МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРЮКИ ДЛЯ БЫСТРОГО СЧЁТА

ИНГВЕ ФОГТ

Ингве Фогт

Математические трюки для быстрого счёта

«Альпина Диджитал»

2018

Фогт И.

Математические трюки для быстрого счёта / И. Фогт — «Альпина Диджитал», 2018

ISBN 978-5-9614-3456-9

Забудьте о калькуляторе, эта книга научит вас скоростным вычислениям в уме или с карандашом. Чтобы считать быстрее, достаточно думать немного иначе, уверен ее автор Ингве Фогт – норвежский журналист научного журнала Apollon и фанат математики.Вы узнаете о простых и нескучных методах быстрого счета, для которых понадобится лишь знание базовых арифметических правил. Метод Трахтенберга, китайский способ счета с помощью черточек и множество других математических техник помогут вам без труда складывать и вычитать, умножать и делить, извлекать квадратный корень и возводить в квадрат большие числа.А еще вы найдете необычные факты и увлекательные истории о числах и людях, которые без ума от них, и познакомитесь с краткой тысячелетней историей систем счисления, начиная со времен Древней Греции до сегодняшней цифровой эпохи.

ISBN 978-5-9614-3456-9

Содержание

Ингве Фогт
Математические трюки для быстрого счёта

Переводчик *Анастасия Наумова*
Научный редактор *Андрей Родин, канд. филос. наук*
Редактор *Ольга Гриднева*
Перевод выполнен при финансовой поддержке NORLA
Главный редактор *С. Турко*
Руководитель проекта *Л. Разживайкина*
Корректоры *Е. Аксёнова, О. Улантикова*
Дизайн обложки *Д. Изотов*
Компьютерная верстка *М. Поташкин*

*** * ***

Предисловие

Мне с самого раннего детства нравились числа и счет. Складывать и вычитать было невероятно круто, а еще были формулы, правила и целый мир деления и умножения. Я все детство мечтал отыскать какую-нибудь волшебную книгу с разными математическими фокусами и способами, которые научили бы меня считать быстрее. Но подобной книги я так и не нашел. Не нашел я ее, даже став взрослым, – ни в Норвегии, ни в других странах. Поэтому я решил осуществить мечту всей моей жизни и написать такую книгу сам. Эта книга – для вас, если вы любите числа и игры с ними, а еще если хотите научиться решать арифметические задачи намного быстрее, чем ваши друзья, учителя математики и коллеги.

Возможно, вы уже заглянули куда-нибудь в середину моей книги и у вас волосы дыбом встали от всех этих чисел и формул. Не бойтесь – мои методы невероятно простые, хоть в это и не верится. Чтобы в совершенстве овладеть искусством быстро считать, вовсе не надо быть гением математики. Обещаю! Вам понадобятся лишь базовые арифметические правила, которым учат в начальной школе, – и ничего больше. Ну а если вам нравится, когда работает голова, то знайте: некоторые фокусы настолько легкие, что вполне позволят вам считать в уме.

Я обожал считать в уме еще в шестилетнем возрасте – эта привычка появилась, когда мы с мамой и младшей сестренкой ходили в магазин. Несколько километров маленькими шажками по довольно крутым холмам. Чтобы мы не кисли, у мамы имелись гениальные приемчики. Она придумала игру, в которой мы складывали и умножали номера домов, которые видели по дороге. Лишь взрослым я понял, что меня обманули: на самом деле мама числа вовсе не любила и просто хотела развлечь нас, пока мы шагали в горку.

Спустя 12 лет моя учительница математики, низенькая пожилая женщина в синем халате, показала мне настоящее чудо: на одном из последних занятий в средней школе она, размахивая указкой, рассказала, как с помощью квадратных уравнений можно с невероятной быстротой возводить в квадрат числа, заканчивающиеся на пять.

Я слушал разинув рот. Мы три года пользовались простейшим квадратным уравнением, решая одну скучную задачку за другой, и даже не подозревали, что с квадратным уравнением можно проделывать такие клевые штуки. Тот урок перевернул всю мою жизнь. Я будто заглянул в по-настоящему волшебный мир чисел. Сейчас, будучи взрослым, я знаю, что можно придумать и более занятные штуки – для этого надо скомбинировать все три типа квадратных уравнений, а большинство из нас с ними, к сожалению, не дружат. Фокусы, о которых я рассказываю в этой книге, научат вас быстро умножать большие числа, не прибегая к промежуточным шагам. Представляете, как ваши друзья удивятся? Несколько глав – и вы уже сможете в голове перемножать двузначные числа.

В книге вы также найдете графические методы решения примеров на умножение, а еще почти забытый способ сложения больших чисел намного быстрее, чем учат сейчас в школе. Этот способ, придуманный узником концлагеря во время Второй мировой войны, перевернул всю систему счета в швейцарских банках (задолго до изобретения калькулятора, из-за которого многие из нас совершенно утратили способность считать в уме).

Наслаждайтесь каждым фокусом в этой книге – проверяйте, тренируйтесь и придумывайте собственные примеры. Играйте, удивляйтесь и делитесь радостью с друзьями. А если вы из тех, кому хочется докопаться до самой сути и понять принцип действия этих методов, загляните на последние страницы – там вы найдете математические доказательства.

Работа над этой книгой принесла мне невероятную радость. Я наконец-то получил возможность целый день играть с числами! Но даже таким, как я, в одиночку бывает не справиться. Поэтому я безгранично благодарен Норвежской ассоциации писателей и переводчиков за грант, выделенный Фондом научно-популярной литературы. Я также благодарю главного редактора Элен Зикфельдт за ее непоколебимую веру в мою книгу, редактора Сёльви Норхейм Клаусен за ее терпеливую работу, врача Брюньяра Ландмарка, заразившего меня интересом к загадкам быстрого счета, декана Мортена Дэлена за согласие предоставить мне рекомендации, математика Арне Б. Слетшё, экономиста Эрленда Никельсена и учителя математики Свенда Эрика Кристофферсена за полезные советы и комментарии. Спасибо моей маме Юдит Фогт (благодаря ей я с детства полюбил считать), а еще моему сыну Исаку Фогту и другим замечательным родственникам за то, что они весь 2017 год слушали мои восхищенные рассказы про математические фокусы.

Ингве Фогт, Осло, январь 2018 г.

1
Научись считать со скоростью света
Как получить удовольствие от этой книги

Добро пожаловать в чудесный мир быстрого счета! В этой книге великое множество забавных и малоизвестных приемов, которые научат вас считать намного быстрее, чем сейчас. Чтобы книга принесла вам как можно больше радости, я искренне советую запастись бумагой. Записывайте и проверяйте. И экспериментируйте как можно больше. Для того чтобы стать королем быстрого счета, все приведенные мной методы не понадобятся, однако познакомиться с ними все равно полезно – так вы поймете, какие вам больше всего по душе. Некоторые из методов действуют лишь в определенных условиях, но есть и универсальные, которые распространяются на любые числа. Чтобы быстрее понять принцип, в некоторых местах я помечаю числа разными цветами. Благодаря этому вы сразу же увидите, какие части числа использовать и в каком порядке.

По-моему, самая важная глава в этой книге – «Чудесный метод счета»: в ней мы учимся тому, чего нам так не хватало, – умножать намного быстрее, чем прежде. А если вы особенно въедливы, загляните в главу под названием «Как комбинировать различные математические фокусы». Да, сочетание различных методов еще сильнее разовьет наше умение быстро считать.

Каждый метод отмечен собственным цветом, так что вы с ходу поймете, какие методы применяются. Не жалейте времени и загляните в разные главы – порядок значения не имеет.

Если вы любите читать книги с конца, то вам представилась отличная возможность. Ознакомьтесь со всеми примерами и проверьте, насколько быстро вы справитесь с заданиями. Вы будете поражены. Порой вам даже станет казаться, будто вы считаете быстрее калькулятора – отчасти потому, что многие случайно набирают на калькуляторе неправильные цифры. Оцените по достоинству каждый метод и проникнитесь осознанием того, что вы – один из немногих, кто теперь на «ты» с этими фокусами. Ну а если захотите вникнуть в суть, загляните в самый конец – там вы найдете доказательства.

2
Проще некуда
Семь правил, которые вам понадобятся

Дорогой читатель, позвольте вас успокоить. Чтобы учиться быстрому счету по этой книге, никаких особых познаний в математике вам не понадобится. Единственное, что от вас потребуется, – это помнить несколько простейших базовых правил, которым учат еще в начальной школе. И больше ничего, обещаю! Честное слово, даже если вы не станете читать эту главу, тех правил достаточно, чтобы вы справился с остальными главами моей книги.

Итак, в основе книги лежат семь легких математических правил. Сравнить их можно с содержимым столярного ящика. Строя прекраснейшие дома, плотник пользуется лишь пилой и топором. Вот и вам понадобится всего несколько математических инструментов, чтобы стать мастером быстрого счета. Некоторые из этих инструментов такие простые, что вы, возможно, сочтете лишним их упоминать. Но я все равно расскажу о них – во-первых, потому что они важные, а во-вторых, потому что они простые и лишний раз порадуют вас.

Правило 1

Первое правило на удивление простое. Порядок чисел при умножении роли не играет:

$$a \times b = b \times a$$

Если буквы вам не по душе, могу продемонстрировать то же самое на простейшем цифровом примере.

3×7 даст тот же результат, что 7×3. Итак, то, в каком порядке перемножать числа, совершенно не важно.

Правило 2

Второе правило тоже манна небесная для тех, кто пребывает в заблуждении и считает математику сложной.

Порядок чисел при сложении роли не играет.

$$a + b = b + a$$

И вот вам пример: 2 + 3 дадут в результате то же число, что и 3 + 2.

Правило 3

Квадрат определенного числа выглядит следующим образом: $a \times a = a^2$.

Обратите внимание на крошечную цифру 2 над последней «а» – читая эту книгу, вы успеете близко с ней познакомиться. Математики называют такие цифры степенями.

Вот еще пример: 3×3 можно обозначить как 3^2.

Разумеется, отрицательные числа тоже можно возводить в квадрат:

$$(-a) \times (-a) = (-a)^2 = a^2$$

Например: $(-3) \times (-3)$ соответствует $(-3)^2$.

А вот это невероятно красиво:

$(-3)^2$ дает тот же результат, что и 3^2.

Правило 4

На квадратные корни тоже приятно посмотреть:

$$\sqrt{a^2} = a$$

Это означает, что если извлечь квадратный корень из возведенного в квадрат числа, то это же число и получится.

На языке цифр это выглядит вот так:

$$\sqrt{3^2} = 3$$

$$\sqrt{8^2} = 8$$

Правило 5

Когда надо умножать отрицательные числа, многие впадают в ступор. Если вас это тоже касается, то быстрому счету вам придется учиться долго.

Одно из важнейших правил звучит так: минус на минус дает плюс.

$$(-x) \times (-y) = x \times y$$

Примеры:

$$(-2) \times (-3) = 2 \times 3 = 6$$
$$(-4) \times (-5) = 4 \times 5 = 20$$

А вот если минус умножить на плюс, то получится, наоборот, минус:

$$(-x) \times y = -(x \times y)$$

Примеры:

$$(-2) \times 3 = -(2 \times 3) = -6$$
$$4 \times (-5) = -(4 \times 5) = -20$$

Запомним это – минус на минус и минус на плюс, и тогда все минусы математики превратятся для вас в плюсы!

Правило 6

Если хотите понять доказательства приведенных в этой книге методов, придется научиться разлагать числовые выражения на множители и раскрывать скобки:

$$a(b + c) = ab + ac$$
$$(a + c)(b + d) = ab + ad + cb + cd$$

Вот и все – больше про разложение на множители знать нам ничего не понадобится.

Правило 7

Некоторые методы быстрого счета в этой книге основаны на трех видах квадратичных тождеств, которые включены в стандартную школьную программу. Все они – особые случаи правила 6:

$$(a + c)(b + d) = ab + ad + cb + cd$$

Квадратичное тождество первого типа:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Квадратичное тождество второго типа:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Квадратичное тождество третьего типа:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

С этими семью правилами в готовальне у вас есть все шансы стать чемпионами быстрого счета. Ну что ж, пора отправляться завоевывать мир! Удачи и успехов!

3
Ходячий калькулятор
Чемпион мира по быстрому счету

В начальной школе я терпеть не мог спорт, зато мечтал стать чемпионом мира по решению в уме всяких математических примеров. Поэтому мне казалось ужасно несправедливым, что школьные спортсмены то и дело выступали на разных соревнованиях, ведь соревнований по математике просто не существовало. Сейчас-то я понимаю, что мое мнение о собственных математических способностях было необоснованно завышенным, я жил в мечтах: хотя считал я и правда довольно быстро, а числа так просто обожал, моих способностей не хватало, если числа в примерах были больше приведенных в таблице умножения. Впрочем, об этом никто не догадывался. Слухи о моих феноменальных математических способностях разлетались со скоростью света и с действительностью ничего общего не имели. Никогда не забуду, как мама одного из моих одноклассников на глазах у всего класса погладила меня по голове и выразила свое восхищение: еще бы, ведь я умею в уме перемножать многозначные числа. Мне тогда было девять лет. А еще мама моего одноклассника слышала, будто я умею и миллионы перемножать. Все это было неправдой, но стеснительность помешала мне опровергнуть слухи. Я смотрел на эту женщину и вспоминал, как однажды, будучи первоклашкой, возвращался из школы домой и был пойман шестиклассниками, которые потребовали сделать за них домашку по математике. Они крепко держали меня (впрочем, особых усилий от них не требовалось – я был самым мелким во всей школе) и, пока я не решил все задачки, не отпускали.

Задачки у них оказались очень простыми. В одной я нарочно допустил ошибку – хотел проверить, заметят ли они, но они, к моей великой радости, ничего не заподозрили. Легенда о моем таланте вдребезги разлетелась в шестом классе, когда отец отвел меня к университетскому профессору, предварительно рассказав ему о моих невероятных успехах. Профессор дал мне несколько примеров и выглядел довольно-таки разочарованным, когда я ошибся в первом же из них. Именно в тот момент я понял, что лучше всего считаю в спокойной обстановке и наилучшее впечатление произвожу на тех, кто сам с математикой не дружит.

В уме быстрее всех в мире считает американец по имени Скотт Фленсбург, и для него обстановка никакого значения не имеет. Его часто приглашают на знаменитые ток-шоу, а звезда американских телеэкранов Реджис Филбин назвал Фленсбурга живым калькулятором. Скотт Фленсбург посчитает в голове быстрее, чем мы успеем посчитать на калькуляторе. 27 апреля 2000 г. он попал в Книгу рекордов Гиннесса, потому что за 15 секунд наибольшее количество раз прибавил случайно выбранное двузначное число. Ему досталось число 38, и за это ничтожно короткое время он успел прибавить его 36 раз и выдать ответы: 38, 76, 114, 152, 190, 228 и так далее до 1368. Это означает, что одной секунды ему хватало, чтобы прибавить число 38 два раза. Мягко говоря, потрясающе. Попробуйте сами! Так быстро считать еще никому не удавалось!

Как сказал, демонстрируя по телевизору свой рекорд, он сам, «встроенный в мозг калькулятор – это щедрый подарок, вот только слова мешают». Дело в том, что считает Фленсбург быстрее, чем успевает произнести ответ, хотя говорит тоже не медленно. Это несоответствие скорости работы мозга темпу речи можно сравнить с супербыстрым компьютером, подключенным к постоянно зависающему принтеру.

С такой же скоростью Скотт Фленсбург умножает и делит числа. Мы еще и калькулятор не успеем включить, а он уже извлечет квадратный и кубический корень и с той же скоростью выдаст ответ, даже если в нем имеются дроби. «Я не атлет, я матлет», – повторяет он словно мантру. Если имена великих спортсменов – Златана, Роналду и Болта – знакомы каждому, то матлеты не известны никому. А ведь как чудесно было бы узнать о них в детстве!

Фленсбург утверждает, что в голову каждого из нас встроен калькулятор. Он размером с виноградину, и его можно натренировать. Чем он больше, тем лучше ты считаешь. Вот только в нашем обществе быть плохим математиком не предосудительно, и поэтому Фленсбург решил посвятить свою жизнь тем, кто любит числа, и помочь тем, кто не питает к числам особенно теплых чувств, понять, насколько занятная штука счет. Приезжая в школы в самых разных уголках мира, Скотт Фленсбург просит учеников придумывать для него примеры. Школьники при этом уже держат наготове калькуляторы. Они еще и кнопки нажать не успевают, когда у матлета, к бесконечному восторгу зрителей, уже готов ответ. «Калькулятор начинает с нуля. И мой мозг тоже. Я всегда начинаю с нуля и забываю о прошлом и будущем». Фленсбург обнаружил свой калькулятор совершенно случайно и благодарит за это своего потрясающего школьного учителя математики. В девятилетнем возрасте он придумал способ складывать числа быстрее, чем учитель, – Фленсбург складывал числа в любом порядке, и получалось у него это невероятно быстро. Именно тогда он и понял, что представляет собой своеобразный человеческий калькулятор. С тех пор этот метод стал его коньком. Сами представьте: вам надо сложить четыре двузначных числа – 13, 14, 16 и 17. Большинство из нас начнут с того, что сперва сложат единицы, а следом – десятки. По мнению Скотта Фленсбурга, это наихудший метод, потому что ответ можно прикинуть не сразу. «Это же совершенно нелогично. Ведь читать-то мы учимся слева направо, однако математические примеры нас учат решать справа налево. На самом деле следовало бы и считать тоже слева направо». Его совет таков: первым делом складывайте десятки, и тогда вы сразу же узнаете примерную итоговую сумму.

Одна из самых интересных математических игр, в которую Фленсбург играет со школьниками во время своих многочисленных турне, – привести любой пример к числу 9. Возьмем любое случайное число, например 28, сложим составляющие его цифры и вычтем их сумму из самого числа: $2 + 8 = 10$ и $28 – 10 = 18$. Проделаем то же самое с получившимся числом: $18 – (1 + 8) = 9$. Не важно, с какого числа начинать и большое ли оно – в итоге все равно получится 9.

Скотт Фленсбург не только придумывает математические игры для школьников – он также помогает студентам и их родителям преодолеть страх перед математикой. Скотт уверен: возможность хорошо считать и завести у себя в голове собственный калькулятор есть у каждого. В 2014 г. этот математический гений в четвертый раз посетил Норвегию, где выступил перед 20 000 учеников и учителей. Его цель – встретиться со всеми девятилетками в мире и объяснить им, что математика – это не зубрежка, а часть нашего естественного человеческого языка. Как он сам пишет в книге «Волшебство математики» (Math Magic), «мир вокруг нас полон чисел. Тот, кто не понимает числа, ограничен так же, как и тот, кто не умеет читать». Скотт Фленсбург старается развеять миф о том, что математика доступна только ученым. Он полагает, что некоторые техники быстрого счета способны изменить наше понимание чисел, так что страх перед числами сменится восхищением. Хотя сейчас Фленсбург считает быстрее всех в мире, техники быстрого счета разрабатываются уже на протяжении нескольких тысячелетий. В следующей главе я расскажу о том, как люди в разные эпохи записывали числа (а порой эти способы очень отличаются от современных) и использовали их в вычислениях. Это намного интереснее детективных романов, поэтому быстрее перелистывайте страницу и переходите к следующей главе.

4
Тысячелетняя история чисел за две минуты
И еще парочка невероятных фактов

Эту книгу следовало бы написать задолго до изобретения калькулятора и других вычислительных машин, то есть пока они не испортили нашего отношения к числам. Но утешает тот факт, что эту книгу невозможно было написать до появления нашей системы счисления.

Лишь совсем немногие понимают, что наша система счисления – одно из самых полезных изобретений человечества за всю его историю. При помощи простых символов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 можно записать какое хочешь число – до бесконечности. А кроме того, они помогают нам решать любые задачи.

Самое гениальное заключается в том, что величина каждой цифры не является понятием постоянным, а зависит от ее позиции по отношению к другим цифрам. Возьмем число 222: цифра справа обозначает количество единиц, цифра посредине – число десятков, а цифра слева – сотен. Среди ученых это называется позиционной нумерацией.

Для многих из нас такая система – нечто само собой разумеющееся, и нам кажется, будто появилась она вместе с человечеством, однако системы счисления не всегда были такими, как сейчас. Впрочем, люди научились считать за десять тысяч лет до того, как у нас в Норвегии растаяли ледники.

Числа и счет были изобретены для того, чтобы решать практические задачи. Когда числа только появились, считать можно было, даже не зная их. Один из наиболее древних примеров того – археологические находки, сделанные в 1937 г. в пещере в Дольни-Вестонице (бывшая Чехословакия). На лучевой кости волка археологи обнаружили 55 насечек, сгруппированных по пять. Согласно теории Жоржа Ифры, французско-марокканского ученого и автора книги «Всемирная история чисел» (Histoire Universelle des Chiffres), охотник наносил насечку на кость каждый раз, когда убивал какого-то зверя. Возможно, убивая волков, медведей и оленей, охотник делал насечки на различных костях. Этот метод используется и по сей день, разница лишь в том, что мы заменили заостренный камешек и кость бумагой и ручкой. Представьте, что вы работаете в лотерейном комитете и ваша задача – проверить, честно ли действуют различные компании, проводящие лотерею. При каждом броске кубика вы делаете отметку. Чтобы не запутаться, при каждом пятом броске вы рисуете черточку над четырьмя предыдущими. Таким образом вы получаете более наглядное представление о том, как распределяются броски.

Еще можно представить фермера, разводящего овец. Со счетом он не очень дружит, поэтому, подсчитывая овец, тоже прибегает к такой системе черточек. Выпуская овцу пастись, он делает насечку на кости, а вечером, загоняя овец, сопоставляет количество насечек с числом вернувшихся овец.

Некоторые первобытные народности обходились вообще без счета. Это доказывает их язык. В отдельных первобытных языках слова, обозначающие количество, ограничиваются тремя – «один», «два» и «много». Число три обозначается как «два плюс один», а все, что больше четырех, называется «много». Иногда такие огромные числа получают название «тьма».

Числа были особенно важны для успешного функционирования человеческого общества. Пример – торговцы, которым необходимо было вести учет товара и назначать цену. В древнем государстве Элам, располагавшемся на территории современного Ирана, мудрецы придумали простую, но очень удобную вычислительную систему. Палочка стала символом единицы, шарик символизировал десятку, а мячик – сотню.

В большинстве культур, в том числе и в нашей, пользуются десятичной системой, то есть состоящей из десяти различных цифр. Мы редко задумываемся, почему сложилось именно так, но ответ поразительно прост: на каждой руке у нас по пять пальцев, а всего их десять. При помощи пальцев люди в свое время и начали считать. А в таком случае что может быть логичнее, чем десятичная система?

Если же вам кажется, будто наша десятичная система – единственная, то вы заблуждаетесь. Ее изобретали много раз, причем в самых разных уголках земного шара (например, евреи, персы, монголы, тибетцы, инки и римляне).

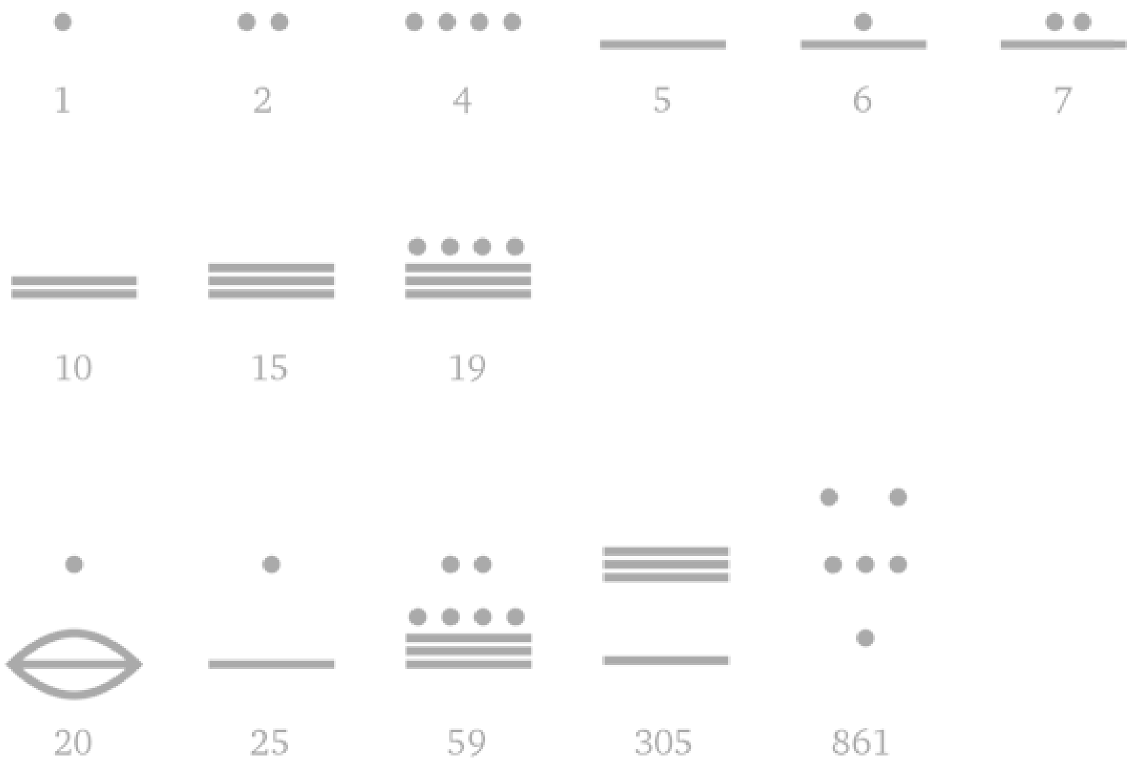
До появления нашей позиционной нумерации одной из наиболее известных систем была римская – ее по-прежнему используют для нумерации столетий. Хотя римские цифры выглядят странновато, эта система относится к простым. Математики называют ее аддитивной, и это означает, что цифры, стоящие рядом, нужно складывать. Положение каждого символа не влияет на его значение. Вертикальная палочка (I) = 1, две вертикальные палочки (II) = 2, а три вертикальные палочки (III) = 3. Если палочек станет чересчур много, легко запутаться, поэтому римляне ввели следующие символы: V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, а M = 1000. Так же как и при подсчете единиц, можно подсчитать количество десяток, сотен и тысяч. Значит, XXX = 30, а MMM = 3000. И все же римляне придумали одну хитрость. Чтобы сократить количество символов, они составили правило, позволяющее вычитать меньшее число из большего, если меньшее находится перед большим. Поэтому число 4 обозначается как IV (5 – 1), а число 9 – как IX (10 – 1). Получается, что XIV значит 14 (10 + 5 – 1), а XXXIV – 34 (10 + 10 + 10 + 5 – 1).

Если человек родился в 1973 г., то его год рождения можно записать так: MCMLXXIII (1000 + 1000 – 100 + 50 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1).

Как мы видим, для вычислений эта система не особенно удобна. Попробуйте-ка умножить XIX на VIII. Ну и как успехи? Зато складывать римские цифры немного проще. Давайте сложим CCCLII и CCXIII. Сначала надо сгруппировать все одинаковые символы. Получится CCCCCLXIIIII. А теперь чуть-чуть упростим. CCCCC = D, а IIIII = V. Значит, CCCLII + CCXIII = DLXV.

Используя правила сложения, римляне не учитывали правило, согласно которому меньшее число перед большим предполагало вычитание. Чтобы правило срабатывало, такие числа, как 9, приходилось записывать не как IX, а как VIIII.

Не все культуры прибегали к десятичной системе счисления. Кто-то предпочитал двадцатеричную – видимо, руководствуясь тем, что у людей десять пальцев на руках и десять на ногах, то есть всего двадцать. Хороший пример – народ майя, который постигла печальная судьба после открытия европейцами Америки в 1492 г.



Сложные числа. Майянская система счисления

Их система счисления просто потрясающая, но применять ее тоже, скорее всего, было непросто. Начало простое: одна точка обозначает 1, две точки – 2, а четыре – 4. Число 5 обозначается горизонтальной чертой. Пока все просто и легко. Далее точки располагаются над чертой: 6 представляет собой черту с точкой над ней (5 + 1), а 7 – черту с двумя точками (5 + 2).

Число 10 представляет собой две горизонтальные линии, расположенные друг над другом (5 + 5). 15 – три горизонтальные линии (5 + 5 + 5), а 19 – четыре точки над тремя горизонтальными линиями (5 + 5 + 5 + 4). А вот отсюда начинается веселье! Числа от 20 записываются в два ряда. В верхнем ряду подсчитывается количество двадцаток, а в нижнем – количество единиц. Чтобы написать число 20, поставьте точку в верхнем ряду (это будет означать 1 × 20). Нижняя линия обводится так, чтобы получился майянский символ нуля (он похож на эллипс или на мяч для американского футбола). Что ж, продолжим. 25 выглядит как точка сверху, что означает 1 × 20, и горизонтальная линия снизу, которая, как мы помним, означает 5. Число 59 записывается как две точки сверху (2 × 20 = 40) и четыре точки снизу над тремя горизонтальными линиями (3 × 5 + 4 = 19). Как может заметить наблюдательный читатель, 40 плюс 19 равно 59.

Число 305 записывается тремя расположенными друг над другом линиями в верхнем ряду, потому что каждая из линий – это 5, а значит, в сумме они составляют 15. Так как находятся они сверху, нам надо умножить 15 на 20 – так мы получим 300. В нижнем ряду нам надо нарисовать линию, которая соответствует числу 5. В сумме мы получаем 305.

Сейчас все будет еще веселее! Числа больше 400 записываются в три ряда! Допустим, нам надо записать 861. В нижнем ряду ставим точку, которая обозначает единицу. В среднем ряду (там, где у нас двадцатки) ставим три точки, что значит 3 × 20 = 60. В верхнем ряду ставим две точки, и это значит 2 × 20 × 20 = 800.

Поняли принцип? С каждым рядом число увеличивается в 20 раз.

А чтобы сделать все еще сложнее, майя разработали две версии системы счисления – одну для практического использования, а другую для религиозных и астрономических вычислений. Та, которую мы описали выше, – для практического применения. В версии для религиозных и астрономических вычислений цифры в третьем ряду умножались не на 20, а на 18. Такая система более точно соответствовала астрономическому циклу и позволяла предсказывать настроение богов.

В Месопотамии, которую еще называют колыбелью цивилизации, использовалась шестидесятеричная система счисления. Основным числом здесь было 60, а не 10, как в нашей системе. Число 89 записывалось как (1)(29), что означает $1 \times 60 + 29 = 89$. А число 4568 записывалось так: (1)(16)(8), то есть $1 \times 60 \times 60 + 16 \times 60 + 8 = 4568$.

Удивительно, но пережитки шестидесятеричной системы существуют и в современном обществе. Вспомним часы – час делится на 60 минут, а минута – на 60 секунд.

Шестидесятеричная система – не самая простая в мире. Представьте, как выглядела у майя таблица умножения. Если уж нашу таблицу умножения с десятью числами вызубрить непросто, то представьте, каково было заучивать таблицу умножения в шестидесятеричной системе. Вот это по-настоящему нелегко! Поэтому мозгу намного проще пользоваться десятичной системой, а не двадцатеричной или шестидесятеричной.

Однако удобнее всего двенадцатеричная система – она представляет собой упрощенный вариант шестидесятеричной. Раньше число 12 называлось дюжиной, а 12 дюжин – гроссом. Число 12 удобно тем, что оно кратно множеству других чисел (2, 3, 4 и 6), в отличие от 10 (кратно 2 и 5). На практике это означает, что 1/3 будет работать лучше в двенадцатеричной системе, чем в современной десятичной.

Если бы люди были в родстве с птицами, то мы, по всей видимости, выбрали бы восьмеричную систему, потому что тогда у нас было бы всего восемь пальцев. Восьмеричная система состоит из восьми чисел: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, а значит, далее следуют 10 (8 в десятичной системе), 11 (9 в десятичной системе) и так далее. Если продолжать в том же духе, то мы увидим, что числу 16 в десятичной системе соответствует число 20 в восьмеричной. Попробуйте сами! Это очень забавно, и играть в такую игру можно с друзьями. С восьмеричной системой у нас было бы меньше сложностей на заре компьютеризации.

Компьютер запоминает информацию благодаря комбинациям нулей и единиц. Других цифр для него не существует. Это означает, что компьютер пользуется двоичной системой. Если бы человечество применяло восьмеричную систему, для того, чтобы представить одну цифру, достаточно было бы комбинации из трех нулей и единиц. Число 0 можно было бы представить как 000, число 1 – как 001, число 2 – как 010. Если еще немного поразмыслить, выходит, что число 7 было бы представлено как 111. К сожалению, люди оказались менее дальновидными. Десятичная система предполагает, что одно число будет представлено комбинацией из четырех нулей и един иц. На первый взгляд, разница невелика – подумаешь, четыре цифры вместо трех, однако на заре компьютеризации, когда внутренняя память была дорогим удовольствием, восьмеричная система значительно удешевила бы процесс.

Современную систему счисления можно во многих отношениях сравнить с изобретением алфавита. Финикийцы заимствовали свой алфавит у семитских народов Синайского полуострова, которые в свою очередь взяли за основу египетские иероглифы. Иероглифы представляют собой сочетание символов и 24 согласных. В основе еврейского и арабского алфавитов лежит финикийская письменность.

Поразительно, что в еврейском алфавите, как и в греческом, каждая буква имеет свое числовое значение. Если сложить числовые значения букв в слове «Яхве», то есть «Бог» (יהוה), получится 26 – число, ставшее для иудеев священным.

Как говорится во вступлении к этой главе, наша система счисления – позиционная. Значение цифры в ней определяется ее позицией в числе. До такого гениального изобретения люди умудрились додуматься всего четыре раза за всю свою историю. Первый раз это произошло в

Вавилоне в начале второго тысячелетия до нашей эры, во второй – в Китае незадолго до начала нашей эры, в третий раз эта система появилась в майянской культуре в период между IV и IX в., а в четвертый ее открыли индийские математики.

Но самое великое открытие сделали в Индии. Именно там было изобретено число ноль в том виде, в каком мы знакомы с ним сегодня. Ноль обозначает отсутствие числа. Ни вавилонцы, ни майя воспользоваться нолем не смогли. Вавилонцы никогда не считали ноль числом, а майя не смогли правильно использовать ноль из-за сложности трехуровневой системы. Китайцы стали применять ноль с подачи индусов, которых нам остается лишь поблагодарить за это изобретение. Спасибо тебе, Индия! И еще одна огромная благодарность – арабам, ведь именно они донесли до нас изобретенный индусами ноль. Переход к современной системе счисления занял несколько сотен лет. За это время внешний вид цифр изменился.

В Европе арабские цифры вызвали смешанные чувства. Некоторые европейские математики воспротивились и даже называли пришедшие из арабского мира цифры дьявольским изобретением. Неудивительно, что европейским ученым приходилось в то время нелегко.

Древние египтяне тоже пользовались десятичной системой, но она была не позиционной, различные числа обозначались иероглифами, а способы умножения и деления вызывают восхищение и по сей день.

Для умножения египтяне записывали числа в две колонки. В первой колонке числа начинаются с единицы и удваиваются до тех пор, пока число не приблизится к одному из умножаемых чисел. Во второй колонке записывается второй множитель, который затем с каждой строчкой удваивается.

Допустим, нам надо умножить 38 на 17.

1	17
2	34
4	68
8	136
16	272
32	544

Следующий шаг – найти в левой колонке числа, которые в сумме дают 38.

$$32 + 4 + 2 = 38$$

Теперь надо сложить числа в правой колонке напротив чисел 32, 4 и 2.

$$544 + 68 + 34 = 646$$

Ну вот – мы с вами умножили числа так, как это было принято в эпоху фараонов: 38 умножить на 17 равно 646.

Деление осуществляется почти по тому же принципу, разве что немного сложнее.

Допустим, нам надо разделить 646 на 17.

Действовать будем так же, как и при умножении. В левой колонке начнем с 1 и будем удваивать числа. Во второй колонке начнем с 17 и будем удваивать числа, пока почти не доберемся до 646.

1	17
2	34
4	68
8	136
16	272
32	544

Теперь в правой колонке отыщем числа, сумма которых составляет 646. Это 544 + 68 + 34.

Далее посмотрим, какие числа в левой колонке стоят напротив этих трех чисел, и сложим их.

Вот что получится: 32 + 4 + 2 = 38.

Ну вот мы и совершили настоящий египетский математический подвиг!

646 разделить на 17 равно 38.

Если вас это не впечатлило, то не забывайте, что египтяне осуществляли все эти хитроумные вычисления в те времена, когда наши собственные предки жили в бронзовом веке, а до появления двух великих норвежских математиков – Нильса Абеля и Софуса Ли – оставалось еще много тысячелетий.

Индийские вычислительные методики, сложившиеся во времена, когда у нас в Норвегии только-только начался железный век, были еще эффективнее, а до Европы они добрались благодаря арабским математикам. Метод, который индусы применяли для сложения чисел, очень похож на тот, которому сейчас учат в наших школах. Единственное различие заключается в том, что индусы начинали с самых больших цифр, а числа, которые надо было держать в уме, добавлялись потом. Кроме того, счет велся снизу вверх. Их метод сложения очень похож на тот, которым пользуется мировой чемпион по быстрому счету из предыдущей главы.

В XIII в. арабы придумали сложный способ умножения – настолько красивый графически, что я посвятил ему отдельную главу этой книги. В главе 26 – «Прекраснее листопада» – я раскрою вам тайны этого метода. Когда в позднем Средневековье он добрался до Европы, его называли умножением ревнивцев, потому что вертикальные линии в клеточках напоминали щели в ставнях, через которые ревнивцы подглядывали за своими супругами.

Хотя сейчас мы не представляем себе жизни без калькулятора, на самом деле калькулятор у людей имелся всегда. Это наши руки. Многие использовали для счета собственные пальцы. В Индии, Индокитае и Китае для счета использовалась каждая фаланга пальца. Большой палец состоит из двух фаланг, а остальные – из трех. Значит, на одной руке у нас имеется 14 фаланг. Получается, с помощью пальцев одной руки можно посчитать не только до пяти. Пользуясь двумя руками, китайцы могли досчитать до десяти миллионов!

Один из самых интересных способов умножать с помощью собственных пальцев – перемножать числа от 6 до 10. Этот способ проще некуда. Числу 6 соответствует один палец, числу 7 – два пальца, а числу 8 – три. Умножим 7 на 8. Для этого придется загнуть два пальца на одной руке и три – на другой. Всего получится пять загнутых пальцев. Каждый из этих пяти пальцев соответствует десяти. Итого 50. Теперь надо перемножить не загнутые пальцы на каждой руке. На одной руке их три, а на другой – два.

$$3 \times 2 = 6$$

Это количество – единицы. При умножении 7 на 8 мы складываем получившиеся десятки с единицами: 50 плюс 6 равно 56.

Ну а теперь пора приступать к быстрому счету и восхищаться возможностями, которые дарит нам наша удивительная система счисления. В следующей главе вы увидите, как перемножать двузначные числа, близкие к сотне. Почувствуйте скорость!

5
Счет на раз-два-три
Умножение двузначных чисел, близких к 100

Наверняка вы часто ловили себя на мысли, что перемножать двузначные числа смертельно скучно. Но я готов подсказать вам новый, приятный способ подступить гораздо ближе к числовой нирване и умножать в два счета. Этой восхитительной хитрости меня научил один друг-врач, пока мы тащились по грязной, слякотной тропинке в Нурмарке. Он так увлек меня задачками на умножение, что мы считали до хрипоты. Уже несколько сотен примеров спустя мне в голову пришла идея написать эту главу. Пускай предложенную здесь технику и удобнее всего использовать для умножения чисел, близких к сотне, в принципе, она подойдет и для любых других.

Ну что ж, начнем.

Допустим, нам надо умножить 93 на 97. Привычный тягомотный способ, которому учили еще в начальной школе, вызывает зевоту.

$$\begin{array}{rr} & 93 \times 97 = \\ & 651 \\ + & 837 \\ \hline = & 9021 \end{array}$$

Тоска зеленая! Сначала на 93 умножается 7, а потом 9, и промежуточные вычисления со сдвигом влево записываются одно под другим и складываются. Но больше никакой траты времени впустую! Одна хитрость – и все станет проще и веселее.

Вернемся к тому, с чего мы начали.

Итак, умножаем 93 на 97. Запишем числа 93 и 97 в столбик слева, а справа – сколько каждому из них не хватает до 100.

Числу 93 не хватает 7, чтобы превратиться в 100.

Числу 97 не хватает 3, чтобы превратиться в 100.

Запишем это так:

93	7
97	3

Ответ уже почти у нас в руках.

Теперь крест-накрест вычтите число в левом столбце из числа в правом столбце. Какую бы пару вы ни выбрали, ответ будет один и тот же. Можете вычесть 3 из 93 или 7 из 97 – как вам больше нравится.

93 – 3 или 97 – 7 равно 90. Это первые две цифры финального ответа.

А теперь перемножьте между собой числа из правого столбца:

$$7 \times 3 = 21$$

Это вторые две цифры финального ответа.

Вот мы его и посчитали:

$$93 \times 97 = 9021$$

Волшебно, правда?

Можно посоревноваться с самим собой и проверить, сколько времени занимает решить пример старым и новым способом. После непродолжительной тренировки скорость вычислений возрастет весьма существенно. А если потренироваться еще, то считать вы будете уже в уме.

Небольшое уточнение: вы, наверное, уже справедливо заметили недостаток этой техники. Да, ей удобно пользоваться, когда перемножение чисел из левого столбца дает двузначный ответ. Но давайте добавим к результату первой операции два ноля и пересчитаем все полностью корректно.

Числу 93 не хватает 7, чтобы превратиться в 100.

Числу 97 не хватает 3, чтобы превратиться в 100.

Запишем это так:

93	7
97	3

Вычтем 3 из 93 или 7 из 97 и получим 90.

А теперь умножим полученное число на 100 (для этого достаточно написать после 90 два ноля). У нас получится 9000.

Теперь осталось перемножить числа из правого столбца – $7 \times 3 = 21$, прибавить 21 к 9000 и получить 9021.

Задача выполнена. Вуаля!

Удостоверимся, что вы усвоили этот метод, и разберем еще пару примеров.

Предположим, вы хотите умножить 97 на 98.

Числу 97 не хватает 3, чтобы превратиться в 100.

Числу 98 не хватает 2, чтобы превратиться в 100.

Запишите эти числа в два столбца:

97	3
98	2

Крест-накрест вычтите число в левом столбце из числа в правом столбце. Какую бы пару вы ни выбрали, 97 и 2 или 98 и 3, ответ все равно будет 95. В результате умножения 95 на 100 получится 9500.

Затем перемножьте числа из правого столбца – 2 и 3. Получится 6. Наконец прибавьте 6 к 9500:

9500 + 6 = 9506

Это значит, что 97 × 98 = 9506.

Проще некуда, правда?

И еще один пример.

На этот раз вы хотите умножить 88 на 88. Числу 88 не хватает 12, чтобы превратиться в 100. Снова запишите эти числа в два столбца:

88	12
88	12

Теперь вычитание: 88 минус 12 равно 76. Допишите два ноля – получится 7600. Теперь настала очередь чисел из правого столбца. 12 раз по 12 – это 12 в квадрате. Если вам кажется, что возвести число в квадрат сложно, то глава 12 вас переубедит: там я рассказываю о способе вычислять квадрат числа в два счета.

А пока: 12 раз по 12 будет 144.

Прибавьте 144 к 7600. Получится 7744.

Значит, 88 × 88 = 7744.

Нравится? Меня самого так увлекло, что с тех пор я витаю в (вычислительных) облаках. Техника из следующей главы способна вызвать не меньшую эйфорию. Перелистывайте страницу и не спускайтесь с небес, дорогие читатели.

6
Быстрее молнии
Квадрат чисел, оканчивающихся на 5

Как я писал в предисловии, в старшей школе у меня была очень строгая учительница математики. Она ходила по классу в застиранном синем рабочем халате и, размахивая указкой, заставляла учеников трепетать от страха. Однако на последнем уроке перед выходом на пенсию она поделилась с нами эпохальным откровением. К тому моменту мы уже несколько лет старательно, с глубочайшей серьезностью, осваивали три формулы сокращенного умножения для квадратов. Веселью и смеху места не находилось – слишком уж ответственное было дело. И вдруг на самом последнем занятии наша учительница лукаво – впервые! – улыбнулась и поведала секрет, как с помощью первой формулы играючи возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 5. Этот урок стал историческим событием, изменившим мою жизнь. Околдованный, я потерял дар речи. Тогда и был заложен первый кирпичик моей книги. Способ оказался таким простым для понимания и забавным, что с тех пор я сам делюсь им с коллегами и друзьями.

Посчитаем квадрат 45, то есть умножим 45 на 45. Математики записывают это так: 45^2. Первая цифра числа 45 – 4. Умножьте ее на цифру, большую на единицу, – на 5. Получится 20. А теперь запишите 25, квадрат 5, вслед за полученным результатом. Это и есть наш ответ.

$$45 \times 45 = 2025$$

Попробуем еще раз!

Может, вам хочется умножить 85 на 85? Перед 5 стоит 8. Что больше 8 на единицу? 9.

$$8 \times 9 = 72$$

После 72 поставьте 25.

Выходит, $85 \times 85 = 7225$.

Способ, конечно, работает независимо от того, сколько цифр стоит перед 5.

Предположим, что вам не терпится возвести в квадрат 105. Перед 5 идет 10. Умножьте 10 на число, большее на единицу:

$$10 \times 11 = 110$$

Запишите следом 25.

Значит, $105 \times 105 = 11025$.

Вот как легко все делается. Неудивительно, что многие обрадуются этому математическому откровению. Если же вы готовы и к другим подобным откровениям, переходите к следующей главе.

7
Как удивить любителей чисел
Квадрат чисел, оканчивающихся на 25

В предыдущей главе я показал, как вычислять квадрат любых чисел, оканчивающихся на 5. Если предложенный способ пришелся вам по душе, то обещаю, что возводить в квадрат числа, оканчивающиеся на 25, вам понравится не меньше. Единственное отличие новой техники от предыдущей заключается в том, что новая поражает воображение еще сильнее. Окажись на одной с вами вечеринке любитель чисел, вы сможете его впечатлить, производя вычисления с такой головокружительной скоростью, что хозяева не успеют даже подать еду, как вы уже победно воскликнете «эврика!». Хоть с математической точки зрения техника и очень проста, другим гостям вы покажетесь волшебником. И здесь я хочу сказать вам, дорогие читатели: «Добро пожаловать в рай скоростных вычислений!»

Возведем в квадрат 425, то есть умножим 425 на 425. Для удобства понимания советую на время поставить запятую перед 25. В ответе ее можно убрать.

Итак, на первом этапе мы будем умножать 4,25 на 4,25.

Обратите внимание на целое число перед запятой. Это 4. Возведите 4 в квадрат и прибавьте к ответу число вдвое меньше исходного 4: $4^2 + 4 / 2 = 16 + 2 = 18$. Прибавьте его к 0,0625. (На случай, если вы недоумеваете, откуда взялось это число: 0,0625 – квадрат 0,25.)

Вот мы и добрались до ответа:

$$4{,}25 \times 4{,}25 = 18 + 0{,}0625 = 18{,}0625$$

Осталось только убрать запятые:

$$425 \times 425 = 180625$$

Давайте попробуем снова. Может, вам хочется посчитать квадрат 825?

Правило остается неизменным. Поставьте перед 25 запятую и сначала возведите в квадрат 8,25. В этот раз целое число перед запятой – 8. 8 в квадрате – 64, и к 64 прибавьте еще половину 8:

$8^2 + 8 / 2 = 64 + 4 = 68$

Сложите 68 и 0,0625:

$8{,}25^2 = 68{,}0625$

Уберите запятые:

$825^2 = 680625$

Тройка приносит удачу, поэтому разберем еще один пример и посчитаем квадрат 725. Поставьте перед 25 запятую и умножьте 7,25 на 7,25. Перед запятой стоит 7. Возведите в квадрат 7 и прибавьте к результату половину 7:

$$7^2 + 7 / 2 = 49 + 3{,}5 = 52{,}5$$

Прибавьте 52,5 к 0,0625.

Получается:

$$7{,}25^2 = 52{,}5 + 0{,}0625 = 52{,}5625$$

А если убрать запятые, то получится, что $725^2 = 525625$.

Чтобы вы точно почувствовали себя как рыба в воде и совсем ослепительно заблистали и на следующей вечеринке, не откажите себе в удовольствии посчитать квадрат четырехзначного числа 1225. Выглядит страшновато, но до ответа вы доберетесь за секунду.

Поставьте запятую и поработайте сначала с $12{,}25^2$.
Целое число – 12.
Возведите его в квадрат и прибавьте половину 12:

$$12^2 + 12 / 2 = 144 + 6 = 150$$

Сложите 150 и 0,0625.
Значит, $12{,}25^2 = 150{,}0625$.
Уберите запятые:

$$1225^2 = 1500625$$

Если вы не робкого десятка и хотите полностью освоить науку быстрых вычислений, немедленно переходите к следующей главе, которая – без ложной скромности – представляет собой кульминацию этой книги.

8
Как обвести учителей математики вокруг пальца
Чудесный метод быстрого счета

Дорогие читатели, у вас есть повод для радости: вы подошли к одному из кульминационных моментов этой книги. Тогда как некоторые описанные мной техники подходят лишь для определенного рода вычислений, техника из этой главы универсальна. Я называю ее чудесным методом быстрого счета. Благодаря ему математика приносит всем больше радости. Открыв для себя этот способ, я полюбил математику еще больше. Он позволяет умножать большие числа с невероятной легкостью. Как ни странно, я никогда не видел, чтобы этот метод применялся в школьном образовании. Вот что это значит, дорогие читатели: как только секретное знание окажется у вас в руках, вы сможете не только считать в разы быстрее, чем ваши друзья, но и обводить вокруг пальца ревностных учителей математики. Разве не здорово?

Когда я наткнулся на эту технику, мои вычисления ускорились так сильно, что я не доверял полученным результатам. Калькулятор, бывало, предлагал другой ответ, но, доверяясь калькулятору, я неизменно попадал впросак. По мере того как я увлеченно занимался проверкой этого чудесного метода, в моих расчетах становилось все меньше ошибок. Калькулятор никогда не выигрывал вычислительную гонку. Новая техника била все рекорды. Чтобы вы ее усвоили, я изложу ее шаг за шагом. К концу этой главы вы будете способны перемножать большие числа всего за несколько секунд. Откиньтесь назад и получайте удовольствие. Или еще лучше: нагнитесь вперед, заточите карандаш и тренируйтесь – пример за примером.

Начало напоминает прием из пятой главы, но в этот раз я буду предельно точен в использовании понятий, чтобы вы научились легко справляться и с гораздо более сложными примерами. Мы начнем осваивать эту технику постепенно, пока она не приобретет универсальные черты.

Начнем с самого простого.

Допустим, нам надо умножить 105 на 112.

Первым делом необходимо решить, какое референтное число мы будем использовать для вычислений. Выбирать стоит такое референтное число, на которое легко умножать и которое находится близко к исходным. В данном случае естественнее всего выбрать 100: на 100 очень легко умножать. Запишите референтное число в скобках после примера:

$$105 \times 112\ (100)$$

Теперь приступим непосредственно к вычислениям.

Сосчитаем разницу значений референтного числа и каждого из исходных чисел.

$$105 - 100 = 5 \text{ и } 112 - 100 = 12$$

Для наглядности я выделю разные числа разными цветами. Числа в исходном примере, а также ответы будут красными; числа, указывающие разницу значений, – голубыми; референтные числа – коричневыми, а промежуточные вычисления, черед которых скоро настанет, – желтыми.

Запишите разницу значений под примером:

$$\begin{array}{ll} 105 \times 112 & (100) \\ 5 \quad 12 & \end{array}$$

Сложите первое число из первой строки и второе число из второй строки. Или наоборот. На ваше усмотрение.

Иными словами, прибавьте 12 к 105 или 5 к 112.

Выберите тот вариант, который вам нравится больше. Ответ в любом случае будет один и тот же: 117.

Ответ необходимо умножить на референтное число – в данном случае на 100:

$$117 \times 100 = 11700$$

Перемножьте показатели разницы значений между собой:

$$5 \times 12 = 60$$

Сложите результаты промежуточных вычислений:

$$11700 + 60 = 11760$$

Хотите верьте, хотите нет – это все.

$$105 \times 112 = 11760$$

Вот так, все очень быстро.

Если записать все вычисления в одну строку, то выглядеть это будет так:

$$105 \times 112 = (105 + 12 \text{ или } 112 + 5) \times 100 + 5 \times 12 = 11760$$

Эврика!

А теперь еще раз.

Предположим, мы хотим умножить 94 на 97.

Сначала выберем референтное число. Проще всего снова взять 100, поскольку обоим числам не хватает до 100 совсем немного и поскольку на 100 легко умножать. Запишите референтное число в скобах после примера:

$$94 \times 97\ (100)$$

Посчитайте разницу значений между 100 и каждым из чисел:

$$94 - 100 = -6 \text{ и } 97 - 100 = -3$$

Запишите результаты под примером:

$$\begin{array}{ll} 94 \times 97 & (100) \\ -6 \quad -3 & \end{array}$$

Обратите внимание, что на этот раз, в отличие от метода из главы 5, вы имеете дело с отрицательными показателями разницы значений. Благодаря этому описываемый метод подходит для любых вычислений независимо от того, какие числа используются в уравнении – больше или меньше 100.

Как и в предыдущем примере, к каждому из исходных чисел надо прибавить свои показатели разницы значений.

94 + (–3) или 97 + (–6)

На каком бы варианте мы ни остановились, ответ будет 91.

Умножим полученный ответ на 100:

$91 \times 100 = 9100$

Осталась буквально пара шагов.

Перемножьте показатели разницы значений:

$(-6) \times (-3) = 18$

Сложите результаты промежуточных вычислений:

$9100 + 18 = 9118$

Поздравляю! Вы на финишной прямой.

$94 \times 97 = 9118$

Все вычисления можно записать в одну строку:

94 × 97 = (94 + (–3) или 97 + (–6)) × 100 + (–6) × (–3) = 9118

Вы заметили, что к ответу вас привели всего два примера на умножение? Неплохо, правда?

Давайте разберем еще один пример и умножим 104 на 97.

Как видите, одно из этих чисел больше 100, а другое меньше. Метод подойдет и для такого случая. Сначала, как обычно, определитесь с референтным числом. 100 снова подойдет лучше всего. Запишите референтное число в скобках после примера:

104 × 97 (100)

Вычислите разницу значений:

104 – 100 = 4 и 97 – 100 = –3

Запишите результаты под примером:

104	× 97	(100)
4	–3	

Сложим числа крест-накрест: 104 + (–3) или 97 + 4.

Какой бы вариант вы ни предпочли, ответ будет 101.

Умножьте этот ответ на референтное число:

$101 \times 100 = 10100$

Опять осталось совсем немного.

Умножьте показатели разницы значений друг на друга:

$4 \times (-3) = -12$

Сложите результаты промежуточных вычислений:

$$10100 + (-12) = 10088$$

Значит, $104 \times 97 = 10088$.

И конечно, все вычисления можно записать в одну строку:

$$104 \times 97 = (104 + (-3) \text{ или } 97 + 4) \times 100 + 4 \times (-3) = 10088$$

Когда референтное число – 10

Выбирать 100 в качестве референтного числа не всегда разумно.

Представьте, что вы хотите умножить 12 на 17. На числовой шкале и 12, и 17 далеко отстоят от 100. Чтобы упростить себе жизнь, по крайней мере на время решения этой задачки, в качестве референтного числа лучше выбрать 10. Смысл ведь в том, чтобы, с одной стороны, на него было легко умножать, а с другой – чтобы разница значений между референтным числом и числами из примера была минимальной. Сначала, как и при решении других примеров из этой главы, надо как раз вычислить разницу значений между референтным числом и числами из примера.

$$\begin{array}{ccccc} 12 & \times & 17 & \quad & (10) \\ 2 & & 7 & & \end{array}$$

Сложите числа крест-накрест:

12 + 7 или 17 + 2 = 19

Умножьте этот ответ на выбранное референтное число:

19 × 10 = 190

Перемножьте показатели разницы значений между собой:

2 × 7 = 14

Сложите результаты промежуточных вычислений:

190 + 14 = 204

Выходит, что 12 × 17 = 204.

Все вычисления могут быть записаны в одну строку:

12 × 17 = (12 + 7 или 17 + 2) × 10 + 2 × 7 = 204

Чтобы получить как можно более полное представление о том, как работает эта техника, протестируем с ее помощью примера из таблицы умножения.

Умножьте 7 на 8.

Пускай референтным числом снова будет 10.

$$\begin{array}{ccccc} 7 & \times & 8 & \quad & (10) \\ -3 & & -2 & & \end{array}$$

Сложите числа крест-накрест:

7 + (–2) или 8 + (–3) = 5

Умножьте 5 на референтное число:

$$5 \times 10 = 50$$

Умножьте показатели разницы значений друг на друга:

$$(-3) \times (-2) = 6$$

Сложите результаты промежуточных вычислений:
$50 + 6 = 56$
Получается, что $7 \times 8 = 56$.
На самом деле вместо 10 можно выбрать и 5.

7	×	8	(5)
3		2	

$7 + 3$ или $8 + 2 = 10$
$7 \times 8 = 10 \times 5 + 2 \times 3 = 50 + 6 = 56$

Как видите, вы придете к одному и тому же ответу независимо от выбранного референтного числа. Выбирайте 10, 100 или 1000, потому что на них очень легко умножать – надо просто приписать к исходному числу соответствующее количество нулей. Но иногда разумно выбрать и другое референтное число, например 20, 200, 50 или 500. В действительности проводить с ними вычисления гораздо приятнее, чем считают многие.

Если вы умножаете на 20 или 200, сначала лучше умножать на 2, а потом на 10 или 100. А если вы умножаете на 50 или 500, то исходное число сначала, напротив, лучше умножить на 100 или 1000, а затем разделить на 2.

Готовы? Тогда начнем.

Сейчас мы рассмотрим ряд примеров с разными референтными числами. Для поддержания боевого духа: еще пара минут – и наступит кульминация книги. С помощью маленькой хитрости вы сможете проводить вычисления еще быстрее. Так что давайте не будем тратить времени на лишние разговоры и перейдем к примерам.

Когда референтное число – 20

Если вы хотите умножить 22 на 27, то в качестве референтного числа лучше всего выбрать 20.

$$22 \times 27 \ (20)$$

Запишите разницу значений под примером:

$$\begin{array}{ccc} 22 \times 27 & & (20) \\ 2 \quad\quad 7 & & \end{array}$$

Сложите числа крест-накрест. Независимо от того, сложите вы 22 и 7 или 27 и 2, ответ будет 29.

Умножьте его на выбранное референтное число:

$$29 \times 20 = 580$$

Чтобы умножить число на 20, проще всего сначала его удвоить, а потом умножить на 10:

$$29 \times 20 = 29 \times 2 \times 10 = 580$$

Конец пути уже близок.

Умножьте показатели разницы значений друг на друга:

$$2 \times 7 = 14$$

Сложите результаты промежуточных вычислений – и финальный ответ будет у вас в руках.

$$22 \times 27 = 580 + 14 = 594$$

Все вычисления, конечно же, можно записать в одну строку:

$22 \times 27 = (27 + 2) \times 20 + 2 \times 7 = 29 \times 20 + 14 = 594$

Нравится?

Для решения этого примера в качестве референтного числа можно было бы выбрать и 10, но тогда одно из вычислений было бы гораздо более громоздким.

$$\begin{array}{ccc} 22 \times 27 & & (10) \\ 12 \quad 17 & & \end{array}$$

Сложите числа крест-накрест:

$$22 + 17 \text{ или } 27 + 12 = 39$$

Умножьте полученный ответ на референтное число:

$$39 \times 10 = 390$$

Перемножьте показатели разницы значений между собой. Это и есть то самое сложное вычисление, которого при выборе более удобного референтного числа можно было бы избежать: $12 \times 17 = 204$.

Сложите результаты промежуточных вычислений:

$$390 + 204 = 594$$

Пускай это было и труднее, цели мы все равно достигли:

$$22 \times 27 = 594$$

Рассмотрим еще один пример и умножим 19 на 16. Я рассчитываю на то, что вам, дорогие читатели, этот метод так понравился, что можно перейти прямо к делу.

$$\begin{array}{cccc} 19 & \times & 16 & (20) \\ -1 & & -4 & \end{array}$$

$$19 \times 16 = (16 + (-1)) \times 20 + (-1) \times (-4) = 15 \times 20 + 4 = 300 + 4 = 304$$

Чтобы вы пользовались техникой совершенно уверенно, разберем еще один пример с 20 в качестве референтного числа. На сей раз умножим 18 на 32.

$$\begin{array}{cccc} 18 & \times & 32 & (20) \\ -2 & & 12 & \end{array}$$

Ответ высчитывается элементарно:

$(32 + (-2)) \times 20 + (-2) \times 12 = 30 \times 20 + (-24) = 600 + (-24) = 576$

Когда референтное число – 50

Как уже говорилось ранее, наша задача – выбрать такое референтное число, чтобы разница между ним и исходными числами была минимальной. Допустим, вы хотите умножить 43 на 59. Тогда в качестве референтного числа лучше всего выбрать 50.

43	×	59	(50)
–7		9	

Действовать будем по тому же алгоритму, что и раньше. Сложите либо 43 и 9, либо 59 и –7. Ответ в любом случае один – 52.

Умножьте 52 на выбранное референтное число: 52 × 50.

Чтобы умножить число на 50, проще всего сначала умножить его на 100, а затем разделить на 2.

$$52 \times 50 = 52 \times 100 / 2 = 5200 / 2 = 2600$$

Умножьте показатели разницы значений друг на друга:

$$(-7) \times 9 = -63$$

Сложите результаты промежуточных вычислений:

$$2600 + (-63) = 2537$$

Вот и все!

$$43 \times 59 = 2537$$

Вычисления легко записать в одну строку:

$43 \times 59 = (59 + (-7)) \times 50 + (-7) \times 9 = 52 \times 50 + (-7) \times 9 = 2600 + (-63) = 2537$

Когда референтное число – 200

Предположим, вы хотите умножить 212 на 206. Тогда для решения примера в качестве референтного числа лучше всего подойдет 200.

212	×	206	(200)
12		6	

Сложите либо 212 и 6, либо 206 и 12. Ответ будет 218.

Умножьте 218 на выбранное референтное число: 218 × 200.

Хоть необходимость умножать на 200 и выглядит пугающе сложной, своя хитрость есть и здесь. Сначала удвойте исходное число, а затем умножьте его на 100:

$$218 \times 200 = 218 \times 2 \times 100 = 436 \times 100 = 43600$$

Перемножьте показатели разницы значений между собой:

$$12 \times 6 = 72$$

Сложите результаты промежуточных вычислений:

$$43600 + 72 = 43672$$

Значит, 212 × 206 = 43672.

А вот все вычисления сразу:

212 × 206 = (206 + 12) × 200 + 12 × 6 = 218 × 200 + 72 = 43600 + 72 = 43672

Когда референтное число – 500

Допустим, вам предстоит умножить 488 на 506. Да, пример выглядит так, как будто над ним придется попотеть. Но он отнимет не больше времени, чем пример на умножение маленьких двузначных чисел. Поскольку обоим исходным числам не хватает совсем немного до 500, именно 500 будет естественнее всего выбрать в качестве референтного числа. Запишите пример, запустите секундомер – и вперед:

488	×	506	(500)
–12		6	

Сложите 488 и 6 или 506 и –12. В любом случае получится 494.

Умножьте 494 на выбранное референтное число, то есть на 500.

Чтобы умножить число на 500, можно сначала умножить его на 1000, а потом разделить на 2.

$$494 \times 500 = 494 \times 1000 / 2 = 494000 / 2 = 247000$$

Умножьте показатели разницы значений друг на друга:

$$(-12) \times 6 = (-72)$$

Сложите результаты промежуточных вычислений:

$$247000 + (-72) = 246928$$

Никаких других операций не требуется:

$$488 \times 506 = 246928$$

Здорово, правда? Сколько времени прошло? Десяток-другой секунд? Неплохо.

Кульминация

Прямо сейчас, именно в эту минуту, вы дойдете до самой кульминации книги – откроете для себя невероятное свойство моего чудесного метода быстрого счета. Сядьте поудобнее и пристегните ремни. В рассмотренных ранее примерах обоим исходным числам подходило одно и то же референтное число. Однако если разница значений слишком велика, то умножать ее показатели тоже непросто. Отсюда вытекает вопрос: годится ли описанный метод для работы с числами, далеко отстоящими друг от друга на числовой шкале? Отвечу я таким громким «да», что его будет слышно с другой стороны земного шара. Для этого потребуется два разных референтных числа. Надо только выбрать такие числа, с которыми можно проводить простые математические вычисления – иначе игра не будет стоить свеч.

Разберем весь фокус на конкретном примере. Предположим, вы хотите умножить 105 на 412.

В пару к 105 выберем 100, а в пару к 412 – 400.

Сначала необходимо рассчитать соотношение референтных чисел. 400 / 100 = 4. Назовем результат этой операции дополнительным референтным числом. Выделим его для наглядности зеленым цветом.

Запишите первое референтное число и дополнительное в круглых скобках:

$$105 \times 412 \ (100 \times 4)$$

Вычислите разницу значений между исходными числами и их референтами:

$$105 - 100 = 5 \text{ и } 412 - 400 = 12$$

Запишите результаты под примером:

105	×	412	(100 × 4)
5		12	

Хоть вы и почти ничего еще не сделали, ответ уже удивительно близко.

Умножьте первый показатель разницы значений на дополнительное референтное число:

$$5 \times 4 = 20$$

Прибавьте результат ко второму исходному числу:

$$20 + 412 = 432$$

Полученный ответ надо умножить на первое референтное число, в данном случае на 100.

$$432 \times 100 = 43200$$

Теперь продолжим делать то же, что и раньше. Перемножьте показатели разницы значений между собой:

$$5 \times 12 = 60$$

Наконец сложите результаты промежуточных вычислений:

$$43200 + 60 = 43260$$

Выходит, 105 × 412 = 43260.

Что удивительно: вы пришли к ответу, проделав всего несколько простых вычислений. Они, разумеется, могут быть записаны в одну строку.

$$105 \times 412 = (412 + 5 \times 4) \times 100 + 5 \times 12 = 432 \times 100 + 60 = 43260$$

Возьмем еще один пример и умножим 212 на 808.

Выберите референтное число для каждого из чисел. В данном случае удобнее всего выбрать 200 и 800. Вычислите дополнительное референтное число: 800 / 200 = 4.

Запишите 200 и 4 рядом с примером:

$$\begin{array}{ccccc} 212 & \times & 808 & \qquad & (200 \times 4) \\ 12 & & 8 & & \end{array}$$

Умножьте первый показатель разницы значений и дополнительное референтное число, а потом прибавьте результат ко второму исходному числу:

$$808 + 12 \times 4 = 808 + 48 = 856$$

Умножьте 856 на 200.

Вы же помните, как умножать на 200? Сначала надо умножить на 2, а затем на 100.

$$856 \times 200 = 856 \times 2 \times 100 = 1712 \times 100 = 171200$$

Перемножьте показатели разницы значений:

$$12 \times 8 = 96$$

Сложите результаты промежуточных вычислений:

$$171200 + 96 = 171296$$

Итак, $212 \times 808 = 171296$.

Когда вы освоитесь, то сможете представлять вычисления в виде одного примера:

$$(808 + 12 \times 4) \times 200 + 12 \times 8$$

Видите, как просто? Пара небольших хитростей – и со сложным примером становится приятно иметь дело.

$$212 \times 808 = (808 + 12 \times 4) \times 200 + 12 \times 8 = 856 \times 200 + 96 = 171200 + 96 = 171296$$

Техника, конечно, будет работать независимо от того, в каком порядке вы расположите числа в исходном примере. Но значение их порядок все-таки имеет. Если вы поменяете их местами, то провести вычисления так уж быстро не выйдет: умножать на 800 гораздо труднее, чем на 200.

Тем не менее поменяем их местами и посмотрим, что произойдет, если справа от примера окажется 800. Поскольку референтное число для 212 – 200, то начнем со следующего: 200 / 800 = ¼.

$$\begin{array}{ccc} 808 & \times & 212 \\ 8 & & 12 \end{array} \qquad (800 \times \tfrac{1}{4})$$

Умножьте первый показатель разницы значений на дополнительное референтное число и прибавьте результат ко второму исходному числу: 212 + 8 × ¼ = 214.

Умножьте 214 на первое референтное число, то есть на 800:

214 × 800 = 171200

Умножьте показатели разницы значений друг на друга:

8 × 12 = 96

Сложите результаты промежуточных вычислений:

171200 + 96 = 171296

Все вычисления легко умещаются в одну строку:

(212 + 8 × ¼) × 800 + 8 × 12

Как видите, умножать на 200 легче, чем на 800. Поэтому, прежде чем записать числа в том или ином порядке, подумайте, какое референтное число будет удобнее для подсчетов.

А теперь умножим 504 на 125.

Большинство наверняка бы выбрало в качестве референтных чисел 500 и 100, но в данном случае я советую остановиться на 500 и 125, потому что их легко делить друг на друга. Таким образом, дополнительным референтным числом будет ¼.

$$\begin{array}{ccc} 504 & \times & 125 \\ 4 & & 0 \end{array} \qquad (500 \times \tfrac{1}{4})$$

Начнем – и придем к ответу почти моментально.

(125 + 4 × ¼) × 500 + 4 × 0 = 126 × 500 + 0 = 126000 / 2 = 63000

Повторение – мать учения. Умножьте с помощью новой техники 23 и 97. Очевидно, на этот раз в качестве первых двух референтных чисел лучше всего выбрать 20 и 100. Дополнительным референтным числом тогда будет 100 / 20 = 5.

$$\begin{array}{ccc} 23 & \times & 97 \\ 3 & & -3 \end{array} \qquad (20 \times 5)$$

Все вычисления можно расположить в одну строчку:

$23 \times 97 = (97 + 3 \times 5) \times 20 + 3 \times (-3) = (97 + 15) \times 20 + (-9) = 112 \times 20 - 9 = 2240 - 9 = 2231$

Надеюсь, вы поняли алгоритм, но на всякий случай подведем итог:

1. Выберите первые два референтных числа и вычислите дополнительное.
2. Посчитайте разницу значений между исходными числами и референтными.
3. Умножьте первый показатель разницы значений на дополнительное референтное число и прибавьте результат ко второму исходному числу. Умножьте полученный ответ на первое референтное число. Так вы получите результат первого промежуточного вычисления.
4. Перемножьте показатели разницы значений между собой. Так вы получите результат второго промежуточного вычисления.
5. Сложите результаты промежуточных вычислений. Вот вы и пришли к ответу. Поздравьте себя: теперь вы на шаг ближе к тому, чтобы стать мастером скоростных вычислений.

Рассмотрим еще несколько примеров, чтобы отточить мастерство.
Умножьте 8 на 136:

$$\begin{array}{ccc} 8 & \times & 136 \\ -2 & & -4 \end{array} \qquad (10 \times 14)$$

В результате получится:
$(136 + (-2) \times 14) \times 10 + (-2) \times (-4) = (136 - 28) \times 10 + 8 = 108 \times 10 + 8 = 1080 + 8 = 1088$
Умножьте 9 на 152:

$$\begin{array}{ccc} 9 & \times & 152 \\ -1 & & 2 \end{array} \qquad (10 \times 15)$$

Этот пример даже легче предыдущего. Заточите карандаш – и вперед:
$(152 + (-1) \times 15) \times 10 + (-1) \times 2 = (152 - 15) \times 10 - 2 = 1370 - 2 = 1368$
Умножьте 102 на 53:

$$\begin{array}{ccc} 102 & \times & 53 \\ 2 & & 3 \end{array} \qquad (100 \times \tfrac{1}{2})$$

Спуск обещает быть по-настоящему крутым. Ответ высчитывается молниеносно:

$$(53 + 2 \times ½) \times 100 + 2 \times 3 = (53 + 1) \times 100 + 6 = 5400 + 6 = 5406$$

Когда вы окончательно почувствуете себя в своей стихии, то сможете проделывать все промежуточные вычисления в уме и придерживаться упрощенной формулы:

$$(53 + 2 \times ½) \times 100 + 2 \times 3$$

Следующий пример выглядит более энергозатратным, но вычисления все равно просты. Умножьте 305 на 306:

305×306		(300×1)
$5 \quad 6$		

$$(306 + 5 \times 1) \times 300 + 5 \times 6$$

Столь простой пример ведь можно решить и в уме?
$305 \times 306 = (306 + 5 \times 1) \times 300 + 5 \times 6 = 311 \times 300 + 30 = 93300 + 30 = 93330$
И поскольку мы уже размялись, умножьте 192 на 389:

192×389		(200×2)
$-8 \quad -11$		

Как бы этот пример сначала ни пугал своей сложностью, вы справитесь, сохраняя непоколебимое спокойствие. Немного практики – и считать таким образом будет не труднее, чем стоять на двух ногах. Так что не поддавайтесь страху. Вперед – спокойно и собранно. Так дело пойдет быстрее.

$$192 \times 389 = (389 + (-8) \times 2) \times 200 + (-8) \times (-11) = (389 - 16) \times 200 + 88$$
$$= 373 \times 200 + 88 = 74600 + 88 = 74688$$

Готовы потренироваться еще? Умножьте 9 на 48. Со временем такие простенькие примеры будут решаться на автопилоте.

9×48		(10×5)
$-1 \quad -2$		

Делается это до смешного легко.
$9 \times 48 = (48 + (-1) \times 5) \times 10 + (-1) \times (-2) = (48 - 5) \times 10 + 2 = 43 \times 10 + 2 = 432$

Иногда вам все-таки придется с неохотой выбирать референтные числа, с которыми, на первый взгляд, не совсем легко проводить вычисления. Не волнуйтесь: все будет хорошо. Допустим, вам надо умножить 32 на 95. Вы могли бы, конечно, выбрать 10 и 100, но дело пойдет быстрее, если выбор вы остановите на 30 и 90. Попробуйте оба варианта и посмотрите сами.

$$\begin{array}{ccccc} 32 & \times & 95 & \qquad & (30 \times 3) \\ 2 & & 5 & & \end{array}$$

Пример решается на одном дыхании.

$32 \times 95 = (95 + 2 \times 3) \times 30 + 2 \times 5 = (95 + 6) \times 30 + 10 = 101 \times 30 + 10 = 3030 + 10 = 3040$

Раз уж у нас так хорошо получается, порадуйте себя теперь примерами на умножение больших чисел. Умножим 126 на 1016.

С этой задачкой можно справиться несколькими способами. Во-первых, референтными числами могут быть 100 и 1000, но тогда на пути к ответу придется решить сложный пример на умножение. Если выбрать в качестве референтного числа 125, то одно из промежуточных вычислений отнимет много времени: умножать на 125 неудобно. Что же делать? Ответ: поменять исходные числа местами.

126×1016 – это ведь то же, что и 1016×126.

Поэтому остановимся на втором варианте, 1016×126, и референтных числах 1000 и 125. Дополнительным референтным числом будет $125 / 1000 = {}^1/_8$.

$$\begin{array}{ccccc} 1016 & \times & 126 & \qquad & (1000 \times {}^1/_8) \\ 16 & & 1 & & \end{array}$$

Пускай вы теперь и умножаете четырехзначное число на трехзначное, к ответу вы все равно придете, едва начав.

$1016 \times 126 = (126 + 16 \times {}^1/_8) \times 1000 + 16 \times 1 = (126 + 2) \times 1000 + 16 = 128 \times 1000 + 16 = 128016$

Следующий пример решается почти так же быстро.

Умножьте 1018 на 253:

$$\begin{array}{ccccc} 1018 & \times & 253 & \qquad & (1000 \times {}^1/_4) \\ 18 & & 3 & & \end{array}$$

В результате получается:

$$1018 \times 253 = (253 + 18 \times \tfrac{1}{4}) \times 1000 + 18 \times 3 = (253 + 4{,}5) \times 1000 + 54 = 257{,}5 \times 1000 + 54 = 257554$$

Жизнь балует нас не всегда. И вычисления тоже. Иногда приходится выбирать и менее привычные референтные числа.

Предположим, нам нужно умножить 308 на 166. Здесь в качестве референтных чисел можно выбрать 300 и 150. В скобках запишем первое референтное число, 300, и дополнительное ½ (150 / 300).

308	×	166	(300 × ½)
8		16	

От ответа нас отделяет всего пара простых вычислений:

$$308 \times 166 = (166 + 8 \times \tfrac{1}{2}) \times 300 + 8 \times 16 = 170 \times 300 + 128 = 51128$$

Ну что, быстро? Вы и запыхаться не успели, как ответ уже у вас в руках.

Следующий пример кажется еще страшнее. Но только кажется. На сей раз вам предстоит умножить 88 на 343. Самыми удобными референтными числами здесь будут 100 и 350. Дополнительным, соответственно, 350 / 100 = 3½. Оно причинит вам на удивление мало забот.

88	×	343	(100 × 3½)
12		−7	

Фокус-покус:

$$88 \times 343 = (343 - (12 \times 3\tfrac{1}{2})) \times 100 + (-12) \times (-7) = (343 - 42) \times 100 + 84 = 30184$$

Отладим этот механизм так, чтобы сбоям места не осталось. Умножьте 35 на 575. Здесь наиболее подходящие референтные числа – 30 и 600. Дополнительным референтным числом тогда будет 600 / 30 = 20.

35	×	575	(30 × 20)
5		−25	

А вычисления – следующими:

$$(575 + 5 \times 20) \times 30 + 5 \times (-25) = 675 \times 30 - 125 = 20250 - 125 = 20125$$

Вы наверняка уже успели полюбить эту палочку-выручалочку, однако не все примеры поддаются решению по одной и той же схеме. Иногда на пути к ответу палочку приходится использовать дважды.

Умножьте 477 на 835. В качестве референтных чисел выберем 500 и 1000.

$$\begin{array}{ccc} 477 & \times & 835 \\ -23 & & -165 \end{array} \qquad (500 \times 2)$$

В результате получится:

$$(835 - 23 \times 2) \times 500 + (-23) \times (-165) = 789 \times 500 + 23 \times 165 = ?$$

Перед нами встает препятствие. Чтобы продвинуться дальше, придется умножить 23 на 165. Лишь немногим смертным под силу решить такую задачку в уме. Вам предстоит прибегнуть к нашей хитрости еще раз.

$$\begin{array}{ccc} 23 & \times & 165 \\ 3 & & 5 \end{array} \qquad (20 \times 8)$$

$$23 \times 165 = (165 + 3 \times 8) \times 20 + 3 \times 5 = (165 + 24) \times 20 + 15 = 189 \times 20 + 15 = 3780 + 15 = 3795$$

Подставьте полученный результат и узнайте наконец ответ:

$477 \times 835 = 789 \times 500 + 23 \times 165 = 394500 + 3795 = 398295$

Уважаемый читатель! Теперь вы владеете совершенно новой техникой, позволяющей считать гораздо быстрее, чем при помощи классического школьного способа. Обратите внимание на самое главное: умножив в качестве промежуточных операций (которые со временем вы будете способны проделывать в уме или посредством буквально пары пометок) всего несколько чисел, вы придете к ответу так же быстро, как ваши приятели с калькулятором. Странно, но в норвежских школах никто, даже моя строгая преподавательница с указкой, не говорит об этом ни слова.

Несмотря на клятвенное обещание редактору, что при работе над книгой я не буду рассказывать об этой технике направо и налево, сохранить секрет у меня не вышло. Я был просто обязан поделиться им с некоторыми хорошими друзьями и парой задорных преподавателей из Университета Осло. Все они остались под впечатлением. Но если вам кажется, что вы уже достигли математической нирваны, то спешу вас заверить, что мы еще только в начале пути. Вас ожидает еще множество радостей. Да, вы уже парите в облаках, но, когда вы начнете совмещать все вычислительные техники из этой книги, ничто, кроме вашей фантазии, не будет вас ограничивать. Тогда вы приблизитесь к пьедесталу скоростных вычислений еще на шаг.

Если же вы хотите подняться на самую вершину, то я готов предложить несколько умных ходов, чтобы убрать конкурентов с дороги. Жмите на газ и скорее переходите к новой главе. Перелистывайте страницу – и побыстрее.

9
Газуем!
Магическое число 50

Для большинства из нас 50 – это половина сотни и пышный юбилей, однако число 50 – не только юбилейная дата. С точки зрения скоростных вычислений это магическое число. Сегодня я подам вам на серебряном подносе правило пятидесяти. Сначала вы его не распробуете, но я надеюсь, что, когда вы дочитаете до конца, вам откроется совершенно новый мир. Правило пятидесяти станет еще прекраснее, если сочетать его с другими вычислительными техниками. Именно тогда скорость вычислений по-настоящему возрастет.

Начнем с самого простого. Обещаю, что будет занятно.

> Правило пятидесяти можно использовать для возведения в квадрат всех двузначных чисел от 50 до 59.
>
> Прибавьте к числу единиц 25. Получится первая половина ответа.
>
> Возведите число единиц в квадрат. Он составит вторую половину ответа.

Вот и все. Так быстро.

Допустим, вы хотите возвести в квадрат 56. Число десятков – 5. Число единиц – 6.

Прибавьте к числу единиц 25. Получится 25 + 6 = 31, и это первые две цифры ответа.

Дальше возведите число единиц в квадрат. $6^2 = 36$. Теперь у вас есть и вторые две цифры ответа.

Значит, $56^2 = 3136$.

Возьмем еще один пример и возведем в квадрат 52.

Число единиц – 2. Прибавим к нему 25. Получится 27 – это первые две цифры ответа.

Квадрат числа единиц будет $2^2 = 4$. Поскольку этот ответ должен составлять вторые две цифры ответа, добавьте перед ним 0 – 04. Значит, $52^2 = 2704$.

Элегантности правилу пятидесяти добавляет то обстоятельство, что на самом деле его можно применять и при работе с числами, начинающимися не с 5.

Вот как выглядит формула для этих случаев: $(50 + a)^2 = 100(25 + a) + a^2$.

Если вы недоумеваете, почему одна часть этого уравнения равна другой, загляните в конец книги.

Предположим, вы хотите возвести в квадрат 62.

Вам нужно всего лишь вычислить разницу между 62 и 50. Ответ – 12. А теперь обратитесь к формуле и замените a на 12:

$$62^2 = (25 + 12) \times 100 + 12^2 = 3700 + 144 = 3844$$

Словами: к 12 прибавьте 25. Получится 37. Умножьте 37 на 100 и прибавьте к результату квадрат 12, то есть 144.

Испытаем правило пятидесяти на числе 63.

Посчитайте разницу между 63 и 50. Получится 13. Сложите 13 и 25, умножьте результат на 100 и прибавьте к нему квадрат 13, то есть 169:

$63^2 = (25 + 13) \times 100 + 13^2 = 3800 + 169 = 3969$

С помощью правила пятидесяти можно возводить в квадрат и числа меньше 50.

Возведем в квадрат 47. Разница между 47 и 50 составляет –3. Значит, вычитаем 3 из 25, умножаем результат на 100 и прибавляем квадрат –3:

$$47^2 = (25 - 3) \times 100 + (-3)^2 = 2200 + 9 = 2209$$

Здорово, да?
Вот и другие моментально решаемые примеры:

$$41^2 = (25 - 9) \times 100 + (-9)^2 = 1600 + 81 = 1681$$
$$32^2 = (25 - 18) \times 100 + (-18)^2 = 700 + 324 = 1024$$
$$71^2 = (25 + 21) \times 100 + 21^2 = 4600 + 441 = 5041$$

Видите: это не техника, а мечта!

Правило пятисот

Если вашему внутреннему любителю задачек вдруг захочется возвести в квадрат число, близкое к 500, то вы можете провести апгрейд правила пятидесяти до правила пятисот.

Формула проста для понимания, даже если у вас за плечами только школьный курс математики:

$$(500 + a)^2 = (250 + a)1000 + a^2$$

Объяснение вы найдете в конце книги.

Если формулы сбивают вас с толку, то вот что значит эта вязь: посчитайте разницу между 500 и числом, которое вы хотите возвести в квадрат. Прибавьте результат к 250, умножьте на 1000 и прибавьте квадрат разницы значений.

Испытаем эту красоту на примере числа 508.

Разница между 508 и 500 составляет 8. Квадрат 8 – 64. Теперь мы готовы обратиться к формуле.

Прибавьте 8 к 250 и умножьте результат на 1000:

$$(250 + 8) \times 1000 = 258000$$

Прибавьте квадрат разницы значений:

$$258000 + 64 = 258064$$

Значит, $508^2 = 258064$.

Нравится? Несмотря на то что в квадрат вы возводите трехзначное число, всего несколько элементарных вычислительных операций приводят вас к шестизначному ответу. Старомодный и тоскливый школьный метод заставил бы вас провести девять операций умножения и сложить уйму чисел. Хвала небесам, его времена прошли.

Правило пятисот, как и правило пятидесяти, универсально. Иными словами, оно сработает независимо от того, какие числа вы выберете. Убедимся в этом на примере числа меньше 500. Посчитаем квадрат 497.

Разница между 497 и 500 составляет –3. Квадрат –3 равен 9.

Получается: $497^2 = (250 - 3) \times 1000 + (-3)^2 = 247000 + 9 = 247009$

Чем больше тренировки, тем быстрее мы будем считать. Чтобы полностью освоиться, предлагаю попрактиковаться на следующих примерах:

$$508^2 = (250 + 8) \times 1000 + 8^2 = 258064$$
$$511^2 = (250 + 11) \times 1000 + 11^2 = 261121$$
$$513^2 = (250 + 13) \times 1000 + 13^2 = 263169$$
$$525^2 = (250 + 25) \times 1000 + 25^2 = 275625$$
$$491^2 = (250 - 9) \times 1000 + (-9)^2 = 241081$$
$$488^2 = (250 - 12) \times 1000 + (-12)^2 = 238144$$

Как вы можете убедиться, для возведения таких чисел в квадрат требуется буквально несколько вычислительных операций. Продолжите эту игру и впечатлите друзей на следующей вечеринке. Вы станете новым королем чисел. При столь высоком статусе вам и хитростей понадобится больше. В следующей главе вы найдете подсказку, как производить впечатление с помощью математического феррари.

10
Правило Феррари
Ускоритель ограниченного действия

Лучшие правила – это, конечно, правила, применимые к любым числам. Для тех, кому математика в тягость, они словно манна небесная. Старый школьный способ решать примеры на умножение можно сравнить с тойотой-короллой из 1990-х. Королла – надежный, неубиваемый автомобиль, но, сколько ни дави на газ, в гору на ней быстро не въедешь. Тем не менее время от времени вам наверняка хочется добраться до цели быстро. Тогда на помощь приходит математический феррари.

В этой главе вам будет предложено испытать правило феррари, которое действует лишь в ряде особых случаев. При первом заезде оно, вероятно, покажется чересчур ограниченным, но знать его все же полезно, особенно в сочетании с другими вычислительными техниками. Новое, придающее гоночную скорость правило феррари применимо в том случае, когда речь идет об умножении двузначных чисел, число десятков которых одинаково, а сумма единиц равна 10.

Например: 32×38.

Число десятков в данном случае одинаково (3). Сумма единиц, 2 и 8, равна 10. Таким образом, прибегнуть к правилу феррари можно. Умножьте число десятков на число, большее на единицу. Число десятков – 3. На единицу больше – 4. Значит, умножаем 3 на 4 и получаем 12. Это первые две цифры ответа.

Чтобы получить вторые две цифры ответа, умножьте единицы друг на друга:

$$2 \times 8 = 16$$

То есть 32×38 равно 1216.

Разберем еще несколько примеров:

$$41 \times 49$$

Сумма единиц, 1 и 9, равна 10. Следовательно, метод может быть использован.

Число десятков – 4. Первые две цифры ответа вы найдете, умножив число десятков на число, большее на единицу: $4 \times 5 = 20$.

Вторые две цифры ответа вы найдете, умножив единицы друг на друга: $1 \times 9 = 09$.

Таким образом, 41×49 равно 2009.

Тем же способом посчитайте, сколько будет 54×56.

Первые две цифры ответа: $5 \times 6 = 30$.

Вторые две цифры ответа: $4 \times 6 = 24$.

Получается, 54×56 равно 3024.

Чтобы окончательно усвоить правило, умножьте 81 на 89.

Первые две цифры ответа: $8 \times 9 = 72$.

Вторые две цифры ответа: $1 \times 9 = 9$.

$$81 \times 89 = 7209$$

Можно ли разогнаться еще сильнее? Едва ли! Правило феррари действует независимо от того, сколько в числе цифр. Главное, чтобы все цифры перед числом единиц совпадали, а в сумме единицы давали 10.

Посчитаем, сколько будет 121×129.

Оба числа начинаются на 12. Сумма единиц – $1 + 9 = 10$. Значит, правило здесь применимо.

Умножьте 12 на число, большее на единицу:

$$12 \times 13 = 156$$

Это первая половина ответа.

Перемножьте единицы между собой: $1 \times 9 = 09$. В результате вы получили вторую половину ответа.

Фантастически малыми усилиями вы побеждаете в вычислительной гонке:

$$121 \times 129 = 15609$$

Вру-у-у-ум! Финиш. А теперь настало время вернуться в мир легких квадратов. Как только вы перевернете страницу, вам откроется новый, необычайно быстрый способ возводить числа в квадрат.

11
Веселые вычисления со скучной формулой
Воспользуемся квадратом числа

В школе я обожал возводить в квадрат разные числа. Я выучивал квадраты чисел наизусть – прямо как таблицу умножения. Довольно странное хобби, которое порой выводило из себя мою обожаемую учительницу, хотя она любила числа не меньше моего. Ну а я постоянно требовал от нее новых задачек. В те времена я и не осознавал, что эта, на первый взгляд, бесполезная страсть возводить числа в квадрат поможет научиться быстро считать.

Если вы хорошо запоминаете квадраты чисел, то можете прибегнуть к третьему типу квадратных уравнений, чтобы считать намного быстрее, чем сейчас. Помните третий тип квадратичных тождеств?

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

С сегодняшнего дня эта формула больше не будет вызывать у вас зевоту, а превратится в полезный инструмент, который поможет вам стать чемпионом по быстрому счету.

Чтобы пользоваться этим правилом, советую вызубрить квадраты всех чисел до 20. Возможно, вы их уже знаете, а если нет, то постарайтесь выучить так, чтобы они у вас от зубов отскакивали.

Вообще, без таблички умножения жить нелегко. Потребность в ней возникает часто и независимо от того, любите вы числа или нет.

Перейдем к делу и умножим 12 на 14. Оба числа близки к 13.

Значит, 12×14 можно записать так: $(13 - 1)(13 + 1)$.

Наш пример превратился в очень красивую задачку, которую можно решить с помощью квадратного уравнения третьего типа. За долю секунды мы получим ответ:

$12 \times 14 = (13 - 1)(13 + 1) = 13^2 - 1^2 = 169 - 1 = 168$

Остается лишь потренироваться. Ниже приведено еще несколько примеров – попробуйте их решить, они совсем не сложные. Ну же, не бойтесь! Вам наверняка понравится.

$$8 \times 12 = (10 - 2)(10 + 2) = 10^2 - 2^2 = 100 - 4 = 96$$
$$13 \times 23 = (18 - 5)(18 + 5) = 18^2 - 5^2 = 324 - 25 = 299$$
$$17 \times 21 = (19 - 2)(19 + 2) = 19^2 - 2^2 = 361 - 4 = 357$$
$$13 \times 27 = (20 - 7)(20 + 7) = 20^2 - 7^2 = 400 - 49 = 351$$
$$48 \times 72 = (60 - 12)(60 + 12) = 60^2 - 12^2 = 3600 - 144 = 3456$$
$$76 \times 84 = (80 - 4)(80 + 4) = 80^2 - 4^2 = 6400 - 16 = 6384$$
$$86 \times 94 = (90 - 4)(90 + 4) = 90^2 - 4^2 = 8100 - 16 = 8084$$
$$88 \times 92 = (90 - 2)(90 + 2) = 90^2 - 2^2 = 8100 - 4 = 8096$$
$$98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$$

Если этот метод особого впечатления на вас не произвел, переходите к следующей главе – там вы познакомитесь с приемами, которые позволят вам считать еще быстрее.

12
Большие возможности без особых усилий
Как молниеносно возводить числа в квадрат

Умение быстро считать позволяет нам молниеносно возводить числа в квадрат. Этот способ – самый быстрый из всех приведенных в моей книге.

В средней школе, когда кто-то из учеников говорил какую-нибудь глупость, наша учительница математики громко произносила: «97!» Отдам ей дань памяти и научу вас возводить в квадрат число 97. Как и прежде, вам придется выбрать референтное число, на которое легко будет умножать и которое будет близко по значению тому числу, которое мы возводим в квадрат. 100 – вот прекрасное референтное число. Запишите его в скобках после числа, которое собираетесь возводить в квадрат:

97 (100)

Первая задача – вычислить разницу между референтным числом и тем, которое вы возводите в квадрат:

$97 - 100 = -3$

Запишем эту разницу внизу, под примером:

$$\begin{array}{ll} 97 & (100) \\ -3 & \end{array}$$

Прибавьте разницу к числу, возводимому в квадрат, и умножьте полученное на референтное число:

$(97 + (-3)) \times 100 = 9400$

Мы уже почти закончили. Остается лишь сложить квадрат и разницу:

$9400 + (-3)^2 = 9409$

Больше от нас ничего и не требуется: $97^2 = 9409$.

Если записать все произведенные операции в виде одного примера, он будет на удивление простым:

$97^2 = (97 + (-3)) \times 100 + (-3)^2 = 9409$

Воспользуемся тем же принципом для того, чтобы возвести в квадрат число 109.

Референтное число, ближайшее 109, – это 100. Разница между 109 и 100 составляет 9:

$$\begin{array}{ll} 109 & (100) \\ 9 & \end{array}$$

Сложите эту разницу с возводимым в квадрат числом и умножьте полученное на референтное число:

$(109 + 9) \times 100 = 11800$

Осталось лишь прибавить квадрат к разнице:

$$11800 + 9^2 = 11881$$

Когда привыкнете к этому методу, все вычисления будут занимать у вас пару секунд:

$$109^2 = (109 + 9) \times 100 + 9^2 = 11881$$

Всех хороших вещей бывает по три, поэтому давайте-ка возведем в квадрат еще и число 52.

Проверим метод при помощи референтного числа 50.

$$52^2 = (52 + 2) \times 50 + 2^2 = 54 \times 50 + 2^2 = 2704$$

На удивление просто, согласны? Мы с вами решили на первый взгляд заковыристый пример в два счета. И глазом моргнуть не успеешь, как ответ уже готов.

Как возводить в квадрат, используя квадратичные тождества третьего типа

Возводить в квадрат можно и немного иначе – с помощью квадратичных тождеств третьего типа:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Если перенести b^2 на противоположную сторону, получится настоящая математическая конфетка:

$$a^2 = (a - b)(a + b) + b^2$$

Этот крошечный маневр творит чудеса. Формула может показаться сложноватой, но давайте рассмотрим парочку примеров и разберем, как она сможет нам пригодиться.

Допустим, нам надо возвести в квадрат число 13.

Намного проще умножать любое число на 10, а не на 13. Разница между числами 10 и 13 составляет 3. Можно использовать приведенную выше формулу, где $a = 13$, а $b = 3$.

Смотрите сами:

$$13^2 = (13 - 3)(13 + 3) + 3^2 = 10 \times 16 + 9 = 160 + 9 = 169$$

Вам нравится, я угадал?

Возведем в квадрат число 88. Намного проще умножать любое число на 100, а не на 88. Поэтому вычислим разницу между числами 100 и 88. Она составляет 12.

Воспользуемся формулой и посчитаем:

$$88^2 = (88 - 12)(88 + 12) + 12^2 = 76 \times 100 + 12^2 = 7600 + 144 = 7744$$

Изящно, да?

Таким же образом этот метод можно использовать для возведения в квадрат любых других чисел:

$$96^2 = (96 - 4)(96 + 4) + 4^2 = 92 \times 100 + 16 = 9200 + 16 = 9216$$
$$91^2 = (91 - 9)(91 + 9) + 9^2 = 82 \times 100 + 81 = 8200 + 81 = 8281$$

Видите закономерность? Смысл в следующем: замените число, возводимое в квадрат, на более удобное для вычислений. К таким числам относятся 10, 100 и 1000 – их в вычислениях использовать просто. Кроме них можно взять числа 20, 200, 50 или 500.

Давайте для наглядности посмотрим, что получится, если взять 50:

$$48^2 = (48 - 2)(48 + 2) + 2^2 = 46 \times 50 + 4 = 23 \times 100 + 4 = 2304$$

Число 20 тоже прекрасно подходит для вычислений. Допустим, вам надо возвести в квадрат 22.

$$22^2 = (22 - 2)(22 + 2) + 2^2 = 20 \times 24 + 4 = 480 + 4 = 484$$

Чтобы удостовериться, что вы освоили этот метод, вот несколько дополнительных задач:

$$14^2 = (14 - 4)(14 + 4) + 4^2 = 10 \times 18 + 16 = 180 + 16 = 196$$
$$16^2 = (16 - 6)(16 + 6) + 6^2 = 10 \times 22 + 36 = 220 + 36 = 256$$

Что скажете? Лично мне кажется, что этот забавный метод – сапоги-скороходы из мира счислений. Но даже самым горячим фанатам математики иногда надо отдыхать. В следующей главе я расскажу, как математики развлекаются, дробя числа на части.

13
Раздробим число
Фокус с разложением на множители

Хотите верьте, хотите нет: хотя в школе разложение на множители наводило на вас тоску, этот математический приемчик может очень пригодиться в освоении быстрого счета.

Если же вы вдруг позабыли, что такое разложение на множители, не переживайте. Разложение на множители – это просто-напросто способность дробить числа на составляющие.

Посмотрим, как разложить на множители число 18.

18 можно представить как 3×6, а 6 – как 2×3. Значит, 18 можно представить как $2 \times 3 \times 3$.

Возьмем еще один пример – разложим на множители число 90.

$$90 = 9 \times 10 = (3 \times 3) \times (2 \times 5) = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

Понятно? Ну значит, пора двигаться дальше.

Допустим, вам надо решить следующую задачу: 18×3. А ведь таблицы умножения для этого недостаточно.

Благодаря разложению на множители этот странноватый пример можно преобразовать в знакомые примеры из таблицы умножения.

Мы уже поняли, что $18 = 2 \times 3 \times 3$.

18×3 – то же самое, что $(2 \times 3 \times 3) \times 3 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$.

Эти числа можно группировать как захочется.

$$2 \times 3 \times 3 \times 3 = (2 \times 3) \times (3 \times 3) = 6 \times 9$$

Ну вот, мы преобразовали 18×3 в более простой пример: 6×9, который есть и в таблице умножения.

Все помнят, что $6 \times 9 = 54$.

Значит, $18 \times 3 = 54$.

Возьмем другой пример.

Например, 16×5. Разложим 16 на множители:

$$16 \times 5 = 4 \times 4 \times 5$$

А сейчас каждому ясно, что $4 \times 5 = 20$.

Большинству из нас намного проще умножить какое-нибудь число на 20, чем на 16.

$16 \times 5 = (4 \times 4) \times 5 = 4 \times 4 \times 5 = 4 \times (4 \times 5) = 4 \times 20 = 80$

Возьмем третий пример – умножим 15 на 60.

$$15 = 3 \times 5$$
$$60 = 10 \times 6 = (2 \times 5) \times (2 \times 3) = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Это значит:

$$15 \times 60 = (3 \times 5) \times (2 \times 2 \times 3 \times 5) = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$$

Видите решение? Числа можно сгруппировать так: $2 \times 5 = 10$, потому что в математике проще всего умножать числа на 10.

Давайте поэтому сгруппируем наш пример так, чтобы он стал попроще:

$$15 \times 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (3 \times 3) = 10 \times 10 \times 9 = 900$$

Иными словами, смысл в том, чтобы отыскать комбинации чисел, облегчающие счет.

Иногда для того, чтобы считать быстрее, достаточно думать немного иначе. Ну а в следующей главе нас ждет классика быстрого счета.

14
Быстрее, чем в былые времена
Классическое умножение со скоростью света

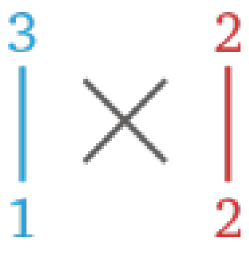
Если вам нравится классический способ умножения, когда пример решается в несколько этапов, возможно, вам понравится, когда тот же принцип позволит добраться до ответа намного быстрее. Этот фокус вовсе не новый, но от этого он не хуже. Главное – расположить числа чуть иначе, и тогда победа окажется еще ближе.

Допустим, нам надо умножить 32 на 12. Классический метод предполагает два этапа в решении этого примера:

$$\begin{array}{r} 32 \times 12 = \\ 64 \\ 32 \\ \hline 384 \\ \hline \end{array}$$

Скучновато, да? Все равно что кататься на старом, неторопливом паровозе. Наш способ превратит решение этого примера в поездку на скоростном поезде, а дополнительных этапов в решении вообще не будет. Сперва запишем каждую цифру в обоих множителях по отдельности и расположим один множитель под другим:

$$\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{array}$$



Чтобы вы быстрее поняли фокус, рекомендую начертить между цифрами крестик и провести две вертикальные черты. Одна черта соединяет цифры справа, а другая – слева.

Получилось два столбца цифр, в одном из которых расположены единицы, а в другом – десятки. Теперь надо научиться использовать эти цифры так, чтобы они привели нас к ответу.

Начинаем.

1. Перемножим числа в правом столбце:

$2 \times 2 = 4$

2. Перемножим по диагоналям сверху вниз и снизу вверх и вычислим сумму:

$3 \times 2 + 1 \times 2 = 8$

3. Перемножим числа в левом столбце:

$3 \times 1 = 3$

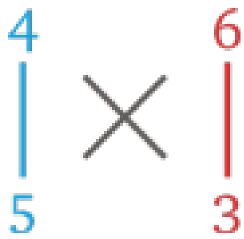
Вот и все!

$32 \times 12 = 3\ 8\ 4$

Возможно, этот способ покажется вам непривычным, однако вычисления здесь те же, что и в школьной арифметике, только промежуточных этапов нет. Получается не просто быстрее считать – сам процесс намного увлекательнее. Когда используешь этот способ, иногда приходится держать какие-то числа в уме. Забывать их ни в коем случае нельзя, иначе ничего не получится.

Давайте поэтому разберем пример, где многое требуется держать в уме.

Вот такой пример: 46×53. Разобьем цифры, запишем их в столбцы и проведем линии:



Перемножим числа в правом столбце: $6 \times 3 = 18$. Держим числа 8 и 1 в уме.

Перемножим по диагонали: $4 \times 3 + 5 \times 6$, после чего сложим результат с числом в уме, то есть 1. Получится 43. Сохраним в уме 3 и 4 до следующего вычисления.

Перемножим числа в левом столбце: 4×5, а затем прибавим результат к числу в уме, то есть 4. Итого $20 + 4 = 24$.

Вот и все. Наш ответ: 2 4 3 8.

Мы вновь осуществили классические вычисления, не записывая промежуточных этапов.

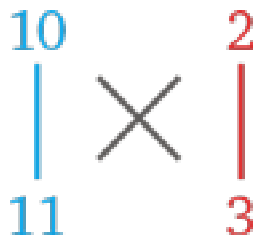
Мы все держали в голове, и это прекрасная тренировка для мозга.

Несколько цифр в одной упряжке

В приведенных выше примерах мы работали с каждой цифрой по отдельности. Это вовсе необязательно. При счете можно работать сразу с несколькими цифрами – так получается и быстрее, и веселее.

Для наглядности давайте умножим 102 на 113. Цифры в этих числах можно сгруппировать так: 102 × 113 или так: 102 × 113. Рассмотрим на первой группе цифр, как действует наш фокус: 102 × 113. Первое число делится на группы 10 и 2, а второе – на группы 11 и 3.

Запишем эти группы цифр друг под другом и добавим диагональные и вертикальные линии:



А дальше действуем так же, как и в первых двух примерах:

1. Перемножаем группы в правом столбце:

$2 \times 3 = 6$

2. Перемножаем по диагоналям:

$10 \times 3 + 11 \times 2 = 52$

3. Перемножаем группы в левом столбце:

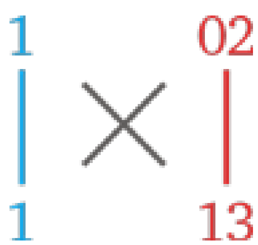
$10 \times 11 = 110$

Если вы не очень надеетесь на свою память, промежуточные этапы можно записать:

$$
\begin{array}{rr}
 & 6 \\
+ & 52 \\
+ & 110 \\
\hline
= & 11526
\end{array}
$$

Неважно, как вы будете группировать цифры в примере – на ответ это не повлияет.

Поэтому покажу вам еще один вариант, когда в первой группе всего одна цифра, а во второй – две: 102 × 113. Запишем еще раз числа в столбик и начертим линии:



Ну, поехали:
1. Перемножаем группы по правой вертикали:
$02 \times 13 = 26$
2. Перемножаем по диагоналям:
$1 \times 13 + 1 \times 02 = 15$
3. Перемножаем группы по левой вертикали:
$1 \times 1 = 1$
Запишем три промежуточных этапа:

$$\begin{array}{r} 26 \\ +\;15 \\ +\;1 \\ \hline =11526 \end{array}$$

Отметьте, что с каждым новым промежуточным этапом мы сдвигаемся на две клетки влево. Может, вы уже догадались, почему это происходит? Правило простое: с каждым новым рядом необходимо сдвигаться влево на такое количество клеток, которое соответствует количеству цифр в правой группе. В примере 102×113 у нас в правой группе две цифры, поэтому с каждым новым рядом в промежуточных вычислениях следует сдвигаться на две клетки влево.

Перемножаем четырехзначные числа

Этот фокус действует независимо от того, большие или малые числа мы перемножаем, но, как вы, наверное, поняли, перемножая большие числа, придется сосредоточиться. Давайте проверим, как пойдет дело с четырехзначными числами.

Умножим 1012 на 1113.

Цифры в примере можно поделить на группы следующими способами:

1012 × 1113

1012 × 1113

1012 × 1113

Начнем с первого варианта: в нем три цифры в первой группе и одна – во второй.

$$\begin{array}{ccc} 101 & & 2 \\ | & \times & | \\ 111 & & 3 \end{array}$$

Помните правило? Перемножаем группы в правом столбце, потом по диагоналям, а напоследок – группы в левом столбце.

1. Перемножаем группы в правом столбце:

2 × 3 = 6

2. Перемножаем по диагоналям:

101 × 3 + 111 × 2 = 525

3. Перемножаем группы в левом столбце:

101 × 111 = 11211

Записываем все промежуточные вычисления:

$$\begin{array}{lr} & 6 \\ + & 525 \\ + & 11211 \\ \hline = & 1126356 \end{array}$$

Если же вы делите цифры на группы по две цифры, пример будет выглядеть так: 1012 × 1113.

Запишите группы цифр в столбик:

$$\begin{array}{ccc} 10 & & 12 \\ | & \times & | \\ 11 & & 13 \end{array}$$

Вычисления производятся по той же схеме:

1. Перемножаем группы в правом столбце:

$12 \times 13 = 156$

2. Перемножаем по диагоналям:

$10 \times 13 + 11 \times 12 = 262$

3. Перемножаем группы в левом столбце:

$10 \times 11 = 110$

Сейчас в группе справа у нас две цифры, поэтому с каждым промежуточным вычислением мы двигаемся на две клетки влево:

$$\begin{array}{r} 156 \\ +\quad 262 \\ +\ 110 \\ \hline =1126356 \end{array}$$

Если же вы хотите опробовать вариант с тремя цифрами в последней группе, получится вот что: 1012×1113.

Разобьем цифры и снова запишем группы в столбик:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 012 \\ | & \times & | \\ 1 & & 113 \end{array}$$

Считать будем так же, как и прежде.

1. Перемножаем группы в правом столбце:

$012 \times 113 = 1356$

2. Перемножаем по диагоналям:

$1 \times 113 + 1 \times 012 = 125$

3. Перемножаем группы в левом столбце:

$1 \times 1 = 1$

Теперь у нас три цифры справа, поэтому с каждым промежуточным вычислением мы сдвигаемся на три клетки влево:

$$
\begin{array}{r}
1356 \\
+\ 125 \\
+\ 1 \\
\hline
= 1126356
\end{array}
$$

Как видите, разбиение цифр на группы очень важно. В нашем примере проще всего прийти к ответу, если делить числа на группы по две цифры. Никакого общего правила не существует. В каждом примере следует смотреть, какое разбиение подходит лучше всего. Потренируйтесь и наслаждайтесь этим новым приемом.

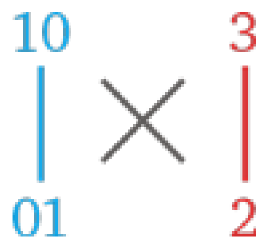
Разное количество цифр

Этот фокус действует независимо от того, сколько цифр у вас в примере. Если мы умножаем трехзначное число на двузначное, достаточно поставить перед двузначным числом ноль.

Давайте попробуем.

Допустим, нам надо умножить 103 на 12. Допишем 0 перед числом 12 – и вперед. Числа в примере можно сгруппировать двумя способами: 103 × 012 или 103 × 012.

Проверим принцип на обеих группах чисел. Начнем с первой: 103 × 012.



1. Перемножаем группы в правом столбце:

$3 \times 2 = 6$

2. Перемножаем по диагоналям:

$10 \times 2 + 01 \times 3 = 23$

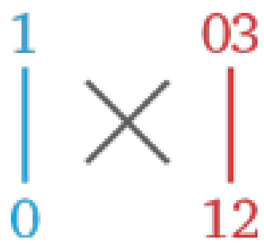
3. Перемножаем группы в левом столбце:

$10 \times 01 = 10$

Записываем промежуточные вычисления:

$$\begin{array}{r} 6 \\ +\ 23 \\ +\ 10 \\ \hline =1236 \end{array}$$

Разумеется, второй вариант группировки чисел (103 × 012) приведет нас к тому же ответу.



1. Перемножаем группы в правом столбце:

$03 \times 12 = 36$

2. Перемножаем по диагоналям:

$1 \times 12 + 0 \times 03 = 12$

3. Перемножаем группы в левом столбце:

1 × 0 = 0

Записываем промежуточные вычисления. На этот раз в группе справа у нас две цифры, поэтому с каждым рядом сдвигаемся на два шага влево:

$$\begin{array}{r} 36 \\ +\;12 \\ +\;0 \\ \hline =\;01236 \end{array}$$

Как видите, этот фокус добавляет нашим вычислениям скорости. Всего-то и нужно, что сгруппировать цифры, а темп расчетов стремительно растет. Надеюсь, вам понравилось. А если вы любите возводить числа в квадрат, то можно ускорить расчеты, добавив небольшой хитрый приемчик. Быстрее переворачивайте страницу!

15
Порази друзей
Классическое возведение в квадрат со скоростью света

В детстве не существовало для меня занятия скучнее, чем мыть посуду после ужина. Сейчас же я вынужден признать, что это скучное занятие во многом открыло передо мною и моей сестрой двери в мир математики. Чтобы не умереть со скуки, перемывая посуду, мы принимались считать. Самым забавным было возводить числа в квадрат. Но если бы я в те времена уже знал о фокусе, о котором расскажу ниже, то смог бы возводить числа в квадрат со скоростью света.

Многие из нас довольно-таки неоднозначно относятся к числу 13. Для некоторых оно счастливое, а для некоторых – нет, однако я покажу вам, как при помощи одного секретного фокуса возвести число 13 в квадрат. Первая цифра, 1, показывает десятки. Вторая цифра, 3, – единицы.

1. Возведем в квадрат число, обозначенное второй цифрой (единицы):

$3^2 = 9$

Это последняя цифра ответа.

2. Перемножим обе составляющие числа и удвоим полученное:

$1 \times 3 \times 2 = 6$

Это средняя цифра ответа.

3. Возведем в квадрат число, обозначенное первой цифрой (десятки):

$1^2 = 1$

Так мы получили первую цифру ответа.

А вот и весь ответ: $13^2 = 169$.

Попробуем еще раз – теперь с числами, которые надо держать в уме. Возведем в квадрат 43.

Если вы не любите запоминать числа, можете промежуточные вычисления записывать.

1. Возводим в квадрат число, обозначенное второй цифрой:

$3^2 = 9$

2. Перемножаем обе составляющие числа и удваиваем полученный ответ:

$4 \times 3 \times 2 = 24$

3. Возводим в квадрат число, обозначенное первой цифрой:

$4^2 = 16$

Записываем промежуточные вычисления:

$$\begin{array}{rcccc} & & & & 9 \\ + & & 2 & 4 & \\ + & 1 & 6 & & \\ \hline = & 1 & 8 & 4 & 9 \end{array}$$

Как видите, все проще некуда.

Квадрат трехзначных чисел

Самое забавное в этом методе – то, что вам не придется перемножать каждую цифру и вы сможете работать сразу с несколькими цифрами. Давайте проверим этот фокус на трехзначном числе.

Допустим, нам понадобилось возвести в квадрат 312.

Расчет удивительно прост. Разобьем цифры нашего числа на две группы. Это можно сделать двумя способами. Число 312 можно представить как 312 или 312.

Для начала посмотрим, как вычисления будут осуществляться с первым вариантом, то есть 312^2.

1. Возведем в квадрат последнюю группу:

$12^2 = 144$

2. Перемножим группы и удвоим ответ:

$3 \times 12 \times 2 = 72$

3. Возведем в квадрат первую группу:

$3^2 = 9$

В последней группе у нас две цифры, поэтому, записывая промежуточные вычисления, мы с каждым рядом сдвигаемся на две клетки влево.

$$\begin{array}{cccccc} & & & 1 & 4 & 4 \\ + & & 7 & 2 & & \\ + & 9 & & & & \\ \hline = & 9 & 7 & 3 & 4 & 4 \end{array}$$

Проверим, как будут происходить расчеты, если у нас две цифры в первой группе и одна – во второй, то есть 312^2. Как видите, вычисления получатся более сложными:

1. Возводим в квадрат последнюю группу:

$2^2 = 4$

2. Перемножаем группы и удваиваем ответ:

$31 \times 2 \times 2 = 124$

3. Возводим в квадрат первую группу:

$31^2 = 961$

Теперь в последней группе у нас только одна цифра, поэтому, записывая промежуточные вычисления, мы с каждым рядом сдвигаемся на одну клетку влево.

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & 4 \\ + & & 1 & 2 & 4 & \\ + & 9 & 6 & 1 & & \\ \hline = & 9 & 7 & 3 & 4 & 4 \end{array}$$

Квадрат четырехзначных чисел

Разумеется, этот метод распространяется и на очень большие числа. Давайте-ка возведем в квадрат четырехзначное число 3002. Цифры здесь можно разбить на группы тремя способами:

3002, 3002 и 3002

Посмотрим, как мы сможем возвести в квадрат число 3002, пользуясь каждым из этих трех вариантов. Начнем с 3002^2.

1. Возводим в квадрат последнюю группу:

$2^2 = 4$

2. Перемножаем группы друг на друга и удваиваем ответ:

$300 \times 2 \times 2 = 1200$

3. Возводим в квадрат первую группу:

$300^2 = 90000$

В последней группе у нас только одна цифра, поэтому, записывая промежуточные вычисления, нам с каждым рядом надо сдвигаться на одну клетку влево:

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\quad 1200 \\ +\ 90000 \\ \hline =9012004 \end{array}$$

Теперь сгруппируем цифры попарно, то есть представим как 3002^2.

1. Возведем в квадрат последнюю группу:

$02^2 = 04$

2. Перемножим группы и удвоим ответ:

$30 \times 02 \times 2 = 120$

3. Возведем в квадрат первую группу:

$30^2 = 900$

$$\begin{array}{r} 04 \\ +\quad 120 \\ +\ 900 \\ \hline =9012004 \end{array}$$

Ну и наконец, рассмотрим вариант с тремя цифрами в последней группе, то есть 3002^2.

1. Возведем в квадрат последнюю группу:

$002^2 = 004$

2. Перемножим группы и удвоим ответ:

$3 \times 002 \times 2 = 012$

3. Возведем в квадрат первую группу:

$3^2 = 9$

В последней группе у нас три цифры, поэтому, записывая промежуточные вычисления, мы должны будем с каждым рядом сдвигаться на три клетки влево:

$$\begin{array}{rr} & 004 \\ + & 012 \\ + & 9 \\ \hline = & 9012004 \end{array}$$

Проделав несколько совершенно несложных расчетов, мы всего за несколько секунд пришли к ответу, который представляет собой семизначное число. Потрясающе, правда? Если же вы, несмотря ни на что, не впечатлились и любите во время вычислений записывать всякие мелкие циферки, то добро пожаловать в следующую главу.

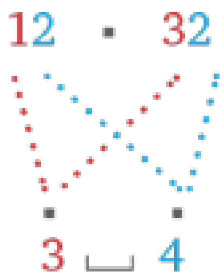
16
Прямиком к ответу
Фокус с полукругом

Ну держитесь! Сейчас я познакомлю вас еще с одним правилом, которое поможет вам считать еще быстрее. На этот раз нашим проводником на пути к ответу станет полукруг, поэтому назовем правило фокусом с полукругом. Я нашел его в интернете, когда искал всякие занятные способы научиться быстрому счету. Удивительно, но нарисованного полукруга бывает достаточно, чтобы ускорить темп расчетов.

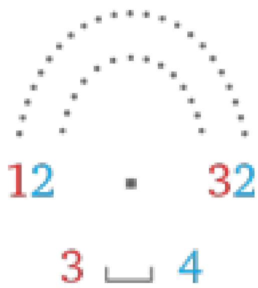
Давайте умножим 12 × 32 при помощи фокуса с полукругом и посмотрим, как действует правило.

Перемножим единицы (2 × 2 = 4) и поставим цифру 4 на последнее место в ответе.

Перемножим десятки (1 × 3 = 3) и поставим цифру 3 на первое место в ответе.



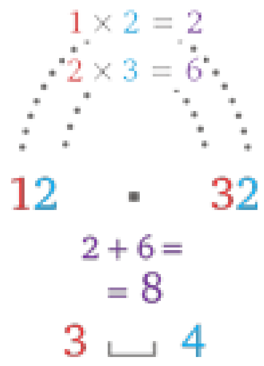
Чтобы найти недостающую среднюю цифру, нарисуем над примером два полукруга:



Теперь перемножим числа у конечных точек каждого полукруга: 1 × 2 = 2 и 2 × 3 = 6.

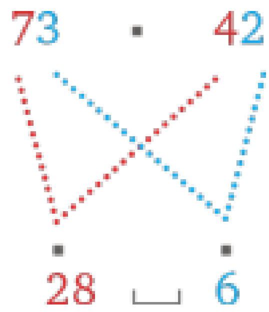
Сложим получившиеся ответы: 2 + 6 = 8.

Поздравляю! Мы отыскали цифру, которая будет стоять посредине. Это означает, что 12 × 32 = 384.



Попробуем применить фокус с полукругом на примере, где имеются числа, которые надо держать в уме: 73 × 42.

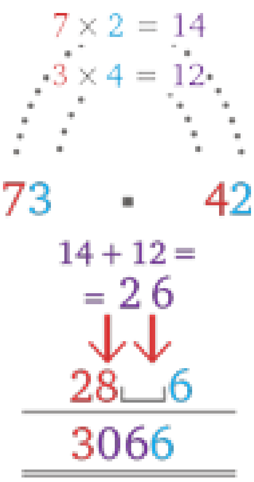
Как и в предыдущем примере, сперва перемножаем десятки (7 × 4 = 28) и единицы (3 × 2 = 6) и записываем полученные цифры на первое и последнее места в ответе:



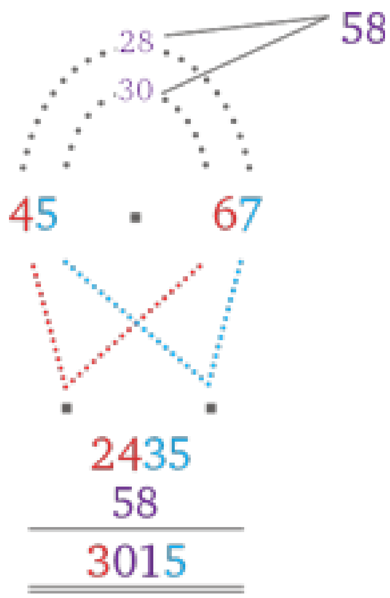
Заполнить пустоту в середине ответа нам поможет полукруг. Рисуем два полукруга над примером, перемножаем числа, обозначенные цифрами на концах полукругов, и складываем ответы:

$$3 \times 4 + 7 \times 2 = 26$$

Ставим 6 на свободное место, а 2 держим в уме. Мы справились! 73 × 42 = 3066



Если не любите запоминать числа, можете вместо этого решить пример, записав промежуточное вычисление. Проверим, как это сделать, и умножим 45 на 67.



Проще и впрямь не бывает. Как видите, два полукруга творят в мире математики настоящие чудеса. Однако пора и отвлечься: умножали мы уже немало, поэтому самое время заняться делением. Переворачивайте страницу – настало время делить!

17
Советы суперзанудам
Как проверить, делятся ли числа

Ребенком я много времени проводил в университете, где преподавал мой отец, и пытался решать примерчики, набирая цифры на его старинной счетной машинке. Дело было в начале 1970-х, а электронных калькуляторов тогда еще не изобрели. Отцовская счетная машинка была громоздкой и весила несколько десятков килограммов. От нее пахло табаком, потому что отец имел обыкновение выбивать о счетную машинку свою трубку. Но, несмотря ни на что, считала она исправно, хоть и с ужасным шумом. Это было настоящее чудо механики! Папин мастодонт состоял из моторчика, шестеренок и крутящихся циферблатов. Отцу машинка нужна была, чтобы высчитывать статистику населения. Все это происходило задолго до того, как в социологии появились сложные математические модели. Больше всего времени занимало деление – на него у машинки уходило секунд десять, не меньше. Для меня это был настоящий рай! Иногда я даже считал с машинкой наперегонки.

В этой книге я не привожу фокусов с делением просто-напросто потому, что никаких особенно интересных я не нашел, однако совсем забрасывать деление мы не будем. При помощи определенных приемов можно выяснить, делится ли определенное число на какое-нибудь другое. Одни приемы известны, другие менее распространены, некоторые легкие, но есть и настолько сложные, что представляют интерес лишь для ученых и самых въедливых зануд.

Делятся на 2

Число делится на 2, если последняя цифра в нем делится на 2. Это означает, что все числа, заканчивающиеся на 0, 2, 4, 6 или 8, делятся на 2.

Примеры таких чисел – 12, 24, 36, 78 и 90.

Делятся на 3

Число делится на 3, если сумма составляющих его цифр делится на три. Если вам сложновато проверить, делится ли сумма составляющих его чисел на три, можно проверить, делится ли сокращенная сумма на 3. Сокращенная сумма получается, если сократить сумму до одной-единственной цифры. Если эта конечная цифра делится на 3, значит, все число тоже делится на 3.

Пример – число 18. Сумма составляющих его цифр равна 9. 9 делится на 3.

Другой пример – число 726. Сумма составляющих его чисел равна 15. 15 делится на 3. Конечно, можно было бы вычислить сокращенную сумму числа 726. Она составляет 6, а 6, разумеется, делится на 3.

Делятся на 4

Число делится на 4, если его часть, обозначенная двумя последними цифрами, делится на 4. Примеры таких чисел – 200, 304, 508 и 496.

Делятся на 5

Число делится на 5, если последняя цифра в нем – 0 или 5.

Делятся на 6

Число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3.

Делятся на 7

Этот трудоемкий метод не очень соответствует цели моей книги – научить вас быстрому счету. Чтобы проверить, делится ли число на 7, надо убрать последнюю цифру в нем, удвоить ее и вычесть полученное число из оставшегося. Если у вас по-прежнему не получается определить, делится ли полученное число на 7, ту же процедуру следует повторить снова, пока не станет понятно, делится ли полученное число на 7.

Покажу вам, как действует этот странный метод. Давайте проверим, делится ли 30618 на 7. Убираем последнюю цифру, то есть 8, удваиваем ее и вычитаем полученное из оставшегося числа:

$$3061 - 2 \times 8 = 3061 - 16 = 3045$$

Простым смертным вряд ли понятно, делится ли на 7 число 3045. Поэтому повторим весь процесс заново.

Убираем последнюю цифру, то есть 5, и вычитаем из оставшегося числа 2×5:

$$304 - 2 \times 5 = 304 - 10 = 294$$

Думаю, нам по-прежнему непонятно, поэтому повторим процесс еще раз. Убираем последнюю цифру, то есть 4, и вычитаем 2×4 из оставшегося числа:

$$29 - 2 \times 4 = 21$$

Все, задача выполнена. 21 – удивительное число, которое входит в таблицу умножения. Каждому ясно, что 21 делится на 7. Это означает, что исходное число, 30618, тоже делится на 7.

Делятся на 8

Число делится на 8, если его часть, обозначенная тремя последними цифрами, делится на 8. Это не всегда очевидно, поэтому сперва можно два раза поделить три последние цифры на 2. Если последнее число по-прежнему останется четным, значит, исходное число делится на 8.

Делятся на 9

Число делится на 9, если сумма цифр в нем тоже делится на 9.

Делятся на 10

Все числа, заканчивающиеся на 0, делятся на 10.

Делятся на 11

Чтобы выяснить, делится ли число на 11, используется один занятный фокус. Нам надо попеременно вычесть и сложить цифры в числе по порядку. Если полученное число делится на 11, значит, исходное тоже делится на 11. Докажем на наглядном примере.

Проверим, делится ли на 11 число 2848857. Вычитаем и складываем цифры в числе по порядку:

$$2 - 8 + 4 - 8 + 8 - 5 + 7 = 0$$

0 делится на 11. Значит, 2848857 тоже делится на 11.

Делятся на 12

Число делится на 12, если оно делится на 3 и на 4.

Делятся на 13

Метод здесь похож на тот, что мы использовали, выясняя, делится ли число на 7. Чтобы понять, делится ли число на 13, отбросим последнюю цифру, умножим ее на 9, после чего вычтем произведение из оставшегося числа. Если ответ все еще не ясен, продолжим таким же образом, пока не станет очевидно, делится ли полученное число на 13.

Посмотрим, делится ли на 13 число 28561. Отбросим последнюю цифру, то есть 1. Умножим 1 на 9 и вычтем произведение из оставшегося числа:

$$2856 - 1 \times 9 = 2856 - 9 = 2847$$

Чтобы узнать, делится ли 2847 на 13, осуществим то же самое еще раз.

Отбрасываем последнюю цифру, то есть 7. Умножаем 7 на 9 и вычитаем полученное произведение из оставшегося числа:

$$284 - 7 \times 9 = 284 - 63 = 221$$

Повторим процесс заново. Отбрасываем 1, умножаем 1 на 9 и вычитаем из оставшегося числа:

$$22 - 1 \times 9 = 13$$

Уфф, ну наконец-то.

Разумеется, 13 делится на 13. Это означает, что 28561 тоже делится на 13.

Делятся на 14

Число делится на 14, если оно делится на 7 и на 2.

Делятся на 15

Число делится на 15, если оно делится на 3 и на 5.

Делятся на 17

Метод здесь похож на тот, что мы использовали, выясняя, делится ли число на 7 и 13. Чтобы выяснить, делится ли число на 17, отбросим последнюю цифру, умножим ее на 5 и вычтем полученное произведение из оставшегося числа. Если нам по-прежнему непонятно, делится ли число на 17, продолжим в том же духе, пока не придем к очевидному ответу. Проверим, делится ли на 17 число 9928.

Отбросим последнюю цифру, то есть 8, умножим 8 на 5 и вычтем полученное произведение из оставшегося числа:

$$992 - 5 \times 8 = 952$$

Повторим то же самое. Отбросим последнюю цифру (теперь это 2) и вычтем произведение 2 и 5 из оставшегося числа:

$$95 - 5 \times 2 = 95 - 10 = 85$$

Повторим еще раз. Отбросим последнюю цифру, то есть 5, и вычтем 5, умноженное на 5, из оставшегося числа:

$$8 - 5 \times 5 = 8 - 25 = -17$$

Ответ очевиден: –17 делится на 17.

Это означает, что исходное число, то есть 9928, тоже делится на 17.

Бывает, что в правильности ответа мы сомневаемся. Если, на ваш взгляд, пользоваться калькулятором нечестно, то выход все равно имеется. В следующей главе вы прочтете, какие математические фокусы помогут вам проверить, верно ли вы посчитали.

18
Фокус с общей суммой
Правильно ли вы посчитали?

Если вы сомневаетесь, что посчитали правильно, а заново считать неохота, не отчаивайтесь. Один из величайших подарков, который преподнесла нам математика, – это простое правило, называемое проверочной девяткой.

Проверочная девятка

Проверочная девятка поможет вам с большой вероятностью выяснить, правильно вы посчитали или ошиблись. При такой проверке сумма цифр каждого числа сокращается до единственной цифры. В процессе полезно будет убрать все девятки. Тогда дело пойдет быстрее.

Давайте вычислим сокращенную сумму цифр числа 39998145. Для начала избавимся от девяток. Сумма 8 и 1 равна 9, поэтому эти цифры нам тоже не нужны. Общая сумма оставшихся цифр будет следующей: 3 + 4 = 7 и 7 + 5 = 12. Общая сумма цифр в числе 12 равна 3. Это означает, что сокращенная сумма числа 39998145 равна 3.

Понятно ли я объяснил, что такое сокращенная сумма? Тогда проверим фокус с девяткой на примере 169 × 1352 = 228488. Проверка будет состоять в том, равно ли произведение сокращенных сумм цифр, из которых состоят числа 169 и 1352, сокращенной сумме цифр, составляющих число 228488.

ПРИМЕР	ПРОВЕРОЧНАЯ ДЕВЯТКА	
169	(выбросим девятку): 1 + 6 = 7	7
×		×
1352	1 + 3 + 5 + 2 = 11	
	сумма цифр в числе 11 равна 2	2
		=
		14
=	сумма цифр в числе 14 равна 5	5
228488	2 + 2 + 8 + 4 + 8 + 8 = 32	
	сумма цифр в числе 32 равна 5	5

Решение готово. Сокращенная сумма цифр по обе стороны от знака равенства одинаковая. Иными словами, мы выдержали испытание и посчитали верно – можно выдохнуть. Фокус с девяткой распространяется также на сложение, вычитание и деление.

Проверочное число 11

В школе некоторые из нас научились фокусу с девяткой, однако его бывает недостаточно. Если вы хотите твердо убедиться в том, что ваш ответ верен, можно прибегнуть к проверочному числу 11. В мои времена этому приему в школе не учили. Если и девятка, и число 11 подтверждают верность вашего ответа, скорее всего, вы ответили верно. Поэтому фокус с числом 11 совсем нелишний, хотя и чуть сложнее. Проверяя расчет с помощью числа 11, надо по очереди вычитать и складывать цифры в числах, которые используются в примере. Но цифры для этого переставляются в обратном порядке. Возьмем тот же пример, что и выше, то есть $169 \times 1352 = 228488$.

Посмотрим, чем нам поможет проверочное число 11.

ПРИМЕР	ПРОВЕРОЧНОЕ ЧИСЛО 11	
169	$9 - 6 + 1 = 4$	4
×		×
1352	$2 - 5 + 3 - 1 = -1$	−1
=		=
		−4
228488	$8 - 8 + 4 - 8 + 2 - 2 = -4$	−4

Поздравляю, ваши расчеты верны! Числа по обе стороны от знака равенства совпадают.

Внимание! Если этот прием не сработал, расстраиваться не стоит. Вполне возможно, что вы все равно посчитали верно. Главное, чтобы числа по обе стороны от знака равенства совпадали, а к этому можно прийти, складывая или вычитая из бесконечного множества чисел, содержащих число 11. Если по одну сторону знака равенства у вас –4, а по другую 7, все верно, потому что $-4 + 11 = 7$.

Одиннадцать в качестве проверочного числа действует и в расчетах со сложением, делением и вычитанием. При вычитании числа будут отрицательными. В следующей главе вы познакомитесь с приемами быстрого счета, распространяющимися на вычитание.

19
Занятное вычитание
Как вычитать из 1 000 000

Когда мы используем некоторые приведенные в этой книге методы, иногда нам приходится вычитать из чисел, содержащих множество нулей, например из миллиона. Из-за этого расчеты существенно замедляются. Предположим, нам надо решить следующую задачу: 988 × 1012. В главе 11 вы узнали, как преобразовать этот пример в следующий: $1000^2 - 12^2 = 1000000 - 144$. Если такие вычисления даются вам непросто, мой способ вам сильно поможет, а держать в голове разные числа не придется. Теперь вы сможете вычитать с рекордной быстротой и записывать ответ слева направо так же быстро, как ставите подпись на письме. Запишите числа в столбик друг под другом:

$$\begin{array}{rr} & 1000000 \\ - & 144 \end{array}$$

Правило невероятно простое. Вычтите последнюю цифру из 10, все остальные – из 9, а первую цифру сократите на 1 – и ответ готов! Вот он: 0 9 9 9 8 5 6.

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & & & & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1-1 & 9-0 & 9-0 & 9-0 & 9-1 & 9-4 & 10-4 \\ = & 0 & 9 & 9 & 9 & 8 & 5 & 6 \end{array}$$

Больше ничего от нас и не требуется! Попробуйте сами – вам наверняка понравится. А если хотите узнать еще кое-что новенькое, переходите к следующей главе – именно в ней рассказывается о самом быстром способе считать.

20
В темпе вальса
Как умножать на 11

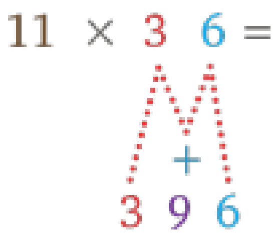
Один из самых забавных способов быстрого счета – это умножение на 11. Даже если вы умножаете огромные числа, например несколько миллиардов, ответ получите всего за несколько секунд и никаких промежуточных вычислений не потребуется. Это – настоящая математическая ракета. Описанный ниже метод настолько прост, что впечатлит даже совершенно неспособных к математике людей. Когда математический гений Яков Трахтенберг (о нем более подробно я расскажу в главе 21) бежал в конце войны в Швейцарию, первым его учеником стал молодой паренек, которого считали совершенно неспособным к математике. После часового занятия с талантливым математиком мальчик уже умел умножать практически любые числа на 11. Этот удивительный метод вовсе не требует, чтобы мы заглядывали в таблицу умножения. Единственное, что нам понадобится, – умение складывать однозначные числа.

Начнем с самого простого и умножим 11 на двузначное число. Сложите цифры в числе и поместите сумму между двумя цифрами.

Умножим 11 на 25. Цифры, составляющие число 25, – это 2 и 5. В сумме 2 и 5 дают 7. Поставим 7 между 2 и 5. Ответ готов:

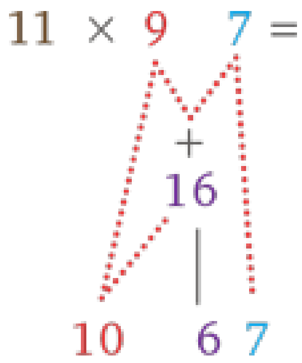
$$11 \times 25 = 275$$

Давайте еще раз – теперь умножим 11 на 36. Цифры, из которых состоит число 36, – это 3 и 6. Берем сумму этих цифр, то есть 9, и ставим между 3 и 6.



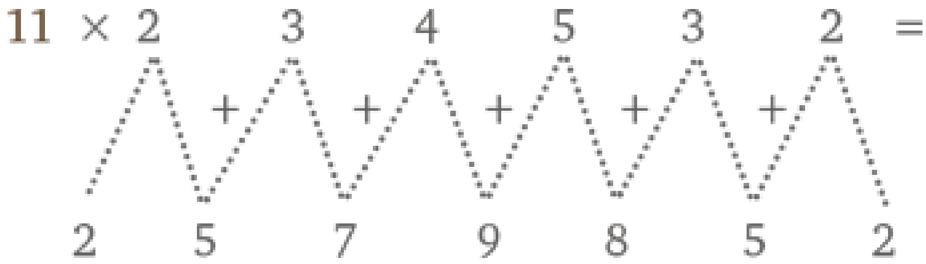
Давайте теперь умножим 11 на 97.

Сумма двух цифр в 97 – 16. Дальше придется держать некоторые числа в уме:



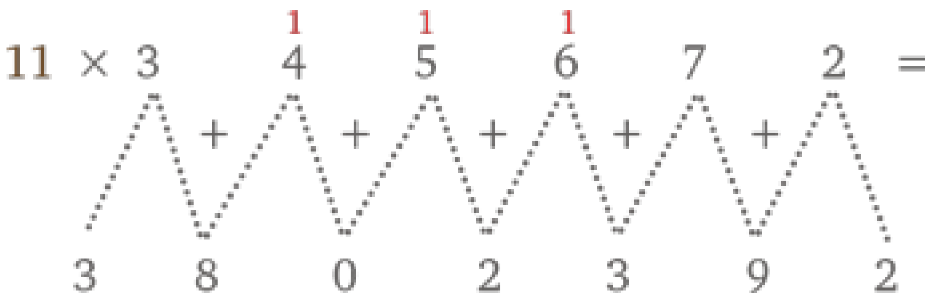
Этот метод работает одинаково хорошо и при умножении больших чисел на 11. Принцип невероятно простой. Начинаем справа и записываем последнюю цифру без изменений. Далее к каждой цифре прибавляем цифру слева.

Умножим 11 на 234532:



И, как и при других привычных расчетах, бывает необходимо держать некоторые числа в уме.

Умножим 11 на 345672:



Яков Трахтенберг придумал и другие методы быстрого счета. В следующей главе я расскажу о его довольно непростой жизни.

21
Метод Трахтенберга
Супербыстрый швейцарский метод сложения

Я никогда не забуду ту радость, с которой получил от отца в подарок волшебную книгу Микаэля Шрёдера «Молниеносный счет в уме» (Lynregning). Мне было 14 лет, я все детство мечтал о волшебной книге, способной научить меня считать в уме, и теперь даже задрожал от восторга. Передо мной лежала книга, где рассказывалось о таких приемах, о которых я и не подозревал. Помимо прочего, там говорилось о способе складывать огромные числа без особого труда. Если в совершенстве овладеть этим способом, складывать числа можно намного быстрее и веселее, чем если пользоваться классическим школьным приемом.

Этот новый метод сложения был изобретен беженцем из России, которому лишь благодаря чуду удалось выжить в нацистском концлагере и добраться до Швейцарии. Бедный, как церковная крыса, Трахтенберг всего за несколько лет успел усовершенствовать методы расчетов, использовавшиеся в швейцарских банках. Яков Трахтенберг с детства имел склонность к математике. Он родился в 1888 г. в Одессе, в обеспеченной семье. В 1912-м Трахтенберг получил должность главного инженера на Обуховском заводе в Санкт-Петербурге, где строились военные суда для российского флота. В 1917-м к власти в России пришли коммунисты. Трахтенберг, убежденный пацифист, обрадовался, узнав, что теперь завод будет выпускать тракторы. Но спустя некоторое время Трахтенберга обвинили в пособничестве царскому режиму. Ему чудом удалось спастись: переодевшись крестьянином, он бежал из страны. В 1919 г. Яков приехал в Берлин и начал жизнь с чистого листа.

Через несколько лет он женился на еврейской девушке, но с приходом к власти Гитлера им пришлось бежать в Австрию. Здесь Яков Трахтенберг написал труд под названием «Министерство мира» – своего рода пародию на гитлеровскую автобиографию «Моя борьба», где высмеивал фюрера и его боевых соратников. Австрийские нацисты почувствовали себя невероятно оскорбленными. В 1938 г. за день до захвата нацистской Германией Австрии Трахтенберга арестовали. Он смог сбежать и добраться до Югославии, но его опять схватили и отправили в концентрационный лагерь Заксенхаузен. Чтобы не сломаться и сохранить рассудок, Трахтенберг, несмотря на постоянные пытки и допросы, придумывал новые методы счета. Он отрывал кусочки ногтей и выскребал ими примеры на стенах барака. Его целью было разработать новую систему счисления.

В конце войны его жена раздобыла фальшивые документы и добилась перевода Якова Трахтенберга в трудовой лагерь, расположенный в Южной Германии. Оттуда они вдвоем сбежали в Швейцарию. С момента злополучного ареста в Австрии прошло семь лет. Якову Трахтенбергу вновь пришлось начинать жизнь с чистого листа. Ему хотелось поделиться своими идеями о быстром счете с другими, однако они никого не интересовали, пока Трахтенберг не стал обучать математике сына местного полицмейстера. Мальчик, сперва совершенно безнадежный, после занятия с Трахтенбергом научился умножать огромные числа на 11. За несколько лет тысячи швейцарцев освоили новый метод счета, придуманный Трахтенбергом. Этот метод приобрел такую популярность, что математик основал собственный институт, где занимались счетом в уме. И первым преподавателем в этом институте стал – кто бы вы думали? Сын полицмейстера!

Один из многих методов Трахтенберга позволяет складывать множество многозначных чисел всего за несколько секунд, проверять верность полученного ответа и, что немаловажно, находить столбец, в котором прячется ошибка, если таковая имеется.

Давайте проверим метод Трахтенберга и сложим следующие числа:

7	8	5	4
5	4	3	7
1	7	3	8
3	7	1	9
2	9	5	8
2	3	9	5

Используя классический школьный метод сложения, мы, скорее всего, сначала сложили бы числа в правом столбце (4 + 7 + 8 + 9 + 8 + 5 = 41), после чего приступили бы к следующим столбцам. С сегодняшнего дня и с этого самого момента вам достаточно будет складывать числа только до 11. Иначе говоря, с бо́льшими числами мы вообще не будем иметь дела. Первое правило – выделим число 11. Каждый раз, досчитав до 11, сделаем отметку, вычтем одиннадцать из имеющейся суммы и продолжим.

Для начала посмотрим на правый столбец.

4 + 7 = 11. Сделаем отметку, вычтем 11 и продолжим.

8 + 9 = 17. Здесь тоже есть 11, и еще остается 6.

6 + 8 = 14. Снова 11, и еще осталось 3.

3 + 5 = 8.

Мы выделили три раза по 11, и еще в правом столбце у нас осталось 8. Запишем два этих важных числа друг под другом. Остаток, то есть 8, запишем в одной строке, а количество чисел 11 – в другой.

7	8	5	4	
5	4	3	7’	
1	7	3	8	
3	7	1	9’	
2	9	5	8’	
2	3	9	5	
			8	(В этой строке записываем остаток из каждого столбца.)
			3	(В этой строке отмечаем, сколько раз в каждом столбце содержится число 11.)

Проделаем то же самое с другими столбцами. Решайте сами, хотите ли двигаться слева направо или в противоположном направлении. От порядка действий ничего не зависит. Если хотите, можете сперва подсчитать количество чисел 11 во всех столбцах. Все зависит от вашего желания. Единственное, о чем необходимо помнить, – это делать отметку каждый раз, когда сумма составит 11.

7	8	5	4
5’	4’	3	7’
1	7	3’	8
3	7’	1	9’
2	9’	5	8’
2	3	9’	5
9	5	4	8
1	3	2	3

У нас появилось две новых строки. В верхней – количество единиц, а в нижней – количество чисел 11 в каждом столбце. Эти числа, единицы и одиннадцатки, нужно сложить определенным образом.

Фокус в том, чтобы записать вычисления в виде буквы L. Это означает, что в каждом столбце мы не только складываем единицы и одиннадцатки, но также учитываем количество чисел 11 в правом столбце. И, пожалуйста, не забывайте про числа в уме.

			1	
	9	5	4	8
	1	3	2	3
=				1

(Складываем 8 и 3 – получаем 11. Записываем число 1 и держим 1 в уме.)

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 1 & & \\ & 9 & 5 & 4 & 8 & \\ & 1 & 3 & 2 & 3 & \\ \hline = & & & 0 & 1 & \end{array}$$

(Складываем 4, 2, 3 и 1 (в уме) – получаем 10. Записываем число 0 и держим 1 в уме.)

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & & \\ & 9 & 5 & 4 & 8 & \\ & 1 & 3 & 2 & 3 & \\ \hline = & & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

(Складываем 5, 3, 2 и 1 (в уме) – получаем 11. Записываем число 1 и держим 1 в уме.)

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & 9 & 5 & 4 & 8 \\ & & 1 & 3 & 2 & 3 \\ \hline = & & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

(Складываем 9, 1, 3 и 1 (в уме) – получаем 14. Записываем число 4 и держим 1 в уме.)

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & 9 & 5 & 4 & 8 \\ & & 1 & 3 & 2 & 3 \\ \hline = & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

(Складываем 1 и 1 (в уме) – получаем 2.)

Возможно, кому-то покажется, что такие расчеты занимают столько же времени, сколько традиционный метод, но, когда метод Трахтенберга внедрили в швейцарских банках, скорость работы существенно возросла. Может, вовсе не удивительно, что Швейцария получила мировую известность благодаря своим банкам?

Основные преимущества нового метода заключаются в том, что с ним, во-первых, проще проверить правильность ответа, а во-вторых, понять, в каком столбце кроется ошибка. Следовательно, если вам не повезло и вы ошиблись, вовсе не обязательно считать все заново. Вместо этого вы сразу можете перейти к столбцу с ошибкой. Чтобы найти ошибку, надо сперва вычислить общую сумму чисел в каждом столбце. Как вы, возможно, помните, вычисляя общую сумму, можно выбросить все девятки.

Начнем с общей суммы чисел в правом столбце. Здесь у нас числа 4, 7, 8, 9, 8 и 5.

4 + 7 = 11. Общая сумма цифр в числе 11 равна 2.

2 + 8 = 10. Сумма цифр в числе 10 составляет 1.

1 + 8 = 9. Не забываем выбрасывать девятки. Тогда у нас остается 5.

Сокращенная сумма цифр во втором столбце справа будет следующей: 5 + 3 + 3 = 11. Сумма цифр в числе 11 равна 2. Следовательно, 2 + 1 + 5 = 8. Последняя цифра у нас 9. Ее можно отбросить. Сокращенная сумма цифр в этом столбце составляет 8. Сокращенная сумма цифр во всех четырех столбцах составляет:

2 2 8 5

Это называется контрольным числом для всех четырех столбцов. Главное – найти взаимосвязь между числами 1, 11 и теми, что у нас в столбцах. Наслаждайтесь моментом, потому что это настоящее волшебство метода Трахтенберга. Контрольные числа каждого столбца должны совпадать с сокращенной суммой единиц и удвоенных одиннадцаток.

9 5 4 8 (единицы)
1 3 2 3 (одиннадцатки)
2 2 8 5 (контрольные числа)

Пойдем справа.

8 + 3 + 3 = 14. Сумма цифр в числе 14 составляет 5. Этот же ответ мы получили, когда вычислили контрольное число для правого столбца.

4 + 2 + 2 = 8. Сокращенная сумма цифр во всем столбце тоже составляет 8.

5 + 3 + 3 = 11. Сумма цифр в числе 11 составляет 2. Значит, все верно.

9 + 1 + 1 = 11. Сумма цифр в числе 11 составляет 2. Значит, тут тоже все правильно.

Если бы в расчетах была ошибка, мы бы сразу же увидели, в каком она столбце. Вместо того чтобы складывать числа во всех столбцах заново, нам достаточно заново пересчитать лишь один столбец. Это позволяет здорово сэкономить время! Неудивительно, что метод Трахтенберга завоевал в свое время такую популярность, ведь тогда калькуляторы и счетные машинки еще не уничтожили необходимость считать в уме. Однако, если бы все владели методом Трахтенберга, стать чемпионом быстрого счета было бы непросто. Поэтому лучше придумать секретные правила, о которых никто больше не знает.

22
Еще быстрее
Придумаем наши собственные правила счета

Даже если выучить все правила из этой книги, еще не факт, что вы будете считать быстрее других. Дело в том, что ни одно правило невозможно применить к примерам всех типов. Иногда какое-нибудь редкое правило приводит нас к ответу намного быстрее, чем все общие закономерности. Если мы осуществляем ряд похожих вычислений, полезно будет придумать собственные методы. Это вовсе не сложно. Все, у кого в школе была по математике тройка, с этим легко справятся. Когда я писал эту книгу, у меня возле кровати всегда лежали ручка и бумага. Так я записывал все сумасшедшие идеи, приходившие мне в голову по ночам. Как-то раз я проснулся в четыре часа утра, потому что понял, как расширить правило пятерки из главы 6. Эта идея оказалась вполне состоятельной. Давайте разработаем это правило вместе. Мой вопрос заключается в следующем: существует ли быстрый способ перемножить два различных числа, оба из которых заканчиваются на 5? Мой ответ – да!

Предположим, нам надо умножить 35 на 75.

Чтобы упростить метод, нам надо поставить запятую перед числом 5 в обоих случаях. Это означает, что сперва вам придется решить следующий пример: 3,5 × 7,5. Чтобы придумать правило, вспомним другое правило – то самое, которое учили в школе:

$$(a + c)(b + d) = ab + ad + cb + cd$$

В этом случае c и d соответствуют ½.

Поэтому запишем формулу так:

$$(a + \tfrac{1}{2})(b + \tfrac{1}{2}) = ab + (a + b) / 2 + \tfrac{1}{4}$$

Ну вот, теперь у нас есть чудесное правило. Перемножаем числа перед запятой:

$$3 \times 7 = 21$$

Вычисляем половину суммы двух чисел перед запятой:

$$(3 + 7) / 2 = 5$$

Складываем два полученных числа и добавляем 0,25:

$$21 + 5 + 0{,}25 = 26{,}25$$

Убираем запятые в примере – и ответ готов:

$$35 \times 75 = 2625$$

Давайте попробуем еще раз.

Например, умножим 125 на 75. Перед цифрой 5 поставим запятую:

$$12{,}5 \times 7{,}5$$

Перемножим числа перед запятой:

$$12 \times 7 = 84$$

Вычислим половину суммы двух чисел перед запятой:

$$(12 + 7) / 2 = 9{,}5$$

Сложим получившиеся числа и добавим 0,25:

$$84 + 9{,}5 + 0{,}25 = 93{,}75$$

Уберем запятые:

$$125 \times 75 = 9375$$

Ну что скажете? Тогда, в четыре часа утра, мне это правило показалось довольно забавным, пускай и немного замороченным.

Давайте придумаем еще одно правило. Допустим, вы с друзьями решили посоревноваться, кто лучше возведет в квадрат числа, заканчивающиеся на 1, например 31^2, 41^2 и 51^2. Вы вполне можете опередить друзей и придумать правило, которое поможет решить такие примеры с невероятной быстротой. Правило будет проще, если перед единицами поставить запятую.

Это значит, что сперва нам надо придумать правило, в котором мы возводим в квадрат все числа с единицей после запятой, например $3{,}1^2$, $4{,}1^2$ и $5{,}1^2$. Готовы? Тогда начинаем.

Помните квадратичное тождество первого типа?

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

В нашем примере было бы логично поставить на место a число до запятой. Это означает, что числом b в этом правиле будет 0,1. Поэтому давайте подставим $b = 0{,}1$ в квадратичное тождество первого типа и посмотрим, что произойдет:

$$(a + 0{,}1)^2 = a^2 + a / 5 + 0{,}01$$

Ура! Мы придумали наше первое математическое правило. Каждый раз, возводя в квадрат a, будем добавлять одну пятую часть a и одну сотую. Затем будем складывать эти три маленьких числа и отбрасывать запятые. Вот и все, что от нас требуется.

Давайте воспользуемся этой чудесной формулой и вычислим, сколько будет 51^2. Вставляем запятую и сначала считаем произведение $5{,}1^2$.

Число перед запятой у нас 5. Возведем в квадрат 5 и добавим одну пятую от 5:

$$5^2 + 5 / 5 = 25 + 1 = 26$$

Добавим после запятой 0,01. Получится, что $5{,}1^2 = 26{,}01$. Уберем запятую: $51^2 = 2601$.

Если вы отличаетесь упорством, то, возможно, захотите придумать похожую формулу для того, чтобы возводить в квадрат все числа, заканчивающиеся на 2, например 32^2, 42^2 и 52^2.

Добавим запятую перед числом 2 и применим квадратичное тождество первого типа, чтобы придумать нужное правило:

$$(a + 2 / 10)^2 = a^2 + 4a / 10 + (2 / 10)^2 = a^2 + 2a / 5 + 0{,}04$$

Возведем в квадрат a, добавим одну пятую удвоенного числа a, а потом добавим еще 0,04.

Допустим, нам надо возвести в квадрат 52. Вставим запятую перед числом 2 и применим формулу для того, чтобы возвести в квадрат 5,2.

Перед запятой у нас 5. Возведем в квадрат 5 и добавим одну пятую часть удвоенного числа 5:

$$5^2 + 5 \times 2 / 5 = 25 + 2 = 270$$

Добавим 0,04 и получим 27,04.

В конце запятые можно удалить:

$$52^2 = 2704$$

Поняли принцип? Иначе говоря, каждое правило можно приспособить к решению самых разных задач. Это довольно занятно, однако этого недостаточно, чтобы стать лучшим из лучших. Если хотите и впрямь стать чемпионом среди чемпионов, то полезно будет научиться сочетать различные правила. Значит, пора переходить к следующей главе.

23
Только для ботанов!
Как комбинировать различные математические фокусы

Внимание! Учтите: это глава только для ботанов! Ну все, я предупредил.

Закройте глаза и подумайте вот о чем: если вас попросили придумать пример на умножение, в котором вы используете два случайных числа до тысячи, перед вами бесчисленное количество возможностей. Вот лишь несколько примеров:

$$71 \times 999,\ 71 \times 998,\ 71 \times 997 \text{ и так далее до } 71 \times 0.$$

Лишь некоторые из всех примеров можно решить быстро и без особых раздумий. Хотя многие из приведенных в этой книге методов можно применить ко всем примерам на умножение, они, к сожалению, не всегда одинаково хорошо работают. Пара методов действует лишь в отношении определенного сочетания чисел. В отдельных случаях новые методы кажутся даже более сложными, чем классические школьные приемы. Но надежда, дорогой мой читатель, все равно не умирает.

Комбинируя различные методы из этой книги, мы сможем изящно решать на первый взгляд сложные задачи и значительно ускорить темп расчетов. Здесь границы зависят лишь от нашей фантазии. Цветовые обозначения в этой главе показывают, какие именно методы мы используем. Чудесный метод быстрого счета обозначен красным, потому что он самый важный и наиболее эффективный, правило пятерки обозначено синим, а фокус с квадратом – зеленым.

Ну что ж, начнем.

Комбинируем фокус с квадратом и правило пятерки

Допустим, нам надо решить следующий пример: 71 × 79. Если вспомнить правило феррари никак не получается, такой пример можно быстро решить, скомбинировав фокус с квадратом и правило пятерки.

Правильнее всего будет начать с фокуса с квадратом.

$$71 \times 79 = 75^2 - 4^2$$

Теперь нам потребуется дополнительное вычисление.

Чтобы получить 75^2, прибегнем к правилу пятерки.

75^2 = «умножим 7 на 8 и добавим в конце 25» = 5625.

$$71 \times 79 = 75^2 - 4^2 = 5625 - 16 = 5609$$

Изящно. Проще и не придумаешь.

Комбинируем правило пятерки и чудесный метод быстрого счета

Хотите научиться возводить в квадрат трехзначные числа, например 965? Такая задача может показаться страшноватой, однако на самом деле посчитать можно так быстро, что у вас чернила высохнуть не успеют, как вы уже скажете: «Готово!» Начать лучше всего будет с правила пятерки. Умножаем 96 на 97 и добавляем к ответу 25. Тут может быть чуть сложновато, но совсем чуть-чуть. Умножая 96 на 97, вспомним чудесный метод быстрого счета.

$$\begin{array}{ll} 96 \times 97 & (100 \times 1) \\ -4 \quad -3 & \end{array}$$

$$96 \times 97 = (97 - 4) \times 100 + (-4) \times (-3) = 9312$$

А дальше вернемся к правилу пятерки и добавим в конце 25:

$$965^2 = 931225$$

Ну что, впечатляет?

Разумеется, можно было начать с чудесного метода быстрого счета, а завершить вычисления с помощью правила пятерки.

$$\begin{array}{ll} 965 \times 965 & (1000 \times 1) \\ -35 \quad -35 & \end{array}$$

Чудесный метод быстрого счета преобразует наш пример в настоящую математическую конфетку:

$$965^2 = (965 - 35) \times 1000 + (-35)^2 = 930000 + 35^2$$

Чтобы вычислить 35^2, прибегнем к правилу пятерки:

$3 \times 4 = 12$. Добавим в конце 25. Это означает, что $35^2 = 1225$.

Поэтому $965^2 - 930000 + 1225 = 931225$.

Как видите, здесь мы тоже достаточно быстро придем к ответу.

Потренируем эти методы и возведем в квадрат такое относительно несложное число, как 135.

Во-первых, можно начать с правила пятерки: умножим 13 на 14 и добавим 25.

Чудесный метод быстрого счета поможет нам перемножить 13 и 14.

$$13 \times 14\ (10 \times 1)$$
$$+3 \quad +4$$

$$13 \times 14 = (14 + 3) \times 10 + 3 \times 4 = 170 + 12 = 182$$

Пора переходить к правилу пятерки и добавить в конце 25.

$$135^2 = 18225$$

Мы, разумеется, можем начать и с чудесного метода быстрого счета, после чего перейдем к правилу пятерки.

$$135 \times 135\ (100 \times 1)$$
$$+35 \ +35$$

$$135^2 = (135 + 35) \times 100 + 35^2 = 17000 + 35^2$$

Чтобы вычислить 35^2, воспользуемся правилом пятерки.
Умножим 3 на число, большее на единицу: $3 \times 4 = 12$, а затем добавим в конце 25:

$$35^2 = 1225$$

А теперь перейдем к чудесному методу быстрого счета.

$$135^2 = 17000 + 35^2 = 17000 + 1225 = 18225$$

Ну что, вас переполняет восторг, когда вы смотрите на этот пример? Значит, вы научились решать задачи в два счета! Давайте применим те же приемчики и умножим 145 на 245.

Здесь начать будет удобнее с чудесного метода быстрого счета.

$$145 \times 245\ (100 \times 2)$$
$$+45 \ +45$$

$$145 \times 245 = (245 + 45 \times 2) \times 100 + 45^2 =$$
$$= (245 + 90) \times 100 + 45^2 = 33500 + 45^2 = ?$$

Сейчас перейдем к другому методу. Вспомним правило пятерки и возведем в квадрат 45: $4 \times 5 = 20$ плюс 25 в конце. Получаем 2025.

И снова чудесный метод быстрого счета:

$$145 \times 245 = 33500 + 2025 = 35525$$

Да-да, такие задачи можно решать с поразительной скоростью.

Комбинируем правило феррари с чудесным методом быстрого счета

Умножим 131 на 139. Эту задачу можно решить несколькими способами. В указанных числах, кроме единиц, все остальные цифры совпадают. Тогда удобнее всего будет начать с правила феррари.

Перемножаем единицы: $1 \times 9 = 09$. Так мы получили две последние цифры в ответе.

Умножим 13 на число, большее на единицу: 13×14. Эти вычисления нам нужны, чтобы получить первые цифры ответа.

Если в голове умножить 13 на 14 не получается, можно прибегнуть к чудесному методу быстрого счета.

$$\begin{array}{ll} 13 \times 14 & (10 \times 1) \\ +3 \quad +4 & \end{array}$$

$$13 \times 14 = (14 + 3) \times 10 + 3 \times 4 = 17 \times 10 + 12 = 182$$

Это три первые цифры ответа. Две последние цифры у нас уже есть. Ура, решение готово!

$131 \times 139 = 18209$

Комбинируем чудесный метод быстрого счета и фокус с квадратом

На этот раз перемножим 213 и 217. А для начала нет ничего лучше, чем чудесный метод быстрого счета!

$$213 \times 217\ (200 \times 1)$$
$$+13\ +17$$

$$213 \times 217 = (217 + 13) \times 200 + 13 \times 17 =$$
$$= 230 \times 200 + 13 \times 17 = 46000 + 13 \times 17 = ?$$

Дальше нам нужно умножить 13 на 17, а для таких премудростей идеально подходит фокус с квадратом.

$$13 \times 17 = 15^2 - 2^2 = 225 - 4 = 221$$

Сейчас вернемся к чудесному методу быстрого счета.

$$213 \times 217 = 46000 + 13 \times 17 = 46000 + 221 = 46221$$

Здесь мы перемножаем два трехзначных числа и быстро получаем ответ. А остальное выходит само собой.

Чтобы убедиться, что эти способы можно применять и при более сложных расчетах, умножим 227 на 833. Сперва задание может показаться неудобоваримым, но, чтобы с ним справиться, нам понадобится всего несколько секунд. И снова начать удобнее с чудесного метода быстрого счета.

$$227 \times 833\ (200 \times 4)$$
$$+27\ +33$$

$$227 \times 833 = (833 + 27 \times 4) \times 200 + 27 \times 33 =$$
$$= (833 + 108) \times 200 + 27 \times 33 = 941 \times 200 +$$
$$+ 27 \times 33 = 188200 + 27 \times 33 = ?$$

Чтобы перемножить 27 на 33, обратимся к фокусу с квадратом.

$$27 \times 33 = (30 - 3)(30 + 3) = 900 - 9 = 891$$

Продолжим чудесным методом быстрого счета.

$$227 \times 833 = 188200 + 27 \times 33 = 188200 + 891 = 189091$$

Оцените математическую красоту этого примера и решите еще несколько похожих.

Комбинируем чудесный метод быстрого счета и правило пятидесяти

Сейчас давайте проверим, как быстрее всего возвести в квадрат 152. Если никаких подходящих идей в голову не приходит, начинать лучше всего с чудесного метода быстрого счета.

$$152 \times 152 \ (100 \times 1)$$
$$+52 \ +52$$

$$152^2 = (152 + 52) \times 100 + 52^2 = 20400 + 52^2 = ?$$

Поглубже вдохнем. И вспомним правило пятидесяти для следующих вычислений:

$$52^2 = 2704$$

(Помните правило пятидесяти? $52^2 = (25 + 2) \times 100 + 22 = 2704$.)

Теперь вы достаточно хорошо вооружены, чтобы вернуться к чудесному методу быстрого счета:

$$152^2 = 20400 + 52^2 = 20400 + 2704 = 23104$$

Комбинируем фокус с квадратом и правило пятисот

Наверное, большинство из нас сочтут, что 503×479 – задача невероятной сложности. Не бойтесь. Вы с ней справитесь всего за несколько секунд.

Начнем с фокуса с квадратом: $503 \times 479 = 491^2 - 12^2 = ?$

И на этом месте все застопорится. Как посчитать 491^2?

491^2 можно вычислить при помощи правила пятисот.

$$491^2 = (250 - 9) \times 1000 + (-9)^2 = 241 \times 1000 + 81 = 241081$$

Теперь вспомним фокус с квадратом.

$$503 \times 479 = 491^2 - 12^2 = 241081 - 144 = 240937$$

Ну что, сложно было? За сколько секунд справились? Ведь времени нам понадобилось совсем немного.

Комбинируем правило пятисот и чудесный метод быстрого счета

Чтобы возвести в квадрат 597, вам понадобится всего пара приемчиков. Начнем с правила пятисот:

$$597^2 = (250 + 97) \times 1000 + 97^2 = 347 \times 1000 + 97^2 = 347000 + 97^2 = ?$$

Чтобы вычислить 97^2, прибегнем к чудесному методу быстрого счета:

$$\begin{array}{ll} 97 \times 97 & (100 \times 1) \\ -3 \quad -3 & \end{array}$$

$$97^2 = (97 + (-3)) \times 100 + (-3)^2 = 9400 + 9 = 9409$$

Теперь снова обратимся к правилу пятисот:

$$597^2 = 347000 + 97^2 = 347000 + 9409 = 356409$$

Комбинируем классическое умножение с чудесным методом быстрого счета

На самом деле мы еще круче. Давайте это докажем. Предположим, нам по какой-то безумной причине взбрело в голову возвести в квадрат шестизначное число 104112.

Работая с такими крупными числами, мы справимся быстрее, если вспомним классическое умножение со скоростью света.

Сперва полезно будет поделить число на две группы цифр.

$$104112^2$$

Первая группа – 104. Вторая – 112. Как вы, возможно, помните из классического умножения со скоростью света, нам нужно будет произвести несколько промежуточных вычислений:

$112 \times 112 = 12544$

$$104 \times 112 \times 2 = 23296$$
$$104 \times 104 = 10816$$

Эти три задачи можно решить с помощью чудесного метода быстрого счета.

Продолжим приемом из классического умножения со скоростью света, записав в столбик промежуточные вычисления:

$$\begin{array}{lr} & 12544 \\ + & 23296 \\ + & 10816 \\ \hline = & 10839308544 \end{array}$$

Дорогой читатель! Вы осилили самую занудную главу этой книги – поздравляю! Очень надеюсь, что даже здесь вы смогли почерпнуть вдохновение. Комбинируя различные методы, вы будете считать в разы быстрее. Потренируйтесь – попробуйте решить и другие примеры, сочетая несколько методов. Играйте с числами и методами и не бойтесь. Как видите, большие числа – это тоже весело. А в следующей главе мы увидим, что и в дробях нет ничего страшного. Расслабьтесь и переверните страницу.

24
Как побороть страх
И победить десятичные дроби

Многие из нас, обычных смертных, ужасно боятся перемножать десятичные дроби. Давайте успокоимся: умножать десятичные дроби совершенно несложно. Секрет в том, чтобы забыть о том, что мы работаем с дробями, и вспомнить об этом лишь потом.

Представьте, что вы собираетесь испечь к Рождеству пирог, но в вашем любимом рецепте пропорции даны чересчур большие. Возможно, рецепт рассчитан на пятерых человек, а вам нужен пирог лишь на троих. В этом случае все пропорции в рецепте потребуется умножить на 3/5, то есть 0,6. Например, по рецепту вам нужно 1,2 кг муки. Значит, на самом деле вам понадобится только шесть десятых от этого количества. Иначе говоря, 0,6 надо умножить на 1,2. Звучит ужасно и может отбить охоту печь пирог даже у самого опытного кулинара. А ведь пугаться совершенно нет причин! Для начала забудем о запятых и просто перемножим 6 и 12. Это настолько просто, что вполне можно посчитать в уме: 6 умножить на 12 будет 72.

Посчитаем количество десятых долей в изначальном примере. В каждом из чисел была одна десятая доля, то есть всего получается две. Поэтому добавим в ответ две десятых.

$0{,}6 \times 1{,}2 = 0{,}72$. Это означает, что вам нужно всего 0,72 кг муки, чтобы пирог получился на троих.

Таким же образом вы решите следующий пример: $0{,}13 \times 0{,}14$. Здесь у вас всего четыре десятые доли. Запятые для начала отбросим. Мы легко посчитаем, что $13 \times 14 = 182$. Это означает, что $0{,}13 \times 0{,}14 = 0{,}0182$.

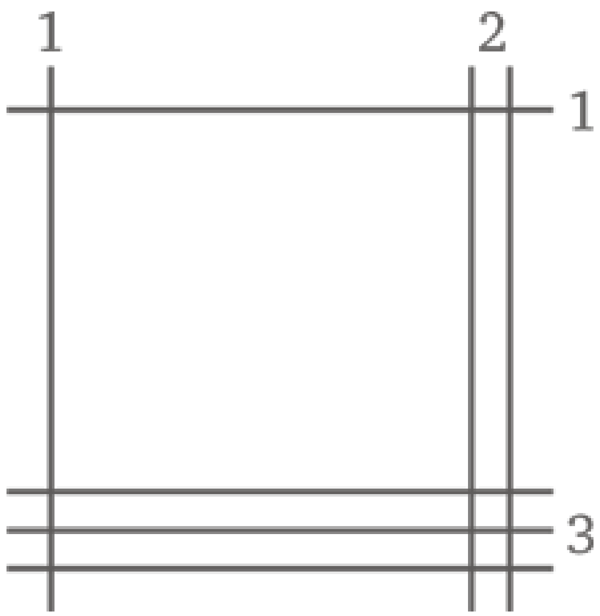
И напоследок умножим 0,0012 на 0,12. Здесь слева у нас четыре десятые доли, а справа – две. Это означает, что всего их шесть. Отбросим запятые. Умножим 12 на 12. Получится 144. Добавим шесть десятых долей. Получится, что $0{,}0012 \times 0{,}12 = 0{,}000144$. Теперь вы, во-первых, избавились от страха перед дробями, а во-вторых, научились печь математически идеальные пироги.

Если наш идеальный пирог навел на вас тоску, но мир чисел вам при этом покидать не хочется, в следующей главе я расскажу, как решать примеры с помощью одних лишь черточек.

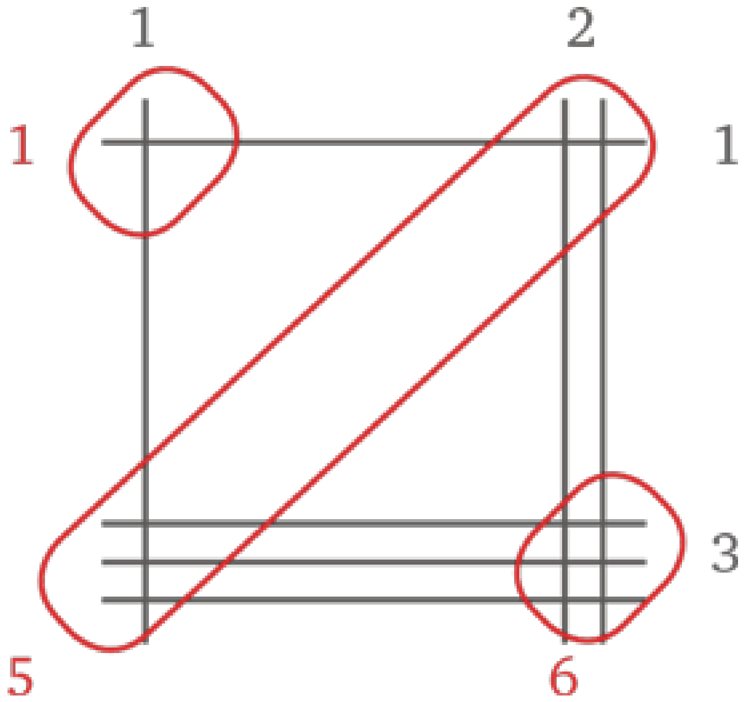
25
Спасение для тех, кто устал от цифр
Считаем с помощью черточек

Держитесь, потому что сейчас вы познакомитесь с одним из самых изящных и удивительных методов в этой книге. Этот способ я позаимствовал у китайцев. Китайские дети учатся считать, рисуя черточки. Внешне это выглядит очень красиво, и к тому же такой способ очень эффективный – дети способны освоить его еще в детском садике. Единственное, что вам нужно, – вооружиться карандашом и линейкой и быть готовым чертить вертикальные и горизонтальные черточки.

Допустим, нам надо умножить 12 на 13. Запишем первое число в строчку, а второе в столбик – так, чтобы цифры располагались подальше друг от друга. Теперь пришла очередь черточек. Для каждой цифры нам нужно провести то количество черточек, которое соответствует значению цифры.



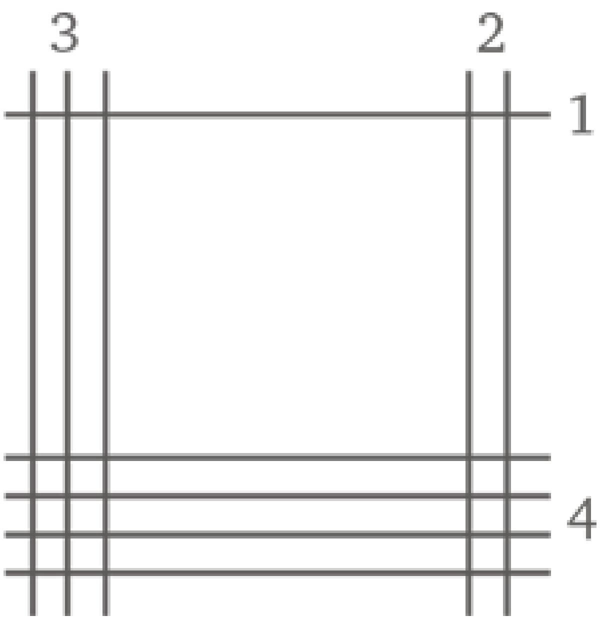
Следующий шаг почти такой же чудесный. Обведем точки пересечения. Овалы, которые получаются, когда мы обводим точки, должны располагаться наискосок, чтобы нижняя точка находилась слева, а верхняя – справа.



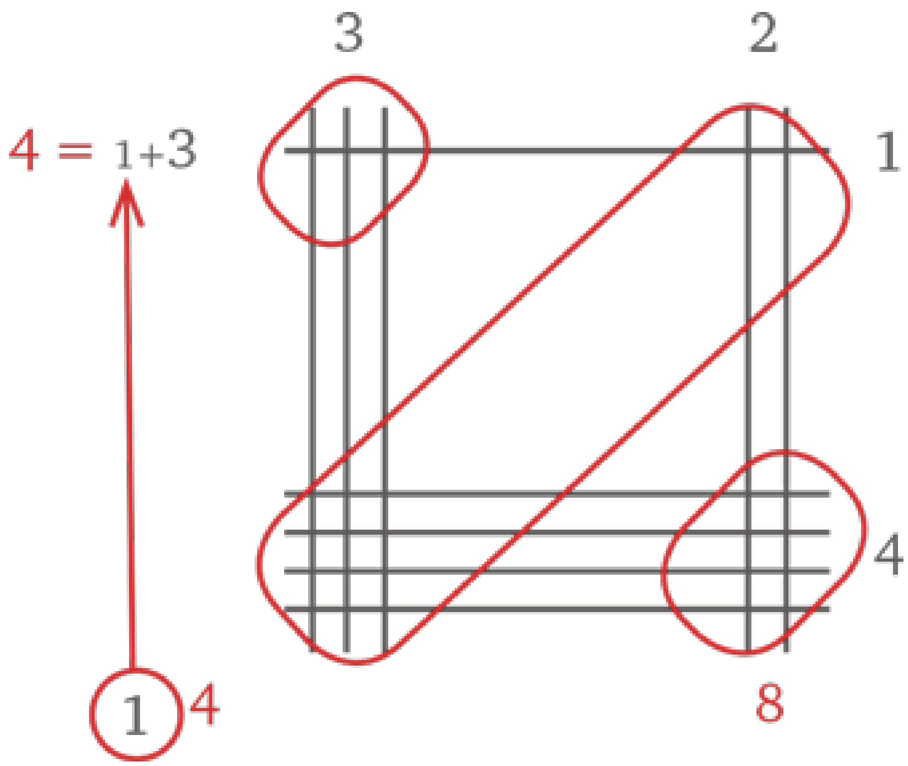
Не поверите: хотя нам и кажется, что мы всего лишь провели черточки и нарисовали овалы, на самом деле мы почти добрались до ответа. Остается лишь посчитать количество точек пересечения внутри каждого овала.

Вот и все: $12 \times 13 = 156$.

Иногда здесь будут появляться числа, которые надо держать в уме. В этом нет ничего страшного. Давайте разберем пример, где возникают такие числа: умножим 32 на 14.



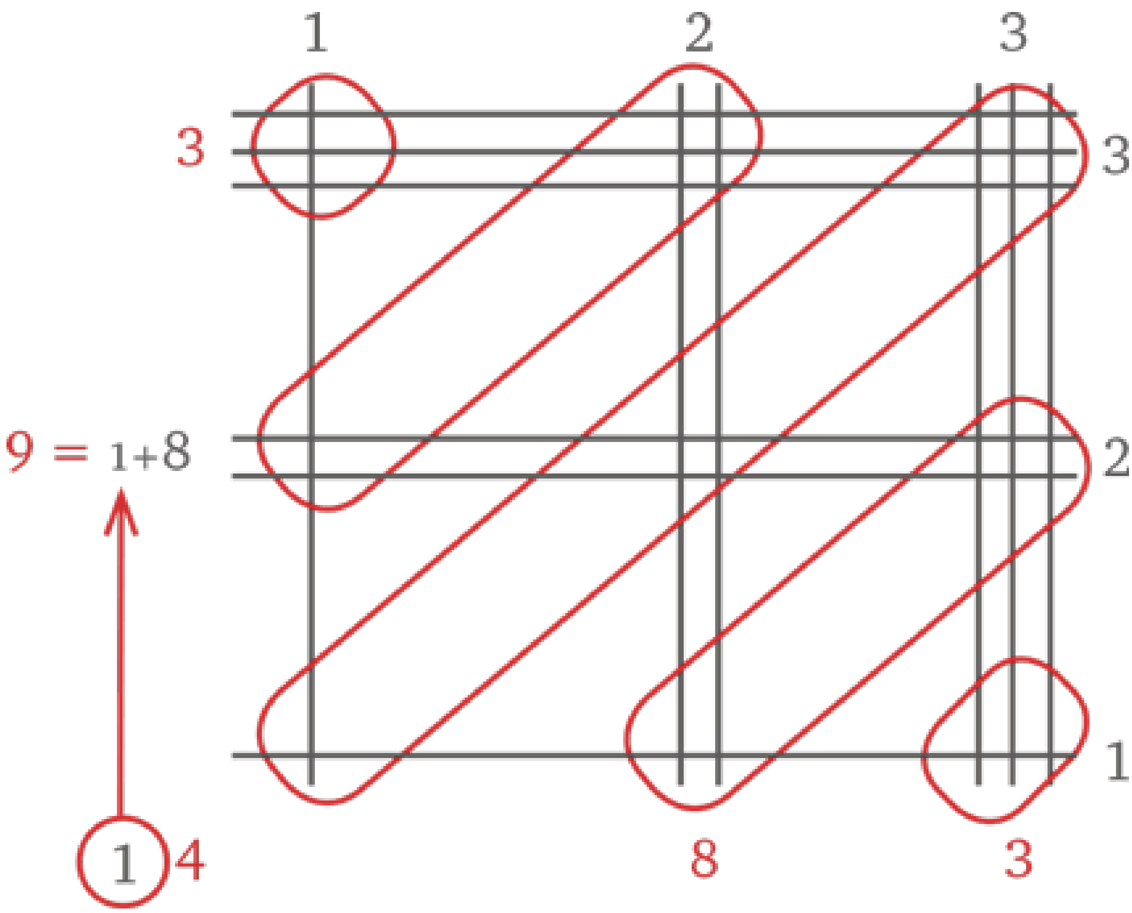
Обведем точки пересечения и посчитаем их количество внутри каждого овала:



Больше от нас ничего и не требуется. Черточки и овалы приводят нас прямиком к ответу: 32 × 14 = 448.

Этот метод, разумеется, действует независимо от того, насколько большие числа мы перемножаем, однако если числа велики, то и точек пересечения у черточек будет невероятно много.

Давайте рассмотрим последний пример и умножим 123 на 321.



Как видите, нам понадобится всего несколько черточек, чтобы получить ответ: 123 × 321 = 39483.

Возьмем бумагу, ручку и линейку и проведем черточку по всем законам загадочной восточной математики. Впрочем, она оказалась вовсе не такой уж и загадочной. Если вам хочется проделать то же самое, но обойтись без черточек, переходите к следующей главе, где вас ждет небольшое открытие.

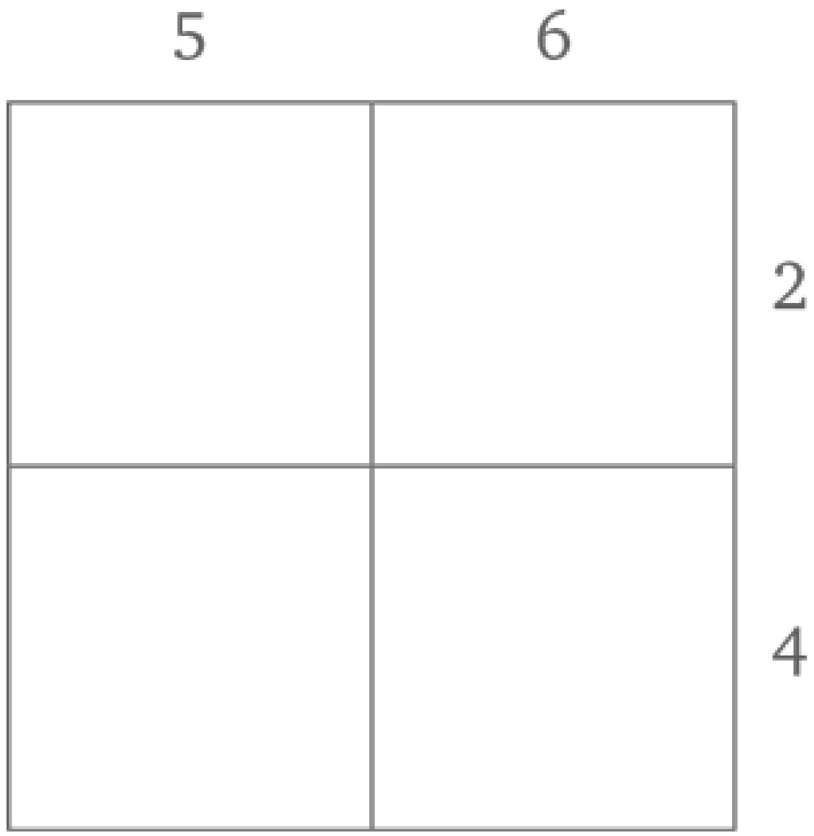
26
Прекраснее листопада
Графическое умножение

Хотя вы уже познакомились с самыми разными методами быстрого счета, один из них вы пока еще не видели. Вам он наверняка понравится! Однажды во время похода по горам я научил ему друзей, и их пятнадцатилетняя дочка пришла в такой восторг, что, по ее собственным словам, потом целый день посвятила вычислениям. Произошло это во многом благодаря тому, что на их даче в горах не было ни света, ни интернета, так что других занятий просто не нашлось.

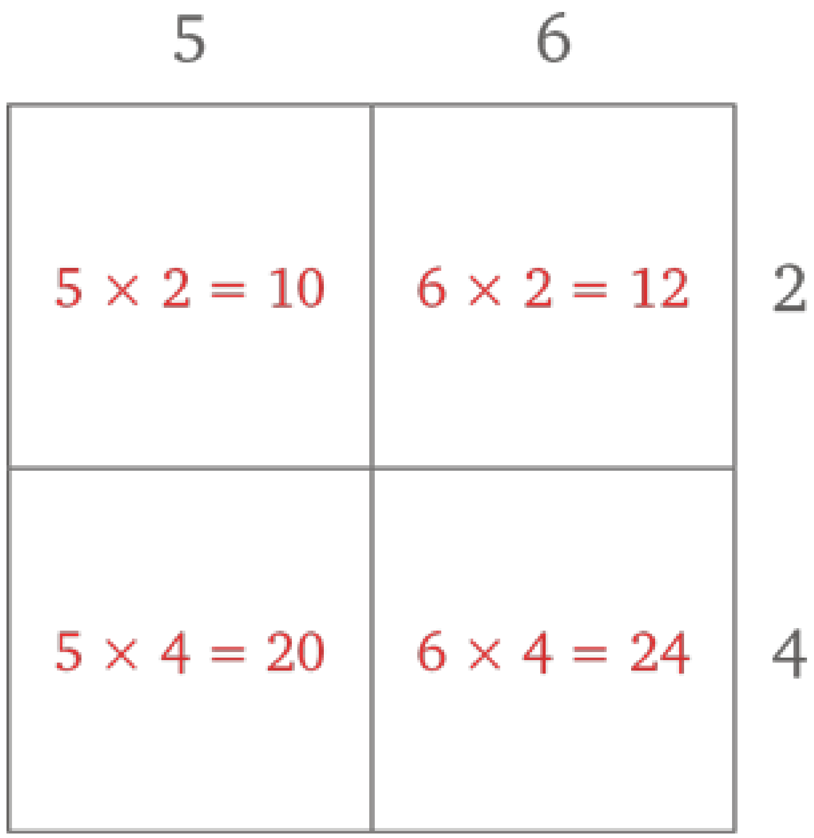
Этот метод не только красив, но и внешне изящен, так что нас ждет интересное продолжение. Единственное, что нам требуется, – начертить сетку из множества треугольничков. Дальше все пойдет само собой. Чтобы сэкономить время, я бы очень рекомендовал вам заранее нарисовать несколько сеток с треугольничками. Тогда вы, можно сказать, уже на полпути к нирване. Пора приступать – посмотрим, как работает наш графический метод.

Допустим, нам надо умножить 56 на 24.

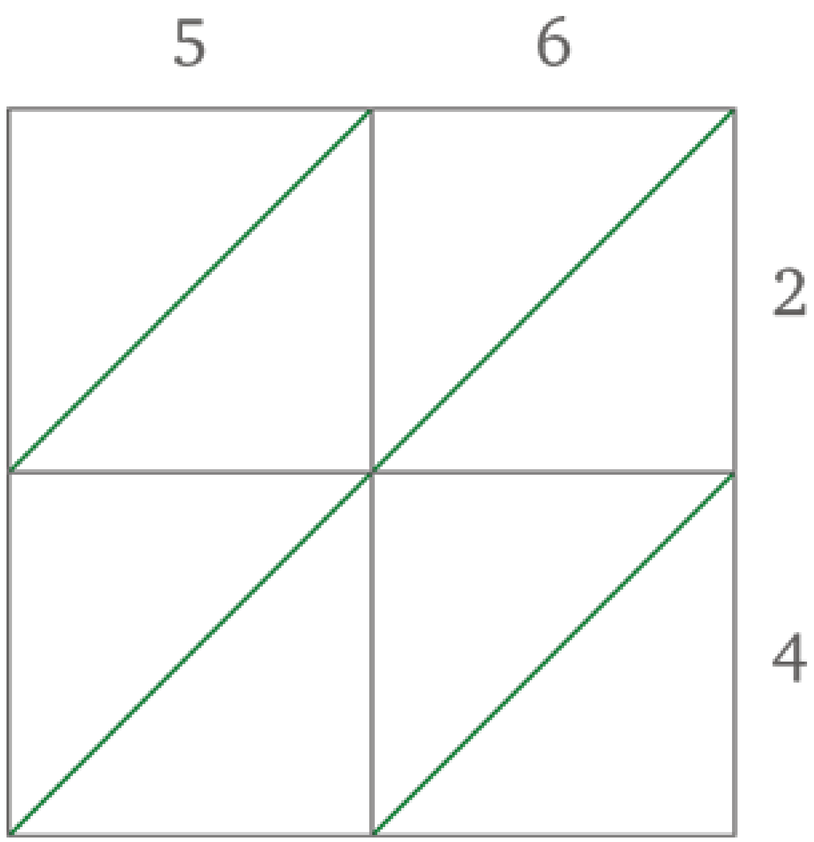
Начертим квадрат в клеточку и напишем над квадратом 56, а справа от него – 24:



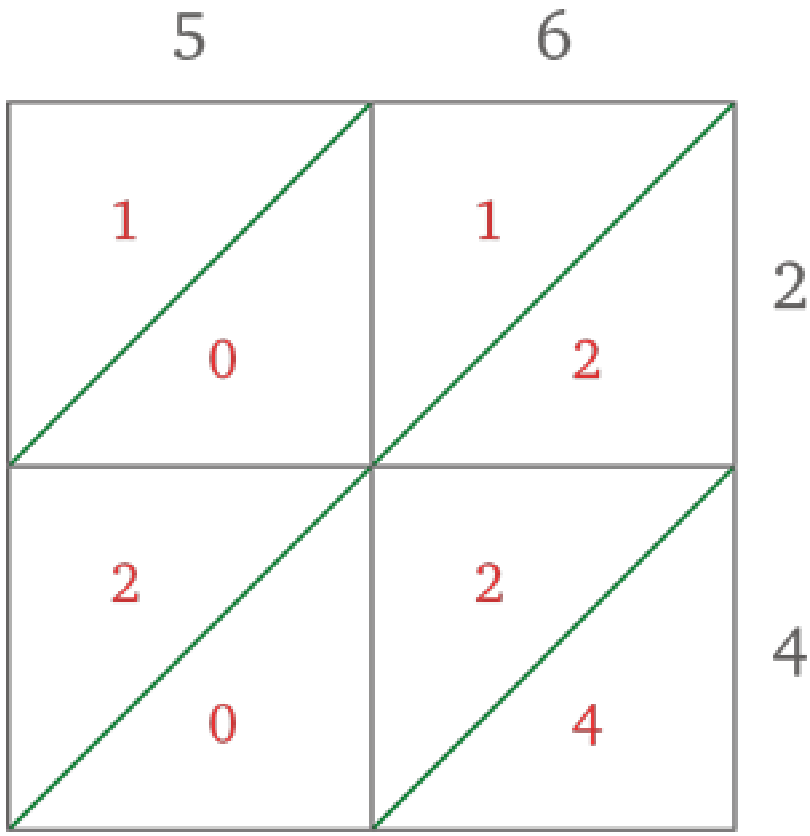
В этом примере все настолько ясно, что не понять невозможно. В каждой клеточке мы перемножаем число в столбике с числом в строчке.



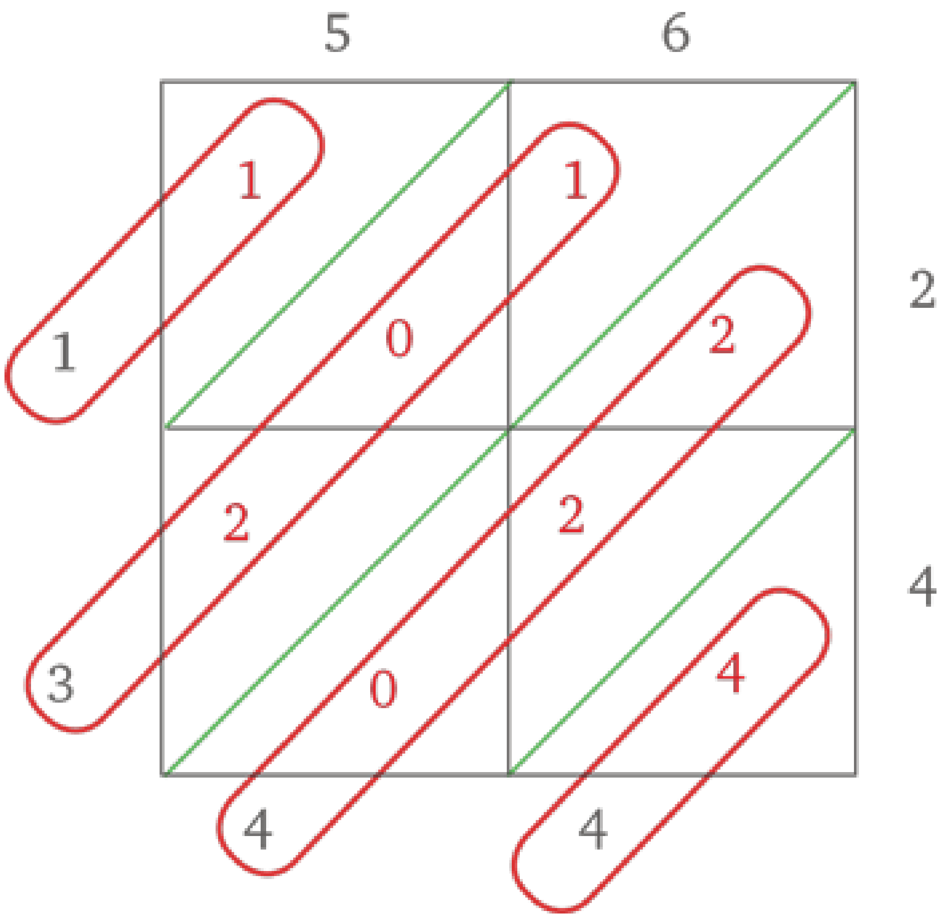
Теперь, когда с этим разобрались, театрально помолчим, потому что наш графический фокус намного красивее, чем мы сейчас видим. Поэтому вернемся на шаг назад и начнем сначала. Прежде чем начать вычисления, разделим каждую клетку на два треугольника:



Верхние треугольники в каждой клетке предназначены для десяток, а нижние – для единиц. Начнем сначала и посчитаем все заново.



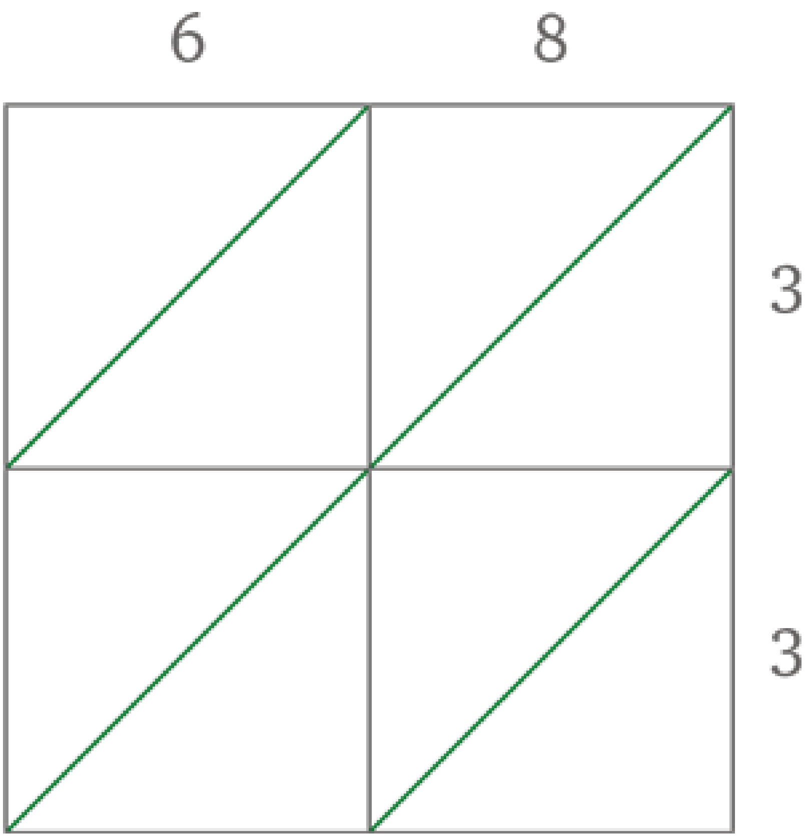
Ну разве не чудесно? И, как бы это неправдоподобно ни звучало, едва начав, мы уже подошли к ответу. Завершающий этап – сложить все числа по диагоналям.



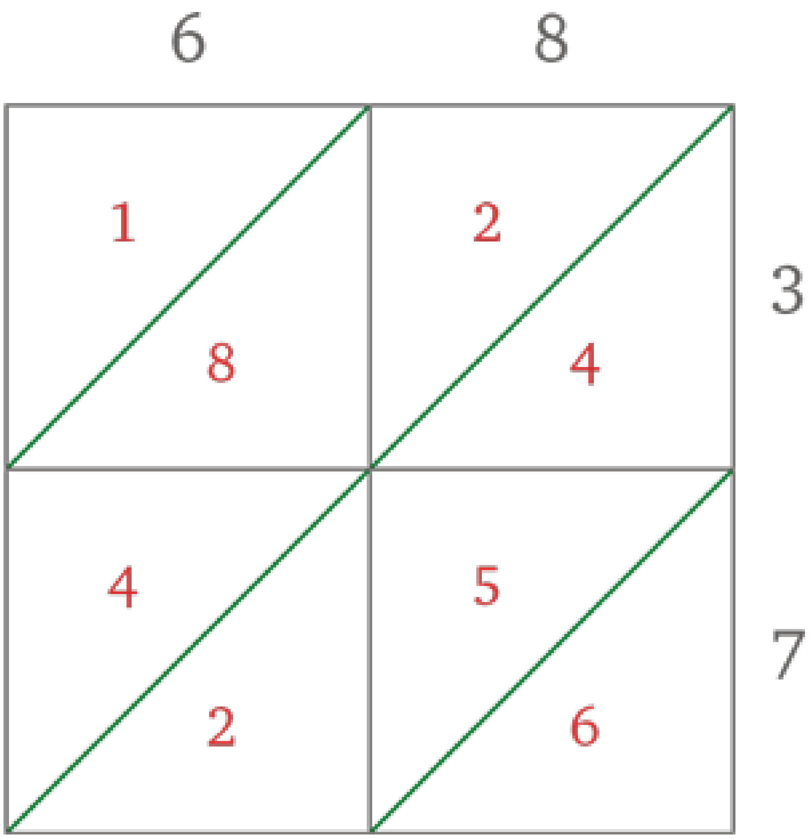
Ну вот и все – ни убавить, ни прибавить: 56 × 24 = 1344. Главное сейчас – хорошенько потренироваться, поэтому сразу перейдем к следующему примеру.

Умножим 68 на 37.

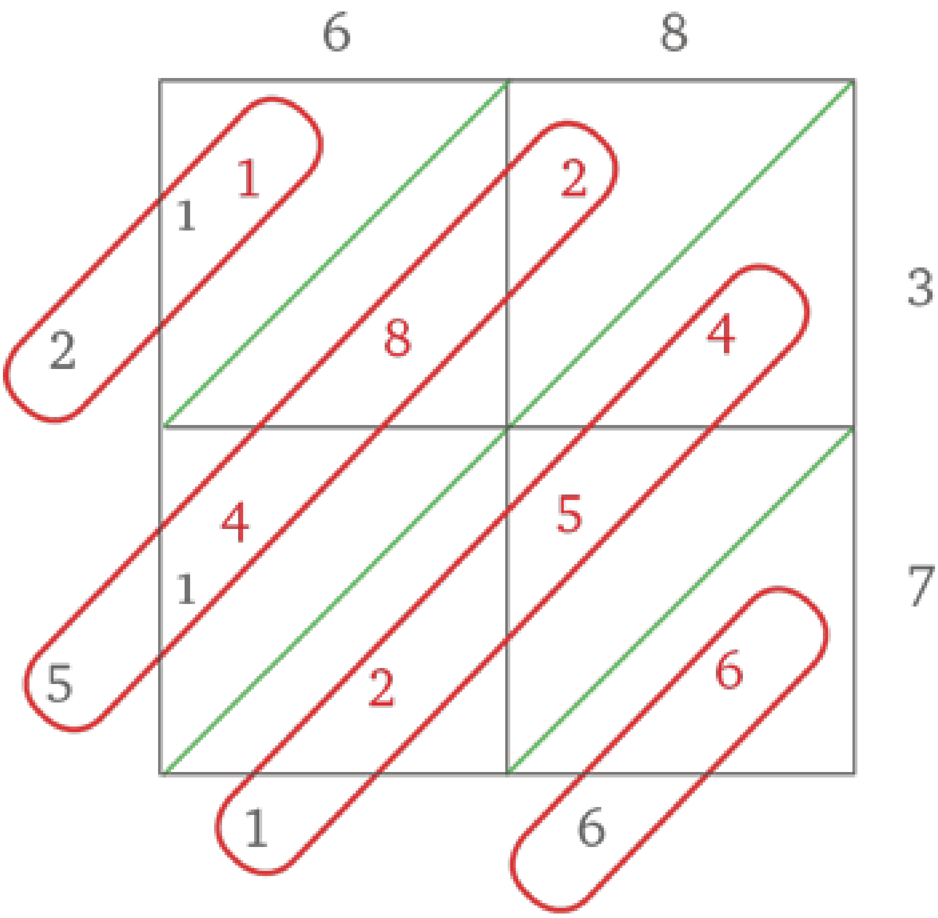
Впишем пример в квадрат с клетками и треугольниками:



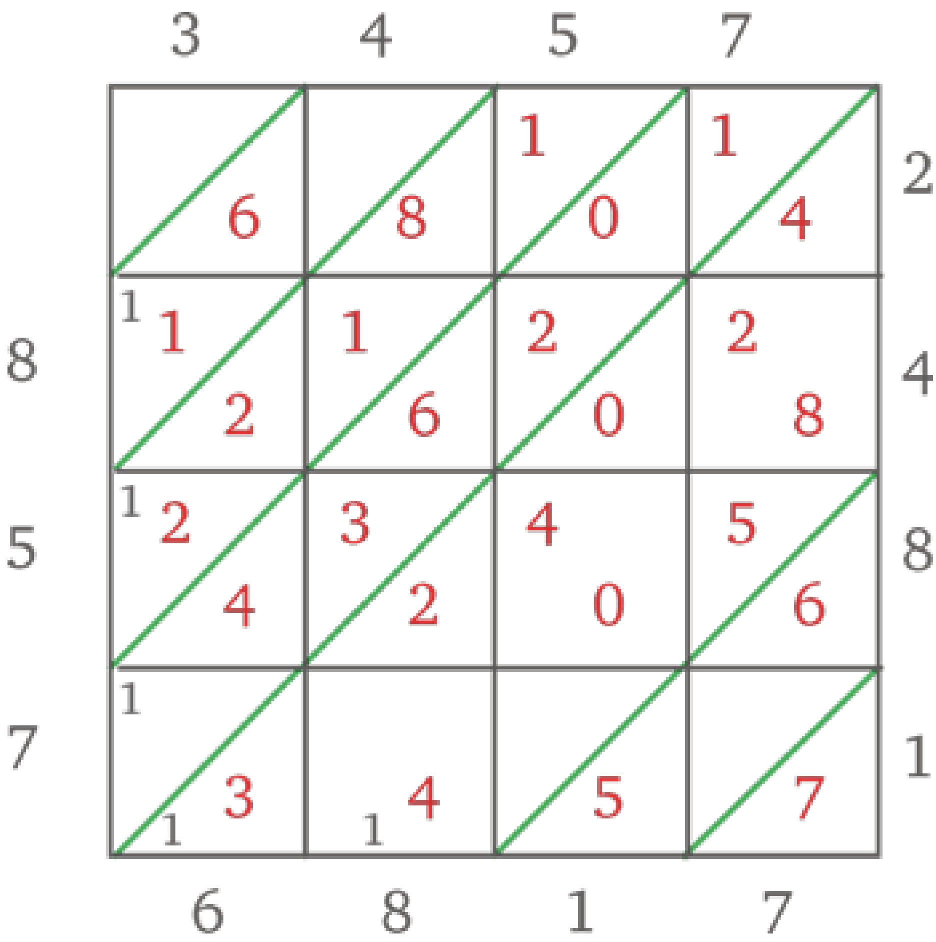
Перемножим числа и впишем десятки и единицы в треугольники:



Вычислим сумму чисел по диагоналям и не забудем про те, что в уме:



Вот мы и добрались до ответа: 68 × 37 = 2516.
Если этот метод вас не разочаровал, давайте воспользуемся еще одним шансом.
Умножим 3457 на 2481:



Благодаря этому чудесному методу мы с вами в два счета выяснили, что 3457 × 2481 = 8576817. С помощью этого метода вы всегда найдете, чем развлечь друзей, ну а если все ваши фокусы уже известны, а идеи закончились, переходите к следующей главе – там вы найдете еще один хитрый метод.

27
Гвоздь программы
Квадратный корень в мгновение ока

В молодости я мечтал изобрести способ, который позволил бы мне быстро извлекать из чисел квадратный корень. Квадратный корень числа – это число, которое, умноженное само на себя, дает изначальное число. Очевидно, что квадратный корень из 4 равен 2, квадратный корень из 9 равен 3, потому что $2 \times 2 = 4$, а $3 \times 2 = 9$. Однако мало найдется простых смертных, способных без помощи калькулятора извлечь квадратный корень из таких чисел, как 2209, 3136 и 3721. И тем не менее надежда у нас есть. Наш новый метод поможет вам в мгновение ока извлекать квадратный корень из числа в тех случаях, если он представляет собой целое число. Давайте потренируемся – и тогда к ответу вы придете за несколько секунд.

Приступим к вычислениям, но перед этим начертим две небольшие таблички. Первая табличка – квадраты всех однозначных чисел.

$1^2 = 1$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$
$5^2 = 25$
$6^2 = 36$
$7^2 = 49$
$8^2 = 64$
$9^2 = 81$
$10^2 = 100$

Эта табличка поможет вам независимо от величины чисел, из которых мы извлекаем квадратный корень.

Главное – последняя цифра в числе, из которого мы извлекаем квадратный корень. Между последней цифрой числа и последней цифрой в квадратном корне числа всегда есть взаимосвязь.

Правило простое, и достаточно посмотреть на квадраты первых десяти чисел, чтобы понять закономерность. Запишем эту закономерность в отдельную таблицу:

Последняя цифра в числе	Последняя цифра квадратного корня
Заканчивается на 0	Заканчивается на 0
Заканчивается на 1	Заканчивается на 1 или 9
Заканчивается на 4	Заканчивается на 2 или 8
Заканчивается на 5	Заканчивается на 5
Заканчивается на 6	Заканчивается на 4 или 6
Заканчивается на 9	Заканчивается на 3 или 7

Это означает следующее: если вам вдруг захочется извлечь квадратный корень из числа, заканчивающегося на 1, полученное число всегда будет заканчиваться на 1 или 9. Одного этого уже достаточно, чтобы приблизиться к ответу.

Извлечем квадратный корень из 3136 и посмотрим, какими способами можно решить эту задачу. Последняя цифра здесь 6. Это означает, что искомое число должно заканчиваться на 4 или 6.

Теперь давайте на время забудем о двух последних цифрах в числе 3136. Пока нам достаточно числа 31. Наша задача – отыскать то число, квадрат которого будет ближе всего к 31. Воспользуемся табличкой с квадратами чисел – так нам не понадобится производить дополнительные вычисления. Из таблички мы видим, что ближайшее число – 5. 5 в квадрате составляет 25. 6 уже слишком велико, потому что 6, возведенное в квадрат, составляет 36, а 36 больше 31.

Это означает, что первой цифрой в ответе будет 5. Последняя цифра у нас уже есть. Ну, почти: это либо 4, либо 6. Сейчас уже можно сказать, что квадратный корень из числа 3136 будет 54 или 56. Чтобы понять, какое из этих чисел выбрать – большее или меньшее, умножим первую цифру в ответе (то есть в нашем случае число 5) на большее из этих двух чисел.

Если 31 меньше полученного числа, выберем меньшее число. Если же 31, наоборот, больше, то выберем большее число.

$5 \times 6 = 30$. Разумеется, 31 больше, чем 30. Значит, выбираем большее число, то есть 56. Вот мы и добрались до цели!

Квадратный корень из 3136 равен 56.

Давайте потренируемся и решим еще несколько задач.

Извлечем квадратный корень из 3721. Последняя цифра здесь – 1. Значит, квадратный корень должен заканчиваться на 1 или 9. Забудем о последних двух цифрах и поработаем с первыми двумя – 37. Отыщем число, квадрат которого ближе всего к 37. Это число 6, потому что $6^2 = 36$. Теперь нам известно, что квадратный корень из числа 3721 – это либо 61, либо 69.

Чтобы понять, большее или меньшее число следует выбрать, надо умножить первое число в ответе, то есть 6, на большее из двух чисел и сравнить результат с числом 37.

$$6 \times 7 = 42$$

37 меньше, чем 42. Значит, выбираем меньшее из двух чисел.

Квадратный корень из 3721 составляет 61.

Чтобы уж совсем закрепить навык, извлечем квадратный корень из красивого числа 28561.

Последняя цифра здесь 1. Это значит, что квадратный корень должен заканчиваться на 1 или 9. Забудем о двух последних цифрах и посмотрим на оставшиеся – то есть 285. Вычислим, квадрат какого числа дает нам число, ближайшее к 285. Если посчитать квадрат не получается, посмотрим на следующую табличку:

$10^2 = 100$
$11^2 = 121$
$12^2 = 144$
$13^2 = 169$
$14^2 = 196$
$15^2 = 225$
$16^2 = 256$
$17^2 = 289$
$18^2 = 324$
$19^2 = 361$
$20^2 = 400$

Мы видим, что $16^2 = 256$, и это число – ближайшее к 285. Значит, нам уже сейчас известно, что первые две цифры квадратного корня – это 16. Последнюю мы уже, можно сказать, нашли. Это либо 1, либо 9. Следовательно, квадратный корень из числа 28561 – либо 161, либо 169.

Чтобы выбрать большее или меньшее, нам нужно сравнить 285 с 16×17.

$16 \times 17 = 16^2 + 16 =$ (воспользуйтесь таблицей выше) $= 256 + 16 = 272$.

Так как 285 больше, чем 272, выбираем большее число.

Квадратный корень из 28561 составляет 169.

Какое счастье! Мы с вами извлекли квадратный корень из пятизначного числа всего за несколько секунд. Покажите этот фокус друзьям – и вы наверняка окажетесь в центре внимания на любой вечеринке. Удачи!

Доказательства

От волшебства к пониманию

Если бы я не понимал принципа работы правил, я бы никогда не стал к ним прибегать. Однако математические доказательства могут показаться многим довольно-таки страшными, поэтому я решил собрать их все здесь, в самом конце книги.

Глава 5

Перемножая два числа меньше 100, мы можем проводить вычисления по следующей формуле:

$(100 - a)(100 - b) = 100^2 - 100a - 100b + ab = 100(100 - a - b) + ab.$

Глава 6

Возводя в квадрат числа, заканчивающиеся на 5, мы можем использовать формулу для квадратичного тождества первого типа.

Вы, возможно, помните квадратичное тождество первого типа?

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

В этом случае b равно 5.

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$$

Если вам хочется найти доказательство полегче, можно сначала взвести в квадрат число, в котором 5 стоит после запятой:

$$(a + \tfrac{1}{2})^2 = a^2 + a + \tfrac{1}{4} = a(a + 1) + 0{,}25$$

В этой формуле полезно разобраться. Единственное, о чем надо помнить, – поставить запятую перед началом вычислений и убрать ее потом. Именно этому правилу и научила меня моя строгая учительница математики перед тем, как уйти на пенсию. Для несчастного школьника, которому не хватало фантазии придумать правило самому, эта формула стала настоящим откровением.

Глава 7

Возводя в квадрат числа, заканчивающиеся на 25, можно пользоваться квадратичным тождеством первого типа:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

В этом случае b равно 25.

$$(100a + 25)^2 = 10000a^2 + 5000a + 625 = 1000a(10a + 5) + 625$$

По правде говоря, это доказательство довольно-таки неудобоваримое. Если вам нужно что-то попроще, для начала возведем в квадрат число, в котором 25 стоит после запятой. Решив пример, уберем запятую.

$$(a + 0{,}25)^2 = (a + ¼)^2 = a^2 + a / 2 + \frac{1}{16} =$$
$$= a^2 + a / 2 + 0{,}0625$$

Глава 8

Доказательство чудесного метода быстрого счета вовсе не такое сложное, каким кажется на первый взгляд:

a = первый множитель,
b = второй множитель,
c = референтное число для первого множителя,

d = разница между референтным числом для второго множителя и референтным числом для первого множителя.

Образец:

$$\begin{array}{lll} a \times b & & (c \times d) \\ (a - c) & (b - cd) & \end{array}$$

Доказательство:

$(b + (a - c)d)\, c + (a - c)(b - cd) =$

$= (b + ad - cd)c + (ab - acd - cb + c^2d) =$

$= bc + acd - c^2d + ab - acd - cb + c^2d = \mathbf{ab}$

Глава 9

Доказательство полностью основано на квадратичном тождестве первого типа.
Правило пятидесяти:

$$(50 + a)^2 = 50^2 + 100a + a^2 = 100(25 + a) + a^2$$

Правило пятисот:

$$(500 + a)^2 = 500^2 + 1000a + a^2 = 1000(250 + a) + a^2$$

Глава 10

Это доказательство того, как перемножить два числа, в которых одинаковые десятки, а сумма единиц составит 10:

$(10a + c)(10a + (10 – c)) = 100a^2 + 10a(10 – c) + 10ca + + c(10 – c) = 100a^2 + 100a + c(10 – c) = 100a(a + 1) + c(10 – c)$

Глава 11

Этот метод полностью опирается на квадратичное тождество третьего типа:
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Глава 12

Этот метод тоже основывается на квадратичном тождестве третьего типа:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Если перенести b^2 на другую сторону, получим решение:

$$a^2 = (a - b)(a + b) + b^2$$

Литература

Lynregning. Michael Schrøder. Aschehoug forlag 1962.

Fun with figures. Kenneth Williams. Inspiration Books 1998.

101 short cuts in math anyone can do. Gordon Rockmaker. Frederick Fell Publishers, Inc. 1965.

Math Magic, Scott Flansburg. Harper 2004.

Matematikkens historie, Bind 1, 2, 3. Audun Holme. Fagbokforlaget 2001–2015.

All verdens tall. Georges Ifrah. Pax Forlag 1997.

Бенджамин А., Шермер М. Магия чисел: Моментальные вычисления в уме и другие математические фокусы. – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2014.

Хэндли Б. Как быстро считать в уме. – Мн.: Попурри, 2018.

Катлер Э., Мак-Шейн Р. Система быстрого счета по Трахтенбергу. – М.: Просвещение, 1967.