рассела парадоксом «Переключателя». Очевидно, что Рассел был прав, полагая, что парадокс «Переключателя» имеет такую же формальную структуру (I), как и парадокс «Лжеца». Уместно, однако, обратить внимание на два существенных различия между этими, формально эквивалентными, парадоксами.

Во-первых, «пресловутая» самоприменимость, с которой всю жизнь так безуспешно боролся Рассел, в рамках «Лжеца» и «Переключателя» имеет разный характер. А именно, если в «Лжеце» мы имеем самоприменимость как бы 1-уровня («Я — лжец»), то в «Переключателе» появляется самоприменимость 2-уровня (1-сторона листа ничего не говорит «о себе», но отсылает читателя к 2-стороне, а вот уже эта 2-сторона ссылается на 1-сторону). Это свойство парадокса «Переключателя» яачяется важным в связи с тем, что в конце 80-х годов Яблу [22] предложил бесконечную форму «Лжеца» якобы без использования самоприменимости (парадокс «Очередь»). Все это говорит о том, что мы сегодня еще далеко не все знаем о таком важном понятии, как самоприменимость, которое играет важнейшую роль в вопросах оснований математики, проблемы парадоксов и философии математики.

Во-вторых, в парадоксе «Переключателя» в явном виде содержится *выходящий за рамки логики* «директивный» элемент, а именно, в утверждениях на каждой стороне листа имеется неявное, но *императивное указание* па необходимость совершения *физического* действия — перевернуть лист па другую сторону. Это отнюдь не случайный момент, очень существенный и важный для понимания природы парадоксальности.

Так, в работах [13; 14] впервые сформулированы *необходимые* и *достаточные* условия явления парадоксальности в целом и с помощью классической теории моделей доказано, что «истинной» формой «Лжеца» (и ему подобных парадоксов) является именно бесконечное «рассуждение» вида:

$$A \to \neg A \to A \to \neg A \to A \to \neg A \to A \to \ldots$$

(1a)

При этом выявляется следующий важный психологический и эпистемологический аспект «Лжеца»: если традиционная «конечная» форма (I) акцентирует наше внимание на *противоречивости* парадоксального высказывания и знаменует собой состояние интеллектуально-психологического шока, которое (уже более 2500 лет) не позволяет человеку выйти за рамки этой *конечной* интерпретации «Лжеца», то очень нетрадиционная бесконечная форма (1a) демонстрирует полную семантическую *бессмысленность* подобного «рассуждения» и его очевидную онтологическую пустоту.

В указанных работах также подчеркивается особая роль предиката «быть ложным». Оказалось, что этот предикат так же, как и расселовский парадокс «Переключателя», содержит *императив-*

ную составляющую, а именно фактически этот предикат «требует» «насильно», *внешним* образом *изменить* значение связки парадоксального высказывания, независимо от текущего истинностного значения этой связи [13; 14].

Уместно отметить следующий факт. В работах [13; 14] с помощью *физического* моделирования структуры *логического* доказательства доказано, что парадокс «Лжеца» представляет собой *внелогический* переключатель истинностного значения *внешней* формы логического сигнала (Х = И и Х = Л) с помощью его же внутренней формы («Х есть Л»). Этот факт хорошо согласуется с концепцией внешних и внутренних форм высказываний, впервые введенной Д.А. Бочваром [20], и, по-видимому, очень не случайным образом семантически коррелирует с концепцией внешних и внутренних форм отрицания, предложенной в работах С.Н. Бычкова с сотрудниками [23] с целью обоснования логической некорректности канторовского диагонального метода.

5. Телеологические основания «Учения о трансфинитном» Г. Кантора

Главная логическая ошибка апологетов канторовского «Учения о трансфинитном» заключается в «телеологической», т.е. неосознанно-намеренной неспособности понять логическую природу диагонального метода Кантора (далее — ДМК). Утверждение канторовского доказательства: «Допустим, что (1) есть некоторый *произвольный* пересчет всех д.ч. из X, — содержит следующую довольно тонкую логическую амбивалентность: в этом пересчете (I) произвольной является только последовательность самих д.ч., а последовательность индексов 1, 2, 3, ... является жестко фиксированной. А это значит, что канторовское отображение ***f:*** R → N вовсе не является «отображением общего типа», а имеет очень даже «специфический характер».

Последний факт лучше других, не скажу — осознал, но «сформулировал» известный символический логик В. Ходжес (бывший главный редактор журнала «The Bulletin of Symbolic Logic»), правда, вопреки своему собственному высокопрофессиональному намерению доказать несостоятельность любых опровержений канторовского «диагонального доказательства» [24]. Суть этой формулировки *мета*-математического «запрета Ходжеса» (не путать с физическим «запретом Паули») иллюстрирует следующий

«САКРАЛЬНЫЙ» ПОСТУЛАТ КАНТОРА. *Единственным допустимым* («хорошим», т.е. «ведущим к выводу Кантора о несчетности») пересчетом д.ч. множества X является пересчет (1) с помощью индексов 1, 2, 3, 4, 5, ... Все остальные пересчеты и индексации, т.е. 1-1-соответствия между X и любым *собственным бесконечным* подмножеством множества N, являются недопустимыми («плохими», так как такие индексации *опровергают* «вывод Кантора»).

Другими словами, для того чтобы канторовское (анти)диагональное д.ч. y_1 осталось незанумерованным, *все до единого* натуральные числа {1, 2, 3, ...} уже должны быть очень предусмотрительно утилизированы для нумерации д.ч. исходной последовательности (1).

Таким образом, канторовский пересчет (1) оказывается фактически, и согласно профессиональному мнению В. Ходжеса, не просто «специфическим», а *единственным* (!) «эксклюзивом» ad hoc, выделенным *из бесконечного* множества допустимых индексаций.

Я хотел бы здесь специально подчеркнуть, что этот «сакральный» постулат Кантора является не только строгим *формальным критерием,* разделяющим, согласно представлениям современной *мета*-математики, «хорошие» и «плохие» нумерации д. ч. в последовательности (1), но также и *«опущенным» необходимым условием* канторовского доказательства, поскольку, как уже говорилось, согласно Ходжесу (и всей современной *мета*-математике), только «хорошая» индексация всех д.ч. позволяет «получить вывод

Кантора» о неустранимом, постоянном, фатальном дефиците одного единственного натурального числа. В случае «плохих» индексаций, например с помощью элементов *счетного* множества $N_{\text{чет}}=\{2, 4, 6, ...\}$, доказательство Кантора просто теряет силу, поскольку в этом случае оказывается, что натуральных чисел, например в неиспользуемом при данной индексации *бесконечном* множестве $N_{\text{нечет}} = \{1, 3, 5, ...\}$, *всегда* (!) *более чем достаточно* для того чтобы проиндексировать *любое, даже бесконечное* количество вновь создаваемых канторовских «незанумерованных» (анти)диагональных д.ч. [12—16, 25, 26].

Я полагаю, не нужно объяснять, что «сакральный» постулат Кпнтора, представляющий собою *необходимое* условие доказательства парадигмальной теоремы Кантора о несчетности континуума, является чисто *телеологическим* критерием, определяющим выбор уникальной индексации д.ч. в последовательности (I) исключительно с помощью всех элементов множества N = {I, 2, 3, ...}, дабы получить «на выходе» именно то, чего так «сильно хочется». Однако известно, что любые *телеологические* «критерии» отбора, используемые в качестве необходимых условий каких бы то ни было «доказательств», не имеют никакого отношения ни к классической логике, ни к «реально работающей» (термин С. Фефермана) математике.

429

6. Бесконечная мета-математическая игра двух честных мошенников

Рассмотрим одну формальную реконструкцию известного возражения Л. Витгенштейна против диагонального метода Г. Кантора.

Как известно, выдающийся логик и философ Л. Витгенштейн [24; 27] дает следующую, довольно экспрессивную интерпретацию приведенного выше канторовского доказательства несчетности континуума (цитируется почти дословно по [24]: человек («a man») в поте лица своего, день за днем, старается пронумеровать все действительные числа (далее — д.ч.), для пущей надежности выписывает эти д.ч. в ряд

$$X_1, X_2, X_3, ... \qquad (1)$$

и когда, наконец, все д.ч. выписаны и проиндексированы с помощью натуральных чисел (далее — н.ч.) и эта «идиотическая работа» («idiotic work») наконец-то завершена, вдруг откуда ни возьмись «как черт из табакерки» возникает некий плут и говорит человеку: «Ну что ж, вроде бы все д.ч. перенумерованы. А вот *теперь,* пожалте, еще одно, *новенькое,* д.ч. y_1, для которого у вас. как я понимаю, уже не осталось даже одного, лишнего н.ч., чтобы занумеровать это д.ч., не так ли? Следовательно, "моих" д.ч. больше, чем "ваших" н.ч., т.е. континуум — несчетен!»

И далее Л. Витгенштейн категорически резюмирует: такое «диагональное доказательство» Кантора «вообще не имеет отношения к тому, что в логике принято называть дедукцией» [24; 27].

На чем же основано это столь категорическое, но, увы, всего *лишь интуитивное* возражение Л. Витгенштейна? Оказывается, на следующем очевидном *математическом факте:* если M1 и M2 — *конечные* множества, то разница даже в один элемент между количествами элементов этих множеств является *строгим доказательством* их неэквивалентности; если же речь идет о *бесконечных* множествах, то **даже** если разница между количествами элементов этих множеств равна *бесконечности,* этого недостаточно для вывода о количественной неэквивалентности бесконечных множеств. Например, множество всех н.ч. N — {1, 2, 3, ...} и множество всех *нечетных* н.ч. N1 = {1, 3, 5, ...} суть эквивалентны (равномощны), хотя количество элементов в N «ровно в двл раза больше» количества элементов в N I.

Таким образом, в рамках канторовского доказательства несуществование пересчета

всех д.ч. не является достаточным осно ванием для утверждения о том, что *количество* всех д.ч. «мною больше» количества всех н.ч. [**17—19**]**.,** и Л. Витгенштейн прекрас-
430
но «прочувствовал» этот *математический факт.*

В пользу последнего вывода свидетельствует следующее очень естественное продолжение этой, по Витгенштейну, «жуликоватой» *мета*-«логической» игры.

Итак, согласно Витгенштейну, мы уже имеем одного плута (далее — Плут-1), который более ста лет вызывает неизменный восторг *мета*-математической общественности с помощью следующего *мета*-«логического» трюка: *ВСЕГДА ПОСЛЕ* (!) того, как предъявлен некоторый пересчет (1) *всех* д.ч., скажем, из множества X = [0,1], этот Плут-1 с помощью «знаменитого диагонального метода Кантора» (далее — ДМК) порождает (создает, определяет, вытаскивает из рукава и т.п.) *новое* д.ч. y_1 которое отлично от всех уже занумерованных д.ч. пересчета (1) и, следовательно, не имеет номера.

Следует заметить, что Плут-1 при этом *явно* и *алгоритмически* использует *актуальность* пересчета (1), поскольку в противном случае, т.е. если пересчет (1) является *потенциально-бесконечным,* то ДМК не способен породить *индивидуальный математический* объект, т.е. новое д.ч. [15; 16; 25; 26; 28; 29].

Введем второго плута (далее — Плут-2), который, *явно* используя свойство *бесконечности* пересчета (1) и транзитивность *счетно-бесконечных* множеств, способен заменять счетное множество индексов {1, 2, 3, *...}* в последовательности (1) *на любое* другое счетное множество индексов, скажем, {2, 3, 4, ...}, естественно, не меняя количества и порядка самих д.ч. в пересчете (1).

Поскольку результат применения ДМК к пересчету (I) *зависит только от порядка и количества* д.ч. в (1) и не зависит от конкретной индексации этих д.ч., то Плут-1 (и все его почитатели) просто не имеют *«алгоритмических* средств» обнаружить невинную проделку Плута-2.

Здесь уместно особо подчеркнуть, что оба плута являются абсолютно честными «мошенниками», поскольку они не нарушают никаких законов *мета*-математической логики и современной аксиоматической теории множеств. Просто Плут-1 играет по правилам, основанным на *явном, алгоритмическом* использовании свойства *актуальности* любого *актуально-бесконечного* пересчета (1), а Плут-2 играет по правилам, основанным на *явном, алгоритмическом* использовании свойства *бесконечности того же самого актуально-бесконечного* пересчета (1) [15; 16; 26].

Короче, имеем следующую абсолютно честную *мета*-математическую игру.

Согласно традиционному доказательству Кантора 1890 г. [17; 30; 31|, исходная диспозиция имеет вид: «Пусть данный пересчет (1) содержит все д.ч. из X».
431
Ход-1. Плут-2 незаметно похищает всего лишь один индекс, скажем «1», и переиндексирует *все* д.ч. в последовательности (1) следующим образом:

$$x_2, x_3, x_4, \ldots, \qquad (1a)$$

не меняя количества и порядка д.ч. в (1), так что $x_г$ из (1a) равно x_1 в (1), x_3 из (1a) равно x_2 в (1), x_4 из (1a) равно x_3 в (1), и т.д.

Ход-2. Плут-1, используя пересчет (I) или (1a), которые являются неразличимыми с точки зрения ДМК, порождает *новое* д.ч., скажем y_1, и привычно заявляет: «Мое *новое* д.ч. y_1, отлично от всех д.ч. последовательности (1) и потому для него, как всегда, не хватило *одного* н.ч. Следовательно, количество всех д.ч. больше количества всех н.ч.!»

Ход-3. Однако в этот момент Плут-2 вытаскивает «из рукава» индекс «I» и заявляет: «Вы, как всегда, торопитесь. Ваша карта бита: вот свободное, лишнее н.ч., с помошью которого я готов проиндексировать Ваше (вероятно, по недоразумению) незанумерованное д.ч. y_1|».

На сцене появляется рефери этой *мета*-«логической» партии двух плутов, нумерует (канторовское) д.ч. y_1. Плута-1 с помощью натуральною числа «1» Плута-2, помещает это *новое* д.ч. на его законное первое место в пересчете (1а)

$$y_1, x_2,x_3, x_4, \ldots \qquad (1.1)$$

и выносит свой окончательный вердикт: «Поскольку Плут-1 на данный момент не имеет других незанумерованных д.ч., то пересчет (1.1) содержит *все* д.ч. из X, и, следовательно, количество д.ч. НЕ больше количества н.ч. Нулевая ничья!»

Следует заметить, что в этой игре д.ч. представлены в двоичной системе, однако, как показано в [15|, использование других систем с основанием >2, хотя и порождает бесконечное множество незанумерованных д.ч., не меняет сути дела.

Очеиидно, что наши плуты могут вернуться к Ходу-1 и повторить эту игру уже для пересчета (1.1). Затем опять. И т.д. до бесконечности.

В результате, и это было доказано в [15; 16; 25; 26], вместо канторовского доказательства несчетности континуума мы имеем следующее *потенциально* бесконечное «рассуждение» (здесь B= «занумерованы *все* д.ч. из X»):

B→ ⌐B→ B→ ⌐B→ B→ ⌐B→ B→ … (1c)

Таким образом, «диагональное доказательство» Кантора, согласно Витгенштейну, действительно не имеет отношения к тому, что в логике принято называть «дедукцией». Более того, учитывая
432
тот очевидный факт, что на каждом шаге «рассуждения» (1c) ДМК порождает новое д.ч., мы приходим к выводу, что множество X является *потенциально*-бесконечным. Поскольку вывод канторовского утверждения ⌐ B основан на использовании *актуальности* некоторого *актуально-бесконечного* пересчета д.ч. из X, а вывод соответствующего *контрадикторного* утверждения B основан на использовании *бесконечности того же самого актуально-бесконечного* пересчета д.ч. из X, то в *рамках канторовского диагонального доказательства* понятия «актуальное» и «бесконечное» являются *контрадикторными* понятиями. Поскольку в математике до самого последнего времени *единственным* понятием, *контрадикторным* понятию «бесконечное», было понятие «конечное», отсюда следует, что в рамках *канторовского диагонального доказательства* понятия *«актуальное»* и *«конечное»* являются *алгоритмически тождественными* понятиями. Последнее означает, что само понятие «актуальная бесконечность» или. что точнее, «оконеченная (Кантором) бесконечность» является внутренне противоречивым понятием. Отсюда, в частности, следует алгоритмически строгое *доказательство* знаменитого (интуитивного) Тезиса Аристотеля: «Infinitum Actu Non Datur» [15; 16; 25; 26].

Список литературы

1. *Зенкин А.А.* Когнитивная компьютерная графика. М., **1991.**
2. *Davis P.J., Hersh R.* Tne Mathematical Experience. Boston. 1981.
3. *Horgan J.* The Death of Proof// Scientific American. 1993. Vol. 269. N 4. P. 93-103.
4. *Epstein I}., Levy S.* Experimentation and **Proof** in Mathematics // Notices of the American Mathematical Society. 1995. Vol. 42. N 6. P. 670-674.
5. *Thurstan W.P.* On Proof and Progress in Mathematics /,/ Bulletin of the American Mathematical Society. 1994. Vol. 30. N 2. P. 161-177.
6. *Зенкин А.А*. Метод суперindукции: логическая акупунктура математической бесконечности // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. М., 1997. С. 152-168, 173-176.
7. *Зенкин А.А.* Когнитивная визуализация некоторых трансфинитных объектов классической (канторовской) теории множеств//Там же. С. 77—96. 184—189, 221-224.

8 . *Зенкин А.А.* Мультимедийный вариант наскальной живописи // Независимая газета. 2000. 22 марта. Приложение «НГ-НАУКА. С. 9—12. Интернет-адрес: http://science.ng.ru/policy/2000—03—22/l_mmedia.html

9 . *Zenkin A.A.* Cognitive (Semantic) Visualization of the Continuum Problem and Symmetric Proofs in the Transfinite Numbers Theory // The e-journal «VISUAL MATHEMATICS*. 1999. Vol. 1. N 2. At the WEB-Sites: http://www.mi.sanu.ac.yu/ vismath//en/index.html; http://members.tripod.com/vismathl/7en/indcx.html

10.*Zenkin Alexander A., Zenkin Anton A.* Presentation «The Unity of the Left-Hemispheric. Rational, Abstract Thinking and the Right-Hemispheric, Intuitive, Visual One. Intellectual Aesthetics of Mathematical Abstractions* // The 5th International Congress & Exhibilion of the International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry. Sydney, 2001. 8—14 July. Intersections of Art and Science. URL: http://'www.isis-s.unsw.edu.au/interact/gallery/image_files/zenkin/a_zenkin.html

11. *Zenktn Alexander A., Zenkin Anton A.* Cognitive Reality World of Natural Numbers: Education Via Discoveries // International Conference on Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students. Riga, 2002. July. 12.

12. *Зенкин Александр А,, Зенкин Антон А.* Насквозь дырявый континуум: от языка абстракций к языку образов. И обратно // Языки науки — языки искусства. М., 2000. С. 172-179.

13. *Зенкин А.А.* Автоматическая классификация парадоксов логики и математики Об одной «физической» модели парадокса «Лжей» // Новости искусственного интеллекта. 1997. № 3. С. 69—79.

14. *Зенкин А.А.* Новый подход к анализу проблемы парадоксов // Вопросы философии. 2000. № 10. С. 79—90, http://www.com2com.ru/alexzen/papcrs/vf2/ vf2-rus.html.

15. *Зенкин А.А,* Ошибка Георга Кантора // Вопросы философии. 2000. № 2, С. 165—168. http://www.com2com.ru/alcxzen/papers/vfl/vf-eng.html, hup:// wvvw.com2com.ru/alexzen/papers/Cantor/Fatal_Mistake_of_Cantor.html, http:// www.com2com.ru/alexzen/papcrs/The_Cantor_Paradise.htm and at the Bertrand Russell Society WEB-siie «HIST-ANALYST» http://www.channell.com/users/srbayne/ histanaiytic2.htm.

16. *Зенкин А.А.* Infmitum Actu Non Datur // Вопросы философии. 2001. Na 9. С. 157-169.

17. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М., 1985.

18. *Клини С.* Введение в метаматематику. М,, 1957.

19. *Френкель А.А., Бар-Химед И.* Основания теории множеств. М., 1966.

20. *Бочвар Д.А.* К вопросу о парадоксах математической логики и теории множеств // Мат. сб. 1944. Т. 15 (57). С. 369-382.

21. *Russell B.* Autobiography. L., 1953.

22. *Sortnxn R.A.* Yablo's Paradox and Kindred Infinite Liars // Mind. 1998. Vol. 107. Issue 425. P. 137-155.

23. *Бычков C.ff.* Метаматематика и опыт // Наст. сб.

24. *Hedges W.* An Editor Recalls Some Hopeless Papers // The Bulletin of Symbolic Logic. 1998. Vol. 4. N 1. P. 1-17.

25. *Zenkin A.A.* Intuition of Genii against Mytho-eLogic» of Transfmite Cantor's Paradise // International Symposium «Philosophical Insights into Logic and Mathematics». Nancy, France, 2002.

26. *Зенкин Александр А., Зенкин Антон А.* Об одной реконструкции возражения Л. Виттгенштсйна против диагонального метода Г. Кантора // VI научная конференция «Современная логика: проблемы теории, истории и применения о науке». СПб., 2002. С. 320-323.

27. *Wittgenstein L* Remarks on the Foundations of Mathematics. Oxford, 1956,

28. *Зенкин А.А.* О логике и философии «Учения о трансфинитном» Г. Кантора // Материалы VI конференции «Современная логика». СПб., 2000. С. 458—461

29. *Zenkin A.A.* Goedel's Numbering of multi-modal Texts //The Bulletin of Symbolic Logic. 2002. Vol. 8. N 1. P. 180.

30. *Александров П.С.* Введение в общую теорию множеств и функций. М.; Л., 1948

31. *Capinski M., Корр Е.* Measure, Integral and Probability. London, 1999.

От редакционной коллегии

Публикация данной статьи не означает согласия членов редколлегии и авторов сборника с рядом критических ее утверждений в отношении диагональной процедуры Г. Кантора. Вместе с тем было принято решение не открывать дискуссию по проблеме логической обоснованности канторовских рассуждений, поскольку это увело бы обсуждение в сторону от рассматриваемых в книге проблем соотношения математики и опыта.

Раздел III

В ПОИСКАХ НОВЫХ ПОДХОДОВ

Г.Б. Гутнер

ФОРМА И СОДЕРЖАНИЕ ОПЫТА

Вопрос о роли опыта в познании настолько традиционен, что, на первый взгляд, его уже неуместно обсуждать. При одном лишь упоминании о нем в сознании неизменно всплывают хрестоматийные определения приобретенных, врожденных и априорных понятий и давний спор об их возможности и гносеологическом статусе. Как и всякий принципиальный философский спор, он, конечно же, не был завершен. Во всяком случае, в XX столетии к проблеме опыта обращались как-то вскользь и нехотя, а его место в познании перестало быть предметом острых дискуссий. Последнее, по-видимому, связано с тем, что после нескольких столетий упорных разбирательств само понятие опыта обросло таким количеством интерпретаций, что, похоже, вообще перестало быть понятием. Произнеся слово «опыт», философ должен потом долго объяснять, что он, собственно, имеет в виду. Поэтому лучше иногда вовсе не использовать столь обременительный термин, а постараться выразить свои мысли другими словами.

Мне представляется, однако, что не следует отдавать философское понятие на откуп обыденному словоупотреблению. Есть нгчто одно — и едва ли кто-то станет это отрицать, — всегда подразумеваемое под термином «опыт», в каком бы контексте он мп использовался. Это нечто нетривиальным образом связано с мыслью и знанием. В философии XX в. разработан весьма мощиый аналитический аппарат, позволяющий придать некую строгость указанному термину и обозначить границы его употреблении. Поэтому мне представляется весьма уместным выяснить, что же следует называть в наше время опытом, установив одновременно, что им *не является,* но без чего его нельзя ни определить, ни использовать. Говоря так, я вовсе не пытаюсь, еще не начав рассуждения, отвергнуть всякий эмпиризм и с самого начала навязать какую-то иную (например, априористскую) точку зрения. Просто не задавшись целью обнаружить границы опыта, мы вовсе потерям смысл рассуждения. Тогда нам останется признать, что *всё есть опыт* и закончить разговор, не начав его.

435

Та интерпретация, которую я намерен развить в настоящей работе, во многом совпадаете идеями Г.-Г. Гадамера. Замечательным достижением этого философа является то, что он обнаружил единую схему формирования опыта, общую и для обыденного опыта поведения в жизненных ситуациях, и для естественно-научного экспериментального знания, и для герменевтического опыта истолкования традиции. Прообразом гадамеровской схемы является знаменитый герменевтический круг. Именно на этом основании я попробую построить определение опыта.

Круг повседневного опыта

Анализ повседневного опыта состоит в том, что многократное наблюдение обыденных ситуаций заставляет нас делать определенные выводы о связях между ними.

Знание этих связей, в свою очередь, определяет наши поступки. Сейчас нам нужно выяснить, как именно происходит обнаружение связей и как формируется поведение. И для того и для другого можно найти некоторые инварианты, Чтобы увидеть их, рассмотрим простой пример.

Предположим, что, выглянув в темный пасмурный день в окно, я обнаруживаю, что с крыши капает, асфальт мокрый, а прохожие на улице идут с раскрытыми зонтиками. Все эти наблюдения наводят меня на мысль, что на улице идет дождь. Что побуждаем меня прийти к такому предположению? Естественно сказать, чтп опыт. Я много раз уже наблюдал подобную ситуацию и почт всегда, выходя на улицу, обнаруживал, что там и в самом де,к идет дождь. Заметим, точности ради, что обнаруживал я, конечно не дождь, а, например, тот факт, что у меня становится мокрой голова. Последнее замечание очень важно для выявления структуры опыта. Опыт, как можно заключить из сказанного, состоит и многократном подтверждении определенного рода гипотезы, еде данной при определенной совокупности наблюдений. Утверждение «я знаю из опыта, что на улице дождь», означает, что я уже ш один раз имел шанс подтвердить эту гипотезу. Иными словами сам опыт заключается в выполнении известной последовательно сти действий: наблюдение (прохожие с зонтиками, мокрый ас фальт и т.д.), высказывание объясняющей гипотезы (идет дождь), прогноз относительно возможных последующих наблюдений (если я выйду, у меня станет мокрой голова), сопоставление прогноза с реальным наблюдением. Опыт осуществляется в рамках этой схемы. Наш пример, возможно, несколько упрощает ситуацию, поскольку в значительной части случаев наряду с наблюдением для выдвижения гипотезы требуются еще и особого рода знания Я, например, по опыту могу догадаться о том, почему после включения в сеть стиральной машины, утюга, компьютера и электрического обогревателя погас свет в квартире. Однако здесь моя догадка основана еще и на некоторых сведениях из электротехники, полученных в результате обучения. Об обучении мы еще поговорим отдельно, однако ссылка на него не разрушает общей схемы: от наблюдений к гипотезе, затем вновь к наблюдению, возвращение к гипотезе и т.д. Возможно, что очередное наблюдение заставит меня отказаться от ранее выдвинутой гипотезы. В таком случае потребуется новая догадка, соответствующая всем имеющимся наблюдениям.

В любом случае это движение от наблюдения к гипотезе и иоратно представляет собой своеобразный круг. Заметим, что, выдвигая гипотезу, мы обобщаем ряд частных наблюдений. Доселе разрозненные факты связываются в целое, и возникает образ сигунции. Наличие гипотезы гарантирует цельность, мы понимаем целое, когда имеем гипотезу. Понимание целого создает возможность понимания каждой части, т.е. каждого отдельного наблюдения, которое оказывается *объяснено* в рамках целого. Круг опыта совпадает с кругом понимания, полностью воспроизводящим герменевтический. Его можно рассматривать как движение от целого к частям и вновь от частей к целому.

Круг естественно-научного опыта

Такова структура повседневного опыта. Она принципиально совпадает с опытом естественно-научным, в основе которого лежит гипотетико-дедуктивный метод. Аналитический аппарат естествознания обеспечивает, конечно, очень сложные построения, в рамках которых одни гипотезы предлагаются для объяснения других гипотез, которые, в свою очередь, объясняют третьи и т.д. В развитой научной теории уровень непосредственного наблюдения находится где-то в самом низу впечатляющей иерархии дедуктивно связанных предположений. Наблюдаемые факты при этом составляют лишь небольшую часть содержания теории. Однако обоснование теории состоит именно в постоянном воспроизведении описанного выше кругового движения от наблюдений к гипотезе и обратно. Возможность такого движения связана, в частности, с принципом фальсифицируемости научной теории.

Итак, опыт есть постоянное движение в круге понимания. В пределах этого кругового движения происходит как подтверждение прежних научных предположений, так и их опровержение и замена новыми. Всякое знание может быть названо эмпирическим или *полученным из опыта* именно потому, что оно возникает как гипотеза и занимает свое место в круге.

437

Научный опыт, однако, отличается от повседневного не только большей сложностью. Есть еше одно обстоятельство, которое необходимо подробно разобрать. Дело в том, что всякая теория включает в себя не только гипотезы и наблюдения, но еще и их связь. Эта связь носит дедуктивный характер. Гипотеза должна быть сформулирована так, чтобы ранее установленные факты (наблюдения или другие гипотезы) можно было получить в качестве ее логических следствий. Следовательно, при формулировке гипотезы нужно в каком-то смысле предвидеть некоторую дедуктивную процедуру. Последнее же возможно тогда, когда учитываются правила вывода. Они составляют необходимое условие всякой научной теории. В отличие, заметим, от наблюдений. Не в том смысле, конечно, что наблюдения необязательны, а в том, что содержание гипотезы не зависит от конкретных наблюдений. Одна и та же гипотеза может подтверждаться при самых разных эмпирических данных. Конечно, гипотеза формулируется так, чтобы объяснить именно эти, наличные, наблюдения. Но *именно эти* наблюдения и известном смысле случайны. В отношении правил вывода подобная свобода невозможна. Они независимы ни от гипотез, ни от наблюдений. Но всякая гипотеза должна быть сообразована с ними. Таким образом, мы обнаруживаем в структуре теории то, что может быть названо ее условием. Как наблюдения, так и созданные для их объяснения гипотезы случайны. Но связь тех и других представляется необходимой и не зависит от их содержания. В данном случае уместнее даже говорить не о самой связи, а о се форме, которая оказывается инвариантом для любого теоретического рассуждения. Дедуктивная связь положений теории реализуется в конкретных процедурах вывода. Но эти последние возникают, грубо говоря, при подстановке в уже известную, уже в каком-то смысле имеющуюся в наличии форму. Так, например, суждения подставляются в форму силлогизма.

Важно, впрочем, обратить внимание на то, что речь в данном случае идет не только о логическом выводе. Дедукция от общих гипотез к частным фактам (т.е. другим гипотезам или наблюдениям) может осуществляться как математическое рассуждение. Эти может быть цепочка алгебраических преобразований, последовательность геометрических построений и т.п. Так, например, что бы с помощью ньютоновского закона всемирного тяготения объяснить движение тел в Солнечной системе, нужно решить дифференциальное уравнение. При этом и само уравнение, и схема его решения представляют собой (подобно схеме силлогизма) лишь форму. Конкретная дедуктивная процедура возникай из нее при подстановке определенной правой части (обусловленной в данном примере законом всемирного тяготения) и началь-

438

ных условий. Именно такие формы часто называют априорными, имея при этом в виду две указанные взаимосвязанные особенности: независимость от эмпирического содержания теории и необходимый характер связи, возникающей благодаря им. В принципе можно выделить и временной аспект: представление о форме *предшествует* созданию теории. Всякое знание оказывается возможным лишь в пределах такого рода форм.

Историческое измерение естественно-научного опыта

Две указанные особенности дают возможность, однако, говорить лишь о весьма условном, или локальном [1], априоризме. Можно всегда сказать, что формы, обеспечивающие в рамках данной теории связь между гипотезами и наблюдениями, сами появились в результате иного опыта, предшествующего данному. В самом деле, любая форма оказывается таковой лишь по отношению к фиксированному содержанию, т.е. тогда, когда мы находим связь между научными фактами, выраженными в виде содержательных утверждений. Однако мы также можем зафиксировать используемые при этом формы в виде иных содержательных утверждений. Эти содержательные утверждения суть математические теоремы, ло-шческие правила или даже физические уравнения. В приведенном выше примере такого рода утверждением является второй шкон Ньютона, записанный как линейное дифференциальное уравнение. Будучи формой для дедуктивной процедуры, связывающей закон всемирного тяготения с траекторией движения небесных тел, он может быть рассмотрен и как самостоятельное содержательное утверждение.

Заметим, кстати, что даже для тех форм, которые дают связи самого обшего характера, возможна такая содержательная интерпретация. Кант, например, указав на априорные формы синтеза, осуществляемого рассудком, дополняет, однако, трансцендентальную дедукцию аналитикой основоположений, где приводит некие общие законы, соответствующие обнаруженным ранее априорным формам.

Итак, всякая форма имеет аналог в виде содержательного утверждения. О нем же всегда можно предположить, что оно является эмпирической гипотезой, т.е. может быть встроено в описанную выше циклическую конструкцию. Возможность такого предположения, очевидно, ставит под угрозу априоризм как таковой. Как можем мы судить о том, что для какого-то утверждения в принципе не существует никакого опыта, в рамках которого оно появилось? Тот факт, что некая форма выступает в качестве условия опыта, вовсе не является свидетельством ее априорности. Всегда можно сказать, что существует иной, более широкий опыт.

439

Правдоподобность утверждения о возможности более широкого опыта увеличивается, если учесть еще одно важное отличие научного опыта от повседневного. Научный опыт заведомо не является опытом личным. Он имеет социальную и историческую составляющую. Научная теория не возникает в результате труда одного человека. Она есть плод длительной работы сообщества, причем не только узкого сообщества ученых, занятых в данной области науки. В любой теории оказываются задействованы методологические и даже метафизические принципы, свойственные всей культуре в целом. Так, например, дарвиновская эволюционная теория опирается на принцип непрерывности, разработанный европейской метафизикой в XVII—XVIII вв. Однако он едва ли может быть признан априорным, поскольку совершенно не вписывается в современную генетику. Не уместнее ли предположить, что представление о непрерывности как о всеобщей форме связи между явлениями природы[2] возникло в результате длительного наблюдения за процессами определенного рода. Гипотеза о непрерывности появляется как индуктивная догадка, а затем подтверждается многочисленными наблюдениями, производимых многими поколениями. Эта гипотеза, однако, не становится постулатом какой-либо естественно-научной теории. Она рассматривается как предпосылка *любой* теории. Она используется при формулировании постулатов и при установлении связи этих постулатов с более частными принципами или данными экспериментов.

Поэтому и принцип непрерывности, и другие логические, метафизические или математические предпосылки научных теорий, по-видимому, устанавливаются в результате циклического движения (от гипотезы к наблюдению и обратно), захватывающего много поколений людей. Вполне естественно, что для одного человека или даже для научного сообщества, существующего сравнительно недолго, подобные предпосылки имеют характер всеобщности и могут казаться априорными. Но в достаточно длительной исторической перспективе это впечатление разрушается. Разрушается оно и при разного рода научных кризисах, при смене парадигм, появлении новых программ и т.п.

Опыт истолкования

Итак, обсуждение структуры научного опыта заставляет нас обратиться к исторической перспективе. Такое обращение, как мы можем убедиться, оказывается весьма многообещающим для эмпиризма. Возникает надежда на то, что любая составляющая мышления может быть сведена к опыту, если последний будет
440
понят достаточно широко. Однако то расширение понятия опыта, на которое мы только что указали, все же представляется недостаточным. Конечно, наука включает совокупный опыт человечества, рассмотренный и в социальном горизонте (деятельность сообщества), и в исторической перспективе (деятельность многих поколений). Но такое рассмотрение рискует стать слишком абстрактным, если представить сообщество как единый субъект знания, действующий на протяжении длительного времени. Чтобы понятие опыта стало более конкретным, нужно еще исследовать механизмы передачи знания внутри сообщества. Согласимся с тем, что столь общие принципы, как принцип непрерывности, или, например, правила арифметики есть гипотезы, установленные и подтверждаемые на протяжении жизни многих поколений. Однако сама процедура установления и подтверждения оказывается весьма не простой. Она включает в себя весьма специфическую деятельность, связанную с интерпретацией результатов, достигнутых ранее другими людьми. Открытие исторической перспективы означает существование традиции, которая заново истолковывается каждым, кто приступает к научной деятельности. Без такого многократно воспроизводимого истолкования опыт, понятый как социальный и исторический, не может осуществиться. Пусть всякая метафизическая предпосылка, всякий постулат и всякая форма вывода есть плод последовательных усилий многих поколений, шфиксировавших в них свой опыт. Но этот опыт имеет смысл мишь тогда, когда актуализируется каждым мыслящим человеком, и процедура этой актуализации не может не входить в понятие опыта.

Аналогичную постановку вопроса мы можем найти у Гуссерля, когда он пытается выяснить, каким образом вся совокупность смыслов, составляющих содержание науки, воспроизводится каж-цым ученым. Рассматривая такое воспроизведение как способ существования науки, Гуссерль, по существу, вводит в естествознание герменевтическую составляющую. Если сопоставить это обстоятельство с тем описанием опыта, которое мы предприняли, то нужно признать, что такой опыт представляет собой сочетание лиух дополняющих друг друга элементов. Опыт наблюдения за природой должен сочетаться с опытом истолкования научной традиции.

Здесь уместно спросить: на каком основании термин «опыт» нообше применяется к деятельности, связанной с истолкованием чего-либо? Например, традиции. Есть ли у этой деятельности что-л|ибо общее с описанной нами выше обработкой наблюдений? О гнет на этот вопрос состоит в простой ссылке на факты, установ-цспньте в классической герменевтике. Истолкование происходит в герменевтическом круге. Оно представляет собой то же движение,
441
которое мы описали, рассматривая интерпретацию наблюдении от целого к частям и вновь к целому. Это движение тем более сходно с опытом наблюдения, что оно также включает в себя вы движение и опровержение гипотез, Именно это обстоятельство было обнаружено Шлейермахером, когда он попытался показан., что герменевтический круг не является порочным кругом.Сам Шлейермахер, конечно, пользовался иной терминологией: то, чти здесь названо гипотезой, он называл предпониманием, или диви нацией. То же самое Гадамер назвал «предрассудком». Важно то, что понимание любого текста требует предварительной установки сознания, исходной гипотезы относительно его смысла. В рамках этой гипотезы происходит интерпретация частей текста. Смып отдельной части можно понять лишь на основе предварительного понимания смысла целого. Естественно,

однако, что предварительная гипотеза почти наверняка будет отвергнута. По мере истолкивания частей смысл целого будет постоянно корректироваться, будут формироваться новые гипотезы, позволяющие иначе взглн нуть на отдельные части текста. Получается, что истолкованш текста происходит ровно по той же схеме, что и интерпретации наблюдений. Она включает в себя выдвижение гипотезы, позио ляющей связать воедино разрозненные факты и проверку эти гипотезы на материале новых наблюдаемых фактов. (Думаю, не будет большой натяжки в том, что мы назовем наблюдаемыми фактами смыслы отдельных частей текста.)

Конечно, не составит труда увидеть ряд серьезных отличий между опытом наблюдения и опытом истолкования, Наиболее важным является, по-видимому, отличие в способе связи между общей гипотезой и частными фактами. Если для опыта наблюдений эта связь так или иначе осуществляется благодаря некотором дедуктивной процедуре, то при истолковании явно требуется нечто иное. Я не буду сейчас входить в детальное рассмотрение герменевтической техники, в рамках которой может быть описана требуемая связь. Замечу, однако, что интересен вопрос о статусе такой связи. Следует ли рассматривать ее как некоторую априорную схему или как результат какого-то опыта? Если верно последнее, то что это за опыт? Является ли он опытом истолкования или каким-то другим? Все эти вопросы, к сожалению, приходится оставить пока открытыми.

Можно было сказать еще и о различии в порядке наблюдении частностей и выдвижении гипотезы о структуре целого. При понимании текста исходная гипотеза о его смысле предшествует чтению текста и, соответственно, анализу частей. При наблюдении к естественных науках и в повседневной жизни вроде бы получается наоборот: частные факты предваряют гипотезу. Последняя оказывается обобщением многообразия наблюдаемого материала. Нужно сначала пронаблюдать нечто, чтобы потом найти объясняющую гипотезу. Однако это различие при внимательном взгляде оказывается весьма условным. Легко видеть, что когда мы описываем опыт наблюдения, начиная его описание с самих наблюдений, мы описываем лишь фрагмент этого опыта. Наблюдение всегда имеет некоторый контекст. Всякому единичному наблюдению предшествует какое-то предварительное знание, какая-то исходная гипотеза. Например, мое наблюдение, состоящее в том, что прохожие на улице идут с раскрытыми зонтиками, требует предварительного знания о том, что такое зонтик, как он выглядит и дня чего используется.

Таким образом, оказывается, что круговое движение от гипотезы к наблюдениям и обратно (или, напротив, от наблюдений к гипотезе и обратно) есть единичный цикл, минимальный блок совокупного опыта. Последний же представляет собой постоянно возобновляюшееся движение, устроенное весьма сложно. Оно состоит из множества циклов, либо следующих друг за другом, либо встроенных друг в друга. Интересно то, что в этом совокупном опыте опыт истолкований переплетен с опытом наблюдений. Они не существуют друг без друга. Выделение каких-либо наблюдаемых фактов и их обобщение в гипотезах возможно лишь при условии предварительного знания, которое возникает не только и не столько в результате наблюдений, сколько в результате обучения. Оно же осуществляется как опыт истолкования.

Опыт как взаимообмен между тремя мирами

Описанная здесь ситуация вполне релевантна попперовской концепции трех миров. Все, что мы выделили в качестве содержании знания, возникающего в результате опыта, весьма естественно «располагается» в этих трех мирах. Первый мир — это мир наблюдаемых физических объектов. Второй мир содержит то, что наблюдается, понимается и воображается. Наконец, третий мир изучает все гипотезы, ставшие достоянием сообщества. Все упомянутые нами выше общие постулаты, метафизические предпосылки, правила вывода — короче, все то, что возникло благодари совокупному опыту поколений и зафиксировано традицией, состовляет содержание третьего мира.

Обратившись к попперовской терминологии, мы можем назвать опыт процессом взаимодействия трех миров. Он состоит в циркуляции определенных содержаний между тремя мирами, причем содержание второго и третьего миров, возникающее и меняющееся в ходе такой циркуляции, называется, по определению,

443

эмпирическим. Слово “циркуляция” отнюдь не является случайным, поскольку, напомним, речь у нас идет о круге как основной форме опыта.

Важно заметить, что обязательным «участником» этой циркуляции является второй мир. На этом следует остановиться подробнее. Прежде всего ясно, что ни один из миров сам по себе никакого опыта не создает. Описанное нами круговое движение, естественно, невозможно в пределах одного только первого или одного только третьего мира. Необходимой частью опыта является трансляция содержаний из первого мира во второй (посредством наблюдения) или из третьего мира во второй (посредством понимания). Сами термины «наблюдение» и «понимание» относятся ко второму миру. Возможен ли опыт, осуществляемый только в пределах второго мира? На первый взгляд кажется, что да. Разного рода самонаблюдение, интроспекция, самоанализ могут представляться примером такого опыта. Однако это не так. Прежде всего потому, что вообще никакой опыт не обходится без обращения к третьему миру. Мы уже обращали внимание на то, что всякое наблюдение происходит в контексте некоторого предварительного знания («предрассудка», как сказал бы Гадамер). Самонаблюдение не является исключением. Свои переживания я наблюдаю и анализирую в рамках некоторых предварительных соображений[3]. Кроме того, подвергая наблюдению самого себя, я переношу то, что наблюдаю, впервым или в третий мир. Мы еще остановимся на этом переносе, когда будем обсуждать содержание второго мира.

Итак, опыт невозможен в рамках одного, изолированноя мира. Кроме того, невозможно прямое взаимодействие между первым и третьим миром. Всякое знание о физических объектах «попадает» в третий мир, став предварительно частью некоторого ментального состояния, чьего-то личного переживания.

Невозможно ограничить опыт взаимодействием первого и второго миров. Это обстоятельство мы уже отметили, когда указывали на контекстуальный характер любого наблюдения. Пред- варительные знания, из которых исходит наблюдающий, суть гипотезы, относящиеся к третьему миру.

Можно, наверное, сказать, что герменевтическая процедура (такая, например, как истолкование литературного текста) есть взаимодействие между вторым и третьим мирами. Однако здесь невозможно обойтись без первого мира, поскольку всякий текст существует лишь с помощью физических носителей (типографская краска на бумаге, зарубки на камне, пучок электронов в мо- ниторе и т.д.).

444

Так что всякий опыт обязательно распространяется сразу на три мира. И все же при его осуществлении центральным оказывается второй мир. Поппер справедливо отвел ему роль посредника между двумя другими мирами. Однако, на мой взгляд, он несколько недооценил его роль, рассмотрев его, скорее, как вспомогательное средство для формирования третьего мира.

Значимость второго мира обнаруживается при попытке выяснить более точно, что представляет собой каждый из миров. Выясняется, что именно второй мир можно определить более или менее точно, тогда как первый и третий мир можно описывать, лишь апеллируя к содержанию второго. Попробуем для начала сказать что-нибудь определенное по поводу первого мира. Утверждение, что он представляет собой мир физических объектов, следует рассматривать лишь как туманный намек, призванный создать у читателя предварительное и весьма неточное представление о чем-то, что будет далее обсуждаться. Термин «физический объект» может обозначать все что угодно. Говоря о первом мире, Поппер, очевидно, указывал на нечто, называемое «объективной реальностью», на то, что «на самом деле существует». Понятно, что все ни выражения никакой ясности не добавляют. Интуитивно ясно, с другой стороны, что речь здесь должна идти о некоторых онтологических допущениях, которые могут позволить населить первый мир самыми разными сущностями. Строгий позитивист ограничит его содержание физическими событиями, материалист поместит там материальную субстанцию, платоник увидит в нем идеи, нсрующий человек — Бога. Сами же онтологические допущения обитают, очевидно, в третьем мире. Так что мы не имеем возможности описывать первый мир сам по себе. Необходимо найти подходяшую теорию в третьем мире, чтобы затем получить некоторое представление о первом. Сказанное, кстати, вполне корреспондирует с нашими соображениями, касающимися структуры опыта: всякое наблюдение возможно лишь в рамках заранее сформулированных предположений.

Итак, первый мир существует лишь вместе с третьим. Но что представляет собой третий мир? Здесь обнаруживаются новые сложности. Ни один объект третьего мира не существует в действи-тельности. Ни в каком месте и ни в какое время невозможно обнаружить теорему, гипотезу или постулат. Можно обнаружить книжки, в которых они записаны, но они принадлежат не к третьему миру, а к первому. Можно предположить, что они существую на манер платоновских идей, но тогда это тоже первый мир, рассмотренный в рамках определенных онтологических до-пущений. Иными словами, третьего мира вообще не существует, хотя, с другой стороны, мы обязаны признать некую особую сферу

445

объективного знания, отличную как от познаваемых объектов, так и от личных переживаний.

Определенность в понимании первого и третьего миров возникает только при обращении ко второму. Он, на мой взгляд, не просто играет роль посредника, но занимает центральное положение между двумя мирами. Именно в нем объекты третьего мира становятся действительными, а объекты первого — онтологически определенными. Причем и то и другое получается благодаря опыту. Поэтому, чтобы выяснить, как опыт создает связь трех миров и сообщает им определенность, нужно рассмотреть содержание второго мира.

Сделать это, как мне кажется, легче, чем пытаться выяснять, что составляет первый и третий миры. Содержание второго мира это ментальные состояния, или состояния сознания, находящегося в постоянной связи с двумя другими мирами. Важно то, что обращаясь к структуре этих состояний, мы не должны заранее предполагать наличие двух других миров.

Второй мир и интенциональность

Здесь мы приходим к проблеме, уже многократно обсуждавшейся в философии сознания: существует ли какое-либо фундаментальное свойство ментального, которое можно было бы положить в основу его определения? Иными словами, можно ли точно указать, пользуясь попперовской терминологией, какого рода сушности следует относить исключительно ко второму миру? Выясняя это, следует иметь в виду, что второй мир вовсе не является конгломератом психических состояний, обнаруживаемых путем самонаблюдения. Второй мир есть посредующее звено между двумя другими мирами, и, следовательно, сущности второго мира должны быть прямо задействованы в том взаимообмене, которым мы назвали опытом. Это значит, что нам нужно указать такие ментальные состояния, форма которых обеспечивала бы их причастность к содержанию первого или третьего мира. Таковы состояния, которые Дж. Сёрль назвал *интенционсыьными*[4].

Если кратко определить интенциональность, то ее можно назвать *содержательностью переживания* (или ментального состояния). Переживание интенционально, постольку поскольку являеся переживанием *чего-то.* Например, знание о чем-то, понимание чего-то, желание чего-то и т.д. Сёрль указывает, что не всякое ментальное состояние интенционально. Неинтенциональны, ни пример, немотивированный страх или эйфория[5]. Такого рода состояния, на мой взгляд, нет смысла относить ко второму миру Последний должен состоять исключительно из интенциональных

446

состояний. Чуть позже мы вернемся к этому утверждению и попытаемся более тщательно обосновать его. Но прежде нужно рассмотреть два вопроса. Во-первых, какова структура интенциональных состояний? Во-вторых, как участвуют ингенциональные состояния во взаимодействии миров, иными словами, каково место ин-тснциональных состояний в опыте?

Исчерпывающий ответ на первый вопрос имеется в указанной статье Сёрля. Нам лишь достаточно указать, что интенциональное состояние включает две состааляющие. Будучи содержательным переживанием, оно подразумевает, во-первых, характер этого переживания, а во-вторых, то, на что направлено это переживание. Если я хочу пить, то характер переживания (называемый также *мюкутивной силой)* — желание, а направленность переживания — но желаемая ситуация, которую можно выразить предложением “Я пью”. Это последнее и составляет содержание моего переживании. Следуя Сёрлю, мы будем называть его *пропозициональным*

Итак, структура интенционального состояния включает единство двух аспектов — иллокутивной силы и пропозиционального содержания. Именно эта структура и создает то, что называется итениионапьностью.

Если вернуться к прежнему определению («направленность на обьект»), то с учетом рассмотренной структуры его следовало бы исправить и назвать интенциональность *направленностью на ситуацию.* Именно ситуация (а не объект) корреспондирует с пропорциональным содержанием, которое всегда выражается утвердительным предложением. Это обстоятельство позволяет установим, формальный критерий отличия интенционального состояния от любого другого ментального состояния. Например, состояние боли не является интенциональным, хотя мы и можем сказать, что болит всегда что-то. Однако выражения «Я хочу пить» и «У меня горло» при внешнем сходстве оказываются существенно- различными. Первое, как мы видели, позволяет выделить некую ситуацию в качестве пропозиционального содержания. Второе сделать этого не позволяет. Нельзя сказать, что горло есть пропозициональное содержание для состояния боли, поскольку словом “горло” не описывается никакая ситуация.

Интенциональная актуализация ситуаций третьего мира

Теперь мы можем вернуться к вопросу о содержании первого миров. Из сказанного ясно, что определенность этого может возникнуть лишь благодаря соотнесенности со вторым миром. Последнее же означает, что всякая ситуация, имею-

447

щая место в «реальности» (т.е. в первом или третьем мире), есть не что иное, как пропозициональное содержание некоторого ин-тенционального состояния.

Для ситуаций третьего мира этот тезис обосновать довольно просто. Все, что претендует на статус таких ситуаций, становится действительным лишь тогда, когда кто-то понял и знает. Математическая теорема существует (как теорема, а не как следы типографской краски на бумаге) лишь в сознании того, кто, прочтя некий текст (или услышав некую речь), понял, в чем она состоит. Иными словами, теорема обретает действительность, будучи встроена в некоторое интенциональное состояние, обладающее иллокутивной силой понимания, знания, убежденности и т.п. Вне всяких интенииональных состояний она является лишь *возможным* пропозициональным содержанием. Здесь уместно вспомнить установленный Аристотелем факт, что всякая актуализация тождественна оформлению. Действительным является лишь сочетание материи и формы, оформленное содержание. Чистого содержания, лишенного формы, не существует в действительности. Его можно назвать чистой возможностью, которая являет себя, лишь будучи особым образом оформлена. Так и ситуация третьего мира, если ее никто не мыслит, не понимает, не описывает, — только возможность, только материя возможного знания, которая станет действительностью благодаря оформлению. Какая же форма нужна для такой актуализации? Из сказанного ясно, что это интенциональность. Ситуация третьего мира становится действительной, обретая статус пропозиционального содержания интенционального состояния. Интенциональность есть та форма, в которой существует всякое объективное знание.

Конечно, любая ситуация третьего мира, т.е. всякая теорема, научная теория, правило вывода, стихотворная строка, имеет собственную форму. Например, форму высказывания, заданную грамматикой используемого языка, поэтическую форму, определяемую стихотворным размером, и т.д. Но такого рода формы еще не в состоянии актуализировать оформляемое ими содержание. Они необходимы, но недостаточны для актуализации. Важно заметить, что сами эти формы полностью принадлежат третьему миру и могут быть представлены в качестве его содержания. Они как раз и являются примерами тех «локально априорных» форм, о которых мы говорили ранее. Существенной чертой таких форм является возможность их представления в виде некоторых содержательных пропозиций, описывающих, например, структуры языка или поэтической речи.

Достаточным условием актуализации является интенциональность. Именно она сообщает действительность любой ситуации третьего мира. Обретение интенциональности есть синоним актуализации. Интенциональность, следовательно, есть некая предельная форма, благодаря которой совершается окончательное оформление всякой ситуации третьего мира.

Статус интенциональности

Возникает естественный вопрос: не является ли сама интенциональность ситуацией третьего мира, имеющей содержательное описание и актуализируемой во втором мире? Ничто не мешает ответить на этот вопрос положительно. Однако, став ситуацией третьего мира, интенциональность занимает в нем какое-то особое положение. Если «обычная» ситуация третьего мира актуализируется в результате личного понимания и после этого становится достоянием субъекта понимания, то с интенциональностью происходит нечто иное. Обратимся к примерам. Узнав из книжки теорему Пифагора, я «извлекаю» ее из третьего мира в качестве некоторой ситуации. После этого я могу использовать эту теорему в качестве общей, формы при понимании (актуализации) иных ситуаций — разного рода частных случаев метрических соотношений в прямоугольных треугольниках. Возможность такого использования и означает, что теорема стала моим достоянием. Несколько иначе обстоит дело с более общими принципами. Упомянутый выше принцип непрерывности, например, также используется мною как форма при рассмотрении весьма широкого класса ситуаций (как третьего, так и первого мира). Однако я (как и многие мои современники) могу даже не сознавать, что пользуюсь этим принципом при оформлении каких-то частных содержаний. Я обращаюсь к нему как к очевидности и только в крайних обстоятельствах могу поставить его под сомнение и задаться вопросом о его происхождении. Однако он вовсе не присущ мне изначально. Я усвоил его в ходе некоей социальной практики, скорее всего благодаря тому, что постоянно сталкиваюсь с его действием при решении разнообразных математических, естественно-научных или повседневных проблем. Вероятнее всего, что я не сам его открыл, а он присутствует в известных мне решениях множества задач, про которые я читал в книгах, которые объясняли мне в юности мои учителя и т.п. Эта форма навязана мне социумом, культурой, историей. Я бессознательно извлек ее из третьего мира и пользуюсь ею, пока есть возможность.

Так ли обстоит дело с интенциональностью? Здесь приходится констатировать некоторое различие. Извлечение любой ситуации из третьего мира необходимо носит интенциональный характер, даже если я извлекаю оттуда интенциональность. Независимо
449
от того, сознательно или бессознательно я что-то усваиваю, я обязательно оказываюсь в некотором интенциональном состоянии. Поэтому, совершая любой акт понимания, актуализируя любое содержание, я уже обладаю интенциональностью как заранее присутствующей формой. Не будь этого, из третьего мира во второй вообще ничего не попало бы. Равно как и из первого. Ниже мы еще поговорим о статусе такой формы, а также попытаемся установить, является ли интенциональность единственной формой такого рода.

Общее и форма как ситуации третьего мира

Пока что мы говорили об актуализации содержаний третьего мира. Сказанное, как может показаться, едва ли может быть отнесено к первому миру. Прежде всего потому, что ситуации первого мира (в этом должно состоять его принципиальное отличие от третьего) существуют актуально независимо от интенциональных состояний. Они не нуждаются (вроде бы) в установлении отмойте ний со вторым миром, для того чтобы стать действительными. Однако существование ситуаций первого мира все же не столь безразлично к интенциональности, как кажется на первый взгляд. Чуть ниже мы попытаемся обосновать этот тезис, но прежде нам потребуются некоторые уточнения по поводу использованных здса терминов «общее», «форма» и «ситуация».

Ясно, что всякая форма есть нечто общее. В одной и той же форме могут существовать различные содержания. Этот тезис легко пояснить с помощью алгебраического примера. Содержащее переменные выражение задает форму, которая является *общей* для многих выражений. Например, в тождестве $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ вместо переменных можно подставлять числа и другие алгебраические выражения. Эти переменные можно рассмотреть как зарезервированные пустые места, а потому записанное тождество есть не что иное, как форма. С другой стороны, его можно рассматривать как общее суждение, справедливое для многих частных случаев.

Приведенный пример показывает, что верно и обратное утверждение: не только всякая форма есть общее, но и общее — это всегда форма. Парадигмой общего суждения, собственно, и является выражение, содержащее переменные. Физический закон, математическая теорема или методологический принцип (типа принципа непрерывности) всегда могут быть рассмотрены как форма, в которой нам предстают некоторые частные содержания. Мы всегда наблюдаем их *на примерах* — в конкретных геометрических фигурах, описаниях физических явлений и т.п.
450

Важно, однако, то, что все общие утверждения (а следовательно, и формы) принадлежат третьему миру. Они суть плоды мыслительной деятельности, они устанавливаются, формулируются, сочиняются, понимаются людьми. Иначе говоря, все эти общие принципы, законы и т.д. представляют собой *гипотезы* и составляют основу знания. Я не хочу утверждать, что они не могут оказаться и в первом мире (об этом мы еще скажем), но их наличие в третьем очевидно. Они представляют собой *ситуации* третьего мира, обусловливая положение дел именно в нем. Как мы уже установили, все эти ситуации существуют лишь в возможности и актуализируются, став пропозициональным содержанием некоторого интениионального состояния. К сказанному следует добавить, что в этом вообще можно видеть определение ситуации. этим словом следует называть то, что является пропозициональным содержанием. Именно оно составляет положение дел, составляющее предмет знания, понимания, уверенности и т.п.

Ситуации первого мира и роль онтологических допущений

Сказанное в предыдущем разделе верно и в отношении первого мира. Ситуацией первого мира является то, что становится пропозициональным содержанием. Иными словами, содержание первого и третьего миров обретает форму интенциональности и именно в этой форме рассматривается как ситуация. Сразу же, однако, бросается в глаза различие между ними: ситуация первого мира не нуждается в том, чтобы принимать форму интенциональности. Если первый мир — это мир, существующий совершенно независимо от всяких проявлений ментальности, то его ситуации существуют актуально сами по себе и лишь отражаются в пропозициональных содержаниях интенциональных состояний, но отнюдь не определяются ими. В этом можно усмотреть коренное отличие первого мира от третьего. Однако при попытке установить, что это за сущие сами по себе ситуации, возникают большие трудности.

Этот вопрос можно сформулировать и иначе: из чего состоит первый мир? Действуя в рамках установленных нами представлений о третьем мире, мы можем начать это выяснение с вопроса: из чего он не состоит? И первое, что можно сказать по этому поводу, — он не состоит из гипотез. Утверждать это даже как-то странно, поскольку мысль о том, что гипотеза сама есть некоторая реальность, актуально существующая наряду с видимыми и осязаемыми предметами, едва ли кому-то придет в голову. Гипотезы «живут» в третьем мире. Они более или менее точно описывают ситуации первого мира, но сами там никак не находятся[6].

451

Легко выяснить, впрочем, что и первая сущность также не может находиться в первом мире, поскольку она тоже — гипотеза. Всякая устойчиво существующая во времени вещь, обладающая качествами и являющаяся в восприятии, есть лишь мысленная конструкция, предназначенная для объяснения ряда взаимосвязанных ситуаций. Сказанное, на мой взгляд, достаточно убедительно показано еше Расселом. Вспомним его известный пример с мистером Джонсом[7]. Допустим, пишет Рассел, у вас есть друг, которою зовут мистер Джонс. Удавалось ли вам, однако, видеть когда-либо нечто, что было бы мистером Джонсом самим по себе? Едва ли. Все, что вы видите, — это ряд разнообразных ситуаций, связанных чем-то общим. Вы можете вспомнить мистера Джонса в детстве, увидеть, как он выражает недовольство по поводу опоздания завтрака или как он принимает известие о присвоении ему титула сэра. Все это — весьма различные ситуации. Однако все они, а также множество других обладают весьма устойчивой совокупностью общих признаков. Эта совокупность общих признаков, т.е. то общее, что присуще множеству единичных ситуаций, и есть мистер Джонс сам по себе. Утверждение о непрерывном существовании во времени такой вещи, как мистер Джонс, есть гипотеза, объясняющая появление при определенных условиях известных нам признаков. Конечно, это очень хорошая гипотеза. Она позволяет делать очень точные прогнозы. Однако она все равно остается гипотезой.

Если рассуждать так, то содержанием первого мира не являются ни пещи, ни объекты, ни субстанции. Первый.мир состоит из ситуаций, положений дел, ограниченных в пространстве и времени и выражаемых в определенных пропозициях. К вопросу о пропозициях мы скоро вернемся, а пока попробуем подвести промежуточный итог. Получается, что мы свели содержание первого мира к крайней неопределенности. Поскольку первый мир — это независимая ни от какой ментальности реальность, то его ситуации не подразумевают никакого мыслительного конструирования. Но что это за ситуации? Как их определить? Как установить их границы? Всякая попытка установить, где кончается одна ситуация и наминается другая, обнаруживает условность этих границ. Если, глядя на сидящего за завтраком мистера Джонса, я на несколько секунд отвлекся от этого зрелища, то какая ситуация возникает после этого? Та же самая иди уже другая? Ясно, что временные и пространственные границы ситуации устанавливаются неким контекстом, они должны соответствовать целому ряду допущений. Для нас сейчас даже не важно, какого рода могут быть эти допущения и как они определяют ситуацию. Важно лишь то, что ситуация также оказывается результатом мысленного конструирования.

452

В результате первый и третий миры сильно сближаются. Оказывается, что мы не можем указать что-либо, что безоговорочно относилось бы к первому миру. Все, на что только ни падает наш взгляд, тут же попадает в разряд мысленных конструкций, гипотез. Поэтому еще раз следует вспомнить о том определении ситуации, которое мы использовали, говоря о третьем мире. Ситуацией называется то, что выражается в пропозициональном содержании интенционального состояния. Поэтому не может быть никаких ситуаций самих по себе, «абсолютно реальных» ситуаций, существующих независимо от всякой ментальности. Придав некоему содержанию форму интенциональности и выразив нечто в виде пропозиции (пропозиционального содержания), мы устанавливаем границы ситуации. Ситуация становится ситуацией только благодаря приобщению ко второму миру. Но, устанавливая границу ситуации, мы создаем мысленную конструкцию. Она уже не есть нечто просто данное, но нечто сконструированное.

Более того, с учетом всего сказанного получается, что всякая ситуация — обшая. Любая пропозиция носит обший характер. Это ясно, например, из того, что всякое описание может уточняться. Если, допустим, я говорю, что идет дождь, то я всегда могу уточнить свое описание применительно к происходящему, сказав, что идет сильный дождь, идет моросящий дождь, который едва ли скоро закончится и т.д. Получается поэтому, что первоначальная пропозиция — «идет дождь» — применима многократно. Она составляет шаблон или форму, в которую могут быть вставлены другие ситуации, подходящим образом уточненные. Но и эти ситуации суть такой же шаблон, в который может быть вставлено еще что-либо. Не имеет, следовательно, смысла выражение «единичная ситуация». Ситуации могут быть лишь более общими или более частными.

Не получается ли тогда, что первого мира не существует вовсе? Любая реальность, с которой мы имеем дело, принадлежит третьему миру и актуализируется во втором. Такое утверждение является, на мой взгляд, неоправданно жестким. Следовало бы сказать, что не существует номиналистического первого мира, мира единичных объектов и ситуаций. Дело лишь в том, что, различая первый и третий миры, не следует выбирать в качестве критерия различения отношение к мыслительной деятельности. Наверное, следует признать, что какие-то мыслительные конструкции существуют кик в третьем, так и в первом мире. Допуская это, мы делаем шаг в сторону платонизма, соглашаясь на актуальное и независимое существование умопостигаемых сущностей.

Конечно, возникает вопрос, насколько далеко следует идти в этом направлении, какие сущности можно признавать акгуаль-

453

ными независимо от второго мира, а какие — нет. Ответ на этот вопрос зависит от онтологических допущений. Очерчивая границу первого мира, мы должны принять некоторые предварительные условия, позволяющие судить об онтологическом статусе того или иного объекта. При этом вовсе не обязательно соглашаться с Куайном и считать эти условия результатом конвенции, выработанной определенным сообществом для удобства практической деятельности. Я не намерен выяснять в этой работе ни то, какие это могут быть условия, ни даже то, какую природу они имеют. Сейчас нам нужно вернуться к вопросу об опыте и выяснить, какую роль играют упомянутые допущения в его формировании.

Опыт и отчуждение пропозициональных содержаний

Прежде всего вспомним, что опыт есть некий обмен между тремя мирами. Выше мы исследовали, как ситуации третьего мира попадают во второй, обращаясь в пропозициональные содержания интенциональных состояний. Но опыт не ограничивается только этим. Он направлен также и от второго мира к первому и третьему и включает *объективацию,* отчуждение пропозициональных содержаний. Последние рассматриваются как объективные, когда установлено, что они суть не просто составляющие интенциональных состояний, но также и реальные ситуации, независимые от носителя этих состояний.

Следует заметить, что возникновение интенционалыюго состояния может быть психологически неотличимо от объективации его пропозиционального содержания. Я знаю, что идет дождь, и рассматриваю эту ситуацию как отчужденную от меня и существующую в первом, мире. Точно так же я рассматриваю содержание литературного произведения или философской концепции поняв их, я рассматриваю их отчужденными от меня и существующими в третьем мире независимо от моего понимания. Но психологическая неотличимость не означает тождества. В этом убеждает, в частности, нещадно эксплуатируемый со времен Декарги пример со сновидениями и галлюцинациями. Он показывает, чш далеко не всякое пропозициональное содержание выступает для нас как реальность. Должна существовать какая-то процедура объективации, убеждающая нас в том, что то или иное пропозициональное содержание принадлежит не только нашей субъективности, т.е. не только второму миру.

Интересно то, что эта процедура нами уже рассмотрена. Чтобы понять это, вспомним, что всякое пропозициональное содержание, будучи общим и формой, является также и гипотезой. Но гипотеза, как мы выяснили в первой части работы, входит в состав конструкции, имеющей форму герменевтического круга. Существование гипотезы предполагает прежде всего наличие ряда иных пропозициональных содержаний, порождающих эту гипотезу в качестве индуктивной догадки. Кроме того, всякая гипотеза подразумевает процедуру проверки. Последнее означает наличие еще одного ряда содержаний, которые могут эту гипотезу подтвердить или опровергнуть. Но этими двумя рядами не исчерпывается комплекс пропозициональных содержаний, актуализируемых при выдвижении и проверке гипотезы. Мы видели, что здесь участвует целый ряд допущений разной степени общности, обеспечивающих связь гипотезы с содержаниями «низшего уровня». Вся эта система взаимосвязанных содержаний актуализируется в рамках соответствующей системы интенциональных состояний[8]. Именно существование такой, особым образом организованной системы позволяет говорить о том, что гипотетическая пропозиция выражает реальную ситуацию. Но вывод о реальности и означает объективацию. Он является условием отчуждения ситуации от ментальности и позволяет утверждать, что она лишь отражена во втором мире, но существует в первом или в третьем.

Опыт и онтологические допущения

В данном случае, несомненно, важен вопрос, в каком именно из двух указанных миров должна быть размещена ситуация? Решение такого рода обусловлено онтологическими допущениями, о которых мы уже говорили. Именно они определяют направление объективации. Мы видели, что эти допущения создают границу между первым и третьим мирами. Однако сейчас мы можем также указать их место в опыте. Они вступают в игру тогда, когда происходит отчуждение очередной гипотезы. Но отчуждение есть результат процесса, совершаемого в герменевтическом круге. В этом же круге должно быть место и для онтологических допущений. Они должны явно или неявно фигурировать среди тех пропозициональных содержаний, которые оказываются задействованы при порождении и проверке гипотезы. Обращаясь к ним при принятии гипотезы, я должен решить, каков онтологический статус описанной в ней ситуации. Является ли она реальностью третьего мира, существующей лишь в возможности и актуализируемой в данный момент в моем сознании, или она принадлежит к первому миру и существует актуально независимо от чьего-либо сознания?

Рассуждая таким образом, мы подходим к чрезвычайно сложней проблеме об онтологическом статусе самих онтологических

455

допущений. Какому миру принадлежат они? И принадлежат ли вообще какому-либо миру? В принципе, допустимы следующие три варианта.

1. Онтологические допущения принадлежат третьему миру, т.е. являются эмпирическими гипотезами, согласующимися с наличным знанием. Такое утверждение, видимо, легко согласуется с онтологическим релятивизмом Куайна.
2. Онтологические допущения принадлежат первому миру. Такой подход уместно назвать платонизмом или реализмом. Из известных истории философских концепций актуальное и независимое от человеческого сознания существование фундаментальных онтологических принципов утверждается, по-видимому, средневековым реализмом, который рассматривает такие принципы, как идеи, вечно присутствующие в уме Бога.
3. Онтологические допущения принадлежат второму миру. Такая возможность требует особых оговорок, поскольку не виол не согласуется с тем местом онтологических допущений, о котором мы писали выше. Принадлежать второму миру (и только ему) они могут не в качестве особых пропозициональных содержаний. В таком случае они были бы сродни сновидениям или галлюцинациям. Принадлежать второму миру они могут лишь в качестве форм, в рамках которых воспринимаются и мыслятся ситуации первого и третьего миров. Примером таких допущений служит кантовская категория субстанции. Субстанциальная онтология обусловлена тем, что любое качество, явление или действие необходимо мыслится как принадлежащее чему-то или произведенной кем-то. Так что третий вариант релевантен априоризму.

Рамки настоящей работы не позволяют обсудить важный вопрос: как сделать выбор между этими тремя возможностями? Критерий этого выбора довольно трудно выработать, поскольку он должен скорее всего уже включать в себя некие онтологически допущения. Тем не менее нет никаких веских оснований, заставляющих безоговорочно отвергнуть какой-либо из трех вариантов. В частности, у меня нет серьезных возражений по поводу первого, согласно которому онтологические допущения есть, по сути, эмпирические гипотезы. Но если последнее верно, то в нашем знании не остается, как будто бы ничего, что не возникало бы и результате опыта.

Границы опыта

Предположение, которым мы завершили предыдущий раздел, означает, что опыт не имеет границ. Однако наше описание опыта как происходящего в рамках круговой схемы взаимообмена

456

между тремя мирами все же достаточно определенно, чтобы не иметь вовсе никаких границ. Поэтому, даже включив в состав эмпирического знания базовые онтологические допущения, мы должны найти в предложенном описании нечто, не порождаемое в процессе упомянутого взаимообмена.

Поиск этот теперь не столь уж труден. Выяснив, *как* осуществляется опыт и *как* возникают опытные знания, мы лишь должны обратить внимание на это «как». Но именно этим мы, собственно, и занимались. Мы установили, что опыт осуществляется и форме круга и опытные знания возникают и существуют в виде пропозициональных содержаний интенциональных состояний. Поэтому круг и интенциональность уже не есть опыт, но рамки формы опыта. Вне этих форм опыт невозможен по той причине, что они составляют его определение. Мы можем говорить о разных формах, которые порождаются опытом и сами существуют в виде пропозициональных содержаний (или системы пропозициональных содержаний). Но эти две формы опытом не порождаются. По крайней мере эти две.

Последнее замечание связано прежде всего с тем, что исследование названных форм, предпринятое в данной работе, было недостаточно подробным. Даже на первый взгляд видно, что форма круга предполагает ряд последовательных действий, обладающих собственными схемами. Эти схемы также должны стать независимыми от опыта, поскольку составляют ту рамку, в которой опыт осуществляется. Среди схем, входящих в состав круга, следует, по-видимому, назвать различие и тождество, так как одним из основных действий оказывается сопоставление различных пропозициональных содержаний. Важной характеристикой всех указанных форм является то, что, будучи независимы от опыта, они, однако, никак не проявляют себя вне опыта. Бессмысленно искать их существующими где-то самими по себе. Их обнаружение требует определенного содержания.

Заключение

Я не предложу никаких решений, поскольку целью проведенного исследования был поиск общих определений опыта, однако есть надежда, что сама постановка вопроса о значении опыта для математики может стать также более определенной, если обратиться к терминам, разработанным нами сейчас. Поступив так, мы можем указать на следующие возможности.

Во-первых, математические знания могут целиком принадлежать к третьему миру и представлять собой систему эмпиричес-

ких гипотез[9]. Во-вторых, они могут принадлежать первому миру, понимаемому в рамках платонических (или реалистических) онтологических допущений. В-третьих, они могут быть вообще не знаниями, а формами, существующими независимо от опыта и его определяющими.

Мне представляется, что ни один из названных взглядов не может быть принят полностью. По-видимому, следует признать, что значительная часть математики обязана своим происхождением опыту. Однако сам факт, что даже самые близкие к эмпирии области математики все же институализированы в качестве математических дисциплин, а не числятся разделами каких-либо естественных наук, заставляет усомниться в том, что все их пропозиции есть лишь эмпирические гипотезы. Главная сложность последовательного эмпиризма — принципиально иные формы обоснования. Ни одно математическое суждение не будет принято, если и его пользу говорит лишь опыт. Иными словами, та форма существования опыта, которую мы здесь так подробно обсуждали, — герменевтический круг — нерелевантна для математических истин. Тот факт, например, что нормальное распределение так хорошо описывает самые разные наблюдения, еще не доказывает центральную предельную теорему. Равно как и отклонения от нормального закона не служат ее опровержением. Математические истины либо вовсе не являются индуктивными догадками, либо быстро теряют этот статус, превращаясь в доказанные теоремы.

Примечания

[1] Как сказал бы А.В. Родин.

[2] Именно так понимал его Г.В. Лейбниц (см.: *Лейбниц Г.В.* Два отрывка о прин ципе непрерывности // Лейбниц Г.В. Соч.: В 4 т. М., 1982. Т. 1. С. 203— 214

[3] Заесь мы касаемся довольно сложной темы. Утверждение о невозможносш опыта в рамках одного только второго мира входит в явное противоречие (картезианским тезисом об абсолютной достоверности ego cogito. Несомненность тезиса «я существую» обосновывается беспредпосылочным характером интроспекции. Однако для любой интроспекции необходим по крайней мере язык, который принадлежит третьему миру.

[4] *Сёрль Дж.* Природа интенциональных состояний // Философия, логика, язык. М., 1987. С. 96-126.

[5] Там же. С. 96.

[6] В том числе и в платоническом первом мире. Обитающие там умопостигаемые сущности — отнюдь не гипотезы.

[7] *Рассел Б.* Человеческое познание. Киев, 1997. С. 72—74.

[я] Здесь уместно вспомнить термин Сёрля «сеть интенциональных состояний» *(Сёрль Дж.* Указ. соч. С. 116).

[9] Именно этот взгляд отстаивает, насколько я понимаю. А.В. Родин в работе, публикуемой в настоящем сборнике.

КОММЕНТАРИИ

А.Н. Кричевец

Взяв за основу своих рассуждений попперовскую концепцию трех миров, Г.Б. Гутнер поставил себя в трудное положение. К. Поппер никогда не сомневался, что отнести к первому, а что к третьему миру. Анализ Г.Б. Гутнера гораздо тоньше. Он совершенно справедливо отмечает, что первый мир не дается нам иначе, как в виде содержания наших о нем представлений. Представления интенциональны, т.е. полагают некое содержание вне себя (понятие интенциональности, вероятно, старше Сёрля), а первый мир *дан* нам как такое содержание, и никак иначе. В таком случае, если мы представляем идеальную окружность, то не видно четких оснований, как интенциональность мышления окружности отличить от интенциональности восприятия стула.

Фиксируя эту проблему, автор затем переводит вопрос о различении первого и третьего миров в иную плоскость. Он указывает, что в движении мысли (по герменевтическому кругу «гипотеза — сопоставление с "фактами" — новая гипотеза») важную роль играют онтологические допущения. Именно они диктуют решение, что отнести к первому, а что к третьему миру. Здесь необходимо кое-что уточнить.

Не выдвигая собственных онтологических допущений, мы можем считать, что описание Г.Б. Гутнера касается физиков классической эпохи и, может быть, еще кого-то, кто не выходит за рамки естественной установки (по Гуссерлю), когда интенциональное содержание мысли принимается мыслителем в качестве существующего объективно. Мы же, конечно, понимаем дело лучше, чем физик, поэтому данная модель не описывает нас самих и еще кое-кого, кто пребывает в установках, отличных от естественной (например, феноменологов). Можно описать развитие классической научной установки, в которой интенциональное содержание гипотезы устанавливается в ином модусе, а именно в модусе, точное определение которого таково (sic): интенциональное содержание гипотезы, находящейся к миру в отношении научной гипотезы, т.е. подлежащей уточнению, а возможно, и опровержению и рамках научных процедур. Вполне возможно, что онтологические допущения этой установки вообще содержат внутреннее противоречие, поскольку быть интенциональным содержанием гипотезы не значит существовать, а иного существования установкой не предусмотрено. Я полагаю также, что если Г.Б. Гутнер рискнет сформулировать свои собственные онтологические допущения, то скорее всего из его формулировки можно будет вывести парадокс, связанный с аутореференцией, следовательно, ему лучше обойтись вообще без онтологических допущений.

Именно на возможность «невозможных» онтологических допущений, а также и их отсутствия я и хотел указать. Если признать такую возможность, то, как мне кажется, концепция трех миров будет скорее сковывать дальнейшее движение, чем помогать ему.

В.Я. Перминов

Попытка прояснить понятие опыта в попперовском разделении трех миров и в понятии герменевтического круга Гадамера сама по себе заслуживает внимания, однако, поскольку обе эти концепции имеют сугубо релятивистский характер, представляется сомнительной их значимость для раскрытия места опыта в математике, В рамках этих концепций автор приходит к выводу, что при некотором более широком понимании опыта все элементы научного знания, включая принципы логики, математики и онтологии, можно понять как возникшие на основе опыта. Априорными в этом случае остаются только самые фундаментальные схемы опыта, а именно, схема герменевитического круга и схема интенциональности как некоторые представления, входящие и определение опыта. Насколько можно понять, автор выдвигаем идею некоторого минимального психологического априоризма, которая в своих методологических следствиях ничем не отличается от фундаментального эмпиризма Локка и Милля.

Эмпирическая теория познания абсолютизирует опытное основание знания, пытаясь для всех типов утверждений обнаружить соответствующий им вид опыта. Ошибочность этой стратегии очевидна. Нет никакого сомнения втом, что утверждения типа 2 + 2 = 4 не меняются в слоем смысле или в истинности на основе какого-либо опыта. То же самое относится к принципам логики и онтологии. Дело в том, что эти принципы отражают не подразделения опыта, а универсальные установки сознания, проистекающие из его ориентации на деятельность. Мы должны понять, что первичным свойством опыта является его включенность в деятельность. а следовательно, и его подчиненность принципам, имеющим телеологическую (праксеологическую) природу, Априорное знание в действительности существует в явно выраженных принципах, строго отделено от собственно эмпирического знания и должно рассматриваться как принадлежащее одновременно как к третьему, так и к первому миру.

Автор признает, что герменевтическое понимание опыта не является достаточным для понимания статуса математических утверждений. Не ясно в таком случае, почему именно эта, явно

460

непригодная для понимания математического мышления концепция опыта стала основным предметом его исследования. Мы ведь не находимся здесь на нулевом уровне: соображения о месте опыта в математике, которые содержатся в работах Фреге, Пуанкаре, Гуссерля и Кассирера, с самого начала исходят из специфики математического мышления и являются, несомненно, более адекватной основой для современного обсуждения этого вопроса.

А.В. Родин

Я хочу прокомментировать последнее замечание Г. Б. Гутнера, в котором он говорит о статусе математического знания. Применяя трехмировую модель Поппера, автор предлагает три варианта, ни один из которых он не находит вполне удовлетворительным: «Во-первых, математические знания могут целиком принадлежать к третьему миру и представлять собой систему эмпирических гипотез. Во-вторых, они могут принадлежать первому миру, понимаемому к рамках платонических (или реалистических) онтологических допущении. В-третьих, они могут быть вообще не знаниями, а формами, существующими независимо от опыта и его определяющими».

Первый мир Поппера — это мир физических объектов. Можно допустить, что этому миру в каком-то смысле принадлежат и математические объекты, например числа, но непонятно, как к лому миру могут принадлежать *знания,* в том числе и математические. Для знаний у Поппера предусмотрено совершенно определенное место, которое он называет третьим миром. Так что второй иприант, который предлагает Г.Б. Гутнер. так же, как и третий, предполагает, что математика это не область знания, а что-то другое — физический объект или форма. Я не понимаю, что здесь имеется в виду. Как и любая другая дисциплина, математика — это социальный феномен: математикой можно заниматься, можно сдать экзамен по математике, послушать или прочитать лекцию но математике, написать или прочитать математичекую книгу. Но: математику нельзя положить в карман, как камень, а камень не может быть, в свою очередь, «математическим», хотя может быть круглым или плоским.

Поэтому из трех вариантов, рассматриваемых Г.Б. Гутнером, остается только первый. Что действительно является проблемой, так это вопрос о том, можно ли считать математические знания *эмпирическими* наряду с физическими и биологическими. Если нет, то это значит, что попперовская трехмировая модель просто неприменима к математике и что если эта модель претендует на универсальность, ее надо каким-то образом скорректировать.

461

Я все же попытаюсь защитить в предложенных автором терминах тот взгляд, что математику можно в определенном смысле считать эмпирической наукой. Прежде всего я хочу заметить, что что-то очень похожее на верификацию и фальсификацию индуктивных эмпирических гипотез происходит и в математике. Рассмотрим известную проблему — есть ли среди простых чисел наибольшее. Перебирая натуральные числа одно за другим и выбирая среди них простые (посредством простой проверки), мы будем находить все большие простые числа. Можно выдвинуть индуктивную гипотезу о том, что так будет происходить всегда, что наибольшего простого числа не существует. Заметим, что ни это утверждение, ни его отрицание нельзя фальсифицировать указанием на какое-то конкретное число: предъявив число, можно сказать, простое оно или нет, но если оно простое, нельзя сказать, является ли оно *наибольшим* простым, поскольку для этого нужно было бы просмотреть весь остаток натурального ряда, что нсвозможно, поскольку этот ряд бесконечен. Тем не менее утверждение о существовании наибольшего простого числа (т.е. отрицание нашей индуктивной гипотезы) можно фальсифицировать с помощью известного рассуждения: предположив, что существует самое большое простое число P, можно построить другое простое число, большее P (перемножив все простые числа от 2 до P включительно и прибавив к этому произведению 1), что абсурдно. В случае этой теоремы опыт вполне соответствует теории, поскольку от противного мы доказали именно нашу первоначальную индуктивную гипотезу. Если бы нам не были известны большие простые числа, то это дало бы повод сомневаться в доказательстве и пытаться найти в нем ошибку. Другая распространенная в математике ситуация — опровержение утверждения с помощью контр-примера. Это буквально то, что Поппер называет фальсификацией общей гипотезы с помощью указания на единичный случай (на наш взгляд, Поппер, хотя и говорил об естественных науках, имел в виду, скорее, методы математики, пытаясь перенести их на естествознание). Я думаю, что, рассмотрев более сложные стуации, мы могли бы обнаружить и «круги опыта», о которых говорит Г.Б. Гутнер. (Пример такого круга дает *история* любого математического понятия, например понятия функции.) Однако сложность состоит в том, что к математике кажется неприменимым обычное понятие опыта. Чтобы подтвердить или опровергнуть свою теорию, естествоиспытатель прибегает к наблюдению или эксперименту, смотрит на небо или строит экспериментальную установку. А что делает математик? Обращается ли к к опыту математик, чтобы подтвердить или опровергнуть свои гипотезы?

462

Математик производит мысленный эксперимент. Как и в физическом эксперименте, в мысленном математическом эксперименте деятельность воображения и рассудка сочетаются с манипуляцией инешними предметами, однако в случае математического эксперимента это обычно только средства письма и рисования. Я постараюсь показать, что между физическим и математическим экспериментом все же нет принципиальной разницы.

Последний абзац приведенной выше цитаты из статьи Г.Б. Гутнера я могу понять в том смысле, что *предметом* математики являются «формы, существующие независимо от опыта и его определяющие». Ранее в своей работе автор говорит: «Тот факт, что некоторая форма выступает в качестве условия опыта, вовсе не является свидетельством ее априорности. Всегда можно сказатъ, что существует иной, более широкий опыт». Я бы хотел уточнить, что этот более широкий опыт не является совершенно «иным» по отношению к тому частному опыту, условием которого выступает данная форма. Этот более широкий опыт представляет собой не что иное, как совокупность частных опытов, имеющих указанное отношение к данной форме. Приведем такую аналогию. Поколение людей в правовом сообществе регламентируется (и в этом смысле «определяется») законом и квалифицируется в принятых правовых терминах. Однако конкретная правовая система способна эффективно действовать (т.е. существовать продолжительное время) только в том случае, если большинство граждан выполняют законы. Если число нарушителей закона превышает некоторый критический порог, то правовая система рушится и сменяется хаосом, который потом может уступить место другой правовой системе. В этом смысле правовая система, т.е. форма нормативного социального поведения, зависит от совокупного поведения граждан. Хотя поведение отдельного человека, за редкими исключениями, не способно повлиять на правовую систему, когерентное поведение групп или всего сообщества оказывает на правовую систему непосредственное влияние. В конце концов сама правовая система представляет собой именно нормативную форму жизни сообщества. Заметим еше, что, помимо поддержания правовой системы в неизменном состоянии и ее разрушения, существует также возможность *реформы* правовой системы под действием изменений в поведении людей.

Я думаю, что с формами, которые являются условиями естественно-научного опыта, дело обстоит подобным образом. Например, *числа* являются весьма общими формами естественного человеческого опыта: три человека, три камня и т.д. имеют одну и ту же форму «три», когда мы их пересчитываем. Отталкиваясь от такого рода естественных форм, люди сами придают вещам формы

463

чисел (или создают веши такой формы) — вводят единицы измерения, создают алфавиты. С появлением компьютеров масштабы такой «оцифровки» действительности многократно возросли. Однако пифагорейцам не обязательно было доказывать существование несоизмеримых величин, чтобы понять, что пересчет не всегда возможен: невозможно пересчитать, например, волны на море - по той простой причине, что непонятно, где и когда кончается одна волна и начинается другая. Поскольку у нас есть опыт наблюдения тел и манипуляции с телами, мы можем всегда пытаться перенести формы такого опыта, а именно числа, в новую ситуацию, т.е. подчинить новый опыт старому условию, но такая попытка может оказаться только частично успешной или вовсе неуспешной, как в приведенном выше примере. Представим себе теперь мир, в котором вообще нет тел и в котором ничего нельзя пересчитать (в том числе и себе подобных): идея числа не имела бы в таком мире никакого применения и вряд ли могла возникнуть. Впрочем, вероятно, что знания и сознания тоже не могли бы существовать в таком мире. И тем не менее представить непересчитываемый мир мы вполне в состоянии, так же как и наблюдать непересчитываемые фрагменты нашего собственного мира и манипулировать с такими фрагментами.

Поскольку опыт манипуляции с телами является повсеместным, не обязательно прибегать к нему всякий раз для того, чтобы говорить о числах. Натуральный ряд — это пример того, как простая базовая структура может порождать очень сложные структуры высших порядков. Эти сложные структуры и изучает соответствующий раздел математики. Можно ли сказать, что это делается на основе опыта? Я думаю, что да. Как и физический зксперимент, математическое рассуждение (построение, эксперимент) должно быть воспроизводимо при разных условиях разными людьми. Как физические, так и математические эксперименты — это искусственные события, однако эти искусственные события позволяют многое узнать о событиях, происходящих без участия человека («узнать» означает как раз включить эти последние события в круг возможного человеческого опыта).

Если речь идет о рутинных экспериментах — в естествознании или математике, — то внешние формы опыта могут считаться фиксированными: физик может пользоваться готовой математикой для построения моделей, а математик — готовой логикой для доказательств. Однако история показывает, что новые физические теории часто требуют новой математики, а новая математики, в свою очередь, требует новой логики. Более того, я думаю, что кантианское различение формы и содержания опыта, которого придерживается Г.Б. Гутнер, слишком упрощает ситуацию в математике и естествознании, несмотря на предлагаемую автором модернизацию, связанную с идеей иерархии форм и опытов. Представляется, что в математике и естествознании иерархия форм представляет собой, скорее, непрерывный континуум, в котором одни формы устойчивее, чем другие, однако никакая форма не является строго фиксированной (это касается как структуры теорий, так и структуры предметных областей теорий).

Интересно, что при этом формы нижнего уровня могут быть устойчивей форм высшего уровня: мы можем не только описывать одними и теми же математическими средствами разные вещи, но и можем описывать одни и те же вещи разными математическими средствами (при этом под *вещами* нужно понимать *факты,* зафиксированные на некотором языке наблюдения низкого уровня). Можно не только смотреть на разные ситуации одними и теми же глазами, но и смотреть разными глазами на одну и ту же ситуацию. Это имеет аналогию как в природе, так и в человеческом обществе: формы социального устройства могут сохраняться на протяжении многих поколений, однако индивид способен пережить смену формы социального устройства; форма биологического вида устойчивее, чем форма (т.е. жизнь) отдельной особи, однако химические атомы, из которых состоят особи, устойчивее, чем ли особи (хотя особи устойчивей органических молекул). Поэтому, кстати, старый онтологический спор о том, что «первичнее» — форма или содержание, кажется, не может быть решен определенным образом: это бывает по-разному в различных случаях.

Что касается формы *круга,* которую автор выдвигает в качестве фундаментальной формы опыта, независмой от содержания какого бы то ни было опыта, то мне кажется, что здесь тоже возможны альтернативные стратегии с более сложной топологией. Можно, например, выдвинуть сразу несколько начальных независимых гипотез для понимания одной и той же ситуации, так что каждой из этих гипотез будет соответствовать свой круг, причем ни круги будут склеены в точке, соответствующей разбираемой ситуации. Другая вариация на тему круга получится, если каждую промежуточную гипотезу подвергать дополнительному истолкованию: тогда мы получим произведение двух кругов, т.е. тор (таким же образом можно получить тор любой размерности). Если выставить в качестве методологического требования необходимость на каком-то этапе предъявить окончательный результат (это может быть связано, например, с тем, что допустимое время исследования ситуации ограничено временем существования этой ситуации), то мы получим некоторое многообразие с краем, которое уже ни в каком смысле невозможно свести к комбинации кругов. (Кстати, фундаментальная топологическая теорема о том, что край

любого многообразия — это многообразие без края, можно истолковать в том смысле, что окончательный результат исследования будет устойчивым вне зависимости от топологической сложности исследовательской стратегии.) При этом очевидно, что выбор той или иной стратегии зависит именно от содержания: дополнительный круг истолкования может быть необходим в одних случаях и ненужным в других, некоторые вопросы можно дискутировать бесконечно долго, другие требуют быстрого принятия решения и т.д.

ОТВЕТ АВТОРА

В комментарии А.В. Родина содержится очень точное наблюдение о месте гипотезы в математике. Однако логическая структура фальсификации и верификации тех гипотез, о которых идеч речь в статье, существенно иная, чем математических гипотез. В первом случае гипотеза отвергается или *не отвергается* после сопоставления прогноза с наблюдением, а во втором — она *принимается* или отвергается после доказательства. Ставшая теоремой (т.е. доказанная) математическая гипотеза должна быть с необходимостью принята в рамках тех условий (аксиоматики и правю вывода), при которых она доказана. Эмпирическая же гипотеза никогда не может быть принята с необходимостью *в рамках тех условий,* при которых она верифицируется. С необходимостью она может быть лишь опровергнута. Так что математические теоремы и эмпирические гипотезы имеют заведомо различный логический статус.

По поводу аргументов, приводимых А.В. Родиным в пользу эмпирического происхождения арифметики, могу сказать лишь, что меня смущает их безоговорочный реализм. Рассуждение строится так, будто мы знаем, каков на самом деле мир, и наша задача состоит лишь в объяснении того, как в таком мире возникают представления о числах. Дело, однако, осложняется тем, что числа составляют ту рамку, в пределах которой строится наше знание о мире. Мы едва ли в состоянии представить себе мир, в котором ничего не исчисляется. Пример текучей среды, в которой отсутствуют твердые предметы, по-моему, малоубедителен. Такую сре- ду можно делить на куски, измерять и взвешивать. Более того, у нас, по-видимому, нет иного способа строить рассуждение.

В ответ на замечание В.Я. Перминова о том, что исследованные в работе формы мышления нерелевантны математике, хочу лишь обратить внимание на основную задачу своего исследоин ния. Она состояла в определении понятия опыта и уточнении формулировки проблемы о соотношении математики и опыта. Рассмотрение фигуры круга служило именно для такого определения.

Последующей (нерешенной в рамках данной работы) задачей может стать выяснение того, подходит ли математическое знание под разработанное понятие опыта, а если да, то в какой мере. Следует, однако, заметить, что сама форма герменевтического круга все же весьма значима для математики и должна быть, на мой взгляд, более активно использована в философии математики. Объясняется это тем, что значимой частью математического мышления является интерпретация одним математиком результатов, полученных другими. Гуссерль в «Началах геометрии» назвал эту деятельность «реактивацией смысла».

В ответ на комментарий А.Н. Кричевца замечу, что я не рискну формулировать собственные онтологические допущения, поскольку философское исследование должно быть лишь рефлексией по их поводу. Не исключено, что, рассуждая в таком ключе, придется отказаться от всякой онтологии. В таком случае, конечно, концепция трех миров — в ее попперовском варианте — оказывается просто неприемлемой. Тем не менее выделение трех взаимосвязанных сфер, отчасти напоминающих упомянутые три мира, может оказаться полезным именно при исследовании (различных, возможных) онтологических допущений. С другой стороны, я вполне отдаю себе отчет в опасности, скрывающейся за демонстративным отказом от онтологических допущений. Они могут возникнуть в рассуждении как его предпосылки, оставшись совершенно незамеченными автором.

А. И. Белоусов

ГЕГЕЛЕВСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ ПРОТИВОРЕЧИЯ В КОНТЕКСТЕ ПРОБЛЕМЫ «МАТЕМАТИКА И ОПЫТ»

> У нас с вами есть над чем задуматься
> и голову поломать. Всякое незначительное
> слово имеет, так сказать, свое таинственное... ээ... недоумение!..
> Тонкость, что твоя математика!
> ***А. П. Чехов.*** *Свадьба*

Постановка задачи

В этой статье речь пойдет об интерпретации гегелевской конструкции **противоречия**[1] в «Науке логики» в связи с проблемой «Математика и опыт».
467

Надо признать, что Гегель не в фаворе у математиков: представляется, что строгость и ясность математических построении диаметрально противоположны запуганным («темным») диалектическим выводам Гегеля, которые до сих пор на некоторых критически настроенных мыслителей производят впечатление софистических вывертов[2].

Если говорить о гегелевской философии математики в узком смысле слова, т.е. об его диалектическом анализе математических понятий, то скорее всего этот предмет представляет только исторический интерес — уж очень сильно со времен Гегеля изменилась математика. Но *современный* математик может найти интересное для себя не в собственно математических экскурсах Гегеля, а в его диалектических конструкциях. Многие из этих конструкций могут быть осмыслены только средствами современной математики. Так, открывается связь «Учения о сущности» с теорией моделей, «Учения о понятии» — с теорией категорий. Чрезвычайно интересной была бы математическая рефлексия над гегелевской кои цепцией **случайного**.

В этой работе предпринята попытка обоснования следующего тезиса: *математика и опыт связаны друг с другом через противоречие — опыт «врывается» в математику через противоречие, и обратно, осознать свои противоречия математика может только через опыт.*

Мы настаиваем на неакадемическом термине *«врывается»*. В мир кристальных математических построений, казалось бы, незыблемых, *врывается* (а не мягко *входит)* меональная стихия опыта:

...воды вдруг
Втекли в подземные подвалы.
К решеткам хлынули каналы,
И всплыл Петрополь как тритон
По пояс в воду погружен

Весьма близким сформулированному выше тезису является следующая мысль Лосева касательно аристотелевской «Топики»: «Аристотель — ...гораздо глубже и шире, чем Платон, — пользуется принципом текучей и непостоянной материи, заставляющим его, кроме абсолютно аподиктических умозаключений, вводим, еще и такие, которые он называет по преимуществу диалектическими, основанными на привлечении посторонних для силлогизма и бесконечно разнообразных по своему качеству предметов или инстанций, именуемых у него "топосами". Такие топосы, ***врываясь** в аподиктический силлогизм, разрушают его формально не опровержимую истинность* и превращают его в материальную и чист жизненную вероятность или в правдоподобие, в то,что Аристотель называет энтимемой» (выделено мной. — *А.Б.*) [3].

468

Помимо сформулированного выше основного вывода мы вы-миннем в ходе анализа гегелевской конструкции один феномен сознания, который называем условно *теоретико-групповым мышлением.* Этот стиль мышления, как мы увидим, проявляет себя отнюдь не только в понятийной форме, хотя именно в его рамках возникает *рассудочное мышление* как противовес мышлению *дианетическому.* Теоретико-групповой стиль имеет и весьма близкое касательство к *феноменологии* если ,под последней понимать анализ некоего *чистого смысла, зафиксированной идеальной предметности..*

Достаточно сложной в рамках предпринимаемого исследования оказывается сама трактовка термина «опыт». Однако соответстиующие разъяснения целесообразно отложить до того момента, когда будет дан подробный анализ самой диалектической конструкции противоречия в «Науке логики». Тогда термин «опыт» естествененно встраивается в эту конструкцию и освещается ею. Пока ограничимся некритическим, интуитивным пониманием этого имена.

Рассуждая о противоречии в рамках гегелевской системы, нужно разграничить два аспекта: 1) противоречие как главный конструктивный принцип диалектики Гегеля в целом; 2) противоречие как одна из категорий, которая в ряду прочих выводится (диалектически конструируется) в «Учении о сущности».

Здсеь нас будет интересовать главным образом второй аспект, хотя его нельзя полностью отделить от первого и по ходу рассуждений нам придется касаться и его. В то же время мы хотели бы
воздержаться от сколько-нибудь развернутого комментария по поводу общей проблемы противоречия в диалектике вообще и гегелевской, в частности, а также соотношения диалектики и формальной **ЛОГИКИ** [4].

«Опыт бытия» и «опыт действительности»

Категория противоречия возникает в «Учении о сущности» в разделе, посвященном так называемым **рефлективным определениям**. Эта категория есть узловой пункт в процессе самопознания и саморазвёртывания Идеи на ее пути от бытия к действительности.

Тот путь, который Идея проходит «один раз», вне времени и Пространства, «до сотворения природы и какого бы то ни было конечного духа»[5], мы, простые смертные, повторяем многократно, дробя, рассеивая, затемняя и искажая Божественный первообраз. Более того, оставаясь вне спекулятивного мышления[6], доже *не понимаем* структуры Божественного Логоса[7]. Но тем не менее спонтанно действуем так, словно *подражаем* ему. Тогда *профанную* проекцию упомянутого выше *священного* пути Идеи[8]

469

мы могли бы назвать путем человеческого познания от «опыта бытия» к «опыту действительности».

Что же такое «опыт бытия» и «опыт действительности»?

«Опыт бытия» — это путь от «непосредственного» (скорее, кажущегося непосредственным) наблюдения качественного многообразия к числу — к счету и измерению.

«Опыт действительности» — это путь, начинающийся погружением в сущность, осознанием «внутреннего схематизма» бытия, *происхождения бытия,* того, чем было бытие[9], с последующей попыткой *воспроизвести* его в создании **вещей, являя** их, вводя их тем самым в **действительность** как абсолютно прозрачную взаимосвязь явлений. Логика сущности — логика этого опыта, *логика произведения, сотворения,* «техно-логика» (если иметь в виду древнегреческое слово techne). Надо сказать, что эта *эстетическая* сторона «Учения о сущности» часто недооценивается[10]. Между тем анализ ключевой в данном контексте категории **явления** показывает, что явление есть именно творение, оно, так сказать, экспонировано изнутри сущности, выведено из рефлексии вовне. Явление — это *совершенное* **существование** (2, с. 111, 134), энтелехия существования[11]. Это последнее тогда, если угодно, есть *эскиз* явления. Но существование есть первое *восстановление* бытия из сущности[12]; не *тень* бытия в сущности как **видимость**, а нечто *телесное, про-из-веденное* из рефлексии сущности. Конечно, не нужно забывать о том, что в «Логике» мы имеем дело не с вещами эмпирической действительности[13], не с физическим их деланием. а с их самих и их делания *умными* прообразами.

Надо отдавать отчет и в том, что оба указанных выше «опыта» имеют место *до возникновения* **понятия**. Интерпретация бытия в сфере сущности носит технологический характер[14]. Конечно, подражая Абсолютной Идее в нашем профанном человеческом познании, мы никогда не имеем в чистом виде ни «опыта бытия», ни «опыта действительности»: наше бытие есть уже весьма разветвленно истолкованная и вербализованная действительность, тем самым уже выраженная в определенных понятийных системах; но и та действительность, к которой мы приходим в результате технологических актов, никогда не дается нам как полностью прозрачная и осознанная. «Допонятийность» указанных двух опытов можно трактовать, скорее, как отсутствие рефлексии по поводу самой рефлексии, отсутствие «метарефлексии» (или саморефлексии). Вступая в сферу понятия, мы вступаем в сферу мышления о мышлении, в сферу *интеллигенции*[15].

Здесь нужны дополнительные разъяснения. Гегель в «Философии духа» ассоциирует с движением сознания от наблюдении к закону **рассудочное мышление**[16]. Рассудочное понятие есть понятие

«-себе, тогда как спекулятивное понятие есть понятие *для-себя. В* «Малой логике» сказано также: «Сущность есть понятие как *положенное* понятие; в сфере сущности определения суть лишь *относительные,* но еще не рефлектированные в себя самое; поэтому понятие здесь не есть еще *для себя*»[17]. **Положенность** здесь (как и всюду у Гегеля) означает обусловленность чем-то, зависимость от чего-то, отношение к чему-то иному. И далее: «Эта (труднейшая) часть логики [т.е. «Учение о сущности»] содержит преимущественно категории метафизики и наук вообще как порождения рефлектирующего рассудка, который берет различия как *самостоятельные* и вместе с тем также признает их относительность; но, ставя эти мысли рядом или друг за другом, он связывает их лишь посредством слова *также,* не объединяя их в понятии»[18]. Тем самым сущность может быть полнее охарактеризована как *технологически-рассудочная* сфера.

Нелишне добавить также, что мотив *подражания* Абсолюту в человеческом познании (того, что Лейбниц называл imitatio Dei) нуждается в более тщательной проработке, которая выходит за рамки этой статьи. Можно говорить о «подражании» в силу правил «диалектической парадейгматики» (А.Ф. Лосев), согласно которым каждый новый этап диалектического конструирования удерживает в себе, в преобразованном виде, все прежние этапы. Человеческое познание тогда есть трансформированное Божественное самопознание. *В этом смысле* оно и «подражает» (или, скорее, *причащается)*

последнему. Весьма непрост вопрос и об «однократности — многократности». П. Козловски[19] противопоставляет гегелевскую систему мифу именно по этому критерию: миф цикличен, а «философский эпос» Гегеля повествует о гигантском *единожды* развертывающем себя пути. Тем не менее внимательный анализ заключительных страниц «Феноменологии духа» показывает, что (вопреки догматической трактовке Гегеля, даже если это и автотрактовка) Абсолют абсолютен в силу своей абсолютной неабсолютности, т.е. в силу того, что он, как Феникс, *многократно* умирает и возрождается в человеческом познании. К сказанному примыкает и вопрос о естественной, внемифологической, «научно-материалистической» трактовке гегелевской системы. Если уподобить Логику Абсолюта священному *архе* мифа, то в науке архе соответстствует закон[20]. Тогда естественно считать Логику Абсолюта законом человеческого познания, как она и трактовалась, например, в марксизме: «"Бог" Гегеля — что прекрасно понимали уже его современники — есть не что иное, как *обожествленное человеческое мышление,* или, что то же самое, — всеобщая схема развития "самосознания" человеческого ("конечного") *духа* (т.е. развития науки, искусства, правосознания и техники)»[21]. Но тут возникает
471
весьма острая и по сию пору проблема «диалектики природы» (versus «диалектика Идеи»), которая также не является темой данной статьи[22].

Противоречие

1. Wesenheit

Как категория, возникающая во второй главе («Определенные сущности, или рефлективные определения») первого раздела «Учения о сущности» («Сущность как рефлексия в самой себе»), противоречие принадлежит к разряду категорий, который обозначается немецким словом Wesenheit. В комментариях к переводу Б.Г. Столпнера отмечено, что этот немецкий термин трудно переводится на русский язык (2, с. 232). Как известно, суффикс -heit служит для образования слов (существительных женского рода), обозначающих некие качества: frei — свободный, Freiheit — свобода, rein — чистый, Reinheit — чистота и т.п. В то же время прибавление этого суффикса может произвести обозначение не столько качества, сколько некоторого общего понятия, принципа, абстрагированного от его конкретных воплощений: Kind — ребенок, Kindheit — детство. С учетом этого термин Wesenheit можно трактовать как «сущностное качество», а также как некий «принцип сущностности». Подобно тому, как в сфере бытия качество есть принцип бытийной определенности, так Wesenheit есть *принцип сущностной определенности*[23]. Этих принципов, на русском языке обозначаемых терминами «определенная сущность», «рефлективное определение», три: **тождество, различие и противоречие** (точнее, это три главных рефлективных определения, от которых производятся такие категории, как разность, противоположность и некоторые другие). Заметим, что указанные русские переводы термина Wesenheit провоцируют на неверное понимание рефлективного определения как определения в школьном смысле, например через род и видовое отличие. Нет большей ошибки! Рефлективное определение — это принцип, если угодно, даже *акт,* вносящий в первоначально нерасчлененный поток сущности некую структурность, это, что позже мы проанализируем подробнее, — принцип структурной организации (и реорганизации) в сфере сущности.

2. Сущность и видимость

Сущность есть первое отрицание бытия. Все определении бытия подвергаются

снятию, т.е. отрицаются как несущественные и одновременно с этим удерживаются, поднимаются на новый онтологический уровень. Здесь опять дает о себе знать сложность
472
перевода. «Снятие» передает немецкое «Aufhebung», что означает и подъем, и уничтожение, и сохранение. Снять — значит подвергнуть *диалектическому* отрицанию, т.е. перевести в некоторое ино-бытие, отринуть, но удержать в чем-то новом как иное того, что отрицается, но *свое* иное[24]. Бытие тогда удерживается в сущности как **момент** непосредственности в ней, но, будучи лишь моментом, бесконечно подвергается отрицанию, ибо сущность есть принцип отрицания *всякой* непосредственности. Этот момент непосредственности в сущности Гегель называет **видимостью**, тогда как сущность в целом оказывается тождественным единством «абсолютной отрицательности и непосредственности» (2, с. 16). Это значит, что сущность как таковая есть цикл («метаморфоз»):

Сущность →Видимость →Сущность →Видимость →..

Этот *процесс сущности,* ее самодвижение Гегель называет **рефлексией**. Таким образом, сущность есть рефлексия, которая видится (или светится, сияет) в самой себе. Трудно представить более точное и одновременно поэтически образное определение того, что мы «некритически» (нефилософски) называем «проникновением в суть вещей».

Когда Нильса Бора спросили, какую категорию следует считать дополнительной к категории истины, он ответил: «Ясность». Боровская ясность и есть гегелевская видимость. Развитие науки — не что иное, как метаморфоза ясности и истины:

→Истина →Ясность →Истина →...

«Ибо то, что верно, не есть истина. Истина бесконечно далека, и любой разговор бесконечен. Он представляет собой странствие в вечность и без передышки или после короткой передышки и нетерпеливого "правильно, правильно!" отрывается от каждой стадии правды, как отрывается Луна от стадий своего вечного странствия»[25].

В подобного рода циклах, метаморфозах — суть диалектики. Исходный, парадигмальный метаморфоз гегелевской диалектики — взаимопревращение **бытия** и **ничто**.

3. Бытие и ничто

'Эта основополагающая диалектическая конструкция Гегеля вызывает резкое неприятие у позитивистски настроенных критиков гегелевской философии. Задается убийственный вопрос: «Как это может быть, чтобы нечто было и не было одновременно?»

Тот, кто критикует гегелевскую диалектику, впадает в заблуждение, когда пытается интерпретировать построения Гегеля с позиций классической логики предикатов[26]. С точки зрения этой
473
логики, утверждение о совпадении бытия и небытия (ничто) абсурдно, так как предполагается одновременное выполнение двух утверждений: некоторое S есть (существует) и это же самое S не существует. Логика предикатов рассматривает бытие как предикат, приписываемый какому-то субъекту, и совершенно справедливо отрицает возможность приписывания одному и тому же субъекту S двух взаимоисключающих предикатов (в одном и том же отношении). Но бытие у Гегеля не есть предикат! Бытие есть *категория как таковая, имя,* которое не развернуто, чистая потенции некоего смысла, который еще не определен. Будучи категорией как таковой, «без всякого дальнейшего

определения» (1, с. 139), бытие есть то, что может быть названо *категориальным нулем, категориальной точкой,* и точку тогда мы понимаем по-аристотелевски как *лишенность*[27]. И бытие, именно как лишенность, есть ничто. Чтобы обрести смысл, имя Бытия должно *развернуть себя,* из него должна возникнуть некая структурная расчлененность, взаимная соотнесенность неких категорий. И именно в этой соотнесенности, равно как и в самой динамике ее возникновения, будет обретем смысл Бытия.

Таково, согласно Гегелю, начало *науки* логики. Науки как мышления в *понятиях.* Но, несмотря на то что Гегель всячески подчеркивает, что логика — наука, но не миф, не религия, не поэзия, что ее задача состоит в раскрытии *категориальной структуры* мышления, не вызывает сомнений, что за бытием Гегеля скрыт некий *Субъект.*

Чтобы отдать себе в этом отчет, нужно тщательно проследить за ходом рассуждений Гегеля, в которых анализируется исходная установка системы Фихте, начало философии как «Я»[28]. Смысм гегелевской критики состоит в следующем. Несмотря на кажущуюся простоту, *непосредственность,* непосредственную достоверность начала как «Я»", «Я... есть *в то же время* и нечто конкретное или, вернее, "Я "есть самое конкретное — сознание себя как бесконечно многообразного мира» (I, с. 133). Чтобы поставить *«Я»* началом философии, его следует очистить от всего конкретного, *абсолютизировать* (т.е. в буквальном смысле слова изолировать его от собственной конкретности). Начало философии не может быть чем-то конкретным, так как конкретизация предполагает опосрсдствование. Начало есть чистая непосредственность, и *конкретное должно возникнуть в мышлении,* которое исходит из абсолютно непосредственного. Так как «Я» у Фихте не есть ни чистая непосредственность, ни тем более «обыденное «Я» нашего сознания», то требуемая непосредственность начала достигается неким немотивированным, произвольным актом самовозвышения, абсолютизации конкретного «Я». «Этот акт был бы... не чем иным, как возвышением до точки зрения чистого знания, при которой исчезает различие между субъективным и объективным. Но если требовать, чтобы это возвышение было столь *непосредственным,* то такое требование будет субъективным постулатом. Для того чтобы оно оказалось истинным требованием, следовало бы показать и представить движение конкретного "Я" в нем самом, по его собственной необходимости, от непосредственного сознания к чистому знанию. Без этого объективного движения чистое знание, и в том случае, когда его определяют как *интеллектуальное созерцание,* являет себя как произвольная точка зрения, или даже как одно из эмпирических *состояний* сознания, относительно которого важно решить, не обстоит ли дело так, что один человек *находит* или может вызвать его в себе, а другой — нет. Но так как это чистое "Я" должно быть сущностным чистым знанием, чистое же знание непосредственно не имеется в индивидуальном сознании, его лишь полагает в нем абсолютный акт самовозвышения, то теряется как раз то преимущество, которое, как утверждают, возникает из этого начала философии, а именно то, что это начало есть нечто безусловно известное, что каждый непосредственно находит в себе и что он может сделать исходным пунктом дальнейших размышлений; в своей абстрактной сущности указанное чистое "Я" есть, скорее, нечто неизвестное обыденному сознанию, нечто такое, чего оно не находит наличным в себе» (I, с. 133—134). Таким образом, начиная философию с Я, мы вопреки декларированным ясности и чистой непосредственной достоверности рискуем запутать себя в клубке смутных представлений, где смешаны представления об эмпирическом и абсолютном Я. Тем не менее из приведенной выше обширной цитаты можно также сделать вывод о том, что Гегель отнюдь не отрицает, что началом философии должен быть некий субъект, точнее говоря, некая *интеллигенция,* но интеллигенция *в себе,* которой необходимо себя развернуть, стать сущей *для себя.* Несколькими строчками ниже Гегель пишет:

«Следовательно, если в выражении "абсолютное" или "вечное", или "бог" (а самое бесспорное право имел бы бог — начинать именно с него), если в созерцании их или мысли о них *имеется больше содержания,* чем в чистом бытии, то нужно, чтобы то, что *содержится* в них, лишь *проникло* в знание мыслящее, а не представляющее... Итак, что бы ни высказывали о бытии в более богатых формах представления об абсолютном или боге или что бы в них ни содержалось, в начале это лишь пустое слово и только бытие» (1, с. 136).

Резюмируем так: нет сомнения, что начало есть Бог[29] (как абсолютная интеллигенция), но как предмет науки логики Бог не есть начало, ибо не есть *первая категория,* поскольку уже имеет
475
в себе богатое *для представления* содержание, которое *должно быть положено мыслью,* в *движении мысли* должно возникнуть, проникнуть «в знание мыслящее, а не представляющее». Пусть *в себе* абсолютный субъект логики есть нечто *определенное, реальное, сущее[30],* но «для науки главное не то, что существует *в себе* или *внутренне,* а наличное бытие внутреннего *в мышлении* и та *определенность,* которое такое внутреннее имеет в этом наличном бытии» (1, с. 135). Таким образом, науке, которая выражает словесно развертывание имени бытия как интеллигенции, следует снять все представления и мыслить понятиями, признавая тем не менее и рефлексии о собственном начале, что такое чисто понятийное постижение укрывает под собой представление о некоей интеллигенции, которая мыслит себя. Гегель поступает тем самым так, как писал Виктор Гюго: «Гений, углубляющийся в необъятную глубину чистой абстракции и отвлеченных умозрений, *ставит форму,* так сказать, *выше догмата* и приписывает свои мысли Богу. Его молитва походит на вызов к спору. Его поклонение вопрошает»[31].

Пустое имя «бытие» развертывает себя, «из ничто должно возникнуть нечто» (1, с. 131). Постигая логику этого развертывания мы вынуждены покинуть естественную для рассудочного мышлс ния почву, когда мыслимое (объект) жестко отграничено от мыслящего (субъекта), лежит перед ним, противостоит ему. Оснот рассудочного постижения реальности составляет схема, согласии которой мысль, образно говоря, «ввинчивается» в предмет, и экн предмет есть поистине *препятствие* для мысли[32]. У Гегеля совсем другая схема — схема «выдувания»[33] первичной, пустой категории, за которой утаен некий мыслящий субъект, *из-и-внутрь* себя[34]. «Из» — так как рождаются *новые* понятия; «внутрь» — ибо эти новые понятия всей своей взаимосоотнесенностью, всем процессом своего порождения раскрывают смысл именно первой пустой категории[35]. Диалектику можно назвать тогда *логикой развертывающегося имени.* В этой логике *«смысловая горизонталь»* значительно преобладает над *«смысловой вертикалью»:* каждая категория постигается не как некий «концепт», описывающий что-либо или на нечто указывающий, а смысл ее раскрывается именно *в соотнесенности с другими категориями,* в построении *чисто категориальнои,* без опоры на образы и доказательства[36], конструкции. Категория становится *спекулятивно конкретной* в завершенной категориальной сети как ее момент и элемент[37].

При обсуждении диалектики как логики развертывания имени уместно сослаться на лосевскую концепцию *мифа* как «магического развернутого имени личности»[38]. Согласно Лосеву же, миф возникает тогда, когда за категориями диалектики раскрываются некие личности, имена[39].
476

Тогда оказывается, что за гегелевским **становлением** как циклом Бытие → Ничто → Бытие → Ничто → ... кроется совершенно определенная *мифологема.* Именно становление есть борьба двух начал: бытия как начала созидания, бытия как Света, и Ничто как начала разрушения и хаоса, ничто как Тьмы. Бытие — это Демиург в «начале» акта творения, пока лишь чистая возможность того, что будет сотворено. Этому Демиургу противостоит материя (синоним Ничто) как иное самого Демиурга, заключенное в нем самом. Чтобы возникло Нечто, нужно отвоевать его у Ничто, насколько это Ничто позволит[40].

Тем самым логика развертывания имени может быть вполне рационально понята как *логика творческого действия.* Но действительно, в творческом действии, в процессе преобразования «тела природы» человек и развертывает свое имя, утверждает себя «феноменально и энергийно» (А.Ф. Лосев), реализует свою мифологему. Именно это развертывание личности в творческом действии и есть *предметное* содержание того, что выше мы назвали «выдуванием» категорий «из-и-внутрь себя».

В связи со сказанным выше можно заметить также, что возникновение наличного бытия из становления, т.е. переход становления в *ставшее,* Гегель называет «исчезновением исчезновения» (в переводе Б.Г, Столпнера — «исчезание исчезания»): в ставшем исчезает исчезновение бытия в ничто и ничто в бытии, т.е. исчезает становление (1, с. 167). Но термин «исчезновение исчезновения» появляется также в «Феноменологии духа» как характеристика *произведения, созданной вещи*[41]. Таким образом, метаморфоз бытия и ничто или, полнее, вся диалектическая конструкция «бытие — ничто — становление — наличное бытие» есть *самый абстрактный* категориальный скелет различных, происходящих в разных онтологических планах *процессов оформления материи,* хотя сами категории **материи** и **формы** появятся в «Науке логики» значительно позже.

Становление имеет своим результатом *ставшее,* определенное бытие. Тем самым возникает световое пятно определенного бытия как **наличного бытия**, и это пятно на фоне окружающей его тьмы есть первое, «спокойное» единство бытия и ничто. Затем это световое пятно должно структурироваться так, чтобы в результате возникла некая система светотеней, *картина бытия,* полностью прошедшего путь своего опосредствования и тем самым реализовавшегося. Именно таким образом диалектика понималась Лосевым; «...диалектический метод заключается в последовательном ограничении "одного" от "иного", определенного от беспредельного». Определенное — это свет, эйдос, имя, очерчен-

477

ность, оформленность, исчисленность, актуальность — arithmos; беспредельное — это тьма, меон, безымянность, неясность, бесформенность, неисчисленность, потенциальность — apeiron: «...выделивши лик, "границу", я тотчас же наделил это световое излияние раздельностью, числом; на фоне этой, уже выведенной мною формы я могу выделить еще новое оформление, и тогда только что полученный arithmos станет вновь apeiron для нового arithmos и т.д., и т.д.»[42]

Таким образом, метаморфоз бытия и ничто, сущности и видимости может быть представлен как метаморфоз arithmos и apeiron:

arithmos →apeiron →arithmos →..

Интересно при этом заметить, что в сфере сущности видимость как «остаток бытия» есть сущностное *небытие,* но интуитивно должно трактоваться нами, скорее, как начало arithmos (боровская ясность!), тогда как сам спонтанный поток отрицающей все границы сущности есть подлинный apeiron. В этом парадоксе также проявляется глубочайшая особенность диалектики — взаимообратимость противоположных принципов.

Взаимопревращение бытия и ничто не может происходить ни во времени, ни в пространстве. Идея вневременна и внепространственна. Это подчеркнуто многократно и самим Гегелем, и его комментаторами[43]. Но в творческих усилиях человека как «конечного духа» метаморфоз бытия и ничто развернут в пространстве и времени.

Вневременность, точечность, *нульмерность* метаморфоза бытия и ничто подчеркнута Гегелем фразой: «Истина — это не бытие и не ничто, она состоит в том, что бытие не переходит, а перешло и ничто, и ничто не переходит, а перешло в бытие. Но точно так же истина не есть их неразличенность, она состоит в том, что *они не одно и то же,* что они *абсолютно различны,* но также нераздельны и неразделимы и что каждое из них непосредственно *исчезает в своей противоположности»* (1, с. 140—141). Это исчезновение Гегель и называет становлением. Становление имеет две фазы (как вдох и выдох): **возникновение** — переход «ничто →бытие» и **прехождение** — переход «бытие → ничто». Но тогда круговорот становления не может быть тривиальным кругом «дурной бесконечности». Этот вневременный цикл следует понимать как *спираль:* бытие, которое, преходя, исчезает в ничто, не есть то же самое, что бытие, возникающее вновь из ничто. Это значит, что бытие отличает себя не только от ничто, но и от самого себя, равно как и ничто: «...каждое из них само есть единство бытия и ничто» (1, с. 166). И только в силу этой спиральности и может возникнуть *определенное* бытие

как спокойное единство бытия и ничто[44]. Итак, топологически становление — это *нульмерная спираль.* Назовем ее *диалектической* спиралью[45].

4. *Полагающая, внешняя и определяющая рефлексии*

Рефлексия, полагая очередной «слой» видимости, выступает кик **полагающая рефлексия.** Каждый слой видимости есть *лишь* нечто **положенное,** т.е. в данном контексте, несамостоятельное, обусловленное, *зависимое-от.* Нечто полагается, и это значит, что оно будет отринуто, подвергнуто отрицанию в потоке рефлексии, размыто им как нечто твердое, но преходящее, бренное.

Но рефлексия сущности не есть *только* спонтанность, бесконечно отрицающая всякую видимость и бесконечно возвращающаяся к ней. Рефлексия имеет в себе самой момент самоотстранения, самоотчуждения. Это — **внешняя рефлексия.** Внешняя рефлексия словно бы «размыкает» метаморфоз сущности и видимости и кладет в основу некую видимость как чистую непосредственность, словно бы ничем и не обусловленную, а **предположенную.** Поток рефлексии «застывает», и слои видимости в нем рядополагаются, фиксируются и, в определенном смысле, *гипостазируются*[46]. Это необходимый момент в становлении сущности как рефлексии. Тем более для нас, простых смертных, познающих «суть вещей», такая возможность исходить из некоего «ясного», «самоочевидного» предположения есть спасительная, благодатная возможность. Без этого был бы невозможен, в частности, *аксиоматический метод.* Вообще же внешняя рефлексия образует предпосылку *рассудочного мышления,* что особенно важно при соотнесении гегелевских конструкций с математикой. Полагающая и внешняя рефлексия в имгоче дают высший тип рефлексии — **определяющую рефлексию.** Действительно, определение как *полагание предела* есть синтез относи тельной самостоятельности положенного как предположении, чего-то самодовлеющего и его отрицания, соотнесения его с ним. Определяющая рефлексия есть синтез чистой спонтанности и жесткой рассудочности. Тут уместна аналогия с художественным творчеством. Руководствуясь одной лишь спонтанностью интуиции (пусть даже гениальной), художник не отольет *форму,* он должен в известном смысле рассчитать.

5. Тождество, различие, противоречие

Через определяющую рефлексию и рождается определенность в сфере сущности, наступает черед **рефлективных определений** (Wesenheiten). Первым из них следует

назвать **тождество.** Тождество в сфере сущности не есть предикат «тождественности-чему-то».
479
Тождество сущности есть *принцип полагания предела, принцип структурообразования.* Теперь уже каждый слой видимости не есть лишь просто световое пятно во тьме рефлексии или, лучше, не есть лишь некое отвердение в потоке рефлексии, а есть некая *структура,* «координированная раздельность» (А.Ф. Лосев). Теперь уже сам поток сущностной рефлексии выступает как тождество, т.е. как некая воля к созиданию, структурообразующая *потенция,* потенция оформления. Тождество, в противоположность нетождеству, есть то, что ***определяет*** тождество (2, с. 34). И та определенная структура, которая как момент выступает в этом потоке, называется **определенным тождеством**. Тождество кристаллизует в своем потоке определенное тождество. Тем самым исходный метаморфоз сущности и видимости принимает вид:

Тождество →Определенное тождество →Тождество →...

Но тем самым тождество как потенция и как начало, размывающее (и омывающее) остров определенного тождества, тут же оказывается своей противоположностью — **различием**. Различие в сфере сущности — это также отнюдь не предикат «отличия-отчего-то», а принцип структуроразрушения, отрицания достигнутого предела, уничтожения его самостоятельности, самодовления: «Различие — это отрицательность, присущая рефлексии в себя; ничто, высказываемое отождествляющей речью; отрицательный момент самого тождества, которое как отрицательность самого себя в одно и то же время определяет себя и различено от различия» (2, с. 38). Отождествляющая речь — это тождество как позитивный принцип; но эта же речь говорит «ничто», *ничтожит* созданное и оборачивается принципом негативным — различием.Но и различие не есть абсолютная негативность, ибо оно высказывает ничто «ради лучшего бытия»: «Drum besser war's, daB nichts enstunde» (Гете. «Фауст»)[47].

Но в метаморфозе тождества также должна выступить, уже и сфере рефлективных определений, внешняя рефлексия. Она должна *гипостазировать определенное тождество,* разомкнув диалектическую спираль и развернув ее опять-таки в некоторую рядо-положенность, выйдя из собственной спонтанности, выражаясь нефилософски, поглядев на себя со стороны. Тогда в отвердевшем потоке рефлексии для внешней рефлексии тождество превращается в **одинаковость**, т.е. может успокоительно рассматриваться как предикат «одинаковости-с-чем-то», а различие — симметрично — оборачивается **разностью**, предикатом «неодинаковости-с чем-то». В категориях одинаковости и разности тождество и различие приходят в спокойное симметричное взаимоединство точно
480
так же, как в наличном бытии в спокойном единстве пребывают бытие и ничто.

Развернутая таким образом диалектика есть не что иное, как диалектика «меонально ознаменованного эйдоса» (А.Ф.Лосев). *Эйдос* — это видимость, принявшая облик определенного тождества, т.е. некоей системы тождеств и различий (точнее, одинакового и разного), того единства, которое А.Ф. Лосев называет «подвижным покоем самотождественного различия». Причем представляется не случайным, что в данном контексте этот эйдос выступает прежде всего в аспекте самотождественного различия, т.е. в аспекте «топоса». Гипостазирование эйдоса, к которому приводит размыкание диалектической спирали, можно — в значительной степени метафорически разумеется, — трактовать как переход от топологической нульмерности Идеи к положительномерному топосу, т.е. к пространству—времени в обыденном понимании. Таким образом, действительно имеет место рядополагание некоей системы определенных тождеств как зафиксированных и структурно определенных слоев видимости внутри сущности как рефлексии в себя. Здесь можно усмотреть определенную аналогию с хайдеггеровской конструкцией, производящей обыденное время (как измерение пространства) из *временности* (или *исходного времени*)[48].

Сам Гегель называет определенное тождество «идеальным бытием в сфере сущности»[49], но нужно понимать гегелевскую интерпретацию категории **идеального**. Формула идеального такова: «Идеальное есть конечное как оно есть в истинно бесконечном — как некоторое определение, содержание, которое различено, но не есть нечто *самостоятельно сущее,* а дано как *момент»* (I, с. 215—216). Таким образом, эта формула в точности характеризует эйдос определенного тождества как *момент* в спонтанном потоке рефлексии. «Момент» здесь означает «лишь-положенность», принципиальную несамостоятельность как невозможность выйти из бесконечной диалектической спирали, *обреченность на метаморфозу.* **Противоречие** возникает именно в силу абсолютизации[50] гипостазированного эйдоса, при попытке вывести его из бесконечного цикла, зафиксировать навсегда. Противоречие, по Гегелю, состоит в том, что эйдос самостоятелен, т.е. очерчен в своей самости, есть сам для себя именно в силу своей несамостоятельности, «лишь-положенности», включенности в цикл. «Так как самостоятельное рефлективное определение исключает другое в том же отношении, в каком оно содержит это другое (и потому оно самостоятельно), то оно, обладая самостоятельностью, исключает из себя свою собственную самостоятельность, ибо последняя состоит в том, чтобы содержать в себе свое другое определение
481
и единственно лишь благодаря этому не быть соотношением и чем-то внешним; но столь же непосредственно эта самостоятельность состоит в том, чтобы быть самой собой и исключать из себя свое отрицательное определение. Самостоятельное рефлективное определение есть, таким образом, *противоречие»* (2, с. 55).

Любое *противоречие,* в силу гегелевской формулы, *есть конфликт момента и целого, индивидуальности и тотальности.* Индивидуальность может состояться лишь (и стать собственно индивидуальностью, «самостью»), будучи «изнедрена» из тотальности. Самостоятельность личности обусловлена обществом в любом случае, каково бы это общество ни было, даже в том случае, когда совершенная личность противостоит весьма несовершенному обществу[51]. Но и тотальность может быть полноценной, завершенной «живой тотальностью», если она кристаллизует внутри себя индивидуальность. В *реальности* противоречия, при *падении* его из сферы чисто спекулятивной в эмпирическое бытие (хайдеггеровское *бытие-в-мире)*[52] победа любой из этих сторон, когда противная сторона подавляется во что бы то ни стало, «любой ценой», всегда будет пирровой. Поэтому глубоко ошибаются те критики Гегеля, которые делают из него духовного предшественника тоталитаризма. Живая, сложнейшая диалектика индивидуального и тотального (хотя, увы, вряд ли осуществимая в эмпирической действительности) преподносится как подавление индивидуального тотальным. С таким же успехом можно обвинить в тоталитаризме апостола Павла, писавшего: «Не знаете ли, что тела ваши суть храм живущего в вас Святаго Духа, Которого имеете вы от Бога, и вы не свои? Ибо вы куплены [дорогою] ценою. Посему прославляйте Бога и в телах ваших, и в душах ваших, которые суть Божьи»[53].

Противоречие тем самым определено через **самостоятельность**[54]. Гегелевский вывод категории противоречия на самом деле сложнее. Противоречие рождается из столкновения **противоположностей**. Противоположности суть **положительное** и **отрицательное**. Вот их формулы:

«Положительное — это положенность как рефлектированная в одинаковость с собой...

Отрицательное — это положенность как рефлектированная в неодинаковость» (2, с. 48).

Попытаемся дать некоторую интерпретацию этих формул. Положительное есть некий твердо очерченный предел, некое устроение, которое рефлектирует в одинаковость с собой, т.е. сосредоточено на своей самотождестненности и «не хочет» выходить за пределы себя самого. Отрицательное есть рефлексия указанной положенности за пределы себя самой, но рефлексия, которая не размывает эту положенность в ее ином, а, фиксируя свою оппози-
482
цию к этому иному, тем самым себя сохраняет, как бы говоря: «Я — не то, что это». Тем самым в категории отрицательного есть презумпция сомнения в твердости границы рассматриваемого устроения.

В сфере внешней рефлексии, которой противоположности принадлежат, они находятся в состоянии спокойной симметричной оппозиции. Но внешняя рефлексия есть также лишь момент рефлексии как таковой и должна вернуться в нее (и тем самым в себя). Тогда нарушается симметрия противоположностей: положительное, «вспоминая» о своем происхождении от тождества как принципа созидания, хочет утвердить себя всецело, исключив полностью свою противоположность. Но это не может совершиться иначе, как через выход из метаморфоза тождества. В этом и состоит противоречие, которое Гегель называет «абсолютным противоречием положительного».

«Если рассматривать каждое из этих двух самостоятельных рефлективных определений в отдельности, то положительное есть *положенность* как рефлектированная *в равенство с собой,* положенность, которая не есть соотношение с иным, стало быть, удерживается, поскольку положенность[55] *снята* и *исключена*. Но тем самым положительное делается *соотношением небытия, положенностью*[56]. Таким образом, оно — противоречие, ибо как полагание тождества с собой оно, исключая отрицательное, делается отрицательным чего-то (von einem), следовательно, тем иным, которое оно из себя исключает[57]. Это иное как исключенное положено свободным от исключающего и тем самым положено как рефлектированное в себя и как то, что само исключает. Таким образом, исключающая рефлексия — это полагание положительного и как исключающего иное, так что это полагание есть непосредственно полагание его иного, которое исключает его» (2, с. 56).

6. Основание и форма

«Противоречие разрешается» (2, с. 57). Стороны противоречия, рефлективные определения, тождество и различие, но в ипостасях положительюго и отрицательного, каждая из которых есть некая завершенность, ***энтелехия,*** лишь постольку, поскольку она есть отрицание своего небытия и тем самым противоречие, «исчезают в **основании**» (2, с. 59). Следует подчеркнуть, что созревание и разрешение противоречия с выходом в новый онтологический план, план основания, возможно именно в силу *восстановления асимметрии швоположностей* и, тем самым, возвращение отчужденной от себя во внешность рефлексии к себе самой (2, с. 43—44). Именно асимметрия дает ненулевой результат в разрешении противоре-
483
чия (2, с. 57). *Круговое* коловращение уравненных в своей симметрии противоположностей не может дать ничего нового. Круг должен снова стать *спиралью* — тогда она будет снята в некотором *диалектическом пределе,* который станет исходной точкой в новом цикле опосредствовании. Точно таким же образом, как было замечено выше, именно спиральность становления выводит из него в новый онтологический план — ставшего, натйчного бытия как бытия *определенного.*

Асимметрия моментов — важнейший признак любого противоречия. Иначе мы получим тривиальную взаимозаменяемость и сомнительную релятивность положительного и отрицательного — сомнительную именно в силу своей претензии на абсолютность. Мы придем к выводу, что инаковость вообще не суша (2, с. 42). Добро есть добро, лишь если оно *исключает* зло, является даже, сколь ни опасна эта формула, *злом для зла.* Но добро есть добро как нечто *положительное* прежде всего потому, что оно *созидает,* причем в аспекте не только эмпирически-историческом, но и онтологическом; зло же *разрушает* (хотя очень трудно бывает за эмпирически-исторической оболочкой разглядеть онтологическое ядро, и часто то, что претендует быть абсолютным созиданием есть разрушение, и наоборот).

Разрешение противоречия знаменует начало новой спирали самоопосредствования сущности. Основание есть отправной пуни на пути к закону. Таким образом, Гегель в диалектической конструкции противоречия проводит очень простую и глубокую мысль ***противоречие есть необходимое звено в движении знания к закону***. История науки дает многочисленные подтверждения этой формулы.

Основание полагает себя прежде всего как **форму**. Подобно тому, как сущность в целом снимает определения бытия, принимая их в себя как видимость, так основание снимает противоречивые рефлективные определения (Wesenheiten), переводя их на новый онтологический план. Сущностные определенности, снятые в своей противоречивости и удержанные в новом плане, и плане основания, дают форму.

Форма есть снятое противоречие, это совокупность снятых определений сущности и в этой снятости удержанных (2, с. 77) Это значит, что форма есть система принятых в основание и тем самым снятых в своей противоречивости эйдосов. То, что форма есть система *снятых* эйдосов, находит подтверждение как в математике (самой формальной науке), так и в музыке (самом формальном искусстве)[58]. Различные *уравнения движения* дают форму (математическую), в которой снимается противоречие движения и самодвижение как «наличное противоречие» (2, с. 66). Несколько позднее мы более подробно рассмотрим идею формы как снятию противоречия.

Математика: теория и модель

Теперь обсудим связь изложенной конструкции с математикой.

Определенное тождество как зафиксированная система тождеств естественно соотносится в математике с *формальной теорией.* Но определенное тождество есть и эйдос. Эйдос же есть нечто принципиально неустойчивое[59]: как «порождающий принцип» (по Лосеву) он должен что-то породить, стать воплощенным. Эйдос определенного тождества *реализует* себя в «спектре моделей» — *фактических воплощений* данного эйдоса. Эйдос формальной теории реализуется в *моделях* этой теории. В общем случае моделью можно назвать воплощение эйдоса в некотором факте. В художественном творчестве, например, модель — это завершенный художественный факт. В завершенности конкретной модели и находит свою завершенность тождество сущности как структурообразующий принцип. Применительно к математике это значит, что математическая рефлексия, которая корреспондируется с рефлексией тождества, есть рефлексия о гипостазированном и абстрагированном, т.е. извлеченном из цикла метаморфоз, эйдосе определенного тождества, которое как формальная теория развертывает себя в спектре моделей теории. Таким образом, «математика сущности», точнее, того раздела «Учения о сущности», о котором здесь идет речь, может быть охарактеризована как *теория моделей.* В частности, для классической логики первого порядка модель есть множество с отношениями, которые тоже суть множества (множества кортежей). Здесь «текучее» тождество сущности окончательно кристаллизуется, процесс полностью переходит в объект и вступает в силу закон противоречия в том виде, в котором он сформулирован Аристотелем: «Невозможно, чтобы одно и то же в одно и то же время было и не было присуще одному и тому же в одном и том же отношении»

(«Метафизика», IV, 3).

Здесь, в сфере аналитики гипостазированного эйдоса, кристаллизуется естественная для конкретных наук смысловая вертикаль: от эйдоса к факту. Эта структура мысли великолепно выражена в гуссерлевском определении эйдоса: «Эйдос... есть данное в созерцании или доступное созерцанию всеобщее — чистое, *безусловное,* а именно, сообразно собственному интуитивному смыслу, всеобщее, не обусловленное никаким фактом. Он ***предшествует всем понятиям,*** понимаемым как значения слов; напротив, как чистые понятия они сами должны формулироваться в соответствии с эйдосом»[60]. Таким образом, эйдос образует «верхний этаж» некоей понятийной иерархии, на более низких «этажах» которой возникают частные понятия и соответствующие им вещи и факты. «Спуск» от эйдоса к факту в общем случае может быть очень
485
трудным, область интерпретации может быть глубоко запрятана в указанной иерархии, но она, *безусловно, предполагается.* Важнейшим обстоятельством здесь является именно то, что исходят из эйдоса как чего-то *безусловного,* абсолютного, гипостазированного, выведенного из цикла метаморфоз. Только это и дает возможности законного применения всего богатого технического аппарата формальной логики. И, подчеркнем это, без такого «торможения» в сфере «чистого смысла»[61] и сама диалектика не была бы возможна как форма *мысли*. Одновременно именно диалектика как осмысление эйдоса не только гипостазированного, но *меоналъно ознаменованного, становящегося,* позволяет понять указанное торможение лишь как *момент* в процессе развертывающего себя мышления.

Внешние и внутренние противоречия теории

Математика есть по самой своей природе наука, гипостазирующая идеальность, наука о гипостазированных эйдосах. Тем самым математическая рефлексия есть ответвление внешней рефлексии. Но гипостазирование эйдоса, как следует из диалектической конструкции Гегеля, есть предпосылка возникновения противоречия. Как удержанный момент эйдос до определенных пределов может мыслиться без противоречий, т.е, как нечто самодовлеющее, вполне самостоятельное. Более того, внешняя рефлексия *запрещает* противоречия. Каким же образом, тем не менее, противоречие может выявить себя в пределах математики?

Внешняя рефлексия отсекает то, что положено, от того, что полагает, исходит из этого, на самом деле «лишь-положенного» как предположенного, непосредственного, необусловленного, моочевидного. Но тут-то и начинает сказываться противоречие (не логическая ошибка, а то «высокое», *онтологическое,* противоречие, которое конструирует Гегель!). Поток рефлексии, из которого искусственно вынуто некое идеальное устроение (например, система дефиниций или аксиом) и которым на самом деле ни устроение положено, «мстит» за себя и врывается в «круг расчисленный светил» в виде парадокса, оппозиции двух, в математическом мышлении несовместимых фактов. Поскольку то, что лишь. положено и в силу этого может оказаться лишь становящимся, еще не ставшим, принимается за ставшее, внутри теории, которая не сознает «динамического» характера своих априорных предпосылок, возникает «неразрешимое» противоречие. Подобного рода парадокс — парадокс Рассела в наивной теории множеств.

Рассмотрим его подробнее. Определяя совокупность ***Y*** как «множество всех множеств, которые не являются элементами самих себя», т.е. полагая
486

$$Y = \{ X \mid X \notin X \},$$

получим, что $Y \in Y \leftrightarrow Y \notin Y$. Но это гипотетическое суждение еще не есть парадокс. Докажем, что имеют место одновременно и безусловно оба взаимоисключающих утверждения: $Y \in Y$ *и* $Y \notin Y$, Действительно, предположим, что $Y \notin Y$. Тогда $(\exists X)$ $(X \notin X \wedge X \notin Y)$, *т.е.* $Y \neq Y$, что невозможно. Итак, $Y \in Y$. Но теперь, так как $Y \in Y \leftrightarrow Y \notin Y$, по правилу modus ponens получим $Y \notin Y$. *Таким* образом, ключевой момент в парадоксе Рассела есть *неравенство совокупности Y себе самой,* что и определяет ее как становящуюся («неконсистентную», по Кантору). Тогда относительно предлагаемого формализма можно поставить вопрос: насколько он *эффективен,* чтобы в его рамках не возникали внутренние противоречия? Можно ли вообще предложить такой формализм, который в принципе исключает внугренние противоречия? Или речь может идти лишь об *относительно* эффективном (надежном) формализме, который в состоянии «заморозить» как бы некое относительно стабильное «ядро» становящейся структуры?

Итак, здесь противоречие возникает из «прошлого», не осознанной (т.е. не схваченной в «надежном» формализме) стихии рефлексии, положившей то, что принимается априори. Само противоречие при этом может быть условно названо «внутренним», т.к. оно унаследовано из «прошлого» и проявляет себя во внутреннем развитии теории[62].

Другой род противоречий, столь же условно называемых здесь «внешними», связан с «будущим», тем потоком рефлексии, который рано или поздно размоет «незыблемость» теоретического устроения только лишь потому, что никогда эйдос не может быть «навечно» выведен из диалектической спирали. Тут, однако, у нас, теоретиков, «всегда есть время». Для того чтобы такое «противоречие будущего» сказалось, необходимо, чтобы модели теории входили в действительность как ее фрагменты, т.е., говоря попросту необходимо, чтобы теория *работала*. Тогда может случиться, некий фрагмент действительности, который должен быть моделью теории, «не хочет» ею быть. В этом, собственно, и состоит внешнее противоречие. История науки знает многочисленные примеры таких противоречий. Хрестоматийным примером может служить противоречие галилеева формализма, которому не «захотели» подчиняться уравнения Максвелла, описывающие распространение электромагнитных волн. Понятно, что внешнее противоречие может проявляться как *противоречие между разными теориями.*

Но определенного рода теории могут не бояться внешних противоречий, так как являются, по существу, очень сложными тавтологиями и ничего не дают для объяснения действительности,

487

не являются *набросками* (в хайдеггеровском смысле) на нее. Но и содержательные теории могут долго искать тот фрагмент действительности, который им противится. Парадоксальным образом тогда гегелевское противоречие вполне согласуется с той идеей К. Поппера, что теория, свободная от риска быть опровергнутой опытом, бессодержательна[63]. Именно так, вполне «позитивно», можно понять экстремистское утверждение Гегеля о противоречии как критерии истины и отсутствии оного как о критерии заблуждения[64].

Таким образом, и внутренние, и внешние противоречия теории суть *противоречия между эидосом и его меональным окружением*. В свете общей диалектической формулы противоречия, согласно которой каждый момент противоречия (положительное и отрицательное) самостоятелен в силу своей несамостоятельности, противоречие эйдоса может быть выражено так: *эйдос есть эйдос, т.е. не-меон, в силу того, что он меональио ознаменован*[65]. Внутреннее противоречие есть противоречие эйдоса, *возникшего из* меона; внешнее противоречие есть противоречие эйдоса, *чреватого* меоном. В реальности человеческого познания меон для эйдоса теории и есть *опыт*. Этот термин понимается здесь весьма широко; и как собственно научный эксперимент, и как «жизнь» теории в научном и более широком сообществе[66], и как опыт, унаследованный и снятый в идеальном теоретическом наброске на действительность, в том, что часто называют априорным. *Опыт — сфера меонаяьного* для математической теории, и противоречие теории состоит в том, что она может быть теорией, т.е. может что-то значить и поистине «сокращать опыты быстротекущей жизни» именно в силу своей опытной ознаменованности.

Но и опыт, чтобы быть подлинным испытанием границ теории, должен быть четкой формой, воплощением некоторого идеального проекта. Опыт, будучи причастен меону, должен быть эйдетически обусловлен. Более того, «противоречия прошлого» (внутренние противоречия теории) могут быть осмыслены через историю и философию науки, которые в данном случае и берут на себя роль опыта. Говоря точнее, опытом здесь следует считать философски осмысленную историю становления теории, а также работу по переустройству ее оснований.

Итак, *опыт врывается в математику через противоречие, и именно через опыт математика может осознать свои противоречия.*

Математический формализм как снятое противоречие

Анализ гегелевской конструкции противоречия позволяет увидеть еще несколько важных и интересных аспектов в проблеме «Математика и опыт».

488

Противоречие снимается, и его моменты исчезают в основании. Основание же выявляет себя как форма. Как формальная наука математика всегда содержит в своих построениях снятое противоречие. Разрешение противоречия есть метаморфоза в буквальном смысле слова — превращение формы. При этом математика характеризуется как наука особенно эффективная в набрасывании формы на противоречие. Гегель писал об особенно глубоком именно в рамках математики отождествлении различного: «...при сравнивании дело идет о том, чтобы свести имеющиеся налицо различия к тождеству, и математика должна рассматриваться как наука, в которой эта цель достигнута наиболее полно»[67]. Настоящая математическая теория позволяет находить полные основания (в гегелевском смысле этого термина), преодолевая автологичность формального и случайность, сомнительную правдоподобность реального основания. Совершенно разные явления охватываются единым формализмом, в силу которого проступает глубинная одинаковость неодинакового[68]. Но откуда берутся эти формы, которые набрасываются на противоречия, как сеть на зверя? Несомненно, что абсолютный диалектический разум, гегелевская Идея, есть хранилище этих форм, форма форм, но формы не даны в ней сразу, не содержатся в ней как вечные и неподвижные идеи, а *порождаются* ею в процессе самопознания[69]. Здесь мы и подходим к пониманию подлинного априори у Гегеля. Это Априори Божественного самопознания, из которого происходит мир вещей и мир человеческого опыта. Гегель развертывает внутреннюю диалектическую структуру этого Априори. Его систематические попытки откинуть какую-либо апелляцию к представлениям имеют тот смысл (можно даже сказать, пафос), что нужно действительно раз и навсегда выявить для себя первичный источник доопытного знания. Человек как «конечный дух», подражая Идее, в процессе «профанного» познания извлекает формы из своего разума в силу его *причастности* к Абсолютной Идее. Но, парадоксальным образом, и Бог может полностью обрести себя только через человека: божественное Априори должно опосредствовать себя всей сферой разумного человеческого опыта.

Теоретико-групповое мышление

Нельзя не остановиться еще на одной характерной черте внешней рефлексии. Во внешней рефлексии положительное и отрицательное выступают как чистые положенности, которые не «рефлектируют друг в друга», а рефлектируют каждая лишь в себя, находясь как бы в состоянии спокойной симметричной оппозиции: «Обе стороны суть, таким образом, только разные, и по-

489

скольку их определенность — быть положительным и отрицательным — составляет их положенность друг относительно друга, каждая... так не определена в самой себе, а есть лишь определенность вообще; поэтому хотя каждой стороне присуща одна из определенностей — положительное или отрицательное, но они могут быть заменены друг другом, и каждая сторона такова, что ее можно брать и как положительную, и как отрицательную» (2, с. 49), Несколько дальше: «*Положительное и отрицательное — это одно и то же.* Выражение это принадлежит *внешней рефлексии,* поскольку она проводит *сравнение* этих двух определений» (2, с. 60). Сравнивать — значит, в определенном смысле, и *уравнивать,* отождествлять.

Есть математическая дисциплина, в которой эта идея абсолютной симметрии противоположностей доведена до предельной отточенности. Это *теория групп.* Надо заметить, что сам Гегель иллюстрирует указанное выше симметричное сопоставление противоположностей симметрией положительных и отрицательных величин в арифметике. Но его рассуждения были бы еще рельефнее, если бы он рассмотрел, скажем, аддитивные группы вычетов. Так, в группе $\mathbf{Z}^{+}_{5}$ мы можем записать 3 = —2, 2 = — 3 и т.п. Каждый из элементов, 2 и 3, взятый как элемент группы Z^{+}_{5} *, с* равным успехом может считаться и положительным, и отрицательным. Более того, эти выражения в данном случае суть не более чем уступка элементарно-арифметической привычке, и следует говорить лишь о *взаимно противоположных* элементах группы.

Таким образом, есть основания назвать то мышление, которое соотносится с гегелевской внешней рефлексией, теоретико-групповым. *Теоретико-групповое мышление* — это не математическая рефлексия о группах, а это внешняя рефлексия как момент рефлексии сущности, которая уравнивает противоположности, и эти *противоположности* тогда *лишь взаимно предполагают друг друга, но не полагают и исключают друг друга в диалектическом процессе* (как бытие и ничто, arithmos и apeiron). Теоретико-групповое мышление, находя свое совершенное выражение в математике, не есть лишь математическое мышление.

Чтобы лучше уяснить это, вспомним один фундаментальный результат теории групп — теорему Кэли. Согласно этой теорем, любая группа изоморфно вкладывается в симметрическую группу некоторого множества, т.е. в группу взаимно однозначных отображений, биекций, этого множества. Тем самым каждая rpymm порождает некоторую совокупность движений (траекторий, орбит элементов указанного множества)[70], причем каждое движение может начаться в любой точке (свойство однородности)[71] и производиться в любом направлении (свойство изотропности)[72]. Таким образом, теоретико-групповое мышление приводит к идее

490

однородного и изотропного пространства. Но внешняя рефлексия, будучи лишь моментом, идеальным, в согласии с логикой противоречия претендует быть «самостоятельно сущей»; она всегда *экстраполирует,* развертывая диалектическую спираль, претендует на захват *бесконечного пространства.* Таким образом, внешняя рефлексия в себе несет *идею* бесконечного, однородного и изотропного пространства. Эта идея находит различные математические воплощения, так сказать, свои *модели* в сфере математики. Наиболее простая среди них — модель евклидова пространства. В этой модели развертка на бесконечность получает свою самую наивную форму — форму *плоской* бесконечности. Евклидово пространство лишено кривизны, и в нем можно задать единый для всего пространства репер. Более сложной и адекватной современным представлениям является модель группы Ли как группы и гладкого многообразия одновременно. *Идея* евклидовости все равно и здесь является доминирующей, ибо гладкое многообразие локально гомеоморфно евклидову пространству. Таким образом, теоретико-групповое мышление как мышление геометрическое не исключает идеи неевклидовой геометрии, являясь спрямлением диалектической спирали не буквально геометрическим, а категориально-эйдетическим.

Итак, в сфере теоретико-группового мышления возникает идея движения в бесконечном, однородном и изотропном пространстве. Но эта идея проявляет себя отнюдь не только в математике. Она доминирует в классическом математическом естествознании, а также и в неоклассическом — у Эйнштейна. В *музыке* она воплощается в системе классической функциональной гармонии (классический мажоро-минор), которая доминировала в профессиональной музыке Западной Европы со второй половины XVII в. (а в русской музыке начиная с Глинки) до конца XIX в. Во-первых, сам *равномерно темперированный строй* организован по теоретико-групповому принципу, означающему сохранение всех интервалов при «параллельном переносе» на любое число полутонов при обратимости любого такого переноса (натуральный строй этими свойствами не обладал). Во-вторых, *модуляционная система классической гармонии* может быть рассмотрена как действие группы преобразований на 24-элементном множестве всех тональностей. Система образующих этой группы состоит из симметричных (взаимно обратимых) переходов каждой тональности в тональность первой степени родства. С математической точки зрения, переход от линеарной полифонии строгого стиля к классической гармонии есть переход от нульмерной топологии дисконтинуума к евклидовому пространству положительной топологической размерности. Классическая гармония есть инобытие пустого евклидова простран-
491
ства классической физики, и в этом пустом пространстве возможны любые движения. Это и есть тот феномен «свободного парения» мелодии, о котором пишет Л.А. Мазель в «Проблемах классической гармонии»[73]. При этом сама равномерная темперация есть нечто вроде *метода координат* в музыке. Развертывание мелодии «на фоне» гармонии при заданной тональности в рамках равномерно темперированного звукоряда аналогично движению материальной точки в евклидовом пространстве с фиксированной системой отсчета. В противоположность этому развертывание линеарной мелодии в полифонии строгого стиля есть не *движение в пространстве,* а *движение, развертывание самого пространства* — нульмерного дисконтинуума, элементами которого и служат развертываемые мелодические линии. Так математически можно уточнить положение Л.А. Мазеля, согласно которому мелодия в эпоху классической гармонии была «освобождена от черной работы по строительству формы»[74]. Следует уточнить: не просто музыкальной формы (ибо не существует, например, сонатной формы без «свободной» мелодии!), а именно самого музыкального пространства.

Но тут возникает законный вопрос: где же здесь *бесконечное* пространство? Ведь речь идет о группе движений *конечного* множества. Разумеется, но бесконечность мыслится здесь опять-таки не буквально «экстенсивно» (и экстенсионально), а эйдетически – как возможность развернуть бесконечное многообразие музыкальных линий в абсолютном, данным раз и навсегда, музыкальном пространстве, которое также есть и некий конечный символ бесконечного. Именно это имел в виду Шпенглер, когда писал о воплощении идеи бесконечного пространства в «контрапунктической музыке»[75].

Совершенно естественно в рамках теоретико-группового мышления возникает идея *абсолютной формы* как вместилища любою движения, любой конструкции и т.п. Отсюда берет начало идея «конструирования в пространстве и времени»[76]. На самом деле речь следует вести, скорее, о конструировании *самого* пространства—времени в рамках той или иной реализации теоретико-группового мышления. Здесь, однако, завязывается совершенно новый сюжет, требующий обсуждения вне рамок этой статьи.

Заключение

Итак, анализ гегелевской конструкции противоречия позволяет, на наш взгляд, гораздо глубже, чем различные позитивистские модели, понять суть взаимосвязи между математикой и опытом. Так, никакой «метод проб и ошибок» (К. Поппер) не дает возможности осознать роль исторических и философских предпосылок
492
теории как опыта. Позитивизм не способен построить сколько-нибудь удовлетворительную концепцию текучего, динамического априори, каковым является априори Абсолютной Идеи. Он не способен выявить *категориальную структуру* тех процессов, в которых возникает взаимодействие теории и опыта. Особенную беспомощность демонстрируют подобного рода подходы в объяснении специфики математических теорий. В свете сказанного становится очевидной и несостоятельность фундаментализма, всех попыток раз и навсегда избавиться от противоречий и судить о математике исключительно с позиций самой математики. Становится также понятной фундированность собственно математического мышления в феномене, который мы назвали «теоретико-групповым мышлением» и проявления которого можно найти в самых разных областях человеческой деятельности.

Когда Хайдеггер в «Бытии и времени» говорит, что математическое естествознание «размыкает некое априори»[77], то в свете гегелевской концепции это можно интерпретировать так: математический (шире — теоретико-групповой) разум *размыкает* (буквально!) свернутую в себе диалектическую спираль сущностной рефлексии. И в этом размыкании — блеск и нишета математического (в частности) подхода к миру. Блеск — так как именно в размыкании осуществляется смелый бросок, *набросок,* схватывание, «замораживание» того, *что будет* (и, в силу этого, и «того, *чем было* бытие»). Нишета — так как любой такой бросок не в состоянии «до конца»[78] распрямить диалектическую спираль, он обречен, в силу *гегелевского* закона противоречия, как все идеальное[79]. Созревшее в нем противоречие заставит отказаться от него и сделать новый набросок.

Анализ гегелевской конструкции позволяет нам понять теоретико-групповое мышление как своего рода «линейную аппроксимацию» диалектического мышления[80]. В каждом математическом наброске на реальность мы *в сфере категориально-эйдетической* словно бы строим некое «касательное многообразие», по которому можем *до определенных пределов* двигаться так, как если бы мы двигались по самой «искривленной» диалектической спирали. Но мы не должны забывать, что это допустимо в весьма определенных, хотя по меркам человеческой жизни, быть может, и очень широких пределах. Если мы будем упорствовать в своем «прямолинейном» (или, лучше, «плоском») путешествии, возрастающая «невязка» его с истиной заставит нас вернуться на кривую дорогу диалектики. Тогда, если мы очень сильно оторвались от означенной кривизны истины, нам придется прыгать с большой высоты с немалым риском расшибиться.
493

Примечания

[1] **Прямым полужирным** шрифтом мы выделяем в данной статье категории Гегелевской Большой Логики. Остальные подчеркивания, как автора статьи, так и в цитатах, в том числе и из «Логики», сделаны курсивом (светлым или полужирным).

[2] См., например: *Гайденко П.П.* Искушение диалектикой: пантеистические и гностические мотивы у Гегеля и Вл. Соловьева // Вопросы философии. 1988.№4. С. 75-92.

[3] *Лосев А.Ф.* Культурно-историческое значение античного скептицизма и деятельность Секста Эмпирика (вступительная статья) // Секст Эмпирик. Соч.: В 2 т. М., 1975. Т. 1. С. 15-16.

[4] Сравнительно недавняя дискуссия о диалектике на страницах журнала «Вопросы философии» (1995. № 1) и связи с публикацией перевода статьи К. Поппера *Что такое диалектика?» показывает, что эта проблема все еще далека от удовлетворительного решения (несмотря на многократные торжественные

провозглашения противного). Скорее всего она и не имеет никакого решения, которое примирило бы хулителей гегелевской диалектики и ее адептов.

[5] *Гегель Г.В.Ф.* Наука логики: В 3 т. М., 1970. Т. I. С. 103. Далее все ссылки на «Науку логики» даются (в скобках) по этому изданию с указанием тома и страницы.

[6] *Спекулятивное мышление* противопоставляется Гегелем мышлению *рассудочному, дискурсивному* как мышлению о *внеположенном* предмете; напротив, спекулятивное мышление имманентно предмету, есть, если угодно, мыслящий предмет и опредмеченнпя мысль: «*в себе и для себя сущее есть осознанное понятие,* а *понятие, как таковое, есть в себе и для себя сущее».* Это объективное мышление и есть *содержание* чистой науки» (I. 103). Так, определенное Гегелем ***объективное мышление*** и есть мышление спекулятивное. Это мышление также есть собственно *диалектическое* мышление: «В этом диалектическом, как мы его берем здесь, и, следовательно, в постижении положительного в отрицательном, состоит *спекулятивное» (*I, с.110). Заметим, что Гегель предостерегал от вульгарного понимания «мыслящего предмета» как «вещи, наделенной сознанием». (См.: *Гегель Г.В.Ф.* Энциклопедия философских наук В 3 т. М., 1974. Т. 1. § 24. С. 121 (далее - *ЭФН).*

[7] См.: *Ильин И. А.* Философия Гегеля как учение о конкретности Бога и человека. СПб., 1994. С. 277-278. См. также: *ЭФН.* Т. 3. § 422. С. 231.

[8] О профанном и священном и структуре мифа см.: *Хюбнер К.* Истина мифа. М., 1996. С. 130. Об интерпретации гегелевской системы в терминах мифологии будет подробнее сказано ниже.

[9] Гегель называет сущность «вневременно прошедшим бытием» (2, с. 7). Тогда гегелевскую сущность можно сопоставить с аристотелевским «to ti en einai», если это последнее переводить как «то, что было быть» (см.: *Черняков А.Г.* Стрекало вопроса (вместо предисловия) // Хайдеггер М. Введение в метафизику. СПб., 1997. С. 36. Можно предложить и такую интерпретацию: «то, что (или чем) было, носящее имя бытия».

[10] Эстетическая сущность гегелевской системы отрицается, например, в работе: *Козловски П.* Философские эпопеи. Об универсальных синтезах метафизики, поэзии и мифологии в гегельянстве, гностицизме и романтизме // Вопросы философии. 2000, № 4. С. 37-53.

[11] И это совсем не то, что в обыденной речи понимают под «явлением» (как чем-то непосредственно наблюдаемым).

[12] «Существование — это непосредственность бытия, в которой сущность восстановнла себя» (2, с. 134).

494

[13] Вещь, как она дана в «Учении о сущности» Большой Логики, резко отличается от вещи в «Феноменологии духа», где вещь есть предмет восприятия.

[14] Соотношение гегелевских сущности и понятия до некоторой степени аналогично соотношению герменевтического и апофантического «как» у Хайдеггера (См.: *Хайдеггер М.* Бытие и время / Пер. с нем. В. Бибихина. М., 1997. С. 158 (далее — Бытие и время).

[15] «Сознание, интеллигенция есть соотнесение смысла с самим собой» *(Лосев А.Ф.* Диалектика художественной формы // Лосев А.Ф. Форма. Стиль. Выражение. М., 1995. С 22), См, также: *Ильин И.А.* Указ. соч. С. 284-285.

[16] ЭФН. Т. 3. § 422, С. 230-231.

[17] ЭФН. Т. 1. § 112. С. 264.

[18] ЭФН Т. 1. § 114. С. 269.

[19] *Козловски П.* Указ. соч. С. 47.

[20] *Хюбнер К.* Указ. соч. С. 122.

21 Ильенков Э.В. Вершина, конец и новая жизнь диалектики (Гегель и конец строй философии) // Ильенков Э.В. Философия и культура. М., 1991. С. 127. В подобной трактовке уже никакие *прямые* мифологические интерпретации диалектики не допускаются, и миф должен быть объяснен научно. Именно это и попытался сделать К. Маркс, фундировав миф экономически. [22] *Швырев В.С.* Как нам относиться к диалектике? // Вопросы философии. 1995. № I. С. 152-158.

[23] Тогда соотношение слов Wesen и Wesenheit вполне аналогично таковому для Kind и Kindheit: сущность (Wesen) есть *субъект,* в котором реализован принцип сущностности (Wesenheit). Но сущность у Гегеля действительно субъект — ипостась познающей себя Идеи.

[24] Такова природа диалектического отрицания как *определенного* отрицания (1, с. 107 — 108). Приписывать Гегелю абсолютизацию отрицания совершенно неправомерно (см.: *Гайденко П. П.* Указ. соч.).

[25] *Манн Т.* Иосиф и его братья / Пер. с нем. С. Апта: В 2 т. М., 1987. Т. 2. С. 417.

[26] Казалось бы, этот вопрос так часто обсуждался, что может считаться эакрытым. Однако всякий раз сталкипаешься с полным непониманием именно зтого обстоятельства: идет ли речь о научных публикациях или о «кулуарных» спорах по поводу диалектики.

[27] *Аристотель.* О душе. III. 6 (430 b 20—25).

[28] Фихте — «Ichheit», но, заметим, не просто «Ich». Термин «Ichheit» столь же трудно переводим на русский язык, как и термин «Wesenheit». Можно говорить об «абсолютном Я», о «яйности», о принципе самости, субъекте как таковом, интеллигенции как онтологическом начале.

[29] Помним также знаменитое определение логики как «изображения Бога». Совсем не случайно то, что перед этим Гегель пишет: «В качестве *науки* истина есть чистое развивающееся самосознание и имеет образ самости...» (I, с. 103).

[30] Когда Гегель говорит... в начале логики о "бытии" (Sein), следует иметь в виду не отвлеченнейшую категорию, с едва уловимым для мысли содержанием; но не совокупность конкретно-эмпирического "мирового" бьпия. Необходимо *представить, вообразить* себе некое *сущее, реальное* бытие, бытие, которое есть, но лишено всяких дальнейших свойств; оно имеет *минимум* спекулятивно-логического содержания, который по пустоте своей вскрывается в "ничто" (Nichts). Но и это ничто следует представить силою воображения как сущее ничто, которое не есть совсем и безусловно отсутствие предмета, но есть сущий смысл "das Nichts"» *(Ильин И.А.* Указ. соч. С. 68). Надо заметить, что Ильин глубоко чувствует мифическое начало гегелевской системы, но такое подчеркивание представления, воображения сильно расходится с интенциями самого Гегеля.

[31] *Гюго В.* Отверженные. Ч. 1. Кн. 1. Гл. XIV. (Курсив мой. — *А.Б.).*

495

[32] Среди значений латинского слова *objectus* фигурируют *преграда, заслон.*

[33] «Ek toy apeiroy pneymatos» («из дыхания Беспредельного»). См.: *Лосев А.Ф* Античный космос и современная наука // Лосев А.Ф. Бытие. Имя. Космос. М. 1993. С. 77.

[34] Позже мы увидим, что вторая схема содержит в себе первую как момент.

[35] ЭФН. Т. 1. § 84. С. 215.

[36] *Ахутан А.В.* Дело философии // Архэ. Вып. 2. М., 1996, С. 107 («...мысль как-то движущаяся только в идеях без опоры на "образы" и "доказательства"»). Заметим, что именно с опорой на образы и доказательства (в формально-логическом смысле) строится понятийная структура, скажем, *математической* теории. Мы оставляем здесь без подробного обсуждения вопрос о том, осуществима ли *абсолютная* категориальная схема *безо всякой* опоры на образы (представления) и доказательства, но то, что в диалектической системе выстраиваемая с указанной опорой смысловая вертикаль *снята,* не вызывает сомнений. И непонимание (или игнорирование) этого обстоятельства приводит к поверхностным оценкам диапектики как софистики (см. также определение диалектики у А.Ф. Лосева в «Античном космосе» и «Философии имени»).

[37] В отличие от рассудочного понятия, конкретность которого достигается указанием на «пример», частный случай, т.е. на некий экстенсионал. Кроме того, конкретизация спекулятивного понятия ведет, в противоположность формальной логике, к *увеличению* его объема: «То, что конкретно, то обладает многими качествами или определениями так, что оно становится тем конкретнее, чем больше его объем» *(Ильин* И.А. Указ. соч. С. 138).

[38] См.: *Лосев А.Ф.* Диалектика мифа // Лосев А.Ф. Миф. Число. Сущность. М., 1994. С. 200-201.

[39] *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Поздний эллинизм. М.. 1980. С- 488—489. И тогда миф следует понимать как образно-личностную интерпретацию диалектической системы, которая, vice versa, есть категориальная структура мифа.

[40] Эта мифологема с полной отчетливостью представлена в платоновском «Тимее» (см. 48а, 56с). Обстоятельный обзор «философии Ничто» дан в книге С.Н. Булгакова «Свет невечерний».

[41]| *Гегель Г.В.Ф.* Феноменология духа / Пер. с нем. Г. Шпета. СПб., 1994. С. 216-217.

[42] *Лосев А.Ф.* Античный космос и современная наука // Лосев А.Ф. Бытие. Имя. Космос. М., 1993. С. 104.

[43] *Ильин И.А.* Указ. соч. С. 117-119.

[44] Взаимное исчезновение бытия и ничто друг в друге тем самым *преходит*; само *исчезает как таковое,* ибо вместе с этими двумя категориями опосредствует и уже в силу этого снимает себя. Вряд ли, тем не менее, мы можем снять становление чисто логическими средствами, *полностью* исключив представление о том, что должно стать чему-то определенному. Система Гегеля поэтому вряд ли может рассматриваться как *чисто категориальная.* Это система *категориально-эйдетическая.* и лежащий в ее основе диалектический вывод не дискурсивен исключительно, но интуитивно-дискурсивен.

[45] Мы бы не стали здесь придавать термину «нульмерная спираль» вполне строгий математический смысл. Здесь это, скорее, метафора. Но конструкции топологии нульмерных (вполне несвязных) пространств (дисконтинуумов,в частности) находят сейчас многочисленные применения в разных математических теориях мыслительных процессов. Понятие «нульмерная спираль» тогда может быть уточнено в рамках теории нульмерных динамических систем как вид фазовой траектории такой системы (см.; *Белоусов А.М.* Эстетика и топология // Стили в математике. Социокультурная философия математики. Спб.,1999. С. 172-187),

[46] Термин *гипостазирование* понимается здесь несколько шире, чем принято. Согласно стандартной трактовке, гипостазирование есть наделение какого
496
либо отвлеченного понятия, некоторой идеальной конструкции, самостоятельным бытием. Мы расширяем это понимание, подразумевая под гипостазированностью «зафиксированность», «устойчивость», «незыблемость». Мы имеем тут в виду фиксацию идеального образования как *самостоятельного объекта* исследования, абстрагированного от реальности вещей. В человеческом познании, прежде всего в «конкретных» науках, такое «гипостазирование» носит чаще методологический, гносеологический характер, чем онтологический (подобно гипостазированию чисел в пифагореизме). Так зафиксированный идеальный объект становится базой, *основанием* (прямое значение слова *hypostasis* — основание, подставка) операций рассудочного познания. В тоже время мы удерживаем и стандартную интерпретацию термина, так как в рассматриваемом фрагменте гегелевской «Логики» «отчужденные» внешней рефлексией «слои видимости» на самом деле *в онтологическом плане,* как *моменты* в рефлексии сущности, наделяются самостоятельным бытием, *претендуют быть* самостоятельно сущими.

[47] Мефистофель говорит Фаусту (при первом своем посещении):

...derm alles, was ensteht.
1st wert, daB es zugrunde geht;
Drum besser war's, daB nichls enstunde.

(«...ибо все, что появилось [наличествует], достойно гибели; ради лучшего бытия чтобы исчезло возникшее».)
Перевод Б. Пастернака ярок, но тонкий философский смысл исчезает:

Нет в мире вещи, стоящей пощады,
Творенье не годится никуда.

Здесь, как нам кажется, есть ассоциации с Гегелем. Мефистофельское *nicht,* как приговор всему возникшему — это именно то «ничто, произносимое отождествляющей речью», о котором пишет Гегель, определяя различие. Это «ничто» произносится Мефистофелем, как *моментом в фаустовском,* и последнее, созидательное начало представлено в словах «drum besser war's». Кроме того, слова zugrunde geht употребляются Гегелем дальше в смысле «исчезнуть в основании» (при разрешении противоречия).

[48] Бытие и время. § 65. 66, 81. Надо заметить, что в самой *идее* топологического пространства, в понятиях окрестности, расстояния, предела содержится *идея* протяженности, даже если речь идет о топологическом пространстве размерности нуль и *меры* нуль (как канторов дисконтинуум) как бы «точке». Если Лосевское множество как эйдос предполагает начало единства, как число — начало движения, то как топос — именно начало протяжения.

[49]ЭФН. Т. 1, § 115. С. 271.

[50] Absolutus — в данном случае: самостоятельный, независимый, свободный, необусловленный, отрешенный, отделенный (ср.: *Ильин И.А.* Указ. соч. С. 40, 55).

[51] Но *совершенное* общество (правда, где оно?) снимает противоречие между личностью («я») и обществом («мы»). Заметим при этом, что даже в самом гордом протесте личности и ее борьбе с «холодными, жестокими идолами морали долга» (С. Франк) она максимально раскрывается как *социальное* существо.

[52] Бытие и время, вторая гл. Термин «падение» употреблен также по ассоциации с Хайдеггером (там же. § 38).

[53] 1 Кор, 6. 19-20.

[54] Важно заметить, что термины **самостоятельность** и **несамостоятельность** правильнее понимать не как «предикаты», а как выражение *способов бытия* «сущностных качеств» (Wesenheiten). Тогда и противоречие есть не конъюнкция взаимоисключающих предикатов, а выражение способа бытия — поистине *онтологическая* характеристика «идеального бытия в сфере сущности». Именно такое понимание противоречия отстаивал (в рамках материалистической Диалектики) Э.В. Ильенков.

[55] То есть обусловленность иным, зависимость от иного *(А.Б.).*
497

[56] Так как исключая свое иное, оно зависит от него, *полагагается* им *(А.Б.).*

[57] Так добро, исключая зло, делается злом для зла и, тем самым, становится причастным злу как таковому *(А.Б.).*

[58] О музыкальной форме как системе снятых эйдосов см.: *Лосев А.Ф.* Музыка как предмет логики // Лосев А.Ф. Форма. Стиль. Выражение. М., 1995. С. 488, 494.I

[59] Это утверждение, скандальное для платонизма, совершенно оправдано в гегелевской философии. Даже Бог как творец не самодостаточен, пока не обретет себя через человека: «Человек, уведавший Бога, познал, что познанная им божественность есть «его собственная природа» и ему открывается, что не он «познал» Бога, а *Бог в нем познал сам себя» (Ильин И.А.* Указ. соч, С. 274).

[60] *Гуссерль Э.* Картезианские размышления, IV, § 34 // Гуссерль Э. Логические исследования. Картезианские

размышления. Минск; М., 2000. С. 410.

[61] *Ильин И.А.* Указ. Соч. С. 122-123.

[62] Интересный анализ внутренних противоречий математических теорий содержится в работе: *Бычков С.Н., Шашкин Л. О.* Канторовская диагональная процедура и непротиворечивость теории множеств // Историко-математические исследования. Сер. 2. Вын. 5 (40). М., 2000. С. 290-300.

[63] *Поппер К.* Что такое диалектика? // Вопросы философии. 1995. N° I. С. 118—138.

[64] *Гегель Г.В.Ф.* Работы разных лет: В 2 т. М., 1970. Т, I. С. 265.

[65] Н.А. Бердяев писал, что «без заднего фона хаоса нет красоты космоса» (См.: *Бердяев И.А.* О рабстве и свободе человека // Бердяев Н.А. Царство Духа и царство кесаря. М., 1995. С. 147.

[66] Даже если противоречие есть следствие логической ошибки, оно как правило, обнаруживается через опыт, который в данном случае есть «исполнение» созданной теории перед некоторым коллективом или перед самим автором, который должен быть полностью отчужден от своего детища.
С другой стороны, если даже вполне красивая «нефальсифицируемая теория (К. Поппер) пребывает в своей гордой замкнутости, она, невостребованная опытом, гибнет, разрушается, как дом, в котором никто не живет.

[67] ЭФН. Т. 1. § 117. С. 274.

[68] В.С. Библер отметил, что закон противоречия вступает в противоречие с законом достаточного основания, т.е. формально-логический вывод соединяет априори совершенно разные вещи, о которых после построения вывода (например, после найденного математического доказательства) мы можем сказать: «Это одно и то же!» (см.: *Библер В.С.* Что есть философия? (Очередное возвращение к исходному вопросу) // Вопросы философии. 1995. №1. С. 159-183.

[69] Хотя этот процесс не развертывается во времени!

[70] Обратим внимание на теоретико-групповую, как раз в терминах движений, порожденных некоторой симметрической группой (группой параллельных переносов трехмерного евклидова пространства), иллюстрацию самого Гегеля: «Если пройден час пути на восток и точно такой же путь обратно на запад, то путь на запад снимает пройденный вначале путь... Вместе с тем час пути на восток сам по себе не есть положительный путь, как и путь на запад — отрицательный; эти направления безразличны к данной определенности противоположности; лишь нечто третье — имеющееся вне их отношение — делает одно из этих направлений положительным, а другое — отрицательным» (2, с. 52). В этом фрагменте содержится типичное теоретико-групповое предположение: если мы прошли (в некоем пространстве) какой-то путь из пункта А в пункт Б, то мы можем вернуться из Б в А, в точности повторив первый переход, но в обратном порядке.

[71] То есть каждый элемент g группы *G*> действующей на множестве *М,* осуществляет «синхронный» сдвиг всех элементов множества *М.*

[72] То есть можно задать сдвиг как на элемент *g* е *G,* так и на обратный к нему элемент g^{-1}.
498

[73] *Мазель Л1.А.* Проблемы классической гармонии. М., 1976. С. 76.

[74]Там же. С. 77. См. также: *Мазель Л.А.* Раздумья об историческом месте творчества Шостаковича // Шостакович Д. Статьи и материалы. М., 1976. С. 61.

[75] *Шпенглер О.* Закат Европы (т. 1: «Образ и действительность»). Новосибирск, 1993. С. 369.

[76] См.: *Шапошников В.А.* Математическая мифология и пангеометризм // Стили в математике. Социокультурная философия математики. СПб., 1999. С, 139—161.

[77] Бытие и время. С. 362.

[78] Ср. с термином Хайдеггера: «до-конца-продумывание» (Бытие и время. С. 424).

[79] Анализ гегелевского противоречия позволяет понять мысль о *бренности идеального.* Об этом писал Л. Шестов: «...идеальные сущности, с их надвременным и потому как бы вечным бытием, — самые *преходящие,* самые бренные сущности* *(Шестов Л.* Memento mori // Гуссерль Э. Философия как строгая ииука. Новочеркасск, 1994. С. 32).

[80] По-видимому, именно это обстоятельство делает вполне вероятным прогноз относительно противоречий математических теорий, который сформулирован в указанной выше работе С.Н. Бычкова и Л.О. Шашкина: *Не придется ли теории множеств смириться с наличием «сильных» противоречии (при отсутствии нарушений «слабого» закона тождества), как многими веками ранее с ними смирилась философия?»

КОММЕНТАРИИ

С.Н. Бычков

Ключевое положение комментируемой работы заключается, на мой взгляд, в интерпретации научного опыта как философски осмысленной истории становления теории (включая сюда работу по переустройству ее оснований). Подобное понимание существенно отличается от кантовского понимания опыта как осуществляемого отдельным индивидом. Даже если этот индивид наделяется чертами трансцендентального субъекта, все равно он не способен в одиночку — «здесь и сейчас» — воспроизвести весь ход рассуждений, приведший научную мысль прошедших веков к наличному ее состоянию. Именно этот момент, на мой взгляд, составляет основную трудность для понимания представленной в данной работе позиции. Но прежде чем привести дополнительные аргументы в поддержку указанного положения, целесообразно сделать несколько предварительных замечаний по поводу выбранного в работе способа изложения гегелевской конструкции противоречия.

Автор в существенной степени использует неоплатоническую интерпретацию гегелевских построений, наиболее ярко представленную в XX столетии в работах А.Ф. Лосева. Эта интерпретация не тождественна подходу самого Гегеля, но этот «минус», с формальной историко-философской точки зрения, имеет, на мой взгляд, существенные «плюсы» в контексте обсуждаемой специальной проблемы. Дело в том, что «неоплатоническая версия» геге-

левской диалектики, по-моему, ближе для представителя математического естествознания, поскольку античный неоплатонизм сам теснейшим образом был связан с современным ему математическим знанием. Кроме того, на сегодняшний момент он представляет единственную реальную альтернативу (на это обстоятельство фактически указывает Р. Фейнман в своем курсе лекций) «кантианскому» объяснению Гельмгольца возможности описания благозвучных музыкальных интервалов при помощи первых чисел натурального ряда.

О сложности заявленной темы говорит хотя бы то обстоятельство, что единственная, насколько мне известно, серьезная попытка установить взаимопонимание между математиком и философом-диалектиком по вопросам, обсуждаемым в работе (речь идет о Г.Е. Шилове и Э.В. Ильенкове), не привела к серьезным результатам: слишком далеко в историческом плане отстоят друг от друга диалектический и формально-дедуктивный способы мышления. Для того чтобы эта попытка оказалась более удачной, следует, на мой взгляд, дополнить логическую аргументацию автора в пользу правомерности гегелевской интерпретации противоречия исторической. Заодно станет более понятной и недостаточность кантовского представления о соотношении математики и опыта.

Аристотель формулирует закон противоречия, опираясь на представление о вещах, существующих безотносительно к чему бы то ни было (Метафизика, 1007 a 20 — b 18). Подобные «веши» сущности — находятся в уме-перводвигателе (Метафизика, 1010 a 15—34), само существование которого обосновывается Стагиритом при помощи ссылки на особенность теоретических наук, у которых предмет знания совпадает со знанием (Метафизика, 1074 b 38 1075 a I). С другой стороны, доступными одной лишь мысли объекты теории могли первыми стать только в геометрии (см.: *Бычков С.Н.* Дедуктивное мышление и древнегреческий полис // Стили в математике: социокультурная философия математики. СПб., I999. С. 301—302). Теоретическая же геометрия возникает впервые в VI—IV вв. до н.э. в Греции как рефлексия над практической геометрией египтян. В кантовском представлении, описанном во Введении в «Критике чистого разума», подобного рода рефлексия выглядит как индивидуальный психологический акт гения-геометра. В действительности же абстрагирование египетской геометрии произошло не в голове Фалеса, Пифагора или другого ученого, а в «теле» самой древнегреческой цивилизации, оказавшейся не в состоянии применять чужие технические сведения на практике (см.: *Бычков С.Н.* Египетская геометрия и греческая наука // Историко-

математические исследования. Сер. 2. Вып. 6 (41). М, 2001 С. 277-284).
500

Дедуктивная геометрия, в которой абсолютизируется закон противоречия, оказывается, таким образом, не соответствующей природе математики как таковой, а «положенной» (в гегелевском смысле) внешним по отношению к ней историческим процессом.

Данный подход позволяет рассматривать исторический процесс возникновения теоретической геометрии как не менее важный, нежели готовая совокупность результатов, зафиксированных н виде дедуктивной непротиворечивой теории.

ОТВЕТ АВТОРА

Я очень признателен Сергею Николаевичу за его содержательный историко-математический экскурс, подтверждающий необходимость диалектического анализа математических формализмов. Диалектику и следует считать *логикой истории, логикой становления и метаморфоз, логикой Временности* (в хайдеггеровском смысле). Известен афоризм Гете: «Учение о форме есть учение о превращении». Но какая же наука должна описывать превращения математических формализмов — не в их эмпирически-исторических исследованиях, а именно в *логике* их генезиса, становления и гибели? Математика сама *принципиально не может* справиться с этой задачей, она не в состоянии описать свое собственное становление. Это может сделать диалектика, ибо она дает *динамическую систему* понятий, сопряженных и порождающих друг друга в некоей *смысловой горизонтали.* Но чтобы быть *совершенной* формой мысли, диалектика должна иметь *торможение* в своих категориальных моментах, она должна отдать на откуп *формальной логике* как *аналитике зафиксированной идеальной предметности* точную проработку *смысловой вертикали* — спуск от эйдоса к факту. И, между прочим, именно в претензиях *формальной* логики быть *абсолютной* логикой как раз и проявляется (и нормально, необходимо проявляется, *не может не* проявляться) диалектическое противоречие, по Гегелю, — именно как *самостоятельность в силу несамостоятельности.* Хотел бы еще раз подчеркнуть, что так понимаемое противоречие — его можно назвать противоречием *обреченности на метаморфозу* — никак не глупое приписывание двух взаимоисключающих предикатов некоторому субъекту, а *способ бытия* определенной системы мышления и познания.

И еще один момент. Комментатор совершенно справедливо подчеркивает чуждость гегелевской диалектики трансцендентализму в разных его вариантах (от Канта до Гуссерля). Но трансцендентальная позиция, в определенных условиях и моментах совершенно неизбежная, не дана абсолютно, а как-то возникает, хотя
501
мы и сознаем свою «абсолютную» *захваченность* ею, что выразил Хайдеггер в понятии Dasein. Собственно, пафос «Бытия и времени» и есть пафос попытки разгадать тайну Dasein, тайну «вброшенности» в Dasein: «Почему вообще *есть* сущее, а не наоборот – ничто?». Опираясь на Гегеля, мы могли бы сказать, что трансцендентальная установка возникает в фазе *внешней рефлексии,* как раз именно в фазе торможения, *задержки, epoche* (в *буквальном,* а не и гуссерлевском смысле!), на анализе «чистого смысла». Можно упрекать Гегеля в догматизме, в том, что он не решает на самом деле трансцендентальную проблему, а *догматически декларирует* ее *решение,* полагая тождество субъекта и объекта, и в этих упреках много справедливого. Но, отбрасывая, «деконструируя» гегелевский догматизм, мы не можем не видеть плодотворности его динамической категориальной системы, анализ которой помог бы прояснить многие проблемы, связанные с обоснованием частных наук.

А В. Родин

ИДЕЯ ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ

Введение

Математические идеи оказывают огромное влияние не только на естественные науки, но и на человеческое мышление в целом, в том числе и на практическое мышление. При этом часто оказывается, что математические конструкции, которые кажутся свободными творениями человеческого ума и фантазии, очень быстро находят применение в естественных науках и технике. Вигнер назвал этот феномен, указывающий на неразрывную — хотя и неочевидную и часто совершенно неожиданную — связь математики и опыта «непостижимой эффективностью математики в естественных науках»[1]. Какова природа этой связи? На наш взгляд, объяснение этой загадки состоит в том, что математика укоренена в опыте с самого начала, т.е. что фундаментальные математические понятия (например, понятие числа) имеют эмпирический характер. Такая укорененность означает, что вне опыта эти понятия не имели бы никакого смысла, были бы совершенно непонятны, т.е. не были бы понятиями. Представим себе совершенно хаотический мир (можно подумать о пламени), в котором ничего нельзя сосчитать, который совершенно меняется каждое мгновение, в котором нет памяти и в котором нельзя выделить никаких «штук» и «разов». В таком мире понятие числа не имело бы никакого смысла и, значит, не могла бы существовать арифметика. Гельм-
502
гольц достаточно убедительно показал, что евклидова геометрия основана на нашем опыте твердых тел: в жидком мире такая геометрия бессмысленна[2]. Если допустить, что математические понятия имеют эмпирическую природу, то «непостижимая эффективность математики» не покажется такой непостижимой, поскольку это будет означать, что математическая теория связана с миром опыта всегда и везде, а не только в те особые моменты, когда эта теория «применяется» в какой-либо эмпирической области. Вопрос о специфике такого «применения» является важным и требует внимательного разбора. Однако, на наш взгляд, было бы совершенно неправомерно предполагать, что эти «применения» составляют единственный способ контакта математики с миром опыта. Этот вывод покажется тем более убедительным, если принять во внимание то обстоятельство, что сами математические теории очень чисто формируются под влиянием конкретных практических задач (например, землемерных и пр.) «Непостижимая эффективность математики» состоит в том, что эти теории обычно имеют гораздо более широкое значение, в том числе и в смысле возможных практических применений, чем решение той практической задачи (или того класса практических задач), с которой эта теория первоначально могла быть связана.

Одно из основных возражений против эмпирического характера математических понятий связано с именем Канта, который считает математику *априорной.* Априорность математики не означает, что она не связана или слабо связана с опытом. Априорность математики означает, что сам опыт подчиняется математическим законам, которые поэтому должны в каком-то смысле предшествовать опыту — если не генетически, то логически. Аргумент Канта основан на следующем соображении: всякий опыт конечен и относителен, а математика претендует на *необходимость* своих выводов, т.е. на то, что ее утверждения истинны всегда и везде. Например, мы можем всю жизнь складывать спички и все же никогда таким образом не докажем наверняка, что, взяв два раза по две спички, мы получим четыре спички, поэтому, согласно Канту, 2x2 = 4 — это априорная истина, которую мы только обнаруживаем с помощью спичек, которые дают нам эмпирический материал, чтобы эту истину обнаружить. Конечно, кажется нелепым считать 2 x 2 = 4

индуктивной гипотезой вроде гипотезы *все лебеди белые,* поскольку нетрудно представить себе черного лебедя, даже если такого и не доводилось видеть, а вот можно ли придать нетривиальный смысл утверждению 2x2 = 5 — это по меньшей мере не очевидно (и можно допустить, что это вообще невозможно сделать). Тем не менее, нет достаточных оснований понимать необходимость математических выводов так, как это делает Кант —
503
в абсолютном и вневременном смысле. Конечно, математические теории не меняются так же быстро, как наши чувственные впечатления, однако нет ничего нелепого в утверждении, что они возникают, изменяются и исчезают в пространстве и времени наряду с людьми, лебедями, книгами, языками, городами и традициями. Кажется, со времени Канта идея вечной истины сильно утратила популярность, и, напротив, возникло понимание того, что изменчивость науки является такой же фундаментальной, как и изменчивость мира. (Более того — это уже наша гипотеза, которую здесь невозможно развивать подробно, — эту динамику совершенно не обязательно понимать в смысле бесконечного *приближения* к вечной истине, пользуясь, по сути, тем же геометрическим образом, который мог иметь ввиду Платон, думая о гончаре, пытающемся сделать тарелку как можно более круглой. Конечно идея бесконечного приближения знания к вечной истине делает само знание если и не вечным, то по крайней мере долгосрочным или даже «бессрочным» проектом. Однако это не единственным способ, которым можно обеспечить такую бессрочность. Кроме того, определенная «устойчивость», которой, по-видимому, должно обладать всякое знание, не обязательно предполагает неизменность и отсутствие всякой динамики.) Если же отказаться от идеи о том, что корректные математические рассуждения должны быть необходимыми в абсолютном и вневременном смысле, то вывод Канта об априорном характере математики лишается убедительности.

Вопрос о внутренней геометрии, который мы рассмотрим ниже, имеет к кантовскому априоризму особое отношение (на что указывали многие, в частности Рейхенбах[3]). Кант считает пространство априорной формой, определяемой геометрией этого пространства (естественно думать, что Кант имел в виду евклидову геометрию). Внутренний подход, впервые предложенный Гауссом[4], состоит, грубо говоря, в том, что пространство как целое вообще не является данным и определенным, а вместо этого рассматривается движущийся наблюдатель, который на основании локальных измерений и наблюдений делает выводы о том, в каком пространстве он находится и какова геометрия этого пространства. Кажется заманчивым считать эту конструкцию моделирующей ту ситуацию, в которой на самом деле находятся исследователи реального пространства, геометрия которого, таким образом, оказывается эмпирическим фактом о мире. Мы увидим, однако, что ситуация на самом деле не такая простая и что конструкции, используемые при внутреннем подходе в геометрии, обязательно также предполагают и некоторое внешнее заранее заданное пространство. Тем не менее нет необходимости вслед за Кантом счи-
504
тать геометрию этого внешнего пространства фиксированной и жестко связанной с нашим рассудком — гораздо естественнее думать о ней как о гипотезе, которая может быть заменена на другую, если это позволит построить лучшую теорию.

История про плоскатиков

Представим себе нарисованных на листе бумаги *плоскатиков* — плоских человечков, которым дана способность двигаться в пределах этого листа. Допустим, что тела плоскатиков (как и наши тела в нашем мире) непроницаемы друг для друга (т.е. они не могут смешиваться наподобие жидкостей), и, подобно нашим телам, они могут хотя бы приблизительно сохранять свою форму. Что бы мы почувствовали, если бы оказались на месте плоскатиков, и что бы мы смогли узнать о своем мире? Двигаясь по прямой (из любого места в любом направлении), плоскатик дойдет до края листа и так узнает, что его мир имеет границу. Двигаясь вдоль границы и не поворачивая назад, он в какой-то момент поймет, что проходит один и тот же путь многократно (если он умеет идентифицировать свое местоположение и обладает памятью).

История становится более интересной, когда мир плоскатиков перестает быть плоским, хотя и остается двумерным. Предположим, что плоскатик нарисован на поверхности шара. Тогда, двигаясь постоянно в одном и том же направлении, он не обнаружит границы, но опять в какой-то момент наткнется на собственные следы. Возможны и более сложные эксперименты. Предположим, что, начиная движение вперед из *A*, плоскатик в какой-то момент возвращается в *A*. После этого плоскатик поворачивает, например, направо и опять идет прямо, пока снова не окажется в А (в третий раз). Если плоскатик нарисован на шаре, он по дороге в *A* непременно еще раз наткнется на свои старые следы. Если же он нарисован на торе (поверхности бублика), то этого может не произойти. Так, путешествуя, плоскатики могут многое узнать о своем мире (рис. I)[5].

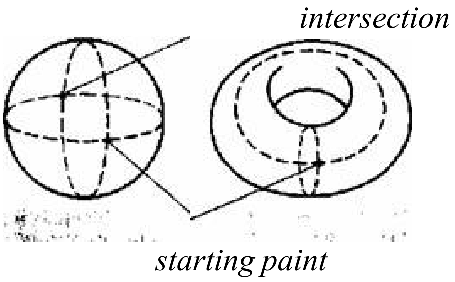


Рис. 1

505

Эта история была придумана Эдвином Эбботтом в 1882 г. и названа автором «многомерным романсом» (Flatland: A Romance of Many Dimensions)[6]. Однако, как представляется, самое интересное в этой истории — это не идея многомерного пространства. Аналогичные эксперименты могли бы производить существа, живущие в пространствах любого числа измерений, например, живущие на линиях или живущие в трехмерных пространствах вроде нашего. Самой важной для нас в рассказанной истории яатяетгя та идея, что на некоторый геометрический объект можно посмотреть не извне и не «ниоткуда», как этому учат в школе, когда рассказывают про треугольники, круги, шары, пирамиды и т.д а *изнутри,* представив себе, что данный объект является для нас миром, в котором мы живем. В этом и состоит идея внутренней геометрии.

Попробуем проанализировать рассказанную историю подробнее. Как уже говорилось, предположение о том, что плоскатики живут в мире двух измерений, не существенно (по крайней мере для наших настоящих целей). Важными мне представляются следующие три обстоятельства.

1) Главный герой истории — это Наблюдатель, Перспектива, Точка Зрения или Я. (Математически это — локальная система координат; см. пункты 2 и 3 ниже.) Чтобы понять смысл рассказанной истории, необходимо отождествить себя с одним из плоскатиков, встать на точку зрения плоскатика. Однако важно одновременно сохранить и «обычную» точку зрения, которая по отношению к плоскому миру является *внешней* точкой зрения всевидящего ока. Мы видим шар, по поверхности которого ползают плоскатики, и заранее *знаем,* куда и как они могут доползти, и одновременно мы пытаемся поставить себя на место плоскатики спрашивая, как много из того, что уже *знаем мы* о плоском мире (например, что этот мир представляет собой сферу), сможет узнать плоскатик, не подозревающий о том, что такое третье измерение. Другими словами, чтобы понять рассказанную историю, нужно не просто встать на внутреннюю точку зрения, но

надо научиться свободно переходить от внутренней точки зрения к *внешней* и наоборот[7]. Разумеется, все, что касается внешней точки зрения, относится к *внешней,* а не к внутренней геометрии. Но это значит только то, что идея внутренней геометрии не существует сама ми себе. Идея состоит не просто в том, что вводится какая-то новая геометрия, а в том, что проводится различие между внутренней и внешней геометрией. Внешняя геометрия — это геометрии пространства, в котором находятся лист бумаги, сфера, тор или любая другая поверхность, на которой живут плоскатики[8]. Кстати, это обстоятельство объясняет, почему идею внутренней геометрии

506

легче всего иллюстрировать именно на примере двумерного мира. Причина состоит в том, что в качестве внешней в этом случае можно взять «обычную» (евклидову) геометрию трехмерного пространства, которую мы привычно считаем геометрией нашего повседневного мира. Кроме того, если иметь в виду *метрические* свойства, то случай минимальной размерности, когда такие свойства могут оказаться внутренними, т.е. не зависящими от внешнего пространства и способа вложения внутреннего пространства во внешнее — это как раз случай, когда внутреннее пространство является поверхностью: все линии в метрическом смысле эквивалентны прямой линии и «форма» линии полностью определяется способом ее вложения во внешнее пространство[9]. Однако если иметь в виду более простые и более фундаментальные *топологические* свойства, то это не так: окружность или любая линия с самопересечениями топологически не эквивалентна прямой. (Топологические свойства более фундаментальны, чем метрические в том смысле, что всякая метрика индуцирует топологию, но не всякая топология метризуема.) Исторически же идея внутренней геометрии была предложена Гауссом именно в связи с метрическими свойствами поверхностей и развита Риманом[10] в связи с метрическими свойствами пространств произвольного количества измерений. Переход от метрических свойств к топологическим заставляет также отказаться от идеи Римана о том, что внутренняя геометрия является сугубо локальной, т.е. действующей только в некоторой бесконечно малой окрестности. Топологические свойства пространства являются одновременно глобальными и, как мы видели, внутренними. Каким образом внутренний подход связан с локальностью, мы подробнее проанализируем в следующих пунктах.

2) Различие между внешней и внутренней точкой зрения состоит не только в том, что внешний наблюдатель наблюдает извне, а внутренний — изнутри. Существенный момент состоит и в том, что внешний наблюдатель неподвижен, а внутренний *движется.* Как мы видели из приведенных примеров, узнать что-то о своем мире внутренний наблюдатель может только путешествуя, а не просто созерцая свой мир изнутри. Внешнему же наблюдателю достаточно чистого созерцания. Хотя мы на самом деле не можем посмотреть на шар одновременно со всех сторон и увидеть всю поверхность шара сразу, обычная стереометрия абстрагируется от этого обстоятельства: считают, что шар вместе со своей поверхностью целиком *дан* в пространстве. Заметим также, что внутренний наблюдатель обязательно должен обладать *памятью* — в противном случае он ничего не сможет извлечь из своих путешествий, поскольку у него не останется от них никаких воспоминаний. На

507

самом деле память необходима внутреннему наблюдателю и во время путешествия, иначе он не сможет вспомнить, проходил ли он через данную местность раньше или же оказался там впервые; натолкнувшись на собственные следы, он не сможет вспомнить, что это именно его следы, и т.д. Внешнему же наблюдателю память, вообще говоря, не нужна, поскольку в единственный момент времени он видит сразу все, что вообще способен увидеть. Говоря другими словами, время, движение и память существенным образом участвуют во внутренних наблюдениях и не участвуют н наблюдениях внешних[11].

Кроме того, в приведенных примерах существенно, чтобы наблюдатель был *пробным* и его наблюдения воспроизводились при некоторой вариации начальных условий. Так, мы можем утверждать, что, совершив кругосветное путешествие, Магеллан доказал шарообразность земли, только имея в виду, что *каждый* человек в принципе может совершить кругосветное путешествие, причем не обязательно повторяя путь Магеллана в деталях. Если бы кругосветное путешествие Магеллана оставалось уникальным событием, сам его факт еще ничего не говорил бы о топологии земной поверхности.

Идея движения в римановой геометрии может быть реализована двояко. Во-первых, с помощью «метода подвижного репера» В этом случае «точка зрения» означает математически некоторую (локальную) систему координат, которая предполагается движущейся, т.е. сохраняющей свою идентичность в различных положениях в пространстве. Задача состоит в том, чтобы описать это движение, не прибегая к фиксированной внешней системе координат. Покажем, как это делается в простейшем случае кривой на поверхности. Представим себе, что кривая описывается движущейся точкой $\mathbf{O}$. Пусть $\boldsymbol{l}$ — длина дуги кривой, пройденной точкой на данный момент времени. Для удобства мы будем отсчитывать время по длине пройденного пути. Тогда *скорость* движении $\mathbf{O}$ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v(l)}$ будет по модулю равна 1 и направлена по касательной к траектории, а *ускорение* $\boldsymbol{k(l)} = \boldsymbol{dv/dl}$ будет всегда перпендикулярно к скорости. Модуль $|\boldsymbol{k}|$ называют *кривизной,* а обратную величину $\mathbf{R} = \mathbf{1/}\boldsymbol{k}$ — *радиусом кривизны* кривой в данной точке. Если теперь взять единичный вектор скорости $\boldsymbol{v(l)}$ и единичный перпендикуляр к нему $\boldsymbol{n}$ в качестве движущейся прямоугольной системы координат (подвижного репера), то будут верны *формулы Френе,* которые показывают как движется репер: $\boldsymbol{dv/dl}\mathbf{=}\boldsymbol{kn}$ и $\boldsymbol{dn/dl} \mathbf{=} \mathbf{-}\boldsymbol{kv}$. Поскольку модуль $\boldsymbol{v}$ не меняется, можно также записать $|\boldsymbol{d\varphi/dl}| \mathbf{=} \boldsymbol{k}$. т.е. кривизна — это скорость поворота репера (тогда как скорость его движения вдоль кривой постоянна и равна по модулю $|\,\boldsymbol{v}\,| = 1$). Заметим, что указанный метод позволяет судить не о внутренней
508
геометрии кривой, а о внутренней геометрии поверхности, на которой лежит кривая (поскольку понятия касательной и нормали к кривой имеют смысл только по отношению к объемлющему пространству). Пусть наша кривая — окружность. После того, как касательная, образующая одну из осей подвижного репера, совпадет с исходным положением, вектор нормали может тоже оказаться либо в исходном состоянии, либо направленным в противоположную сторону. Если поверхность — цилиндр, будет реализован первый случай, если поверхность — лист Мебиуса, то может быть реализован второй.

Альтернативный подход на самом деле идет несколько вразрез с историей о плоскатиках. Вместо того чтобы предполагать наблюдателя, движущегося в неподвижном объемлющем пространстве (которое ни в какой момент не видно все целиком), здесь предполагают множество неподвижных (относительно неподвижного пространства) наблюдателей и ставится вопрос о том, каким образом они могут «коммуницировать» по поводу наблюдаемого. Формально такой переход дается просто: никто не мешает в предыдущем примере говорить не об одном репере, движущемся вдоль кривой, а о множестве реперов, имеющих начала в разных точках кривой. В следующем пункте мы покажем, что принципиальным моментом является то, что эти моментальные наблюдатели не взаимозаменимы, поскольку каждый из них наблюдает только некоторую область пространства (обычно предполагаемую бесконечно малой) и ни один не наблюдает все пространство целиком.

Новая формулировка позволяет более естественно поставить вопрос об *объекте,* т.е. о том, что, собственно, наблюдается. Заметим, что в предыдущем примере этот вопрос напрямую не ставился. *Объективным* мы называем то, что в каком-то важном смысле не зависит от той особенной точки зрения, под которой данная вещь рассматривается. Объект — это объективная вещь. Объектом в нашем случае могла бы быть такая вещь B, которая одинаково (с точностью до некоторого фиксированного преобразования *П*) наблюдается всеми моментальными наблюдателями. Кроме того, нужно, очевидно, предположить, что преобразование *П* нс зависит от конкретного *В*, а годится по крайней мере для некоторого широкого класса объектов. (Традиционная точка зрения состоит в том, что такое *П* единственно и характеризует геометрию пространства, которая предполагается фиксированной. Если пространство предполагается евклидовым, то *П* — это движения, сохраняющие евклидову метрику.)

Поясним сказанное на примере. В качестве примера объекта возьмем письменный стол. С разных сторон он выглядит, конечно, по-разному. Однако изменения видимого образа стола в зави-
509
симости от позиции наблюдателя подчиняются законам перепективы, которые не зависят от этого конкретного стола: если вместо стола рассматривать стул, эти законы останутся теми же. На самом деле этот бытовой пример сложнее, чем та ситуация, о которой мы говорим, поскольку стол ни из какой позиции не бываем виден весь целиком. Чтобы упростить этот пример, мы могли бы вместо стола взять нарисованный мелом на доске круг, которым можно видеть целиком (хотя физиология зрительного восприятия говорит, что одновременность восприятия и в этом случае является, так сказать, вторичной, тогда как в действительности наши глаза «сканируют» всякий объект по частям и только затем из полученной информации в нашем мозгу конструируется некая целая картина). Интересно, что не существует примера объекта, который в действительности был бы виден сразу всем возможным наблюдателям: любой объект виден невооруженным глазом только с близкого расстояния, и, хотя возможности зрения можно увеличить за счет технических средств, понятия объективности и объекта, очевидно, не предполагают, что все люди на земле (а именно их, по всей видимости, и нужно считать потенциальными наблюдателями) одновременно сосредоточивают свое внимание на одной и той же вещи. Эти понятия предполагают другое: не то, что *все* люди действительно одновременно видят то же самое (с точностью до некоторого преобразования, например задаваемого законами перспективы), а то, что *любые* два человека *могут* увидеть то же самое, *если правильно* посмотрят, в простейшем случае — если займут одну и ту же позицию. Таким образом, пространственно-временная модальность заменяется в идее научной объективности на модальность *возможности*. Это поднимает целый комплекс проблем, который здесь рассматривать неуместно. Ограничимся пока тем, что объективное положение вещей не зависит от частной перспективы, в которой рассматривается ситуация. В более формальном смысле такая независимость означает инвариантность относительно преобразований координат. Впрочем, такая формализация сразу требует уточнений — какие именно системы координат считать допустимыми и инвариантность относительно какой группы преобразований следует иметь в виду. Важная часть истории физики состоит как раз в попытках давать на эти вопроси различные ответы: например, ньютоновская механика выделяет в качестве класса допустимых систем отсчета инерииальные системы и в качестве допустимой группы преобразований берет галилееву группу; в специальной теории относительности галилеева группа заменяется на лоренцеву; в общей теории относительности ситуация уже меняется более глубоким образом, о чем сейчас и пойдет речь.
510

Напомним, что при новом подходе, о котором мы сейчас говорим, наблюдатели считаются неподвижными. Это значит, что объект — в том смысле, в котором мы говорили об объекте выше –должен быть по меньшей мере наблюдаемым для всех этих наблюдателей сразу (даже если отвлечься от важного вопроса о том, *каким именно образом* наблюдаемым). Однако поскольку моментальные наблюдатели остаются *внутренними* (и предполагаются неподвижными), ни один из них не видит весь мир целиком, и в общем случае мы не можем предполагать, что все они видят один и тот же объект (если считать, что объект может находиться в любой области пространства; предположение о том, что в пространстве имеется некоторая специальная область «объективности», которая видна сразу всем локальным наблюдателям, кажется не лишенным смысла, но совершенно противоречит существующим физическим теориям и плохо согласуется с существующей математикой). Следовательно, объект в указанном выше смысле – назовем его *глобальным* объектом – в рамках внутреннего подхода невозможен. Грубо говоря, это означает, что строго объективным может быть только Бог, который смотрит на наш мир «ниоткуда» (по выражению Томаса Нагеля[12]) и видит его во всех подробностях сразу и целиком. Однако понятия объективности и объекта могут быть сами локализованы. С этой целью требование инвариантности относительно локальной точки зрения (и с точностью до некоторой группы преобразований) применяются не ко всему миру целиком, а только к *соседним* точкам зрения. На самом деле эта идея отвечает обыденному опыту лучше, чем классическая идея глобальной объективности: речь идет о том, что два человека, стоящие рядом по одну или по разные стороны стола, видят в существенном смысле одно и то же (один и тот же объект, хотя, возможно, и с разных сторон) – без всяких предположений о том, в каком смысле эта ситуация могла бы быть отнесена к человечеству в целом (или даже к какой-то значительной его части, например, к взрослым, европейцам или мужчинам). Эту идею несложно переформулировать и на языке движущегося наблюдателя: речь идет о том, чтобы движущийся наблюдатель, обладающий только ограниченной и постоянно изменяющейся перспективой, мог бы все-таки по ходу своего движения наблюдать объекты. Объектом в этом случае мы будем называть такую вещь, которая остается в важном смысле одной и той же в глазах некоторого движущегося наблюдателя, который по ходу движения рассматривает ее с разных точек зрения. Если понятие глобального объекта предполагает, что такой движущийся наблюдатель видит одно и то же из *любого* положения и во всякий момент времени, то понятие *локального* объекта требует только того, чтобы объект оставался

511

сам собой, пока он остается в поле зрения движущегося наблюдателя. Важно, что понятие локального объекта в этом смысле *не* означает локального «согласия» некоторой группы наблюдателей, которая может быть противопоставлена другой группе, которая не согласна с первой. «Согласие» в данном случае возникает между соседними группами, однако оно не транзитивно: если *A* соседствует с *B*, а *B* — с *C*, то согласие *A* с *B* и *B* с *C* не влечет согласия *A с C*.

Математически и физически идея локального объекта реализуется с помощью понятия *тензора*. Тензор в самом общем смысле — это некоторый объект, для которого можно сформулировать определенные правила преобразования координат при переходе от одной локальной системы координат к другой, которые зависят от *типа* этого объекта и от данной пары системы координат, но не от данного конкретного объекта (впрочем, в противном случае было бы невозможно говорить о *правилах,* поскольку не может быть правила, которое действовало бы в единственной уникальной ситуации)[13]. Такое понятие тензора годится и для того, чтобы соответствовать глобальному объекту (хотя и в этом случае появляется неклассический момент, который состоит в том, что идентичность объектов может задаваться различным образом, поскольку тензоры могут быть различных типов), однако в дифференциальной геометрии (и в общей теории относительности) тензоры используются локально, а именно, всякий раз речь идет о переходе в новую систему координат, начало которой лежит в окрестности начала старой системы координат (в этом случае преобразования даже между криволинейными координатами можно считать линейными — с точностью до бесконечно малых второго порядка).

Поскольку понятие наблюдателя (тесно связанное с понятием субъекта, Я) является по меньшей мере неудобным для физики, а понятия объекта и объективности, наоборот, кажутся совершенно необходимыми для этой науки (в том смысле, что если физику не

указать на объект, который он должен изучить, или на возможность объективного положения вещей, которое он должен обнаружить, он вообще не будет знать, чем заниматься), не удивительно, что в физике возобладал именно этот второй подход, в рамках которых тензорам приписывают различные объективные физические положения дел (или положениям дел приписывают тензоры — это с какой стороны посмотреть). Однако необходимо подчеркнуть, что оба рассматриваемых подхода являются одинаково *внутренними* и отличаются от внешней точки зрения, в рамках которой неподвижным является (находящийся «нигде») наблюдатель, а объекты движутся. Представляя себе шар или тор, по которому ползают плоскатики, мы занимаем именно такую пози-
512
цию внешнего наблюдателя. Тензор всегда неподвижен, прикреплен к точке пространства. Хотя, когда говорят о тензорах, обычно не говорят о подвижных системах координат: речь идет опять об изменении точки зрения на объект (как перейти от одной точки зрения на объект к другой?), а не о том, что при фиксированной точке зрения положение объекта в поле зрения меняется.

3) И все же, что увидит внутренний наблюдатель, если остановится? Что он видит в каждый миг своего путешествия? Можем ли мы предположить, что в отличие от внешнего наблюдателя, который видит сразу *все* (имеется в виду — весь мир внутреннего наблюдателя, например, всю поверхность шара, на котором живут нлоскатики), внутренний наблюдатель не видит вообще *ничего*? Конечно, такое предположение абсурдно: в наших примерах путешествующий внутренний наблюдатель должен был видеть по крайней мере собственные следы. Отличие внутреннего наблюдателя от внешнего состоит в том, что он не видит весь мир *сразу* (кик и мы не видим сразу тот мир, в котором мы живем), однако он может увидеть любое место в мире, если окажется в этом месте. Вопрос состоит в том, насколько большим является «место», которое плоскатик может увидеть сразу целиком. Поскольку количественные соображения представляются в этом вопросе неуместными, кажется естественным предположить, что наблюдатель не имеет размеров вовсе, т.е. является точечным, и, соответственно, он может «наблюдать» только ту *точку* своего пространства, в которой непосредственно находится. Этого достаточно, чтобы наблюдатель смог обнаружить собственные следы: если он окажется в какой-то миг в некоторой точке, в которой он уже находился раньше, он сможет это зафиксировать. Такого наблюдателя можно назвать слепым, но не лишенным чувства осязания: он ничего не видит даже на коротком расстоянии, но ощущает, где находится в данный миг. Однако, как легко заметить, этого недостаточно, чтобы плоскатик мог путешествовать так, как об этом говорится в рассказе.

Чтобы понять, что мир устроен подобно поверхности шара, плоскатик должен был двигаться вся время *прямо*. В противном случае он мог бы натолкнуться на собственные следы и на листе бумаги, просто описав на поверхности петлю — и это еще ничего не говорило бы о мире. Даже не имея точного математического определения того, что означает «двигаться прямо» в случае движения на сфере, понятно, что для того чтобы сказать, свернул ли ты сторону или нет, необходимо иметь хотя бы минимальный обзор. Рассмотрим простейший случай движения по прямой на плоскости (листе бумаги). Приняв во внимание сколь угодно маленький отрезок прямой, можно приложить к этому отрезку ли-
513
нейку и продолжить его сколь угодно далеко. Но если принять во внимание только граничную точку этого отрезка, мы не получим никаких указаний на то, в каком именно направлении продолжать движение, чтобы двигаться в прежнем направлении. Обобщение понятия прямой на плоскости на случай произвольной гладкой поверхности называется *геодезической* — это линия кратчайшего расстояния между двумя точками. Чтобы использовать это определение, точки можно брать сколь угодно близкими, однако нельзя все же допустить, чтобы они совпали, т.е. нельзя вместо двух точек взять одну (ср.

предыдущий пример с прямой на плоскости). Итак, плоскатик может видеть только очень малую область своего мира, математически говоря — *сколь угодно малую* или *бесконечно малую* область (окрестность), однако эта окрестность не может все же выродиться в точку[14].

Понятие бесконечно малого составляет старую проблему математического анализа, которую, несмотря на хорошо разработанные теории классического (основанного на потенциальной трактовке бесконечного малого) и неклассического (основанного на актуальной трактовке бесконечно малого) анализа, вряд ли можно считать удовлетворительно решенной. В данном случае эта общая проблема имеет свою специфику. Во-первых, совсем не всегда имеет смысл предполагать, что обзор движущегося наблюдателя является «малым». Естественно предположить, что в некоторых положениях внутренний наблюдатель может иметь широкую перспективу и даже в состоянии видеть весь мир целиком (изнутри). Во-вторых, могут существовать особые точки (сингулярности), попадая в которые наблюдатель вовсе лишается перспективы (может быть, только такие области и следует называть в собственном смысле *точками).* На подобные предположения наталкивает не только обыденный опыт, но и геометрия многообразий (теория динамических систем, теория особенностей). Вопрос о точках представляется принципиальным: кажется, что приведенные выше замечания плохо согласуются с привычным взглядом, согласно которому всякое геометрическое пространство в некотором смысле состоит из точек (в сильном смысле, когда пространство рассматривается как *множество* точек, снабженное некоторой структурой, или же в более слабом смысле, восходящему к Аристотелю, когда подразумевают, что всякая область пространства *потенциально* содержит бесконечно много точек). Заметим, что вопрос о статусе *окрестности* точки является, по сути, топологическим, поскольку окрестность обычно определяется как некоторое открытое множество, а топология задается с помощью различения открытых и замкнутых множеств. Ниже мы подробнее обсудим этот вопрос в метафизической перспективе.

514

Мир и атом

Ограничиваясь пока по-прежнему геометрическими представлениями, поставим такие вопросы: (1) есть ли такая вещь (фигура, объект), на которую можно посмотреть *только* снаружи? (2) есть ли такая вещь, на которую можно посмотреть *только* изнутри? В геометрии известен только один род вещей, на которые можно посмотреть только снаружи (т.е. у которых нет «внутренности») — это *точки*. Предположение о том, что все геометрические объекты в некотором смысле состоят из точек, означает, что всякий геометрический объект может быть в конечном счете представлен внешним образом, тогда как любые внутренние перспективы этого объекта являются, вообще говоря, излишними. (Например, это означает, что сфера или тор могут быть полностью заданы во внешнем трехмерном пространстве, причем таким образом оказываются заданными и «внутренние» свойства этих поверхностей.) Поэтому предположение о том, что все геометрические объекты состоят из точек, можно назвать *гипотезой экстенсиональности.* Мы видим, что гипотеза о том, что все геометрические объекты состоят из точек, отвечает классическому экстенсиональному подходу, при котором геометрическое пространство всегда рассматривается как внешнее.

Метафизическим аналогом (или, скорее, обобщением) геометрического понятия точки является понятие *атома.* Поэтому атомистическую гипотезу, согласно которой все сущее состоит из неделимых частей, т.е. атомов, можно также считать метафизическим обобщением геометрической гипотезы экстенсиональности[15].

Теперь попытаемся ответить на второй вопрос. Очевидно, есть только один род вещей, на которые можно посмотреть *только* изнутри, т.е. вещей, не имеющих *внешности,* — это *миры.* Это можно использовать в качестве определения мира. Заметим, что такое определение мира не исключает множественности миров. Итак, мы видим, что понятия атома и мира оказываются двойственными (в том же смысле, в котором можно назвать двойственными понятия внешнего и внутреннего). Гипотезу о существовании мира (в определенном выше смысле — как вещи без внешности) можно, по двойственности, назвать гипотезой *интенсиональности*[16].

Можно попытаться представить себе чисто внутренний (интенсиональный) подход к геометрии, двойственный обычному внешнему. В такой геометрии принималась бы гипотеза о мире и отсутствовала бы гипотеза о точках; вместо точек рассматривались бы бесконечно делимые открытые области (но делимые не точками, а тоже областями). Интересно, что в общей теории относи-
515
тельности, по-видимому, принимаются обе гипотезы: предполагается существование мира, т.е. универсального пространственно-временного многообразия, допускающего исключительно внутреннюю перспективу, и предполагается, что мир состоит из атомарных событий, которые математически отождествляются с точками этого многообразия[17]. Ниже мы также приводим набросок интенсиональной теории множеств, двойственной стандартной экстенсиональной теории.

Атомистическая гипотеза и гипотеза о мире имеют важные эпистемологические следствия. Попытка строить геометрию и вслед за ней естественные науки чисто экстенсионально приводят к необходимости предварительного полного (вплоть до атомов) разложения (т.е. анализа) всякого изучаемого объекта. В естественных науках это требование может быть выполнено лишь условно, если договориться о том, что именно в данном случае считать «атомом», т.е. о том, на каком уровне прекращать дальнейший анализ. В реальной ситуации такого рода ограничение всегда накладывается текущим состоянием фундаментальных исследований. На сегодняшний день первоэлементами сущего нужно, по-видимому, считать кварки, однако вполне может случиться, что у кварков будет впоследствии обнаружена внутренняя структура, как это уже в свое время случилось с химическими молекулами, физическими «атомами» и «элементарными частицами». Такое ограничение пределов анализа текущим состоянием знания можно было бы считать естественным, однако с ним связаны две серьезные методологические трудности.

Во-первых, во многих случаях (и даже в большинстве случаев) такое естественное ограничение пределов анализа оказывается совершенно недостаточным. Мы не беремся здесь судить о том, в какой степени анализ элементарных частиц в терминах кварков можно считать на сегодняшний день успешно реализованным, однако совершенно очевидно, что современная наука не позволяет описывать в терминах кварков все природные явления. В этой связи особенно показателен пример биологии: несмотря на все успехи биохимии, попытки объяснить биологические явления в терминах химических реакций (которые, в свою очередь, сводятся к взаимодействию физических атомов, которые можно надеяться свести к взаимодействию кварков) приводят к тому, что исследователи просто теряются перед совершенно немыслимой сложностью биологических систем и вынуждены апеллировать к Провидению, чтобы объяснить, как все эти атомы и молекулы оказываются в нужное время в нужном месте, или же откладывать серьезные занятия биологией до тех пор, когда наука, может быть, научится справляться с этим,
516

Подчеркнем, что экстенсиональный подход требует окончательного анализа уже в качестве *предварительного* условия построения теории: следуя этому подходу, сначала нужно выяснить, как из кварков образуются элементарные частицы и атомы (атомная физика), потом следует переходить к изучению относительно простых структур, состоящих из атомов (физика твердого тела, неорганическая химия), и только потом переходить к изучению все более сложных структур (органическая химия, биохимия, цитология, биология высших организмов). Если бы естествознание строго следовало этой программе, биология находилась бы еще в зачаточном состоянии или же не существовала вовсе! И хотя биологи вопреки требованиям экстенсионалистской методологии не переквалифицируются в физиков, а продолжают развивать свою науку, отсутствие ясно сформулированной методологической альтернативы делает статус их науки достаточно сомнительным: с последовательно экстенсионалистской точки зрения вся биология (включая современную биохимию) занимается исключительно тем, что описывает (и моделирует) явления, не добираясь до их причин и только в редких случаях обнаруживая за многообразием явлений относительно простые принципы и механизмы (как в случае открытия генетического механизма наследственности). Не умея объяснить биологические явления в терминах фундаментальных взаимодействий, биологи вынуждены принимать в качестве «атомов» гораздо более крупные и сложные элементы, чем это позволяет сделать фундаментальная физика, в частности живые клетки и целые организмы. С экстенсионалистской точки зрения, такое ограничение глубины анализа также значительно дискредитирует биологию.

Впрочем, можно предположить, что экстенсиональный подход позволяет оправдать биологию (и вообще все «нефундаментальные» области естествознания) в моральном смысле: дело не в том, что биологи что-то делают неправильно, а в том, что биологические явления намного сложнее физических, и хотя современное естествознание не способно трактовать природу единообразно, биологи делают важные шаги на пути к фундаментальной теории биологических явлений, которая могла бы стать частью единой теории природы как целого.

Здесь, однако, возникает вторая трудность экстенсионалистской методологии. Это трудность состоит в том, что переход на более глубокий уровень анализа вряд ли можно рассматривать в качестве *уточнения* старых моделей. Скорее, старые модели приходится вовсе отбрасывать и строить новые с нуля. Действительно, предположим, что мы объяснили некоторую модель явления *Я* с помощью модели M_1, которая предполагает, что элементы (услов-
: 517
ные «атомы») A_i взаимодействуют по законам $З_1$. Пусть теперь выясняется, что элементы A. состоят из более мелких элементов B_i , взаимодействующих по законам $З_2$. Теперь, согласно экстенсионалистской методологии, следует построить новую модель M_2 , объясняющую *Я* из B_i и $З_2$. Модель M_1 при этом должна быть редуцирована к M_2 и может быть использована при построении M_2 только для проверки ее правильности: B_j и $З_2$, — это, строго говоря, все, что необходимо для объяснения сущности *Я,* и M_2 могла бы быть построена, даже если бы M_1 никогда не существовала. Если это так, то это значит, что, например, биологи, объясняющие поведение биологических популяций в терминах особей, делают, по большому счету, ненужную работу. Конечно, можно пытаться найти некоторое моральное утешение в том обстоятельстве, что старые модели оказываются следствиями новых, однако сознание того, что работа, которая делается сейчас, в будущем будет представлять чисто исторический интерес, все же может привести в уныние. Справедливости ради надо добавить, что подобная программа была довольно успешно реализована в химии (построение квантовой химии).

Современная математика, основанная на теории множеств, также в целом следует экстенсионалистской методологии. Хотя стандартная аксиоматика теории множеств Цермело—Френкеля (ZF) предполагает существование только одного атома, а именно

пустого множества[18], так называемая «наивная» теория множеств, которая и является главным рабочим инструментом математиков, обычно предполагает некоторое множество атомов, т.е. исходных «элементов»[19]. Общий метод построения математических структур с помощью множеств состоит в том, что из элементов некоторого исходного множества, которое в соответствии с принципом экстенсиональности считается заданным именно своими элементами, как из кубиков строятся новые множества. При этом исходные элементы разрешается «брать много раз», т.е. рассматривать их во множестве экземпляров. Например, из исходного множества *{A, B, C}* (состоящего из элементов *A, B, C*) можно выделить подмножества *{A, B}* и *{A, C}* и рассматривать эти подмножества одновременно. С помощью такого конструирования универсум рассмотрения значительно расширяется. Однако никаких операций, позволяющих наращивать сложность не за счет повтора и перегруппировки данных элементов, а за счет введения *внутренней* структуры элементов (что могло бы привести не к расширению. а к *углублению* универсума), в математике обычно не рассматривают[20]. При таком подходе понятие множества всех множеств, т.е. универсума, который уже не может быть расширен[21], оказывается камнем преткновения экстенсионалистской теории
518
множеств, приводя к знаменитым «парадоксам» («антиномиям»), причем не только в рамках наивной теории множеств (есть основания полагать, что именно проблема множества всех множеств довела Кантора до сумасшествия), но и в рамках формальной теории (парадокс Рассела, подорвавший логическую систему Фреге и также спровоцировавший глубокий творческий кризис у ее автора)[22]. Обычный метод борьбы с парадоксами, связанными с понятием множества всех множеств (в частности, применяемый в ZF), состоит в том, чтобы разрешить существование только «хороших» множеств, т.е. предписать такие процедуры построения множеств, которые исключали бы возможность построения множества всех множеств. Все это создает впечатление, что множество всех множеств является неким «запредельным» объектом, чреватым парадоксами и опасным для «нормального» мышления.

Однако эта опасность, как представляется, связана с определенными предпосылками, а именно с принципом экстенсиональности, который в наивной теории множеств принимается некритически. Трезвый метафизический анализ[23] показывает, что понятие множества всех множеств (или универсума, или мира) не более «запредельно», чем понятие атома. Представим (на наивном уровне) краткий набросок *интенсиональной* теории множеств, которая будет опираться не на интуицию атома (первичного элемента), а на интуицию *мира,*

Интенсиональные множества

Такая интенсиональная теория будет двойственной по отношению к обычной экстенсиональной теории. Как мы сейчас увидим, интуитивно она оказывается не менее (и не более) прозрачной, хотя и менее привычной, чем обычная теория.

Будем (по определению) называть *миром* множество, которое само не является элементом никакого другого множества. (Это определение двойственно определению атома как множества без элементов, т.е. такой вещи, которая может быть элементом множества, но сама не состоит из элементов.) Если считать «множество всех множеств» миром в смысле этого определения, то множество всех множеств не будет элементом самого себя, а значит, не будет служить «очевидным примером»[24] множества, содержащего самого себя в качестве элемента, на котором основан парадокс Рассела. Такое решение парадокса Рассела может показаться чем-то вроде разрубания гордиева узла. Однако, кажется, этот парадокс (как и парадокс Кантора) на самом деле построен на столкновении двух несовместимых идей: с одной стороны, идеи *всего* или *целого,* т.е. идеи

мира, а с другой стороны — идеи неограниченно-
519
го экстенсионального расширения универсума (за счет сополагания этого универсума и его частей). Выход состоит в том, чтобы принять только одну идею из двух. Принимая идею неограниченного расширения, мы должны отказаться от идеи мира, т.е. исключить множество всех множеств из рассмотрения, как это и делается в обычной теории множеств (в частности, в ZF). Принимая идею мира, мы должны будем отказаться от идеи неограниченного экстенсионального расширения, что мы сейчас и собираемся сделать. [Заметим, впрочем, что проблема усугубляется тем, что множества с самого начала расматриваются как актуально бесконечные, а понятие актуально бесконечного и состоит в том, что неограниченное экстенсионатьное расширение некоторой области (например, области выписанных натуральных чисел: 1, 2, 3...) рассматривается как завершенное. Если считать такое рассмотрение законным, то непонятно, почему его нельзя применить и к множествам в целом. Тем не менее аналогия между множеством всех множеств и, например, множеством всех натуральных чисел *N* только частичная. Ведь *N* — это не мир, поскольку кроме натуральных чисел в мире есть и другие вещи, другие множества. Когда же говорят о множестве всех множеств, то мыслят все-таки, скорее, именно мир, хотя и не отчетливо.]

Итак, попробуем исходить из понятия мира как первично данного. Так же как в экстенсиональном случае теория с многими атомами была интуитивно более ясной, чем одноатомная теория (как ZF), так и теперь нам будет проще сначала предположить много миров M_i (т.е. более одного). (Заметим, что миры M_i , по определению, не образуют *множества.* Это можно считать противоречащим интуиции и указывающим на трудность предлагаемого рассмотрения, однако ниже мы покажем, как можно обойтись одним миром — по аналогии или, точнее, по двойственности с одноатомной экстенсиональной теорией.) Теперь по двойственности с *принципом экстенсиональности*

$$\forall x\forall y(\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y) ,$$

согласно которому всякое множество однозначно определяется своими элементами, введем *принцип интенсиональности*

$$\forall x\forall y(\forall z(x\in z\leftrightarrow y\in z)\rightarrow x=y) ,$$

согласно которому всякий элемент однозначно определяется теми множествами, которым этот элемент принадлежит. (Как и в ZF, мы формально не различаем множества и элементы, т.е. имеем в виду, что элемент может быть, вообще говоря, множеством, и наоборот. Тем не менее, имея $a \in b$ мы, как обычно, будем называть *a* «элементом множества *b*». Кроме того, для удобства дальнейших
520
формулировок мы введем еще один подобный вспомогательный термин: имея $a \in b$, мы будем называть *b* «ареалом *a*».) Введенный принцип интенсиональности можно интерпретировать в духе закона Лейбница о тождестве неразличимых, понимая принадлежность множеству как обладание *свойством.* Однако нужно иметь в виду, что при этом, во-первых, мы сразу должны вводить свойства свойств и т.д., а во-вторых, мы не должны предполагать никаких субстанций, т.е. вещей «нулевого уровня», которые обладают всеми этими свойствами (ср. идею Рассела о вещах как «пучках свойств»).

Далее, по двойственности с *аксиомой пары* ZF,

$$\forall a\forall b(a\neq b\rightarrow\exists p\forall x(x\in p\leftrightarrow(x=a\vee x=\mathrm{b}))),$$

которая гарантирует существование множества p = (*a*, *b)* для любых двух данных различных элементов (множеств) *a* и *b* , потребуем, чтобы любые два различные множества *a, b* (в том числе — любые два мира) «пересекались», т.е. чтобы существовал элемент *p = (a, b)* принадлежащий одновременно *a* и *b* (и только им):

$$\forall a\forall b(a\neq b\rightarrow\exists p\forall x(p\in x\leftrightarrow(x=a\vee x=\mathrm{b}))).$$

(Эту аксиому можно назвать *аксиомой связи.)*

Взяв теперь пару исходных миров M_1 , M_2 , мы построим новое множество (элемент) (M_1 , M_2), затем эту операцию можно повторять, строя другие множества, имеющие пару ареалов. Чтобы теперь получить элементы (множества) общего вида, т.е. элементы, принадлежащие одновременно *n* множествам $M_1, M_2, ..., M_n$, по двойственности с *аксиомой объединения* ZF

$$\forall a(\exists b(b\in a)\to\exists y\forall x(x\in y\leftrightarrow\exists z(x\in z\,\&\,z\in a))),$$

которая для каждого неатомарного множества *a* гарантирует существование множества *y*, состоящего из элементов элементов множества *a* , нам понадобится соответствующая *аксиома пересечения:*

$$\forall a(\exists b(a\in b)\to\exists y\forall x(y\in x\leftrightarrow\exists z(z\in x\,\&\,a\in z))),$$

которая для каждого немирового множества *a* гарантирует существование элемента *y*, принадлежащего всем ареалам ареалов множества *a* (и только им)^{25}.

Поскольку в наши цели сейчас не входит формальное построение интенсиональной теории множеств, мы не будем пытаться выписать все аксиомы. Мы также оставляем для будущего исследования вопрос о том, как предлагаемые здесь идеи соотносятся с существующими разработками. Наша основная цель сейчас — сделать интенсиональный подход интуитивно ясным. Поэтому, завершая этот набросок, мы ограничимся только демонстрацией вари-

521

анта интенсиональной теории множеств в предположении о единственности мира,

Мы будем снова исходить из двойственности с экстенсиональной теорией ZF. Как мы уже сказали, эта теория предполагает существование единственного атома, а именно — пустого множества (точнее, существование и единственность этого атома являются непосредственным следствием аксиом). Напомним, как с помощью единственного атома *A* можно строить новые множества. Простейший способ это сделать был предложен Цермело. Построим множество *{A},* единственным элементом которого является *A*. Множество *{A}* уже не является атомом, поскольку оно содержит элемент, а именно *A*. Теперь эту процедуру можно повторять, строя множества *{{A}}, {{{A}}}* и т.д. Возможность этой конструкции в ZF обеспечивается *аксиомой степени:*

$$\forall a\exists y\forall x(x\in y\leftrightarrow x\subseteq a),$$

которая для каждого множества *a* гарантирует существование множества его подмножеств (его множества-степени) *y* . Поскольку пустое множество *A* является единственным подмножеством самого себя, его множество-степень есть *{A},* и т.д. Пользуясь аксиомой пары и объединения, теперь можно строить множества вроде {*A*, *{A}*, *{A*, *{A}}}* и т.д.

Пусть теперь нам дан единственный мир *M*. Двойственным образом рассмотрим элемент мира *M*, который для единообразия мы также обозначим *{M}*. В соответствии с принципом интенсиональности этот элемент единственен. Однако {*M*} это уже не мир, поскольку *{M}* $\in M$. Теперь эту конструкцию можно повторять, строя элементы {{*M*}}, {{{*M*}}} и т.д. Чтобы обеспечить успех, нам нужна аксиома, двойственная аксиоме степени. Чтобы ее сформулировать, нам нужно сначала определить понятие, двойственное понятию подмножества. Если

$$\forall x(y\in x\to z\in x),$$

т.е. если всякий ареал элемента *y* является также ареалом элемента *z*, то будем называть *y* *подэлементом* элемента *z* . Из этого определения непосредственно следует, что каждый элемент является подэдементом самого себя. Обозначая «*y* есть подэлемент *z*» по-прежнему как $y\subseteq z$, мы можем теперь сформулировать аксиому, двойственную аксиоме степени экстенсиональной теории:

$$\forall a\exists y\forall x(y\in x\leftrightarrow a\subseteq x).$$

Согласно этой последней аксиоме, всякий подэлемент *a* (всякого элемента *x)* в свою очередь содержит хотя бы один элемент (который можно по двойственности назвать

корнем элемента *a*),
522
т.е. не является атомом[26]. Поскольку мир *M* является подэлементом себя, он действительно содержит элемент (корень), который мы выше обозначили *{M}*. Аксиомы связи и пересечения позволяют строить дальнейшие элементы вроде {*M*, {*M*}, *{M, {M}}}*.

Конечно, такой способ усложнения внутренней структуры структуры мира не кажется совершенно интуитивно прозрачным, но все же он представляется более естественным, чем попытка построить мир с помощью одного пустого множества, как это делается в экстенсиональной ZF[37].

Догма экстенсионализма

Возвращаясь к методологическим трудностям, связанным с экстенсионалистской установкой в естествознании, приведем слова Рене Тома (который имеет в виду прежде всего биологию): *следует отбросить как иллюзорную ту примитивную и людоедскую концепцию знания, согласно которой, чтобы познать какую-то вещь, ее следует предварительно разобрать на части — как это делает ребенок, который ломает часы и вынимает из них шестеренки, чтобы понять, как они работают*[28].

Мы бы не стали, однако, заходить так далеко и утверждать, что *интенсионалистская* методология, даже если она была бы достаточно хорошо разработана, имела бы преимущества перед существующей экстенсионалистской методологией. Скорее, предметом нашего беспокойства должно служить то, что экстенсионалистская установка в современном естествознании и математике принимается в значительной степени некритически, а альтернатива ей остается неясной. По-видимому, причина этого лежит все-таки в онтологии. Почему-то мы думаем, что, например, только посмотрев на Землю извне, из космоса, можно увидеть, «как она выглядит на самом деле», а именно, что она — шар. Почему не считать, что, путешествуя по поверхности Земли, т.е. изучая Землю, так сказать, изнутри, мы составляем о ней по крайней мере такое же адекватное впечатление? Житель Трехмерия оказывается по сравнению с плоскатиком высшим существом только при том условии, что пространство состоит из точек и все, что плоскатик пытается познать изнутри, в конечном счете может быть познано только снаружи. Но разве у нас есть физические или даже просто интуитивные основания считать, что пространство состоит из неделимых частиц? Разве дело не обстоит, скорее, так, что мы просто не знаем, как обойтись без этого предположения? В теории относительности представление об атомарности пространства-времени приводит к тому, что пространство-время рассматрива-
523
ется как множество атомарных *событий.* Представление о событиях, которые не имеют временной протяженности и поэтому не могут быть *изменениями* (ведь всякое изменение предполагает по крайней мере два состояния, исходное и измененное) — кажется совершенно противоречащим интуиции (как, впрочем, и представление о частице, которую нельзя разделить, причем не по физическим, а по метафизическим соображениям). Разве дело не обстоит так, что теория относительности принимает такую парадоксальную онтологию просто под влиянием традиционной геометрии, которая не умеет обходиться без точек?

Пытаясь исторически ответить на вопрос, почему метафизика и эпистемология столь определенно встали на сторону экстенсиональности и столь последовательно игнорировали интенсиональность, можно, наверное, указать на влияние платонизма. Речь идет о предпочтении неподвижной точки зрения, способной охватить предмет сразу и одновременно, подвижной точке зрения, с которой предмет рассматривается постепенно и по частям. В крайнем случае, платонизм готов допустить движение предметов, но не

движение точки зрения: пусть лучше движутся другие вещи, но мы остаемся на месте. В этом смысле между Платоном, с одной стороны, и Расселом и Куайном, с другой («логический атомизм» Рассела[29] и «бегство от интенсионала» Куайна[30]), как кажется, можно провести прямую связь. Можно также вспомнить о том, какое принципиальное эпистемологическое значение придавал пространственному протяжению Декарт. Впрочем, наше упражнение с интенсиональной теорией множеств показывает, что все-таки дело здесь по крайней мере не только в исторических предрассудках. Нам обязательно нужно с чего-то начинать рассуждать — если не с атомов, то с мира, если не с ничего (пустого множества), то со всего сразу (универсума). Пытаясь выше представить набросок интенсиональной теории множеств, мы связывали себя идеей двойственности по отношению к экстенсиональной ZF. Разумеется, это было сделано только для упрощения задачи. Можно попытаться построить систему, которая предполагала бы мир или миры наряду с атомами (как неявно делает общая теория относительности), и экстенсиональные операции вроде построения множества—степени наряду с интенсиональными операциями вроде введенного выше нахождения корня множества. Выяснить, насколько интенсиональный подход сочетается с экстенсиональным — интересная и важная логическая проблема. Однако из общих эпистемологических соображений можно заранее сказать, что наиболее соответствующей задачам эмпирических наук была бы система, которая позволяла бы начинать рассуждать, так сказать, с середины и обходилась бы как без предположения о первичных первоэле-
524
ментах, т.е. без предположения об атомах, так и без предположения об окончательном целом, т.е. без предположения о мире[31]. Отказ от атомов и мира не означал бы отказа от экстенсиональности и интенсиональности как таковых, а означал бы только отказ от их абсолютизации. Выбрав некоторые исходные элементы, определяемые особенностями данной задачи (например, живые клетки или организмы в биологии, молекулы в химии и т.д.), можно было бы затем применять к ним как экстенсиональные процедуры (т.е., например, думать, как из клеток можно построить организм), так и интенсионштьные процедуры (например, описывать внутреннюю структуру организма в терминах функций его клеток). При этом важно, чтобы искомая система позволяла «сдвигать» исходный элементарный уровень, обеспечивая при этом совместимость соответствующих моделей. Если мы, например, будем считать исходными элементами в одной задаче клетки, а в другой — организмы, то экстенсиональная модель, объясняющая, как из клеток строятся организмы, должна быть совместима с интенсионштъными моделями клеток, объясняющими, какие функции они выполняют в организмах. Пусть теперь мы хотим построить модель какого-то органа, например сердца. Есть две возможности: либо (1) приняв за исходные элементы клетки, построить экстенсиональную модель сердца {т.е. понять, как из клеток можно собрать сердце), либо (2) приняв за исходный элемент организм, построить интенсиональную модель сердца (показывающую, какую функцию сердце выполняет в организме). Можно предположить, что всякая вещь допускает такое двойное описание: экстенсиональное в терминах элементов низшего уровня и интенсиональное в терминах элементов высшего уровня. При условии совместимости этих описаний можно было бы отказаться от поиска исходного (атомарного, элементарного) уровня описания, позволяющего описывать экстенсионально сразу всю природу. Такая методология позволила бы, в частности, придать биологии такой же эпистемологический статус, как и физике, и считать эти науки в одинаковой мере «фундаментальными» (и в одинаковой мере «феноменологическими»).

Такое двойное описание можно схематически представить следующим образом.

Малый круг обозначает условный атом, большой круг — условный мир, неправильная фигура между кругами — исследуемый (описываемый) объект. Экстенсиональное (внешнее) описание строится с помощью следующих двух шагов.

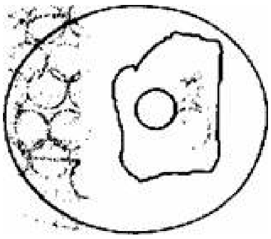
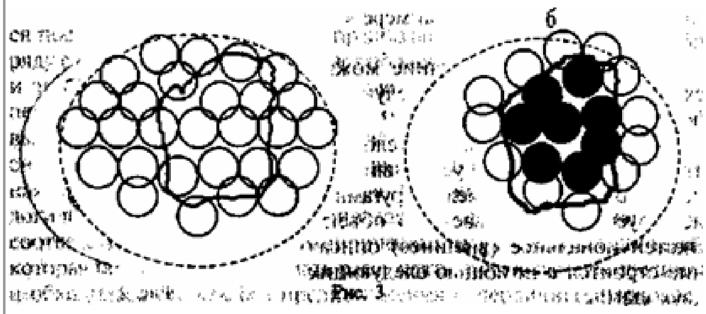


Рис. 2

(i) Атом реплицируется, т.е. воспроизводится во множестве экземпляров, так что весь мир вместе со всем своим возможным содержимым оказывается построенным из атомов (из различных экземпляров одного и того же атома). Говоря более вольно: атом «растягивается», заполняя своими репликами весь внешний мир. Исследуемый объект при этом также оказывается построенным *как возможный.* Лучше сказать: таким образом задается *возможность* исследуемого объекта. Заметим, что понятие мира оказывается при таком подходе, так сказать, плохо определенным и, может быть, даже излишним. Важно, чтобы построенное таким образом пространство было бесконечным *(бесконечно большим)* и наверняка вмещало исследуемый объект, и не важно, чтобы оно было миром. Если построенное таким образом пространство впоследствии окажется подпространством другого пространства, скажем, пространства более высокой размерности, в этом не будет ничего страшного. Понятие атома, наоборот, оказывается в рамках экстенсионального описания принципиальным, поскольку это то, с чего мы начинаем все рассуждение. Действительно, при построении геометрии обычным (внешним) способом принципиальным яатяется понятие точки, а не мира.

(ii) Исследуемый объект *актуализируется* посредством выделения составляющих его атомов. Изображая геометрическую фигуру на бумаге, мы предполагаем, что отмечаем карандашом точки, которые уже в каком-то смысле существовали раньше (как возможные). При рассмотрении изучаемого объекта нам, как правило, уже не нужно рассматривать все пространство целиком, нам достаточно небольшой области, включающей изучаемый объект. Если чертеж помещается на листе бумаге, границы этого листа не имеют для нас значения. Говоря вольно, на этом втором шаге внешний мир обратно «стягивается» до окрестности исследуемого объекта, (рис. 3 *а, б}*. На этих рисунках некоторые атомы пересекают «границу мира», поскольку сконструированное на первом шаге пространство не является миром в строгом смысле.

а



Чтобы теперь понять, как устроено интенсиональное (внутреннее) описание, нам нужно вспомнить историю про плоскатиков. Если правильны наши предыдущие рассуждения, то для такого описания нам нужно на самом деле снова предположить внутренний атом и внешний мир, хотя бы условно (а недостаточно ограничиться только «миром» плоскатиков, т.е., например, сферой, на которой они живут). Мы будем, как всегда, опираться на двойственность внешнего и внутреннего. В данном случае это будет означать, что процедуру построения описания нужно теперь начинать с мира и осуществлять ее в обратном напраалении. Итак, первый шаг построения интенсионального описания состоит в том, что: (i*) внешний мир «стягивается» в атом (в точку). Действительно, история про плоскатиков начинается с того, что мы фиксируем в мире свое неделимое Я, наблюдающее этот мир[32]. При более «серьезном» подходе к внутренней геометрии этому соответствует выбор (в исходном пространстве) «пробной точки», принадлежащей исследуемому объекту. Не зная еще своего мира (а только собираясь его исследовать), плоскатик вынужден заранее поместить себя в некоторый *гипотетический* мир, причем, если он расчитывает в дальнейшем что-то узнать о своем мире, этот гипотетический мир должен быть предположен именно внешним по отношению к той области, в которой живет плоскатик. (Другими словами, плоскатик должен предположить, что та область, в которой он живет, на самом деле не является миром.)[33] Здесь необходимо еще одно уточнение. Как мы говорили в начале работы, чтобы что-то узнать об изучаемом объекте, внутренний наблюдатель должен иметь хотя бы минимальный обзор. Говоря формально, с пробной точкой необходимо связать систему координат, которая действовала хотя бы локально, хотя бы в *бесконечно малой* окрестности пробной точки. Главное, о чем нужно позаботиться, это чтобы внутренний наблюдатель «поместился внутри» наблюдаемого им объекта. Понятие точки при интенсиональном подходе не имеет принципиального значения. Понятие же мира при таком подходе оказывается принципиальным, потому что это то, с чего мы в этом случае начинаем все рассуждение. В отличие от экстенсионального случая мы не конструируем мир и не можем при необходимости его «достроить», если он вдруг окажется слишком тесным для изучаемого объекта. Поэтому нам нужно предполагать мир заранее, сразу и целиком, т.е. предполагать мир в точном (хотя и условном) смысле слова.

527

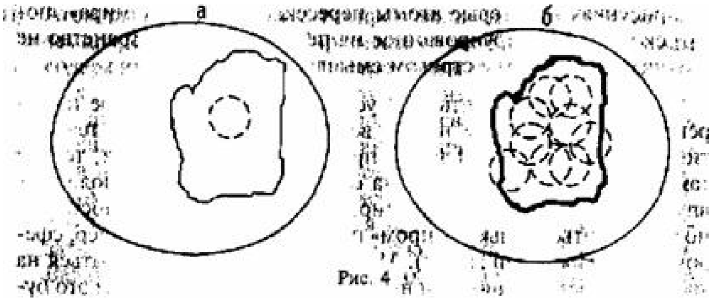


Рис. 4

Следующий шаг состоит в том, что (ii*) этот атом (локальная система координат) обратно «растягивается» до пределов изучаемого объекта (или заполняет его, по крайней мере частично). Такое «растягивание» может быть реализовано либо за счет движения атома, либо за счет его репликации, как и в экстенсиональном случае. Как это происходит, мы подробно рассмотрели в первом разделе данной работы (рис. 4 *а, б).*

На рис. 4 *б* внутренние наблюдатели имеют пересечения, потому что они не являются строго атомными, как и окрестности начал локальных систем координат.

Завершая это объяснение, напомним еще раз, что мы используем здесь понятия атома и мира в относительном, а не абсолютном смысле. (Мы нарочно изобразили «атомы» достаточно большими, чтобы в них, как в миры, можно было поместить атомы поменьше, а миры достаточно маленькими, чтобы их как атомы можно было поместить в миры побольше.) Кстати, отказ в естествознании от атомов и мира (по крайней мере понятых в абсолютном смысле), как представляется, вполне соответствует точке зрения Канта, которую он занимает в *«Критике чистого разума»* при анализе первых двух

антиномий (о бесконечности/конечности мира в пространстве и во времени и о бесконечной/конечной делимости вещей). Сначала он говорил, что именно утверждения *анти*тезисов этих антиномий (мир вечен и бесконечен и все вещи бесконечно делимы) соответствуют эмпирическому подходу (который, по словам Канта, «доставляет теоретическому интересу разума преимущества чрезвычайно привлекательные и далеко превосходящие то, что может обещать догматический проповедник идей разума», 496[34]), а затем уточнял, что вопрос о конечности или бесконечности мира вообще нерелевантен по отношению к естественным наукам, поскольку мир не может быть их предметом (529—530)[35]. Вообше, что касается утверждений *тезисов* всех четырех антиномий (соответствующих точке зрения, которую Кант
528
называет «догматической»), то Кант оправдывает их в практическом и моральном, но не в теоретическом смысле, причем этот аргумент в гораздо большей степени применим к тезисам третьей и четвертой антиномий, где речь идет о существовании свободы воли и Бога, чем к тезисам первых двух, практический и моральный смысл которых гораздо менее очевиден (зато теоретический смысл ясен непосредственно). В любом случае такого рода соображения могут иметь только косвенное отношение к физике и естествознанию в целом. Так что тот факт, что современное естествознание вслед за классической геометрией и теоретике-множественной математикой фактически пользуется атомистической гипотезой (мы имеем в виду не столько поиски неделимых физических частиц, которые вряд ли кто сегодня всерьез надеется найти, сколько использование в физике математических понятий точки и первичного элемента множества) и не знает, что делать с гипотезой о мире (как в случае с «множеством всех множеств»), нужно считать серьезным недостатком (догматическим предрассудком, как сказал бы Кант), который может и должен быть восполнен с помощью новых математических и логических средств, лучше соответствующих задачам и возможностям эмпирического естествознания[36].

Примечания

[1] *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М., 1971. С. 182.

" *Гельмгольц Г.Л.Ф.* О происхождении и значении геометрических аксиом. СПб., 1895.

[3] *Рейхенбах Г.* Философия пространства и времени. М., 1985.

[4] *Gauss C.F.* Disquisitiones generales circa superficies curvas. Leipzig, 1912.

[5] Рисунок взят из статьи А. Варзи «Бублик вокруг дырки» // Логос. 2001. № 4. С. 190.

[6] См. русский перевод: *Эбботт Эдвин.* Флатландия. СПб.. 2001. Наша история включает моменты, которых нет у Эбботта (в частности, путешествия по кривым поверхностям), но которые в основном также можно найти в литературе (см., например: *Бюргер Д.* Сферландия. Этот текст опубликован вместе с книгой Эбботта в упомянутом русском издании под одной обложкой).

[7] Главный герой книги Эбботта (цит. соч.) — плоскатик Квадрат, от лица которого ведется повествование, смог рассказать нам о своем плоском мире только потому, что он чудесным образом однажды посетил наше Трехмерие.

[8] В истории, рассказанной Эбботтом, жители Трехмерии являются по отношению к плоскатикам высшими существами: они видят и понимают все, что видят и понимают плоскатики, и, кроме того, ориентируются а третьем измерении, о котором плоскатики могут только догадываться. Таким образом, Эбботт предполагает превосходство внешней точки зрения над внутренней. Оспорить этот взгляд — основная цель данной работы.

[9] *Новиков С.П., Фоменко А. Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М., 1987.

[10] *Gauss C.F.* Op. cit. *Riemann.* (Jber die Hypothesen, welche der Geometric zu Gnmde liegen. Ges. Wiss. Goetingen. Abhandl./13 (J867). S. 133-152.
529

[11] Это замечание отвечает тому соображению Канта, что время является «формой внутреннего чувства».

[12] *Nagef Thomas.* The View from Nowhere. Oxford, 1986.

[13] *Карман Э.* Геометрия римановых пространств. М., 1936.

[14] Хотя выше мы назвали осязанием способность точечного наблюдателя идентифицировать ту точку, в

которой он в данный момент находится, точнее было бы называть осязанием именно такое «короткое зрение». Интересно, что в истории, рассказанной Эбботтом, *ощупывание* — это единственный универсальный метод, с помощью которого плоскатики могут узнавать (форму) друг друга. (Кроме этого, плоскатики у Эбботта могут узнавать друг друга по голосам и по видимой интенсивности свечения, но эти два последних метода требуют предположений, явно выходящих за рамки геометрии.).

[15] Метафизическое понятие атома (атом — неделимая частица) не нужно путать с тем, что называют атомами в современной физике. Современная физическая терминология объясняется чисто историческими причинами (и распространенным неуважением физиков к метафизике): после того, как выяснилось, что физические «атомы» делимы и имеют внутреннюю структуру, правильно было бы перестать называть эти объекты атомами. Однако, очевидно, большинство физиков не считало и не считает, что этот вопрос имеет какое-то значение. Так или иначе, мы используем понятие атома в его первоначальном смысле неделимой частицы. Кажется, что современная физика не дает никаких оснований считать, что атомы существуют. (Впрочем, решение этого вопроса зависит от интерпретации квантовой теории и ядерной физики, которую мы не можем обсуждать в этой работе.)

[16] Заметим, что Кант также рассматривает гипотезы о мире и об атомах в тесной связи друг с другом (первая и вторая антиномии чистого разума) (Критика чистого разума 454 ff).

[17] Впрочем, см. прим. 33.

[18] То есть множества, не содержащего элементов, которое, однако, оказывается «единственным первичным конституентом любого множества» *(Френкель А., Бар-Хшыед И.* Основания теории множеств, М., 1966. С. 60, 117; в дальнейшем мы будем ссылаться на этот труд как на ФБХ). Тот факт, что первичным элементом всякой вещи в рамках этой теории оказывается пустое множество, т.е. *ничто,* в онтологическом смысле кажется парадоксальным. Впрочем, тезис о том, что. что все сущее в каком-то смысле «состоит из ничего», из вакуума, кажется, не вполне чужд современным фундаментальным физическим представлениям (см.: *Розенталь И.Л., Архангельская И.В.* Вакуум как основная форма материи во Вселенной // Наука и технология в России. 2000. № 5-6 (42-43). С. 25-27.

[19] Об аксиоматических теориях множеств с многими атомами см.: *Анисов А.М.* Представление интенсиональных отношений в теории множеств с атомами // Тр. научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. М., 1997.

[20] Автору не знакомы такие примеры, и он будет признателен, если их сообщит более компетентный читатель. Однако даже если такие примеры существуют, можно наверняка утверждать, что их роль для математики в целом несоизмерима с ролью «экстенсиональных» конструкций, о которых говорилось выше в основном тексте.

[21] Если употреблять термин «универсум» в смысле «мир», то только множество всех множеств и можно назвать универсумом. ...

[22] Краткий обзор парадоксов теории множеств см. в ФБХ.

[23] Например, проделанный Кантом; см. прим. 16.

[24] ФБХ. С. 16.

530

[25] Подобная конструкция в логике была введена В.А. Смирновым, когда он построил семантику дтя исчисления событий, отождествляя события с множествами возможных миров (точнее, с парами множеств возможных миров, имея в виду, что данное событие происходит 6 мирах из первого множества и не происходит в мирах из второго; это последнее усложнение нужно В.А. Смирнову для того, чтобы допустить возможность неклассических отношений между логическим объемом и соответствующим антиобъемом). См.: *Смирнов В.А.* Комбинированные исчисления предложений и событий // Логико-философские труды В.А.Смирнова. М., 2001, С. 221. Отличие нашего подхода состоит, во-первых, в том, что миры у нас, по определению, не могут быть элементами множества, а во-вторых, в том, что элементы, соответствующие событиям у Смирнова, аналогичным образом определяются любыми множествами, а не обязательно мирами, и сами, в свою очередь, рассматриваются как множества (т.е. вся конструкция многократно итерируется),

[26] Очевидно, что эта «аксиома корня» несовместима с существованием атомов, так же как аксиома степени ZF несовместима с существованием миров. Если аксиому степени можно назвать «аксиомой неограниченного экстенсионального расширения», то аксиому корня можно назвать «аксиомой неограниченного интенсионального углубления»/

[27] См. прим. 23 и, впрочем, 35.

[28] *Thorn К.* Stabilite Structurelle et Morphogenese. N.Y., 1972. Ch. 8 (русский перевод: *Том Р.* Структурная устойчивость и морфогенез. М., 2002).

[29] *Рассел Б.* Философия логического атомизма. Томск, 1999.

[30] *Куаан У.* Слово и объект. М.. 2000.

[31] Ср. соображения Хакена о важности «мезоскопического» (т.е. промежуточного между макро- и

микроскопическим) уровня описания: *Хакен Г.* Синергетика. М., 1985.

[32] Заметим, что Кант, обсуждая понятие атома во второй антиномии «Критики чистого разума», в качестве важнейшего примера атома приводит душу (Я).

[33] Именно такой подход используется в общей теории относительности. Описывая пространство—время внутренним образом, приходится заранее предполагать некоторое гипотетическое пространство, внешнее по отношению к физическому пространству—времени и поэтому заведомо не имеющее физического смысла. Такое внешнее пространство нужно прежде всего для того, что-'бы задать исходное многообразие событий. Однако поскольку это внешнее пространство полностью гипотетично, онтологический статус этих событий оказывается проблематичным. Если идентифицировать события по времени и месту (т.е. по пространственно-временным координатам, что кажется совершенно естественным), то события исходного многообразия оказываются, вообще говоря, сомнительными «сущностями без идентичности» (против которых выступал Квайн). поскольку физические координаты могут быть только локальными.. Одним из подходов к решению этой проблемы является попытка рассматривать неидентифицируемые события как возможные, а идентифицируемые как действительные. Однако в каком смысле тут используются эти модальности, все равно остается не вполне ясным (см.: *Тъян Ю Цао*. Предпосылки создания непротиворечивой теории квантовой гравитации // 100 лет .квантам / Под ред. Е.А. Мамчур и др. М., 2002). В соответствии с нашими ., предыдущими рассуждениями, *миром* нужно считать именно такое гипотетическое пространство, а вовсе не физическое пространство—время. При этом его не следует считать экстенсионально определяемым множеством и, следовательно, беспокоиться о том, что он непонятно из чего состоит. Этот вывод может показаться неприемлемым, поскольку мир, таким образом, оказывается нефизическим, нереальным в физическом смысле, тогда как теория относи-
531
тельности претендует на то, что она описывает именно физический мир. Но, может быть, стоит все-таки согласиться с Кантом, что мир заведомо и не может быть физическим понятием? См. прим. 34.

[34] Пит. по: *Кант И.* Критика чистого разума. Пер. И.О. Лосского / Под ред. В.А.Жучкова. М.. 1998. С. 393.

[35] «На первый взгляд, кажется совершенно ясным, что если один утверждает: мир имеет начало, а другой утверждает: мир не имеет начала, но существует вечно, то одна из этих сторон должна быть правой. Но в таком случае, ввиду того, что аргументация с обеих сторон одинаково ясна, невозможно когда бы то ни было узнать, на чьей стороне правда... Для основательного завершения спора, удовлетворяющего обе стороны, остается лишь одно средство: окончательно убедить их, что... предметом их спора служит ничто (подчеркнуто мной. — *А.Р.),* и лишь известная трансцендентальная иллюзия нарисовала им действительность там, где ничего нет». Цит. соч. С. 412.

[36] Что касается точек, то эта проблема, похоже, уже осознана, и делаются многочисленные интересные попытки построения математических и логических конструкций без точек, хотя до их систематического применения в естествознании дело пока не доходит (см., например: *Johnstons P.* Stone Spaces. Oxford, 1985). Что же касается понятия мира, то с одной стороны, оно стало очень популярным в логике благодаря многомировым семантикам Крипке, но, с другой стороны, оно употребляется, скорее, в техническом и условном смысле, в смысле некоторой области значений, тогда как проблема мира в собственном смысле (как исходного понятия интенсионального описания) остается, как представляется, без должного внимания. Даже наш естественный язык подвержен догме экстенсионализма, заставляя нас всегда говорить об «исходной точке» или «исходном пункте» и затрудняя, таким образом, понимание того,. как можно исходить из мира!

КОММЕНТАРИИ

А.А. Веретенников

То, на что мы указываем... может представлять собой разные события, но тот же самый объект *(Гудмен Н.* Способы создания миров. М. 2001. С. 125).

В последней части статьи автор выводит некоторые «метафизические и эпистемологические следствия» из описанного им проекта «внутренней геометрии». Эти критические замечания будут касаться только этих выводов, безотносительно самого проекта. А.В. Родин различает два уровня описания: экстенсиональный и интенсиональный («внешний» и «внутренний»). Проблематика соотношения теории и опыта переформулируется автором в терминах внешнего/внутреннего. Каким образом возможно независимое от экстенсионального внутреннее описание, как возможно «точно обозначить» различие между одним и другим видом описания?

Моя точка зрения состоит в том, что невозможно никакое «внутреннее» описание,

отличное от внешнего, т.е. понятие *опи-*
532
сания (определения) подразумевает понятие экстенсиональности (но не наоборот). В частности, мы не можем экстенсионально определить точку, мы можем лишь *эксплицировать* это понятие.

Сам автор называет гипотезой *интенсиональъности* гипотезу о существовании мира как веши, «не имеющей *внешности»,* Я хочу заметить, что выделение *мира* или миров из прочих классов объектов, доступных экспликации, уже есть его *экстенсиональное* определение. Интенсиональной логика может быть тогда, когда переменные обозначают понятия, но не объекты или классы объектов. Мир здесь — это объект или понятие? Если переменная *мир* обозначает вещь, объект, тогда переменная *мир* есть переменная обычной экстенсиональной логики и той части семантики этой логики, которая поддается эксплицитному описанию, и, следовательно, место этой переменной в создаваемой нами онтологической структуре *мира* как понятия может быть точно указано.

Предположение о том, что мир не имеет *внешности* есть предположение, высказанное с точки зрения *плоскатика.* Предположение о множественности миров формулируется с точки зрения абсолютного субъекта познания, которому, по определению, доступен как экстенсиональный, так и интенсиональный уровень описания. На точку зрения этого субъекта претендует наука и, в частности, логика, оперирующая с *мирами* как с логическими переменными, а, следовательно, *внешним* образом.

Предлагаемый А.В. Родиным «внутренний» подход к геометрии не является чем-то радикально новым. Отказ же от гипотезы о мире и от гипотезы об атомах приведет к потере наукой (в частности, физикой) своего фундаментального статуса по отношению к обыденному знанию (статуса «абсолютного субъекта* по отношению к *плоскатику].*

Предлагаемый автором статьи подход действительно позволяет «релятивизировать» различие между опытом и теорией и, на мой взгляд, в случае его реализации повлечет ряд кризисов в области теоретического знания.

Г. Б. Гутнер

В статье А.В. Родина содержатся два весьма многообещающих проекта философских концепций. Один из них имеет, скорее, эпистемологический характер и связан с различением внешнего и внутреннего подходов. Второй — развивающий «интенсиональную теорию множеств» — в большей мере касается онтологии. Статья, однако, вызывает ряд вопросов, связанных прежде всего с самим ее названием. Действительно ли интенсиональная онтология вписывается в идею внутренней геометрии? Можно ли считать,
533
что эта онтология однозначно требует «внутренней» эпистемологии? Разъяснения, данные автором, кажутся мне по меньшей мере недоведенными до конца. Несмотря на кажущуюся интуитивную ясность (отказ от атомарности дает возможность исследовать любой объект изнутри), можно, мне кажется, привести ряд рассуждений, показывающих, что связь двух проектов весьма неоднозначна. Наиболее существенным здесь представляется тот факт, что внутренняя геометрия тесно связана именно с экстенсиональным, а не интенсиональным представлением. В самом деле, внутреннее исследование геометрической структуры объекта производится наблюдателем, помещенным в определенном *локусе* внутри объекта. По поводу этого локуса можно утверждать следующее.

1) Он элементарен, т.е. не имеет никакой внутренней структуры, поскольку наблюдатель изучает окрестность, а не свой внутренний мир.

2) Он произволен в том смысле, что наблюдателю доступно любое место внутри объекта. Мы не можем предполагать существование «тайных мест», не являющихся потенциальными наблюдательными пунктами.

Таким образом, весь объект представляется системой элементарных мест, составляющих, пользуясь аристотелевским термином, его *материю*. Конечно, мы не должны впадать в «атомистический редукционизм» (материализм) и утверждать, что структура объекта определена совокупностью локусов и их собственными свойствами. Однако «атомистическая гипотеза» представляется необходимым условием описываемого подхода. Более того, интенсиональная онтология предполагает существующим целый объект, наделенный завершенной структурой, что никак не вяжется с внутренней позицией наблюдателя.

Л.О. Шашкин

В статье А. В. Родина «Идея внутренней геометрии» рассматривается соотношение (и взаимоотношение) геометрии, физики и представлений о пространстве. Интересно было бы разобраться, что означает различие «внешнего» и «внутреннего» подходов для математики в целом. Автор замечает, что подход к обоснованию математики, связанный с теорией множеств, яатяется «разновидностью гипотезы о точках», т.е. соответствует внешнему взгляду на объект исследования. Действительно, в этом случае подразумевается, что наблюдатель способен «увидеть» (представить) любое множество, в том числе актуально бесконечное, целиком. Например, аксиома объемности утверждает, что два множества совпадают, если они состоят из одних и тех же элементов. При этом считается, что заданы *все* элементы множества.

534

В этом смысле предложенная интенсиональная теория множеств, являясь двойственной по отношению к обычной (экстенсиональной) теории множеств, не отличается от нее принципиальным образом. Обе теории используют одни и те же подходы, поскольку меняются лишь «направление взгляда» и терминология, но не «способ наблюдения». Объекты задаются целиком и описываются тем же языком логики предикатов. Замена объединения множеств пересечением (или конъюнкцией) свойств сохраняет методы теории множеств, только в первом случае рассматриваются совокупности элементов, а во втором — совокупности «ареалов*. Какая математика могла бы соответствовать опыту существ, изучающих пространственные объекты исключительно локальными, внутренними средствами? Для получения представления о глобальной структуре пространства в этом случае требуется применение разнообразных алгоритмов. Возможность работать в каждый момент только с конечной частью объекта исследования и, следовательно, получение информации в виде (потенциально бесконечной) последовательности «образов» должны, вероятно, привести к развитию некоторой «конструктивной науки».

Второй вопрос касается «взаимоотношений» внутренней и внешней точек зрения. Внешняя геометрия позволяет рассматривать вложения изучаемого пространства в пространства большей размерности, помогая внутренней геометрии ставить задачи определения кривизны, отыскания границы пространства и т.п. «Внутренний» исследователь ограничен в средствах, однако следует заметить, что ограничение касается только «экспериментальной» части науки, ее методов. Исследователь может встать на любую точку зрения и строить теорию с позиций как внутренней, так и внешней геометрии, представляя свое пространство «со стороны» при формулировании гипотез и построении моделей. Имеет ли место подобное соотношение для конструктивной (алгоритмической) и теоретико-множественной математики, если одну рассматривать как внутреннюю, находящуюся ближе к «опыту», а другую — как внешнюю, меньше ограниченную в выборе «точки зрения»? Помогает ли теоретико-множественная математика формулировать утверждения о свойствах объектов конструктивной математики, позволяя представить их «в целом»? В каком объеме идеи «внешней», теоретико-множественной, математики могут использоваться в конструктивной, применяющей свои собственные «инструменты»? Можно ли добиться «чистоты» или их взаимное влияние неизбежно? Ответ на эти вопросы позволил бы уточнить роль каждого из направлений в развитии математики.

Наконец, рассматривая соотношение математики и опыта, можно спросить, определяется ли существование различных на-
535
правлений в математике возможностью изучения пространства, пространственных объектов «изнутри» и «извне» или же само развитие математики приводит к появлению различных точек зрения на пространство?

В.А. Янков

Очень интересно было следить за философской мыслью, развиваемой при живом прощупывании естественно-научных и общематематических проблем.

В центре внимания была древняя платоновская пара — «двоица» большого и малого, у которой автор находит новые аспекты внешнего и «внутреннего» и экстенсионального и интенсионального. Сам автор, возможно, не согласится с моим пониманием темы по Платону. На эту мысль меня наводит, однако, двойственность, которую он стремится выявить. Эта двойственность замечена уже Николаем Кузанским, отождестатявшим оба направления — к бесконечно большому и к бесконечно малому в Боге-максимуме.

Двойственность в докладе выражена в построении альтернативной к ZF теоретико-множественной системе. Отмечу, что в связи с этим был бы желателен анализ куайновской системы New Foundation, где, как представляется, двойственность воплощена в пределах одной конструкции.

Однако само применение двойственности в данном исследовании показывает, что автор смотрит на предмет с «внешней», экстенсиональной позиции и не замечает глубокой асимметрии внешнего и внутреннего.

Дело в том, что позиция внешнего наблюдателя, рассыпавшего Вселенную на атомы, а потом собирающего ее из них, является позицией господина вещей, имеющего свободу распоряжения. Если же мы смотрим на вещи изнутри, то уже не мы властвуем над вещами, а, скорее, они властвуют над нами, и мы не стремимся даже вырваться из их потока, сохраняя, впрочем, интерес к наблюдению. Это не означает, что содержательные предикаты (роды, отношения и т.п.) навязываются нам исключительно извне; частично они определяются нами, поскольку у нас есть все же некоторая свобода, но то, что принципиально противоположно позиции внешнего наблюдателя, от таких определений ускользает и ведет к экзистенциалистскому пониманию ситуации.

Последняя установка вообще может быть описана как принятие своей воплощенное («внутренности»). Недаром она родилась (у Паскаля) в эпоху, когда декартовский механический детерминизм вытеснил душу из тела, делая ее полностью «внешней»
536
по отношению к вещественному миру. Более ранняя европейская философия не знала такого поворота: душа, если и не была телесной, то оставалась в нерасторжимой связи с телом.

Так что докладчик не доходит в своем стремлении до крайнего радикализма, что, впрочем, не мешает содержательности его мысли.

ОТВЕТ АВТОРА

А.Л. Веретенникову

Возможно ли внутреннее описание, независимое от внешнего? Геометрические примеры говорят, скорее, против этого предположения: пытаясь встать на точку зрения плоскатика, мы одновременно продолжаем смотреть на него и на его мир со стороны. Вместе с тем, интенсиональная и экстенсиональная интерпретации теории множеств являются вполне независимыми. Но, может быть, дело в том, что интенсиональные множества дают чересчур упрощенную модель «идеи внутренней геометрии».

Далее, комметатор ставит ряд вопросов, касающихся важной темы, к которой я вплотную подошел в своей работе, но которой непосредственно не касался. Речь идет о различии между внешним и внутренним, между экстенсиональностью и интенсионалъностъю *в логике*. Здесь я могу дать только самые предварительные и приблизительные ответы на вопросы комментатора.

По поводу тезиса комментатора о том, что всякое описание начнется внешним по самому смыслу понятия описания. Я думаю, что это действительно так, пока речь идет об описании *объектов:* позиция наблюдателя по отношению к объекту является внешней. Если же речь идет об описании *событий,* то, как мне кажется, ситуация меняется: позиция наблюдателя, описывающего событие — это позиция участника этого события. Поэтому, кстати, логика исторического *рассказа* (нарратива) существенно отличается от логики естественно-научной теории. Впрочем, тот факт, что понятие события стало играть ключевую роль и в современной физике, как представляется, заставляет науку также искать новые подходы.

Далее, комментатор справедливо замечает, что в рамках экстенсиональных логических теорий миры обычно понимаются как объекты или веши, наряду с другими вещами. Мое предложение состоит как раз в том, чтобы отнестись к понятию мира более внимательно и не использовать его таким образом. В рамках интенсионального подхода мир — это, конечно, не объект (не вещь). Утверждение комментатора о том, что гипотеза о множественно-
537
сти миров имеет смысл только для внешнего наблюдателя, с моей точки зрения, неверно. Действительно, только внешний наблюдатель мог бы увидеть *совокупность* (множество) миров (но тогда они не были, строго говоря, мирами). Мое предположение состоит в том, что можно говорить о множественности миров, не мысля при этом эти миры как совокупность. (Ср. мой ответ на предыдущий комментарий.) Наконец, комментатор делает замечание эпистемологического характера, высказывая опасение, что внутренний подход лишит научное знание его объективного статуса. Мне это опасение кажется разумным. Знания, получаемые внутренним наблюдателем, не являются, строго говоря, объективными. Однако не следует думать, что житель Трехмерии (внешний наблюдатель) видит все, что видит плоскатик (внутренний наблюдатель) плюс какие-то вещи, которых плоскатик не видит. Есть вещи, которые можно узнать и понять только изнутри. Возможно, что любые *события* относятся именно к этому роду вещей. Но, может быть, за любыми событиями можно найти объект или объекты и, таким образом, редуцировать знания о событиях к знаниям об объектах (ср. эпиграф, который приводит комментатор)? Примеры событий, в результате которых одни объекты появляются, а другие перестают существовать (ср. взаимодействия частиц в микрофизике), указывают на то, что это скорее всего не так.

Г.Б. Гутнеру

Связь между «внутренним подходом» и интенсиональной теорией множеств мне проще всего объяснить генетически: я попытался уточнить основанные на геометрическом материале рассуждения первой части о внешнем и внутреннем подходе с помощью формального аппарата аксиоматической теории множеств. В частности, интуитивные определения атома как «вещи без внутренности» и мира как «вещи без внешности» на языке множеств приобретают простой и ясный смысл множества без элементов (пустого множества) и множества, которое само не является элементом. Хотя такая формализация, очевидно, не схватывает какие-то аспекты исходной геометрической интуиции, она мне представляется естественной и правомерной. Понятие интенсиональности возникает в этой связи обычным образом, а именно, когда мы интерпретируем принадлежность множеству как обладание свойством.

В принципе я согласен с комментатором, когда он связывает геометрические интуиции с эпистемологией, а множества — с онтологией. Я только хочу уточнить то, что комментатор называет «интенсиональной онтологией». Мой аргумент состоит в следую-
538
щем: для построения стандартной «внешней» геометрии необходимо предположить существование атомов (точек), а для внутренней геометрии — существование мира (или того многообразия, которое мы считаем миром условно, например, называя миром плоскатика соответствующее двумерное многообразие). При этом внешняя геометрия не требует предположения о мире, а внутренняя — предположения о точках. Последнее утверждение является, конечно, единственным нетривиальным, поскольку обычно внутренняя геометрия все же предполагает точки, и комментатор пытается доказать, что без такого предположения внутренняя геометрия ообойтись не может. Прежде чем ответить на эти аргументы, я хочу указать на попытки построения геометрии без точек в рамках *теории локусов* и *формальной топологии.* Само название «формальная типология» говорит о том, что эта теория остается в некотором смысле оторванной от геометрической интуиции. Свою задачу я вижу в том, чтобы развить такую бесточечную геометрическую интуицию, которая, в частности, могла бы способствовать развитию этих относительно новых математических идей. Поэтому моя дискуссия с комментатором имеет также неформальный характер. Тем не менее я могу, как мне кажется, предъявить на аргументы комментатора вполне точные опровержения. Итак, первый (контр)аргумент комментатора состоит в том, что «...внутреннее исследование геометрической структуры объекта производится наблюдателем, помешенным в определенном *локусе* внутри объекта. По поводу этого локуса можно утверждать... [что] он элементарен, т.е, не имеет никакой внутренней структуры (иными схловами, атомарен, является точкой. — *А.Р.),* поскольку наблюдатель изучает окрестность, а не свой внутренний мир».

Мое возражение состоит в том, что локус, в котором помещен наблюдатель, и окрестность, которую этот наблюдатель изучает (и которая не является элементарной) — это одно и то же. Я моту предположить, что аргумент комментатора основывается на следующих двух предположениях, оба из которых, на мой взгляд, неверны: (1) наблюдатель элементарен (неделим), и (2) отношение «X помещен в *У»* обладает следующим свойством: если *X* помещен в Y, то если X элементарен, тогда *У* тоже элементарен. Что касается (2), то я ограничусь тем, что переложу бремя его доказательства на комментатора и замечу, что даже а если кот помещен в мешок, то кот и мешок все же остаются совсем непохожими вещами. Что касается (1), то я бы хотел вообще избежать того, чтобы описывать наблюдателя в терминах делимости или атомарности, поскольку считаю делимость и атомарность математическими свойствами, наблюдателя не считаю и математическим объектом, который может обладать такими
539
свойствами. Между прочим, мир, который исследует внутренний наблюдатель, вполне может быть «внутренним миром», т.е. психическим миром самого наблюдателя. Каждая личность является именно *внутренним* наблюдателем своего психического мира, поскольку этот психический мир наблюдается не целиком, а как последовательность психических *состояний.* Каждое психическое состояние — это окрестность или локус психического мира личности. Своим вторым аргументом об отсутствии в мире недоступных для наблюдателя «тайных мест» автор усиливает свой тезис, доказывая, что внутренний геометрический подход требует не только предположить атомы (элементарные места, точки), но и предположить, что «весь объект представляется системой элементарных мест» (иными словами, атомов или точек. — *А.Р.),* т.е. что *всякое* место или элементарно (т.е. является точкой), или в некотором смысле состоит из точек. Во-первых, мне кажется неуместным в данном контексте употребление слова «объект»,

более подходящее для словаря внешнего подхода: объект — это то, на что мы смотрим снаружи, а не изнутри. (Не имея сейчас возможности обосновать это утверждение, я замечу, что в случае внутреннего подхода более уместным оказывается говорить не об объектах, а о *событиях.)* Во-вторых, некоторое подобие «тайных мест» все же можно допустить, а именно, можно допустить, что в некоторых положениях наблюдатель не способен что-либо наблюдать. Именно такие «черные дыры» (особенности, сингулярности) естественно считать *точками,* поскольку в данном случае наблюдаемая окрестность вырождена и действительно не имеет никакой структуры. Внутренний подход допускает (но не требует) существование таких точек, однако их в некотором смысле не должно быть слишком много, иначе этот подход перестанет работать. Приводя свои контраргументы, я предполагал, что термин комментатора «элементарный» означает «атомарный», т.е. «неделимый», т.е. «точечный». Это единственная доступная мне интерпретация, которая позволяет мне отнести аргументы комментатора к моей проблеме.

Л. О. Шашкину

В своем ответе на комментарий В.А. Янкова я отметил, что предлагаемая мной переинтерпретация ZF не касается чисто формальной стороны дела: меняется (причем «с точностью до наоборот») содержательный смысл исходных символов, а формальная схема остается прежней. Если считать вопрос об интерпретации второстепенным, то разницу между стандартной экстенсиональной и предложенной мной интенсиональной интерпретацией ZF можно действительно назвать непринципиальной. Впрочем, сам я не думаю, что вопрос об интерпретации формальной системы является второстепенным: в частности, не нужно забывать о том, что непротиворечивость формальной системы во многих случаях обосновывается именно спомощью ее интерпретации в другой системе, как, например, эго делает Гильберт в «Основаниях геометрии». Однако сейчас я не буду подробно защищать эту общую точку зрения, а остановлюсь только на предложенной мною интенсиональной интерпретации ZF.

Согласно комментатору, «замена объединения множеств пересечением (или конъюнкцией) свойств сохраняет методы теории множеств, только в первом случае рассматриваются совокупности элементов, а во втором — совокупности "ареалов"». Хотя такие выражения, как «пересечение свойств» и «конъюнкция свойств», стоило бы заменить на более точные, легко понять, что комментатор имеет в виду. Я хочу остановиться на другой неточности, которая прямо касается существа дела (и позволяет мне уточнить смысл моего предложения). Если бы от разговора о совокупностях элементов можно было легко переходить к разговору о совокупностях свойств или «ареалов», то различие между интенсиональными и экстенсиональными подходами в логике и математике было бы в самом деле тривиальным. Однако это не так, и вот почему. Принимая «аксиому связи», двойственную обычной аксиоме пары, мы вынуждены, чтобы сохранить нетронутой формальную систему (!), отказаться от аксиомы пары в обычном смысле. То же самое верно по отношению к аксиоме объединения и двойственной к ней аксиоме пересечения. Однако отказ от обычных аксиом пары и объединения означает, что свойства или «ареалы», вообще говоря, не образуют множеств или «совокупностей». Нельзя сохранить нетронутым формальный каркас ZF, мысля совокупности свойств вместо совокупностей элементов. Можно пытаться либо строить новые формальные *интенсиональные системы* (см. по этому поводу *Intentional Mathematics,* 5. Sliapiro (ed.). N. Y., 1985)[1] либо искать *интенсиональные интерпретации (интенсиональные двойники)* аксиом пары и объединения, т.е. отказываться от этих аксиом, понятых в обычном смысле. (Еще можно, конечно, комбинировать эти два направления исследования.) Хотя с формальной

---

[1] Этот вопрос имеет непосредственное отношение к *теории Мейнонговских объектов,* т.е. объектов, задаваемых своими свойствами. Онтология таких объектов оказывается «раздутой», в частности, она допускает *невозможные объекты,* задаваемые несовместными свойствами, такие как круглый квадрат. Современную реконструкцию см, в: *Pasniczek Jacek.* Ways of Reference to Meinongian Objects // Logic and" Logical Philosophy. 1994. Vol. 2. Torun. P. 69—86.

541

точки зрения первый путь представляется более содержательным (прошу прощения за этот парадоксальный оборот), я пошел по второму пути, который мне кажется важным и интересным для философии (в частности, поскольку он проливает новый свет на некоторые старые философские проблемы). Вопрос состоит в следующем. Можно ли помыслить две вещи или несколько вещей, не мысля при этом *совокупности* этих вещей? Отрицательный ответ на этот вопрос означал бы, что аксиомы пары и объединения составляют «жесткую» часть нашего мыслительного аппарата, т.е. что мы не можем отказаться от этих аксиом ни при каких условиях. Я предполагаю, что это все же можно сделать, если ввести в рассуждение *время.* А именно, разные вещи можно мыслить *в разное время,* не мысля их «вместе», т.е. не мысля их совокупности, т.е. в данном случае пары. Конечно, вопрос остается не вполне ясным. Попробуйте помыслить в разное время вещь *А* и вещь *Б* . Можно сказать, что это сделать нельзя, поскольку, прочитав предыдущую фразу, Вы уже думаете об этих двух вещах вместе. Я могу заметить, что Вы все же сначала прочитали о вещи *А,* а уже потом о веши *Б,* И еще нужно отметить, что память в любом случае не является безграничной: наверняка есть такие вещи, о которых Вам случалось думать по отдельности, но никогда не случалось думать одновременно, подобно тому, как Вам случалось, может быть, бывать и в Петербурге, и в Москве, но никогда — в этих двух городах сразу[2].

Вопрос о соотношении понятий внешнего и внутреннего (экстенсионального и интенсионального), с одной стороны, с актуальным и потенциальным пониманием бесконечности (а также с идеей конструктивности), с другой стороны, который ставит комментатор, мне представляется очень интересным. Однако я думаю, что дело обстоит несколько иначе, чем об этом говорит Л.О. Шашкин. По мнению комментатора, при внутреннем подходе «возможность работать в каждый момент только с конечной частью объекта исследования и, следовательно, получение информации в виде (потенциально бесконечной) последовательности "образов" должны, вероятно, привести к развитию некоторой "конструктивной науки'[1]». Я бы мог к этому добавить, что идеи потенциальности и конструктивности также предполагают

[2] Между прочим, введение в рассмотрение времени позволяет избежать сложности, возникающей в аналогичной ситуации в теории Мейнонговских объектов, а именно необходимости допускать невозможные объекты вроде круглого квадрата (см. предыдущее примечание).

542

идею процесса, а следовательно, времени и изменения, а понятие времени, согласно сказанному выше, является ключевым именно для внутреннего подхода.

Однако между понятиями потенциальности и конструктивности в их отношении к внешнему и внутреннему подходам есть большая разница. Классическая «синтетическая» геометрия является «внешней» и одновременно конструктивной в том смысле, что из простых элементов в ней с помощью строго определенных процедур строятся сложные (вообще говоря, сколь угодно сложные) конструкции. Аналогичным образом аксиомы пары и объединения экстенсиональной теории множеств позволяют конструировать новые множества из уже данных. При внутреннем подходе речь о конструкциях не идет: внутренний наблюдатель предполагает свой мир уже существующим (хотя он и не может «увидеть» свой мир снаружи как единое целое) и изучает этот мир изнутри. Платоновский неизменный мир предполагается, скорее, во втором, а не в первом случае. Различие между внешним и внутренним подходами состоит не в том, что в одном случае мы имеем дело с неподвижным и неизменным, а во втором — с подвижным и изменчивым, а в том, что в первом случае движутся и меняются наблюдаемые вещи (объекты в пространстве), а во втором — сам наблюдатель (проходя различные фазы своей истории). Атомы (точки) не могут изменять свои внутренние свойства (поскольку у них нет ничего внутреннего), но могут двигаться, а миры не могут двигаться (поскольку нет никакого внешнего пространства, в котором они могли бы двигаться), но могут внутренне меняться. Если отвлечься от важного вопроса о памяти, которого мы касались выше, то Москва и Петербург — это простой пример двух вешей, которые обычно не образуют наблюдаемой совокупности. Этот пример также хорошо иллюстрирует тезис о том, что миры могут меняться, но не могут двигаться: из Петербурга в Москву приходится ехать самому.

Несмотря на то что при внутреннем подходе мир или миры берутся как заранее существующие, их следует, скорее, считать существующими *потенциально,* а не актуально — по крайней мере если считать актуальным только то, что наблюдается локальным (внутренним) наблюдателем в данное время. Идея актуально бесконечного натурального числового ряда возникает на самом деле не тогда, когда этот ряд мыслят как существующее целое, а когда, например, к этому целому прибавляют единицу, чтобы получить число следующего числового класса (по терминологии Кантора), или применяют по отношению к нему другую *внешнюю* операцию

543

(или вводят его в некоторое внешнее отношение). Когда говорят о потенциальной бесконечности натурального ряда, натуральный ряд мыслят как возможность — не в том смысле, что натуральный ряд может быть целиком *построен* (сконструирован) подобно тому, как может быть построено любое конечное число, а в том смысле, что натуральный ряд представляет собой пространство возможностей такого конструирования. Если мы хотим быть уверены, что в принципе могут быть сконструированы сколь угодно большие натуральные числа, то мы должны предположить, что множество всех возможных чисел бесконечно. Делая такое предположение, мы предполагаем, что существует бесконечное множество, и считаем, что все его элементы в некотором смысле «заданы». Однаконам не нужно считать эти элементы действительными, достаточно считать их возможными.

В.А. Янкову

По поводу двойственности. Я хотел бы упомянуть о важном выводе, к которому я пришел уже после того, как закончил работу над статьей. Дело в том, что если мы во *всех* аксиомах ZF *везде* заменим е на э, то это с формальной точки зрения будет означать, что *то же самое* (формально!) примитивное отношение мы обозначаем другим символом и даем ему другую содержательную интерпретацию. Это значит, что, с формальной точки зрения, мы не получаем никакой новой теории. Другими словами, ZF является самодвойственной в том смысле, в котором я говорю здесь о двойственности, а именно в смысле двойственности экстенсиональности и интенсиональности.

Теперь по поводу последнего замечания комментатора о том, что говоря об интенсиональности, я «не дохожу до крайнего радикализма». Это действительно так уже потому, что, строя интенсиональную теорию множеств или, говоря аккуратнее, давая интенсиональную интерпретацию ZF, я пользуюсь стандартной экстенсиональной логикой. Однако, быть может, экстенсиональность логики — это тоже в некотором смысле только вопрос интерпретации? Может быть, выбор между экстенсиональностью и интенсиональностью, внешним и внутренним в некотором отношении вообще не существен и является делом личного вкуса? Может быть, все дело, скорее, в том, как мы *смешиваем* то и другое? (Я надеюсь, что этот вывод созвучен комментатору, находящему у меня параллели с Платоном и Кузанским.)

С.Л. Катречко

К ВОПРОСУ ОБ «АПРИОРНОСТИ» МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ

Введение. Постановка проблемы

Поставленная для обсуждения проблема «математика и опыт» (соотношение априорного и апостериорного в математике) нуждается, в свою очередь, в более тщательной методологической проработке и предполагает, с одной стороны, анализ природы математического знания и его детерминант, а, с другой стороны, уточнение концепта «априорное» и соотношения «априорное vs. апостериорное». Этим и будет определяться структура настоящего анализа. Первая — основная — часть нашего исследования будет посвящена рассмотрению единства математического знания в контексте его исторического развития. Понятно, что если математика является разнородным(-ой), многокомпонентным(-ой) знанием (деятельностью), то вопрос о его априорности «расщепляется» на ряд вопросов об априорности его важнейших составляющих (структурно-синхронный аспект анализа). Кроме того, если этот — математический — комплекс к тому же эволюционирует во времени (истории), то вопрос об априорности математического знании должен быть уточнен с учетом видоизменения и структурной перестройки этого комплекса в тот или иной исторический период (ср. с «городской» аналогией математического знания Н. Бурбаки), так как может оказаться, что «степень априорности» математики изменяется на протяжении ее истории (диахронный аспект анализа). Поэтому изначальный вопрос должен быть конкретизирован так: *об априорности* («степени априорности») собственно *какой математики* идет речь: о геометрии, арифметике или каком-то другом разделе математического знания; какая собственно математика — античная, нововременная или современная — подвергается анализу?

Правда, у методолога (или специалиста по кантовской философии) может возникнуть законный вопрос: разве правомерно говорить о «степени априорности»; не совершена ли здесь методологическая или «категориальная», по Г. Райлу, ошибка? Ведь знание может быть или априорным, или апостериорным, т.е. пара «априорное vs. апостеорное» находится в отношении (строгого) противоречия и о никаком противолежании («перекрещивании») этих понятий, т.е. о «степени априорности—апостериорности», не может быть и речи. Однако именно с этим и будет связано еше одно — второе — уточнение исходной постановки проблемы априоризма математического знания, которое состоит в прояснении соотношения «априорное vs. апостериорное». Здесь будет предпринята попытка анализа концепта «априорное», т.е. проведена соответствующая «языковая игра» (Л. Витгенштейн) путем сопоставления концепта «априорное» с концептами «формальное», «абстрактное» и «умопостигаемое». Собственно, вторая часть нашего исследования будет посвящена анализу *типов априорности* (тогда исходный вопрос может быть уточнен так: о *какой априорности математики* идет речь?) и критике, во-первых, «статичности» априорных форм, во-вторых, жесткого противопостаачения (отношение противоречия) априорного апостериорному, которое, на наш взгляд, составляет своего рода «третью догму» (ср, с критикой У. Куайна) и должно быть заменено на более мягкое отношение противоположности, которое предполагает наличие промежуточной области априорного—апостериорного. Вместо восходящего к Канту статичного варианта априоризма и жесткого противопоставления «априорное vs. апостериорное» будут предложены модифицированные варианты априоризма.

К вопросу о «природе» и «единстве» математического знания

Обсуждение столь общих вопросов, к каковым относятся вопросы об уточнении (1) статуса математики в структуре человеческой деятельности (знания), (2) ее «природы» и наиболее значимых — как «внутренних», так и «внешних» — детерминант. (3) «единства» — однородности — математического знания, требует от исследователя повышенного внимания к используемой методологии анализа и, по возможности, ее точной экспликации.

В качестве отправной точки нашей методологии выбрана известная гегелевская схема: *бытие... — качество... — сущность.* На наш взгляд, в этой схеме, пусть в несколько мистифицированной форме, отражены ключевые моменты любого познавательного процесса, представлены основные этапы — «логика» — развития любого исследования. Поэтому если представить гегелевский категориальный ряд в качестве методологической схемы—развертывания, а на этом основан наш анализ, то его можно соотнести с основными этапами методологического анализа[1].

Тем самым анализ математической деятельности (математического знания) должен начинаться с фиксации и уточнения предмета исследования (этап «бытия»), после чего выделенный в общих чертах феномен должен пройти методологическую стадию сопоставления с другими сходными феноменами — в нашем случае необходимо сопоставить математику с «физикой» (естество-

546

знанием) как нижележащей и «метафизикой» (философией) как вышележащей по отношению к математике практикам (типам знания) — с целью уточнения «бытийного» статуса выделенного феномена и выявление его специфики (этап «качества»), а конечной целью исследования должно быть выявление его «сущности» (природы математики), что соответствует третьему — основному — этапу анализа.

Зафиксировав восходящую к Гегелю методологическую схему в чистом — последовательном — виде, будем рассматривать ее как некий идеал, с которым должно считаться методологическое исследование. Понятно, что в ходе реального исследования эта схема полностью не реализуема и выделенные этапы нередко перемешаны. Это связано с тем, что проблематика всех трех этапов исследования образует своего рода герменевтический круг, поскольку существует и обратная детерминация нижележащих этапов вышележащими. Так. например, решение вопроса о специфике предмета исследования (этап «качества») нередко связано с решением (более глубокого) вопроса о «сущности» предмета, а выделение предмета исследования (этап «бытия») может существенно корректироваться с учетом результатов последующих — «качественного» и «сущностного» — этапов. Однако выяапение «чистой» методологической схемы обладает определенным эвристическим потенциалом, поскольку указывает на наличие и важность предварительных, более описательных этапов анализа —«бытийного» и «качественного» этапов, предшествующих этапу «сущности», которые исследователь должен в той или иной мере учитывать, ставя вопрос о выявлении природы того или иного феномена.

Кроме того, отметим следующую особенность нашего анализа, которая заключается в том, что это анализ не собственно математической деятельности, а представлений о «природе» математики, данный современниками той или иной исторической эпохи (как правило, крупными математиками или философами, взгляды которых были достаточно авторитетны для современников и для работающих математиков соответствующею исторического периода).

Опыт философствования XX в. показывает, что нередко серьезные трудности поджидают исследователя уже на первом — «бытийном» — этапе анализа и связаны с тем, что предмет исследования, как правило, дается не чистым, а искаженным — в виде «превращенной формы» (М. Мамардашвили) — образом, т.е. как исторически сложившееся культурное кентаврическое сцепление, требующее значительных усилий по своему «очищению» (ср. с процедурами «деструкции» М. Хайдеггера или «деконструкции»

547

Ж. Деррида). В частности, как показал М. Фуко, одним из распространенных искажений — «сцеплений» — такого рода является «ошибка непрерывной хронологии», когда имеет место невольное заполнение «разрывов», имеющихся между различными, хотя и близкими историческими феноменами, с целью «торжества непрерывного ряда событий» (2, с. 12] и постулируемого псевдоединства вместо тщательного анализа имеющихся в реальной истории «дискретных» серий[3].

Следуя критическому настрою М. Фуко, сформулируем следующую метаметодологическую дилемму, развернутую уже не в диахронно—историческом (как у Фуко), а в синхронно-структурном аспекте[3]: *является ли математика некоторым целостным феноменом или представляет собой некоторое кентаврическое сцепление близких по духу, но все же различных практик; можем ли мы говорить об едином феномене математики на протяжении длительного периода человеческой истории или мы имеем дело с некоторой «серией» математических практик, (слабо) связанных между собой* [например, отношением «семейного сходства» (Л. Витгенштейн[4])]?

Формулировка этой дилеммы и обсуждение ее возможных решений тем более уместны, что в обыденном мышлении (и даже у ряда авторов данного сборника) прочно господствует взгляд на математику как на некий единый корпус (текстов), основа которого начала формироваться в античности и была продолжена в Новое время, тогда как одна из исходных — следуя Фуко — интенций нашего анализа заключается в том, чтобы подвергнуть испытанию на прочность данное культурологическое (псевдо?)единство.

Итак, первый вопрос, стоящий перед нами, сформулируем так: является математика единой гомогенной наукой или и ее составе можно выделить ряд разнородных — сходных, но все же различающихся — практик, и прежде всего (1) «геометрию» (топологию) и (2) «алгебру» как два основных «способа понимания в математике» [4], как два концептуальных «ядра», конституирующих два разных математических комплекса, ошибочно принимаемых за единую математику?

Выбранное нами различение в составе математического знания отнюдь не случайно или произвольно, а хорошо осознается уже в самом начале развития математического знания (об этом подробнее см. ниже) и проходит красной нитью через всю ее историю вплоть до XX в. (см., например, уже упомянутую выше работу Г. Вейля)[5]. Новизна же нашей постановки проблемы в том, что мы предполагаем возможное «усиление» этого различия до противоположности и вопрошаем о том, не является ли указанное различие «точкой разрыва» единого математического комплекса и не следует ли «расщепить» его на два, что, соответственно, приводит

54S

и к «расщеплению» поставленного в начале вопроса о природе единого математического знания на два вопроса:

а) о природе и детерминантах «геометрического» (топологического) математического комплекса и, соответственно, об априоризме—апостериоризме этого комплекса;

б) о природе и детерминантах (об априоризме—апостериоризме) «арифметического» (алгебраического) математического комплекса.

Поэтому имеет смысл немного задержаться на указанном различении между «геометрией» и «арифметикой» и более точно выявить его статус и основания.

Достаточно четко это различие фиксируется одним из крупнейших математиков XX в. Г. Вейлем:

«Центральное понятие (математики. — *С.К.)* действительного числа позволяет сразу объяснить, чем это вызвано. Система действительного числа подобна двуликому Янусу: с одной стороны, это совокупность <das Field> алгебраических операций «+» и «—» и им обратных, с другой — континуальное однообразие, части которого связаны друг с другом непрерывно. Первый лик чисел алгебраический, второй — топологический» [4, с. 26];

«Может быть, теперь мы немного лучше поймем отношение между двумя (алгебраическим и топологическим. — *С.К.)* методами» В топологии начинают с непрерывной связи как самого изначального и лишь постепенно, в ходе спецификации, вводят те или иные *структурные моменты;* в алгебре же, наоборот, исходным пунктом математического мышления выступают *операции* [над дискретными элементами (NB). — *СК.],* а непрерывность (или ее алгебраический суррогат) вводится лишь на заключительном этапе спецификации» [4, с. 34].

Если же учесть ключевое для Г. Вейля понимание математики как «работы с бесконечностью»: «Эта интуиция возможности "всегда увеличить на единицу" — открытой счетной бесконечности — лежит в основе всей математики» ([5, с. 13]; см. также мою работу «Бесконечность и теория поиска вывода» [6]), то можно представить следующую схему взаимодействия двух — выделенных ранее «геометрического» и «арифметического» — математических комплексов. Центральным, лежащим в середине и в силу этого объединяющим две разнородные практики концептом математики является понятие бесконечности[6]. «Геометрия» и «арифметика» выступают, согласно Вейлю, как два противоположных способа «ухватывания» бесконечности. Если «геометрия» (топология) начинает свою деятельность, постулируя бесконечность как непрерывность (континуальность), которую потом путем разбиения пытается «ухватить» в своих конструкциях, то «арифметический»

549

(алгебраический) путь — это операциональное (алгоритмическое) построение дискретной «бесконечности» (множественности) из первоначально данной «единицы». Другими словами, «геометрия» и «арифметика» находятся, если ввести своеобразную иерархическую шкалу, как бы по разные стороны от «бесконечности»: первая из них начинает свой путь «вверх» от нее к «числу», пытаясь «разложить» исходную континуальность, а вторая, находясь «выше» ее, спускаясь, пытается сконструировать бесконечность путем «суммирования» исходных конечных дискретностей.

Оказывается, что сформулированная выше, восходящая к Вейлю концепция «двухцентровой» природы математики восходит к античному — платоновско-пифагорейскому — пониманию эпистемологического статуса математического знания. Ее суть — в достаточно четком (онтолого-эпистемологическом) иерархическом различении двух математических практик (арифметики и геометрии), несмотря на то что обе они онтологически находятся как бы в «не-вещественном промежуточном мире» (Прокл) между идеальным (априорным) миром идей и эмпирическим (апостеорным) миром вещей[7]. Вот как это различие — на онтологическом уровне — фиксируется Проклом в его комментарии к книге «Начал» Евклида:

«И пусть геометр утверждает, что если данные четыре величины (NB; геометрия "работает" с *величинами. — С.К.)* пропорциональны, то существует и обратная пропорция, *и пусть доказывает это, опираясь на начсиш своей науки* (выделено мною. — *С.К.):* арифметик к ним обратиться не может, но пусть и он утверждает, что если данные четыре числа (NB: арифметика в отличие от геометрии «работает» с числами, — *С.К.]* пропорциональны, то существует и обратная пропорция, и доказывает это, исходя из начат своей науки» [7, с. 53—55];

«Поэтому, кстати, мы не требуем от всей математической науки одинаковой точности: ведь если одна ее часть так или иначе соприкасается с чувственно воспринимаемым (геометрия. — *С.К.},* а знанию (арифметике. — САГ.) другой принадлежит умопостигаемое, не могут обе быть точными, но одна — точнее другой» [7, с. 103];

«Так вот, если исходить из точности, то арифметика точнее геометрии, потому что ее начала отличаются простотой: монада лишена положения, а точка имеет положение, и точка, когда она получила положение, является началом геометрии, а начало арифметики

— монада» [7, с. 153].

Соответственно, различие в эпистемологическом статусе между геометрией и арифметикой заключается в том, что они реализуются с помощью различных познавательных способностей. Согласно Платону, арифметика как изучающая умопостигаемые (интеллигибельные) *числа* (монады) подпадает под власть ума-разума
550
(ноэзиса), в то время как геометрия, изучающая материально-интеллигибельные, или интеллигибельно-материальные [=пространственные; в Античности (у Платона) пространство (хора) выступает как особая интеллигибельная материя] *фигуры,* является предметом мысли низшей по отношению к ноэзису способности ума-рассудка (диаонойи). Прокл же, особо обсуждая статус уже геометрии в своем втором введении [7, с. 128—197], еще больше понижает эпистемологический статус геометрии по отношению к арифметике, так как познавательной способностью геометрии является уже не низшая часть ума (как это было у Платона), а *воображение,* которое занимает еще более низкое — промежуточное — положение между умом и чувственностью:

Попробуем явно сформулировать *античную парадигму математики.* Математика является условно-единым (квази)комплексом, в составе которого можно выделить две разнородные — как в онтологическом, так и в эпистемологическом плане — практики: «геометрию» как практику работы с непрерывными величинами и «арифметику» как практику работы с дискретными числами. С «внешней» точки зрения, математическое знание — как единый комплекс — занимает срединное положение между «физикой» и «метафизикой»; «внутри» же математики «арифметика» занимает более высокое по отношению к «геометрии» «положение», т.е. является более «метафизической» составляющей математического комплекса. Соотношение между античными геометрией и арифметикой можно трактовать как двухуровневое строение математического знания: геометрия соответствует нижнему — «квазиэмпирическому», менее абстрактному (и более содержательному) уровню, в то время как арифметика соотносится с более абстрактным (формальным) уровнем математического знания, что в области естествознания аналогично уровню «теоретической науки». В соответствии с этим различением между арифметикой и геометрией можно предложить «античное» решение вопроса об априорности— апостеорности математики: если арифметика тяготеет к априорному, умопостигаемому знанию и сродни метафизике (философии), то геометрия тяготеет к апостеорному (эмпирическому) естествознанию (механике, астрономии, оптике, геодезии и т.д.).

Кроме этого, можно предложить общий «механизм» развития математической парадигмы. Модификация античной парадигмы возможна по двум «параметрам» (соответственно, есть две детерминанты развития математического знания). С одной стороны, возможно варьирование всего математического квазикомплекса в целом по шкале «метафизика — физика», и тогда можно говорить о большей или меньшей абстрактности (априорности) — эмпиричности математики в целом, той или иной степени сходства
551
математики с «физикой» или «метафизикой» («внешняя» детерминация)[9]. С другой стороны, возможна «внутренняя» флуктуация (перестройка, модификация) математического знания в сторону одного из двух выделенных нами «центров», арифметики или геометрии, т.е. «чередование» арифметических и геометрических «всплесков» уже внутри той или иной математической парадигмы. Причем, что является третьим важным моментом предлагаемого нами подхода, в ходе развития математического знания в силу относительной независимости «внешних» и «внутренних» детерминант возможно как совпадение, так и несовпадение «векторов» их развития, что усложняет решение вопроса о статусе математики и степени его абстрактности, априорности и т.д. Например, при «внешней» тенденции к сращению математики с «физикой», что снижает

степень ее априорности, тенденция математики к арифметизации приводит к возрастанию степени ее абстрактности в составе физико-эмпирического комплекса знания.

С этих позиций обратимся теперь к анализу (развития) математической парадигмы знания в последующие эпохи. Принципиально иное решение о статусе математического знания (с учетом «внешних» и «внутренних» факторов) мы находим в Новое время, когда, как уже отмечалось выше, и был «создан» собственно тот единый культурологический комплекс «математика» — *нововременная парадигма математики,* сохранившая свое влияние и в наши дни. Специфицирующей чертой этой парадигмы является нивелирование различий между геометрией и арифметикой, сближение этих разнородных познавательных практик в составе универсальной «всеобщей математики» *(mathesis universalis),* что связано прежде всего с фигурой Декарта, которому за счет алгебраизации геометрии — создания аналитической геометрии — удалось концептуально срастить арифметику и геометрию в единую науку[1]. Именно с этой фигуры начинается формирование новой парадигмы «единой» математики. Однако в процессе ее формирования и модификации не только этот — «внутренний» — фактор является решающим. С одной стороны, при отмеченном выше «подтягивании» геометрии до алгебры («внутренняя») абстрактность математического комплекса усиливается и происходит повышение ее эпистемологического статуса по отношению к «физике»: математика занимает место как бы «прикладной метафизики», т.е. она расположена «выше» (физической) науки, поскольку, как говорил ближайший предшественник Декарта, Галилей, вся природа написана на языке математики. С другой стороны, в Новое время существенно снижается общий («внешний») онтологический статус математического знания, поскольку происходит отождествление пространства геометрического (античной интеллигибельной

552

материи) и пространства физического (чувственно данной, телесной материи)[11]. Другими словами, наблюдается общий «дрейф» от «метафизике» к «физике». Здесь, например, достаточно показателен термин «натурфилософия» из основополагающей работы И. Ньютона, которая, несмотря на название, никакого отношения к «метафизике» не имеет; или провозглашенный чуть позже О. Контом переход от стадии метафизики к стадии позитивной науки.

Пропуская ряд ключевых фигур, остановимся чуть более подробно на взглядах на природу математического знания И. Канта, который завершает разработку эпистемологического аспекта формирования единого нововременного математического комплекса (XVI—XVII вв.). Речь идет о том, что Кант находит для «алгебры» и «геометрии» единое эпистемологическое — трансцендентальное — основание, и находит его в области чувственности. Возможность геометрии «выводится» из априорной формы чувственности — пространства, а в основании арифметики лежит другая априорная форма чувственности — время[12].

Обратим внимание на три принципиальных момента, проясняющих суть кантовского переосмысления природы математического знания. Во-первых, Кант существенно снижает «внутренний» статус математического знания, помещая ее на «шкале» познавательных способностей даже ниже (теоретической) «физики», которая работает на уровне рассудка. В этом смысле математика оказывается даже более эмпиричной (апостеорной), чем надстраивающаяся над чувственно-математическом базисом теоретике-рассудочное естествознание, и занимает самый низший эпистемологический статус теоретического знания[13].

Во-вторых, эпистемологическим (а не только онтологическим) базисом объединения математики выступает уже не более интеллигибельная «алгебра», как это было у Декарта, а чувственноподобная «геометрия». Основаниями (историческими) для совершенной Кантом (в концептуальном, эпистемологическом, плане) «геометризации»

математики служат: во-первых, как это ни парадоксально звучит, с учетом совершенной Декартом алгебраизации геометрии, общая метафизическая концепция Декарта — введение им (геометризированной!) «субстанции протяженной» (что указывает на специфику нововременной алгебраизации математики, если ее рассматривать не с внутриматематаческой, а с внешней — общефилософской — точки зрения); во-вторых, ньютоновская концепция абсолютного пространства и времени (ср. с кантовскими априорными созерцаниями), которые представляют собой как бы субстанциональный фон (последующего) «телесного» мира. Суть же нововременной, завершенной Кантом «внешней» концептуальной — в отличие от внутриматематической алгебраизации —
553
«геометризации» математики заключается в том, что время, по аналогии с пространством, рассматривается как (априорное чувственное) созерцание, т.е. как некоторая «статическая» — квазипространственная — данность, или как некоторая объемлющая веши «среда» (= аналог ньютоновского абсолютного пространства), из которой исключается существенный для природы времени «динамический» — «событийный» — аспект. Обобщая, это можно назвать феноменом «опространствливания времени», что в последующем (XX в.), с одной стороны, послужило концептуальной базой для собственно физических теорий (например, для распространенной сейчас геометрической интерпретации теории относительности, где время рассматривается как одно из квазипространственных измерений в рамках единого пространственно-временного континуума), а с другой стороны, такое рассудочно-статическое опространствливание времени вызвало резкую критику у ряда мыслителей XX в. (см., например, работы Э. Гуссерля, М. Хайдеггера и А. Бергсона).

В-третьих, это противоположная первым двум тенденция повышения «метафизического» статуса математики концепция априорности пространства и времени, связанная с так называемым «коперниканским переворотом» Канта, что отчасти возрождает античное понимание «промежуточного» — между миром «вещей» и миром «идей» — статуса математического знания. При более детальном сопостаатении античной (пифагоро-платоно-аристотелевской) и кантовской концепции математики (числа) можно обратить внимание на следующее. Во-первых, как это уже отмечалось выше, Кант исключает категории пространства и времени из числа рассудочных категорий (соответственно, математику из области «ума», развивая концепцию Прокла), хотя против этого, особенно по поводу категории времени, есть весьма веские причины. Дело в том, что в основе построения (рассудочной) категориальной сетки Канта лежит анализ суждений («все действия рассудка мы можем свести к суждениям», а «понятия же относятся как предикаты возможных суждений», то «...все функции рассудка можно найти, если полностью показать функции единства в суждениях» |8, с. 80; см. также анализ «категориальной сетки» Канта и ее сравнение с подходом Аристотеля в работе Г. Райла [9]), и Кант выделяет такую характеристику суждений, как (алетическую) модальность. Алетические модальности же, как это было известно уже в античности (анализ высказываний о будуших событиях Аристотеля, построения Диодора), тесно связаны с категорией времени; «возможность» можно соотнести с «будущим», а «необходимость» — с настоящим. Поэтому вполне возможно рассматривать «время» не как априорную форму чувственности,
554
а как своеобразную рассудочную — модальную — категорию[14]. Во-вторых, обратной стороной такого понижения эпистемологического статуса математики является существенное переосмысление базового концепта математики — понятия числа. Кант тесно увязывает категории «числа» и «времени» через понятие «числового ряда». В этом смысле Кант рассматривает не число как таковое, а лишь порядковые числа, или числовой ряд, основывающийся на априорном созерцании времени (время является трансцендентальным основанием числовой рядоположенности). Тем самым Кант

исключает из античного числа как единства предела и беспредельного ее первую — собственно «метафизическую» — составляющую: понятие «единицы», лежащее в основании числа.

Таким образом, концепция математического априоризма Канта[15] представляет собой (при некоторых оговорках, которые были сделаны выше) промежуточный вариант — между сверх-априоризмом (умопостигаемостью) античности и эмпиризмом Нового времени — понимания природы и статуса математического знания.

Для иллюстрации современных — посткантовских — изменений в понимании природы и статуса математического знания кратко остановимся на анализе взглядов Г. Кантора и Г. Фреге. Наша задача заключается в том, чтобы на примере воззрений этих мыслителей на природу числа показать тенденцию — отчасти антикантианскую, отчасти антинововременную в целом — к повышению «метафизичности» математики. Надо сразу же оговориться, что оба указанных мыслителя работают в области «арифметики», которая занимает более «высокий» внутриматематический априорный статус, и это несколько сужает индуктивную базу наших обобщений на развитие математического знания в целом, но тем не менее анализ их концептуальных воззрений на природу числа достаточно показателен и характеризует существенное изменение, произошедшие с парадигмой «единой математики» в конце XIX — первой половине XX в.[16].

Начнем с анализа взглядов Г. Кантора. Остановимся более внимательно на его революционном в концептуальном отношении понятии «кардинального числа». Вот канторовское определение: «"мощностью" или "кардинальным числом" множества ***M*** мы называем то общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности из ***M***, когда мы абстрагируемся от качества его различных элементов *m* и от порядка их задания» [10, с. 173]. Результат этой *двойной* абстракции Кантор обозначает как //***M***(двойная черта указывает на двойное абстрагирование). Из приведенного определения видно, что канторовское концептуальное переосмысление понятия числа заключается в введении мета-абстрактных объектов «кардинальных чисел» (мета-
555
чисел), которые выступают как результат (вторичного) абстрагирования от обычных — порядковых — чисел, являющихся, в свою очередь, результатом первичного абстрагирования от «качественной» определенности предметов реального мира. Понятно, что это огромный шаг вперед по сравнению «порядковым» («временным») пониманием числа у Каша. Более того, этот шаг не только возрождает «метафизическое» понимание математического знания в античности, но и в определенном отношении развивает ее еще дальше. Точнее, здесь происходит возрождение самого крайнего пифагоро-платоновского — в противовес аристотелевскому квазиэмпиризму — априоризма античности, поскольку в концептуальном (категориальном) отношении канторовское «кардинальное число» находится «выше» (на шкале умопостигаемости) аристотелевской категории «количества», Другими словами, статус канторовской теории множеств, на которой базируется вся остальная математика, не просто формален как отвлечение от «качественных» особенностей вещей (математика 1 уровня — «квазиэмпирическая математика»), но и мета-формален (математика 2 уровня — мета-математика), поскольку здесь происходит вторая, более «метафизическая» абстракция от категории «порядкового количества». Тем самым в канторовском понятии «кардинального числа» содержится принципиальная возможность для конституирования новой, более абстрактной (т.е. более априорной) математики, математики второго уровня, или «мета-математики» (в широком смысле этого слова). В последующем развитии математики XX в. было реализовано несколько проектов канторовского мета-математического подхода: во-первых, это «формализм» (теория доказательств) Д. Гильберта (мета-математика в узком смысле); во-вторых, «логицизм» Б. Рассела («логика» как априорный и более «метафизический» базис математики); в-

третьих, «структурализм» Н. Бурбаки (математика изучает не «структуры» физического мира, а «работает» с мета-структурами, т.е. с абстракциями второго уровня — математическими структурами). Вместе с тем необходимо отметить и наличие определенного противовеса этой слишком уж «метафизической» тенденции в развитии математики, а именно, формирование интуиционизма как более эмпирической — «чувственной», по Канту, — в эпистемологическом отношении концепции математической деятельности. Однако и в этом случае можно говорить о повышении степени априорности математики, так как и для интуиционистов базовой интуицией математической деятельности является более умопостигаемая — «арифметическая» — интуиция «счетного ряда» (см., например, цитированные выше фрагменты из работ Г. Вейля).

556

Более развернутая в концептуальном плане — и в чем-то даже более радикальная в своей «метафизической» тенденции — концепция числа принадлежит Г. Фреге, Покажем это на примере анализа его фундаментальной работы «Основоположения арифметики (логико-математическое исследование о природе числа)» [11], которая определенным образом учитывает и «метафизические» достижения канторовской мысли об абстрактном статусе (канторовских) «бесконечных чисел». Прежде всего Фреге убедительно показывает (в частности, критикуя за это и Кантора[17]), что число не может быть свойством «внешних» вещей наподобие понятия цвета, твердости, тяжести и т.д. и не может получаться путем абстрагирования из предметов, и тем самым он опровергает тезис о математике как опытной науке (см. [11], гл. «Является ли число свойством внешних предметов?»). С другой стороны, в отличие от концепции Канта, число не может быть чем-то субъективным, -т.е. «внутренним» представлением (см. [11]. гл. «Является ли число чем-то субъективным?»). Поэтому оно должно быть «нечувственным и объективным» [11, с. 57], т.е. занимать какое-то промежуточное положение между «внешними» вешами и «внутренними» представлениями [ср. с античным — платоновским — решением о промежуточном онтологическом статусе математических (геометрических) объектов]. В этом отношении «числа» должны быть подобны предикатам, если мы понимаем их (предикаты) в платоновском смысле как «идеи» (=свойства) вещей. Однако «число» — на примере «единицы» — по своему статусу отличается и от «реальных» предикатов [т.е. является специфическим, несодержательным (мета)предикатом]. Вот как Фреге фиксирует это различие: «Если бы "один человек" понимался наподобие "мудрый человек", то следовало бы думать, что "один" может использоваться как предикат, поэтому также как "Солон был мудрый" можно было бы сказать "Солон был один"... Но само по себе "один" не может быть предикатом (в тексте Фреге здесь стоит сноска, которую мы опускаем, но заменяем ее своим разъяснением[18]. — *С.К.).* Еще яснее это проявляется при множественном числе. Тогда как "Солон был мудрый" и "Фалее был мудрый" можно скомбинировать "Солон и Фалес были мудрые", нельзя сказать "Солон и Фалес были один"» [11, с. 58—59]. Далее Фреге, ссылаясь на Баумана и Ст. Джевонса, делает еще один шаг, принципиальный для нас в связи с предшествующим изложением кантовской позиции по поводу природы математики, когда подчеркивает независимость числа от времени (пространства) в связи с возможной применимостью «числа к непространственному и невременному» [11, с. 71]. Таким образом, последовательно отвергая различные «узкие» (по логическому объему) понимания числа — эмпиристское абстра-

557

гирование от предметов (неправомерное сходство числа с качественными признаками предметов — математика как опытная наука); априористское (неправомерное) отождествление числа с пространственно-временными характеристиками существования предметов; восходящее к Платону (неправомерное) неразличение числовых и содержательных предикатов, — Фреге приходит к пониманию числа как *чистого* «количества»[19]. Суть фрегевского подхода заключается в том, что число является не реальным предикатом (предикатом первого уровня), а предикатом второго уровня, метапредикатом; число является (количественной) характеристикой не предметов как таковых, а характеристикой *понятий* (о предметах) или, говоря другими словами, характеристикой «неопределенных (абстрактных. — С. К.) предметов»: «число приложимо только к *понятию* (а не к предмету!; выделено мною. — *С.К.),* под которое подводится внешнее и внутреннее, пространственное и временное, непространственное и невременное» [11, с. 77]. Здесь же он приводит ключевые для уяснения его позиции слова Б. Спинозы: «Я отвечаю, что вещь может называться единой или единственной (т.е. "принимать" числовые — количественные — характеристики. — *С.К.)* лишь по отношению к своему существованию, а не по отношению к своей сущности, ибо мы *мыслим вещи под [категорией] числа только после того, как они подведены под некоторый общий род* (т.е. когда рассматриваются не сами по себе в своем физическом модусе существования, а как "родовые", т.е. как "логические", или абстрактные, объекты; выделено мною. — С.К.)» [11], с. 78—79]. Обратим внимание на корреляцию категорий «существования» («бытия») и «числа» в этом отрывке. Чуть ниже Фреге эту коррелятивную связь несколько расшифровывает: «В этом отношении существование (предикат существования. — *С.К.)* имеет сходство с числом (с предикатом числа. — *С. К.}*. Ведь утверждение существования есть не что иное, как отрицание числа ноль [соответственно, полагание числа один в частном случае, когда мы говорим «Сократ» (неявно приписывая ему мета-предикат «есть» («существует»), равный числовому метапредикату «один»). — С.К.]», поскольку Фреге различает признаки предметов и свойства (мета-признаки) понятий (признак vs. свойство!): например, «...прочность, вместительность, удобство [понятия] дома не могут применяться при его строительстве, наряду с камнями, строительным раствором и бревнами» [11, с. 80]. Другими словами, Фреге сближает основополагающее для арифметики понятие «числа» с основополагающим метафизическим понятием «бытия» и тем самым приравнивает эпистемологический — априорный — статус математики (арифметики) статусу метафизики (ср. с кантовским пониманием «бытия» как отличного от «реального», т.е. «содержательного», предиката).

Подводя итог рассмотрению взглядов Фреге, можно сказать, что он обосновал возможность математики как *метанауки,* исследующей не свойства (эмпирических) предметов, а признаки умопостигаемых понятий о предметах. В этом смысле математика, вернее ее «арифметический» комплекс, является метатеоретической — априорной — дисциплиной по сравнению с «содержательными» теоретическими дисциплинами типа физики, химии... или, как принято говорить, математика является не содержательной, а «формальной» дисциплиной, что роднит ее с (формальной) логикой и метафизикой (как учением о (платоновских) «формах»). В середине XX в. фрегевское понимание математики (в качестве метанауки) получило развитие в работах Н. Бурбаки, который рассматривал математику как (мета)науку о (мета)свойствах «математических структур», которые, в свою очередь, могут рассматриваться как канторовские «количественные» абстракции первого уровня (ср. с понятием «кардинального числа» Г. Кантора — см. об этом выше).

Таким образом, в работах Г. Кантора и Г. Фреге (а позже и у Н. Бурбаки) было показано (обосновано), что математика является неоднородным иерархизированным комплексом знания, многослойной дисциплиной. Помимо «эмпирического» слоя математического знания, связанного с количественно-порядковой характеристикой предметов (абстрагирование от «качественной» определенности предметов), возможна априористская математика второго — «теоретического» — уровня (мегауровня), которая изучает более высокие абстракции: «надпорядковые» структуры («кардинальные числа» Кантора) и/или «неопределенные предметы» — понятия (Фреге).

К вопросу о типах «априорного». Варианты априоризма: концепции динамического априоризма и эпистемологического гилеоморфизма

Если первая часть нашего исследования проходила под знаком вопроса «Об априорности *какой математики* — например, античной геометрии, новоевропейской алгебры или разделов современной, основанной на теоретико-множественном базисе, математики — идет речь?», то теперь следует задаться еще одним вопросом: а о *какой (каком типе) априорности* (математики) идет речь?

Сначала буквально несколько слов об истории этого термина (концепта[20]). Впервые термин «априорное» (противопоставление «априорное vs. апостеорное») появляется в работах Декарта—Лейбница и связан с концепцией «врожденных идей». В этом смысле
559
предыстория концепта восходит к платоновской концепции анамнезиса, которая в процессе познания припоминает (априорные) не-чувственнные «идеи». В более развитом виде концепт априорного получает отражение у Лейбница, который выделяет особый класс истин — так называемые «истины разума», основанные на законе непротиворечия. Тем самым априорное у Лейбница — это аналитически-умопостигаемое. Существенное переосмысление лейбницевского понимания «априорного» происходит у Канта. Во-первых, он освобождает «априорное» от «содержания»: априорной является уже не некоторая содержательная идея, например идея «числа», а пустая (априорная) «форма», которая «оформляет» поступающее «извне», через наши органы чувств, апостеорное, т.е. опытно-чувственнное «содержание»[21]; во-вторых, Кант вводит различение между парой «априорное vs. апостеорное» и парой «аналитическое vs. синтетическое», отсутствующее у Лейбница, т.е. показывает неправомерность прямого лейбницевского отождествления априорного и анатитического и сосредоточивает свой анализ (например, в КЧР) на отсутствующую у Лейбница категории *синтетического a priori.* В дальнейшей истории философии закрепилось кантовская трактовка априорного, причем, как правило, под априорным стало пониматься, во-первых, именно *синтетическое a priori,* а во-вторых, именно кантовский набор «априорных форм».

Наша задача — подвергнуть концепт «априорное» более тщательному анализу и показать не единственность кантовского решения и возможность отличных от кантовского решения вариантов.

Во-первых, необходимо проанализировать, какие «составляющие» можно выделить в концепте «априорное», т.е. какие понятия образуют его семантическое, или смысловое, поле. Прежде всего (кантовское) «априорное» тесно связано с понятием «формы»: априорным является не-содержательное, а формальное. Интересно отметить, что в самом начале КЧР Кант формулирует эпистемологическое — отличное от античного (платоновского) онтологического — «учение о материи и форме»: «то в явлении, что соответствует ощущением, я называю его *материей,* а то, благодаря чему многообразное в явлении может быть упорядочено определенным образом я называю *формой* явления», причем «материя всех явлений дана нам только a posteriori, [а] форма их целиком должна для них находиться готовой в нашей душе a priori» [14, с. 48). Тем самым «априорное» является «абстрактным» (хотя и не полученным, по Канту, в результате операции абстрагирования от содержательно-эмпирически-чувственного), или «умопостигаемым». Таким образом, концепт «априорное» обладает сложной составной структурой, которая в первом приближении может быть
560
выражена таким сложным термином, как «абстрактно—формально—умопостигаемое», а его смысловым ядром является «формальность»: кантовское априорное — это прежде всего формальное.

Кантовское противопоставление «апостеорное vs. априорное» и как противопоставление «физического» и «метафизического» неявно приписывает и еще одну характеристику априорного. Априорное — это нечто статичное, неизменное, раз и навсегда данное (что и фиксируется в понятии «форма»), в то время как апостеорное (знание) подвержено изменению. Тем самым Кант рассматривает априорные формы как метафизические сущности и не допускает их диалектического изменения, т.е. саморазвития (понятий) в гегелевском смысле.

Во-вторых, Кант выделяет всего лишь две априорные «формы», имеющие отношение к математике: «пространство», лежащее в основании геометрии, и «время», лежашее в основании арифметики. Как уже было отмечено выше, здесь Кант опирается на декарто-ньютоновское «наследие»: прежде всего на декартову «субстанцию протяженную» и на ньютоновские понятия «абсолютного пространства» и «абсолютного времени». Однако более значимым в данном случае является интеллектуальное наследие («ходы мысли») Декарта, который, решая проблему первичных—вторичных качеств, предложил самый радикальный (и «формальный») подход, редуцировав все «вторичные» качества к единственному «первичному» качеству, т.е. к единственной «внешней» форме «общего чувства» (Лейбниц[22]) — «пространству». Сходным образом Кант все явления «внутреннего мира» (декартовской «субстанции мыслящей») упорядочивает единственной формой «внутреннего чувства» — «временем». Причем подход Канта хорошо согласуется с «двухцентровой» — арифметико-геометрической — моделью математического знания.

В-третьих, Кант жестко противопоставляет «априорное» и «апостеорное» (см. выше п. 1), т.е. призывает мыслить «априорное» как «абсолютно априорное», или «чистое априорное», «безусловно независимое от всякого опыта» [14, с. 33], хотя и допускает в «локальном» познавательном акте *«относительное априорное»,* т.е. такое «априорное», которое яаляется до-опытным относительно данного опыта. В частности во Введении к КЧР [14, с. 32] он приводит пример с «подрыванием фундамента дома», в рамках которого говорит об *относительно-опытном a priori,* т.е. предшествующем этому непосредственному «опыту» подкапывания фундамента «знания» о том, что дом рухнет.

В-четвертых, Кант различает в области априорного три типа, которые образуют своеобразную иерархию. Во-первых, это априорные «формы» чувственности; во-вторых, это следующая, более высокая ступень априорного — «категории» рассудка; в-третьих, высший тип этой иерархии априорного – «идея» разума. Однако тему гетерогенности области априорного (критерий различения разных типов априорного) Кант практически не развивает, ограничившись констатацией их функционального различия в процессе познания.

Попробуем, критически опираясь на кантовское наследие, наметить наиболее перспективные пути развития современной концепции математического априоризма.

Во-первых, оставаясь в рамках кантонского априоризма, можно поставить вопрос о количестве априорных математических форм. Как уже отмечалось выше, Кант выделяет всего лишь две априорные формы, что было хорошо согласовано с господствовавшей в то время «двухцентровой» моделью математического знания. Однако в настоящее время в составе математического знания выделяется гораздо больше составных частей. Как быть, например, с третьим основным типом математической структуры — «структурами порядка» (Н. Бурбаки), которые не могут быть редуцированы к геометро-топологическим и арифметико-алгебраическим структурам[23]? Более серьезная проблема возникает, если в составе математической деятельности выделяются не просто «статические» *структуры,* которые в общем можно трактовать как аналог (или обобщение) кантовского понятия «формы», а «динамические» составляющие, связанные прежде всего с алгоритмической деятельностью, или «алгеброй» как таковой. В настоящее время вычислительная математика является одним из господствующих разделов математической деятельности, но какой тип априорного ему соответствует? Определенный ответ на этот вопрос содержится в кантовском учении о схематизме, но статус «алгебраической» составляющей требует своего тщательного продумывания в свете априоризма.

Во-вторых, необходима существенная корректировка взглядов Канта о соотношении математики и естествознания с точки зрения «априорности» (абстрактности, формальности) этих типов знания. Решение, предложенное Кантом, когда математика относится к «трансцендентальной эстетике», а «физика» — к «трансцендентальной логике», явно не согласуется с современным пониманием о соотношении математики и физики. Если математика является более «абстрактной» — «не-естественной», по замечанию С. П. Капицы, — наукой, то тогда статус математических — чувственных, по Канту, — «априорных форм» должен быть «выше», чем статус физических — рассудочно-категориальных, по Канту, — «априорных форм». Выше уже отмечалось, что Кант не отрицает возможность рассудочных категорий пространства и времени,

562

которые соответствуют более абстрактному (априорному) статусу математического знания, хотя сам этот подход не развивает. Приводимые выше концепции числа Кантора и Фреге показывают, что степень абстрактности математики достаточно высока и по крайней мере не ниже, чем степень абстрактности естествознания. А это значит, что в основе аподиктического математического знания должны лежать достаточно высокоуровневые априорные формы. Например, в современной математике исследуются «-мерные пространства, которые явно не представимы на уровне чувственных созерцаний, поэтому в основе подобных разделов математики лежат уже отнюдь не чувственные, а рассудочные категории (в нашем примере, категория абстрактного пространства). В связи с этим кантовский анализ трансцендентальных оснований математического знания в настоящее время должен быть по крайней мере дополнен. Например, это можно сделать за счет выделения в составе математического знания двух уровней, условно соответствующих «эмпирическому» и «теоретическому» уровням в естествознании: первичная математическая практика рассматриваемая Кантом, может быть соотнесена с чувственными априорными формами пространства и времени, а более абстрактные разделы современной математики — с априорными формами — категориями рассудка. В-третьих — и это, на наш взгляд, одно из самых существенных упущений кантовского подхода в целом, о котором мы уже говорили выше, — кантовский априоризм не решает проблемы «происхождения» априорных форм и механизмов их образования: кантовские априорные формы всех типов статичны и неизменны, т.е. просто постулируются как данные, а их набор хорошо согласован с имевшейся во времена Канта структурой научного знания (в этом смысле кантонские «критики» точно соответствуют своему названию, так как не предлагают что-либо новое, а критически переосмысляют и обосновывают то, что есть в рамках «позитивного» знания). В настоящее время, время господства «позитивного знания» (О. Конт), предлагаются решения этой проблемы, в основе которых лежит отказ от идеи априоризма[24]. Однако возможно решение проблемы возникновения априорных форм без выхода за рамки кантовского трансцендентализма. На наш взгляд, таковым является разрабатываемый нами подход [15]. Основным механизмом образования априорных форм яапяется кантовская *познавательная способность воображения,* которая, как пишет Кант, лежит в основе любой синтетической познавательной деятельности. Именно она ответственна за синтез «идей» (- кантовских априорных форм всех типов), которые выходят за рамки конечного опыта и выполняют роль его априорного основания. Способом образования вообразительных априорных «догадок» служит меха-

563

низм *перехода на метауровень,* который в рамках метафоры «правого — левого полушария» может быть соотнесен с «правополушарной» деятельностью и нередко сопровождается феноменом *творческой ошибки* [16; 17]. Неиндуктивный характер *творческой догадки,* а также возможность совершения в ходе ее осуществления *творческой ошибки* яатяются ярким подтверждением возможности получения неэмпирического — априорного — знания и его последующего использования в ходе познания.

В-четвертых, возможно и еще одно преодоление статичности кантовского подхода, т.е. отказ от приписывания метафизико-априорному знанию статуса застывших неизменных «форм». Речь идет о том, что в области метафизического (идеального) могут находиться сущности разных типов, т.е. не только стандартные неизменные метафизические сущности (к которым относятся кантовские априорные формы), но и темпоральные сущности, т.е. такие идеальные образования, которые способны к (само)изменению и/или (само)развитию. В истории философии это различение было зафиксировано Г. Гегелем как противопоставление метафизики и диалектики. Гегель впервые попробовал представить все основные метафизические концепты в виде единой динамической системы саморазвивающихся сущностей, т.е. придал темпоральный характер всем метафизическим концептам, в том числе и кантовским априорным формам (хотя и мистифицировал этот процесс, «поручив» ее деятельность «мировому духу»). Если же вслед за Делезом и Гваттари, признать сложный (составной) характер метафизических концептов, то развитие идеальных сущностей, в том числе и кантовских априорных форм, можно помыслить вполне рационально. Основными механизмами видоизменения концептов являются *конкретизация, обобщение,* а также *«обмен» их составными частями* в ходе человеческой интеллектуальной деятельности. Например, «образование» *рациональных* или *действительных* чисел можно рассматривать как процесс конкретизации исходного концепта (натурального) *числа,* а введение Кантором кардинального числа — как операцию его обобщения. Аналогично обстоит дело и с кантовскими априорными формами, которые в ходе человеческой деятельности могут изменяться, сохраняя при этом свой априорный статус. Например, кантовский концепт пространства *обобщается* до n-мерного пространства, которое уже не является представимым (чувственным) созерцанием. В рамках этого подхода, который назовем *концепцией динамического априоризма,* можно ввести более точное структурирование области априорного, а также задать определенные правила преобразования априорных сущностей.

564

Наконец (в-пятых), обобщая два предыдущих пункта, сформулируем следующую версию априоризма (модификацию кантовского подхода), которую назовем концепцией *эпистемологического гилеоморфизма* (ср. с цитированным выше кантовским разделением «материи» и «формы» в познавательном процессе). Ее суть — в снятии строгого кантовского противопоставления «априорное vs. апостеорное». Аналогом для этой модификации является аристотелевское учение о гилеоморфизме, в котором он преодолевает строгое платоновское противопоставление умопостигаемого «мира идей-форм» и эмпирического «мира вещей». Вместо этого Аристотель предлагает определенную гилеоморфную иерархию. Крайними ее точками являются соответственно «абсолютная» — неоформленная — материя (первоматерия) и «абсолютная» форма (первоформа, или аристотелевский Бог-Нус). А середина этой иерархии «заполнена» промежуточными — «относительными» — сущностями, которые являются (онтологическими) «формами» для ее нижележащих уровней и (онтологической) «материей» для ее вышележащих уровней. Точно так же, если трактовать любой познавательный акт (вслед за Кантом) как соединение *апостеорного* «содержания» (эпистемологической материи) и *априорных* «форм» (эпистемологической формы), то можно ввести понятие об «относительной априорной форме», которая в рамках какого-либо познавательного акта выступает как метауровневое априори по отношению к предшествующему уровню содержательного апостеори. При этом строгое кантовское противопоставление «априорное vs. апостеорное» имеет место только между крайними точками эпистемологической гилеоморфной шкалы[25], а ее промежуточные «сущности» имеют априорно-апостеорный статус. Например, если учесть срединное положение математики по отношению к «физике» и «метафизике», то математическое знание выступает как априорно-аподиктичное по отношению к «содержательному» естествознанию и, в свою очередь, основывается на определенных онтологических предпосылках, т.е. является апостеорным по отношению к метафизике (онтологии).

Можно выделить три механизма «взаимодействия» априорного и апостеорного (соответственно, механизмы взаимопереходов априорного и апостеорного; изменения «степени» априорности), различающихся своими временными масштабами.

Основным из них яатяется механизм, действующий на уровне локального познавательного акта. Согласно С.Франку [18], любой локальный познавательный акт может быть описан в виде суждения «***А*** есть ***X***», где ***А*** — обозначает то неизвестное, что познается, а ***X*** — известный предикат. Тем самым в рамках модельной концепции познание есть не двучленное, а трехчленное отношение между субъектом познания ***S***, объектом ***А*** и репрезентатором (моделью) ***X****:* «**S** познает ***А*** как ***X***»*,* или «***S*** познает ***А*** через посредство ***А***»[26]. Тем самым имеющиеся у субъекта «знания» выступают как априорные фильтры, которые предопределяют процесс познания: познать можно лишь то, для чего у нас есть соответствующий репрезентатор (модель) ***X***. Однако в ходе познавательного процесса происходит не только познание эмпирического ***А****,* но и уточнение априорного ***X****,* которое в самом начале познавательного процесса выступает как фантазийная (вообразительная) — может быть, ошибочная — априорная догадка. Если на начальных стадиях познания рассогласование между априорным ***X*** опытом велико, то в ходе последующей модификации ***X*** (уточнения модели) происходит такое его «насыщение», что позволяет говорить о появлении уже не изменяющейся впоследствии *локальной априорной формы*[27].

При переходе на следующий более длительный временной — исторический — масштаб сформированная локальная априорная форма выступает (или входит как составная часть) уже как «парадигма» (Т. Кун), или «эпистема» (М. Фуко), или «онтологическое допущение» (У. Куайн), т.е. является фактором социокультурной обусловленности научного познания того или иного исторического периода. В данном случае можно говорить об *историко-культурном типе априорной формы,* «степень априорности» которой по сравнению с локальными априорными формами значительно выше, а историческим транслятором априорности этого типа является механизм «социальных эстафет» (М.А. Розов), например связка «учитель — ученик».

Наконец, на историческом макроуровне формируются наиболее устойчивые *глобальные априорные формы,* которые, например, соответствуют «архетипам» (К. Юнг) или «идолам рода» (Фр. Бэкон), Некоторые из них настолько устойчивы, что «встраиваются» в познавательный механизм человека чуть ли не на физиологическом уровне и являются «врожденными» — типа кантовских априорных форм пространства и времени — априорными формами[28] (именно они имеют максимальную степень априорности, т.е. являются абсолютными a priori); другие — более вариабельны, хотя их историческая модернизация вследствие больших временных промежутков практически незаметна для нескольких поколений человечества.

Заключение

Суммируем основные тезисы нашего исследования.

1. (Основной тезис) Математика не является однородной — «одноцентровой» — научной дисциплиной. Говорить об единстве математики надо с некоторой долей осторожности. По своей природе математика разнородна, в ее составе есть два различных «центра», «арифметика» и «геометрия» [или

даже три «центра», если различить *арифметику* как науку о числе и *алгебру* как науку об операциях (алгоритмах)]. Эпистемологический статус этих составляющих математического знания различен. Если «арифметическая» составляющая тяготеет к априорному метафизическому знанию, то «геометрическая» составляющая тяготеет к апостериорной «физике». Следовательно, при решении вопроса об априорности математического знания надо учитывать ее неоднородный, «двух-центровый» характер. На протяжении истории развития математического знания происходит последовательная смена основной «центровости» математического знания. В отдельные исторические периоды преобладает либо «арифметическая» составляющая математики, либо ее «геометрическая» составляющая. Наряду с этим процессом «внутренней» флуктуации между «геометрией» и «арифметикой» статус математического знания в ту или иную эпоху определяется «внешними» детерминантами: математика сближается то с «физикой», то с «метафизикой».

2. Высказанный в предыдущем пункте тезис о неоднородности математического знания должен быть дополнен указанием на иерархичность — «вертикальную» неоднородность — математического знания, что особенно проявилось (и было осознано) на более зрелом этапе ее развития (XX в.). Если в п. 1 математика мыслилась как двухчленная — арифметико-геометрическая — иерархия, то теперь оказывается, что и сами эти дисциплины неоднородны, иерархичны. Например, согласно концепции Г. Кантора, в составе «арифметики» есть как «порядковые» (результат первой абстракции), так и «надпорядковые» — кардинальные — числа (результат второй абстракции). Тем самым внутренняя структура математического знания еще более усложняется. Соответственно это также накладывает существенные ограничения на решение вопроса об априорности (апостеорности) математики в целом, так как верхние ее этажи являются более «априорными», чем нижние.

3. Кроме того, необходимо отказаться от мифов (1) неизменного статуса метафизических сущностей, к которым относятся кантовские априорные формы, и (2) абсолютного противопоставления «априорное vs. апостеорное», которое выражает лишь крайние степени шкалы «содержательное — формальное». Это противопоставление имеет ограниченное методологическое применение и значимо (а) для анализа простых познавательных практик и (b) на начальных этапах анализа сложных познавательных практик. При более детальном анализе знания (познания) это различение
567
является слишком грубым и теряет свою эвристическую ценность. В качестве альтернативы предлагается использовать оригинальные концепции *динамического априоризма* и *эпистемологического гилеоморфизма,* являющиеся определенными вариантами априоризма.

Примечания

[1] Впервые о применении этой методологии было заявлено нами в статье «Сознание и бесконечность» [1] (см. «электронные версии» этой статьи «Способ бытия сознательных объектов»: http://www,philosophy.ru/library/ksl/katr_011.htm]; http://www.phiJosophy.ru/library/ks[/katr_008.htm]. Обратим внимание на то, что здесь пропущена гегелевская категория, или этап анализа, «количества». Это связано с тем, что при проведении гуманитарного исследования, а в данном случае мы анализируем математику как социокультурный феномен, количественный этап исследования вырожден до минимума.

[2] Определенным аналогом «дискретного» подхода {непрерывность vs. прерывность) М. Фуко в области естествознания является «парадигмальный» подход Т. Куна.

[3] Восходящий к «археологии» М. Фуко вопрос об «историческом» единстве математики, т.е. является ли она единым историческим феноменом, а не разрозненной цепью различных — «дискретных» — исторических практик, будем все время держать в уме на протяжении нашего исследования, хотя начнем его с несколько наивного предположения об исторической «непрерывности» математической практики, вполне возможно, значительной модифицируемой, вплоть до постулируемых Фуко «разрывов», на протяжении ее истории.

[4] Заметим, что отмеченный чуть выше «сериальный» подход М. Фуко очень близок к концепции «семейного

сходства» Л. Витгенштейна, предназначенной для анализа феноменов с «размытыми» границами и не имеющим единого концептуального ядра, к которым можно отнести любой исторический феномен, в том числе и математическую деятельность (см. изложение концепции «семейного сходства» в |3, *с*. 110—111]). Уточняя нашу методологию в данном исследовании, можно сказать, что мы придерживаемся сильного варианта концепции «семейного сходства», при котором некоторое общее «ядро» (математической деятельности) — пусть и довольно расплывчатое — все же можно указать. Сам же Л. Витгенштейн предложил слабую версию концепции «семейного сходства» для работы с такими «размытыми» в коннептуальном отношении феноменами, для которых единую общую черту (формально «общее») указать в принципе невозможно.

[5] Заметим, что предложенное состоящее из двух частей разделение единого математического псевдокомплекса на «геометрию» и «арифметику» является достаточно устойчивым на протяжении всей истории математики (здесь и далее закавыченные «геометрия» и «арифметика» будут пониматься предельно широко; они, в частности, «покрывают» вейловское различение «топология vs. алгебра»), В данном случае это яапяется лишь предварительной гипотезой, которая обладает эвристическим потенциалом в пользу неоднородности математического знания. Принципиальным в данном случае является переход от единственности математики к множественности математик, а вопрос о «количественной» стороне этого перехода в данном случае не так важен. Например, если обратиться к работе Н. Бурбаки «Архитектура математики», в которой высказан тезис об единстве математики, можно найти трехмастное разбиение «единой» математики на структуры топологии, алгебры и структуры отношения

568

порядка. К этому же близок и Г. Вейль, говорящий о наличии в математике промежуточных между алгеброй и топологией структур «количественных», или порядковых, чисел [4, с. 26]. Однако, несмотря на выявление в «единой» математике разнородных структур, вопрос о разнородности математики как таковой молчаливо обходится стороной. Заметим, что это связано с тем, что «внутри» математики действуют мощные «центростремительные» силы, восходящие еще к mathesis universalis Декарта—Лейбница, которые, согласно Бурбаки, проявляются, например, в единстве методов математической деятельности (аксиоматический метод) и создании единого математического языка и базиса (теория множеств). Хотя тот же Г. Вейль указывает на альтернативу аксиоматического метода — метод конструирования.

[6] Памятуя об отмеченной Фуко ошибке «поспешного единения», вполне возможно, что вместо единою понятия «бесконечности» необходимо говорить о двух бесконечностях: топологической (непрерывной) бесконечности—континуальности и алгебраической (дискретной) бесконечности—множественности. В этом случае разрыв между «арифметикой» и «геометрией» остается.

[7] Исходя из общих соображений, понятно, что вейлевское разделение математики на топологию и алгебру не строго соответствует античному разделению на геометрию и арифметику. Если античная геометрия в большей, мере соответствует современной топологии, то различие между античной арифметикой и алгеброй более значительно. Это связано с тем, что собственно алгебра была привнесена в европейскую математику через Арабский Восток. Однако если в качестве критерия различения выбрать пару «дискретность vs. континуальность», то сближение (отождествление) арифметики с алгеброй и геометрии с топологией вполне правомерно.

[8] Вот как Прокл конституирует способность воображения: «Именно поэтому иногда воображение решаются назвать "аффицируемым умом", Однако же, если это ум — как он может быть аффицируемым и материальным? И если он действует на основе аффектов, то правильно ли называть его умом? Ведь уму и умной природе (с чем, например, "работает" арифметика. — *С. К.)* соответствует неаффицируемостъ, а сфера аффектов далека от нее. Впрочем, я думаю, что воображение названо так в силу желания выявить его срединное положение между самыми, высшими и самыми низшими познавательными способностями: "умом" — поскольку оно имеет сходство с наивысшими, но в то же время — "аффицируемым", поскольку оно имеет сродство с низшими (т.е. познанием через органы чувств, как пишет Прокл чуть ниже. — С.К..)» [7, с. 137).

[9] Заметим, что выделенная «внешняя» детерминация математического комплекса «внутри» пары «физика vs. метафизика», где «физика» и «метафизика» задают нижнюю и верхнюю границы возможного местоположения математики, является как бы самой «внешней» детерминантой, т.е. одной из детерминант, по критерию априорности. Если же мы несколько меняем критерий анализа математического знания, например, нас интересует не его априорность, а близкие к ней степени его абстрактности, формальности (взаимоотношение с логикой), то можно выделять другие, «внешние» по отношению к математике «интервалы». В этом случае картина «флуктуации» математики будет более детальной, но его анализ усложняется. Поэтому здесь мы ограничимся заведомо упрощенной «картинкой», пренебрегая различиями между указанными критериями, т.е. понимаем «априорность» в расширенном — неуточненном — смысле. Анализ и уточнение смысловых компонентов концепта «априорное» будут проведены ниже, во второй части нашего исследования.

[10] В .задачи нашей работы не входит детальное исследование той интеллектуальной революции в области математики, которую совершил Р. Декарт. Некоторое

представление о величии этого революционного переворота можно почерпнуть из приводимых ниже цитат исследователей творчества Декарта, взятых из учебника «Западная философия от истоков до наших дней» Дж. Реале и Д, Антисери (СПб., 1996. Т. 1 С. 208—211): «Геометрия греков может быть сравнима с изяшной ручной работой, алгебра арабов — с автоматическим производством. Мы можем сказать, что современная математика началась три столетия назад, когда алгебраические механизмы стати применять в геометрии и изучение кривых, поверхностей, геометрических фигур стало переводиться в изучение определенных уравнений» (Л. Ломбарде—Радиче): «Концепция Декарта наносит последний удар по концепции греков, геометрия окончательно утратила свой титул королевы математики, и на место геометрической математики приходит математика алгебраическая... Западная цивилизация, посредством применения двойного алгоритма в физике и механике, трансформировала облик Земли. Из фазы ручного труда математика перешла в фазу промышленного развития» (Э. Колериус). Как мы уже отмечали ранее, есть тонкое различие между (античной) арифметикой и (арабской) алгеброй, которое связано с тем, что алгебра выступает как алгоритмо-функциональная «работа» с числами. Однако на этом этапе различием между арифметикой и алгеброй можно пренебречь и говорить об едином «арифметико-алгебраическом» математическом комплексе в его отличие от геометрического комплекса. В настоящее время, время развития ЭВМ, алгебра (дискретная математика, программирование) выступает уже как третья самостоятельная составляющая, наряду с «геометрией» и «арифметикой», математики.

[11] Обратим внимание на одну удивительную особенность новой парадигмы математики: ее онтологическим базисом в отличие от эпистемологии выступает уже не «арифметика», а «геометрия» в виде декартовской «субстанции протяженной» {ср. с декартовой системой координат как общем «поле» любых представлений). Этот же ход мысли затем повторяется у И. Канта и будет настойчиво воспроизводиться в европейской культуре вплоть до начала XX в. (подробнее об этом см. ниже). Поэтому говорить о безоговорочной победе «арифметики» над «геометрией» (см. предыдущую ссылку) было бы слишком опрометчиво.

[12] Заметим, что Кант существенно переосмысливает античную – аристотелевскую — «категориальную сетку», выводя из ее состава категории «места» и «времени». Причем эта редакция более радикальна, чем может показаться на первый взгляд, так как в аристотелевской категориальной сетке {см. соответствующие главы аристотелевской работы «Категории»), по существу, рассматриваются две различные категории пространства и времени: (1) как разновидности категории «количества» («математизированные» анатоги пространства и времени как модусы непрерывного количества) и (2) как «физические» категории (собственно аристотелевские категории «места» и «времени»). Кант же анализирует лишь математизированные анаюги пространства—времени.

[13] Заметим, что согласно Канту, математика по степени своей априорности (абстрактности, теоретичности) значительно уступает «физике», что не согласуется с общепринятым сейчас положением о большей абстрактности математического знания по отношению к другим наукам и указывает на значительную модификацию кантовской парадигмы математики в настоящее время.

[14] Статейный формат нашего текста не позволяет подробно анализировать кантовскую концепцию пространства—времени. Конечно, отношение Канта к категории «времени» намного сложнее, чем это представлено здесь. «Время» в отличие от «пространства» рассматривается Кантом не только как «чистое чувственное созерцание», но и как «посредник» между чувственностью и рассудком. Однако в контексте нашей работы этим можно пренебречь, поскольку

категория «времени» у Канта все же не является категорией рассудка. Более того, анализ каитовской «Критики чистого разума» (далее — КЧР) показывает, что сам Кант различает пространство и время как чувственные созерцания и рассудочные категории, но развернутого учения о категориальных пространстве и времени (например, о трехмерности пространства и одномерности времени) не дает. Более подробное изложение кантовского учения о времени можно найти в работе М.Хайдеггера «Кант и проблема метафизики» (хотя здесь предложена оригинальная и не всеми принимаемая интерпретация), а также в обстоятельном анализе В.И. Молчанова «Время и сознание». Другим интересным развитием темы соотношения чувственного и рассудочного является «реабилитация» пространства в качестве (рассудочной) категории. Наметим здесь только основную линию такой «реабилитации», оставаясь в рамках априоризма. «Пространство» как априорное условие познания оказалась настолько значимым для эволюционного выживания человека, что для повышения его биологической эффективности произошла модификация рассудочной категории «пространства» в сущность более «низкого» уровня — чистое чувственное созерцание «пространства», «работать» с которым намного эффективнее из-за более быстрого — без рассудочной рефлексии — «времени загрузки».

[15] Как уже отмечено выше, Кант, развивая принципиально новое — априорное — понимание пространства и времени, не дал их развернутой концепции, как впрочем у него нельзя найти и развитого анализа математической деятельности. Фактически он обозначил лишь начальные контуры этой концепции, а его анализ математики ограничен лишь элементарными примерами геометрических — «чертежных» — доказательств. Поэтому приписывать самому Канту те или иные положения о природе математического

знания представляется несколько натянутым. Учитывая это, мы все же рискнули назвать анализируемую нами концепцию математического априоризма «кантовской», поскольку (1) в ее основе лежат взгляды И. Канта о чувственно-априорной природе пространства и времени, которые он использовал для анализа математического : знания; (2) именно так были восприняты и функционировали кантовские положения в интеллектуальной культурной среде конца XVIII — начала XIXв.

[16] Следуя выявленному нами феномену исторического чередования «арифметического» и «геометрических» периодов в развитии математики, можно ожидать, что на смену «алгебраизации» математики конца XIX — первой половины XX в., связанной с деятельностью Кантора. Фреге, Гильберта, должен прийти ренессанс «геометрической» компоненты математического знания, что и происходит во второй половине XX в. и связано с появлением более «геометризированной» *теории категорий* как радикальной альтернативы «арифметическому» теоретико-множественному подходу. Неизбежным следствием этого является определенное снижение (внутреннего) эпистемологического статуса — степени априорности — математического знания при общем повышении степени ее абстрактности.

[17] Как уже отмечалось выше, «метафизическая» позиция Фреге гораздо радикальнее канторовской. В самом начале своей работы «К обоснованию учения...» Г. Кантор дает ставшее классическим определение множества: «под "множеством" мы понимаем соединение в единое целое определенных хорошо различимых предметов ***m*** нашего созерцания или мышления» [10, с. 173]. Как показывает текстологический анализ работ Г. Кантора, здесь «предмет» понимается в обычном — «эмпирическом» — смысле, а числа возникают путем абстрагирования от предметов, что дало основание Г. Фреге отнести Г. Кантора как сторонника понимания математики как опытной науки [11, с, 48].

571

[18] Я думаю, что мысль Фреге станет понятней, если мы выразим ее так: «число (один) не может быть *реальным,* или содержательным, предикатом» (ср. с известной кантовской фразой о том, что *«бытие не является реальным предикатом»),* т.е. таким предикатом, который привносит нечто новое (содержание) в субъект суждения. Тем самым сказать «Солон один» — это просто сказать «Солон», а «добавка» термина «один» в первой фразе ничего не добавляет к «содержанию» термина «Солон». В этом смысле языковое употребление термина «один» сходно с использованием основного метафизического термина «бытие»: «Солон» тождествен «(одному, существующему) Солону» в отличие от выражения «мудрый Солон», которое высказывает нечто новое о Солоне, т.е. является синтетическим суждением. Чуть позже Фреге приводит еще один пример, поясняющий его (и нашу) мысль: «Помыслите (eine) и попробуйте, изменится ли представление, если неопределенный артикль заменить числительным "один". Ничего сверх того не происходит, в то время как слову "зеленый" в представлении все-таки нечто соответствует» [11, с. 84]. Заметим, что фундаментальное различие между числами и содержательными предикатами закреплено в грамматике языка, так как числа являются числительными, в то время как содержательные предикаты — прилагательными.

[19] Обратим внимание на концептуальное сходство в понимании числа Кантора и Фреге. Кантор расширил понятия числа за счет совершения второй — «над-порядковой» — абстракции (см. его определение «кардинального числа»). Фреге, аналогично Кантору, рассматривает числа как характеристику не предметов, а понятий, т.е. как абстракцию второго уровня (подробнее об этом см. ниже).

[20] Термин «концепт» будет употребляться здесь в том специальном значении, которое придали ему Делез и Гваттари [12]. т.е. «концепт» не является синонимом любого понятия. Более точно: (I) «концепт» — это то, с чем «работает» философия в отличие от «функтивов» науки и «перцептов» искусства; (2) любой «концепт» (например, кантовское a priori) является составным, т.е. обладает сложной «смысловой» структурой, которую и надо выявить в ходе анализа.

[21] Отметим, что здесь Кант не столько переосмысляет, сколько существенно развивает концепцию Лейбница о том, что «в уме нет ничего, что не происходило бы из чувств, — кроме самого ума, или того, что он понимает» [13, с. 374]. У Канта лейбницевский «сам ум» является уже не красивой метафорой, а вполне конкретным набором априорных форм. Здесь можно указать на еще одного неявного предшественника Канта — Аристотеля, который трактовал ум как «форму форм». Однако если Аристотель и его средневековые последователи склонялись к трактовке «ума» как «пустой формы», способной отождествлять себя с любой другой «формой» (идеей) веши и тем самым достигать ее полного познания, то Кант эту вариабельность ума ограничивает определенным набором априорных форм, а сами «формы» (идеи) лишает природного статуса и помешает их «внутрь» ума.

[22] В содержательно-концептуальном аспекте, опираясь на Декарта. Кант в методологическом аспекте опять-таки опирается на Лейбница, который разделил все «понятия» на три уровня: *«только чувственные* — составляющие предмет каждого отдельного чувства, *чувственные и умопостигаемые одновременно* — принадлежащие обшему чувству, и *только умопостигаемые* — присвойственные только уму (или "рассудку", в кантовской терминологии. — *С.К.)»* [13, с. 374).

[23] Заметим, что если же признать в качестве базовых математических структур только «топологические» и «алгебраические» структуры, то кантовские априорные формы «пространства» (как соответствующие **непрерывным** *топологическим структурам)* и «времени» (как соответствующие **дискретным**

алгебраическим структурам) выполняют функцию трансцендентальных оснований математического знания.
572

[24] В современной эпистемологии предложен интересный подход к разрешению этой проблематики в рамках так называемой *эволюционной теории познания* [20]. Этот подход предлагает слишком уж кардинальный отход от кантовской мысли в сторону «эмпиризма», так как объясняет их возникновение апостериорным приспособлением к среде обитания. Но именно поэтому (в силу своей излишней кардинальности) он не столько решает проблему «происхождения» априорных форм, сколько (неявно для своих приверженцев) загоняет ее вглубь: объяснять возникновение априорных форм эволюционным приспособлением — не отказываться от априоризма в принципе, а вводить теперь уже априорную способность *эволюционного приспособления,* хотя теперь эта априорная форма имеет в отличие от Канта не статический, а динамический, или деятельностный, характер, что соответствует, скорее, не кантовским априорным формам, а выделяемым Кантом познавательным способностям.

[25] На роль «абсолютно» априорного может претендовать, например, высший тип кантовских априорных форм — «идеи разума», а на роль «абсолютно» апостеорного, т.е. эпистемологической «первоматерии», — кантовская «вещь в себе», или, если обратиться к более поздней философской традиции (например, аналитической философии XX в.), так называемые первичные *чувственные данные.*

[26] Такое понимание познания как трехчленного отношения в рамках модельной концепции познания является в настоящее время общепризнанным. В этой связи укажем лишь на две фундаментальные переводные работы, посвященные изложению этой концепции [19; 20].

[27] Интересную конкретизацию указанной модели познавательного акта на примере процесса понимания (смысла) слов предложена В. Налимовым [21]. Он использует байесовскую формулу $p\ (m/y) = k*p\ (y/m)*p\ (m)$, в которой $p\ (m)$ — априорное начальное знание, а $p(y/m)$ — апперцептивный (по Лейбницу) «фильтр» (например, наше настроение), который тоже имеет локально-априорный характер, хотя и другой, отличной от $p(m)$ природы. Последующий познавательный — понимательный, по Налимову, — акт в качестве априорного базиса будет использовать уже модифицированное в ходе начального этапа априорное $p(m/y)$ и т.д.

[28] Механизмы образования и модификации этого типа априорных форм — кантовских априорных форм в собственном смысле этого слова — исследуются в рамках *эволюционной эпистемологии* (подробнее об этом см. в [20]). Выше мы уже говорили об этом подходе как об отходе от априоризма.

Спнсок литературы

1. *Катречко С.Л.* Бесконечность и сознание // Бесконечность в математике; философские и исторические аспекты. М., 1997. С. 329—337.
2. *Фуко* М. Археология знания. Киев, 1996.
3. *Витгенштейн Л.* Философские исследования // Витгенштейн Л. Философские работы. Ч. 1. М., 1994.
4. *Вейль Г.* Топология и абстрактная алгебра как два способа понимания в математике // Вейль Г. Математическое мышление. М., 1989.
5. *Вейль Г.* Математическое мышление // Там же.
6. *Катречко С.Л.* Бесконечность и теория поиска вывода // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты (сборник). М., 1997. С. 190—196.
7. *Прокл.* Комментарий к первой книге «Начал» Евклида. Введение. М., 1993.
8. *Кант И.* Критика чистого разума (сер. «Философское наследие»), М.. 1994.
9. *Райя Г.* Категории // Райл Г., Понятие сознания. М., 2000.
573
10. *Кантор Г.* К обоснованию учения о трансфинитных множествах // Кантор Г. Труды по теории множеств. М., 1985. С. 173—246.
11. *Фреге Г.* Основоположения арифметики (логико-математическое исследование о природе числа). Томск, 2000.
12. *Делез Ж., Гваттари Фр.* Что такое философия? СПб., 1998.
13. *Лейбниц Г.В.* Письмо Софии-Шарлотте (о том, что независимо от чувств и материи) //Лейбниц Г.В. Соч.: В 4 т. М,, 1984. Т. 3. С. 371-395.
14. Кант И. Критика чистого разума. М., 1994.
15. Катречко С.Л. Как возможно творческое воображение? // Воображение как познавательная способность http://www.philosophy.ru/library/image/sb_image.doc), а также телеконференцию «Как возможно творческое воображение?» http://www.fido7.net/cgi-bin/ fonimi.fpl?user=Kant).
16. *Маслов С.Ю.* Теория дедуктивных систем и ее применения. М., 1986.
17. *Маслов С.Ю.* Теория поиска вывода и вопросы психологии творчества // Семиотика и информатика. Т. 13. М., 1979. С. 17—46.
18. *Франк С.Л.* Предмет знания. СПб.. 1995.

19. *Вартофский М.* Модели. Репрезентация и научное понимание. М., 1988.
20. *Фоллмер Г.* Эволюционная теория познания {гл. «Познание и действительность»). М, 1998.
21. *Налимов В.В.* Вероятностная модель языка. М., 1979.

КОММЕНТАРИИ

А.И. Белоусов

Мне глубоко импонирует развиваемая автором концепция *динамического априоризма.* Эта концепция разбивает догму абсолютной неподвижности априорных структур познания и делает не только возможной, но и необходимой постановку вопроса о генезисе и превращениях того, что принято называть априорными формами чувственности, рассудка и т.п. Совершенно уместна в связи с этим и ссылка на Гегеля, которому мы обязаны наиболее логически разработанной системой динамической структуры логических категорий. В действительности же то, что называется априорным, есть, в терминах гегелевской философии, *снятое опосредствование.* То, что на самом деле глубоко опосредовано, но опосредствование *снято,* отринуто, подвергнуто *диалектическому* отрицанию. Возникает иллюзия непосредственности, очевидности, первичности. Весьма интересна идея автора о творческой догадке (и/или творческой ошибке) как разрыве непрерывности в процессе познания, отказа от того, что Гуссерль называл «мотивацией опыта». Но эту концепцию необходимо дополнить анализом категории *противоречия* как необходимой категориальной ступени на пути к пониманию закона[1]

---

[1] См. статью автора этих строк в настоящей сборнике.

Хотелось бы по этому поводу обратить внимание на один факт из истории науки. Как известно, Максвелл на основании опытов Фарадея мог написать только следующие два уравнения, связывающие напряженности электрического (Е) и магнитного (Н) полей в вакууме: $\mathrm{rot}E = (— 1/c)\ (\partial H/\partial t)$ и $\mathrm{rot}H = 0$. Но он записывает уравнение $\mathrm{rot}H = (—1/c)\ (\partial E/\partial t)$, которое не следовало ни из каких опытов[1].

Если бы Максвелл не ввел, «из соображений симметрии», как бы совершенно априори, понятие тока смещения (производной напряженности электрического поля по времени), то в разработанной без этого понятия, исключительно на основании опытных данных, теории не было бы *логического* противоречия, но отсутствие симметрии в данном случае можно трактовать как своего рода *эстетическое* противоречие. Дальнейшее развитие теории электромагнитных процессов привело как раз к логическому противоречию между уравнениями Максвелла (и следующими из них волновыми уравнениями) и принципом относительности Галилея. Это противоречие было снято в специальной теории относительности также априорным предположением о постоянстве скорости света во всех инерциальных системах отсчета.

Считаю необходимым высказать еще одно замечание по существу содержания статьи.

Автор совершенно справедливо указывает на полицентризм и иерархичность современной математики, но желание «спасти» геометро-арифметическую парадигму (в современной математике превращенную в парадигму тополого-алгебраическую) приводит к некоторым натяжкам. Топологические структуры вполне можно считать более обшими, чем алгебраические (алгебраическая система замыканий есть частный случай топологической[2]). Структура порядка также есть частный случай топологической. Более того, разработанная Ю.Л. Ершовым и Д. Скоттом топологическая теория вычислимости показывает, что топология «поглощает» и теорию алгоритмов. Так что речь нужно вести, скорее, не об оппозиции топологии («геометрии») и алгебры («арифметики»), а об оппозиции и взаимодополняемости двух типов конструирования бесконечности в математике: условно назовем их «гилетическим» и «логическим»[3]. Первый ближе к «меону», апостериори естественных наук, второй — к «эйдосу», априори «чистой» математики.

---

[2] См.: *Франкфурт У.И.* Специальная и общая теория относительности. М., 1968. С. 4.

[3] См.: *Кон П.* Универсальная алгебра. М., 1968. С. 59.

[1] См.: *Белоусов А.И.* Эстетика и топология // Стили в математике. СПб.,1999. С. 172-187.

575

Анализ этих двух типов конструирования (как исторический, так и логический) помог бы пролить дополнительный свет на проблему математического априоризма.

А.Ф. Кудряшев

В конце статьи довольно отчетливо формулируются ее тезисы, включая первый в качестве основного. Общий настрой автора представляется верным. В то же время имеются варианты, например, в толковании соотношения между математикой и метафизикой. Однозначность здесь очень сомнительна. Так, разведение алгебры и геометрии на базе различения, соответственно, дискретности и непрерывности (континуальности) не совпадает с противопоставлением метафизики и физики. Метафизика внутри себя так или иначе различает онтологические вопросы о бытии континуума и бытии отдельных, дискретных единиц (монад), тогда как в физике тоже специфицируются характеристики вещества и поля.

Тезис о неоднородности математики принципиально важен и его нужно развивать дальше. Автор сам намечает путь развития, переходя от указания на простую двучленную иерархичность математического знания к рассмотрению еше более сложной иерархии (тезис 2). Но такой путь скорее всего вовсе не ведет к упрощенному выводу о большей априорности «верхних» этажей математики по сравнению с «нижними».

Следует согласиться с тезисом о мифологизации абсолютного противопоставления априорного и апостериорного, но вот о чем стоит подумать дополнительно: правда ли, что это противопоставление значимо «для анализа простых познавательных практик» и «на начальных этапах анализа». На самом деле «простое» и «начальное» в данном случае выглядят как «весьма сложное» и даже «итоговое».

П.С. Куслий

Основной тезис статьи С.Л. Катречко заключается в том, что математику невозможно рассматривать как гомогенную дисциплину и, следовательно, однозначно противопоставлять опыту. Автор предлагает рассматривать a priori и posteriori в математике лишь как два условных (не абсолютных) полюса, к которым в разное время тяготеют математические концепции. Этими полюсами он условно называет алгебру как априорную дисциплину и геометрию как дисциплину, в большей степени склоняющуюся к опыту. Причем саму математику он рассматривает как находящуюся между

576

физикой и метафизикой при «восхождении» от первой к последней, поэтому тенденция смещения «вверх» или «вниз» возможна и относительно математики в целом. Таким образом, становится довольно сложно или даже невозможно говорить о непрерывном стремлении всей математики к одному из «полюсов». Автор предлагает рассматривать историю математики как историю «внутренней» флуктуации этой дисциплины между двумя полюсами при переходе от одной теории к другой, а также и ее «внешней» флуктуации в разные эпохи. Такое общее рассмотрение математики представляет очень сложную картину этой дисциплины, являющейся настолько неоднородной, что становится не важно, как ее рассматривать: или как набор отдельных практик, или как общее явление. Целью данного комментария является попытка усилить позицию Сергея Леонидовича, предложив дифференцированный подход к рассмотрению математики.

История математики является дисциплиной гуманитарной, а гуманитарные дисциплины, как известно, противятся нахождению внутри них строгой структурности и гораздо лучше поддаются толкованию. Это нам кажется важным, так как, несмотря на утверждение автора о неоднородности математического знания, он говорит о ней как о «вертикальной» неоднородности, отражающей «иерархичность» математического знания. Нам кажется, что слово «иерархичность» или «иерархия» здесь не совсем подходит для отражения, вышеизложенной теории в том смысле, в каком она единственно представляется нам понятной. Дело в том, что всякая иерархия подразумевает некое восхождение по строго определенным уровням, от четко определенного «низа» к одинаково четко определенному «верху», внутри какой-либо системы (иллюстрацией этому служит выражение «иерархическая лестница»). Что касается области математического знания, то в ней невозможно выделить четко разграниченные уровни восхождения от апостериорного к априорному, так же как и невозможно, — об этом пишет и автор, — определенно указать сами полюсы на одном эпистемологическом уровне с математическими концепциями, являющимися «звеньями» этой «иерархии».

Следует добавить, что, не допуская категориальных ошибок, вряд ли можно рассматривать математику как дисциплину иначе, чем как область математических практик, связанных между собой, хотя бы и отношением *семейного сходства* Витгенштейна, которое тем не менее не мешает нам говорить о едином феномене математики, но на ином более абстрактном эпистемологическом уровне. Картина *семейных сходств* Витгенштейна не является картиной *«кентаврических* сцеплений» различных практик. Следует

577

всегда помнить, что в данном случае мы имеем дело с гуманитарными науками, в сфере действия которых описание области исследования с помощью строгой структурной «сетки» (например, иерархии) дает только приблизительное описание происходящего. Возвращаясь к тексту статьи и вследствие вышесказанного, хочется предложить заменить слово «центровость» (которое, на наш взгляд, отсылает к идее полюсов) на какое-нибудь другое, оберегающее от возможной категориальной ошибки (например, на слово «тенденция»). Сам автор пишет: «Однако вполне возможно, что на своих верхних ступенях эти иерархии априорно-абстрактного и апостериорно-абстрактного "пересекаются", т.е. сливаются в одну область сверх абстрактного. Поэтому при анализе высших ступеней этих иерархий можно отказаться от мифа абсолютного противопоставления априорного и апостериорного». Вместо этого мы (в этой работе) предпочитаем говорить о "степени" априорности, или абстрактности, или формальности того или иного феномена». Таким образом, суть нашего уточнения сводится к предложению распространить высказанное автором рассмотрение именно *степени* априорности относительно всей математики и отказаться от употребления иерархической структуры. Математические теории действительно можно различать по их отвлеченности от эмпирического опыта, так же как и можно видеть флуктуации математического знания, о которых пишет автор, но для плодотворного результата следует стремиться к рассмотрению проблем в единой общей плоскости.

Что касается систем Фреге и Кантора, то их, безусловно, следует рассматривать как примеры в поддержку тезиса о флуктуации математического знания в данном случае в сторону увеличения в них степени априорности. Здесь хотелось бы добавить, что законы арифметики для Фреге являются априорными аналитическими, подчиняющимися объективным законам логики. Он сам подчеркивает свое расхождение с Кантом, считающим их синтетическими априорными. Таким образом, Фреге сам пишет о том, что его теория является гораздо в большей степени априорной, чем теории его предшественников, начиная с Декарта и Лейбница. Указание на число, по Фреге, представляет собой *высказывание о понятии,* что подразумевает определенную степень абстракции. Число может быть только идеальным бытием, потому что оно подразумевает набор *равных* между собой единичностей, которые невозможны в эмпирическом мире. Фреге вводит термин «объем» понятия, указывающий на двойное абстрагирование ог чувственной данности. Только таким способом, пишет он, можно дать определение нулю и единице. Числу 0 соответствует объем высказывания «неравное себе» или «равно 0 и неравно 0» (т.е.

578

ничто). Следовательно, указание на число I соответствует высказыванию «равно 0», так как объемом этого понятия яапяется лишь *одно* число, т.е. 0. Фреге распространяет свою систему и на бесконечные числа Кантора: бесконечное число ∞ есть число, подпадающее под понятие «конечное число».

В заключение хочется еще раз повторить наше предложение рассматривать различие математических теорий в «горизонтальной» плоскости общего математического знания, а также поблагодарить С.Л. Катречко за интересный историко-научный доклад.

ОТВЕТ АВТОРА

А.И. Белоусову [1]

В комментарии А.И. Белоусова намечены (по-моему, очень важные) «точки бифуркации» современной методологии и философии математики. Прежде всего это сосредоточение анализа на *математическом конструировании как «первичной» математической деятельности* (в противовес «вторичной» деятельности строгого формального доказательства; ср. с вейлевским противопоставлением *конструктивного* и *аксиоматического* подходов в математике), а кроме того, сопоставление *математического конструирования с другими практиками «творческого» конструирования* (например, в музыке). Идея о наличии в математической деятельности разных типов математического конструирования представляется очень плодотворной. В этой связи можно сослаться на И. Канта, который в КЧР помимо *рассудочного* — последовательного — *синтеза* (это, видимо, соответствует логическому конструированию) выделяет еще и *фигурный синтез воображения* (это, видимо, соответствует *гилетическому* конструированию), а в своем знаменитом § 77 из КСС вводит «прообразный» рассудок, способный осуществлять интуитивное (= инсайтное) усмотрение целого (= платоно-гуссерлевская эйдетическая интуиция), что позволяет (гипотетически) говорить и о третьем типе конструирования — собственно эйдетическом (хотя не уверен, что он «работает» не только в метафизике, но и в области математики).

Теперь перейду к уточнению своей позиции, изложенной в статье.

1. Начну с последнего абзаца комментария. Как справедливо указывает А.И. Белоусов, в моей статье часто эксплуатируется «геометро-арифметическая парадигма» строения математики.

---

[1] См. полный электронный текст: http://www.phLlosophy.ru/libraiy/ksl/ philmath_200l.html579

Однако в данном случае я выражаю не столько свою позицию, сколько отмечаю достаточно устойчивое на протяжении всей истории математики, начиная с античности (Платон, Прокл, ..., Кант) и вплоть до наших дней (Вейль, Бурбаки), представление о неоднородном (по крайней мере бинарном) характере математического знания, что необходимо учитывать при методологическом анализе его оснований. Более того, история (математики) показывает, что происходит своеобразное чередование внутри этого бинарного комплекса в пользу одной из составляющих, которое носит временный (локальный в историческом масштабе) характер и не должно вводить в заблуждение любого исследователя-методолога. Поэтому указание на современное «топологическое поглощение» других составляющих математического комплекса (алгебраических структур, структур порядка и теории алгоритмов), что в рамках моего анализа соотнесено с переходом от «статического» теоретико-множественного языка к более «функциональному» языку теории категорий, не следует трактовать как глобальную топологизацию математики. Топологическое «поглощение», с учетом отмеченного выше чередования составляющих, — локальное явление, а редуцирование всей математики к топологическим структурам рано или поздно столкнется с новым феноменом (геделевской) «неполноты» этой редукции-формализации (или «противоречием», если использовать восходящий к Гегелю язык самого А.И. Белоусова) и необходимостью перехода к иным — нетопологическим — основаниям математического знания.

2. Перейдем теперь к обсуждению первого абзаца текста комментария, в котором развиваемая мной концепция *динамического априоризма* напрямую увязывается с диалектикой Гегеля. Причем для самого А.И. Белоусова (это видно из его текста в наст, сб.) фигура (диалектика) Гегеля явно значима. Как правильно замечает автор комментария, процесс познания — это (динамический) процесс, в ходе которого «снимается» абсолютная неподвижность познавательных структур. Собственно, этот тезис не нуждается в специальном обосновании, так как сам феномен развивающегося знания подтверждает динамику человеческого познания, его креативный характер. Нашей заслугой можно считать распространение «динамики» на область *априорного,* т.е. концепция динамического априоризма может быть вписана в более общий контекст «динамического» рассмотрения исходных оснований человеческого познания. В рамках нашего сборника — это концепции (1) *эволюционной эпистемологии* А.Н. Кричевца и (2) *праксеологического априоризма* В.Я. Перминова. В обоих слу-
580
чаях дан механизм развития априорных форм: в (1) — как процесс биологического приспособления человеческого интеллекта с целью выживания человека; в (2) — как детерминация «чистого» (математического) знания a priori «праксисом». Сходство (I) и (2) проявляется в том, что область чистого a priori обусловливается внешними по отношению к процессу познания факторами [хотя в случае (2) это выражено не так явно]. Отличительной же особенностью концепции динамического априоризма является нацеленность на выявление «внутренних» (само)детерминант развития априорного, что, безусловно, роднит ее с (диалектическим) подходом Гегеля. В этом смысле развиваемый А.И. Белоусовым подход, на мой взгляд, однотипен с концепцией динамического априоризма [и отличен как тип от концепций (1) и (2)].

Поэтому тем более важно (для уточнения методологических оснований предложенной мной концепции динамического априоризма) показать различие между гегелевской диалектикой (в интерпретации А.И. Белоусова) и используемой мной, восходящей к Ж, Делезу и Фр. Гваттари (см. их совместную работу «Что такое философия?»), методологией, которую я обозначил как *концептуальный анализ.*

Остановимся на этом подробнее. Концептуальный анализ, нацеленный на выявление смысловых «составляющих» тех иди философских понятий (концептов — у Делеза), никаких изначальных схем их (само)развития не предполагает. Для иллюстрации этого различия возьмем характерный пример гегелевского «моноциклического» схематизма (= «одномерный моноцикл») из статьи А.И. Белоусова: «Бытие → Ничто → Бытие → Ничто →...», который в рамках концептуального анализа можно заменить на ветвящуюся квазицикличную последовательность (бесконечно ветвящееся дерево):

==================== …= === …

=============== Бытие$_{11}$ → Ничто$_{110}$ → …

====== Ничто$_1$ Бытие$_{10}$ → Ничто$_{100}$ → …

Бытие$_0$ Ничто$_0$ Бытие$_{01}$ → Ничто$_{010}$ →…

= Ничто$_2$ Бытие$_{20}$ → Ничто$_{200}$ →…

Бытие$_{22}$ → Ничто$_{220}$ →…

==================== ….= === …..

Я думаю, что дело здесь заключается в том, что под диалектикой в истории мысли понимаются достаточно разнородные мыслительные практики. В качестве общего — «родового» — имени подобных мыслепрактик работы с абстрактными сущнос-

581

тями может быть выбрано название *«концептуальный анализ»* [ср. с (обшим) понятием «игры» у Витгенштейна при обсуждении им концепции «семейного сходства»]. Суть этих практик — анализ смыслов, содержащихся в «узлах» той или иной понятийной конструкции, установление «сетки» сходств и различий между ними и выявление «смысловых траекторий» (или переходов) в сформированном мыслителем понятийно-смысловом универсуме [см. прекрасное обоснование специфики «диалектического» (философского) подхода в противовес «физическому» у Аристотеля (О душе, 403a25 — 403b15)].

В истории мысли можно выделить несколько типов *диалектики* (формат «ответа» не позволяет дать более подробную классификацию, поэтому ограничусь здесь кратким наброском). Во-первых, это диалектика Платона и Аристотеля, которая может быть названа *диалектикой различия*[2]. Суть этого типа диалектики в выявлении различий и взаимосвязей между различными концептами с целью создания некоторой «непротиворечивой» концептуальной системы, пригодной для описания той или иной области реальности (или. в предельном случае, — мира в целом). Во-вторых, это *диалектика тождества,* или *диалектика совпадения противоположностей,* представленная Н. Кузанским (см., например, его знаменитое отождествление абсолютного минимума и абсолютного максимума), суть которой заключается в установлении, по возможности, всеобъемлющей системы отождествлений (подобий), за счет чего предпринимается попытка построить пантеистическую — единообразную — картину мира (сотворенного *единым* Богом по *единому* плану и *единообразно).* В-третьих, это *диалектика противоречия* Гегеля, в рамках которой — за счет «смысловой конденсации» — общее (обширное) концептуальное поле «преобразуется» в дискретный небольшой набор (противоположных) концептов и вводится «логика» взаимосвязей понятий следующего вида (гегелевская диалектика в узком смысле): выбирается единое основание, а переход от понятия к понятию осуществляется по схеме триадичной спирали (моноцикла — у А.И. Белоусова) «тезис—антитезис—синтез». При этом акцент анализа смещается в сторону противоречия, так как именно оно и выступает «механизмом» перехода от одного концепта (как тезиса) к другому (как антитезису). Наконец, это собственно концептуальный анализ Ж. Делеза — Фр. Гваттари —

-------:------------

[2] Б основе этого подхода лежит «изобретение» Платоном следующей грамматической конструкции: *«с **одной стороны... с другой стороны**...».* Например, монета, *с одной стороны.* — орел, а *с другой стороны,* — решка (не-орел), и в этом нет никакого противоречия.

582

М. Фуко (концептуальный анализ в узком смысле; ср. с «логикой смысла» Ж. Делеза и/или «сериальным» подходом М. Фуко), который в определенном смысле является обогащенной диалектикой различия Платона—Аристотеля. В данном случае перед исследователем находится множество разнородных концептов (сформированных в разных философских системах), каждый из которых представляет сложное (смысловое) образование каких-то начальных «смысловых единиц». Изменяя исходный набор и/или добавляя в него собственные оригинальные компоненты, можно осуществлять «диалектический» переход от одного концепта к другому. Тем самым выстраиваются определенные «серии» концептов, которые не обязательно образуют гегелевскую триаду и/или сводимы к одному исходному концепту (в этом случае изображенное на схеме дерево превращается в *ризому* с начальными Бытие$_{01}$, Бытие$_{021}$, Бытие$_{03}$, ...)[3].

Что же касается упомянутой в комментарии необходимости разработки (гегелевской) категории *противоречия,* то в данном случае мне представляется методологически оправданным более «мягкий» аристотелевский подход *(диалектика различия* vs. *диалектика противоречия],* при котором выделяются несколько видов противолежания: *противоречащее одно другому, соотнесенное, противоположное, лишенность* и *обладание* (здесь *противоречие* выступает как самый сильный вид противолежания). К сожалению, последующая философская мысль — гегелевская диалектика не является здесь исключением, а, скорее, служит наиболее ярким примером — свела все это многообразие противолежаний лишь в одну предельную категорию *противоречия,* тем самым существенно ограничив возможности своего методологического анализа (конечно, в гегелевской диалектике фигурирует промежуточная категория «различие», но она выполняет явно вспомогательную роль как бы неразвитого противоречия), Эта же редукция проявляется и в кантовской абсолютизации противопоставления априорного — апостериорного, в то время как на самом деле «существует» как бы целый спектр промежуточных концептуально-смысловых «сущностей», обладающих разной «степенью априорного», что в своей статье я попытался выразить концептуально как *эпистемологический гомеоморфизм.* Точно так же нельзя абсолютизировать и категорию *противоречия,* ее надо заменить целым «спектром» аристотелевских противолежаний.

---

[3] Собственно именно концептуальный анализ этого рода с целью выявления основных «смысловых» составляющих и был применен мной при анализе концепта «a priori».

А.Ф. Кудряшову[1]

1. Следует заметить, что историческое сопоставление арифметики (алгебры) как «верхнего» — более априорного — этажа математического знания с метафизикой, а чувственноподобной геометрии как «нижнего» этажа математического знания с физикой проводится мной отнюдь не на базе (онтологического) различения «непрерывность vs. дискретность», а на (гносеологической) основе различения познавательных способностей. Геометрические объекты существуют «пространственно», и необходимое для оперирования с ними созерцание осуществляется «незаконорожденным умозаключением» (Платон), или *воображением* (если воспользоваться кантовским разделением познавательных способностей). В частности, обязательным элементом геометрических доказательств являются чертеж и (пространственные) построения. В то время как арифметико-алгебраические «числа» являются более абстрактными, не обязательно (пространственно) созерцательными, объектами и постигаются с помощью более интеллигебельной познавательной способности — рассудком [или низшей частью ума — дианойей, если воспользоваться античным (платоновским) анализом]. Вполне допустимо, что в современной математике соотношение между арифметикой и геометрией не такое однозначное, так как отдельные разделы геометрии (например, топологии) по степени абстрактности (т.е. «степени» априорности в моей интерпретации) ни в чем не уступают

арифметике или алгебре. Более того, с появлением теории категорий именно «геометрический» (топологический) подход становится реальной альтернативой «арифметическому» — теоретике-множественному — подходу, что в рамках предложенного мной анализа является не «регрессом» априоризма современной математики, а лишь сменой типа априорности математического знания (видимо, при общем повышении степени ее абстрактности—априорности). Но методологически проводимое мной различение между «нижними» (более эмпиристскими) и «верхними» (более абстрактными) разделами не потеряло свое значение и в настоящее время.

2. В своей статье я выявил основные концептуальные «составляющие» понятия «априорного». В частности, налицо очень устойчивая на протяжении истории философии связь между понятиями «априорное» и «абстрактное». Поэтому «степень априорности» можно трактовать как «степень абстрактности». И, сле-

---

[1] См. полный электронный текст: http://www.philosophy.ru/library/ksl/ philmath_2001.html

довательно, более «верхние» — абстрактные — этажи математического знания являются (согласно предложенному мной пониманию) более априорными как бы по определению. Но я отчасти согласен со своим оппонентом в том, что «взаимосвязь» между разными этажами и ветвями математического знания не является однозначно-линейной, а осуществляется по многим «осям» методологического анализа. Именно поэтому в своей концепции *динамического априоризма — эпистемологического гилеоморфизма,* которая является ядром моего подхода, я выделяю разные типы априорного. К сожалению, полной структурной классификации типов априорного пока разработать не удалось (в статье представлена лишь предварительная историческая классификация), однако можно предположить (для меня это очевидно), что в таком разнородном комплексе, каким является математика, сосуществуют разные типы априорности, как, впрочем, и разные типы эмпиричности.

Л.С. Куслия[1]

1. Мне кажется, что проблема статуса математики, поставленная в комментарии П.С. Куслия, является центральной проблемой всей философии математики. Ранее я обосновал тезис о том, что философия является «пограничным» феноменом (между Наукой и. Искусством, Наукой и Мифом, Наукой и Религией (см. мою статью «Философия как пограничный феномен» — http://www.philosophy.ru/library/ksl/katr_016.html). Если же мы сузим область методологического анализа до сферы научного знания (= «физики»), то там такое же пограничное положение занимает математика. Об этом свидетельствует прежде всего аподиктический характер ее знания (что, собственно, и явдяется посылом и предметом обсуждения данного сборника). В этом смысле она занимает не только промежуточное положение между «физикой» и «метафизикой», но и между естественными и гуманитарными науками. Поэтому провозглашенный в комментарии гуманитарный подход к анализу математического знания вполне оправдан, так как он является серьезной альтернативой физикалистской методологической парадигме исследования математической деятельности («физико-математический комплекс» vs. «математико-гуманитарный комплекс»). Однако здесь меня смущает одно «но»» а именно уже отмеченный аподиктический ха-

---

[1] См, полный электронный текст комментария: http://www.philosophy.ru/ library/ksl/philmath_2001.html

рактер математики: математическое знание — в отличие от любого другого знания, будь то знание естественно-научное или гуманитарное, — претендует на статус знания сверхчеловеческого, знания, независимого от существования человеческого разума[2]. А это значит, что замена физикалистской методологии на гуманитарную положения не спасает. На мой взгляд, автор комментария не учитывает одного тонкого (точнее, двух) различия и вследствие этого допускает если не категориальную ошибку, то методологическую неточность. Различие это касается статуса математического знания, которое, с одной стороны, необходимо отличать от истории математики [которая, очевидно, является гуманитарной дисциплиной и может (должна) исследоваться с помощью гуманитарной методологии, но ведь предмет нашего анализа — не история математики, а она сама!], а с другой стороны — от математической деятельности («область математических практик». — *П.К.).* Именно это последнее различие (не учитываемое автором комментария) между математическим знанием как результатом математической деятельности, в которой эта деятельность как бы «угасла», и математической — человеческой — практикой не позволяет применить к анализу математического знания методологию гуманитарных дисциплин.

Различив математическое знание и математическую практику, можно поставить вопрос о выборе адекватной методологии исследования. Что касается анализа математической деятельности, то, на мой взгляд, вопрос о приемлемости методологии гуманитарных дисциплин требует тщательной проработки. Если принять во внимание высказанный выше тезис о пограничном статусе математики, то прямой перенос гуманитарной методологии на область математики вообще невозможен. Математика как специфическая деятельность, связанная с особым типом конструирования своих (математических) объектов (несколько подробнее об этом см. мой ответ на комментарий А.И. Белоусова) и имеющая аподиктический статус своих положений, требует особой методологии, отличной как от методологии естественных, так и от методологии гуманитарных наук. (Видимо, более всего в разработке такой методологии продвинулся И.Лакатос в своей работе «Доказательства и опровержения», которая, однако, не получила дальнейшего развития.)

---

[2] Это одна из важных интенций Канта, который при анализе познания вводит априорные формы, имеющие всеобще-необходимый, т.е. сверхгуманитарный, характер. Поэтому неосновательны обвинения Канта в субъективном идеачизме, против которых он активно возражал.

Если же анализу подвергается современное математическое знание[3], то здесь помимо высказанного выше тезиса о «сверхчеловеческом» характере математики имеются и другие возражения против использования гуманитарной методологии, которая из-за «рыхлости» структуры занимается скорее «толкованием» (П.С. Куслий).

Главное из них заключается в том, что современное математическое знание является вполне формализованным *логико-математико-метаматематическим* комплексом, т.е., с одной стороны, можно говорить о слиянии в XX в. в единый комплекс логики и математики, где логика является фундаментом более богатого математического знания [заметим, что еще в конце XIX в. логика (особенно в лице традиционной, аристотелевской, силлогистики) и математика рассматривались как вполне самостоятельные и непересекающиеся дисциплины]. А с другой стороны, можно говорить, в основном благодаря деятельности Д. Гильберта и его последователей, о появлении в составе математики «верхнего» этажа — метаматематики, что можно рассматривать как верхнее «обрамление» математики логикой. Сам выбор мной такого трех-частного названия для современного математического комплекса указывает на его структурированность (иерархичность). Более того, *математическое знание* в отличие от другого знания *является самым структурированным типом знания* (мой контртезис). Вслед за Н. Бурбаки иерархию математического знания можно представить так (см. об этом подробнее в моем электронном тексте: http://www.philosophy.ru/library/ksl/mathlekl.html):

== A. Логика ==

1. **Исчисление высказываний:** введение символов логических связок &. ∨ , ¬, ⇒
2. **Исчисление предикатов первого порядка:** введение кванторов ∃, ∀
3. **Эгалитарные теории,** или исчисления предикатов с равенством.

== B. Математический язык ==

4. **Теоретике-множественный язык:** введение основной теоретико-множественной операции принадлежности элемента множеству (∈).

---

[1] Замечу, что здесь математика рассматривается как единый феномен, так как здесь анализ математики происходит на первом — бытийном — этапе, на котором важно выявить отличие математики от других феноменов, т.е. на этом этапе «рассмотрение математических теорий в "горизонтальной" плоскости общего математического знания» (П,С. Куслий) вполне оправданно.

== C. Пред-математика (уровень математических теорий) ==

5. **Арифметика:** примитивно-рекурсивные операции («следование за», «сложение», «умножение»), метод математической индукции.

6. **[Аксиоматическая] теория множеств:** теория типов Рассела— Уайтхеда (PM); аксиоматика Цермело—Френкеля (ZF); аксиоматика Неймана—Бернайса—Геделя (NBG).

7. «Наивная» теория множеств (парадоксы Рассела, Бурали— Форти, Кантора).

8. Основные математические структуры: *алгебраические, топологические структуры, структуры порядка* [см. работу Н. Бурбаки «Архитектура математики»].

9. Сложные математические структуры как комбинация основных структур.

== D. (собственно) МАТЕМАТИКА ==

Таким образом, подчеркивая в своей статье момент структурности и иерархичности математического знания, я вовсе не исключаю возможности его анализа единого комплекса. Однако основная интенция моей статьи как раз и заключалась в том, что такой — «гомогенный» — подход, провозглашаемый на сегодняшний день чуть ли не единственно возможным, не позволяет адекватно анализировать и решать ряд более тонких методологических проблем математики (в частности, заявленную как основную для этого сборника проблему априорности математического знания) и должен быть дополнен более точным анализом «гетерогенных» составляющих математического знания, образующих строгую иерархию.

2. Перейдем теперь к другой теме, поднятой в комментарии, которая посвящена анализу математико-философских взглядов Г. Фреге и Г. Кантора: Эта тема заслуживает особого внимания, поэтому остановимся на ней подробнее.

Суть математической деятельности составляет работа с ЧИСЛОМ[4]. Однако вопрос об онтологическом статусе ЧИСЛА до сих пор остается открытым. Как правило, большинство исследователей ограничиваются восходящим к пифагоро-платоновской традиции утверждением о том, что ЧИСЛО есть особый тип абстракции, занимающий промежуточное положение между физическими объектами и метафизическими сущностями, т.е., математика занимается абстракциями второго порядка (в то время как другие науки — как на экспериментальном, так и на теоретическом

---

[4] Это утверждение «впрямую» применимо лишь к арифметике, но может быть расширено и на другие составляющие математического знания, если число трактовать максимально широко.

уровне — «работают» с абстракциями первого порядка; это необходимо для формулировки любой — даже экспериментальной — закономерности). Зародившийся в Новое время и вполне оформившийся к концу XIX в. классический идеал научного знания был основан на очень устойчивом «сцеплении» физики и математики в качестве единого комплекса. В рамках этого комплекса ЧИСЛО конституируется в своей измерительной функции, т.е. как средство (единица) измерения той или иной физической величины. Это подтверждается тем, что, с одной стороны, в физических законах числа фигурируют как количественные коэффициенты, имеющие ту или иную физическую — «качественную» — размерность, а с другой стороны, признаются только те числа, которые имеют внятную физическую интерпретацию. Тем самым ЧИСЛО является количественной характеристикой качественных явлений, т.е. мыслится не как чисто количественная характеристика, а в своей физической ипостаси как количественно-качественная характеристика реально существующих (физических) явлений. Таким образом, онтологически ЧИСЛО выступает как бытийная ЕДИНИЦА, это — (из)*мерное количество,* или *измерительное число,* имеющая математико-физическую природу. Наиболее характерным проявлением такого понимания числа является *натуральный числовой ряд,* «обогащенный» промежуточными числовыми сущностями (что принципиально не изменяет данного концепта числа как *измерительной сущности}.*

В работах Кантора—Фреге происходит существенное переосмысление онтологического статуса основных математических концептов и прежде всего концепта числа[5]. В основу математики кладется число в своей чистоте (число как таковое), которое полностью освобождается от своей измерительной функции в рамках своей физической — «качественной» — ипостаси, а функционирует как средство счета (пересчета). Конечно, эта функция числа не является чем-то принципиально новым, просто раньше счетная составляющая числа занимала подчиненное положение в составе общей измерительно-счетной функции, а теперь она освобождается и конституируется в качестве собственной функции. Теперь (новое) ЧИСЛО** — средство счета как таковое — выступает как средство пересчета однородно-равных — в силу утраты их качественных различий — абстрактных объектов, т.е. абстракций второго уровня, а не только как средство счета-измерения абстракций первого порядка — качественно различных вещей *(измерение* является частным случаем *пересчета!)* У Фреге (Кантора) число** служит для «измерения» — счета, сравнения, упорядочивания... — сущностей второго порядка: (объемов) *понятий* (у Фреге) и (мощностей) *множеств* (у Кантора), т.е. (новое) канторо-фрегевское число (= «число**») полностью освобождается от своей качественной — «физической» — составляющей (зависимости) и выступает как *чистое количество.* Другими словами, Кантор и Фреге предложили принципиально новый концепт ЧИСЛА — *счетное число,* которое по отношению к концепту *измерительного числа* выступает как (мета)число второго порядка.

Наиболее ярким выражением этого переосмысления статуса ЧИСЛА является «включение» в числовой ряд нуля, который до этого воспринимался как некий вспомогательный элемент («языковая фикция», по Д. Гильберту), служащий для обеспечения функциональной полноты арифметических операций, но собственного (самостоятельного) «физического» статуса (т.е. собственной содержательной «позитивной» интерпретации) не имел. Примечательно, что в своей работе [1] Фреге первоначально обсуждает статус «нуля» на чисто философском (онтологическом) уровне. Так, он сопоставляет математической «единице» метафизическое «Бытие», а математическому «нулю» — «Ничто» (небытие, отрицание бытия): «ведь утверждение существования есть ничто иное, как отрицания числа ноль» [1, с. 80]. «Ноль» получает свой онтологический статус в качестве «счетной меры» *несуществующих* (= небытийных) абстрактных сущностей, например «пустых» понятий типа «круглого квадрата» (или

---

[5] Здесь я буду опираться в основном на тексты Г. Фреге ([1]| *Г. Фреге.* Основоположения арифметики (логико-математическое исследование о понятии числа). Томск, 2000; [2] Он *же.* Логика и логическая семантика. М., 2000).

«счетности» пустых множеств у Кантора). А новое ЧИСЛО** является концептуальным «расширением» прежнего ЧИСЛА (как бытийной «единицы») за счет включения в его состав получившего онтологический статус ничтойного «нуля».

С точки зрения *концептуального анализа* «расцепление» *измерительной* и *счетной функции* чисел приводит к тому, что (единый) концепт *«единицы»* распадается на два самостоятельных концепта — *«один»* и *«первый»,* поскольку теперь (измерительная) «единица» («один» как первый член натурального ряда, который предназначен для измерения-счета качественно-различных существующих — натурально — вещей) не совпадает с (счетной) «единицей»: в счетном ряду чисел *первым* оказывается ничтойный (не-бытийный) «нуль», а бытийная «единица» занимает лишь второе место. На грамматическом (языковом) уровне это проявляется в более четком различении функций числительных: *количественные числительные* «один», «два»... (которые могут функционировать в качестве существительных, например в немецком языке могут употребляться с определенным артиклем der Eins), служащие для выражения количественных (измери-
590
тельных) чисел, теперь строго отличены от *порядковых числительных* «первый», «второй»..., с помощью которых выражается счетная функцию чисел.

Полноправное введение в (счетный) числовой ряд ничтойного «нуля» резко повышает требования к строгости математического рассуждения, поскольку работать со «смешанным», *универсумом,* в котором есть не только «бытие», но и «ничто» гораздо труднее. Так, например, в [2, с. 271] Фреге замечает, что неправомерным будет замена предложения «Здесь нет ничего, кроме Луны» (в данном случае выражается мысль о наличии ровно одного предмета) на предложение «Здесь есть Луна и НИЧЕГО [= Ничто — «Nichts» (нем.)]» (в данном случае количество называемых «предметов» возрастает до двух), или, если продолжить мысль Фреге, то «1» нельзя без специальных оговорок отождествлять с «суммой» «1 +0» (или с «суммой» «1+0 + 0 +…», где «единице» приписывается (бесконечный) «нулевой» довесок)[6]. В частности, именно путем такого более тщательного и строгого лингвистического (концептуального) анализа Фреге предлагает разрешить парадокс, обнаруженный им в работах Э. Шредера (заметим, что выявленный Фреге шредеровский парадокс является аналогом расселовского парадокса, который Фреге сумел «разрешить»!)[7].

Понятно, что счетный «нуль» заключает в себе (при неточном с ним обращении; при неразличении измерительного «одного» и счетной «единицы») потенциальную парадоксальность, так как «нуль», с одной стороны, является **0** как «количественная мера» измерительного ряда чисел, а с другой стороны, он (уже как «нуль**») «равен» **1****, так как является первым элементом в счетном числовом ряду, т.е. появляется якобы «противоречие» **0 = 1****. Не случайно эта потенциальная парадоксальность, содержащаяся в концепте «числа» Кантора—Фреге, привела к появлению (реальных) парадоксов, прежде всего парадоксов расселовского типа[8]. Поэтому дальнейшее уточнение концептуальных основ «новых чисел» Фреге—Кантора — одна из насущных задач, стоящих перед математикой и философией математики XXI в.

---

[6] Более тщательный анализ этого квазитождества [любое число можно трактовать как «сумму» его самого и (бесконечного) «нулевого» члена| и мыслительная «разработка» этого обстоятельства привели к созданию в 60-е гг. XX в. нового раздела математики — *нестандартного (неархимедова) анализа* А. Робинсона.

[7] Более точно, Фреге предлагает различать отношения «subter» (отношение принадлежности — ∍) и «sub» (отношение включения — ¢, смешение которых и приводит к парадоксу (см.: (2, с. 263—271], а также примечания и послесловие Б.В. Бирюкова к [2]).

[8] В своем тексте «О парадоксе Рассела» |http:// philosophy.ru/library /ksl/ paradoxl.html] я показываю, что расселовский парадокс может быть «разрешен» при четкой фиксации разных аспектов рассмотрения абстрактных сущностей.

Е.Г. Веденова

НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ДИСКРЕТНОСТЬ И ПРОТИВОРЕЧИЕ В КОНТЕКСТЕ СТАНОВЛЕНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ

1. Метафизика в меняющемся мире

> И поэтому я отбрасываю имя, определение, фигуру...
> *Н. Кузанский*

> Исследования, связанные с основаниями
> геометрии, во многих случаях сталкиваются с
> интересами теории познания и психологии...
> *Ф. Клейн*

Уникальность феномена европейского («западного») теоретического знания не всегда осознается и не всеми одинаково оценивается. С точки зрения восточной метафизики, западная наука — деградация и заблуждение; с точки зрения западного обывателя — то ли скатерть-самобранка, то ли ящик Пандоры. Философия же, поставлена перед проблемой оформления метаязыка *для рационального дискурса как такового,* что подводит нас к границе дискурсивно выразимого и невыразимого. При этом история и философия теоретического знания вступают в концептуальный конфликт в том, что касается установления адекватности или ограниченности эволюционного подхода (главным столпом которого является признание доминирующим формообразующим фактором влияния *внешней* среды и опыта «феноменального» мира). Неизбежность конфликта связана с естественным различием предметных областей и их специфических проблем: если для историка все более актуальна проблема освобождения от мировоззренческой «зашоренности» для аксиологической классификации фактов осуществленного опыта человечества, то для философа сегодня, возможно, наиболее актуально — не забыть, что философия рождалась там, где кончался «внешний» опыт и начинался опыт «внутренний».

В данной статье делается попытка выделить влияние не всегда учитываемых «эволюционной» концепцией происхождения теоретического математического знания факторов *априоризма* и специфического *внутреннего* опыта. Безусловно, факторы эти достаточно не просто уловимы и не всегда однозначны, однако роль их нельзя элиминировать. Прежде всего потому, что как «прото-философские», так и собственно философские конструкции веками отражали представления о «многослойной» реальности Универсума, причем феноменология «инобытия», иногда удивительно совпадая в чрезвычайно отдаленных между собой во времени и пространстве культурных регионах, как правило, коренным образом отличалась от феноменологии «посюстороннего» физического мира.

В этом контексте хотелось бы подчеркнуть, что понятийный рациональный *способ познания* не вполне «естественен» и противоречив как изначально, по своей сути, так и по форме реализации. Только с Платона обретают подлинное право на существование «идеальные» объекты — объекты, которые *в принципе* не могут существовать в мире физических феноменов. Платон открывает их истинный дом — *другую* реальность (качественно отличную от «привычных» форм инобытия — как-то в виде мира

олимпийских богов, как-то в виде более экзотических «реальностей», в которые проникало в экстатическом порыве сознание миста) — интеллигибельную реальность эйдосов. Именно в этой реальности находят место математические объекты, ставшие потом основными «действующими лицами» евклидовых «Начал». (Заметим, что, по мнению Ф. Клейна, «Начала» «должны были дать изложение математики в том виде, в каком она считалась необходимой с точки зрения платоновской школы, как *подготовка к общим занятиям философией»* (курсив автора; [1, с. 290]). Такой взгляд на «Начала» объясняет *необходимость* знаменитых (и кем только не подвергнутых критике!) первых «определений» исходных геометрических понятий. Евклид «создает» невозможную реальность: геометрические фигуры, составленные из несуществующих (в мире физических феноменов, конечно) линий и поверхностей, ограниченные невозможными (в том же смысле) точками. Тут вспоминается одно из примечаний М, Гарднера к кэрролловской «Алисе»: «Выражение "улыбка без кота" представляет собой неплохое описание чистой математики. Хотя математические теоремы часто могли быть успешно приложены к описанию внешнего мира, сами теоремы суть абстракции гения, принадлежащие другому царству...» [2, с. 74]. Однако еще более, чем теоремы, улыбке Чеширского кота соответствуют именно исходные объекты: евклидова плоскость — это не *идеально* выглаженная поверхность стола, это поверхность, *оторванная от стола,* — кот ушел, а улыбка осталась. Однако этим не исчерпывается «невероятность» мира эйдосов (или мира теоретической математики). Закон тождества «образует» мир истинно сущего — и это мир остановленного времени (устранение времени — главное условие реализации тождества). При этом в интеллигибельном мире истинно сущего все же возможно *действие* (в частности, оговоренное евклидовыми постулатами). Зеноновская невозможность *помыслить* движение преодолена уди-
593
вительнейшим из способов — открытием интеллегибельного мира узаконенной парадоксальности, именуемой Истиной.

И все же странности на этом не кончаются. Так, далеко от Греции (по крайней мере «за семью горами» в смысле качественно иной культурной традиции и крайней эзотеричности неписаного свода знаний жрецов-друидов), в Ирландии, сложилось свое *видение* иного мира. Этот мир *ирландской* вечности, «сид» [3], в чем-то схож с платоновским. В *сиде* течение времени остановилось, попавшие туда волею судьбы смертные более не стареют. При этом ситуация «остановившегося времени» четко осознана — обратный переход из «реальности сида» в «реальность феноменального мира» обрушивает на смертного прошедшие века или тысячелетия, немедленно обращая его в прах. И, однако же, *действие* в сиде *происходит:* герои «Плавания Брана, сына Фебала» [3, с. 195] волею случая перешагнувшие барьер двух реальностей, *продолжают жить* в невозможном сиде — мире реализованной гармонии и *остановившегося* времени.

А теперь относительно *гармонии.* Это ведь напоминание о еще одном парадоксе мира Платона. Мир «жесткой» логики, царство формализма, казалось бы, очень далек от зеленых холмов и неземной музыки Островов Блаженных, однако *эстетический* критерий гармонии и здесь оказывается атрибутом Истины.

Как видим, многие принципиальные характеристики независимых с точки зрения конкретного культурного контекста «пластов» расслоенной реальности — мира сида и интеллегибельного мира Платона — совпадают. И это еще одно напоминание о феноменологии «внутреннего» опыта, дистанцированного для нас прежде всего ввиду специфичности конкретных условий его реализации. Речь идет о феномене «второго рождения» в традиционной культуре и его аналоге в не вполне еще свободной от Традиции культуре древнегреческой (7, с. 28—29].

Ведь проблема еще и в том, что при всех невероятных горизонтах, все раздвигаемых и раздвигаемых современной наукой, она же очертила замкнутый круг, в который заключено ее понимание как человека, так и собственных истоков. Напряжение внутри этого круга становится все более опасным. Погоня за «метафизической» тенью, за ускользающим призраком «других реальностей» — одна из попыток этот круг разорвать[1].

Как уже было не раз говорено, одно из определяющих отличий европейского пути развития — формирование доказательного теоретического знания. Загадка возникновения этого уникального феномена культуры так пока и не нашла однозначного ответа. Однако большинство исследователей в поиске этого ответа обращаются к хронологически включенному в ясперсовское «осевое

594

время» феномену Греции VI в. до н.э. — знаменитому «греческому чуду». При этом не всегда осознается наложение *двух* кардинальных и частично независимых проблем — «осевого времени» и возникновения греческой философской и научной мысли. Два связанных с этими проблемами вопроса кажутся особо значимыми. Почему волна рациональности и рефлексии, прокатившаяся по всему миру, лишь в Греции запустила конструктивный процесс формирования «открытого», ориентированного на постоянное обновление и модернизацию теоретического знания? И почему все-таки на Древнем Востоке не только не возникла, но, возможно, и не могла возникнуть доказательная математика? Представляется, что дополнительный свет может пролить сопоставление различных манифестаций того, что сегодня мы обозначаем логико-философскими категориями «противоположности» и «противоречия». Однако начать придется издалека.

2. «Невозможное животное»

Нормальное животное — это то. которому интересна лишь та часть окружающего его мира, которая имеет непосредственное отношение к осуществлению его видовых биологических потребностей. Животное, которое рискнуло бы выйти за границы такого рода интереса, просто невозможно.

А. Лобок.

...Мир инстинкта, каким бы простым он ни казался рационалисту, на примитивном уровне проявляет себя как сложная система физиологических фактов, табу, ритуалов, классовых систем и племенного фольклора, которая с самого начала, предсоэнательно, набрасывает на инстинкт узду и заставляет его служить высшим целям. В естественных условиях безграничное желание инстинкта реализовать себя находится в определенных духовных рамках, в результате чего оно дифференцируется и становится годным для использования на различных направлениях. Ритуалы на примитивном уровне являются неистолкованными жестами; на высшем уровне они становятся мифологизированными.

К. Г. Юнг

Способ нашего мышления (иногда соотносимый с термином «логика»), как ни странно, покоится на двух основаниях, по сути онтологически присущих любому живому организму:

а) на дифференцированном восприятии (что относится как ко «внешнему», так и к «внутреннему» опыту), в основе которого лежит изначальная способность дихотомического расчленения

595

Универсума (инстинкт или архетип Другого). Бесспорность тварного начала в человеке позволяет предположить наличие различных уровней априорного знания. На самом глубоком тогда уровне — уровне инстинкта — окажется априоризм бинарной оппозиции[2].

Но животное при дихотомическом разбиении оставляет в поле зрения лишь один, обусловленный биологической необходимостью член бинарной оппозиции, т.е. область «дополнения» для него как бы не существует. Человек, «невозможное животное» [4, с. 54], способен удержать в сфере *заинтересованного* внимания обе области дихотомического разбиения. Вероятно, именно эта способность является одним из необходимых условий как формирования поля естественного языка, так и образования мифа;

б) на восприятии явлений как причинно связанных (если — то), без чего невозможно ни инстинктивное поведение, ни человеческое мышление.

В таком ракурсе выделяются два основных атрибута «архаического» мышления. Во-первых, это процедура соотнесения—наложения. Для архаического сознания структуру образцов-паттернов дает миф племени, а ритуальная деятельность (прежде всего в форме обряда инициации) служит прочному внедрению этих паттернов не только на уровне сознания, но и, что гораздо важнее, на бессознательных уровнях психики, Таким образом, совокупность мифологических паттернов становится основой структурирования Универсума — человек «видит» лишь то, что *знает* (причем нередко в буквальном смысле — к примеру, туземцы не узнавали, не «видели» себя и соплеменников на фотографии). Отметим, кстати, что геометрическое «наложение» успешно используется не только как образная интерпретация процедур формальной логики диаграммами Эйлера—Венна, но и как альтернативная реализация суждения и силлогистического вывода [6].

Другим «китом» архаического мышления яапяется оценка результата соотнесения—наложения, т.е. процедура отождествления. И здесь представляется важным подчеркнуть необязательно эмпирические основания этой оценки — внутренняя, интуитивная достоверность иногда дает более убедительное ощущение «истинности», чем результаты «внешнего» опыта.

3. Пошатнувшаяся традиция

Естественную среду реализации «дологического» мышления можно обозначить словом «традиция» — имея в виду прежде всего ядро так называемых «традиционных» культур, обеспечивавшее устойчивость сложившихся культурных форм. Сохранению

596

самоидентичности этого ядра служил особый способ трансляции традиции [7], позволявший буквально воспроизводить личность учителя в личности ученика. Таким образом, знание традиционных культур было прежде всего индивидуально-личностным, а способ трансляции традиции, основанной на сакральном тексте, предусматривал индивида — носителя традиции, ведь полная семантика сакрального текста отнюдь не ограничивалась вербальным уровнем. При этом корпус любого сакрального знания никогда не нуждался в каком-либо обосновании в силу специфики его обретения и функционирования. Любое же эмпирическое, служебное знание (к которому относились, вероятно, и древневосточные вычислительные техники [8, с. 56—59]) оттачивало свою эффективность через наглядное, эмпирическое сопоставление результатов. Другими словами, доминанта опыта, внутреннего или внешнего, формировала истинность как *очевидность, внутреннюю убежденность.*

Разрушение универсума мифа неизбежно вело к рафинированию причинно-следственных связей в двух направлениях; все возрастающей роли личного, «свободного» (от паттернов мифа) опыта и унификации паттернов культуры. На смену случайности «локальных» паттернов (на универсальную схему космологического мифа накладывается разнообразие случайных, обусловленных локальной ситуацией сюжетов — например, у папуасов маринд-аним в мифе о творении происхождение кенгуру связывается с чудесным оживлением кусков поджаренной плоти Героя [9, с. 81—82]) приходит все более свободное восприятие опыта повседневности и *формирование вопросов,* на которые миф уже не дает ответа.

Как было в свое время отмечено Ясперсом, эти процессы как бы аккумулировались в «осевом времени», и прежде всего в знаменательном VI в. до н.э.

Здесь уместно остановиться на различиях проявления «осевого времени» в греческой и восточных (традиционных) культурах. Повсеместные «подвижки» этого периода начинаются, возможно, из-за накопившейся «усталости» традиции, сбоев механизма ее трансляции, частичной утраты семантики как сакрального текста, так и ритуала. Для конкретности воспользуемся примером индийской культуры [10]. Там предфилософия приходится на эпоху поздневедийской культуры (VIII—VI вв. до н.э.). Раннее философствование связано прежде всего с уточнением «истины традиции», обретенной индийскими мудрецами-риши на пути «тайнознания». Риши «приходит к своей истине через особое, ему лишь присущее "видение" природы вещей и требует принять его "откровение" на веру ("Верь этому, дорогой!")» [10, с. 19]. Обсуждение (в более ранние периоды невозможное) «истины веры» ини-

597

циировалось как разросшимся и крайне усложнившимся для индивидуального освоения ритуалом (всеми тонкостями которого владели уже лишь сравнительно немногочисленные эрудиты [10, с. 24], так и «усталостью» традиции в целом. Предельным случаем проявления последней стала проблема сигнификативности всего собрания «Ригведы»: «сторонники Каутсы настаивали на том, что гимны сами по себе бессмысленны, но значимы "операционально" — в контексте функционирования самого ритуала. Здесь Яска... отвечает, что не следует порицать столб за то, что слепой его не видит» [10, с. 29].

Дискуссии поздневедийских ритуаловедов формируют начала диалектики и (поначалу имплицитную) силлогистическую аргументацию. Здесь мы подходим к одному из ключевых моментов нашего сопоставления. Обратимся к приведенной в «Шатапатха-брахмане» дискуссии по поводу именования при жертвоприношении Махендрой (Великий Индра) верховного бога Индры. В интерпрерапии В. К. Шохина она уже может быть представлена в виде будущего классического пятичленного индийского силлогизма:

«1) тезис: Пусть ему жертвуют как Махендре;

2) аргумент: Ввиду того, что он стал таковым после убийства Вритры;

3) основание аргумента: Любое лицо становится "великим", одержав значительную победу, как царь, победивший соседей;

4) применение к данному случаю: Но с Индрой после убийства Вритры та же ситуация, что и с царем, победившим соседей;

5) заключение: Следовательно, пусть ему жертвуют как Махендре» [10, с. 27].

И далее В.К. Шохин обращается к неоднократно обсуждавшемуся, а для нас принципиальному вопросу: «почему в индийском силлогизме в сравнении с аристотелевским имеются "лишние члены" (индийская философия представит в недалеком будущем даже семичленные и десятичленные силлогизмы). Ответ очевиден: это связано с тем, что индийский силлогизм выражает не столько доказывание, сколько убеждение оппонента и аудитории, выполнявшей функцию арбитра, в преимуществах того или иного отстаиваемого тезиса. Именно с этим связано значение примера в индийском умозаключении: Индру следует сравнить с царем, для того чтобы присутствующие смогли сделать аналогическое заключение от видимого к невидимому. Поэтому в отличие от аристотелевского силлогизма, вполне "монологического", индийский является диалогическим — он обращен к конкретному оппоненту и конкретной аудитории. Эта специфически диалогическая инто-

598

нация индийской рациональности выявится во всей полноте в будущей философии: границы между риторикой и логикой здесь будут всегда более подвижными, чем в Европе» [10, с. 27]. Запомним этот вывод и дополним его еще одним замечанием: если обучение европейской философии «предполагает только соответствующее профессиональное образование, [то] овладение второй — еще и йогическую практику»

[10, с. 7]. Необходимость последней, очевидно, связана с укреплением внутренней убежденности, непосредственным *созерцанием* истины.

Итак, можно предположить, что первоначально и индийская, и греческая аргументации отрабатывались и формировались в сходной атмосфере «дискуссионного клуба», порожденной волной «осевого времени». Более того, даже уникальный VI век — «греческого чуда» и «шраманской эпохи» Индии — тоже демонстрирует в каком то смысле параллельные процессы. В Индии диспут выходит за границы жреческих школ и возникают отрицающие основные брахманистские ценности новые религии — но на том же пути «откровения», что и религия предшествующая. Однако ведь и первых греческих философов А.Ф. Лосев именует натурфилософами-интуитивистами. Какие же причины привели к формированию именно на греческой почве таких специфических и связанных между собой явлений, как дискурсивная философия и теоретическая математика?

3. «Неестественная» культура

> ...Кузанец возлагает свои надежды на новый тип логики — логики математики, не исключающей единства противоположностей, но полагающей этот принцип в основание своих законов.
>
> ...Греческая *философия* открыла и методически строго определила новые инструменты чисто теоретического познания мира, новые понятийные и мыслительные формы.
>
> *Э. Кассирер*

Проблемы возникновения философии и теоретической науки в Древней Греции обсуждались в [11, 12]; здесь же важно подчеркнуть, что практическое разрушение конгломерата мифоритуального существования (не подкрепленный более ритуальной деятельностью миф превратился в «литературу») означало небывалую свободу греческого сознания. Эпоха «крушения мифа» освободила, однако, лишь очень немногих, готовых эту свободу принять,

599

но породила религиозный плюрализм: с одной стороны, сосуществовали «религия Гомера» и орфические течения, с другой — появились личностный интерес и возможность восприятия иного, не греческого, религиозного и мистического опыта. Можно предположить, что возникновение феномена теоретического знания обязано своим появлением не столько наличию какой-либо специфической для древнего грека деятельности, сколько отсутствию *деятельностной стороны мифоритуального комплекса*. Таким образом, первые греческие «философствующие» вышли из ситуации редчайшей (и по нашим меркам!) мировоззренческой раскованности.

Вероятно, прежде всего этой непривязанностью к месту и времени был стимулирован *поиск всеобщих оснований*. Три последних слова до «замыленности» привычны нам как каждое в отдельности, так и в приведенном сочетании. Однако они глубоко не тривиальны в контексте того далекого времени. *Поиск* Истины [11] — властная необходимость, захватывавшая настолько, что в сходных обстоятельствах создатели Упанишад готовы были рискнуть посмертным благополучием собственной души [13]. Но если в Индии зарождающаяся рефлексия все же осталась в поле притяжения сохранившегося мифо-ритуального конгломерата (восточная философия в конечном итоге вновь замкнулась на восточную мудрость [10]), то в Греции главным критерием истинности («другой путь» Парменида) становится развивающаяся из «протологики» классическая логика. *Всеобщие* —потому что *впервые* настолько свободные от случайно застывшего паттерна Мифа. *Основания* — потому что онтология человеческой психики требует точки опоры; мышление человека требует того, с чем можно устойчиво соотнести, на что можно *положиться*. Так, уже Фалес приходит к необходимости субстанции, лежащей в основе мира: ее универсальность лишь условно, из необходимости с чем-то уже обозначенным сопоставить маркируется термином «вода». Очень высокая рефлексия, анализ собственных первичных ощущений мира, наверняка трудно вербализуемых, доходит до нас в выражениях, собранных из осколков мифа — пока единственного подручного материала: «все полно богов».

Но запушенный процесс унификации, освобождения от случайности конкретного (идет как бы освобождение «скелетной» структуры космогонического мифа, возвращение к его чистой геометрической основе — или метафизическому Первопринципу?) разворачивается стремительно, и уже Парменид формулирует его ошеломляющий итог — «другой путь» знания.

600

5. От противоположности к противоречию

...Когда философы говорят об «абсолютном бытии», то по сути дела они обожествляют простую связку.

Г. Фреге

Я утверждаю, что каждому конечному восприятию сопутствует восприятие, или если это слово представляется слишком сильным, чувство или предчувствие бесконечного...

М. Мюляер

В рассуждениях древнегреческих мыслителей возникали парадоксы дискретного и непрерывного, конечного и бесконечного, движения и покоя. Эти парадоксы в той или иной мере возникают во всех теориях строения материи.

Я. Б. Зельдович

Итак, другой путь начинается в Греции VI в. до н.э. Именно там оформляется язык, который лег в фундамент *открытого* (т.е. постоянно изменяющегося и развивающегося, ориентированного на непрерывный «поиск истины») и *внеличностного* знания. Очевидно, первым условием этого процесса была достоверность вне-личностной трансляции текста, т.е. устранение из него по возможности всех невербальных напластований. Вдохновляющим здесь мог быть пример десакрализованных (хотя и основанных на мифе) текстов Гомера и Гесиода.

Таким образом, условием формирования теоретического знания стали отличный от «естественного» язык и система рассуждения (и мышления)[3]. Необходимое редуцирование семантики[4] сначала проявилось в формировании философских категорий. Мышление на основе бинарных оппозиций трансформировалось у философов «физиса» в абсолютизацию одной из стихий (как передает слова Симплиция А.Ф. Лосев, «принимавши за основу одну какую-нибудь стихию, считали ее бесконечной, как, например, Фалес воду»).

Но решающей оказалась другая трансформация мифологической системы бинарных оппозиций. Дело в том, что, структурируя Универсум при помощи космогонического мифа, архаическое сознание как бы «разводит» явления или «выделяет» их — т.е. как бы деформирует целостность мира, не нарушая при этом его «связности». Классические оппозиции света—тьмы, добра-зла и т.д. часто допускают очевидные переходные состояния. Но даже если размежевание представляется радикальным, связь сохраняется в виде брачных отношений оппозиционных персонажей или

601

посредника-медиатора, маркирующего собой третье, промежуточное состояние [5]. Подобный способ структурирования Универсума нашел наиболее рафинированное выражение в китайском принципе инь—ян, когда оппозиции и противополагаются, и проникают друг в друга.

Начальная стадия оформления греческих философских категорий явно сохраняла признаки мифологического мышления, что отразилось и в пифагорейской, и в гераклитовской трактовке оппозиций-противоположностей. И хотя неоценима роль пифагореизма в формировании основных объектов надличностного открытого знания — абстрактного числа, т.е. «отвязанного» от его носителя количественного признака, и «чистой» геометрической фигуры, не подразумевающей напрямую ее материального аналога, — но даже оппозиция числа и фигуры как идеальных математических объектов еще не была окончательно выявлена. Пифагорейская сакрализация этих объектов положила начало их изучению и обсуждению, конструктивно использующему оппозицию четного — нечетного (как и все прочие, не вполне окончательную). Пифагорейское же обоснование математических утверждений скорее всего нельзя рассматривать как собственно дедуктивное доказательство: во-первых, в нем слишком велика роль наглядно-очевидного, а во-вторых — приписываемое раннему пифагореизму рассуждение от противного, вероятно, яапяется позднейшей модернизацией (именно из-за отсутствия категорического разграничения оппозиций).

Следующий, решающий шаг на пути теоретического, т.е. «доказательного» поиска истины сделал Парменид, как бы «разорвав» целостность мифологического пространства «жестким», исключающим отрицанием.

Оценка Гегеля: «С Парменида началась философия в собственном смысле этого слова. Один человек здесь освобождает себя от всех представлений и мнений... и говорит: лишь необходимость. Бытие, представляет собой истинное» [15, с. 103]. Однако есть ведь и другое мнение: а что, собственно, доказал Парменид? Более того: «Ни Пармениду, ни Зенону не удалось, собственно, ничего *доказать,* они лишь пытались это сделать» [16, с. 180]. Такое скромное наследство — главная часть в одной фразе: «Бытие есть, а небытия нет». Фразе, вся семантика которой проистекает из скромнейшего из объектов, глагола-связки «есть». Черточка, едва уловимая остановка. Ничто. И — все. Все, как тотальность, всеохватность, абсолютность Универсума. Между этими Ничто и Все — одно движение мысли, когда глаголу-связке (черточке или паузе, лишенной собственной семантики и лишь иногда выступающей в виде «подтверждающего» предиката существования) придается статус суще-

602

ствительното единственного числа. К тому же предикатом «Бытия» остается все тот же глагол-связка. Если вспомнить об имплицитной симметрии субъектно-предикатной структуры высказывания естественного языка, означающей возможность инверсии («булочки свежие» на «свежесть булочную»), которая, конечно же, удваивает семантику, то инверсия «Бытие есть», очевидно, ничего не меняет: достигнут абсолютный семантический минимум. Однако именно освобожденное от какой-либо конкретности «Ничто» способно обернуться той Всеохватностью, которая обеспечивает дедуктивное развертывание любого конкретного дискурса.

Итак, что же все-таки открывает (буквально, как открывая дверь, выходит на новый путь) Парменид? Своей великой фразой он одновременно:

а) разрубает холистическую целостность Универсума жестким, категорическим отрицанием;

б) устанавливает потенцию самотождественности;

в) имплицитно провозглашает принцип исключенного третьего;

г) подготовив основания логической *операциональности,* находит подходящий *объект* ее применения.

Это необходимо приводит к *единственному абсолютно истинному* в рамках *естественного* языка утверждению: «Бытие есть, а небытия нет».

Итак, Парменид впервые формулирует утверждение, не имеющее семантического соответствия ни во внутреннем, ни во внешнем опыте — *открывая* путь чисто спекулятивного рационального знания (хотя само открытие этого пути, не случайно «указанного богиней», связано, судя по всему, как и у индийских риши, с откровением внутреннего опыта). Но — Рубикон перейден. На спекулятивном пути, в мире неестественных сущностей мы приобретаем язык, единственно эффективный при *анализе* феноменального мира.

Именно у Парменида тождество и отрицание фактически становятся законами; Зенон эксплицитно дополняет их законом исключенного третьего. Вот на этих трех столпах и образуется специализированный вербально-логический язык будущего теоретического дискурса.

Со стороны «внешнего» сопоставления с естественным языком его характеризуют гораздо большая «жесткость» и определенность; со стороны «внутреннего» использования — некая напряженная затрудненность употребления, «усталость» [14]. Впрочем, еще Паскаль, посвящая в 1645 г. свою вычислительную машину канцлеру Сегье, сетовал на чрезвычайную сложность письменных вычислений, которые требуют от несчастных вычислителей «глубокого внимания и очень быстро утомляют ум» [17]. Даже сегодняшние школъ-

603

ники легко присоединятся к сетованиям Паскаля — потому что мир жесткой формализации вполне естественен лишь для компьютера. Однако принципиальная дополнительность человеческого и компьютерного «мышления» коренится уже в основаниях теоретического знания, которое еше на уровне зеноновских апорий ощутило возникающие при использовании нового языка (типа мышления) трудности.

Таким образом, формирование европейской цивилизации в самых своих истоках неразрывно связано с проявлением «неестественной» многослойной реальности, в которой действует жесткая двузначная логика. Эта «жесткость, быть может, наиболее отчетливо отражается в альтернативе «непрерывность — дискретность» и порождаемых ею проблемах. Главной из них стала проблема бесконечности, возникающая тогда, когда взаимно исключающие, концептуальные противоположности непрерывного и дискретного сталкиваются в виде принципиально неустранимого гносеологического парадокса — окончательно неразрешимого противоречия. Причем именно движущей силе этого парадокса человечество обязано уникальным явлением *коллективного сознания* — атрибута современной науки, — порождающего не имеющее видимых ограничений нарастающее информационное поле. Мощь этого сознания демонстрируют прежде всего современные математика и естественные науки и, уже как следствие, — современные технологии.

Однако в индивидуальном процессе творческого акта, как, впрочем, и в творческом же процессе индивидуального «присвоения» результатов научной деятельности, не поддающаяся рационализации «истина веры» (т.е. трудно объяснимой внутренней убежденности), как правило, идет впереди своей юной сестры — истины доказательства.

Примечания

[1] Последовательное продвижение в этом направлении демонстрируют в частности ученые круга Библиотеки Варбурга — от Э. Кассирера до Ф. Йетса.

[2] Вот что говорит о зрительном восприятии Леви-Строс: «*У* млекопитающих специализированные клетки коры головного мозга выполняют своего рода структурный анализ, который у других семейств животных уже предпринимается и даже завершается клетками сетчатки и ганглиев. Каждая клетка — сетчатки, ганглиев или мозга — отвечает лишь на стимулы определенного типа: на контраст между движением и неподвижностью; на присутствие или отсутствие цвета; изменения *в* светлотности; ...на направление движения...

. и т.д. ...Аналитическая функция сетчатки преобладает главным образом у видов, не имеющих коры головного мозга... А среди более высоких млекопитающих, у которых аналитическую функцию в основном берет на себя мозг, клетки коры только собирают те операции, что уже отмечены органами чувств. Есть все основания полагать, что механизм кодирования и декодирования,

604

передающий поступающие данные посредством нескольких модуляторов, вписанных в нервную систему в форме бинарных оппозиций, имеется также и у человека. Следовательно, непосредственные данные сенсорного восприятия не являются сырым материалом... с самого начала они суть ра'лдичные абстракции реальности...» [5, с. 350). Иначе говоря — мы видим лишь то, что можем видеть.

[3] Джемс и Юнг [14], вероятно, первыми противопоставили «естественному» (ассоциативному) «неестественное» — вербально-логическое мышление. Сформировавшееся в античности — это последнее особенно развилось и укрепилось в системе схоластического образования, подготовив возможность *коллективного* «поиска истины».

[4] Любое имя естественного языка как бы «приподнимает» именуемое явление, выделяя, но не отрывая его от целостной плоти Универсума — мы понимаем это при всякой попытке очертить границы имени, неминуемо увязающей в преследовании уходяших в бесконечность его семантических «хвостов».

Список литературы

1. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2. М., 1987.
2. *Кэрролл Л.* Приключения Алисы в стране чудес. М., 1992.
3. *Широкова* Я.С. Культура кельтов и нордическая традиция античности. СПб,.2000.
4. *Лобок А.* Антропология мифа. Екатеринбург. 1997.
5. *Леви-Строс К.* Первобытное мышление. М., 1994
6. *Кэрролл Л.* Логическая игра. М., 1991.
7. *Семенцов В.С.* Проблемы трансляции традиционной культуры на примере судьбы Бхагавадгиты // Восток—Запад. М., 1988.
8. *Нейгебауер О.* Точные науки в древности. М., 1968.
9. Мифы и предания папуасов маринд-аним. М., 1981.
10. *Шохин В.К.* Первые философы Индии. М., 1997.
11 . *Веденова Е.Г.* Архетипы коллективного бессознательного и проблемы становления культуры // Эволюция, язык, познание. М., 2000.
12. *Веденова Е.Г.* Архетипы коллективного бессознательного и формирование теоретической науки // Языки науки — языки искусства. М., 2000.
13. *Бэшем А.* Чудо, которым была Индия. М.. 1977.
14. *Юнг К.Г.* Либидо, его метаморфозы и символы. СПб., 1994.
15. *Богомолов А.С.* Диалектический логос. М.. 1982.
16. *Жмудь Л.Я.* Наука, философия и религия в раннем пифагореизме. СПб., 1994.
17. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. М., 19Н4,

КОММЕНТАРИЙ

С.Л. *Катречко*

Комментарий к статье Е.Г. Веденовой будег разбит на две части[1]. В первой из них я дам интерпретацию основных идей предложенного текста и возникших в связи с ним ассоциаций. Во второй — позволю себе несколько критических замечаний.

---

[1] См. полный электронный текст комментария: http://www.philosophy.ru/ Hbrary/ksl/philmath_2001.htm)

605

1. На мой взгляд, данная статья содержит мощный — историко-культурологический — аргумент в пользу априорности математического знания, который может быть назван

аргументом культурологического априоризма. Суть этого аргумента заключается в невозможности помыслить непосредственное возникновение (теоретического) математического знания из хозяйственно-практических измерительных процедур. В этом смысле появившаяся греческая математика (как следствие и одно из проявлений «греческого чуда») существенно неэмпирична, т.е. с необходимостью содержит априорный элемент: математика возникает в рамках общего перехода (греческой культуры) от Мифа к Логосу, предполагает и невозможна без этого «логосного» — априорного! — начала. Причем этот априористский компонент начального математического знания является ее общей «родовой» характеристикой и никогда не может быть преодолен никакой последующей презентистско-эмпиристской переинтерпретацией ни ее «природы», ни феномена ее возникновения[2].

В качестве единственно возможной причины феномена «греческого чуда» обоснованно указывается на наличие пифагоро-парменидо-платоновского «нового пути», приведшего, как указывает автор, к открытию «интеллигибельного мира узаконенной парадоксальности, именуемой Истиной», являющимся априорным основанием теоретических построений. В качестве дополнения к этому аргументу можно указать на два фактора, усиливающих, как мне кажется, аргументацию автора. Во-первых, можно привлечь оригинальную концепцию российского (советского) мыслителя М.К. Петрова (см. ее изложение в работе «Язык. Знак. Культура». М., 1991). Во-вторых, существенным условием формирования теоретического знания Древней Греции стал сам греческий — естественный! — язык, а именно особая роль в греческом языке связки «есть» [помимо указанной выше работы М.К. Петрова об этом пишет такой авторитетный лингвист, как Э. Бенвенист (см. его работу «Общая лингвистика», особенно гл. VIII и XVII), и российский исследователь западноевропейской онтологии А.Л. Доброхотов (см. его работу «Категория бытия в классической западноевропейской философии»)].

2. Перейдем теперь к замечаниям. На мой взгляд, некоторые положения данной статьи не совсем точны и нуждаются в существенной корректировке. Во-первых, не совсем правомерно отождествление «интеллигибельного мира» Платона и мира математической реальности. Математические объекты занимают промежуточный (третий) мир, «материей» которого является «пространство» (см. об этом подробнее, со ссылкой на Прокла, мою статью в наст. сборнике). Это уточнение не противоречит общему тезису автора о «многослойной реальности Универсума», однако позволяет более строго задать тип математического априоризма.

Во-вторых, Парменид отнюдь не «разрубает холистическую целостность Универсума жестким, категоричным отрицанием» (Е,Г. Веденова). а, скорее, впервые эту целостность вводит. На это указывает, в частности, смысловая и этимологическая близость парменидовской категории «сущего» и «единого» [дословный перевод парменидовской фразы «Сущее (единое) есть...»]. Умопостигаемое «единое» Парменида противостоит чувственному «множеству» («миру многого») и, вводя свое «бытие», он (что естественно для первооткрывателя) полностью отрицает не-мыслимый изменчивый «мир многого». Определенная реабилитация мира «многого» происходит у Демокрита и

---

[2] В этой связи уместно привести проницательный анализ М. Хайдеггера. увязывающий сущность математического знания с этимологией греческого слова «τα μαθηματα» {непосредственное априорное усмотрение — «схватывание», — уже как бы известного заранее): «Современная физика называется математической потому, что в подчеркнутом смысле применяет вполне определенную математику. Но она может оперировать так математикой лишь потому, что в более глубоком смысле она с самого начала уже математична. Τα μαθηματα *означает для греков то, что при рассмотрении сущего и обращении с вещами человек знает заранее* (курсив мой. — *С.К.}:* в телах — их телесность, в растениях — растительность.. К этому уже известному, т.е. математическому, относятся наряду с вышеназванным и числа. Обнаружив на столе три яблока, мы узнаем (непосредственно, априорно. — *С.К.),* что их там три» *(Хайдеггер М.* Время картины мира // Хайдеггер М. Время и бытие. М.. 1993. С. 43).

Платона.

В-третьих, общая логика греческой философско-теоретической мысли, скорее, следует (отличному от приведенного в разделе 5) принципу *«от* («жесткого», бинарного) *противоречия к* (более «мягкой») *противоположности»* (к сожалению, формат комментария не позволяет подробно аргументировать этот тезис). Об это свидетельствует (в частности) появление в более поздний период развития греческой метафизики категории «инобытия» у Платона, которая занимает промежуточное — в концептуальном плане — положение между парменидовским бытием и небытием. Концептуализация же различения между противоречием и противоположностью — собственно различение «противоречие vs. противоположность» — происходит еще позже, только у Аристотеля, Причем Аристотель не только эксплицитно вводит логический принцип исключенного третьего, но и фактически указывает его ограниченность в случае рассмотрения не противоречия, а противоположного (это дает право некоторым исследователям, напри-

607

мер М.И. Панову, видеть в Аристотеле предтечу интуиционизма). Замечу, что этот ход мысли частично вытекает из первой части комментируемой статьи, в которой описывается переход от мифологического архетипа бинарной оппозиции к «логосу» греческой метафизики. Хотя, наверное, более точной формулой здесь была бы следующая: «безразличие» к противоречию архаического мышления (ср. с законом *партиципации* Л. Леви-Брюля) — жесткая бинарная оппозиция позднейшего мифологического мышления {Гомер, Гесиод) и начальных этапов греческой философской мысли (милетцы, Пифагор, Парменид, частично Гераклит) — выявление различных (более «мягких») степеней противолежания у Платона и Аристотеля (различение «противоречие vs. противоположность» у Аристотеля) и способов «перехода» между ними (платоновская диалектика).

ОТВЕТ АВТОРА

Комментарий Сергея Леонидовича вызывает двойственное чувство — признательность за детальный и заинтересованный разбор текста и определенную неудовлетворенность ввиду не вполне адекватного его толкования (в чем прежде всего, вероятно, вина самого автора статьи). Поэтому в ответе я позволю себе не отделять замечания от интерпретации, и мои высказывания имеют целью прежде всего уточнение понимания.

Думается, термин «культурологический априоризм» не вполне удачен: предпочтительнее был бы *культурологический* аргумент или *культурный* априоризм (хотя употребление и последнего термина чревато посторонними коннотациями). При этом в статье подчеркивается как раз *отличие* начального, *«естественного»* математического знания (о котором и говорит Хайдеггер) и обусловленного совершенно иным характером априоризма, сформировавшегося лишь в контексте «греческого чуда» *теоретического* знания. Дело в том, что представление о безразличии архаического мышления к противоречию (т.е. о тотальности для этого мышления закона партиципации) не вполне точно. Вот как говорит сам Леви-Брюль: «... *в коллективных представлениях* (курсив мой. — *Е.В.)* первобытного мышления предметы, существа, явления могут непостижимым для нас образом быть одновременно и самими собой, и чем-то иным. <...> Называя его пралогическим, я только хочу сказать, что оно не стремится, подобно нашему мышлению, избегать противоречия» *(Леви-Брюль Л.* Сверхъестественное в первобытном мышлении. М., 1999. С. 62). Однако далее Леви-

608

Брюль подчеркивает, что рассматриваемый индивидуально, в той мере, в какой он мыслит и действует *независимо от коллективных представлений,* первобытный человек будет чаше всего чувствовать, рассуждать и вести себя так, как мы от него ожидаем (там же. С.

64), т.е. в рамках «естественной» логики и, как это более подробно обсуждается в статье, родового биологического априоризма, связанного с архетипом Другого. Но даже и в этом случае мышление в формах естественного языка опирается на оппозицию «контрарности», имплицитно подразумевающую наличие промежуточной возможности.

Таким образом, хотя дихотомическое разбиение Универсума и содержит *потенцию* «строгой» родовидовой дихотомической логики (на основе оппозиции «контрадикции»), мифологическое мышление и естественный язык исключают ее реализацию.

Именно абсолютизация Парменидом глагола-связки «быть» и кладет начало актуализации этой потенции. Представление Сергея Леонидовича о том, что Э. Бенвенистом подчеркивается особая рать глагола-связки именно в греческом языке, требует уточнения: «...многообразие функций глагола «быть» в греческом языке представляет собой особенность индоевропейских языков» *(Бенвенист Э.* Общая лингвистика. С. 113, 209). При этом конкретные примеры тех «разных обличий» глагола-связки, которые приводит Бенвенист на материале *греческого* языка (там же. С. 112), взяты прежде всего из текстов Платона, в которых, как показывает, в частности, С.С. Аверинцев *[Аверинцев С.С, Франк-Каменецкий И.Г., Фрейденберг О.М.* От слова к смыслу. М., 2001], и происходила «переплавка» естественного языка в язык философского дискурса. Стало быть, эти примеры демонстрируют не установившееся (конечно, относительно) состояние естественного языка, а инициированное Парменидом рождение языка нового, «философского» мифа.

Парменидово сечение декларирует *возможность* установить однозначную и окончательную границу — но чего? Какой из феноменов непрестанно меняющегося мира (очевидность правоты Гераклита) мог быть подобной границей охвачен или отсечен? И *находится* единственный выход: все, что можно *помыслить* (либо в данности, актуальности, буквально очевидности, либо в возможности), обозначается как Бытие (в теории вероятностей такой законченной совокупности возможностей соответствует «полная группа событий»). Поэтому оппозиционным Бытию оказывается «пустое множество», Ничто. И лишь между ними можно провести «жесткую» границу — границу, которая не только однозначно определена, но которая никогда не может измениться. Эта граница «истинна» — абсолютно неподвижна, навсегда неизменна.
609

Таким образом, абсолютизируется экзистенциальная ипостась глагола-связки. Выделение *общего* для всякого «быть» как «пребывать», «иметь место» закладывает основы использования универсалий как средства оформления логико-философской аргументации; существительное, которого *не было,* становится корнем древа философских категорий. Теперь «общее» играет роль той «четкой» границы, которая необходима для адекватного использования двузначной логики. Пока дискурс не претендует на формальную корректность, без общих понятий можно и обойтись — как и обходятся без многих из них «архаические» языки. Однако дедукция Аристотеля, построенная на отношениях включения, без четких границ обойтись уже не может.

Что же касается предположения Сергея Леонидовича по поводу движения «греческой философско-теоретической мысли... *от* («жесткого», бинарного) *противоречия к* (более мягкой) *противоположност",* то, мне представляется, философия Платона содержит некую «точку бифуркации». Ведь хотя Сократа часто и воспринимают как родоначальника дискурсивно-понятийного рассуждения, но сам он, желая избежать неверного толкования своих действий, подчеркивал, что не выводит, не «строит» истину: она и ему не ведома. У *него* процесс выстраивания понятийно-логических цепей оборачивается майевтикой, психотехнологической процедурой, обеспечивающей живой, онтологический прорыв в сознании. Так что платонизм и неоплатонизм обозначили направление к теургии, формирующаяся теоретическая математика и Аристотель — направление к формализованному теоретическому знанию, в то время как между ними расположились потенции разнообразной собственно философской концептуальности.

М.В. Гиленко

ДВУМЕРНАЯ СХЕМА ЯЗЫКА МАТЕМАТИКИ И МЕСТО АПРИОРИЗМА В НЕЙ

Математика — коллективная деятельность, продуктом которой является знание. Поэтому она необходимо обладает языком, выступающим средством для воспроизводства знания в деятельности сообщества математиков. Можно сказать, что математика является «языковой игрой» со своими правилами, законами, онтологическими предположениями. 610

Рассматривая язык математики, выделим две группы элементов, а именно, понятия и суждения, которые удобно рассмотреть в качестве основы для анализа языка математики. В разное время каждый из этих элементов играл различную роль в построении математики. Так, при зарождении математики как особого вида деятельности, связываемого с именами Фалеса, Пифагора и пифагорейцев, основой математики служили понятия (число, отрезок, окружность), изучением свойств (атрибутов) которых математика и занималась. При формалистском же взгляде на природу и сущность математики суждения являются ее основой, в то время как понятия играют лишь подчиненную суждениям роль.

Понятия и суждения необходимо рассматривать в тесной связи друг с другом. Так, содержание понятия можно анализировать с помощью суждений, в которых оно встречается, а содержание суждений — с помощью понятий, из которых они построены. Оба эти подхода к анализу содержания имели место в различные периоды развития математики. Например, первый подход применяется при высоком уровне аксиоматизации математики, в то время как второй хорошо работал во времена Платона, тогда, когда математика оперировала понятиями, имеющими самостоятельное значение.

Разные концепции природы математики по-разному подходят к рассмотрению роли понятий и суждений, наделению их смыслом и использованию. Можно предложить общую схему рассмотрения языка математики, применимую как к понятиям, так и к суждениям, в которой отражались бы различия концепций математики, их близость друг к другу. Предлагаемая схема позволит определить интерпретацию языка математики с точки зрения различных концепций, а также проследить некоторые закономерности в развитии математики, рассматривая развитие языка.

Схема языка математики

Я рассмотрю двумерную схему для анализа понятий и суждений в математике. Предлагаемые измерения являются, на мой взгляд, независимыми, несмотря на то, что классические концепции природы математики будут более или менее укладываться на отрезок в этой схеме.

Первое измерение в этой схеме отражает степень связанности, взаимной зависимости понятий или суждений. Применительно к понятиям это измерение показывает, насколько понятия обладают своим собственным содержанием независимо от других. Или, иначе, насколько понятия связаны между собой. Точкой отсчета будет абсолютная независимость всех типов понятий. Подобную позицию, хотя и не в чистом виде, можно обнаружить, например, у Платона, где понятия математических объектов являются отражениями идей этих объектов.

Позже математические объекты начинают рассматриваться не как самостоятельные сущности, а в их связи между собой с помощью операциональных понятий. Понятия математических объектов рассматривались как результат операций над другими понятиями в связи с другими понятиями. Тенденция к такому подходу обнаруживается уже у Евклида, который активно использует при определении понятий ссылки на ранее определенные понятия, а также конструктивные определения.

Следующим уровнем связанности математических понятий является связь операционных и объектных понятий с помощью понятий логических отношений. Рассмотрение таких отношений характерно для математики Нового времени. Так, Ньютон и Лейбниц, разработав инфинитезимальное исчисление, создали новые логические связи между операциями, которые, правда, пока еще не имели достаточного основания.

Максимальная связанность между понятиями достигается добавлением к вышеперечисленным связям связей между понятиями логических отношений, приближение к которой наметилось на рубеже XIX—XX вв. Эти связи уже устанавливались не с помощью понятий более высокого уровня, а с помощью суждений, которые, как уже было сказано, стали предстаапять больший интерес для исследования, нежели понятия. Для достижения такого уровня связанности понятий потребовались метафизические (метаматематические) изыскания.

Рассмотрим, что означает степень связанности для суждений. В качестве связи между суждениями я буду рассматривать обоснование. Тогда степень связанности будет означать необходимость обоснования для суждений. За начало отсчета возьмем отсутствие потребности в обосновании суждений. Такое состояние математики было до обнаружения Фалесом необходимости доказательства того, что диаметр делит окружность на две равновеликие части. Впрочем, и после него длительное время доказательство не было основным инструментом получения математических знаний.

Более высокая степень связанности суждений отражает потребность в обосновании утверждений, говорящих о некотором положении дел относительно математических понятий. Обоснование может вестись с применением операционных суждений и их свойств, считая их очевидными и не требующими доказательства. В качестве операционных суждений я рассматриваю умозаключения и правила построения сложных высказываний из простых. В «Началах» Евклида есть теоремы, которые нуждаются в доказательстве,

612

есть аксиомы, которые не нуждаются в обосновании и полагаются очевидными, и постулаты, которые, по всей видимости, играли роль гипотез.

Потребность в обосновании операциональных суждений является следующим этапом на пути развития языка математики. Это отражено в работах Аристотеля, Декарта, Канта, Милля. Обоснование операциональных суждений шло в основном по пути обоснования правил умозаключения и уточнения смысла логических связок между суждениями. Аргументы, используемые при этом, относятся к метаоперациональным суждениям, хотя многие из них можно отнести к метафизическим. Несмотря на обилие позиций по обоснованию операциональных суждений, важно, что осознана необходимость их обоснования.

Наконец, для обоснования метаоперациональных суждений снова приходится выйти за пределы категории суждений. Возможным претендентом на роль средства для такого обоснования является математическая теория, точнее метатеория, которая в зависимости от предметной области определяет допустимые мета-операциональные суждения. Впрочем, был найден и другой вариант, получивший свое отражение в различных концепциях обоснования математики, которые кладут в свой фундамент те или иные суждения.

Итак, первое измерение схемы обрисовано, и есть некоторая шкала, которая позволит сравнивать различные концепции математики друг с другом. Перейдем к рассмотрению второго измерения, связанного с возможностями языка математики по вербализации знания. Это измерение отражает, насколько адекватно математические тексты способны передать содержание математического знания, насколько точно могут отразить рассмотренные выше связи между понятиями и между суждениями.

Начнем с рассмотрения суждений. Для суждений это измерение будет отражать строгость обоснования суждения, записанного с помощью языковых средств математики, или, иначе, его интуитивность. Хотелось бы уточнить, что я буду понимать под строгостью доказательства. Строгость доказательства заключается в том, что используются только те суждения, смысл которых заранее определен и известен способ их записи и применения в текстах. Интуитивность заключается в использовании неявных предпосылок, смыслов, не содержащихся в тексте, речи, но без которых невозможен последовательный анализ обоснования.

Началом отсчета в этой шкале будет полностью интуитивное доказательство суждений, характерное для платониста. Главное — не строгость, а гармония и красота. Дедуктивные рассуждения ничего не добавляют, а только лишь затуманивают проблему. Рас-
613
суждение использует красивый язык, ничего общего не имеющий с сухим языком современного доказательства.

Следующим уровнем строгости является требование четких формулировок утверждений и интуитивное использование операциональных и метаоперациональных суждений. Другими словами, четко сформулированные утверждения доказываются с той или иной степенью интуитивности. Утверждения обосновываются с помошью операционных суждений. Длинный отрезок истории математики связан именно с постепенным ростом требований к строгости доказательства именно утверждений. Фактически этот период закончился лишь в конце XIX — начале XX в., когда встал вопрос о правомерности и границах использования логики.

С логикой связывается четкое формулирование правил использования операционных суждений, позволяющих из одних суждений получать другие. Немаловажную роль играет формулировка правил вывода. Зачатки этого можно найти и у Аристотеля, но последовательную разработку этот уровень суждений получил лишь в Новое время.

Наконец, осознание наличия метаоперациональных суждений, произошло на рубеже XIX—XX вв. Это связано с выявлением ряда суждений, например закон исключенного третьего, которые не выводятся и не являются в чистом виде операциональными суждениями. Они лежат вне математики в том смысле, что их можно использовать, а можно от них отказаться. Но содержание этих суждений должно быть четко сформулировано, правила использования фиксированы.

Рассмотрим теперь, как будет выглядеть второе измерение в схеме языка математики применительно к понятиям. За начало координат возьмем язык математики, в котором нет математических терминов, а есть, например, бочки вина и акры земли. Очевидно, при таком положении дел математические понятия еше не имеют своего четкого отражения с помощью терминов.

Далее, рассмотрим этап, когда понятия математических объектов приобретают свой определенный смысл и терминологическое оформление. На этом этапе для введения понятия используется определение и в дальнейшем появляется соответствующий этому понятию термин. При этом понятия математических операций и логических отношений используются интуитивно, например, как это делал Евклид.

Терминологическое оформление понятий математических операций можно отнести к Новому времени. Известнейшими достижениями этого периода являются операции дифференцирования и интегрирования, хотя область их применимости еще не осознается до конца.

614

Наконец, создание формальной логики, связываемое с именами Буля и Фреге, позволило терминологически закрепить понятия логических отношений. Таким образом, понятия логических отношений приобрели свое значение, которое, правда, играет скорее операциональный характер.

Итак, получилась двумерная схема, позволяющая со сходных позиций интерпретировать понятия и суждения в языке математики. Были описаны лишь некоторые примечательные точки в этой схеме, в то время как за кадром осталось то, что эта шкала на самом деле непрерывна и между отмеченными пунктами есть интервалы, заполненные бесконечным множеством положений. Так, например, между отсутствием требования обоснования суждений и требованием обоснования утверждений есть много положений, говорящих насколько необходимо обоснование всех утверждений. При этом требование необходимости обоснования утверждений не означает, что совсем нет утверждений, которые не нуждаются в доказательстве. Это всего лишь означает, что всякое утверждение должно быть обосновано с той или иной степенью интуитивности.

В этой двумерной схеме можно попытаться расположить основные концепции природы математики. Как и в случае любой другой схемы, неизбежны некоторые натяжки и неоднозначности, но в основном картину обрисовать можно.

Положение различных концепций природы математики

Под положением той или иной концепции в предлагаемой схеме я буду понимать положение, которое занимает язык в различных концепциях математики. Поэтому, чтобы не рисовать несколько схем с областью отведенной языку математики, я размещу в схеме не язык, а концепции, имея в виду вышесказанное.

Анализ интерпретаций языка математики мне хотелось бы начать с рассмотрения крайних случаев. В начале шкалы, применительно к суждениям и понятиям, естественно расположить платонизм. Антиподом к платонизму будет формализм, так как для формалиста все понятия имеют смысл настолько, насколько они связаны с другими понятиями, в то время как для платониста понятия могут иметь самостоятельное значение. Для формалиста понятие — символ (термин), а для платониста — сущность.

Платонист не требует обоснования суждений и уж точно не нуждается в полном языковом выражении суждений. Для формалиста же содержание суждения состоит в существенной степени в его доказательстве, которое должно быть выполнено с помощью

615

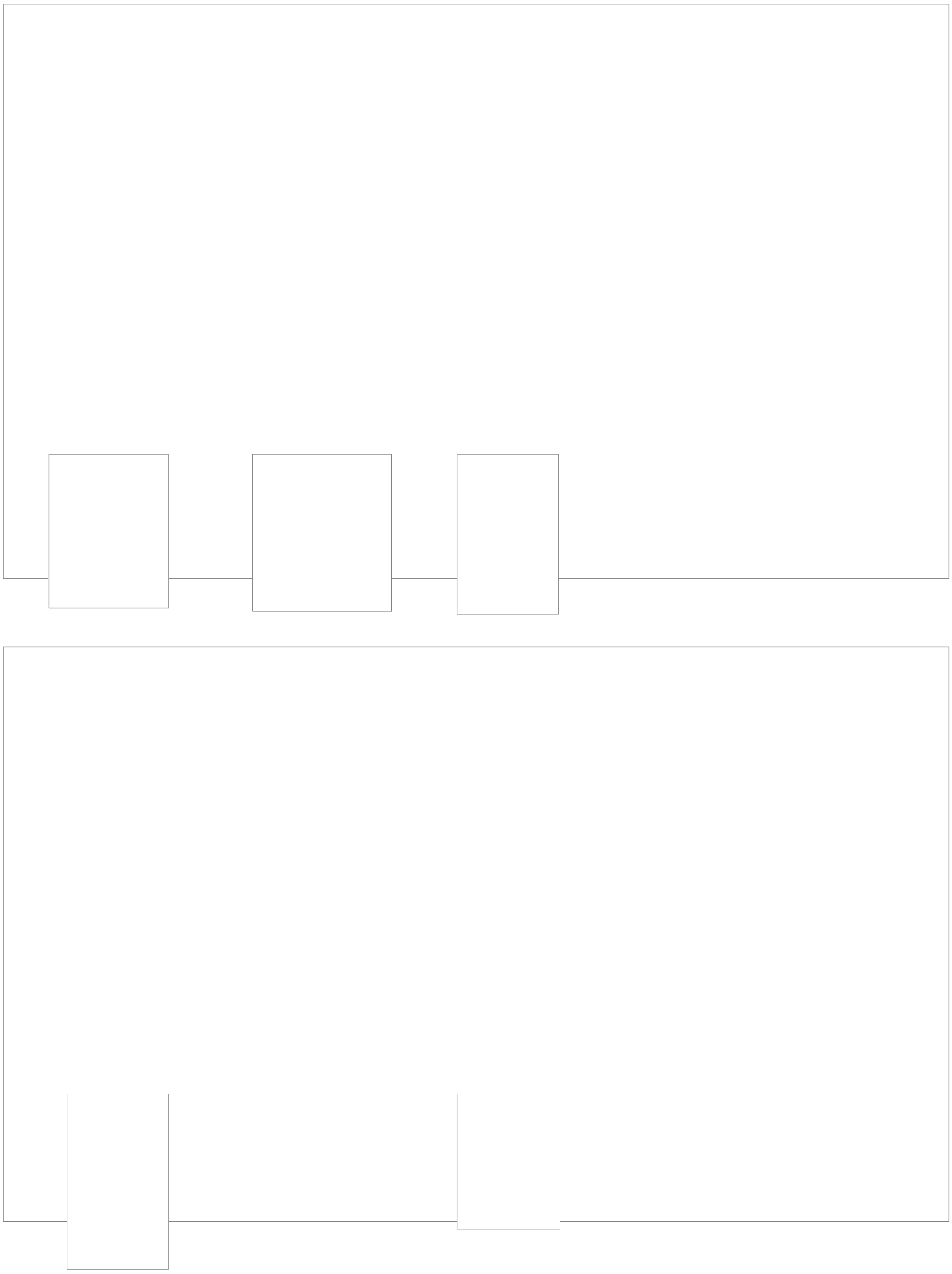


Рис.1

определенных формальных правил, т.е. с использованием фиксированных в языке операционных и метаоперационных суждений.

Интуиционизм (конструктивизм) близок к формализму в схеме, относящейся к суждениям, хотя для него необходимость обоснования метасуждений меньше. Так, некоторые принципы считаются интуитивно ясными, при этом строгость доказательства у интуициониста не уступает формалистскому доказательству, хотя логика может зависеть от объекта рассуждения.

По интерпретации понятий интуиционизм проще отличить от формализма. Интуиционизм допускает, что некоторые понятия (например, натуральное число) с такой (интуитивной) ясностью даны нам, что не требуют определения, а значит, других понятий. При этом терминологический аппарат интуиционизма не уступает по своей развитости формализму.

Рассмотрим место априоризма в предлагаемой двумерной шкале. Априоризм не требует обоснования для всех суждений. В частности, некоторые суждения даны нам с такой ясностью, что нет смысла говорить об обосновании. Так, например, дедуктивный вывод верен в силу свой очевидности. Основная часть суждений в математике рассматривается как аналитические, т.е. полученные с помощью определенных правил построения и вывода новых суждений. Но есть в математике и синтетические суждения, о которых четко рассуждать не представляется возможным. Таковы некоторые аксиомы. Таким образом, априоризм в схеме имеет смысл расположить по соседству с платонизмом. При этом для априоризма необходимость обоснования утверждений будет больше, чем у платонизма. Аналогично, априоризм предъявляет более сильные требования к четкости формулировок и использования операционных суждений, нежели платонизм.

И в «понятийном измерении» априоризм также непосредственно соседствует с платонизмом, так как некоторые понятия, например пространство, имеют собственное содержание. С другой стороны, математические объекты рассматриваются с помощью интуиции пространства и времени, т.е. в терминах геометрии и арифметики. А это означает, что понятия математических объектов рассматриваются не только самостоятельно, но и в связи с другими понятиями. Понятия операций над математическими объектами не являются с необходимостью связанными между собой и носят подчас интуитивный характер. Таково бесконечное продолжение натурального ряда. Тем не менее возможности языкового, терминологического описания (как, впрочем, и любого другого) понятий ограничиваются в связи с тем, что нам доступно лишь описание формы, но не содержание. Соответственно термины отражают форму понятия.

617

Эмпиризм vs. априоризм?

Противостояние эмпиризма и априоризма имеет длинную историю, которая продолжается и в наше время. На первый взгляд, эти две позиции противоположны, поскольку диаметрально расходятся при ответе на вопрос: «Имеет ли человек знание априорное, или он все знание получает из опыта?»

Эмпирист скажет, что все знание человек может получить только из опыта, причем этот опыт может быть скрыт и передаваться, например, с помощью культурных норм, традиций и даже с помощью языка и его правил. Эмпиризм как направление в философии и, в частности, в философии математики нельзя назвать самостоятельной концепцией природы математики. Элементы эмпиризма можно обнаружить и в физикализме, и в социокультурном подходе к рассмотрению математики.

Априоризм также сильно изменился со времен Канта и прошел ряд этапов, в которых его позиция получила новое наполнение. Тем не менее я постараюсь обосновать, что априоризм и эмпиризм вовсе не такие антиподы, как, например, формализм и платонизм. Более того, их интерпретации языка математики в двумерной шкале, оказывается, очень близки.

Например, в шкале, относящейся к понятиям, математические объекты связаны между собой с помощью понятий операций и логических отношений, которые произошли из опыта, причем опыта в широком смысле, в том числе и языкового опыта. Физикализм, в частности, рассматривает операциональные связи между понятиями математических объектов, которые отражают реальные связи физических объектов. Понятия логических операций связываются между собой уже в позднем эмпиризме, связанном с логическим анализом языка.

Применительно к суждениям можно вспомнить «Систему логики» Милля, целью которой, по словам автора, являлось не строгое обоснование предлагаемых методов, но изложение методов, которые использовались в естествознании в его время. Другими словами, доказательства для операциональных суждений, как и в случае априоризма, не требуется, однако требуется четкая фиксация этих суждений для последующего использования в рассуждениях.

Исходя из изложенной позиции, я рискну расположить различные концепции природы математики на двумерной схеме, которую можно рассматривать не только как схему для понятий, но и как схему для суждений. Хочется отметить также, что применимость данной схемы одновременно к понятиям и суждениям не означает, что положение любой концепции будет одинаковым на разных уровнях. Так. например, одними из распространенных позиций на сегодня являются платонизм на уровне понятий и формализм на уровне суждений.

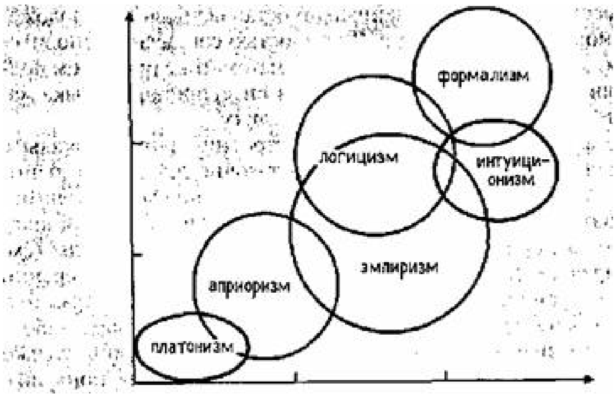


Рис. 2

Из схемы также видно, что априоризм тесно соседствует с эмпиризмом, а, кроме того, интуиционизм, который имеет общие черты с априоризмом, находится на противоположном конце относительно эмпиризма.

КОММЕНТАРИИ

Л. Г. Барабашев

Каждая концепция математики предлагает свою интерпретацию языка математики. Странно, что это естественное и достаточно простое соображение не использовалось ранее при исследовании соотношения математического априоризма и математического эмпиризма.

Техническая реализация указанной стратегии сравнительного изучения априоризма и эмпиризма в математике осуществлена М.В. Гиленко посредством построения и изучения двумерной шкалы (схемы), ранжирующей степень взаимосвязи внутри двух уровней языка математики, а именно, взаимосвязи понятий и взаимосвязи суждений. Если считать, что каждая философская концепция математики формирует свои требования к степени взаимосвязи математических понятий, а также степени взаимосвязи математических суждений, то все философские концепции математики займут свое место на данной двумерной шкале. Автор намечает места концепций, специально останавливаясь на положении априоризма и эмпиризма. Я полностью согласен с основным выводом, что априоризм и эмпиризм в математике при таком подходе (если рассматривать даваемые ими интерпретации языка математики) оказываются близкими друг другу.

В то же время хотя принципы построения данной шкалы и показались мне ясными, но они недостаточно детально «прописаны», в силу краткости статьи очерчены слишком конспективно. И поэтому некоторые детали предложенной двумерной шкалы можно оспорить. Например, в одном измерении шкалы (см. рис. 1, представленный в виде системы координат «в измерении понятий») присутствуют одновременно понятия и термины, хотя, по-моему, следовало бы говорить либо о понятиях, либо о терминах (лучше всего было бы рассматривать термины только как исторически имевший место этап представления понятий). Неясно также, почему формализм на шкале расположен в более «радикальном» месте, нежели логицизм (может быть, их следовало расположить в обратном порядке?). Почему, наконец, на шкале интуиционизм соседствует и даже пересекается с эмпиризмом, а в сопровождающем тексте сказано, что он «находится на противоположном конце относительно эмпиризма»? Данные неточности и недостаточно убедительные утверждения остаются на совести автора. Однако обнаруженный им инструмент сравнительного исследования философских концепций математики (сравнительный анализ представлений этих концепций о языке математики) я считаю необычайно перспективным и могущим дать много принципиально новых результатов в философии математики.

Л. О. Шашкин

В работе М.В. Гиленко проводится сравнение различных концепций математики, которым ставятся в соответствие области на плоскости. Расположение областей определяется при помощи пары шкал, учитывающих степень «связанности» понятий (либо суждений) данной теории и степень формализованности математического языка. Возможно уточнение положения конкретных концепций на схеме, однако больший интерес представляет обсуждение самого способа классификации.

В первом случае рассматриваются связанность понятий (число уровней) и наличие соответствующих терминов, т.е. возможности языка математики. При этом считаются различными и помещаются на разных уровнях понятия объектные, операционные и понятия логических отношений. Такое деление является достаточно условным: с одной стороны, операции и отношения также можно считать объектами теории и размещать соответствующие понятия на одном уровне, например, теория множеств сводит функции и отношения к понятию множества; с другой стороны, можно, в духе теории типов, вводить новые уровни «по построению», располагая понятие на более высоком уровне по отношению к тем, через которые оно определено. Кроме того, не только понятия высшего уровня связываются при помощи суждений. Иерархия уровней понятий может быть целиком описана в терминах суждений, поскольку связанность понятий рассматривается как наличие утверждений о свойствах математических объектов, отношениях между ними, свойствах отношений и т.д.

Содержательно шкала связанности понятий выражает степень развития теории, сложность математического аппарата, используемого различными математическими школами в разные периоды истории.

Поскольку для выражения сложных отношений требуется соответствующая терминология, «в среднем» большим значениям на шкале связанности понятий должна отвечать большая степень формализации языка.

То же можно сказать и о другой паре шкал. Шкала связанности суждений измеряет уровень строгости при обосновании утверждений, в том числе на метауровне, т.е. глубину анализа рассуждений, степень «рефлексии». Формализация делает возможной компактную запись сложных соотношений, облегчающую проверку длинных выводов, поиск ошибок. При движении от теории к метатеории неформализованным может оказаться, вероятно, только самый верхний уровень, нижние «слои», с которыми работает метатеория, должны быть уже достаточно четко описаны.

Если между сложностью используемых в теории конструкций, требованиями к строгости доказательств, с одной стороны, и степенью ее формализованности, с другой,

существует прямая связь, то признаки, по которым оценивается концепция, не являются независимыми. В этом случае предлагаемая схема в действительности может оказаться одномерной. На помещенной в статье диаграмме области, обозначающие рассматриваемые концепции, располагаются вдоль некоторой линии. Интересно было бы уточнить, какие концепции отклоняются от «диагонали» и как можно интерпретировать такое смещение. Можно ли считать значимые отклонения от «линейной зависимости» проявлением «излишней»/«недостаточной» формализованности языка для данного уровня развития теории?
621
620

Для ответа на эти вопросы необходимо уточнить терминологию, более четко указать способ определения значений параметров для каждой из используемых шкап при описании конкретной концепции. Взаимное расположение концепций на схеме желательно обосновать, сравнивая количественные характеристики. Рассматривая каждую концепцию, необходимо также пояснить, идет ли речь о времени возникновения данного направления, о современном или ином этапе в истории математики.

ОТВЕТ АВТОРА

Должен признать, что предлагаемая схема еще не является четко проработанной. Моей целью было показать возможности анализа языка математики не замыкаясь на логическом анализе, как это делали неопозитивисты. Поэтому схема не сводится к теории множеств с теорией типов. Конечно, предлагаемая шкала (не ось) степени связанности не безупречна, но она позволяет анализировать концепции математики, в отличие от шкалы, связанной с уровнями теории типов.

Не соглашусь также и с тезисом о том, что корреляция содержательной и формальной частей концепции является необходимой. Конечно, рисунок провоцирует на такой вывод, но на нем отражены лишь «классические» теории, появившиеся до теорем Геделя. На мой взгляд, и это одна из целей применения приведенной схемы, после работ Геделя концепции начали расползаться в разные стороны от этой оси — шкала из одномерной превращается в двумерную. Развитие компьютерных вычислений, на мой взгляд, приводит к увеличению роли формальной стороны математики в ущерб содержательной. С другой стороны, в топологии содержательная сторона доминирует над формализмом. Расположение концепций на схеме является достаточно условным, о чем говорится в статье. Та область, которую занимает концепция, не связана со временем, она связана с различными взглядами сторонников концепции на язык математики. Хотя нечеткость схемы, ее измерений, отсутствие количественных сравнений — безусловно, серьезный недостаток, который предстоит исправить.

Наконец, хотел бы поблагодарить за критические замечания к моей статье, которые позволили увидеть новые возможности для развития схемы.

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел I
ПО СЛЕДАМ КАНТА

Раздел II
СИТУАТИВНЫЙ АНАЛИЗ

Научное издание

МАТЕМАТИКА И ОПЫТ
Под редакцией *А,Г. Барабашева*

Зав. редакцией *И.Е. Новикова.* Редактор *Е.А. Пермякова.*
Художественный редактор *Ю.М. Добрянская.*
Переплет художника *В.А. Чернецова.*
Технический редактор *И.И. Смирнова.* Корректор *А.В.Яковлев*

Подписано в печать 18.06.2003. Формат $60x90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Офсетная печать.
Усл. печ. л. 39,0. Уч.-изд. л. 32,27. Тираж 1000 экз. Заказ № 1011. Изд. № 7640.

Ордена «Знак Почета» Издательство Московского университета.
125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7.
Типография ордена «Знак Почета» издательства МГУ.
119992, Москва, Ленинские горы.

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Можайский полиграфический комбинат».
143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.

- НА ГЛАВНУЮ
- *Warum Wahrheit?*