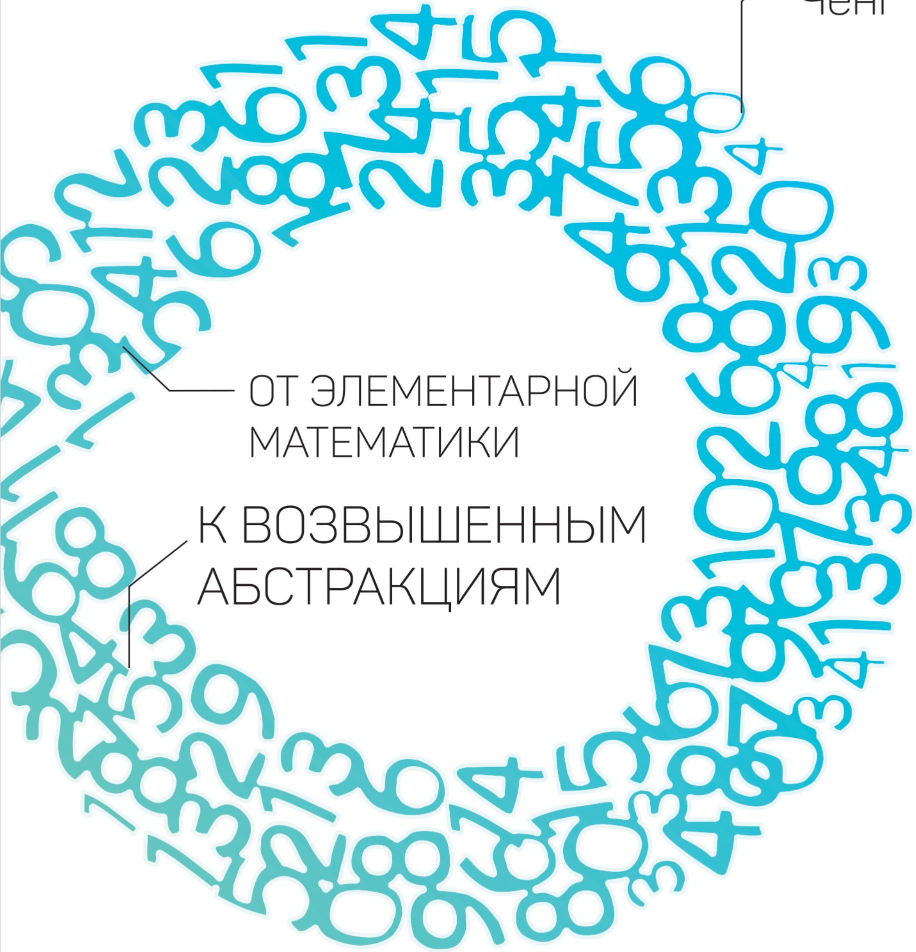
Юджиния Ченг



От элементарной математики к возвышенным абстракциям

Математический беспредел

EUGENIA CHENG

BEYOND

INFINITY

An expedition to the outer-limits of the mathematical universe

PROFILE BOOKS

Юджиния
Ченг

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БЕСПРЕДЕЛ

ОТ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

К ВОЗВЫШЕННЫМ АБСТРАКЦИЯМ

Памяти Сары Аль-Бадер,
которая своим примером научила меня тому,
что бесконечная любовь может уместиться
в конечную жизнь.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Пролог 9

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ПУТЕШЕСТВИЕ 11

Глава 1. Что такое бесконечность? 12
Ощущение бесконечности 16
Тайны бесконечности 18
Почему? 19

Глава 2. Игры с бесконечностью 23
Бесконечные отели 27
Что будет, если приедут еще гости 29
Что будет, если в отеле больше одного этажа 32

Глава 3. Что не является бесконечностью? 41
Натуральные числа 45
Бесконечность — это не натуральное число 50

Глава 4. Бесконечность снова ускользает от нас 54
Новые числа из старых чисел 55
Дроби 61
Конструирование рациональных чисел 64
Иррациональные числа 66

Глава 5. Считая до бесконечности 73
В строгости 77
Счет сумок 78
Счетность 92
Удивительно счетные множества 95

Глава 6. Одни вещи более бесконечны, чем другие . . . 99
Иррациональных чисел больше, чем рациональных . . . 100
Так много иррациональных чисел . . . 103
Действительные числа несчетные . . . 104
Усталость от принятия решений . . . 110

Глава 7. Счет за гранью бесконечности . . . 117
Абстрактный счет . . . 118
Экскурс в двоичную систему счисления . . . 122

Глава 8. Сравнивая бесконечности . . . 133
Сравнивая множества объектов . . . 136
Самая маленькая бесконечность . . . 140
Следующая бесконечность . . . 142
Эти бесконечности действительно больше? . . . 148

Глава 9. Что такое бесконечность? . . . 153
Бесконечные очереди . . . 159
Умножение бесконечных очередей . . . 162
Бесконечное вычитание . . . 165

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. НАБЛЮДЕНИЯ . . . 171

Глава 10. Где искать бесконечность? . . . 172
Абстрактная версия вечности . . . 176

Глава 11. Почти бесконечность . . . 180
Слоеное тесто . . . 182
iPod Shuffle . . . 183
Как быстро мы растем? . . . 189
Медленный рост . . . 192

Глава 12. Бесконечные измерения . . . 194
Возможные варианты четвертого измерения . . . 200
Существует ли где-нибудь четвертое измерение? . . . 203
Роботы-манипуляторы . . . 205
Уменьшая количество измерений . . . 208
Континуум измерений . . . 215

Глава 13. Категории с бесконечным количеством измерений . . . 217
Лего из Лего . . . 219
Самолеты, поезда и автомобили . . . 223
Покорить каждую вершину . . . 228
Почему все так сложно? . . . 230

Глава 14. Бесконечно малое . . . 238
Деление на бесконечность . . . 242
Оборотная сторона бесконечности . . . 247
Парадоксы Зенона . . . 249
Бесконечно большое количество бесконечно малых объектов . . . 252

Глава 15. Когда бесконечность почти сломала математику (и, возможно, ваш мозг тоже) . . . 255
Приближающиеся круги . . . 257
Пробелы между рациональными числами . . . 263
Существуют ли мини-морковки? . . . 266
Пробелы повсюду . . . 270
Стрельба по мишени . . . 273
И снова торт . . . 277
Повторяющиеся десятичные знаки . . . 283
В стороне от «бесконечного» . . . 288
Прочие длинные десятичные знаки . . . 289
Что такое действительные числа? . . . 292

Глава 16. Странности . . . 295
Гармонические ряды . . . 297
Столбиковые графики . . . 303
Области под кривыми . . . 306
Потрясающая головоломка про печенье . . . 310
Невообразимые объемы . . . 317

Глава 17. Где находится бесконечность? . . . 322
Бесконечные маршруты . . . 324
Лифт непрерывного действия Патерностер . . . 325
Еще круги . . . 327

Благодарности . . . 331

ПРОЛОГ

Я ненавижу аэропорты.

Аэропорт для меня — это стресс, толпа и шум. Там всегда слишком много людей, бесконечные очереди, негде присесть и отовсюду манит нездоровая еда. Досадно, что путешествия начинаются так, и это всегда пугает меня. Путешествие должно быть увлекательной дорогой, полной открытий. Но аэропорты и тесные ряды сидений в эконом-классе слишком часто портят впечатление от таинственного и волшебного полета на самолете.

Математика тоже должна быть увлекательной дорогой, полной открытий, таинственным и волшебным путешествием. Но часто она омрачается в самом начале, когда на тебя разом вываливается слишком много фактов и формул, даются вызывающие стресс контрольные работы и неприятные задачи.

Совсем другое дело — прогулки по воде. Обожаю их.

Я люблю быть на воде, чувствовать дуновения ветра, смотреть на цивилизацию и уходящую вдаль береговую линию. Мне нравится идти к горизонту, но не приближаться к нему. Нравится чувствовать силу природы, но не быть целиком и полностью в ее власти: я не моряк, поэтому чаще всего за управление лодкой отвечает кто-то другой. Иногда попадаются лодки, которыми я могу управлять сама, и тогда мои усилия вознаграждаются: маленькая гребная лодка, которую я однажды обвела вокруг небольшого рва, окружающего крошечный замок во Франции;

водный велосипед на каналах Амстердама; гребля по реке Кам[1]. Но однажды я не справилась с управлением, и это отбило у меня на всю жизнь всякое желание управлять лодкой, так же как у некоторых людей первый неудачный опыт навсегда отбивает желание изучать математику. Я ходила у побережья Сиднея и Лос-Анджелеса, чтобы посмотреть потрясающих китов, наблюдала за морскими котиками и другими дикими животными у побережья Уэльса. Еще были паромы через пролив Ла-Манш по дороге во Францию, с которых обычно начинались наши семейные каникулы, когда я была маленькой, пока не был запущен невероятный поезд «Евростар»[2]. Как быстро люди привыкают ко всему, даже если раньше это казалось невозможным!

Сейчас я редко путешествую по воде с целью куда-то добраться, скорее для того, чтобы приятно провести время, посмотреть достопримечательности, полюбоваться природными красотами или просто ради физической нагрузки. Исключение — паром на реке Темзе, который вполне подходит для того, чтобы добираться до центра Лондона, удачно совмещая удовольствие от водной прогулки и дорогу до пункта назначения.

Я люблю абстрактную математику так же, как и путешествия по воде. Для меня это нечто большее, чем просто добраться до пункта назначения. Это удовольствие, работа ума, общение с математической природой и знакомство с математическими достопримечательностями. Эта книга — как путешествие в таинственный и фантастический мир бесконечности и за его пределы. Достопримечательности, которые мы встретим на пути, не укладываются в голове, от них захватывает дух, иногда они кажутся невероятными. Мы будем наслаждаться силой математики, но не будем чувствовать себя целиком и полностью в ее власти; мы, подобно асимптоте, поплывем к горизонту человеческого разума, но не будем приближаться к нему.

---

[1] Река в Великобритании. — *Примеч. пер.*

[2] Высокоскоростная железная дорога в Европе. Поезда «Евростар» пересекают Ла-Манш под землей через Евротоннель. — *Примеч. пер.*

Часть первая
ПУТЕШЕСТВИЕ

1 ЧТО ТАКОЕ БЕСКОНЕЧНОСТЬ?

Бесконечность — это лох-несское чудовище, которое завладело нашим воображением из-за своего огромного размера и неуловимости. Бесконечность — это мечта, огромный фантастический мир бесконечного времени и пространства. Бесконечность — это темный лес, населенный невероятными существами, густые дебри и неожиданные лучи света, пробивающиеся сквозь чащу. Бесконечность — это петля, которая раскрывается в бесконечной спирали.

Наша жизнь конечна, наш мозг конечен, наш мир конечен, но иногда мы все же замечаем отблески бесконечности вокруг нас. Я выросла в доме, в котором посередине находился камин и дымоход, а все комнаты были расположены по кругу и соединены между собой. Мы с сестрой могли играть в догонялки вечно, бегая по кругу, и нам казалось, что наш дом бесконечный. Благодаря петлям возможны бесконечные путешествия в конечном пространстве, они используются в гоночных треках и в ускорителях частиц, а не только в детских играх в догонялки.

Когда я подросла, мама научила меня программировать на компьютере «Спектрум». Я все еще невольно улыбаюсь, вспоминая о моей любимой программе:

```
10 PRINT "HELLO"
20 GOTO 10
```
[1]

---

[1] Простейшая программа на языке Basic, выводящая на экран «Hello». — *Примеч. пер.*

Это была бесконечная петля, скорее абстрактная, чем реальная. Я вбивала `RUN` и чувствовала безумное волнение, глядя на бесконечно повторяющееся `HELLO`. Прокручивала экран вниз, зная, что этот процесс будет продолжаться *вечно*, пока я сама не остановлю его. Я была из тех детей, которым не сразу становится скучно, поэтому я могла делать это каждый день, и у меня так никогда и не возникло желания написать более содержательную программу. К сожалению, это означало, что мои навыки в программировании так и не развились; бесконечное терпение иногда приводит к весьма сомнительному результату.

Абстрактная петля моей крошечной, но одновременно бесконечной программы возникла потому, что программа всегда возвращалась к самой себе, и это самовоспроизведение стало для меня еще одним отблеском бесконечности.

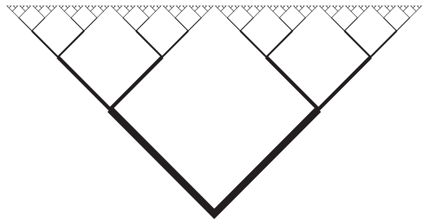
Фракталы — это фигуры, построенные из своих собственных копий, поэтому при приближении они выглядят точно так же. Для того чтобы это стало возможным, детализация должна продолжаться «вечно», что бы ни происходило, в том числе за пределами наших возможностей видеть или рисовать. На следующей странице изображено несколько фрактальных деревьев и знаменитый треугольник Серпинского[1].

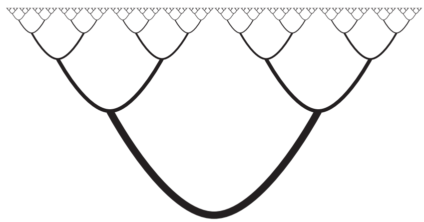
Если вы разместите два зеркала друг напротив друга, вы увидите не только свое отражение, но и отражение отражения, а потом отражение отражения отражения и так далее до тех пор, пока угол, под которым расположены зеркала, позволяет видеть что-либо. Отражения внутри отражений множатся и становятся все меньше и меньше, и теоретически они могут множиться «вечно», так же как и фракталы[2].

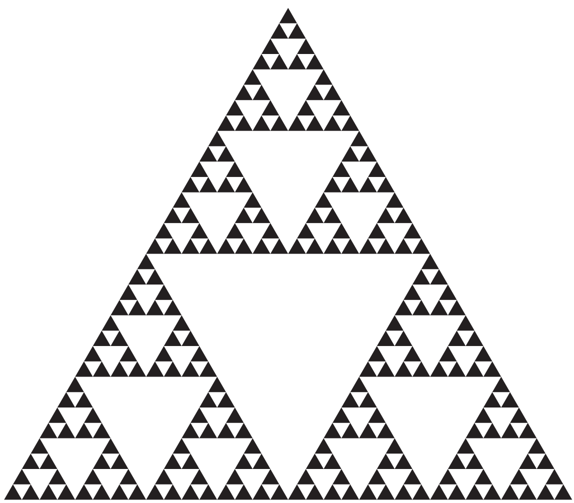
---

[1] Фрактал, предложенный польским математиком Вацлавом Серпинским в 1915 году. Также известен как «решетка» или «салфетка» Серпинского. — *Примеч. пер.*

[2] Практически — нет. Технически вторым ограничением является отражательная способность зеркала, которая составляет меньше единицы. — *Примеч. ред.*







Петли и феномен самовоспроизведения — это отблески бесконечности, так же как и объекты, которые становятся все меньше и меньше, как отражения в зеркале. Дети могут сделать свой кусочек пирога бесконечным. Для это нужно всего лишь съесть его половину, а потом половину того, что осталось и так далее — всегда только половину от того, что осталось. Или, например, вы поделили пирог, и все стесняются взять последний кусочек и поэтому берут только половину. Мне рассказывали, что по-японски это называется *enryo no katamari* — последний кусочек, который остался, потому что все слишком вежливы, чтобы съесть его.

Мы не знаем, бесконечна ли наша Вселенная, но я люблю вглядываться в церковный шпиль, пытаясь убедить себя в том, что его стороны параллельны и на самом деле это бесконечная башня, взмывающая в небо и уходящая в бесконечность. Наша жизнь конечна, но мифы и сказки о бессмертии существовали во все времена и во всех культурах.

Все эти отблески бесконечности — как рябь на озере Лох-Несс, вызванная гигантским и таинственным древним монстром, а может, чем-то другим. Бесконечность! Что это за монстр? Что мы имеем в виду, когда бросаем безобидное слово «*вечность*»? В нашем современном спешащем мире люди склонны употреблять его скорее в преувеличенном значении. Например, после двух минут ожидания они восклицают: «Я жду ответа уже целую *вечность*!» или: «Этот сайт грузится *вечность*!», когда загрузка длится больше трех секунд. Баскская писательница Амайя Габантксо рассказывала мне, что в баскском языке слово «одиннадцать» — *hamaika* — также означает бесконечность. Об этом говорит и другой мой друг, который однажды проводил ревизию домашнего джема в шкафу и установил, что в наличии имеются «4 баночки производства 2013 года, 10 баночек производства 2014 года и множество — 2015 года». Очевидно, что число больше десяти в некоторых случаях также может стать бесконечным. Область моих исследований — многомерная теория категорий. «Многомерный» означает три измерения и больше, включая бесконечность. Значит, у трех измерений и далее до бесконечного количества измерений суть приблизительно та же.

Обычно мы представляем себе бесконечность как нечто романтическое или волнующее, но при ближайшем рассмотрении эта иллюзия рассыпается, как конец радуги, который никогда не получается найти. Возникают парадоксы и противоречия, непроходимые ущелья и тайные ловушки. Мы увидим, что бесконечность не выдерживает проверок законами логики.

Одна из задач математики — объяснять явления окружающего мира, особенно те, которые могут встретиться в разных ситуациях. Если какое-либо утверждение применимо ко множеству различных случаев, тут же появляется математика и пытается обнаружить там некую обобщающую теорию, которая сможет объединить эти ситуации и позволит нам лучше понять их общие черты. Бесконечность — это одно из таких явлений. Она может неожиданно возникнуть в любой момент и в любом месте как нечто, что мы можем себе представить. Кажется, что бесконечность схожа с другими понятиями, которые *можно* классифицировать с помощью математики, как, например, длина, размер, количество. Почему же так сложно растянуть стандартные математические методы до размеров бесконечности? Именно об этом пойдет речь в этой книге: почему это так сложно, как это все-таки можно сделать и что мы увидим в результате.

ОЩУЩЕНИЕ БЕСКОНЕЧНОСТИ

О бесконечности легко рассуждать, но трудно дать ей точное определение. Маленькие дети могут быстро уловить ее суть, а у математиков ушли тысячи лет на то, чтобы объяснить феномен бесконечности во всей ее технологической и логической полноте. Вот несколько утверждений о бесконечности, о которых мы можем поразмышлять. Часто они хорошо известны детям, причем дети самостоятельно приходят к пониманию подобных вещей:

Бесконечность продолжается вечно.

Бесконечность больше самого большого числа.

Бесконечность больше всего, что мы можем
себе представить.

Если прибавить к бесконечности единицу,
она останется бесконечностью.

Если прибавить к бесконечности бесконечность,
она останется бесконечностью.

Если умножить бесконечность на бесконечность,
она останется бесконечностью.

Детей может очень взволновать мысль о бесконечности, когда она впервые приходит им в голову. Они учатся считать до десяти, потом до двадцати, позже они узнают о сотнях, тысячах, миллионах, миллиардах. Если вы спросите маленького ребенка, какое число самое большое в мире, то, скорее всего, он ответит вам: «Миллиард!». Тогда уточните у ребенка, что будет, если прибавить к миллиарду единицу, и смотрите, как его глаза расширятся от удивления.

Не так сложно убедить ребенка в том, что к любому известному ему числу всегда можно прибавить единицу и получить число еще большее. И поэтому может показаться, что самого большого числа в мире не существует. Числа продолжаются вечно! Но, с другой стороны, сколько всего чисел? Тут и возникает мысль о бесконечности.

Некоторые дети, возможно, впервые услышали о бесконечности, когда смотрели мультфильм «*История игрушек*». Фраза Базза Лайтера «Бесконечность не предел!» звучит захватывающе. В моем детстве не было «Истории игрушек», поэтому первое представление о бесконечности я получила благодаря петлям, о которых я уже рассказывала: благодаря осязаемым петлям в нашем доме и абстрактным петлям в моей любимой компьютерной программе.

Когда дети начинают размышлять о бесконечности, они часто сталкиваются с очень трудными вопросами. Что такое бесконечность? Это число? Или место? Если это не место, тогда как мы можем добраться до бесконечности и дальше нее?

Если дети впервые узнают о бесконечности в школе, то количество вопросов растет в геометрической прогрессии. Единица, деленная на ноль, равна бесконечности? Единица, деленная на бесконечность, равна нулю? Если бесконечность плюс один равно бесконечность, что будет, если вычесть бесконечность?

Когда дети задают безобидные математические вопросы, иногда кажется, что на них невозможно ответить. Это пугает взрослых, которые считают, что они должны знать все. Но, как говорит преподаватель математики и изобретатель Кристофер Дэниелсон (Christopher Danielson): «Задавать новые вопросы — важный аспект обучения, это еще важнее, чем устанавливать новые факты». В математике всегда больше вопросов, чем ответов. Даже у людей, которые довольно хорошо знают математику, у людей, которые изучали математику в университете, и даже у ученых-математиков вопросов о бесконечности куда больше, чем ответов.

ТАЙНЫ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Вот несколько моих любимых мозгодробительных загадок о бесконечности, которые мы попытаемся разгадать.

- Если у вас есть бесконечный отель и он заполнен, вы все еще можете разместить в нем еще одного гостя, сдвинув всех на один номер вперед.
- Если бы в лотерее было бесконечное количество шариков, какова была бы вероятность выигрыша?
- Одни бесконечности больше, чем другие бесконечности!
- Бесконечное количество пар носков каким-то образом более бесконечно, чем бесконечное количество пар ботинок.

* Если бы я была бессмертной, я могла бы прокрастинировать вечно.
* Если вы едете из пункта A в пункт B, то сначала должны проделать половину пути, затем половину оставшегося пути, потом снова половину оставшегося пути и т. д. Всегда будет оставаться еще половина пути, поэтому вы никогда не доберетесь до места. Или доберетесь?
* Периодическая дробь 0,(9) *в точности равна* 1.
* Имеет ли окружность бесконечное количество сторон?
* Почему люди, которые довольно хорошо знают математику, часто заходят в тупик в своих расчетах? Да, этот вопрос тоже имеет отношение к бесконечности.

Бесконечность интересует людей всех возрастов и всех уровней подготовки, но по-разному. Эта книга станет путешествием к бесконечности и дальше, за ее пределы. Ведь за ее пределами действительно что-то есть, нужно лишь хорошенько поразмышлять над этим и идти в верном направлении. Как всегда, будет много тем для размышления, а больше вопросов, чем ответов. Бесконечность — это не какое-то реально существующее место, поэтому наше путешествие будет не совсем настоящим. Вы сможете отправиться со мной в это путешествие, оставаясь там, где вы сейчас есть, ведь наше путешествие *абстрактно*. Это будет путешествие в далекий, мистический, таинственный и бесконечный мир идей.

ПОЧЕМУ?

Для чего мы отправляемся в это абстрактное путешествие? У нас на то, как у настоящих путешественников, много причин. У каждого они свои. Может, вы хотите добраться до пункта назначения, потому что вас ждут там дела. А может, там открывается потрясающий вид с высоты птичьего полета. Может, по пути вам встретятся великолепные пейзажи. Или вам нравится физическая нагрузка во время пешей прогулки или похода в горы, радость от езды на велосипеде или на машине или безмятежность поезда с мелькающими в окне сельскими пейзажами. (Правда, мой опыт путешествий по железной дороге включает скорее опоздания и разгневанных пассажиров, спешащих по своему обычному маршруту, чем безмятежность, но давайте на секунду забудем об этом.) Может быть, вы стремитесь к неизведанному. Может быть, вам нравится бродить по улицам, чтобы заблудиться в чужом городе. Может быть, у вас чемоданное настроение и вам просто хочется увидеть как можно больше невероятного, потому что в мире столько всего интересного.

У этих причин настоящих путешествий есть двойники в мире абстрактных путешествий. Путешествие в пункт назначения по делам (например, дорога на работу) в абстрактном мире — это процесс решения конкретной проблемы, умственные усилия с определенной целью. Такой вид абстрактных путешествий совершается не ради того, чтобы почувствовать себя первооткрывателем, а скорее ради того, чтобы выполнить определенное задание. Взбираться наверх ради красивого вида в абстрактном мире означает проводить абстрактные исследования, чтобы открыть новые перспективы в отношении того, что нам уже хорошо известно вблизи. Великолепные пейзажи, встречающиеся на пути, — это таинственные и прекрасные идеи и сценарии, которые возникают в ходе нашего исследования. И да, можно также ощутить оживление от умственной нагрузки и радость от мыслей, которые кажутся непостижимыми и лишь постепенно проясняются в голове, как туман, медленно сходящий и открывающий сверкающий до горизонта океан. У меня не бывает жгучего желания отправиться в настоящее путешествие и чемоданного настроения, как у других людей, зато у меня бывает любознательное настроение. В абстрактном мире это двойник чемоданного настроения. Я достаточно спокойно принимаю тот факт, что в мире существует очень много мест, которых я еще не видела. Однако когда речь заходит о вещах, которых я еще не знаю, я становлюсь ненасытной. Мне постоянно хочется изучать что-то новое.

Как только я улавливаю отблеск неизвестного, то устремляюсь в этом направлении. Мне нравится блуждать в чужом городе точно так же, как блуждать в мире идей. Я всегда стремлюсь узнавать новое, но я также счастлива признать, что существуют вещи, которые мы, люди, *не в состоянии* понять. Я действительно получаю от этого удовольствие. Это значит, что там, за пределами, всегда есть что-то еще, и это прекрасно. Если вы скажете: «Наконец-то я побывал во всех ресторанах Лондона!», разве это не будет звучать немного грустно? Но, конечно, это невозможно. *Всегда* будет еще один ресторан, который вы еще не посетили, и *всегда* будет что-то, чего вы еще не знаете.

Странным образом эта книга вовсе не о бесконечности. Она об удивительном волнении, которое испытываешь, отправляясь в абстрактный мир неизвестного. «Путешествие к центру Земли» Жюля Верна на самом деле тоже не о центре Земли, а об удивительном волнении от этого невероятного путешествия. Эта книга о том, как функционирует абстрактное мышление и чем оно может быть нам полезно. Как оно может помочь сформулировать интересную мысль, которая пришла нам в голову. Абстрактное мышление не обязательно должно давать все ответы: математика тоже не отвечает на все вопросы о бесконечности. Но такое мышление должно помочь понять, что мы можем делать с бесконечностью, а что — нет.

Итак, первая часть этой книги станет дорогой к пониманию того, что является бесконечностью. Если вы спросите маленького ребенка, что такое бесконечность, он, наверное, ответит что-то вроде: «Это больше, чем любое число, которое можно себе представить». Правильно, но это по-прежнему не объясняет, *что* такое бесконечность. Так же, как если сказать: «Яо Мин[1] выше любого человека, которого ты когда-либо встречал». Из этого не станет ясно, кто такой Яо Мин.

---

[1] Яо Мин — китайский баскетболист, на момент выступлений в НБА являлся самым высоким игроком. Его рост 2,29 метра. — *Примеч. ред.*

Во второй части этой книги мы совершим путешествие, вооруженные новыми знаниями о бесконечности, и увидим, где скрывается это неуловимое создание. Оно в зеркалах, которые мы направляем друг на друга, в гоночных треках, которые замыкаются в круг, в каждой нашей поездке, в каждом событии нашего постоянно меняющегося мира. Понимание бесконечности — это основа всех вычислений, которые неразрывно связаны практически со всеми аспектами нашей жизни.

Конечно, можно наслаждаться жизнью, не имея ни малейшего понятия о вычислениях и расчетах, поэтому я вовсе не хочу сказать, что это главная причина, по которой я решила написать книгу о бесконечности. Математике обычно вменяют странную обязанность приносить практическую пользу. От поэзии, музыки или футбола никто этого не ожидает. Если вы спросите меня, для чего все это нужно, я отвечу вам: математика помогает вырабатывать электроэнергию, говорить по телефону, строить мосты, дороги, самолеты, городское водоснабжение, развивать медицину, спасать жизни. Я вовсе не хочу сказать, что математические знания помогут *лично вам* разобраться в подобных вещах, но они будут вам полезны, потому что помогают разобраться в них *кому-то другому*. Я размышляю о бесконечности не ради практической пользы и не ради нее я хочу рассказать вам эту историю.

Вы прекрасно проживете, зная о бесконечности не больше, чем вы знали о ней в пять лет. Однако для меня математика никак не связана с выживанием. Ее польза заключается в том, что математическое мышление и математические исследования проливают свет на сущность нашей мыслительной деятельности. Потому что, отступив на шаг в сторону, можно увидеть больше. Полет высоко в небе дал нам возможность путешествовать дальше и быстрее.

А теперь — в путь!

2 ИГРЫ С БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ

Математика лежит в основе множества разных вещей: языков, инструментов, игр. Возможно, школьное домашнее задание или экзамены кажутся мало похожими на игру, но для меня самое увлекательное в любом научном исследовании — это его начало, когда вы жонглируете разными мыслями в голове просто ради удовольствия. Это все равно что экспериментировать с разными ингредиентами на кухне просто ради удовольствия, а не для того, чтобы изобрести рецепт, чтобы потом приготовить по нему блюдо. А это, в свою очередь, гораздо увлекательнее, чем пытаться изобрести рецепт для *кого-то другого*, чтобы он смог при случае им воспользоваться.

Итак, начнем экспериментировать с нашими идеями, которые приходят в голову на тему бесконечности. Это поможет освободить мозг и разобраться, что мы уже знаем о бесконечности и какие можем сделать выводы. В математике для понимания сути вещей используется логика. Мы узнаем, что если мы будем недостаточно внимательны к деталям самого понятия «бесконечность», то логика заведет нас в очень странные места, куда мы вовсе не собирались идти. Математики начинают с того, что играют со своими мыслями о том, что возможно, что хорошо, а что плохо. Когда впервые был изобретен конструктор Лего, дизайнеры тоже сначала играли с его прототипами и лишь потом смогли создать удивительные модели.

Математические «игрушки» должны быть как Лего: достаточно крепкими, чтобы построить из них что-то, и универсальными, чтобы открывать множество возможностей для сборки. Если мы столкнемся с тем, что прототип бесконечности рушится, мы должны будем вернуться к доске с расчетами. В ходе наших первых игр с бесконечностью мы несколько раз будем возвращаться к доске с расчетами, поскольку будем выбирать разные пути, которые могут быть неверными, и логика будет рушиться. Когда мы в конечном итоге получим что-то прочное, оно может выглядеть не так, как мы ожидали. Возможно, мы придем к неожиданному результату, например к фантастическому утверждению, что существуют разные размеры бесконечности. Одни вещи могут быть более бесконечными, чем другие. Самое замечательное в любом путешествии — это открывать новое и неожиданное.

В предыдущей главе я привела некоторые первые утверждения о бесконечности.

Бесконечность продолжается вечно.

Означает ли это, что бесконечность — вид времени или пространства? Или, может, это длина?

Бесконечность больше самого большого числа.

Бесконечность больше всего, что мы можем себе представить.

Теперь бесконечность кажется скорее размером. Или же она представляет собой нечто абстрактное? Число, которое мы можем использовать для измерения времени, пространства, длины, размера и т. п. Кажется, наше следующее утверждение рассматривает бесконечность действительно как число.

Если прибавить к бесконечности единицу, она останется бесконечностью.

А это значит

$$\infty + 1 = \infty.$$

Это может показаться базовым принципом бесконечности. Если бесконечность — это самое большое, что существует в мире, то, прибавив к ней единицу, мы не сможем сделать ее больше. Или сможем? Что будет, если потом мы вычтем бесконечность с обеих сторон равенства? Если мы воспользуемся известным всем правилом зачеркивания и просто избавимся от бесконечности с каждой стороны, то получится

$$1 = 0.$$

А это катастрофа! Что-то явно пошло не так. Следующее утверждение поведет нас еще более неверным путем:

Если прибавить к бесконечности бесконечность, она останется бесконечностью.

Кажется, что имеется в виду:

$$\infty + \infty = \infty$$

или

$$2\infty = \infty.$$

А теперь, если мы разделим обе части равенства на бесконечность, оно будет выглядеть так, как если бы мы просто вычеркнули бесконечность с обеих сторон, оставив

$$2 = 1.$$

И снова катастрофа! Возможно, вы уже догадываетесь, что, если мы слишком упорно будем размышлять над последним утверждением, опять случится что-нибудь ужасное.

Если умножить бесконечность на бесконечность,
она останется бесконечностью.

Если мы запишем это следующим образом:

$$\infty \times \infty = \infty$$

и разделим обе стороны равенства на бесконечность, вычеркнув по бесконечности с каждой стороны, то мы получим:

$$\infty = 1$$

Это самый худший и неправильный ответ, который только можно получить. Бесконечность считается самым большим из всего, что существует в мире, и она точно не может быть равна такому маленькому числу, как 1.

Что же пошло не так? Проблема в том, что мы поступали с равенствами так, словно бесконечность — это обычное число, хотя мы не знаем, так ли это на самом деле. Первое, в чем мы убедимся в этой книге, — *это не так*. Определенно бесконечность не является обычным числом. Мы постепенно прокладываем путь к пониманию того, что за «зверь» эта бесконечность. Это путешествие, на которое у математиков ушли тысячи лет, включает в себя основные вехи: установление теоретических основ и расчеты для начинающих.

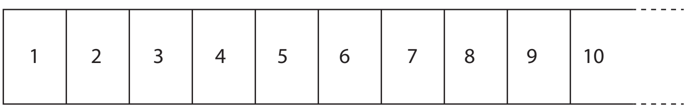
Мораль этой истории в том, что, несмотря на простоту идеи бесконечности, мы должны обращаться с ней крайне осторожно, чтобы не происходили странные вещи. Это только начало, и дальше будет еще более странно. Мы рассмотрим все виды странностей, которые происходят с бесконечностью и бесконечными множествами: отели с бесконечным количеством номеров, бесконечное количество пар носков, бесконечные тропинки, бесконечное печенье. Некоторые странности, как, например, $1 = 0$, не только странные, но и нежелательные. Поэтому мы будем стараться выстраивать наши математические размышления так, чтобы избежать их. Некоторые странности не противоречат логике, они просто противоречат обычной жизни. Они не просто не поддаются логике, они не укладываются в нашем воображении. Но иногда очень весело расширять границы воображения, как это делают писатели-фантасты, придумывая персонажей, которые живут бесконечно (бессмертие) или бесконечно быстро перемещаются в пространстве (телепортация). Это не просто весело, это может пролить неожиданный свет на нашу жизнь. Если фантастические герои бессмертны, то они перестают понимать, что конечность жизни — это то, что придает ей смысл.

БЕСКОНЕЧНЫЕ ОТЕЛИ

Обычно мы учим детей считать на примере предметов, которые они могут себе представить, или рассказываем им о числах, когда они едят что-то, что можно пересчитать, например клубнику или бобы. Или считаем каждую ложечку каши, которую они съедают.

Если мы попробуем считать каждую ложечку до бесконечности, на это уйдет довольно много времени. Вообще, позже мы действительно *займемся* чем-то вроде счета до бесконечности, но сначала мы поиграем с тем, что уже бесконечно, — с бесконечным отелем.

Представьте себе отель с бесконечным количеством комнат: комната номер 1, 2, 3, 4, ...

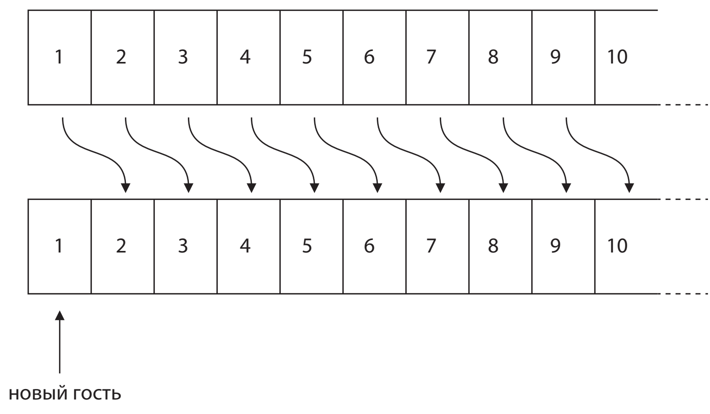


Теперь представьте, что вы управляющий таким удивительным отелем. Все комнаты заселены. Вы гребете деньги лопатой, каждый раз, когда приезжает новый гость и просит дать ему комнату. С одной стороны, отель полон, а с другой стороны, вы просто просите всех сдвинуться на один номер вперед...

Такой отель с бесконечным количеством номеров называется *отелем Гильберта* в честь придумавшего его математика Давида Гильберта[1], который наглядно продемонстрировал, какие

[1] Известен также как парадокс «Гранд-отель» — мысленный эксперимент, иллюстрирующий свойства бесконечных множеств. Впервые был сформулирован немецким математиком Давидом Гильбертом в 1924 году. — *Примеч. ред.*

необычные вещи могут происходить, когда начинаешь размышлять о бесконечности. В обычном отеле количество номеров ограничено. Если он полон, то этого никак нельзя изменить. Если приедет еще один гость, вы ничего не сможете для него сделать, разве что достроить этаж. В бесконечном отеле вы можете переместить гостя из номера 1 в номер 2, гостя из номера 2 — в номер 3, гостя из номера 3 — в номер 4 и т. д. Мы можем попросить гостя «номера n» переехать в «номер $n + 1$». Так как наш отель имеет бесконечное количество номеров, каждый n будет иметь $n + 1$, поэтому каждый гость получит новый номер. После этого освободится номер 1, куда можно заселить вновь прибывшего.



Это называется парадокс. Все аргументы логичны, но вывод противоречит здравому смыслу. Как мы можем разместить еще одного гостя в отеле, который уже полон? Единственная причина, по которой это противоречит здравому смыслу, заключается в том, что мы слишком привыкли к существованию отелей с *конечным* количеством комнат. Если мы не просто фантазируем, а всерьез размышляем о бесконечности, то нужно быть готовым к тому, что начнут происходить необычные вещи. И даже *крайне* необычные. В этом и есть прелесть бесконечности.

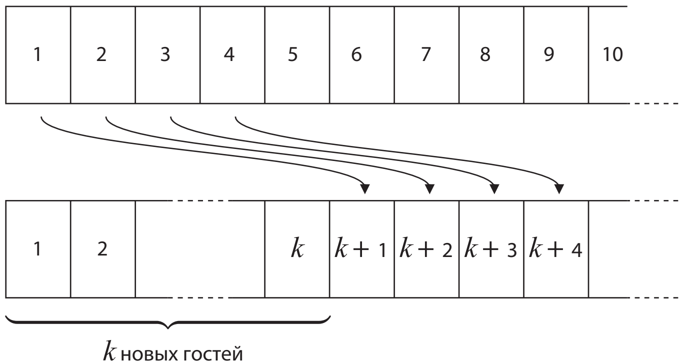
Все, что нам нужно сделать, — это встроить «бесконечность» в обычную математику, при этом больше ничего в ней не меняя, точно так же, как это делают писатели, пишущие книги, в которых один персонаж бессмертен, а весь остальной мир совершенно нормальный. Это ново и необычно, но основные факты нашего мира остались неизменными. В случае с бесконечностью и математикой это означает, что мы не хотим, например, чтобы вычисления с бесконечностью привели к результату $1 = 0$. Но, возможно, мы столкнемся с чем-то новым и неожиданным, таким, как этот бесконечный отель.

В рассуждениях об отеле Гильберта нет логических ошибок, он *не противоречит* математике, он противоречит лишь нашим интуитивным представлениям о нормальных отелях. Он заставляет шире взглянуть на такие вещи, которые становятся возможными благодаря существованию бесконечности.

ЧТО БУДЕТ, ЕСЛИ ПРИЕДУТ ЕЩЕ ГОСТИ

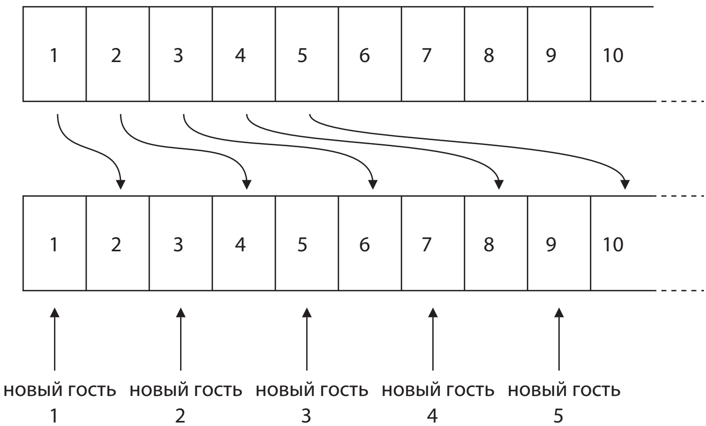
Что будет, если в отель Гильберта приедет еще один гость? Что ж, мы можем просто снова попросить всех сдвинуться на один номер вперед. Теперь гость, изначально проживающий в номере 1, переселится в номер 3, проживающий в номере 2 — переселится в номер 4, а проживающий в «номере n» — переселится в номер «$n + 2$». В мире математики мы не берем в расчет суматоху, которая поднимется при таком переезде. Мы просто рады тому, что каждому хватило номера.

Если в наш полный отель одновременно приедут два новых гостя, мы можем попросить всех сдвинуться сразу на два номера вперед. Само собой разумеется, что если прибудут три таких гостя, то мы попросим всех сдвинуться на три номера вперед. И так далее для любого конечного количества новых гостей.



Что будет, если приедет бесконечное количество новых гостей? Мы не можем просто попросить всех сдвинуться на бесконечное количество номеров вперед. Может показаться, что это возможно, потому что у нас бесконечное количество номеров, но давайте подумаем о конкретном госте, скажем, о госте из номера 1. В какой номер он должен заехать? В номер «1 + ∞»? Не выйдет, потому что такого номера у нас нет. У нас бесконечное количество номеров, но каждый из них пронумерован конкретной цифрой. Итак, для гостя из комнаты 1 нет комнаты «1 + ∞», в которую он мог бы переехать. А если мы не можем сказать ему, в какой номер он должен переселиться, мы застряли.

Тут нужно действовать умнее. (Когда имеешь дело с математикой, часто приходится действовать умнее и предусмотрительнее, поэтому она кажется такой сложной.) Мы можем попросить всех *удвоить* номер своей комнаты. Тогда гость из номера 1 переезжает в номер 2, гость из номера 2 переезжает в номер 4, а гость из номера n переезжает в номер $2n$. Таким образом, у нас остается бесконечное количество номеров в запасе. Откуда мы это знаем? Мы знаем, что все старые гости переехали в комнаты, номер которых вдвое больше прежнего, поэтому все они теперь живут в апартаментах с *четным* номером. Это значит, что все нечетные номера остались свободны, и их у нас бесконечное количество.



Надо сказать, что это идеально сработает при написании инструкции для каждого гостя. Мы можем привести длинный список номеров для переезда каждого гостя, но на это уйдет слишком много времени, вместо этого мы просто укажем формулу. Формулы применяются в математике для того, чтобы не нужно было мучиться с длинными списками. Вот так может выглядеть такая инструкция:

- Для старых гостей: если вы проживаете в номере n, пожалуйста, переезжайте в номер $2n$.
- Для новых гостей: если вы новый гость номер n, пожалуйста, переезжайте в номер $2n - 1$.

Теперь все знают, в какой номер им нужно переехать, и мы можем убедиться в том, что два гостя не получили один и тот же номер, разве что они ошиблись в расчетах.

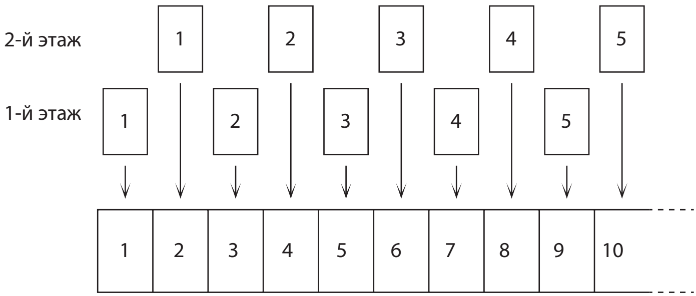
Возможно, вы заметили, что эта система сработает только в том случае, если все новые гости выстроятся в аккуратную очередь, в противном случае начнется математическая версия безудержного хаоса: каждый будет стараться проскользнуть вперед. У всех новых гостей должен быть свой порядковый номер, и тогда они смогут вычислить номер своей комнаты. Теперь сосредоточимся на идее очереди, так как ситуация будет усложняться.

ЧТО БУДЕТ, ЕСЛИ В ОТЕЛЕ БОЛЬШЕ ОДНОГО ЭТАЖА

Теперь давайте представим, что у нас есть бесконечный отель с двумя этажами. На каждом этаже есть бесконечное количество номеров. На первом этаже располагаются номера 1, 2, 3, 4, ... и т. д., и на втором этаже также располагаются номера 1, 2, 3, 4, ... и т. д. (Более разумно было бы пронумеровать номера на первом этаже 11, 12, 13, 14, ... и т. д., а на втором этаже 21, 22, 23, 24, ... и т. д., но не будем обращать на это внимание.)

2-й этаж	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1-й этаж	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

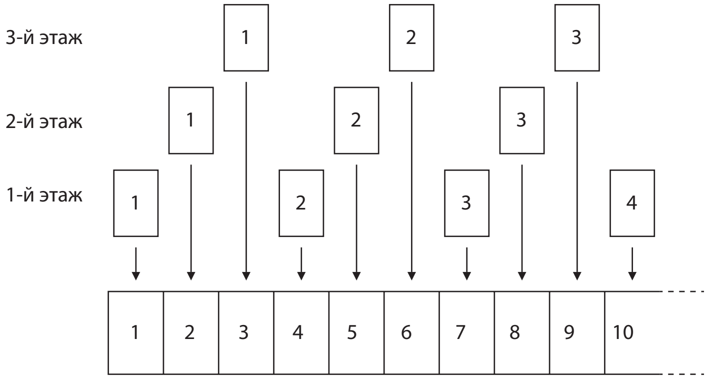
Что будет, если в отеле начнется пожар и нужно будет эвакуировать всех гостей в одноэтажный отель Гильберта через дорогу, который в данный момент случайно оказался свободным? Без проблем! Мы можем попросить всех с первого этажа удвоить номер своей комнаты и вычесть единицу, так они смогут переехать в номера 1, 3, 5, 7, ... так же, как в прошлый раз. Затем мы можем попросить всех гостей со второго этажа просто удвоить номер своей комнаты — так, как это сделали старые гости в предыдущем примере. Итак, они переезжают в номера 2, 4, 6, 8, ... и т. д.



Таким образом, мы поместили «бесконечность гостей» в «бесконечность комнат номер 2». Математически это то же самое, что и поместить бесконечное количество новых гостей в полный одноэтажный отель.

Этот общий метод сработает и с пожаром в трехэтажном отеле Гильберта, просто в этом случае нужно будет эвакуировать «бесконечность гостей номер 3», поэтому мы будем умножать номер каждой комнаты на 3.

- Гостей с первого этажа необходимо будет попросить умножить номер своей комнаты на 3 и вычесть 2. Так они переедут в номера 1, 4, 7, 10, ...
- Гостей со второго этажа необходимо будет попросить умножить номер своей комнаты на 3 и вычесть 1. Они переедут в номера 2, 5, 8, 11, ...
- Гостей с третьего этажа необходимо будет попросить просто умножить номер своего номера на 3. Они переедут в номера 3, 6, 9, 12, ...



Вы можете представить себе, как все гости стоят в трех очередях, каждый гость на своем этаже. Затем вы определяете номер для каждого по порядку, обслуживая по одному из каждой очереди. Если вы начнете с гостей из первой очереди и определите им всем номера по порядку, не оставляя свободных мест, то у вас закончатся свободные комнаты.

Мы можем быть уверены в этом при написании новой инструкции для гостей. Правильная инструкция будет выглядеть так:

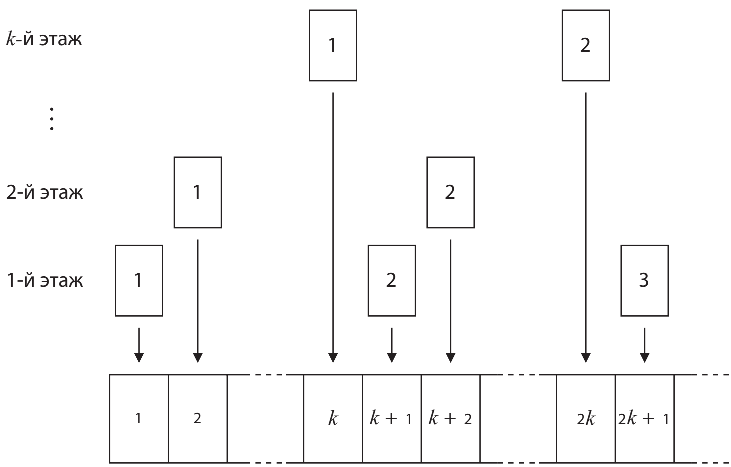
- Для гостей первого этажа: если ваш старый номер был n, пожалуйста, переезжайте в номер $3n-2$.
- Для гостей второго этажа: если ваш старый номер был n, пожалуйста, переезжайте в номер $3n-1$.
- Для гостей третьего этажа: если ваш старый номер был n, пожалуйста, переезжайте в номер $3n$.

Если мы начнем с гостей первого этажа и разместим их всех в номерах по порядку, то можно будет написать:

- Для гостей первого этажа: если ваш старый номер был n, пожалуйста, переезжайте в номер n.

Но остались ли теперь в отеле свободные комнаты для других гостей? Нет, их не осталось, потому что каждый номер n занят гостем из номера n с первого этажа старого отеля. Поэтому мы должны чередовать этажи или назначать номера гостям с первого этажа, оставляя при этом свободные места для гостей со второго и третьего этажа, а не заселять во все комнаты по порядку.

Я надеюсь, вы можете представить себе, как это будет выглядеть в отеле с конечным количеством этажей.



Но как насчет *бесконечного* количества этажей? Бесконечный небоскреб Гильберта с этажами 1, 2, 3, 4, ... и номерами 1, 2, 3, 4, ... на каждом этаже. Мы можем представить его как «бесконечное количество бесконечностей».

5-й этаж	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4-й этаж	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3-й этаж	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2-й этаж	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-й этаж	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Если в таком небоскребе начнется пожар, будет ли это наконец безвыходной ситуацией? Сможем ли мы эвакуировать всех гостей в обычный одноэтажный бунгало-отель Гильберта? (Возможно, сейчас концепция одноэтажного отеля Гильберта уже кажется вам будничной. Это часто происходит, когда мы раздвигаем границы нашего сознания, размышляя о все более экстраординарных вещах. Прежние из ряда вон выходящие вещи начинают казаться обычными. Я считаю это признаком того, что мы становимся умнее.)

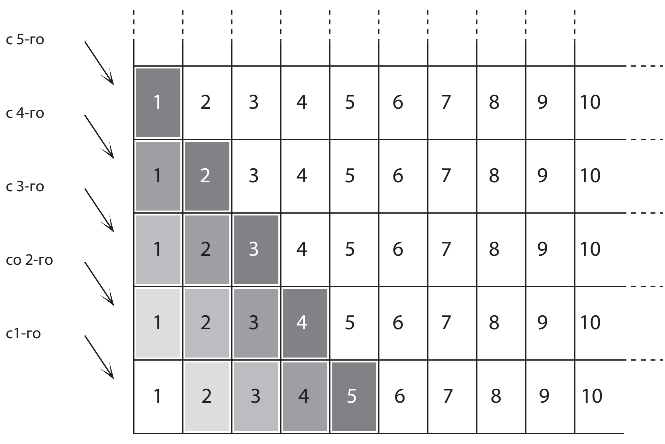
Вы можете подумать, что мы оказались в безнадежной ситуации, потому что мы не можем просто попросить всех «умножить номер своей комнаты на бесконечность» и потом что-то вычесть из полученного числа. Мы также не можем «чередовать очереди», ведь тогда случится следующее:

- Гость 1 с этажа 1 должен будет переехать в номер 1.
- Гость 1 с этажа 2 должен будет переехать в номер 2.

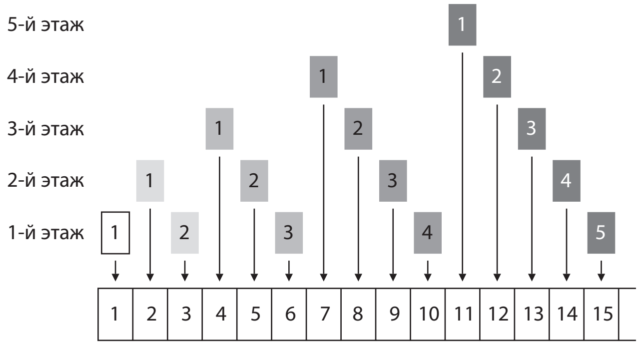
- Гость 1 с этажа 3 должен будет переехать в номер 3.
- ⋮
- Гость 1 с этажа *n* должен будет переехать в номер *n*.
- ⋮

Тогда не останется ни одной свободной комнаты для других гостей, потому что каждый номер *n* будет уже занят гостем 1 с этажа *n*.

Однако эта ситуация не безнадежна, мы просто должны действовать еще умнее. Представим, что все снова встали в очередь, но в этот раз попробуем взглянуть на эту ситуацию по диагонали.



Если мы начнем с угла и пойдем по диагонали, мы сможем снова разместить всех гостей. Несколько сложно облечь эту мысль в формулу, как мы делали с предыдущими, меньшими по величине отелями, проще представить это в виде иллюстраций:



Формула инструкции по переезду каждого гостя должна выглядеть примерно так: гость из номера *n* с этажа *k* должен переехать в номер... Вы наверняка сможете записать формулу на основе иллюстрации, но я думаю, что в данном случае иллюстрация гораздо нагляднее, чем формула.

Между прочим, наши рассуждения об отеле Гильберта выявили одну странность: существует столько же четных чисел, сколько и целых. Ведь если вы заполните свой отель, а потом попросите всех гостей удвоить номер своей комнаты, то сможете разместить еще ровно столько же человек, сколько вы разместили, если бы заселяли только четные номера. Тот факт, что после этого мы сможем разместить еще целые этажи в оставшихся нечетных номерах, означает, что количество всех нечетных чисел также равно количеству всех целых чисел. Это наводит на мысль о том, какими прекрасными филантропами мы могли бы стать, если бы у нас была бесконечная сумма денег. Мы отдавали бы на благотворительность бесконечно большие суммы, но у нас все еще осталось бы бесконечно много. Все, что нам нужно было бы сделать, — просто переводить четные фунты с нашего банковского счета на благотворительный счет, а все нечетные оставлять. Однако это не имеет никакого смысла, так как обычно деньги на банковских счетах не пронумерованы и указана только итоговая сумма. Итак, вместо этого вы можете перевести 1 фунт на благотворительный счет и 1 фунт на свой собственный отдельный счет, затем снова 1 фунт — на благотворительный счет и 1 фунт — на свой. Процесс медленный, поэтому лучше сразу перевести *миллиард фунтов* на благотворительный счет и *миллиард фунтов* — на собственный счет и продолжать в том же духе. Разумеется, это должно продолжаться вечно, что бы это ни значило.

Окрыленные этими успехами, вы, возможно, почувствуете себя непобедимыми и решите, что теперь можете эвакуировать *любой* отель в одноэтажный отель-бунгало Гильберта. Но это не так! Если у нас будет безумный отель Гильберта с комнатами, пронумерованными всеми рациональными *и* иррациональными числами («Здравствуйте, я остановился в комнате π!»), то мы потерпим поражение. Мы просто построили концепцию счета. Дальше, в главе 6, мы узнаем непостижимое: одни бесконечности больше других бесконечностей. Некоторые вещи просто не уместятся в отель Гильберта, как бы вы ни старались.

Легко набрести на новые идеи, легко обнаружить странное и даже магическое поведение обычных окружающих нас вещей, но при этом так трудно дать им точное определение. В этом и заключается одно из поразительных свойств бесконечности. Теперь мы знаем, что отели с бесконечным количеством комнат сильно отличаются от отелей с «нормальным» количеством комнат. Мы знаем, что в равенствах нельзя обращаться с бесконечностью точно так же, как мы обращаемся с «нормальными» числами. Кажется, что бесконечность не может быть «нормальным» числом. Но что это значит? Числа в математике похожи на элементарные строительные кирпичики. Но чем они являются на самом деле? Это один из простейших примеров того, как порой мы слишком привыкаем к существованию чего-либо, не зная, что это такое в действительности. Если мы будем утверждать, что бесконечность не является числом, то для начала нужно подумать о том, что такое число. Возможно, вы удивитесь, узнав, как много времени ушло у математиков на то, чтобы точно это определить. Это может показаться вам довольно глупым, ведь люди успешно пользуются числами уже тысячи лет, не понимая, чем они являются на самом деле. Неужели математики так бесполезны?

А дело тут вот в чем: обычные целые числа не так трудно понять. Даже если рассматривать их вместе с отрицательными числами и дробями, они не так сложны. Только когда вы дойдете до промежуточных значений дробей, иррациональных чисел, тогда задача станет действительно заковыристой. Не знать точного определения целых чисел — не так страшно, а вот не знать, что такое иррациональные числа, — это уже проблема. Преодоление этого препятствия привело к бурному развитию математических вычислений, а это вызвало мощный скачок в науке, медицине и инженерном деле в последние два столетия. Но чтобы еще лучше понять иррациональные числа, мы должны лучше понимать все числа, даже самые простые. Чтобы построить добротное прочное здание, мы должны построить фундамент, и если этот фундамент будет шатким, то нам останется только вернуться к началу пути и привести его в порядок.

3

ЧТО НЕ ЯВЛЯЕТСЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬЮ?

Когда у ребенка первый раз получается взобраться на нижнюю ступеньку лестницы, этот процесс безумно увлекает его. Теперь нужно преодолеть еще одну ступеньку, затем еще одну и еще одну. Вот он оказывается все выше и выше. Возможно, получится даже добраться до следующего этажа, если кто-нибудь из коварных взрослых не снимет его с лестницы, как это обычно и бывает. Мне нравится думать, что все целые числа впервые были выявлены, когда кому-то потребовалось прибавлять единицу. Но можно ли дойти таким образом до бесконечности?

Это один из аспектов большого вопроса: бесконечность — это число или нет? Этот вопрос напоминает мне скандально известный судебный процесс о том, являются ли Jaffa Cakes[1] кексами или печеньем (по каким-то неизвестным мне причинам кексы и печенье в Великобритании облагаются разными налоговыми ставками). В этом деле невозможно разобраться, не решив сначала, что такое «кекс», а что такое «печенье». Являются ли Jaffa Cakes печеньем из-за своего размера и формы (они маленькие и плоские) или они кексы из-за своей структуры (они рыхлые и воздушные) и своего поведения (в процессе хранения они становятся твердыми, а печенье

[1] Марка сладкой выпечки в Великобритании. — *Примеч. пер.*

стало бы мягче)? Суд предпочел структуру и поведение, в результате Jaffa Cakes были классифицированы как «кексы» и получили более низкую налоговую ставку.

А как насчет бесконечности? Представим себе судебный процесс, на котором решается судьба бесконечности: число это или нет. Какие определяющие свойства чисел мы будем при этом брать в расчет? Именно об этом мы будем размышлять в этой главе. Существует множество разных видов чисел, начиная с простейших — 1, 2, 3 и т. д. и заканчивая отрицательными числами, иррациональными числами, дробями и многими другими причудливыми и удивительными вещами. Мы будем поочередно исключать возможность того, что бесконечность относится к одному из видов чисел.

Возможно, вам интересно, почему мы не можем просто объявить, что бесконечность является числом, и покончить с этим делом. Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны понять, как работает математика. Примерно так: ищешь неизвестное слово в словаре, а в его определении — другое незнакомое слово, ищешь его, а в определении снова незнакомое слово. Чтобы понять бесконечность — нужно понять числа. Чтобы понять числа — нужно понять математику. А теперь внимание! Чтобы понять математику — нужно понять логику.

Математика изучает все с помощью логики, поэтому она может изучать только то, что подчиняется законам логики. Если мы хотим дать определение неким математическим объектам, то у нас есть два пути. Мы можем *классифицировать* либо *охарактеризовать* их. Можно объяснить, что такое птицы, написав невероятно длинный список всех существующих в мире птиц. А можно просто сказать: «Птицы — это существа с перьями, крыльями и клювом». Второй способ не только быстрее, но и позволяет включить в определение птиц, которые нам неизвестны. Кроме того, если вы встретите совершенно новое существо, вы сможете определить, является оно птицей или нет.

Вот математический пример. Мы можем сказать: «Платоновы тела — это тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр». А можно сказать по-другому: «Платоновы тела — это выпуклые тела, в которых стороны, грани и углы равны», или еще более точно: «Это правильные выпуклые многогранники с подобными сторонами, являющиеся правильными многоугольниками, с равным количеством сторон, сходящихся в их вершинах». В первом случае мы просто перечислили их, и это вполне возможно, потому что их не так много. А во втором случае мы описали свойства, по наличию которых можно определить, является тело платоновым или нет. При этом не обязательно знать, что такое икосаэдр[1].

Некоторые математические объекты трудно перечислить, потому что их слишком много — как и птиц. Например, мы не можем перечислить все существующие в мире числа, потому что их бесконечно много. Точно так же мы не можем перечислить все существующие в мире простые числа, но уже по другой причине: мы не знаем, что это такое. (Но если бы мы это знали, то все равно не смогли бы их перечислить, потому что их все-таки бесконечно много.) В случае с простыми числами мы можем охарактеризовать их как «любое число, кратное только 1 и самому себе» (а 1 не считается простым числом), затем наша задача будет заключаться в том, чтобы написать список всех чисел, у которых есть эти свойства.

Если мы хотим продемонстрировать, что некий объект не относится к конкретному типу математических объектов, то у нас для этого тоже есть два способа. Мы можем либо проштудировать весь список математических объектов этого типа, чтобы убедиться, что его там нет, либо обратить внимание на определяющие свойства объектов этого типа, чтобы указать, что данный объект ими не обладает. Например, мы легко можем проверить, что сфера не является платоновым телом, просто

[1] А если вам все-таки интересно, то икосаэдр — это правильный выпуклый многогранник с 20 гранями. — *Примеч. ред.*

потому, что ее нет в списке платоновых тел. Но мы не можем проверить, является ли число простым, поискав его в списке простых чисел, просто потому, что такого списка не существует. Вместо этого мы должны посмотреть, ведет ли оно себя как простое число: является ли оно кратным 1 и самому себе. Например, 6 также кратно 2, поэтому мы знаем, что оно не может быть простым числом. Если мы обнаружим в лесу новое существо и захотим определить, можно считать его птицей или нет, то для этого мы должны будем оценить, обладает ли оно свойствами, присущими птицам, или нет. В определенном смысле можно сказать, что задача орнитологов — сформулировать определяющие свойства птиц, а задача математиков — сформулировать определяющие свойства чисел.

Существуют списки простых чисел до определенного значения. Поэтому если ваше число не слишком большое, то вы действительно можете проверить по списку, является оно простым или нет. Однако гораздо эффективнее сделать это с помощью компьютера. Это лучше, чем хранить огромные списки простых чисел на случай, если вдруг кто-то захочет воспользоваться ими. Самое большое простое число, известное на момент написания этой книги, имеет почти 13 миллиардов цифр. Это число такое длинное, что его практически невозможно хранить, не говоря уже обо всех других простых числах, которые идут до него. Поэтому никто не ведет список всех известных простых чисел.

Существует множество разных видов чисел, как и множество разных видов птиц. Одни встречаются повсеместно, другие — редко. Одни виды знают все, другие — малоизвестны. Далее мы увидим, что те числа, с которыми мы сталкиваемся чаще всего, не обязательно являются самыми многочисленными. Начнем с самых обычных чисел. С тех, которые сразу приходят в голову: с чисел, которыми мы считаем.

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Это самый простой вид чисел. Дети знакомятся с этими числами, когда учатся считать предметы: 1, 2, 3, 4 и т. д. В математике такие числа называются *натуральными*, так как это самое естественное, что можно себе представить. Мне кажется, что я довольно точно описала их: мы просто считаем 1, 2, 3, 4 и продолжаем дальше. Но если мы еще не умеем считать, откуда нам знать, что должно быть дальше? Откуда нам знать, что следующее число будет 5, а не $4\frac{1}{2}$? Откуда нам знать, что $4\frac{1}{2}$ не одно из натуральных чисел?

Собственно, это довольно сложный вопрос. Мы знаем, что следующее число будет 5, просто потому, что принято так считать. Но *что такое* 5? Как можно назвать все натуральные числа, не перечислив их?

Математики в основном просто говорят, что натуральные числа — это числа, которые мы получаем, считая предметы. Тут требуется уточнение, потому что мы должны убедиться, что это утверждение подчиняется законам логики. Но утверждение «числа, которые мы получаем, считая предметы» не подчиняется законам логики, так как на самом деле мы не знаем, что значит «считать предметы». Чтобы превратить эти рассуждения в нечто математическое, нужно сделать их менее пространными.

Вместо «считать» скажем «прибавлять 1». Натуральные числа — это то, что мы получим, если будем постоянно прибавлять 1. Но с чего начать? Необходимо с чего-то начать, иначе мы не сдвинемся с места. Поэтому начинаем с 1.

Натуральные числа — это то, что мы получим, начав с 1 и продолжив постоянно прибавлять 1. Существуют аргументы, доказывающие, что 0 тоже является натуральным числом[1], но

[1] В российской математической традиции 0 не относится к натуральным числам. В международной математической литературе в некоторых случаях 0 считается натуральным числом. В частности, в аксиомах

это не имеет большого значения. Мы могли бы точно так же начать с 0 и дальше постоянно прибавлять 1.

Некоторых людей чрезвычайно волнует вопрос, является 0 натуральным числом или нет. Я думаю, что дело тут лишь в терминах и названиях. С точки зрения математики вы можете начать считать там, где хотите. Некоторые математики полагают, что хорошо будет начать с 0, потому что 0 — это очень нужное число. Не думаю, что кто-то будет спорить с тем, что 0 нужен. Однако некоторые действительно не соглашаются назвать 0 одним из натуральных чисел. Я думаю, что это вопрос терминологии, а не математики. Но даже это утверждение спорно. Некоторые ученые считают, что вопросы терминологии являются неотъемлемой частью математики. Лично для меня очевидно, что рассуждения о том, можно ли назвать 0 натуральным числом, в конечном итоге отдаляют нас от математики. Однако некоторые люди считают их крайне важными, и, скорее всего, я получу гневные электронные письма по этому поводу. Я уже встречала людей, которые срывались на крик, когда речь заходила об этом.

Мы решили, что натуральные числа — это «то, что мы получим, начав с 1 и дальше постоянно прибавляя 1», значит, фактически они будут выглядеть так:

$$
\begin{array}{l}
1 \\
1+1 \\
1+1+1 \\
1+1+1+1 \\
1+1+1+1+1 \\
\vdots
\end{array}
$$

Пеано и в работах французских математиков под псевдонимом Никола Бурбаки 1 заменяется на 0. — *Примеч. ред.*

Довольно утомительно каждый раз называть числа таким образом, поэтому дадим им новые имена, что-то вроде кратких обозначений. Так, вместо «один плюс один плюс один плюс один» будем говорить «четыре». Так гораздо короче. Математический язык — это всего лишь ловкий способ проще говорить о громоздких вещах. Но на первый взгляд он может показаться запутанным и огромным набором сленговых выражений. Возможно, слова «один, два, три, четыре» не кажутся вам похожими на сленг. Ведь сленг всегда становится привычным, когда используешь его достаточно долго. Если ваша работа похожа на мою, то вначале вас, скорее всего, тоже сбивали с толку акронимы, которые все вокруг постоянно употребляют. Но уже через несколько месяцев вы тоже начинаете бойко использовать их в разговорах с другими людьми.

Когда вы выходите на новую работу, вам могут выдать полезный список принятых в компании сокращений, к которым нужно привыкнуть. К сожалению, мы не можем составить список всех кратких обозначений для каждого возможного числа. Но мы можем разработать *принцип* образования новых обозначений на основе старых. Возможно, вы помните его из уроков иностранного языка. Как правило, сначала нужно выучить числа от одного до десяти наизусть, а потом примерно в промежутке между десятью и двадцатью возникает логическая схема. В английском языке это происходит после fifteen (пятнадцать), дальше идет six*teen (шестнадцать)*, seven*teen* (семнадцать), eight*teen* (восемнадцать) (только без лишней буквы «t»), nine*teen* (девятнадцать). (Вы можете утверждать, что thirteen (тринадцать), fourteen (четырнадцать) и fifteen (пятнадцать) подходят под эту схему, — да, это так, просто написание немного странное.) В испанском языке вы тоже заметите подобную схему, начиная с шестнадцати и дальше. А во французском языке нужно будет ждать до семнадцати, в немецком — уже с тринадцати, а в кантонском[1] — сразу

[1] Диалект, распространенный на юге Китая. — *Примеч. пер.*

с одиннадцати, так как числа там называются дословно «десять-один, десять-два, десять-три, десять-четыре...».

Если вы научились считать до 20, то дальше, как правило, остается просто выучить слова 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 и 100. Далее числа следуют логической схеме. В разных языках с большей или меньшей степенью строгости. В английском она довольно очевидна, но числа порой имеют странное написание. В немецком языке логическая схема довольно четко применима после 20. А во французском существует феномен, который сбивает с толку всех иностранцев: начиная с 70 и дальше нужно считать дословно следующим образом: «шестьдесят-десять, шестьдесят-одиннадцать, шестьдесят-двенадцать» (за исключением швейцарского варианта французского языка, где есть добросовестное слово «*septante*» (семьдесят)) — и точно так же с 90 и дальше.

Тут кантонский диалект снова вызывает меньше всего затруднений, так как 20, 30, 40 и далее звучат просто как «два-десять, три-десять, четыре-десять». А преподаватель хинди Джейсон Грунебаум рассказывал мне, что в хинди есть совершенно разные названия для всех чисел от 1 до 100. Он всегда предлагает зачет автоматом тому студенту, который назовет их все по памяти.

После «ста», вы обычно просто должны выучить слова для различных порядковых величин: тысяча, миллион, миллиард, триллион. (В кантонском диалекте есть специальное слово для обозначения десяти тысяч, а вот для миллиона нет, поэтому чтобы сказать «миллион», нужно сказать «сто десятков тысяч». От этого у меня голова идет кругом.)

А потом слова постепенно заканчиваются, но заканчивается также и необходимость в таких больших числах. Как часто вам требуются специальные обозначения для чисел более ста тысяч, миллиона, миллиарда, триллиона? Мне они вообще не нужны, за исключением экспрессивных преувеличений или когда речь идет о затратах на американское университетское образование — «зиллион[1] долларов» или, возможно, даже «габиллион[2] долларов».

Такие числа существуют, просто нет слов для их обозначения. Точно так же, как животные, которые тоже существуют независимо от того, дал человек им названия или нет. Возможно, лучшей аналогией будет планета Нептун, существование которой было вычислено математически еще до того, как она была открыта и названа. Мы знаем, что числа больше триллиона существуют уже потому, что мы можем продолжать прибавлять один бесконечно. Есть простой способ доказать, что существует больше чисел, чем их названий:

Представьте, что «столько-то» — это самое большое число, для которого у нас есть название. Но ведь мы всегда можем прибавить один к «столько-то», и оно станет еще больше.

Это напоминает мне очень трогательную сцену из фильма «*Быть и иметь*»[3] об уникальном учителе Джорджесе Лопесе и его деревенской школе во Франции, состоящей из одного-единственного класса, в котором учатся мальчики от четырех до десяти лет. Один непослушный маленький мальчик перепачкал руки чернилами. Лопес ведет его мыть руки, но вместо того, чтобы ругать, он начинает спрашивать о числах. Учитель несколько раз задает один и тот же вопрос: какое число самое большое. Маленький мальчик всегда отвечает однозначно, он уверен в том, что знает самое большое число. Сначала он думает, что сто — совершенно точно самое большое число. Тогда

---

[1] Псевдосуществующее числительное, невообразимо много — *Примеч. пер.*

[2] Псевдосуществующее числительное, невообразимо много — *Примеч. пер.*

[3] Французский документальный фильм «Être et avoir» 2002 года. — *Примеч. пер.*

учитель мягко спрашивает, сколько будет сто плюс один и так далее. Это продолжалось до тех пор, пока глаза мальчика не расширились от удивления, потому что он понял, их разговор может продолжаться вечно.

(К сожалению, громадный успех фильма вылился в судебное разбирательство, потому что создатели фильма якобы заработали огромные деньги на экстраординарном методе обучения мистера Лопеса. Мнения общественности насчет того, сколько из них причитается учителю, разделились. Суд принял решение, что «не особо много». Некоторые обвиняли мистера Лопеса в жадности, ожидая от него самоотверженности. Это меня очень расстраивает, потому что люди считают, что такой увлеченный, меняющий судьбы учитель не заслуживает большой суммы денег.)

БЕСКОНЕЧНОСТЬ — ЭТО НЕ НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО

Мы узнали, что все натуральные числа можно получить, начав с 1 и дальше постоянно прибавляя 1. Но дойдем ли мы так до бесконечности? Чтобы понять это, нужно дать точное определение натуральным числам.

Натуральные числа — это все числа, которые равны

* 1 или
* $n + 1$, где n — натуральное число.

Таким образом, 2 — это натуральное число, потому что $1 + 1 = 2$. 3 тоже является натуральным числом, потому что $2 + 1 = 3$, а 2 — это натуральное число. Чтобы доказать, что 10 — это натуральное число, нам нужно начать с 1 и прибавить единицу 9 раз. Это немного утомительно, но в конечном итоге цель будет достигнута.

Сможем ли мы аналогичным образом доказать, что ∞ — это тоже натуральное число? Очевидно, что ∞ не 1, так что первый пункт исключается. Как насчет второго пункта? Существует ли такое натуральное число n, чтобы $(n + 1)$ было равно ∞? Трудность здесь в том, что n в таком случае должно быть $(\infty - 1)$, а $(\infty - 1)$ — это по-прежнему ∞. Поэтому ∞ является натуральным числом, только если ∞ — это натуральное число. Получился замкнутый круг, который ничего не доказывает.

Несмотря на всю проделанную работу, мы все еще не смогли доказать, что бесконечность — это натуральное число. Мы только убедились в том, что это вовсе не *очевидный* факт. Теперь давайте остановимся на минуту и задумаемся: мы пытаемся сделать невозможное, ведь нам неизвестно, что такое бесконечность. А если мы не знаем, что это, то как мы можем доказать, чем оно не является?

Или все-таки можем?

Мы не можем дать точное определение бесконечности, но нам известны некоторые ее свойства, без которых в определении никак не обойтись:

- если прибавить к бесконечности 1, это не сделает ее больше;
- если прибавить к бесконечности бесконечность, это не сделает ее больше;
- если умножить бесконечность на натуральное число, это не сделает ее больше.

Теперь давайте докажем, что нет натурального числа, которое вело бы себя подобным образом.

Я часто говорю, что математические объекты возникают тогда, когда мы начинаем думать о них, и существуют до тех пор, пока не вызывают в нашей голове противоречий. Мы «представили» нечто под названием *бесконечность*. Мы также «представили», что это нечто ведет себя понятным нам образом. Чтобы доказать, что бесконечность действительно существует, мы должны доказать, что она не вызывает противоречий. К сожалению, противоречия *есть*! Попробуем пойти от обратного: предположим, что бесконечность является натуральным числом. Мы быстро почувствуем — что-то здесь не так!

Нам известны следующие свойства натуральных чисел:

- От перемены мест слагаемых сумма не меняется. Например, $3 + 2 = 2 + 3$.
- Натуральные числа можно вычитать из натуральных чисел (при условии, что вы будете достаточно внимательны, чтобы не получить отрицательные значения, потому что мы еще не познакомились с отрицательными числами).
- Если произвести одно и то же математическое действие в обеих частях равенства, оно остается верным.

Теперь давайте проверим, обладает ли бесконечность этими свойствами. Для этого возьмем уже известное нам утверждение о бесконечности:

$$1 + \infty = \infty.$$

Вычтем ∞ слева и справа и получим

$$1 = 0.$$

Это, разумеется, неверно! Мы проверили только одно свойство натуральных чисел: утверждение о том, что можно произвести одно и то же математическое действие в обеих частях равенства, и равенство останется верным. Мы получили ложное равенство. Логический вывод следующий: *после вычитания бесконечности с обеих сторон равенство не будет верным*. А так как мы знаем, что после вычитания одного и того же натурального числа с обеих сторон равенство должно оставаться верным, то мы приходим к логическому заключению: бесконечность не является натуральным числом.

А если попробовать наоборот?

Представьте себе, что, играя с маленьким ребенком, вы говорите ему: «Ты мой маленький зайчонок!» Он возражает: «Никакой я не зайчонок!» Многие взрослые любят вести с детьми милые и несколько глупые диалоги, поэтому вы настаиваете: «Конечно же, ты зайчонок!» Тогда малыш протестует и приводит следующий аргумент: «Но ведь у меня нет пушистого хвостика!»

По сути, он просто обратил внимание на одно маленькое противоречие:

> Если бы я был зайчонком,
> У меня был бы пушистый хвостик.
> Но у меня нет пушистого хвостика,
> Значит, я не зайчонок.

Аналогичным образом мы доказали, что бесконечность не является натуральным числом.

> Если бы бесконечность была натуральным числом,
> То мы могли бы вычесть ее с обеих сторон равенства.
> Но мы не можем вычесть ее с обеих сторон равенства,
> Поэтому бесконечность не натуральное число.

Это не означает, что бесконечность вообще не является числом. Это лишь означает, что бесконечность не является *натуральным числом*.

Недавно меня попросили рассудить спор между моим четырехлетним племянником и его лучшим другом. Лучший друг утверждал: «Бесконечность — это не число, потому что так говорит мой папа, а мой папа ученый, и он знает все». Мой племянник разумным образом принялся опровергать то, что было проще всего опровергнуть, — заявление о том, что папа его лучшего друга знает все. А я принялась убеждать моего племянника в том, что математики знают больше, чем ученые.

4 БЕСКОНЕЧНОСТЬ СНОВА УСКОЛЬЗАЕТ ОТ НАС

«Мы уже приехали?» — снова и снова спрашивает ребенок во время длинной поездки. Дети воспринимают время иначе, поэтому десять минут могут показаться им ужасно долгими. Это довольно утомительно для взрослых, особенно если поездка занимает несколько часов.

Недавно я плавала вдоль берега озера Мичиган. Я гуляла по песчаным дюнам и потом решила вернуться на пляж вплавь. Береговая линия изгибалась и пропадала из виду, поэтому несколько раз мне казалось, что я уже почти добралась до «пляжа моего отправления», но когда я приближалась, изгиб открывал новую часть берега. В конце концов я начала напевать про себя, пытаясь отвлечься и гадая, как долго мне еще плыть.

В математике иногда тоже кажется, что мы идем, но никак не можем добраться до цели. Каждый раз обнаруживается что-то новое, открывается что-то еще неизведанное. Трудно проследить, откуда мы пришли. Когда мы разобрались в чем-то, то уже сложно вспомнить, с чего мы начали и как непросто нам это далось. Я часто думаю, что не делаю никаких успехов в математике, потому что все, что я уже знаю, кажется мне легким, а все, чего я еще не знаю, — трудным (иначе я уже давно бы это знала).

Давайте продолжим наше путешествие в мир чисел. Мы познакомились с натуральными числами, но до бесконечности пока еще не добрались. После того как ребенок научился считать, он сразу же пытается научиться «считать назад», то есть вычитать. Дети узнают все больше и больше о числах, одновременно знакомясь с разными видами чисел. В некотором роде они следуют историческому развитию математики, и тысячелетия сжимаются в несколько школьных лет. Такова сила образования!

Теперь мы должны подвергнуть все виды чисел перекрестному допросу, чтобы понять, является ли бесконечность одним из них или нет. Часто бывает, что подобный уровень понимания вообще не нужен до тех пор, пока вы не начинаете задавать по-настоящему сложные вопросы. Один из таких сложных вопросов: «Что такое бесконечность?» Он может показаться бессмысленным, сухим и занудным, не стоящим таких долгих размышлений. Но лично я считаю, что этот вопрос многое объясняет. Он способен объяснить, как функционируют понятия. Когда я пробую в ресторане вкусное блюдо, мне сразу же становится интересно, как оно было приготовлено. Когда меня приглашают отправиться в захватывающее путешествие, я сразу же хочу увидеть на карте то место, куда мы собираемся ехать. То же самое я чувствую, когда пытаюсь разобраться в том, что такое числа. Далее мы увидим, что каждый новый вид чисел образуется из уже изученного нами вида чисел, к которому добавлено стремление к большей математической тонкости или выразительности.

НОВЫЕ ЧИСЛА ИЗ СТАРЫХ ЧИСЕЛ

Математики любят строить новое из старого, по возможности не прикладывая к этому дополнительных усилий. Можно сказать, что это лень, но мне нравится называть это экономией умственных усилий. Наш мозг — *конечен*, возможности нашего мозга — конечны, а значит, мы должны беречь их для такого момента, когда они действительно потребуются.

Есть такая шутка про математиков:

> *Дайте математику кастрюлю и яйцо и попросите его сварить яйцо. Он наполнит кастрюлю водой и сварит яйцо. Теперь дайте ему кастрюлю, полную воды, и снова попросите сварить яйцо. Он выльет воду и скажет: «Я упростил задачу до предыдущей».*

Строительство нового из старого — это не только сохранение умственных усилий, но и другие преимущества. Это позволяет нам увидеть связи между различными вещами и понять, как они могут дополнять друг друга. Представьте себе рецепт «Аляски»[1], в котором будет написано: смешать бисквит с мороженым и меренгой, но не будет сказано, что должно получиться в итоге. Такой рецепт будет понятен, только если вы уже знаете, как должна выглядеть «Аляска».

Начав с натуральных чисел, мы постепенно научимся строить все более сложные виды чисел. Они будут становиться все менее «натуральными», пока не станут настолько «ненатуральными», что их можно будет назвать «иррациональными», или «мнимыми»[2]. Математики любят называть новые понятия словами из повседневной жизни, которые дают некоторое представление о характере этих понятий. Придание абстрактному понятию определенного, подходящего ему характера делает его понятнее. Название «мнимые числа» ласкает слух, а словосочетание «примарный идеал» напоминает мне о сочном куске говядины. Хотя, возможно, что так кажется только мне. (Примарные идеалы не имеют никакого отношения к тому, о чем я сейчас говорю, просто название звучит вкусно.)

---

[1] Торт-безе с мороженым. — *Примеч. пер.*

[2] Мнимые числа также называются комплексными числами. — *Примеч. пер.*

Следующий вид чисел, который мы сконструируем из натуральных чисел, называется *целыми числами*. Этот вид чисел включает в себя все натуральные числа и все их отрицательные версии (в том числе ноль, если раньше мы не отнесли его к натуральным числам). Целые числа возникают из нашего стремления к вычитанию (если у нас, конечно, есть такое стремление). Возможно, в детстве, когда вы еще не знали отрицательных чисел, вы периодически приходили в замешательство, решая примеры. Вас удивляло, что складывать можно *любые числа*, по крайней мере теоретически, а вычитать разрешается только меньшие числа из бо́льших. (Когда я была маленькой, я приходила в замешательство почти от всего.) Математиков это тоже удивляло. Чтобы вычитать все из всего, нам требуются отрицательные версии натуральных чисел, и так мы получаем целые числа. Целые числа «лучше» натуральных, потому что с ними можно делать больше всяких разных штук.

Математика часто развивается благодаря чувству замешательства, которое испытывают математики, когда не могут что-то сделать в существующем мире. Тогда они изобретают новый мир, в котором это становится *возможным*. Мне нравится думать, что мы — непримиримые нарушители правил. Как только нам встречается правило, утверждающее, что что-то невозможно, мы сразу же хотим проверить, сможем ли мы создать мир, в котором это станет возможным. Это противоречит расхожему мнению о том, что математика — это предмет, в котором нужно следовать целой куче правил.

Первое, что нам потребуется в мире целых чисел, — это ноль (если мы еще не причислили его к натуральным числам). Ноль — это особенное число, которое примечательно тем, что «если вы прибавляете его к чему-то, то ничего не происходит».

$$0 + 1 = 1$$
$$0 + 2 = 2$$
$$0 + 3 = 3$$
$$\vdots$$
$0 + n = n$, где n может быть любым числом.
$$\vdots$$

Следующее, что нам потребуется, — это возможность повернуть вспять, или «отменить» сложение. Это похоже на возврат покупки. Я всегда нервничаю, если знаю, что нельзя передумать и вернуть купленную вещь. Это не значит, что я *всегда* все возвращаю. Меня просто успокаивает мысль, что так можно.

Как передумать и «вернуть» число после сложения? С помощью вычитания! Или другим способом — прибавив к нему отрицательное число. Это все равно что вернуть покупку в магазин и получить чек с отрицательной суммой. С вашей карты будет списана отрицательная сумма, что на самом деле означает, что отрицательная сумма будут вычтена из счета за покупку.

Важно понимать, что вычитание имеет здесь большое значение. Именно оно создавало нам проблемы с бесконечностью в последней главе. Тогда мы выяснили, что если вычесть бесконечность с обеих сторон равенства, то оно станет ложным. Это ключ к разгадке вопроса, чем может быть бесконечность, а чем она быть не может. Нужно суметь расшифровать его.

На языке математики это звучит так: «У каждого числа есть противоположная величина». Она «отменяет» первоначальное число, то есть возвращает нас к 0. Как вернуться от 1 обратно к 0? Нужно вычесть 1. Или пойти другим путем — прибавить к нему -1. Как вернуться от 2 обратно к 0? Нужно прибавить -2. Как вернуться от n обратно к 0? Нужно прибавить $-n$.

Требовать, чтобы каждое число имело свою противоположную величину, — все равно что требовать, чтобы у всех ваших лего-человечков были шлемы. Если вы избалованный ребенок, то родители сразу же купят вам шлемы для всех ваших лего-человечков. Одна из веселых сторон математики, которая недостаточно широко известна: не нужно быть избалованным ребенком, чтобы всегда получать желаемое. Вы захотели получить противоположные величины для всех чисел? Оп! И вы получили противоположные величины для всех чисел! Это делает математические исследования очень увлекательными. Вы можете получить все, о чем только подумаете. Единственное препятствие заключается в том, что вам нужно будет учесть все логические последствия вашей новой игрушки. Если вы избалованный ребенок и захотели льва, то ваши родители могут купить вам его, однако этот лев вас съест. Если вы занимаетесь математическими исследованиями и захотели, чтобы 0 был равен 1, — пожалуйста! Но все остальное тоже будет равно 0. И ваш мир будет уничтожен, потому что вас съест голодный математический лев.

Если вам хочется, чтобы 0 был равен 2 или какому-то другому числу, это возможно, но при этом вы попадете в замкнутый круг, называемый модулярной арифметикой[1]. Если мы захотим, чтобы 0 = 12, то как мы будем определять время? Если мы захотим, чтобы 0 = 360, то как мы будем определять направление по компасу?

Будучи избалованными математиками, мы можем захотеть, чтобы у всех чисел были противоположные величины. Оп! И все числа получают противоположные величины! Легко и просто. Больше ничего не поменялось, мы просто получили противоположные величины. Они называются целыми чис-

---

[1] Модулярная арифметика часто изучается в школе как *арифметика часов*, или *арифметика вычетов*. В ней используются целые числа по модулю *n*. Модулярная арифметика широко применяется в криптографии. — *Примеч. ред.*

лами[1]. Мы знаем, что они собой представляют, поэтому можем сказать, что целыми числами являются:

- 0;
- любое натуральное число n;
- $-n$, где n — это любое натуральное число.

Это можно записать более наглядно:

$$\ldots -4 - 3 - 2 - 2\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4 \ldots$$

Вычитание 4 технически можно рассматривать как прибавление –4. Звучит немного витиевато, но математики, наоборот, считают, что так *проще*, потому что не требуется изобретать новое действие (вычитание), достаточно применить старое (сложение) к новым числам.

Относится ли бесконечность к целым числам? Не похоже. Но знаем ли мы это наверняка? Это можно доказать тем же самым противоречием, как и в случае с натуральными числами. Ведь целые числа и натуральные числа подчиняются одному и тому же правилу: при вычитании одного и того же числа с обеих сторон равенства равенство остается верным. Мы знаем, что с бесконечностью это не работает, поэтому бесконечность нельзя назвать целым числом. А значит, наше расследование продолжается.

Чисто технически каждый раз, когда нам требуется что-то новое, мы просто совершаем «произвольное действие». Натуральные числа мы создали, когда нам потребовалось прибавлять 1. Математический мир, в котором возможно сложение, имеет научное название — коммутативный моноид. Натуральные числа — это *свободный коммутативный*

[1] Натуральные числа в совокупности со своими противоположными величинами называются целыми числами. — *Примеч. ред.*

моноид, это означает, что мы можем складывать все, что хотим. А «свободный» он, потому что нет никаких ограничений: сложение, еще одно сложение, сложение столько раз — сколько хочется. Целые числа мы создали, когда нам потребовалось вычитание. Они являются *свободной коммутативной группой*. Коммутативная группа — это научное название для любого математического мира, в котором возможно *и сложение, и вычитание*.

ДРОБИ

Целые числа не помогли нам добраться до бесконечности. Значит, нам нужен другой подход. Может быть, вместо того чтобы карабкаться вверх к бесконечности, пойдем другим путем: разделим что-нибудь на бесконечное количество частей? Помните, что в школе вас учили: «На ноль делить нельзя, потому что получится бесконечность». Итак, сможем ли мы прикоснуться к бесконечности, если просто разделим что-нибудь на ноль? Вероятно, это можно выразить дробью $\frac{1}{0}$. К сожалению, этот способ не сработает. Далее мы убедимся, что вообще-то в нем есть некоторый смысл, но равенства $\frac{1}{0} = \infty$ мы не *получим*. Тут все гораздо тоньше.

Представьте себе, что вы делите пирог на ноль частей для нуля людей. Какой кусочек получит каждый? Этот вопрос не имеет никакого смысла, потому что людей-то нет. Вы можете ответить: «Каждый получит десять пирогов!» Никого нет, а значит, это может быть верно. Каждый из нуля людей теоретически может получить десять пирогов. А еще каждый из нуля людей может получить по двадцать пирогов. Каждый из нуля людей может получить даже сорок пирогов и шестьдесят три слона. Очевидно, что деление единицы на ноль — это не самый разумный путь поиска бесконечности.

В таком случае почему в школе нам всегда говорят, что «на ноль делить нельзя», ведь ответ будет не бесконечность?

В математике вопрос «Почему я не могу...?» считается неправильным. Правильно спрашивать «Почему я могу...?». Обязанность логически обосновывать все, что вы делаете, называется «бременем доказательства». Вся математика построена на логическом обосновании. Если вы не можете что-то логически обосновать, значит, это не относится к математике. Если вы не можете найти логическую причину чего-то *не* делать, это еще не значит, что у вас есть причина делать это. (Лично мне всегда требуются обе причины: причина делать что-то и отсутствие причины не делать этого. Я занимаюсь математикой потому, что я люблю математику, а не потому, что она полезна. Тем не менее если бы математика была бесполезна, для меня это было бы достаточной причиной не заниматься ею.)

В любом случае, чтобы разобраться во всем этом, мы должны понять, что представляет собой деление. Деление является самым трудным из базовых математических действий: +, –, ×, ÷. Как правило, в школе деление проходят последним, и, вероятно, только ради того, чтобы рассказать, что оно существует. Возможно, учитель без лишних пояснений обратил ваше внимание на то, что деление является «противоположностью» умножения. Если вы умножите 3 на 4, то получите 12. Чтобы вернуться снова к 3, можно *разделить* на 4.

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, bend left, "\times 4"] & 12 \arrow[l, bend left, "\div 4"] \end{tikzcd}$$

Помните, как выше мы «отменяли» сложение, чтобы получить отрицательные числа? Да, умножение тоже можно «отменить».

Точно так же, как и со сложением, сначала мы должны найти число, которое «ничего не изменит», если умножать его на другие числа. Это число 1, потому что

$$1 \times 2 = 2$$

$$1 \times 3 = 3$$

$$1 \times 4 = 4$$

$$\vdots$$

$$1 \times n = n, \text{ где } n \text{ — это любое число.}$$

$$\vdots$$

Итак, 1 называется «единичным элементом умножения», точно так же, как 0 был «нулевым элементом сложения».

Теперь мы можем поразмышлять об обратных величинах умножения. Обратной величиной умножения числа называется число, которое «отменяет» исходное число и возвращает нас к 1. На что нужно умножить 2, чтобы вернуться к 1? Ответ: $\frac{1}{2}$. На что нужно умножить 3, чтобы вернуться к 1? Ответ: $\frac{1}{3}$. На что нужно умножить n, чтобы вернуться к 1? Ответ: $\frac{1}{n}$.

А теперь давайте вспомним, как мы создали целые числа из натуральных. Мы просто превратились в избалованного ребенка и потребовали, чтобы у каждого натурального числа появился противоположный элемент сложения. Возможно, сейчас вы подумали, что можно точно так же потребовать, чтобы у каждого целого числа появилась обратная величина умножения. Вы можете попробовать, но помните, что снова появится математический лев и все проглотит. *Требовать обратной величины умножения для 0 — ошибка.*

Если вы захотите, чтобы у 0 появилась обратная величина умножения, все сразу же пойдет не так. Предположим, что это будет число x, так как на самом деле мы не знаем, что это может быть за число. Нам известно только, что умножение на 0 вернет нас к 1. Запишем это так:

$$0 \times x = 1.$$

Но постойте! $0 \times x$ всегда равно 0.

Доказать это не требует усилий. Известно, что $0 + 0 = 0$, или по-другому $(0 + 0)x = 0x$. Но по распределительному закону умножения слева будет $0x + 0x$. В итоге получаем $0x + 0x = 0x$. Теперь вычтем $0x$ с обеих сторон равенства. Слева будет $0x$, а справа 0. Мы получили $0x = 0$.

Так, равенство

$$0 \times x = 1$$

превращается в

$$0 = 1.$$

Боже, снова этот абсурдный ответ! Он нас преследует! Мораль этой истории такова: нам действительно нельзя требовать обратной величины для 0. Ведь если мы ее получим, мы получим также $0 = 1$, и тогда *все* будет равно 0.

Но помните, мы говорили, что вычитание на самом деле является «прибавлением противоположной величины сложения»? Аналогичным образом, деление является «умножением на обратную величину умножения». Так, деление на 2 — это умножение на $\frac{1}{2}$, а деление на 3 — это умножение на $\frac{1}{3}$. А можем ли мы разделить на 0? Для этого нужно умножить 0 на его обратную величину умножения. Но мы только что решили, что нулю нельзя иметь обратную величину умножения. Поэтому ни в коем случае нельзя делить на 0. И значит, мы не можем сказать, что бесконечность — это $\frac{1}{0}$, ведь такой дроби просто не существует. Но что еще хуже: мы *не можем* даже мечтать о том, чтобы она появилась так, как однажды появились отрицательные числа.

КОНСТРУИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Научное название дробей — рациональные числа. Они рациональны не потому, что постоянно ведут друг с другом умные разговоры, а потому, что созданы на основе *отношения* целых чисел — последнего из сконструированных нами видов чисел.

Создание целых чисел из натуральных прошло довольно легко. Мы просто получили противоположные элементы сложения для всех натуральных чисел, вот и все. Процесс создания рациональных чисел из целых будет несколько более запутанным. Начнем с получения обратных элементов умножения для всех целых чисел, кроме 0. Но этот шаг даст нам только что-то типа $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, а также их отрицательные версии. При этом мы не получим ничего похожего на $\frac{4}{5}$ или на другие дроби с числителем, не равным 1. Для того чтобы получить такие дроби, нам нужно снова превратиться в избалованного ребенка и потребовать возможности умножать все на все. Когда речь шла о сложении целых чисел, нам это было не нужно, так как все отрицательные значения уже дали нам все возможные при сложении ответы. Однако все обратные элементы умножения автоматически не дают нам все возможные при умножении ответы. Мы получим только $\frac{1}{n}$, где n — любое целое число. Так, в итоге, у нас будут только следующие числа:

$$\dots\ -4\ -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ \dots$$

$$\dots\ -\frac{1}{4}\ \ -\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\frac{1}{1}\qquad \frac{1}{1}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}\ \dots$$

Если вы умножите друг на друга два числа из верхнего ряда, то получите другое число из верхнего ряда. Если вы умножите друг на друга два числа из нижнего ряда, то получите другое число из нижнего ряда. Но если вы умножите число из верхнего ряда на число из нижнего ряда, то можете получить ответ, которого нет ни в одном из рядов.

Итак, нам нужны результаты умножения всех чисел из верхнего ряда на все числа из нижнего ряда. Так мы получаем все рациональные числа, что позволяет подвести следующий итог.

Рациональные числа — это все дроби $\frac{a}{b}$, *где*

* *a и b — целые числа,*
* *b не равно 0, а также*
* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, *если* $ad = bc$.

Последний шаг: нам нужно убедиться в том, что мы случайно не подумали, будто $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{4}$ — это разные числа.

Мы проделали довольно трудную работу, но она нисколько не приблизила нас к бесконечности. Мы можем доказать, что бесконечность не является рациональным числом, используя прежний аргумент. В отличие от бесконечности рациональные числа тоже подчиняются правилу: при вычитании одного и того же числа с обеих сторон равенства равенство остается верным. Мы создали рациональные числа, но это не помогло нам понять, что такое бесконечность. Математический берег продолжает извиваться и пропадать из виду.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Иррациональные люди — это люди, которые не являются рациональными, а иррациональные числа — это числа, которые не являются рациональными. Возможно, вам говорили, что иррациональные числа — это «десятичные дроби, которые продолжаются бесконечно», или «квадратные корни из всего». В каждом из этих утверждений есть *доля правды*, но ни одно из них не является строго верным.

Начнем с десятичных дробей, которые продолжаются вечно. Если мы попробуем записать $\frac{1}{9}$ как десятичную дробь, то получим 0,1111111111..., и эти единички будут действительно продолжаться «бесконечно». Но $\frac{1}{9}$ — это, очевидно, рациональное число. Десятичные знаки продолжаются бесконечно, потому что для разложения на десятичные дроби мы произвольно выбрали 10 в качестве *основания*. 10 и 9 не особенно хорошо соотносятся друг с другом. А вот 10 и 5 соотносятся отлично, поэтому $\frac{1}{5}$ можно записать в виде четкой и аккуратной десятичной дроби 0,2. В данном случае «отлично соотносятся» означает «имеют общий делитель».

Если бы мы могли представить $\frac{1}{9}$ как десятичную дробь на основе 9, то мы получили бы идеальную дробь 0,1. Если бы мы могли представить $\frac{1}{9}$ как десятичную дробь на основе 3, то мы тоже получили бы довольно аккуратную дробь 0,01.

Доля истины в утверждении «иррациональные числа — это десятичные дроби, которые продолжаются бесконечно» заключается в том, что у иррациональных чисел есть десятичные знаки, которые продолжаются бесконечно, *никогда не повторяясь*. Это можно довольно забавно доказывать (на уровне студенческих исследовательских работ). Об этом очень увлекательно размышлять. Но попытки таким образом проверить, является число рациональным или нет, безнадежны. Даже если у вас получится записать миллион десятичных знаков (что займет примерно неделю без перерывов на сон), то как узнать, что знаки вдруг не начнут повторяться после двух миллионов? Или после миллиардного знака? Или после триллионного?

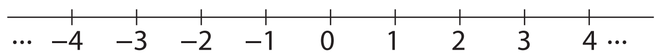
Второе утверждение о том, что иррациональные числа — это «квадратные корни из всего», тоже крайне противоречиво. Потому что квадратный корень из 4 равен 2, а 2 — это явно рациональное число. А еще есть такие иррациональные числа, как π и e, которые не являются квадратным корнем ни из чего полезного. Я знаю, что π — это квадратный корень из π^2, но это никак не доказывает, что π иррационально. Именно поэтому единственное стоящее определение «иррационального числа» звучит так: «Иррациональное число — это число, которое *не может* быть записано как отношение целых чисел друг к другу».

Возможно, сейчас вы захотите возразить мне, напомнив, что $\pi = \frac{22}{7}$. Однако эта знаменитая дробь является лишь *приблизительным значением* числа π. Она была крайне полезна во времена, когда еще не появились калькуляторы, не говоря уже о калькуляторах на современных телефонах, в которых есть кнопка π. π и $\frac{22}{7}$ сходятся только в первых двух значениях после запятой — 3,14. В повседневной жизни мне этого более чем достаточно. (Обычно число π требуется мне, чтобы равномерно масштабировать рецепт пирога.) Но с точки зрения математики эти два числа далеко не равны. И вообще, когда я меняю рецепт пирога, мне достаточно 3 в качестве приблизительного значения π.

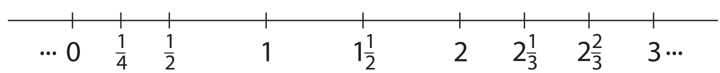
Возможно, сейчас вам кажется, что доказать, что некое число *действительно не может* быть записано как отношение двух целых чисел друг к другу, совершенно невозможно. Однако существуют довольно емкие и хитрые доказательства этого для таких чисел, как $\sqrt{2}$. А вот с такими числами, как π и *e*, верно, будет гораздо сложнее.

В любом случае, все эти рассуждения не помогли нам сформулировать, *что такое* иррациональные числа. Нельзя просто объявить, что иррациональные числа — это «все, что не может быть записано как отношение целых чисел друг к другу», потому что это будет означать, что слон — тоже иррациональное число. Нельзя также просто объявить, что иррациональные числа — это «все числа, которые не могут быть записаны как отношение целых чисел друг к другу», потому что мы точно не знаем, что такое числа. Выше я вскользь упомянула число *e*. Но что именно называется числом *e*? Существуют ли числа *f*, *g* и *h*? Если есть число π, то будет ли также число α?

Конструировать иррациональные числа *крайне трудно*. Мы отложим это занятие до тех пор, пока речь не зайдет о бесконечно малых вещах. Но основная идея остается прежней: мы превращаемся в избалованного ребенка, который требует чего-то нового, и тут же получаем все, что для этого нужно. Вопрос лишь в том, что именно мы будем требовать. Ответ примерно такой: «Мы хотим заполнить все промежутки между рациональными числами». Дело в том, что между двумя рациональными числами всегда есть промежутки. Давайте отметим на числовой оси вот такие целые числа:



Мы знаем, что между этими целыми числами находятся вот такие рациональные числа:



Мы отметили на оси рациональные числа, но даже теперь между целыми числами все равно останутся промежутки. Мы пока не знаем, как можно их заполнить. Приведем лишь некоторые удивительные вещи, которые происходят при заполнении таких промежутков:

- между любыми двумя рациональными числами находится иррациональное число;
- между любыми двумя иррациональными числами находится рациональное число.

Это напоминает четные и нечетные числа, которые аккуратно чередуются на всей числовой прямой. Но тут есть один парадокс:

Иррациональных чисел больше, чем рациональных.

Как это возможно? Если они чередуются, то как одних чисел может быть больше, чем других? Ответ такой: это одна из тех непостижимых вещей, с которыми мы сталкиваемся, когда имеем дело с бесконечностью. В данном случае мы имеем дело не только с бесконечным количеством объектов (чисел), но и с объектами, *расположенными бесконечно близко друг к другу*. Что касается четных и нечетных чисел, то мы можем выбрать любое четное число, например 6, и всегда сможем точно сказать, какие нечетные числа стоят рядом с ним. Это 5 и 7. В отличие от четных и нечетных, рациональные и иррациональные числа стоят настолько близко друг к другу, что мы никогда не сможем точно сказать, какое иррациональное число стоит рядом с любым отдельно взятым рациональным числом. Какое иррациональное число мы ни выбрали бы, всегда будут другие, стоящие еще ближе.

Возьмем, например, число 1. Каково следующее за ним большее рациональное число? Его не существует. Если вы будете утверждать, что это некое число x, то я всегда смогу привести число $\frac{1+x}{2}$. Это похоже на попытки найти среднее между 1 и x, то есть половину расстояния от 1 до x — число больше 1, но меньше x. Это число обязательно будет рациональным, потому что если x — рациональное число, то $1 + x$ тоже будет рациональным числом. Разделив его на 2, мы не сделаем его иррациональным. Вы можете продолжать дробить расстояние, ваши рациональные числа будут подбираться все ближе и ближе к 1, становиться все меньше и меньше, но всегда будут больше 1. Это как снова и снова делить пополам последний кусок шоколадного торта, чтобы сделать его бесконечным. Вы никогда не достигнете 1. Между последним взятым числом и 1 всегда будут стоять другие рациональные числа.

Этот процесс можно сравнить с увеличением числовой оси на экране вашего компьютера. Если вы будете постоянно увеличивать число 6 на прямой целых чисел, то в итоге на экране поместится одно-единственное целое число — число 6. А все остальные окажутся за пределами экрана. А если вы будете увеличивать числовую ось, на которой заполнены все промежутки, независимо от того, насколько сильно будет ваше увеличение, на оси будут появляться все новые и новые рациональные *и* иррациональные числа. Поэтому фактически мы не можем сказать, что они «чередуются». Тут все организовано гораздо причудливее.

Рациональные и иррациональные числа вместе называются действительными числами, а увеличение, о котором мы сейчас говорили, называется *плотностью* рациональных и иррациональных чисел внутри действительных чисел. Рациональные числа — это не все действительные числа, но их настолько много, что независимо от того, насколько близко вы будете рассматривать числовую ось, вы не сможете избавиться от них. То же самое с иррациональными числами. Мы еще раз увидим это в главе 15, когда больше узнаем об инфинитезимально, то есть бесконечно коротких расстояниях.

Помогли ли эти рассуждения объяснить, что такое бесконечность? Нет. Как и раньше, мы легко можем убедится в том, что к действительным числам тоже применимо утверждение: «При вычитании чего-либо с обеих сторон равенства равенство остается верным». Поэтому если бесконечность была бы действительным числом, то мы снова получили бы это назойливое противоречие $0 = 1$. А значит, бесконечность действительным числом не является.

Возможно, вы начинаете подозревать, что наша охота за бесконечностью становится совершенно бесполезным занятием. По крайней мере, до тех пор, пока мы не обнаружим числа, для которых *не* будет справедливо утверждение: «При вычитании чего-либо с обеих сторон равенства равенство остается верным». Какие это могут быть числа? До сих пор мы создавали новые числа, просто требуя чего-то нового: вычитать, делить, заполнять промежутки. Каждый раз, требуя большего, мы попадали в мир, в котором строительных кирпичиков еще больше. Как если бы вы захотели приготовить больше блюд, то на кухне было бы больше ингредиентов.

Звучит довольно странно, но теперь нам нужен мир с *меньшим* количеством возможностей. Мир, в котором при вычитании с обеих сторон равенства равенство *не* будет оставаться верным. Иногда, собираясь в поездку, я строю множество разных планов и кидаю в чемодан кучу вещей. Я не хочу быть похожей на тех математиков, которые всегда появляются в одной и той же одежде, будь то лекция, пешая прогулка, концерт или пляжная вечеринка. Тем не менее в итоге я складываю в чемодан так много обуви, что потом не могу его поднять. А значит, не могу никуда отправиться, не говоря уже о том, чтобы заняться реализацией своих планов. С числами мы достигли того же. Нам нужно выбросить все и начать с самого начала.

5 СЧИТАЯ ДО БЕСКОНЕЧНОСТИ

Однажды я возвращалась домой своей обычной дорогой и вдруг увидела новый магазин одежды, который меня привлек. Меня очень удивило, что я раньше не замечала здесь никаких строительных работ, и поэтому спросила, как давно магазин открылся. В ответ я услышала: десять лет назад.

Не знаю, почему я вдруг обратила внимание на этот магазин, ведь раньше, тысячу раз проходя мимо, я не видела его. Иногда, снизив темп или немного изменив угол зрения, можно заметить что-то совершенно новое в давно знакомом месте. Сейчас мы немного изменим угол зрения и увидим, что бесконечность сама бросится нам в глаза.

Мы уже пробовали считать до бесконечности, и у нас ничего не вышло. Но сюрприз в том, что мы просто выбрали слишком замысловатый путь. Когда дети учатся считать, они не прибавляют единицу. Сначала они считают на пальцах.

Это похоже на мой любимый способ поедания Hula-Hoop[1]. Рискну признаться, что делаю это точно так же, как большинство маленьких детей, — надеваю по одному Hula-Hoop на каждый палец, кручу картофельное колечко на пальце, а затем съедаю.

---

[1] Британская марка картофельных снеков в виде колечек. — *Примеч. ред.*

Считать на пальцах — элементарно. Так считают дети, когда они еще не освоили искусство счета в уме. Я хотела бы предложить другую точку зрения: счет на пальцах — *очень содержателен* и гораздо более эффективен. Он позволит нам добраться до бесконечности. Но мы доберемся до бесконечности благодаря идее, а не благодаря пальцам.

Самое великолепное в счете на пальцах — это то, что не нужно помнить, на каком числе вы находитесь в каждый конкретный момент счета. Не обязательно даже считать по порядку. Нужно просто назначить на каждый палец по одному предмету из тех, которые вы считаете. И остановиться тогда, когда все пальцы закончатся. Вот и все! Конечно, это сработает, только если вы считаете не более десяти предметов. Одна из причин эффективности такого счета, по крайней мере лично для меня, заключается в том, что он позволяет экономить умственные усилия. Ведь мне не нужно каждый раз запоминать, на каком числе я остановилась. Это освобождает ум для других действий. Вместо того чтобы помнить, что сейчас я нахожусь, скажем, на четырех, я просто держу загнутыми четыре пальца. Это не тормозит мой мозг и позволяет одновременно делать другие сложные вещи. Я могу показаться вам смешной, но ведь я, в конце концов, математик. Почему бы мне хоть раз не пошутить на всеми любимую тему про математиков, которые плохо умеют считать?

Вот ситуация, которая возникает чаще всего. Я пригласила друга на кофе, и мне нужно положить в кофеварку четыре ложки кофе. (Я предпочитаю класть две ложки на человека.) При этом я продолжаю разговаривать со своим другом, чтобы оставаться вежливой. Обычно я сбиваюсь со счета где-то между второй и третьей ложкой. Делаю паузу и тут же забываю, положила я две ложки или три. Кажется, что та часть моего мозга, которая занята разговором, мешает той части, которая считает. Но если бы вместо того, чтобы считать в уме, я считала бы на пальцах, все вышло бы отлично. (Я понимаю, что менее вежливые люди просто прервут разговор, а те, кто не обладает таким математическим складом ума, как я, не обратят внимания на некоторую неопределенность в количестве кофе. Но моя беда в том, что я вежливый математик!)

Это касается аспекта эффективности. Далее объясню, почему я называю счет на пальцах содержательным. Прежде всего, попробуйте дать математическое определение числу десять. *Что такое десять*? Раньше мы уже говорили, что десять можно представить, как

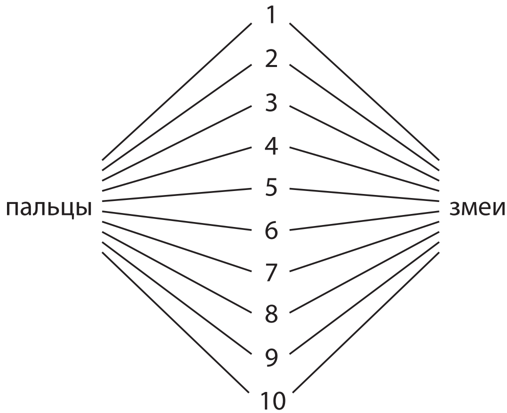
$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Но если бы вы изначально не знали концепции «числа десять», то как вы смогли бы определить, что предметов десять?

Десять — это то, что соответствует количеству пальцев у нас на руках. Десять также соответствует любому другому набору предметов, который соответствует количеству пальцев у нас на руках. Не похоже на математику, не правда ли? Тем не менее приблизительно так математики дали точное определение числам (конечно, не совсем на пальцах, но идея та же).

Что значит посчитать десять предметов? Предположим, что вы считаете десять змей. Одна моя подруга показывала мне домашнее задание своего ребенка, в котором были математические задачки, взятые из «реальной жизни». Среди них были такие «реальные» ситуации, как, например, счет змей.

Для начала определимся, что десять соотносится с «количеством пальцев у нас на руках». Далее дадим каждому пальцу имя, чтобы не нужно было использовать пальцы, а можно было просто называть вслух (или про себя) их имена. Мы можем назвать наши пальцы так: Том, Стив, Питер, Ник, Ричард, Эмили, Доминик, Джон, Нил и Алиса... или один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять и десять. Затем мы дадим эти имена змеям, и если у нас будет змея для каждого имени, значит, все змеи соотнесены с нашими пальцами. Можно наглядно представить этот замысловатый процесс в виде рисунка:



На рисунке видно, что мы добавили один дополнительный этап. Вместо того чтобы сразу соотнести змей с нашими пальцами, сначала мы соотнесли наши пальцы с именами, а потом соотнесли имена со змеями.

Конечно, одна из причин этого заключается в том, что нам часто нужно посчитать более десяти предметов и пальцев просто не хватает. Можно попробовать добавить пальцы ног или использовать пальцы рук как десять цифр двоичной системы исчисления, что позволит считать до 1023. Я буду делать это в главе 7.

Однако идея перескочить этот этап — хитра, эффективна и полезна. Причем не только для меня и моего ослабленного разговором и готовящего кофе мозга. Представьте, что вы забронировали в ресторане стол на 16 персон для ваших друзей. Они пришли, начали бродить вокруг стола и болтать друг с другом. Довольно трудно понять, сколько человек уже собралось, если они постоянно двигаются. Гораздо проще усадить всех и посмотреть, останутся ли свободные стулья. Не нужно считать людей, достаточно просто соотнести людей со стульями.

Такова математическая версия счета. Это утверждение может показаться вам странным. Ведь счет по своей природе уже является математическим. Я имею в виду, что так выглядит *строгий* счет с точки зрения математики.

В СТРОГОСТИ

Здесь я хочу остановиться и сделать небольшое отступление на тему математической строгости. Математическая строгость — это такая вещь, которая позволяет математикам прийти к общему мнению и признать, что что-то является верным, а что-то неверным, вместо того чтобы бесконечно приводить аргументы в пользу конкурирующих теорий, не приходя к заключению. Математика всегда основывается на законах логики. Идея тут вот какая: если вы строго придерживаетесь законов логики и исследуете только объекты, которые тоже строго придерживаются законов логики, то никаких противоречий не будет возникать.

Тем не менее если вы исследуете объекты, которые не всегда ведут себя логично (например, человеческие существа или облака), то, возможно, вы получите несколько вариантов ответа, и все они будут правильными. То же самое произойдет, если вы сами не всегда строго придерживаетесь законов логики. В целом мир не всегда живет по законам логики. Если вы дадите ребенку печенье, потом еще одно, велики шансы, что в итоге у него будет не две штучки, а ноль (разве что вы посчитаете печенье в его желудке).

Математика начинается с «соскабливания всех неоднозначностей», чтобы остались только вещи, которыми можно манипулировать четко в соответствии с законами логики. Затем следуют манипуляции этими вещами в соответствии с законами логики с целью их изучения. Это может оказаться непростым занятием. Причем трудности при этом возникают как в обычной жизни, так и в математике, потому что вещи, которые на вид кажутся совершенно «обычными», очень сложно сделать «однозначными». А зачем нам вообще это нужно?

Во-первых, это поможет найти подход к *необычным* вещам. Если что-то не является обычным с точки зрения нашей интуиции, то нужно идти другим путем. Бесконечность — один из таких примеров. Пока нам не удалось достичь бесконечности, используя привычные способы. До сих пор все наши попытки приводили к заключению $1 = 0$, а этого быть не должно. Теперь давайте пересмотрим наш подход к конечным числам, чтобы это помогло нам понять бесконечность. Мы переосмыслим подход к числам, которые кажутся самыми понятными и базовыми: к числам, которыми мы считаем.

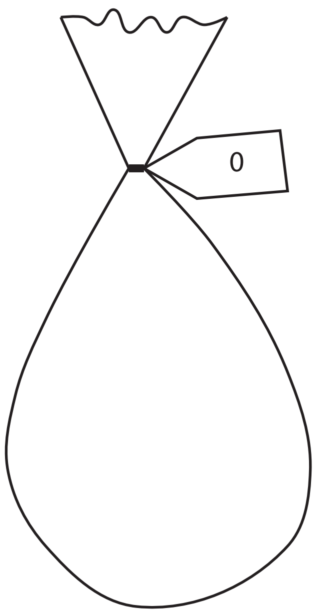
СЧЕТ СУМОК

По своей сути счет — это процесс соотнесения предметов с «официальным множеством» с целью определения их количества. Мы знаем, что можно сосчитать десять предметов с помощью пальцев. То есть наши пальцы — это официальное множество для определения «десяти» предметов. Мы всегда можем сравнить любое множество предметов с пальцами, и это позволит нам посчитать до десяти.

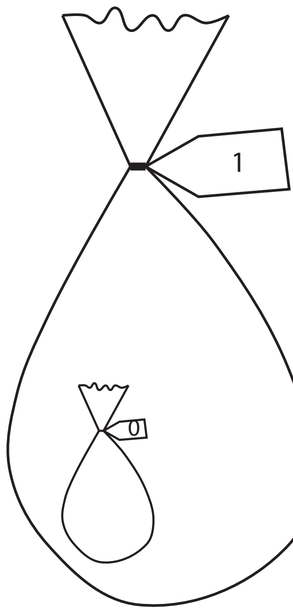
Теоретически мы могли бы назначить официальное множество для каждого числа. Например, создать официальную сумку с предметами для «числа 23». Тогда 23 определялось бы как «число предметов в этой официальной сумке», и каждый, кто хочет посчитать 23 предмета, должен соотнести их с предметами в официальной сумке. Звучит глупо и надуманно, но вспомните, как определяется килограмм. С научной точки зрения килограмм представляет собой массу официального куска металла, который хранится в подвале недалеко от Парижа.

На самом деле математика, конечно, не определяет числа в соответствии с реально существующими официальными сумками. Физически таких сумок нет, ведь математика — это абстрактная наука. Числа в математике определяются в соответствии с официальными «абстрактными» сумками. Эти сумки абстрактны, потому что они существуют не физически, а лишь в виде идеи. А еще в математике их называют не сумками, а множествами. Но мы можем представить себе их как сумки.

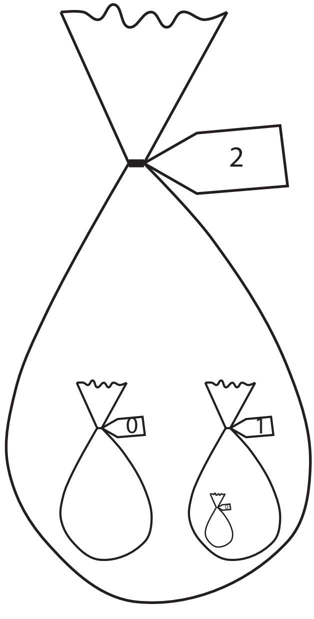
Первой мы рассмотрим сумку, содержащую 0 предметов. Это пустая сумка. Мы можем определить 0 как «число предметов в этой сумке». Давайте укажем на этой сумке цифру 0.



Теперь нам нужно создать сумку с одним предметом внутри. Оглянитесь вокруг, какие предметы мы можем использовать? У нас есть только одна пустая сумка. И этого достаточно! Итак, создадим сумку, содержащую одну пустую сумку. Так мы будем определять число 1. Давайте укажем на этой сумке цифру 1.

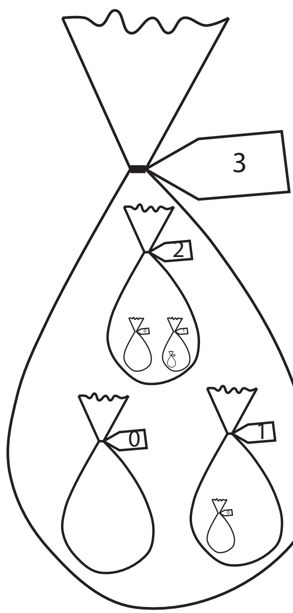


Теперь нам нужно создать сумку с двумя предметами внутри. Фактически перед нами только два предмета: «сумка 0» и «сумка 1». Итак, создадим сумку с двумя предметами внутри и нарисуем на ней цифру 2.



На этом этапе очень легко запутаться. Возможно, сейчас вы подумаете, что внутри сумки номер 2 на самом деле находятся три сумки. Однако не нужно заглядывать внутрь сумок. Мы рассматриваем их только как предметы, игнорируя тот факт, что они могут содержать что-то внутри. Это как большая упаковка с мини-пакетиками «Мальтизерс» — воздушными шариками в шоколаде. Мы можем посчитать количество мини-пакетиков в большой упаковке, не считая драже в каждом мини-пакетике.

Вот так будет выглядеть сумка номер 3:



Кстати о «Мальтизерс». Возможно, вы удивитесь, почему мы не заполняем наши сумки более подходящими для счета предметами, например камнями или фишками. (Ведь фишки — это не что иное, как специальные предметы для счета.) Ответ таков: несмотря на то что эти предметы кажутся более подходящими для счета, их не существует в абстрактном математическом мире. Сумки, или, точнее, множества, — это лишь стартовая точка, данная нам для того, чтобы мы попробовали построить собственный математический мир, основываясь исключительно на идее множеств. Или, по крайней мере, применили бы подход, называемый *теорией множеств*. Существуют и другие подходы к изучению основ математики, но теория множеств — это единственный путь к точному определению бесконечности.

После того как мы создали наши «официальные» сумки с 0 предметов, с 1 предметом, с 2 предметами, с 3 предметами и так далее, мы можем посчитать объекты в других сумках, сопоставив их с официальными сумками. Сопоставлять нужно внимательно:

1. Каждый объект в новой сумке должен образовать пару с объектом из официальной сумки.
2. В новой сумке не может быть двух объектов, парных одному и тому же объекту из официальной сумки.
3. Нужно использовать все объекты официальной сумки.

Это немного напоминает пары участников — знаменитостей и профессиональных танцоров — в шоу «*Танцы со звездами*»[1]:

1. Каждая знаменитость должна танцевать в паре с одним профи.
2. Вы не можете объединить более одной знаменитости в пару с одним и тем же профи.
3. Вы должны использовать всех профи.

Вы знаете, что там одинаковое количество знаменитостей и танцоров. Если бы две знаменитости состояли в паре с одним и тем же профи, то знаменитостей было бы больше, чем профи. А если некоторые профи не танцевали бы, то профи было бы

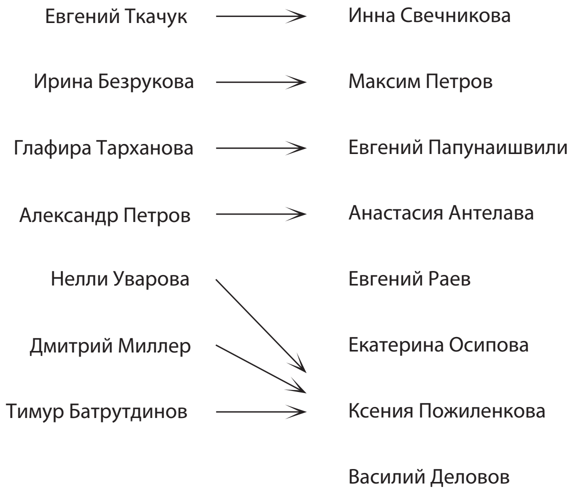
[1] Разумеется, Юджиния использовала в качестве примера британских участников, но поскольку их имена мало что скажут русскому читателю, мы взяли на себя смелость заменить их на героев российского шоу. — *Примеч. ред.*

больше, чем знаменитостей. Совсем *необязательно*, что все будет именно так. У вас могло бы быть одинаковое количество знаменитостей и профи, но две знаменитости состояли бы в паре с одним и тем же профи, а один профи сидел бы без дела. Возможно, будет понятнее, если мы изобразим это в виде схемы:

Евгений Ткачук	→	Инна Свечникова
Ирина Безрукова	→	Максим Петров
Глафира Тарханова	→	Евгений Папунаишвили
Александр Петров	→	Анастасия Антелава
Нелли Уварова	→	Евгений Раев
Дмитрий Миллер	→	Екатерина Осипова
Тимур Батрутдинов	→	Ксения Пожиленкова
		Василий Деловов

Из этой схемы видно, что каждая знаменитость состоит в паре только с одним танцором, но один из них (Василий Деловов), кажется, остался без партнерши. Не считая, можно сделать вывод о том, что профи больше, чем знаменитостей.

Однако если несколько знаменитостей будут танцевать в паре, скажем, с Ксенией Пожиленковой, а у Василия Деловова не будет партнерши, тогда будет труднее определить, кого больше, — знаменитостей или профи. Не считая определить уже не получится.



Объединение объектов в пары в математике называется *отображением*. Представьте, что у вас есть два множества объектов. Назовем их *C* и *P*. *C* — множество знаменитостей, *P* — множество профи. Отображение *C* и *P* — это образование пары из объекта множества *C* и объекта множества *P*. При этом необходимо учитывать первое условие, приведенное выше: каждый из множества *C* должен иметь только одного партнера из *P*.

Два других условия — это свойства множества, которые выполняются специальными отображениями. Второе условие, «вы не можете объединить более одной знаменитости в пару с одним и тем же профи», называется *инъективностью*. Третье условие, «вы должны использовать всех профи», называется *сюръективностью*. Если все три условия будут выполнены, то можно сказать, что мы создали *идеальные пары*, в которых у каждого есть партнер. Ни у кого нет более одного партнера, и никто не остался без партнера. Схема будет выглядеть так:

Евгений Ткачук	→	Инна Свечникова
Ирина Безрукова	→	Максим Петров
Глафира Тарханова	→	Евгений Папунаишвили
Александр Петров	→	Анастасия Антелава
Нелли Уварова	→	Евгений Раев
Дмитрий Миллер	→	Екатерина Осипова
Тимур Батрутдинов	→	Ксения Пожиленкова

Научное название для этого — *биективное отображение*, или биекция.

Возможно, сейчас вы удивляетесь, почему нам не нужны другие условия, например такие: «вы не можете объединить двух профи в пару с одной и той же знаменитостью» и «вы должны использовать всех знаменитостей». Причина заключается в том, что они изначально заложены в первом условии, которое и является научным определением отображения. Знаменитости и профи играют в «*Танцах со звездами*» разные роли, поэтому у них разные отображения. Это можно сравнить с торговым автоматом. Слева — кнопки, которые нужно нажать (или коды, которые нужно ввести), чтобы выбрать желаемый продукт, а справа — то, что вы можете купить. Возможно, несколько разных кодов могут выдать вам один и тот же продукт. Например, есть такие торговые автоматы, в которых каждая позиция заполнена баночками с колой. Но один и тот же код никогда не выдаст вам разные продукты. В таких автоматах не было бы смысла. Они приводили бы всех в замешательство: покупая, вы никогда не знали бы наверняка, какой продукт вы получите. Теоретически такие торговые автоматы возможны, но сейчас мы говорим не о них.

Размышления об объединении объектов в пары вернули нас к нашему первому научному определению бесконечности. Давайте посмотрим, как оно работает в других математических случаях. Термин *отображение* всегда объясняют слишком сухим научным языком. Давайте лучше изобразим процесс образования пар графически. Рисунки помогут нам понять суть. Сухой научный подход оставим математикам для их точных и безошибочных исследований. К сожалению, математику чаще всего объясняют безэмоционально, сухим научным языком.

* Далее приведено схематическое изображение пар, похожих на пары из примера о «*Танцах со звездами*», но вместо имен — числа.

$$
\begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 4 \\
2 & \longrightarrow & 8 \\
3 & \longrightarrow & 12 \\
 & & 16
\end{array}
$$

* Поясним: *C* — это множество, содержащее числа 1, 2, 3.
* *P* — это множество, содержащее числа 4, 8, 12, 16.
* Отображение формируется следующим образом: мы берем число из множества *C* и объединяем его в пару с числом, которое больше в четыре раза. Получается, что число 1 объединяется с числом 4, число 2 объединяется с числом 8, число 3 объединяется с числом 12. А вот число 16 сидит без дела. Третье условие не выполнено, другими словами, отображение не сюръективно. Это заметно сразу, потому что число 16 точно так же, как и Василий Деловов из предыдущего примера, осталось без пары.
* Вот пример, в котором две «знаменитости» объединяются в пару с одним и тем же «профессионалом»:

$$\begin{tikzcd}
-2 \arrow[r] & 4 \\
2 \arrow[ur] & 9 \\
3 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

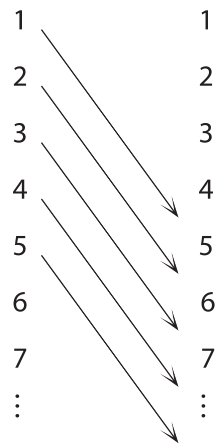
- *C* — это множество, содержащее числа — 2, 2, 3.
- *P* — это множество, содержащее числа 4 и 9.
- Отображение формируется следующим образом: мы берем числа из множества *C* и объединяем их в пары с числами, которые получатся, если возвести эти числа в квадрат. Получается, что число –2 объединяется с числом 4, число 2 тоже объединяется с числом 4, а число 3 объединяется с числом 9. В данном случае и –2, и 2 объединены с одним и тем же объектом из множества *P*. Второе условие не выполняется, другими словами, отображение не инъективно. На рисунке видно, что две стрелочки указывают на одно и то же место.
- Вот пример, в котором «знаменитости» и «профи» идеально объединены в пары:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 5 \\
2 \arrow[r] & 6 \\
3 \arrow[r] & 7
\end{tikzcd}$$

- *C* — это множество, содержащее числа 1, 2, 3.
- *P* — это множество, содержащее числа 5, 6, 7.
- Отображение формируется следующим образом: мы берем числа из *C* и объединяем их в пары с числами, которые больше на 4. Получается, что число 1 объединяется с числом 5, число 2 объединяется с числом 6, число 3 объединяется с числом 7. Мы видим, что две стрелочки больше не

указывают на одно и то же место и справа больше нет чисел, которые «сидят без дела». Получились идеальные пары чисел множества *C* и чисел множества *P*. Мы сразу видим, что каждое множество содержит одинаковое количество объектов, как в примере со змеями и пальцами.

- ✶ Теперь давайте действовать смелее. Попробуем проделать то же самое с каким-нибудь бесконечным множеством.



Теперь множество *C* — это множество всех натуральных чисел.

И множество *P* — это тоже множество всех натуральных чисел.

Отображение формируется следующим образом: мы берем числа из множества *C* и объединяем их в пары с числами из множества *P*, которые больше их на 4, точно так же, как в последнем примере. Два числа из множества *C* по-прежнему не объединены в пару с одним и тем же числом из множества *P*, но в этот раз несколько чисел из множества *P* остались одинокими. Это числа 1, 2, 3 и 4. Таким образом, это отображение инъективно, но не сюръективно.

- ✶ Вот еще один пример, в котором мы объединим в пары все натуральные числа со всеми четными числами. Это похоже на пример с отелем Гильберта, когда каждый гость должен был умножить номер своей комнаты на 2.

$$\begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 2 \\
2 & \longrightarrow & 4 \\
3 & \longrightarrow & 6 \\
4 & \longrightarrow & 8 \\
5 & \longrightarrow & 10 \\
6 & \longrightarrow & 12 \\
7 & \longrightarrow & 14 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

C — это множество всех натуральных чисел.

P — это множество всех четных натуральных чисел.

Отображение формируется следующим образом: мы берем число из множества *C* и удваиваем его, а затем объединяем исходное число в пару с его удвоенной версией. Две стрелочки не указывают на одно и то же место. Каждое число из множества *P* использовано. Итак, получилось еще одно идеальное объединение в пары.

✶ Теперь приведем пример, похожий на эвакуацию двухэтажного отеля Гильберта в одноэтажный отель Гильберта. Вместо знаменитостей у нас будут красные и синие числа, а вместо профессионалов — пурпурные.

красный	синий		пурпурный
	1	→	1
1		→	2
	2	→	3
2		→	4
	3	→	5
3		→	6
	4	→	7
4		→	8
⋮			⋮

Теперь C — это множество всех натуральных чисел в двойном экземпляре, то есть красные числа — это множество всех натуральных чисел, а синие числа — это еще одно множество всех натуральных чисел.

Множество P — пурпурные числа — это множество натуральных чисел в единственном экземпляре, то есть одно единственное множество.

В данном случае отображение выглядит так же, как формула для эвакуации двухэтажного отеля Гильберта со страницы 32. Красные числа n объединяются в пары с пурпурными числами $2n$, а синие числа n объединяются в пары с пурпурными числами $2n–1$. На рисунке видно (мы знаем это также из примера с отелем), что в этом случае оба условия выполняются: две стрелочки ни разу не указывают на одно и то же пурпурное число и все пурпурные числа использованы. Итак, это отображение также является идеальным объединением в пары.

Последние рисунки продемонстрировали нам, что не всегда удается получить идеальные пары, даже если мы объединяем объекты бесконечных множеств. Мы уже знаем, что если у нас получились идеальные пары, другими словами, биективное отображение между двумя множествами, значит, два множества содержат одинаковое количество объектов. Если у вас получилось создать идеальные пары из знаменитостей и профи, значит, вы можете быть уверены, что тех и других одинаковое количество. Считать их не обязательно. Хитрость заключается в том, что с бесконечными множествами происходит то же самое. Не нужно считать объекты множества. Вот он — ключ к бесконечности! Иными словами, математический принцип счетности.

СЧЕТНОСТЬ

Всем известно, что считать учатся в раннем детстве. Мы все научились считать, когда были совсем маленькими, правда? Но это вовсе не означает, что считать легко и просто. Существует множество объектов, которые очень трудно посчитать. Например, потому, что эти объекты постоянно перемещаются, как дети на детской площадке или зайцы в лесу. Или очень похожи друг на друга, и невозможно определить, что мы уже посчитали, а что еще нет. Например, листья на дереве. Объекты могут быть крошечными, как песчинки. Или их просто может быть очень много. До скольких вы вообще считали? Не думаю, что когда-либо вы доходили до двухсот. Однажды во время бессонницы я долго считала овечек (больше ничего не помогало, и я подумала: «Почему бы не попробовать?»). Но сомневаюсь, что и тогда я перешла за две сотни. Мне надоело, и я бросила считать еще до того, как почувствовала сонливость.

Вообще мы не сможем посчитать что-либо бесконечное не потому, что нам станет скучно, а потому, что это будет очень долго. Однако считать в математике не означает вслух произносить слова «один, два, три, четыре...». Это означает соотносить объекты, которые вы считаете, с объектами из официальных числовых сумок. И вот суть этого процесса:

* Официальная числовая сумка для числа 1 содержит один объект: сумку 0.
* Официальная числовая сумка для числа 2 содержит два объекта: сумку 0 и сумку 1.
* Официальная числовая сумка для числа 3 содержит три объекта: сумку 0, сумку 1 и сумку 2.

Мы знаем, как создать сумку n, поэтому теперь мы сможем создать также сумку $n + 1$. Мы просто берем сумку 0, сумку 1, сумку 2 и так далее до сумки n и помещаем их в новую официальную сумку.

Мы изменили способ перехода к следующему числу. Не более того! Процесс прибавления единицы мы заменили на «перемещение всех имеющихся сумок в новую гигантскую сумку». А теперь барабанная дробь! Это и есть ключ к бесконечности! Нам остается лишь воспользоваться им, чтобы открыть ее секрет. И вот как мы это сделаем.

Мы получили сумки для всех натуральных чисел, а теперь мы просто применим наш новый способ гигантской сумки. Мы поместим *все эти* сумки в одну новую гигантскую сумку. Сколько сумок находится в этой супергигантской сумке? По одной сумке на каждое натуральное число, то есть бесконечное количество сумок.

Мы создали официальную сумку бесконечности! Это сумка, содержащая сумки для всех натуральных чисел.

Если быть точнее, мы создали *одну* официальную сумку с бесконечностью внутри. Она содержит бесконечное количество объектов, каждый из которых пронумерован натуральным числом. Скоро мы узнаем, что одни бесконечности могут быть больше других бесконечностей. Что это может означать?

Давайте начнем с того, что «посчитаем до бесконечности» несколько раз. Помните, это вовсе не значит, что мы должны вслух произнести каждое натуральное число (наша жизнь слишком коротка для этого). Мы должны просто соотнести считаемые объекты с объектами из нашей официальной сумки с помощью биективного отображения. Мы уже несколько раз делали нечто подобное с отелем Гильберта. Соотнести считаемые объекты с объектами из бесконечной сумки — это все равно что эвакуировать гостей в обычный одноэтажный отель Гильберта. Мы не можем поселить двух гостей в один и тот же номер, и мы не хотим тратить номера впустую.

В главе 2 мы проводили различные эвакуации. Тогда мы убедились, что можно эвакуировать двухэтажный, трехэтажный отель и даже отель с бесконечным количеством этажей в обычный одноэтажный отель Гильберта. Но вместо того, чтобы на самом деле переселять гостей, мы могли бы просто соотнести их с объектами нашей бесконечной сумки и посмотреть, возможна ли такая эвакуация. Это и есть математический принцип счетности. Бесконечное множество называется «счетным», если можно соотнести его объекты с объектами нашей официальной бесконечной сумки. А объекты официальной сумки — это натуральные числа. Поэтому можно сказать, что бесконечное множество называется счетным, если его объекты можно соотнести с натуральными числами, или, строго говоря, если это будет *биективное отображение* натуральных чисел. Такое бесконечное множество называется *бесконечно счетным*. И да, скоро мы познакомимся с некоторыми бесконечными множествами, которые можно назвать *бесконечно несчетными*.

Теперь, когда мы догадываемся, что существуют разные типы бесконечностей, давайте обратим внимание на то, как обозначается бесконечности. Символ ∞ означает любой существующий неконечный объект. Однако теперь у нас есть более точная концепция бесконечности, а именно — наша официальная бесконечная сумка, содержащая все натуральные числа. Математики иногда обозначают ее греческой буквой ω. Омега —

это последняя буква греческого алфавита. Но для нас ω — это только начало целой серии все бóльших и бóльших бесконечностей.

УДИВИТЕЛЬНО СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

С одной стороны, вам может показаться, что ничто не может быть больше бесконечности. Но с другой стороны, если мы бросим в нашу гигантскую сумку натуральных чисел еще несколько объектов, то разве она не станет больше? На данном этапе мы должны изменить наше восприятие таких понятий, как «больше» и «меньше», потому что, когда речь идет о бесконечности, все работает иначе. Если мы захотим найти бесконечные множества, которые не могут быть соотнесены с нашей сумкой ω, нам будет трудно отыскать их. Мы можем делать все что угодно, чтобы сделать сумку еще больше, но ее содержимое всегда будет оставаться счетным.

Давайте начнем с того, что возьмем множество всех натуральных чисел и сделаем его «больше», добавив в него что-нибудь еще, например слона. Теперь посмотрим, является ли это множество счетным. Можем ли мы в точности соотнести его объекты с натуральными числами?

Мы можем начать с того, что соотнесем все натуральные числа из первого множества с самими собой. Но куда девать слона? Похоже, что это плохой план. Тогда давайте соотнесем слона с числом 1, а потом соотнесем все остальные числа с числами на *один* больше. Так, число 1 будет объединено в пару с числом 2, число 2 — с числом 3 и так далее. Таким образом, все, кроме слона, будет объединено в пару с натуральным числом, и все натуральные числа (из официальной сумки) будут использованы.

Это очень похоже на заселение нового гостя в отель Гильберта, когда мы просим всех гостей переехать на один номер вперед. Так мы доказали, что, поместив в бесконечное множество еще один дополнительный объект, мы не сделаем множество даже чуточку больше. Это одно из наших базовых утверждений о бесконечности: «*бесконечность* плюс 1 равно *бесконечность*». Теперь мы придали ему строгий математический смысл.

В двухэтажном отеле Гильберта находятся два множества натуральных чисел, и мы уже знаем, что это биективное отображение натуральных чисел. Это значит, что если вы возьмете два исчисляемо бесконечных множества и бросите их друг в друга, то гигант, который получится в результате, все равно будет счетной бесконечностью. Иными словами, в нем не станет «больше» объектов. Итак, мы разгадали утверждение «два раза *бесконечность* равно *бесконечность*».

В бесконечном небоскребе Гильберта счетное бесконечное количество множеств натуральных чисел, но мы все равно можем эвакуировать всех его гостей в одноэтажный отель. Это доказывает, что, даже если вы создадите счетное бесконечное количество исчисляемо бесконечных множеств, оно все равно останется бесконечностью, в нем не станет «больше» объектов. Вот так мы разгадали утверждение «бесконечное количество бесконечностей равно *бесконечность*».

Теперь, вместо того чтобы рассуждать о нереальных отелях, давайте лучше поразмышляем о разных видах чисел. Например, о целых числах. Фактически их вдвое больше, чем натуральных чисел, потому что целые числа — это положительные *и* отрицательные числа. Но действительно ли целых чисел больше, чем натуральных? Ведь если бы в отеле Гильберта наряду с положительными номерами были еще номера, пронумерованные отрицательными числами, то мы все равно смогли бы эвакуировать всех его гостей в нормальный отель Гильберта. Потому что не существует ничего сложнее, чем двухэтажный отель Гильберта, а с ним мы уже умеем справляться. Нам нужно просто пронумеровать некоторые комнаты второго этажа отрицательными числами так, как будто у нас есть восточное и западное крыло здания.

А как насчет рациональных чисел? Действительно ли рациональных чисел больше, чем натуральных? На числовой оси они стоят очень близко друг к другу. Фактически, если бы у нас был отель Гильберта с комнатами, пронумерованными рациональными числами, мы все равно смогли бы эвакуировать всех его гостей. Хотя это было бы немного сложнее и проходило бы в несколько этапов.

Прежде всего, давайте вспомним, что каждое рациональное число может быть записано как $\frac{a}{b}$, где a и b — целые числа, а b не равно 0. Начнем с положительных рациональных чисел. Мы эвакуируем гостей положительных номеров в бесконечный отель-небоскреб, поселив гостя из номера $\frac{a}{b}$ в номер a на этаже b. Умно, не правда ли? Оттуда мы сможем эвакуировать их в обычный одноэтажный отель Гильберта. А как насчет гостей из отрицательных номеров? Эвакуируем их в другой отель-небоскреб, а оттуда — в обычный одноэтажный отель Гильберта. Вот так мы снова вернулись к двум одноэтажным отелям Гильберта, и мы уже прекрасно знаем, как разместить их в одном. Превращение новых проблем в старые, решение которых нам уже известно, — типично для математики.

Возможно, вы заметили, что, когда мы переходим от отеля с рациональными номерами к отелю-небоскребу, некоторые номера в отеле-небоскребе остаются пустыми. Ведь $\frac{1}{2}$ — это то же самое, что и $\frac{2}{4}$. Поэтому, когда мы размещаем гостя номера $\frac{1}{2}$ в номере 1 на этаже 2, номер 2 на этаже 4 остается пустым. Это значит, что наше отображение не биективно, но фактически это не имеет никакого значения, потому что оно инъективно. То есть до тех пор, пока вы можете разместить всех гостей в отдельных номерах, неважно, что некоторые номера останутся пустыми. После эвакуации вы всегда сможете попросить всех сдвинуться назад и занять пустой номер.

Таким образом, целых чисел, точно так же, как и рациональных чисел, не больше, чем натуральных, несмотря на то что так может показаться на первый взгляд. Но это вовсе не значит, что *все* бесконечные множества одинаковы по размеру. Возможно, вы заметили, что мы не стали проверять действительные числа. Что произойдет, если мы бросим иррациональные числа в сумку с рациональными числами?

Ответ: после этого в ней действительно станет больше объектов. В следующей главе мы будем использовать этот аргумент, чтобы подтвердить невероятное заявление: одни объекты более «бесконечны», чем другие.

Представьте, что вы видите реку с бурными белесыми водоворотами. Захочется ли вам раздобыть плот или броситься в нее? Мне — вряд ли. Но если это не настоящая река, а бурный водоворот математики, то я немедленно нырну туда. Я не особо люблю бороться со стихией, мне не нравится, когда меня кидает из стороны в сторону. Зато я люблю испытывать головокружение от умственной борьбы с тем, что на первый взгляд кажется невозможным. Тот факт, что одни вещи могут быть бесконечнее других, представляется мне одним из таких головокружительных математических водоворотов. И сейчас мы готовы нырнуть в него.

6

ОДНИ ВЕЩИ БОЛЕЕ БЕСКОНЕЧНЫ, ЧЕМ ДРУГИЕ

Иногда от детей можно услышать такие аргументы:

«Я прав!»

«А я еще правее!»

«А я в сто раз правее!»

«А я миллион раз прав!»

«А я миллиард раз прав!»

«А я бесконечность раз прав!»

«А я две бесконечности раз прав!»

«А я бесконечность в квадрате раз прав!»

Но мы, кажется, уже убедились в том, что «две бесконечности» не больше одной бесконечности. Даже бесконечность в квадрате, то есть бесконечное количество раз бесконечность, не больше, чем просто бесконечность. А значит, когда маленький ребенок так говорит, он не становится более правым. Но может ли он вообще разбить доводы своего оппонента, если тот утверждает, что прав бесконечное количество раз? Да! Он просто должен найти более бесконечную бесконечность. Мы познакомимся с двумя случаями, когда что-то может быть «более бесконечным», чем натуральные числа. Первый случай связан со счетом иррациональных чисел.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ БОЛЬШЕ, ЧЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ

Вероятно, в мире существует больше иррациональных людей, чем рациональных. Фактически большинство людей иррациональны. Мне кажется, что именно это важное качество доказывает, что мы люди, а не компьютеры. Крайне трудно быть полностью, совершенно, вдоль и поперек рациональным и всю жизнь руководствоваться только логикой. Эмоции не рациональны, вкусовые предпочтения тоже не рациональны. Наверняка одни блюда нравятся вам больше, чем другие. Порой это можно объяснить рационально: например, я не люблю острый перец чили, потому что он неприятно жжет во рту. Но почему я не люблю корицу? Не знаю, не люблю, и все. Когда люди узнают об этом, они довольно часто реагируют так, как будто это совершенно иррационально. Признаюсь, часто я точно так же реагирую на людей, которые не любят шоколад. Но потом я напоминаю себе, что это просто дело вкуса и что я знаю гораздо больше людей, которым не нравится шоколад, чем людей, которые разделяют мою неприязнь к корице. В любом случае, даже если вы не считаете себя особенно иррациональным человеком, вы все равно не являетесь на сто процентов рациональным. Наше привычное бытовое употребление этих слов предполагает гораздо больше неточностей, чем их математическое употребление. Фактически одна из целей математики — устранение неточностей, но не во всем мире, потому что это невозможно и нежелательно, а только в тех вещах, о которых мы в данный момент думаем.

Итак, иррациональных людей больше, чем рациональных, точно так же иррациональных чисел больше, чем рациональных. На самом деле числу довольно трудно быть рациональным, то есть быть отношением двух целых чисел. Это редкое стечение обстоятельств. Возможно, это покажется вам странным. Но попробуйте разделить вещи, которые являются *веро-*

ятными с точки зрения математики, и вещи, *вероятные с человеческой точки зрения.*

Если вас остановят на улице и попросят загадать число, то вы (я почти уверена) загадаете рациональное число. Я даже думаю, что, скорее всего, вы загадаете положительное целое число. (Хотя есть тип людей, которые загадывают число π, чтобы привлечь к себе внимание.) Это не значит, что положительных целых чисел больше, чем других видов чисел, просто нашему мозгу они хорошо знакомы, и он предпочитает их. В конце концов, поэтому они и называются «натуральными».

Но если я попрошу вас начертить круг, радиусом которого может быть любое выбранное вами число (в сантиметрах), то площадь вашего круга *почти наверняка* будет иррациональной. Вы помните, что площадь круга с радиусом r равна πr^2. А число π очевидно является иррациональным, поэтому если ваш радиус — это любое целое число или рациональное число, то площадь вашего круга обречена быть иррациональной.

Если вы умножите рациональное число на иррациональное, то ответ будет иррациональным. Аналогичным образом, если вы прибавите к рациональному числу иррациональное, то ответ тоже будет иррациональным. Но если вы умножите два иррациональных числа друг на друга, то ответ может быть любой. Например, $\sqrt{2} \times \pi$ — иррационально, а $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. То есть в этом случае ответ рациональный.

Сможете ли вы придумать такой радиус круга, чтобы площадь этого круга была рациональной? Но как избавиться от этого надоедливого числа π, которое торчит в формуле? Давайте как-нибудь сократим его. Если мы возьмем радиус r, равный $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, то πr^2 можно аккуратно сократить, и тогда получится

$$\pi \times \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 1.$$

Думаю, что если я остановлю вас на улице и попрошу загадать число, то вы вряд ли ответите: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. (Хотя после того, как я это предложила, вы, наверное, именно так и ответите.)

А как насчет других вариантов рациональной площади круга? Вы помните, что рациональное число — это число, которое может быть выражено как $\frac{a}{b}$, где a и b — целые числа, а b — не равно 0. Давайте попробуем сделать эту дробь площадью круга. Для этого мы возьмем

$$r = \sqrt{\frac{a}{\pi b}}.$$

Получаем

$$\pi r^2 = \pi\left(\sqrt{\frac{a}{\pi b}}\right)^2$$

$$= \frac{\pi a}{\pi b}$$

$$= \frac{a}{b}.$$

Вывод: иррациональных чисел во много раз больше, чем рациональных. Однако рациональные числа в большинстве случаев кажутся нам гораздо приметнее. Моя аргументация выглядит не особенно однозначной. В своих рассуждениях я постоянно разбрасывалась такими расплывчатыми формулировками, как «вероятно», «скорее всего», «во много раз больше». В математике мы часто сначала ведем рассуждения туманным языком, примерно так, как я говорила выше. Но потом оттачиваем их логическими математическими аргументами. Дальше мы займемся как раз таким оттачиванием.

ТАК МНОГО ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Теперь мы будем «считать» иррациональные числа, не обращая при этом внимания на то, что не можем точно объяснить, *что такое* иррациональные числа. В определении сказано, какими иррациональные числа быть не могут: иррациональные числа — это действительные числа, которые не являются рациональными. Мы можем объяснить, что такое действительные числа (мы будем говорить о них несколько неопределенно вплоть до главы 15) и что такое рациональные числа. Поэтому проще всего «считать» иррациональные числа не напрямую, а методом исключения. В общем, мы будем говорить примерно так: «Вау, существует множество действительных чисел. Но рациональных среди них не так уж и много. Так что если я выкину все рациональные числа, то все равно останется тонна иррациональных». Хотя это будет звучать немного точнее (или научнее).

Вместо того чтобы доказывать, что иррациональные числа несчетны, давайте докажем, что несчетными являются действительные числа. Мы уже знаем следующее:

1. Рациональные числа счетны.
2. Если вы сложите два счетных множества вместе, вы получите еще одно счетное множество (как в двухэтажном отеле Гильберта).

Это доказывает, что *если* иррациональные числа счетны, то действительные числа тоже должны быть счетными. Но мы собираемся доказать, что действительные числа *несчетные*, значит, иррациональные числа тоже не будут счетными.

Это немного похоже на доминантный и рецессивный гены. Представьте, что несчетность — это доминантный ген, а счетность — рецессивный. Это значит, если вы сложите вместе счетное и несчетное множество, то вы получите несчетное множество, потому что неисчислимость — это доминантный ген. А если вы сложите вместе счетное множество с неизвестным множеством (с множеством иррациональных чисел), то, исходя из полученного результата, вы сможете определить, каким было неизвестное множество[1].

Рациональные числа	**Если действительные числа**	**Значит, иррациональные числа**
Счетные (точно известно)	Счетные Несчетные	Счетные Несчетные

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА НЕСЧЕТНЫЕ

Действительным числам трудно дать определение, поэтому пока давайте просто скажем, что это все возможные десятичные дроби, в которых десятичные знаки продолжаются бесконечно, повторяясь или не повторяясь. (Фактически десятичные знаки всегда продолжаются бесконечно, если в конце поставить нули; просто мы обычно не утруждаем себя этими нулями.) Мы настолько привыкли к такому определению действительных чисел, что нам трудно понять, почему оно не идеально. На самом деле мы не можем по-настоящему рассуждать на эту тему до тех пор, пока в главе 14 мы не познакомимся с инфинитезимально малыми объектами.

А теперь давайте докажем, что эти никогда не заканчивающиеся десятичные знаки несчетны. Мы сделаем это с помощью хитрого трюка, предложенного Георгом Кантором и известного под названием *диагональный аргумент Кантора*. Фактически мы собираемся доказать, что действительные числа от 0 до 1 несчетные сами по себе. (Если мы сузим круг до этих чисел, то наша аргументация будет точнее.)

[1] Так можно догадаться о цвете глаз папы кареглазого ребенка, если нам точно известно, что у его мамы голубые глаза. Скорее всего, папины глаза — карие. А если у ребенка были бы голубые глаза, то мы бы знали, что папа тоже голубоглазый. — *Примеч. пер.*

Поставим вопрос по-другому. Снова вспомним об эвакуации огромных отелей Гильберта. В главе 2 мы уже упоминали концепцию отеля действительных чисел с комнатами для каждого действительного числа. Будем скромнее: представим себе отель, комнаты которого пронумерованы «только» действительными числами от 0 до 1. Я говорю «только», но это все еще супергигантский отель. Сейчас мы убедимся в том, что это первый из наших отелей, который мы не сможет эвакуировать в обычный отель Гильберта.

Очень удобно рассматривать только числа от 0 до 1, потому что так мы не будем волноваться о знаках перед запятой. У всех комнат отеля разные десятичные знаки — «0 целых и сколько-то», которые продолжаются бесконечно. (Давайте не будем думать о том, сколько времени вам потребуется, чтобы попросить у портье ключ от своего номера.) Теперь представьте себе, что вы пытаетесь эвакуировать гостей такого отеля. Задача в том, чтобы составить идеальные пары между действительными числами (от 0 до 1) и натуральными числами, ведь натуральные числа — это то, что мы называем «счетными».

Мы можем сделать несколько вещей.

Можем ли мы просто переселить гостей в новые номера, исходя из величины их прежнего номера? То есть гость из номера с самым маленьким десятичным числом переселяется в номер 1, и так далее? Нет, потому что не существует самого маленького десятичного числа, точно так же, как не существует и самого большого десятичного числа. Можно ли назвать 0,0000000000001 самым маленьким десятичным числом? Нельзя, потому что мы всегда можем вставить в него несколько нулей, и это сделает его еще меньше.

Можем ли мы начать эвакуацию с гостей, в номере которых только один десятичный знак, а потом перейти к тем, в номере которых два десятичных знака, и так далее? Ведь в конце концов у нас конечное количество номеров. Например, у нас есть 10 номеров с одним десятичным знаком, а именно:

0,0; 0,1; 0,2; 0,3; ...; 0,9. А сколько номеров с двумя десятичными знаками? У нас есть выбор из 10 — для первого десятичного знака и выбор из 10 — для второго десятичного знака, что значит 10 × 10 = 100 номеров. Если второй десятичный знак — 0, значит, это один из предыдущих номеров. Итак, на данном этапе у нас получилось дополнительно 100 номеров, с которыми нужно разобраться:

0,01	0,11	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,81	0,91
0,02	0,12	0,22	0,33	0,41	0,52	0,62	0,72	0,82	0,92
0,03	0,13	0,23	0,33	0,41	0,53	0,63	0,73	0,83	0,93
0,04	0,14	0,24	0,34	0,41	0,54	0,64	0,74	0,84	0,94
0,05	0,15	0,25	0,35	0,41	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
0,06	0,16	0,26	0,36	0,41	0,56	0,66	0,76	0,86	0,96
0,07	0,17	0,27	0,37	0,41	0,57	0,67	0,77	0,87	0,97
0,08	0,18	0,28	0,38	0,41	0,58	0,68	0,78	0,88	0,98
0,09	0,19	0,29	0,39	0,41	0,59	0,69	0,79	0,89	0,99

Если мы возьмем также номера с тремя десятичными знаками, то их будет больше, но это все равно будет конечное количество номеров. Такой подход кажется многообещающим, но есть одна проблема: мы эвакуируем постояльцев только из тех номеров, чьи десятичные знаки однажды закончатся. Мы никогда не доберемся до тех, чьи десятичные знаки продолжаются бесконечно. Даже если мы будем продолжать эвакуацию «вечно». Это как постоянно прибавлять 1 к какому-либо числу: оно становится все больше и больше, но никогда не *станет* по-настоящему бесконечным, даже если вы будете прибавлять вечно. Это значит, что если мы будем продолжать эвакуацию вечно, то мы просто будем бесконечно переселять гостей из комнат со все более длинными номерами. Мы будем каждый раз прибавлять единицу к удлиняющемуся числу, оно будет становиться все длиннее и длиннее, но десятичные знаки никогда не *станут* по-настоящему бесконечными.

Если этот аргумент вас не убедил — прекрасно, потому что он вовсе не математический и вообще не особенно убедительный. А вот диагональный аргумент Кантора — это стопроцентный математический аргумент. Мы должны доказать, что эвакуировать всех гостей в одноэтажный отель *невозможно*, как бы мы ни старались. На первый взгляд кажется, что это очень трудно доказуемо, потому что для этого нужно перепробовать все возможные методы эвакуации и убедиться, что ни один из них не сработает. Аргумент Кантора хорош тем, что вам не обязательно проходить все этапы эвакуации. Нужно просто предположить, что все уже сделано, что все гости уже находятся в одноэтажном отеле, и вы сразу же заметите противоречие. Сейчас мы убедимся, что если какой-нибудь умник будет утверждать, что у него получится всех эвакуировать, мы всегда сможем найти хотя бы одного гостя, который остался без номера. Математическим языком это можно выразить так: если мы утверждаем, что соотнесли все десятичные числа с натуральными, то всегда будет оставаться как минимум одно десятичное число, у которого нет пары.

Вот как это работает. Вы идете в комнату номер 1 и стучитесь в дверь. Затем вы спрашиваете у гостя номер его прежнего десятичного номера. Вообще-то вам даже не обязательно знать все знаки после запятой, достаточно первой цифры, как при авторизации в онлайн-банке, когда вам нужно ввести только третью или седьмую букву вашего пароля. В любом случае, после того как гость называет цифру, вы прибавляете к ней 1 и записываете. Так, если первая цифра его прежнего номера была 3, то вы записываете 4. Если 8, то вы записываете 9. Если 9, то вы пишете не 10 (потому что это не цифра), а 0. Звучит таинственно, но наберитесь терпения.

Переходим к номеру 2 и спрашиваем гостя о второй цифре его прежнего номера. Снова прибавляем 1 и записываем рядом с уже записанной цифрой.

Переходим к номеру 3 и спрашиваем о третьей цифре его прежнего номера. Снова прибавляем 1 и записываем рядом с уже записанной цифрой.

Так мы создадим новое десятичное число. Спрашивая гостя из номера n о n-й цифре его прежнего номера и затем прибавляя к ней 1, мы получаем n-ю цифру этого нового числа.

Если это будет происходить в «реальности», то вы никогда не дойдете до конца, но математический аргумент и не предполагает, что вам нужно физически стучать в каждую дверь. Число, которое мы создадим таким образом, существует независимо от того, есть у нас время записывать его или нет, точно так же, как планета Нептун существует независимо от того, знают о ней люди или нет.

Вопрос в том, где находится гость, живший до этого в комнате с номером, который мы только что создали методом прибавления 1 к названным цифрам? В комнату с каким натуральным числом его эвакуировали?

Это не может быть номер 1, потому что новое десятичное число отличается от прежнего номера гостя в первой цифре. Это не может быть номер 2, потому что новое десятичное число отличается от прежнего номера во второй цифре. Это также не может быть номер 3, 4, 5 или любой другой номер n, потому что новое десятичное число будет отличаться от прежнего номера их гостей в цифре n. Так, мы нашли человека, которого никуда не эвакуировали. Мы столкнулись с противоречием. И оно доказывает, что умники потерпели поражение, потому что в этом случае они не смогут успешно эвакуировать абсолютно всех. Этот аргумент сработает также с *любой* другой эвакуацией, а значит, эвакуация невозможна.

Он называется диагональным аргументом, потому что, записав десятичные числа в виде решетки, мы можем взглянуть на них по диагонали. Давайте предположим, что первые несколько эвакуированных номеров такие:

Новая комната №	Прежняя комната №
1	0,238795317...
2	0,984718573...
3	0,389716438...
4	0,777362889...
5	0,444317895...
6	0,879000001...
7	0,892225673...
8	0,191919234...

Цифры, которые мы получим, если будем стучать в двери и спрашивать о прежних номерах, выделены жирным шрифтом и расположены по диагонали:

Новая комната №	Прежняя комната №
1	0,**2**38795317...
2	0,9**8**4718573...
3	0,38**9**716438...
4	0,777**3**62889...
5	0,4443**1**7895...
6	0,87900**0**001...
7	0,892225**6**73...
8	0,1919192**3**4...

В таком случае новое число, которое мы создали, будет начинаться так:

$$0{,}39042174\cdots$$

И мы можем доказать, что гость из комнаты с таким номером не переселен ни в какой другой номер *n*. Для этого посмотрим на n-ю цифру этого нового числа, которая будет отличаться от n-й цифры гостя, фактически живущего в номере n. Получается, что этот человек не был эвакуирован ни в какой номер, а значит, умники совершенно точно терпят поражение.

Это доказывает, что действительные числа от 0 до 1 являются несчетными. Если вы попробуете создать идеальные пары действительных чисел с натуральными, то как минимум одно из действительных чисел обречено на одиночество. Мы можем рассматривать этот факт как доказательство того, что действительные числа «более бесконечны», чем натуральные.

Такой хитрый способ доказательства, когда мы опровергаем аргументы теоретических умников, иногда очень выручает. Позже, когда мы будем говорить о инфинитезимально малых вещах, умники снова будут испытывать нас.

УСТАЛОСТЬ ОТ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Есть еще один случай, когда что-то «бесконечнее» натуральных чисел, но он более заковыристый и, возможно, имеет больше отношения к термину «несчетность». Итак, мы выяснили, что не сможем эвакуировать отель действительных чисел в отель натуральных чисел, потому что как минимум один гость обречен остаться на улице. Но существует еще один случай, когда эвакуация тоже будет невозможна: если мы почувствуем усталость от принятия решений. Представьте себе, что у вас есть отель с двухместными комнатами. Ваш отель заполнен. Теперь представьте, что вам нужно эвакуировать всех его гостей в отель с одноместными комнатами. Вы можете эвакуировать двух человек из номера 1 в номера 1 и 2, двух человек из номера 2 — в номера 3 и 4 и так далее, то есть гости номера n переселяются в номера $2n$ и $2n - 1$. Внешне это похоже на эвакуацию двухэтажного отеля в одноэтажный отель, но как в таком случае написать инструкцию по эвакуации?

> «Если вы в данный момент проживаете в номере n, то один из вас должен переехать в номер $2n$, а второй — в номер $2n - 1$».

А что будет, если они спросят: «А кто из нас должен переехать в первый номер, а кто — во второй?» Вы можете ответить: «Тот, кто старше, переезжает в номер $2n$, а тот, кто младше, — в номер $2n - 1$». Но что будет, если четные номера лучше нечетных? Тогда младшие гости расстроятся. А что будет (наберитесь терпения), если абсолютно все пары одного возраста? Вы можете попросить их решить самостоятельно, потому что на самом деле это не имеет большого значения. Но что, если это очень нерешительные люди и они будут ждать решения от вас? Несомненно, они могут распределиться каким-нибудь образом, но идея написания инструкции предполагает, что люди просто следуют ей, не думая ни о чем. Если в процессе приходится принимать решения, то с математической точки зрения это уже нельзя назвать четкой инструкцией. Другими словами, это не будет процессом, которому может следовать компьютер, то есть алгоритмом.

Подобный случай часто иллюстрируют примером про разницу между туфлями и носками. Предположим, что у вас бесконечное количество пар туфель. Точнее говоря, счетное бесконечное количество. Вы можете выстроить их в ряд в обувных коробках с наклейками 1, 2, 3 и так далее. Означает ли это, что все туфли по отдельности тоже счетные? А что, если у вас также есть бесконечное количество пар носков?

Я стараюсь не считать свою обувь слишком часто, потому что ее количество способно шокировать кого угодно. Я оправдываю себя тем, что у меня действительно очень большой размер ноги и мне трудно подобрать подходящие, но при этом неуродливые туфли. Когда у меня был лишний вес, мои ступни были еще больше, и тогда у меня вошло в привычку покупать все пары, которые мне подходили и не были уродливы и слишком дороги. В те дни эти критерии удовлетворялись не часто, поэтому можно было действительно скупать все такие пары. В общем, у меня был четкий алгоритм покупки обуви, и я постоянно следовала ему. Однако ко времени окончания университета у меня было не более четырех пар. (Все же больше, чем у любого из моих знакомых мужчин.) Когда я сбросила вес, выяснилось, что и ступни тоже стали меньше. (Раньше я не представляла, что ступни тоже толстеют.) Разница была лишь в половине размера, но эта критичная половина размера переместила мою ногу из нестандартного размерного ряда женской обуви в стандартный. Однако моя прежняя «обувная ментальность» осталась при мне, что привело к тому, что я покупаю довольно много туфель. Но все пороки со временем проходят; и к тому же я думаю, что это, по крайней мере, лучше, чем, например, страсть к импульсивным покупкам спортивных автомобилей. Возможно, я слишком усердствую в борьбе с этой привычкой. Сейчас, покупая туфли, я не просто следую простому алгоритму, я обязана принять решение.

Тем не менее сколько бы обуви я ни покупала, ее все равно будет конечное количество. Но давайте представим, что у нас бесконечное количество пар туфель. Все они аккуратно выстроены в ряд в обувных коробках и пронумерованы натуральными числами. (Туфли у меня никогда не стоят аккуратно.)

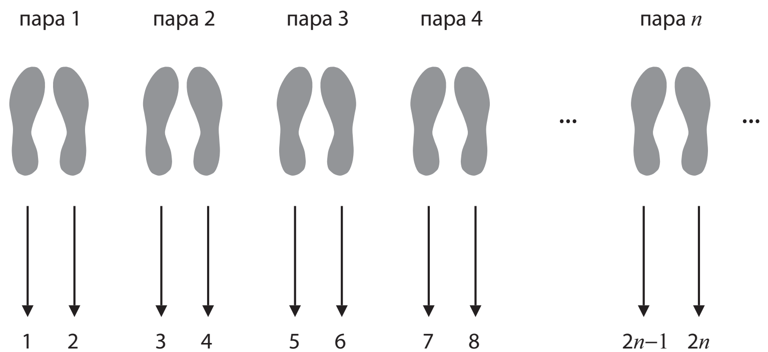
Это значит, что у нас счетное количество *пар* туфель. Но есть ли у нас счетное количество *туфель*? Другими словами, сможем ли мы выстроить все туфли в ряд по отдельности и соотнести каждую из них с натуральным числом: по одному натуральному числу на туфлю, а не по одному натуральному числу на пару? Да, это возможно. Это будет похоже на двухэтажный отель Гильберта. Мы можем каждый раз начинать с левой туфли, это будет выглядеть так:

> левая туфля 1, правая туфля 1, левая туфля 2, правая туфля 2, левая туфля 3, правая туфля 3...

и так далее.

Выражаясь математическим языком:

- Левая туфля n относится к позиции $2n - 1$.
- Правая туфля n относится к позиции $2n$.



Это похоже на пример с красными и синими натуральными числами, соотнесенными с пурпурными числами, но теперь вместо синих у нас «левая туфля», а вместо красных «правая туфля».

Теперь давайте попробуем сделать то же самое с носками. Представим, что у нас бесконечное количество пар носков. Как и туфли, они аккуратно выложены в ряд и пронумерованы: пара номер 1, пара номер 2 и так далее. (Я гораздо меньше интересуюсь носками, чем туфлями, поэтому все мои носки одинаковые, черного цвета, и мне не приходится мучиться, собирая их в пары.) Можем ли мы выстроить в ряд каждый отдельный носок? На первый взгляд кажется, что носки — то же самое, что и туфли, но есть одна проблема: не существует правого и левого носка. Все носки выглядят одинаково. Как же нам определить, с какого носка начинать? Никак! Но мы можем произвольно выбрать один из них и начать с него. Конечно, теперь мы должны будем принимать это решение каждый раз для каждой пары. В случае с туфлями вначале я тоже приняла решение, что мы будем начинать с левой, но это было *единственное* произвольное решение. А с носками каждый раз, когда я перехожу к новой паре, я должна принимать новое произвольное решение о том, какой носок брать первым. Так мы сталкиваемся с проблемой усталости от принятия решений. Или, по крайней мере, математической версией усталости от принятия решений.

Теория усталости от принятия решений заключается в том, что решения утомляют, будь то малозначительные решения («Что мне съесть на завтрак?») или серьезные решения («Какой дом мне купить?»). И если в течение дня вы вынуждены принимать все больше и больше решений, то они все сильнее и сильнее будут вас утомлять. Принимать решения — трудно. Можно сначала взвесить все за и против, но в итоге обязательно нужно будет сделать усилие. Не получится просто следовать логике и так прийти к заключению, иначе это была бы дедукция, а не решение.

Вот математическое объяснение этого примера, аналогичное примеру с парами носков. Идея в том, что мы вполне способны сделать произвольный выбор один раз, два раза, три раза или любое конечное количество раз. Но разве мы можем выбирать *бесконечно*? В примере про носки мы столкнулись с такой проблемой: можно ли создать *формулу*, руководствуясь которой можно выложить все носки в ряд? Чисто технически мы можем сделать отображение множества всех счетных носков и множества всех натуральных чисел (как будто мы эвакуируем каждый носок по отдельности в отель Гильберта). Но как определить, что это будет за отображение? Как определить, с какого носка в каждой паре нужно начинать, если у них нет отличительных признаков?

Вы можете предложить просто брать пару двумя руками, по одному носку в каждую руку, и тот носок, который окажется в левой руке, пойдет первым. Такая инструкция выглядит уже точнее, но она все еще недостаточно хороша для математики. В конце концов, «решение» — это не совсем подходящее слово.

На самом деле речь идет о выборе. Даже если вы будете брать носки наугад, в какой-то момент вам придется выбрать, какой рукой взять тот или иной носок. Вы должны будете сделать такой выбор бесконечное количество раз.

Математика не может точно сказать, возможно это или нет. Этот каверзно-коварный вопрос давно не дает покоя ученым. Он называется *аксиомой выбора*. Аксиома — это базовое утверждение, которое было решено принять на веру без доказательств; это один из строительных кирпичиков, из которых строится все в математике. Один из способов изучения аксиом: вы не утверждаете, что они *верны*, а просто создаете мир, в котором они будут верны, и смотрите, что в нем происходит.

Аксиома выбора гласит: произвольный выбор бесконечное количество раз возможен. В мире, где аксиома выбора верна, носки счетны. А в мире, где аксиома выбора не верна, носки *несчетны*. Так, при эвакуации отеля с бесконечным количеством двухместных номеров мы руководствовались тем, что один из гостей каждого номера моложе, а другой — старше (допустим, что они не ровесники). Поэтому, решая, кто из них в какой номер переезжает, нам не пришлось постоянно совершать произвольный выбор.

Математики не особо беспокоятся о том, можно ли сказать, что аксиома выбора справедлива всегда, гораздо больше их волнует ее применение в каждом конкретном случае. Тем не менее довольно неприятно, что, каждый раз применяя аксиому выбора, мы обязаны акцентировать на этом внимание, как грузовики, которые начинают сигналить, когда едут задним ходом.

Мы обнаружили еще один случай, когда объекты не могут быть счетными не потому, что их слишком много, а потому, что они неотличимы друг от друга. Со мной такое бывает, когда я пересчитываю людей в комнате, — скажем, новую группу студентов, которых я еще не знаю. Надеюсь, у вас тоже был подобный опыт, и это никак не связано лично со мной и с моим очевидным неумением считать. Если все студенты сидят аккуратными рядами — это прекрасно, потому что можно просто посчитать их по рядам. А если кто-то просто подставил сбоку стул и сел на него, то становится уже сложнее, потому что, считая, нужно будет решить, кого считать следующим. Обычно я справляюсь с 9–10 людьми, а дальше путаюсь и забываю, кого я уже посчитала и кого нужно считать следующим. А представьте, каково это считать так бесконечное количество людей! Это будет ужасно трудно, даже не беря в расчет длительность такого счета по сравнению с нашей конечной жизнью.

Есть много шуток про математиков, которые не умеют считать, но правда в том, что счет — гораздо более глубокий процесс, чем мы думаем, когда просто говорим, что ребенок «научился считать». Размышления на эту тему, начиная с моего замешательства, когда я разговариваю с другом и одновременно считаю ложки кофе, и до вопроса несчетных бесконечных множеств, стали благодатной почвой для развития математических идей. Мы убедились , что действительных чисел больше, чем натуральных, а в следующей главе мы попытаемся посчитать их так, чтобы узнать, насколько их больше. Нас посетит настоящее озарение, которое откроет нам иерархию все более бесконечных бесконечностей и в конце концов приведет нас к ответу на детский вопрос о том, как быть более правым, чем тот, кто «прав бесконечное количество раз».

7

СЧЕТ ЗА ГРАНЬЮ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Недавно я посетила национальный заповедник Тент-Рокс рядом с городом Санта-Фе, штат Нью-Мексико. Это было невероятное горное восхождение. Я шла среди конусообразных скал в узком каньоне и добралась до хребта на вершине плоскогорья, с которого открывался потрясающий вид на долину реки Рио-Гранде. Приятная физическая нагрузка, восхитительные горы крупным планом всю дорогу и кульминация — впечатляющий подъем на хребет, откуда открывался потрясающий вид, уходящий далеко за горизонт. Несколько раз за время восхождения я испытала страх, я вообще не из смельчаков. Когда время от времени видишь срывающиеся вниз камни, становится действительно страшно, особенно если часть пути проходит вдоль обрыва с рыхлой горной породой и кажется, что под ногами нет прочной опоры. И вот я добралась до вершины, но, не успев насладиться своим достижением, я тут же поняла, что это не конец. Это был не пик, а всего лишь хребет, можно было продолжать путь, но дальше горные породы будут срываться вниз уже по обеим сторонам тропы. Сначала я хотела пойти дальше, но потом решила, что с меня довольно храбрости, и повернула назад.

Мы тоже совершаем восхождение. Восхождение к бесконечности! И возможно, сейчас вы почувствовали нечто подобное. Вам кажется, что под ногами больше нет прочной опоры.

Наконец-то нам удалось добраться до бесконечности, но вы предпочли бы сдаться и пойти назад. В математике я гораздо смелее, чем в горах, поэтому я призываю вас продолжить путь. Мы убедились, что действительные числа бесконечнее натуральных. Но насколько? Каково расстояние от меньшей бесконечности до большей бесконечности? Скоро мы это узнаем.

Разумеется, мы не можем перечислить все действительные числа, чтобы узнать, сколько их всего. Мы посчитаем их так, как считали объекты в предыдущих главах, — абстрактно. Мы будем размышлять над тем, как устроены действительные числа, обнаружим связь между действительными и натуральными числами и узнаем, насколько они далеки друг от друга. Сначала, в качестве подготовки, мы посчитаем меньшие множества, чтобы привыкнуть к абстрактному методу счета.

АБСТРАКТНЫЙ СЧЕТ

Представьте себе комплексный обед в следующих вариантах:

Суп дня

∞

Лосось на гриле с лимонным соусом «Бер-Блан»

или

Курица, зажаренная в пряных травах, с картофельным пюре

∞

Шоколадный торт

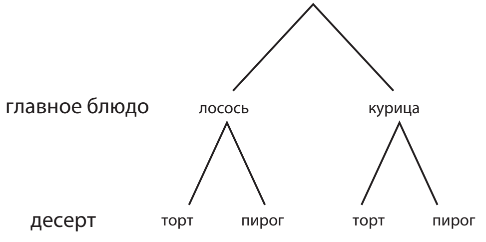
или

Лимонный пирог

Сколько здесь возможных вариантов обеда? Мы можем посчитать их, просто написав список всех возможных вариантов:

1. Лосось и торт.
2. Лосось и пирог.
3. Курица и торт.
4. Курица и пирог.

Если меню короткое, то посчитать все варианты не очень трудно. Но представьте меню из десяти блюд с тремя вариантами для каждого блюда. Нам потребуется гораздо больше времени, чтобы посчитать все возможные комбинации. В таких случаях абстрактный счет крайне полезен. Мы уже не будем присваивать объектам номера 1, 2, 3, 4 и так далее, а будем считать скорее логически. В качестве промежуточного этапа мы можем нарисовать вот такое небольшое дерево возможностей:



На вершине этого (перевернутого вниз головой) дерева находятся два возможных варианта главного блюда. В нижней части дерева мы видим, что, независимо от того, что мы выберем выше, у нас есть два варианта десерта. Каждый путь предполагает одну комбинацию меню, а всего их четыре. Но мы также можем посчитать их абстрактно: два варианта сверху умножаем на два варианта снизу и получаем $2 \times 2 = 4$ варианта. На данном этапе можно запутаться, ведь сложение даст нам тот же ответ: $2 + 2 = 4$. Но давайте попробуем сделать то же самое, добавив в меню первое блюдо.

Суп дня

или

Зеленый салат

∞

Лосось на гриле с лимонным соусом «Бер-Блан»

или

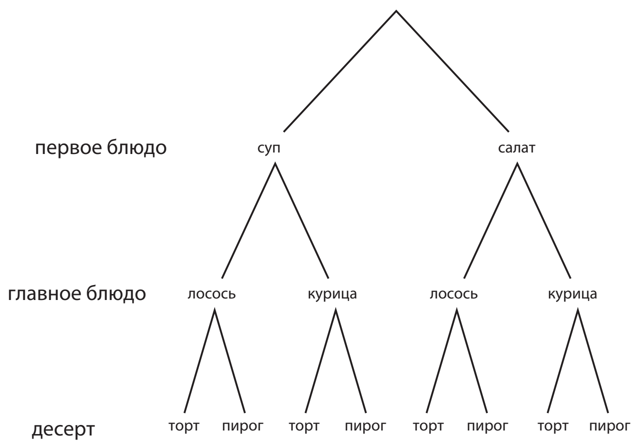
Курица, зажаренная в пряных травах, с картофельным пюре

∞

Шоколадный торт

или

Лимонный пирог



Теперь мы умножаем два варианта верхнего уровня на два варианта второго уровня, затем идем дальше и умножаем полученный результат на два варианта нижнего уровня. Итого получается $2 \times 2 \times 2 = 8$ возможных комбинаций.

Аналогичным образом мы можем посчитать десятичные числа. Для начала попробуем посчитать все действительные числа от 0 до 1, как мы это делали в предыдущей главе. Мы будем использовать метод, который в прошлый раз, когда мы пытались эвакуировать отель бесконечных десятичных знаков, действуя по порядку — знак за знаком, не сработал. Сначала мы взяли первый десятичный знак — это то же самое, что и первое блюдо в меню. Просто вместо двух вариантов блюд у нас есть десять вариантов первого десятичного знака. Вот все десять возможных вариантов числа с одним-единственным десятичным знаком:

0,0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9.

Числа с двумя десятичными знаками — это то же самое, что и меню из двух блюд с возможностью выбора из десяти вариантов для каждого блюда. То есть получится 10 × 10 = 100 возможных комбинаций. Это можно представить в виде разветвленного дерева: на верхнем уровне будет 10 возможных вервей, и на каждой ветви — еще дополнительно 10 ветвей. В итоге получается 100, или 10^2. Из предыдущей главы мы уже знаем, что 100 возможных вариантов числа с двумя десятичными знаками выглядят так:

0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19
0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29
0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,36	0,37	0,37	0,39
0,40	0,41	0,42	0,43	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,49
0,50	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59
0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69
0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79
0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,89
0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99

Теперь мы можем обобщить сказанное для любого n-го количества десятичных знаков, что аналогично меню с n-м количеством блюд или дереву с n-м количеством уровней. Для числа с n-м количеством десятичных знаков это будет 10 ×

× 10 × ... × 10 возможных вариантов, где 10 возникает n раз. То есть 10^n.

А теперь немного приоткроем завесу тайны: для чисел с бесконечным количеством десятичных знаков это будет «десять в бесконечной степени» возможных вариантов. Я сказала «приоткроем завесу тайны», но на самом деле это все та же уже известная нам теория множеств. Мы пытаемся посчитать действительные числа, или, иначе говоря, мы пытаемся найти официальную сумку объектов, которые можно соотнести со всеми действительными числами. Возможно, вы подумали, что мы могли бы просто создать «множество действительных чисел» и закрыть эту тему, точно так же, как мы поступили с натуральными числами. Но гораздо полезнее и поучительнее будет попробовать соотнести действительные числа с натуральными. «Десять в бесконечной степени» звучит не так уж нереально. Чтобы понять, сколько это, давайте превратим «десять в бесконечной степени» во множество объектов. Для этого мы воспользуемся двоичной системой счисления.

ЭКСКУРС В ДВОИЧНУЮ СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ

Двоичная система счисления — это такое представление чисел, в котором вместо цифр 0, 1, 2, 3 и так далее до 9, которыми мы обычно пользуемся в десятичной системе счисления, используются только цифры 0 и 1. Удивительно, сколько информации можно хранить с помощью всего лишь двух цифр, 0 и 1. Компьютеры работают исключительно в этой системе, как будто все вокруг представляет собой лишь переключение с *on* на *off*, и таких переключений существуют миллионы и миллиарды. Вы можете получить очень много разных конфигураций, имея в своем распоряжении очень маленькое количество вариантов *on*/*off* переключений.

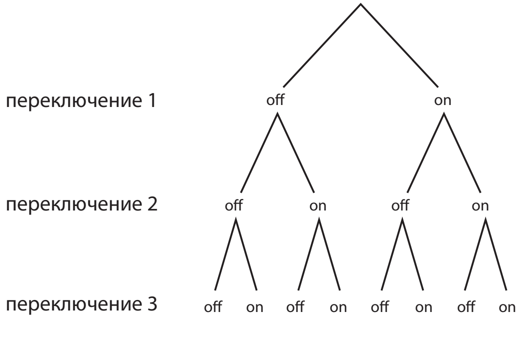
При наличии двух переключений вы можете получить четыре возможные конфигурации:

Переключение 1	**Переключение 2**
Off	Off
Off	On
On	Off
On	On

При наличии трех переключений вы получаете уже восемь конфигураций:

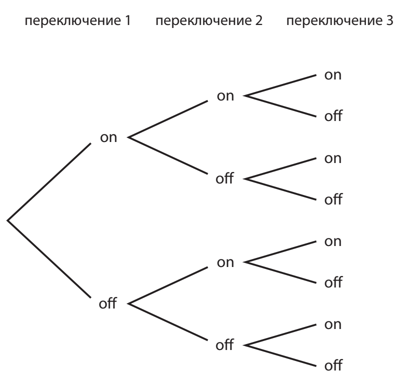
Переключение 1	**Переключение 2**	**Переключение 3**
off	off	off
off	off	on
off	on	off
off	on	on
on	off	off
on	off	on
on	on	off
on	on	on

Это похоже на меню из двух или трех блюд, о котором мы говорили. Дерево переключений будет выглядеть таким образом:



При наличии трех переключений каждая из восьми конечных точек дает нам одну из восьми конфигураций. Мы просто должны проследить сверху вниз по веткам до конечной точки, считывая по пути *off* и *on*.

Мы будем называть эти рисунки деревьями, потому что именно так они называются в математике. Это кажется глупым, ведь обычно деревья растут снизу вверх, но математические деревья часто растут так, потому что нам привычно читать сверху вниз. Хотя некоторые направляют математические деревья в сторону:



Думаю, вы понимаете, что не имеет никакого значения, в какую сторону мы направляем наше математическое дерево, потому что независимо от расположения схемы в ней зашифрована одна и та же информация. Мы можем также назвать такое дерево блок-*схемой*, так как оно демонстрирует абстрактные, а не физические отношения объектов друг к другу. По мере того как математика становится более абстрактной, в ней используются все более наглядные схемы, а абстрактные отношения объектов друг к другу становятся все более тонкими и все более значительными. Кроме того, схемы часто способны представить информацию гораздо более кратко, чем словесные объяснения. Вспомните, например, нашу схему эвакуации бесконечного отеля-небоскреба Гильберта.

В большинстве случаев базовая математика идет прямым путем. Например, вот такое сложение:

$$3 + 2 = 5.$$

Или вот такое уравнение:

$$2x + 3 = 7.$$

Символы радостно выстроились в ряд. Решение этого уравнения мы тоже будем записывать рядами:

$$2x = 7 - 3$$
$$2x = 4$$
$$x = 2.$$

Далее мы увидим, что по мере усложнения математика приобретет больше измерений. Если изучаемые нами объекты имеют форму, то у нас уже появляется больше способов скомпоновать их друг с другом. Мы сможем сделать нечто большее, чем просто выстроить их в ряд. Это как собирать пазл или строить что-то из Лего. Представьте, что вы пытаетесь объяснить кому-то на словах, как построить машину из Лего, не показывая инструкции в картинках. Рисунок может заменить тысячи слов, точно так же и математическая схема может многое объяснить гораздо быстрее и нагляднее.

Возможно, вы заметили, что, добавив к дереву новое переключение, на следующем уровне мы должны разделить каждую конечную точку на две ветви. Кстати, конечные точки часто называют «листьями», потому что они находятся на концах «ветвей», даже если дерево растет сверху вниз.

Каждый раз, когда мы добавляем одно переключение, мы удваиваем количество возможных конфигураций. Это значит, что для *четырех* переключений у нас будет $2 \times 2 \times 2 \times 2$ возможных конфигураций, то есть 2^4, а для n переключений у нас будет 2^n возможных конфигураций. Это похоже на то, как мы считали числа с n-м количеством десятичных знаков, только теперь у нас не десять, а два варианта выбора для каждого уровня, как в примере с меню.

Двоичная система счисления представляет собой различные наборы *on/off* переключений. Она похожа на десятичную систему счисления, но вместо единиц, десятков, сотен, тысяч и так далее у нас будут единицы, пары, четверки, восьмерки и так далее. Целые числа в двоичной системе счисления более популярны, чем дроби. Мы можем сравнить четырехзначное число в десятичной и в двоичной системе счисления, например, вот таким образом:

	1-я цифра	**2-я цифра**	**3-я цифра**	**4-я цифра**
Десятичная система счисления	$\times 10^3$	$\times 10^2$	$\times 10$	$\times 1$
Двоичная система счисления	$\times 2^3$	$\times 2^2$	$\times 2$	$\times 1$

В десятичной системе счисления число 1101 можно разложить следующим образом:

$$(1 \times 1\,000) + (1 \times 100) + (0 \times 10) + 1.$$

А двоичное число 1101 можно разложить на десятичные разряды следующим образом:

$$(1 \times 8) + (1 \times 4) + (0 \times 2) + 1.$$

В то время как в десятичной системе это будет 13.

В десятичной системе четырехзначное число может выразить любое число до 9999, то есть $10^4 - 1$. А в двоичной системе четырехзначное число может выразить только числа до $2^4 - 1 = 15$.

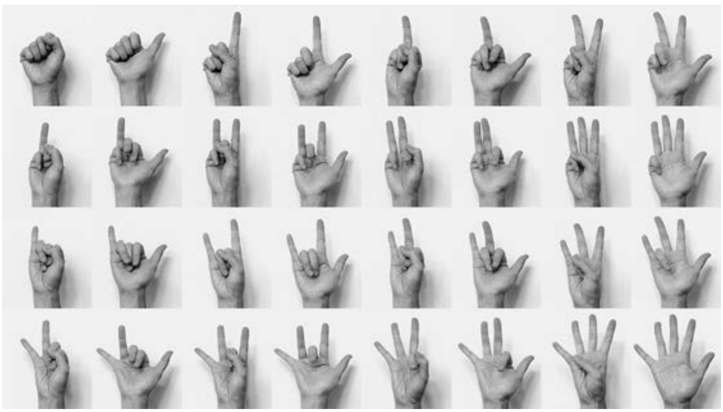
Может показаться, что двоичная система счисления слабовата, особенно при том, что в главе 5 я пообещала, что в двоичном мире мы сможем считать на пальцах до 1023. Но мы будем использовать принцип чередования. В двоичной системе вы можете зашифровать все, что угодно, с помощью простых *on/off* переключений, а в десятичной системе каждая «позиция» предполагает десять вариантов фрагмента информации, выраженные цифрами 0, 1 и далее до 9. Иногда у нас есть большое количество цифр, которые мы можем использовать, но мало позиций для них (скажем, в компьютере). Или, например, ISBN-код[1] на книгах размещается на ограниченном пространстве, но каждая позиция может выражать множество разных вещей. Цветовой код HTML еще более компактный, он записывается в шестнадцатеричной системе счисления, то есть на базе 16. Это значит, каждая позиция имеет 16 возможных вариантов. Используются такие знаки, как 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Один из моих любимых вариантов использования двоичной системы счисления — это свечи на именинном пироге. Если у вас есть всего семь свечей, то кажется, что вы можете украсить только пирог для ребенка, которому исполняется не более семи лет. Но если вы будете использовать двоичную систему счисления, то есть зажженная свечка будет представлять собой *on*, или 1, а незажженная свечка — *off*, или 0, то вы сможете поздравить любого человека, кому исполняется меньше 128 лет. То есть, конечно же, любого из ныне живущих на земле.

И да, мы действительно можем использовать двоичную систему счисления для того, чтобы посчитать на пальцах до 1023, то есть до $2^{10} - 1$. Вот как это делается. У каждого пальца есть два возможных положения. Он может быть выпрямленным, это будет 1, или загнутым, это будет 0. И вот у нас есть десять

[1] Международный стандартный номер книги. — *Примеч. пер.*

цифр (десять обычных цифр!), которые мы можем использовать в двоичной системе счисления, что позволит нам выразить числа от 0 до 1023. На рисунке ниже приведены числа от 0 до 31, которые мы можем показать с помощью одной руки.



А вот соответствующие цифры в пятизначной двоичной системе:

00000	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111
01000	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111
10000	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111
11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111

Это довольно занимательно, но требует некоторой концентрации внимания, гораздо большей, чем при обычном счете на пальцах до 10. К сожалению, маловероятно, что этот метод поможет нам высвободить ментальное пространство. Я не уверена, что у меня получится долго считать в двоичной системе и одновременно разговаривать с кем-нибудь. (Я только что попробовала сделать это, но дошла только до 10, а потом сбилась.)

Если вы умеете концентрироваться и хорошо владеете своими пальцами, то можете использовать их даже на базе 3. Это означает, что у вас будет 3 возможных варианта для каждой позиции. Для этого вы должны уметь сгибать каждый палец наполовину, независимо от положения остальных пальцев, тогда каждый палец будет иметь 3 возможных положения, которые будут соответствовать 0, 1 и 2. Попробуйте выпрямить безымянный палец и одновременно согнуть средний палец наполовину, затем согните безымянный палец полностью. Есть ли разница между этими положениями? Тут требуется немало ловкости.

Это все о целых числах, но кроме них у нас есть дроби, которые мы точно так же можем использовать в двоичной системе счисления. Нужно просто вспомнить, что в действительности означают десятичные знаки, и превратить их в «двоичные знаки». Кроме того, мы никогда не должны использовать слово «десятичный», когда имеем в виду «дроби». (Мне всегда хочется сказать «двоичный десятичный», но с лингвистической точки зрения это не имеет смысла.)

Когда мы имеем дело с десятичными дробями, после запятой идут десятые, потом сотые, потом тысячные и так далее. Например, число

$$0{,}3526$$

в действительности представляет собой

$$\left(3\times\frac{1}{10}\right)+\left(5\times\frac{1}{100}\right)+\left(2\times\frac{1}{1000}\right)+\left(6\times\frac{1}{10\,000}\right).$$

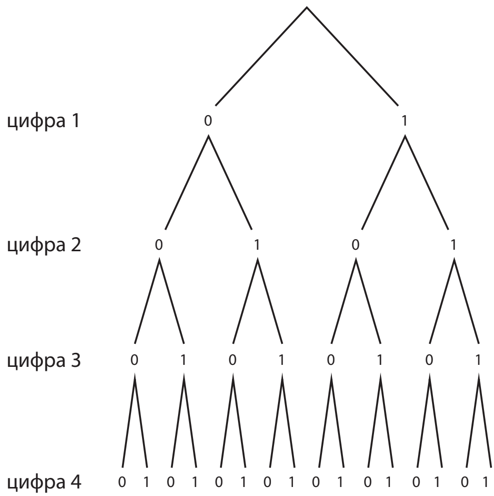
У двоичных дробей первый знак после запятой будет половина, следующий — четверти, потом восьмые доли и шестнадцатые доли. Так, двоичное число

$$0{,}1101$$

можно также записать как

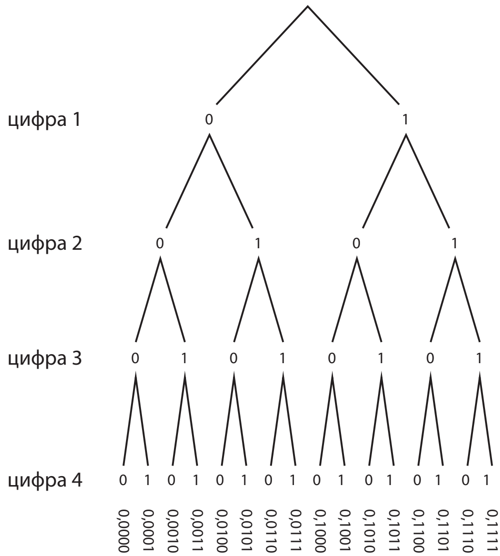
$$\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(1\times\frac{1}{4}\right)+\left(0\times\frac{1}{8}\right)+\left(1\times\frac{1}{16}\right).$$

Что в обычной десятичной системе счисления будет десятичной дробью 0,8125. Мы также можем изобразить все возможные двоичные дроби в виде дерева, точно так же, как мы рисовали все конфигурации переключений *on/off*.



На этом рисунке вместо ветвей *off* и *on* у нас будут ветви 0 и 1. Это похоже на то, как мы использовали зажженные и незажженные свечки на двоичном именинном пироге в качестве 0 и 1. Сейчас у нас есть только четыре цифры, и, значит, будет только четыре уровня разветвления. Мы могли бы использовать этот метод также для обычных десятичных дробей, но тогда нам понадобилось бы десять ветвей, выходящих из каждой конечной точки на каждом уровне. Такое дерево быстро нарисовать не получится.

Теперь каждый лист представляет собой двоичную дробь. Чтобы узнать, какую именно, нужно проследить по дереву сверху вниз, считывая по пути нули и единицы на каждой ветви. Так, первый лист будет 0,0000. Второй — 0,0001 и т. д. Вот они все:



Если у нас четыре цифры, то наше дерево будет иметь пять уровней, если у нас *n* цифр, то наше дерево будет иметь *n*-е количество уровней, а если у нас будут двоичные дроби с бесконечным количеством десятичных знаков, то это будет «дерево с бесконечным количеством уровней». Это немного странная концепция, потому что предполагается, что конечные точки дерева — листья — должны представлять собой итоговые числа. Но если дерево растет бесконечно, то не будет никаких конечных точек. По этой причине разумнее рассматривать числа как линии на дереве. Мы уже выяснили, что можем узнать, какое число выражает каждый листок, проследив за его линией по дереву сверху вниз. Даже если у дерева нет никаких конкретных конечных точек (потому что оно бесконечно), мы все равно можем проследить за его линиями, которые тоже будут продолжаться бесконечно.

Двоичные числа могут выражать все числа, которые способна выразить обычная десятичная система (просто для этого требуется больше цифр), точно так же двоичные дроби могут выражать все возможные десятичные дроби (тоже используя при этом больше цифр). Так, линии бесконечного дерева соответствуют всем «десятичным числам, которые продолжаются бесконечно», то есть всем действительным числам. Или, как минимум, действительным числам от 0 до 1. И вот мы снова можем приоткрыть дверь в неизведанное:

- По дереву с n-м количеством уровней проходит 2^n линий.
- По дереву с бесконечным количеством уровней проходит «два в бесконечной степени» линий.

До сих пор мы не рассматривали целую часть дроби. В следующей главе мы узнаем, почему эта часть дроби не имеет большого значения. Мы также выясним, почему целую часть дроби лучше рассматривать в двоичной системе счисления, а не в десятичной и почему сначала мы могли ее игнорировать.

Возможно, сейчас вы думаете, что мы все еще ничего не добились. Ведь мы так и застряли на вопросе: сколько будет два в бесконечной степени? В следующей главе мы соберемся с силами и справимся с этим вопросом. Но сначала увидим такой захватывающий пейзаж, какой мы только способны оценить. Мы уже знаем, как построить действительные числа из натуральных с помощью деревьев. Знаем, что именно так можно создать более большую бесконечность. Все, что нам теперь нужно, — это повторение, и так мы создадим иерархию бесконечностей. Это тема следующей главы.

8 СРАВНИВАЯ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Когда у ребенка впервые получается взобраться на первую ступеньку лестницы, процесс поглощает его. Теперь ему хочется вскарабкаться на следующую ступеньку, а потом на следующую. Он очень удивлен, что может настолько высоко забраться, всего лишь повторяя одно и то же новое действие, которому только что научился. Если ребенку вдруг удалось преодолеть особенно высокую ступеньку, то он очень этому радуется.

Только что мы с вами научились взбираться на особенно высокую ступеньку: мы узнали, как добраться от одной бесконечности до еще большей бесконечности. И в точности как маленький ребенок, восхищенный своей новой способностью преодолевать ступеньки, мы хотим карабкаться дальше, взобраться на следующую ступеньку, а потом еще выше. Наши ступеньки не настоящие ступеньки, это даже не «ступеньки-числа». Это ступеньки лестницы в бесконечность.

Теперь давайте сравним вот такие факты:

* Действительные числа более бесконечны, чем натуральные.
* Если бесконечность натуральных чисел обозначается как ω, то существует 2^{ω} действительных чисел.

А сейчас мы будем повторять одно и то же действие, чтобы доказать, что так мы сможем получить все более бесконечные бесконечности вечной иерархии бесконечностей. Конечно, сначала мы должны определиться с тем, что, в конце концов, означает «более бесконечные бесконечности».

Главный вопрос: как сравнивать размеры бесконечностей? Мы уже решили, что действительные числа несчетные, то есть их невозможно в точности соотнести с натуральными числами, потому что некоторые действительные числа обязательно будут пропущены. На интуитивном уровне ясно, что действительных чисел должно быть «больше», чем натуральных, но что конкретно это означает, если и те и те бесконечны? Одни бесконечности больше, чем другие бесконечности. Как это возможно с учетом того, что бесконечность уже бесконечно велика? Разве бесконечность не есть уже самое большое, что существует в мире? Как что-то может быть больше нее?

Такие вопросы, как и разговоры о душе, о вечной жизни или о том, поправилась я или нет, в конечном итоге сводятся к необходимости дать точное определение всем понятиям. Что имеется в виду под словом «толстая»? В нашем случае вопрос будет звучать так: что мы имеем в виду, говоря «большой»? Мы можем махнуть рукой и сказать: это не имеет никакого значения, потому что бесконечность и так бесконечно большая. Но математики не склонны махать руками, пока не обнаружат фактическое логическое противоречие. Если существует явление, которое *интуитивно* кажется разумным, то математики стремятся обнаружить среду, в которой оно будет разумным и с *логической* точки зрения. Так проявляется наше упрямство. Если во время горного восхождения тропинка выводит меня к обрыву, я начинаю нервничать и поворачиваю назад. Но если я вижу математический обрыв, то есть пропасть между интуитивным восприятием и логикой, то я без страха устремляюсь к нему, чтобы изучить его вблизи.

Как правило, для этого мне необходимы точные определения понятий. Вам кажется, что мы ходим по кругу? Если я хочу доказать, что я не толстая, то могу взять мой индекс массы тела в качестве оценочного параметра, и тогда, согласно большинству «официальных» определений этого понятия, получится, что я в норме. Но если я хочу, наоборот, доказать, что я толстая, то я могу взять в качестве оценочного параметра соотношение талии и бедер, в этом случае согласно большинству определений этого понятия, я толстая (что предполагает также риск диабета).

Кажется, что использование точных определений в своих целях уводит нас от стандартного математического мышления. Начиная изучать какой-либо объект, скажем числа, первым делом мы проверяем, что верно для чисел, а что нет. Например, что получится, если сложить 3 и 4? А что получится, если сложить 4 и 3? Ага, ответ один и тот же. Так мы обнаружили нечто, что является верным при сложении чисел.

Однако дальше в математике все идет по-другому, даже если раньше вы этого не замечали. Самый простой пример — решение уравнений. Например, дано такое уравнение:

$$3x + 4 = 10.$$

Вы говорите: я *хочу*, чтобы это равенство стало верным. Какое значение переменной x сделает его верным? Многое в высшей математике действительно начиналось с мечты. А потом ты берешься за работу и создаешь мир, в котором эта мечта становится реальностью. (Я думаю, что это похоже на мечты в обычной жизни.)

В случае с бесконечностью мы можем сказать: «Я хочу, чтобы одни бесконечности были больше, чем другие». Какое точное определение слова «больше» может исполнить мое желание? Ранее мы на примере доказали, что действительных чисел очевидно «больше», чем натуральных, хотя и те и другие бесконечны. Теперь мы можем использовать этот факт как точное определение для понятия «более большая бесконечность». Посмотрим, что произойдет. А произойдет кое-что интересное: мы узнаем, как построить иерархию все больших и больших бесконечностей.

СРАВНИВАЯ МНОЖЕСТВА ОБЪЕКТОВ

В предыдущей главе мы выяснили, что действительные числа несчетные, доказав, что все попытки объединить их в пары с натуральными числами обречены на провал: как минимум одно действительное число останется в одиночестве. Мы можем использовать этот метод для сравнения любых двух множеств. Вот так он работает для очень маленьких множеств:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & \longrightarrow & 8 \\ 3 & \longrightarrow & 12 \\ & & 16 \end{array}$$

Мы уже приводили этот пример раньше. Число 16 справа осталось без пары. Что бы мы ни делали, справа обязательно будет стоять число без пары, и не обязательно именно 16.

Если все попытки объединить объекты множеств *A* и *B* в пары приводят к тому, что как минимум один объект справа остается без пары, то можно сказать, что множество справа «больше».

С научной точки зрения все немного сложнее. Утверждение выше гласит, что сюръективное отображение слева направо *невозможно*, но чисто формально необходимо заметить, что инъективное отображение слева направо при этом является *возможным*. Грань весьма тонка. Все дело тут в аксиоме выбора. Во всех рассматриваемых случаях инъективное отображение вполне очевидно. Например, отображение натуральных чисел в действительных числах — это явное инъективное отображение, потому что мы просто берем натуральное число из множества действительных чисел и объединяем его в пару с самим собой.

В некотором смысле это похоже на простейший способ, которым маленький ребенок часто пользуется, чтобы узнать, сколько у него предметов, когда он еще не научился считать. Например, чтобы узнать, хватит ли ему печенья поделиться с друзьями, он отдает по одной штучке тому, кто умеет считать, и тот, скорее всего, будет считать вслух каждое полученное печенье. Чтобы узнать, что в «*Танцах со звездами*» знаменитостей столько же, сколько профессионалов, мы просто должны убедиться, что они объединены в пары. Это значит, что их одинаковое количество. При этом не нужно считать всех участников, потому что нам необязательно знать, сколько их всего. Но, даже если мы посчитаем их, это будет не что иное, как соотнесение группы людей с официальной числовой суммой. Скажем, у нас есть десять участников. Если вы будете их считать, то фактически вы будете просто создавать пары с множеством чисел:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Если вы объедините участников в пары с этим множеством чисел и выясните, что числа 9 и 10 не были использованы, то станет понятно, что у вас *меньше* десяти участников. А если вы объедините участников в пары и выясните, что числа 9 и 10 были использованы два раза, то станет понятно, что у вас *больше* десяти участников.

При столь малом количестве объектов множества такой детальный анализ не требуется, это будет перебор. Однако это очень типичная для математики проблема. Вы начинаете изучать ее с простых ситуаций, но они слишком просты и для них совсем не нужны никакие глубокие математические познания, поэтому рассуждения кажутся бессмысленными. А если вы сразу приметесь за изучение действительно сложных ситуаций, то это будет слишком трудным началом.

В любом случае такой способ объединения объектов в пары — это еще одна из уловок маленьких детей, не умеющих считать.

Например, ребенок хочет посадить в каждый вагон своего лего-поезда по одному лего-человечку. Если человечки закончились, но остались пустые вагоны, то ребенок понимает, что человечков не хватает. Это очевидно, даже если он не знает, ни того, сколько всего у него человечков, ни того, сколько человечков требуется для заполнения каждого вагона. Когда мы имеем дело с бесконечными множествами, мы должны точно так же поступать с понятиями «больше» и «меньше», потому что мы тоже не знаем, сколько всего объектов во множестве, если это множество бесконечно большое.

Давайте представим, что у нас бесконечное количество лего-человечков и мы должны поместить их в бесконечный лего-поезд. Мы хотим узнать, что «более» бесконечно: человечки или вагоны. Возможно, вы думаете, что если в конце поезда у нас останутся пустые вагоны, значит, нам не хватает человечков. Первая проблема здесь заключается в том, что мы не можем точно сказать, что значит «конец поезда». Если мы начнем размещать наших бесконечных человечков в вагонах (неважно, бесконечны вагоны или нет), это будет длиться «вечно», и мы так никогда и не доберемся до конца поезда. Но давайте не будем обращать внимание на этот факт, ведь мы рассуждаем теоретически и вовсе не обязаны делать что-либо подобное в реальности.

Вот способ, с помощью которого мы можем поместить человечков в вагоны и получить пустые вагоны в конце поезда. Мы перепрыгиваем первый вагон, предположив, например, что первый человечек похож на меня и тоже не любит ездить в первом вагоне, опасаясь аварий. Мы помещаем первого человечка во второй вагон, второго человечка — в третий вагон и так далее. Таким образом мы заполняем все оставшиеся вагоны. В итоге у нас получается один пустой вагон, но это вовсе не значит, что у нас не хватает человечков. Мы можем сдвинуть всех на один вагон назад, и тогда все вагоны будут заняты.

Мы можем даже оставить в начале поезда бесконечное количество пустых вагонов. Например, мы хотим поместить человечков только в четные вагоны, тогда мы занимаем вагоны 2, 4, 6, ... и так далее, точно так же, как в одном из сценариев эвакуации отеля Гильберта. В этом случае все нечетные вагоны останутся пустыми. Кажется, что у нас не хватает человечков, но мы точно знаем, что это не так.

Это одна из тех невероятных и удивительных вещей, которые происходят, когда имеешь дело с бесконечностью. А значит, теперь мы снова должны либо махнуть рукой, либо более внимательно отнестись к определению понятий. Мы можем перегруппировывать наши бесконечные множества различными невероятными способами, так что в некоторых случаях будут использоваться все вагоны, а в некоторых — нет. Это похоже на заселение еще одного гостя в заполненный отель Гильберта. Подобное невозможно, если у вас есть, скажем, всего десять человечков и десять вагонов. Если вам нужно поместить по одному человечку в каждый вагон, то вы тоже можете разместить их множеством разных способов, но как только у вас закончатся человечки, у вас одновременно закончатся и вагоны. А если у вас есть какое-нибудь другое конечное множество человечков и вагонов и у вас закончились человечки, но остались пустые вагоны, то вы точно будете знать, что вагонов было больше, чем человечков.

В случае с бесконечным количеством человечков и бесконечным количеством вагонов вы можете использовать всех человечков, и у вас при этом могут остаться пустые вагоны, но вы не будете точно знать, *можно* ли перегруппировать человечков так, чтобы были использованы все вагоны. Если вы хотите доказать, что у вас больше вагонов, чем человечков, то вы должны убедиться в том, что *невозможно* перегруппировать человечков таким образом, чтобы абсолютно все вагоны были использованы, а человечки остались. Кажется, что это очень труднодоказуемо, но мы уже однажды делали нечто подобное при помощи диагонального аргумента Кантора. Тогда мы доказали, что не существует идеального отображения действительных и натуральных чисел, потому что если бы оно было возможно, то как минимум одно действительное число всегда оставалось бы без пары.

В математике в этом случае мы не используем слово «больше», так как оно звучит недостаточно точно. Мы сейчас говорим об очень специфической величине «крупности», которой лучше дать более точное определение. Правильное математическое слово для нее — «мощность множества». Мощность множества объектов — это величина, показывающая, сколько в нем объектов. Если множество содержит в себе конечное количество объектов, то его мощность — это просто количество этих объектов. Если множество содержит бесконечное количество объектов, то все будет немного сложнее. Мы все еще похожи на маленького ребенка, который не умеет считать: мы можем определить, что два множества имеют одинаковую мощность, мы также можем определить, что одно множество больше другого, но мы не можем точно сказать, чему фактически равна мощность множеств. Тем не менее мы уже научились строить бесконечные множества со все большей и большей мощностью.

САМАЯ МАЛЕНЬКАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ

Наименьшее из возможных множеств — пустое. Поэтому самая маленькая возможная мощность множества равна 0. Далее следуют все возможные конечные варианты множеств: множество из одного объекта, множество из двух объектов, множество из n-го количества объектов, где n — любое конечное число.

Получается, что натуральные числа — это самое маленькое из возможных *бесконечных множеств*. Однако мы помним, что под «самым маленьким» в данном случае имеется в виду точная величина, которая определяется методом создания пары для каждого объекта множества. Что мы подразумеваем, говоря, что бесконечное множество «меньше» множества натуральных чисел? Мы хотим сказать, что это другое бесконечное множество, удовлетворяющее следующему условию: если мы попытаемся объединить его объекты в пары со всеми натуральными числами, то как минимум одно натуральное число обязательно останется в одиночестве.

Давайте рассмотрим это снова на примере эвакуации гостей отеля Гильберта. У вас бесконечное количество гостей, но после их эвакуации в другой отель обязательно останутся свободные комнаты. Хотя потом мы всегда можем «переэвакуировать» всех так, что ни один номер не будет пропущен. Для этого мы должны попросить гостей в новом отеле переместиться так, чтобы все комнаты были заняты. Звучит несколько неопределенно, но мы можем дать гостям точную инструкцию: «Посчитайте, сколько человек проживает в комнатах с номером меньше, чем ваш. Прибавьте к их количеству единицу и переезжайте в комнату с таким номером».

* Тот, у кого будет самый маленький номер, прибавляет ноль человек, потому что ни у кого нет номера меньше, чем у него. Значит, он переезжает в комнату с номером 0 + 1 = 1.
* Тот, у кого следующий после этого самый маленький номер, прибавляет одного человека и переезжает в комнату с номером 1 + 1 = 2.

Эти рассуждения еще не совсем похожи на доказательство, однако их уже можно назвать *концепцией* доказательства того, что можно создать пары из всех объектов любого бесконечного подмножества натуральных чисел и всех натуральных чисел. Это значит, что любое подмножество натуральных чисел либо является конечным, либо имеет ту же самую мощность множества, что и множество всех натуральных чисел. Между ними нет бесконечности. Так мы выяснили, что самая маленькая из возможных бесконечностей — это бесконечность размером с натуральные числа.

Помните, когда мы пытались доказать, что бесконечность это число, мы постоянно сталкивались с проблемой вычитания бесконечности с обеих сторон равенства? Такое вычитание постоянно порождало противоречие. Теперь мы начинаем понимать, почему это происходило. Если у вас есть бесконечное множество натуральных чисел, то в вашем распоряжении очень много разных способов вычесть из него бесконечное подмножество. Вы можете вычесть все, тогда у вас ничего не останется. Вы также можете вычесть все четные числа, тогда у вас останется бесконечность нечетных чисел. А еще вы можете вычесть все, что больше 10, тогда у вас останется только 10 чисел. То же самое будет при вычитании любого другого конечного числа *n*. При вычитании бесконечности можно получить *любой* ответ. Мы вернемся к этому вопросу в следующей главе.

Мы научились создавать разные размеры бесконечности, теперь нужно подумать о более удачном обозначении для бесконечности. В ситуациях, когда нужно быть предельно внимательными к размерам бесконечности, мы используем запись $\aleph_0$. Такой символ называет «алеф». Это первая буква древнееврейского алфавита, а индекс 0 означает, что это самая маленькая из возможных бесконечностей, самое начало иерархии бесконечностей. Такое обозначение читается как «алеф-ноль».

СЛЕДУЮЩАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ

Мы уже повстречали много бесконечностей, которые оказались одинакового размера с множеством натуральных чисел. Некоторые из них кажутся меньше, но на самом деле таковыми не являются. Например, множество четных или множество нечетных чисел. Или даже еще более яркий пример: множество чисел, кратных 100. Или числа, кратные миллиону. Это лишь крошечная (одна миллионная) доля натуральных чисел, но это все равно бесконечность с мощностью, равной мощности множества всех натуральных чисел. Теперь утверждение «бесконечность, деленная на миллион, остается бесконечностью» приобретает смысл. Мы также можем рассмотреть отдельно числа более 100. И они тоже будут бесконечностью размером с множество натуральных чисел. И утверждение «бесконечность минус 100 равно бесконечность» тоже становится осмысленным.

Мы уже увидели бесконечности, которые кажутся больше, но на самом деле таковыми не являются. Например, два множества натуральных чисел: красное и синее. Или три множества, или счетное бесконечное количество множеств натуральных чисел. Или множество всех целых чисел, или даже множество всех рациональных чисел. Мы уже убедились в том, что объекты всех этих бесконечных множеств могут быть объединены в пары с натуральными числами. Это доказывает, что все они тоже являются $\aleph_0$.

Однако мы повстречали только одно множество, которое на самом деле больше множества натуральных чисел: это множество действительных чисел. Вопрос теперь заключается в том, можно ли назвать его следующей по величине бесконечностью? Этот крайне сложный вопрос можно решить с помощью *континуум-гипотезы*[1]. «Континуум» в данном случае означает действительные числа, потому что они способны заполнить собой всю числовую ось «непрерывно», в отличие от целых чисел или рациональных чисел, которые оставляют пропуски. Континуум-гипотеза называется гипотезой, потому что она не доказана. Эта гипотеза, высказанная Георгом Кантором в 1878 году, предполагает, что мощность множества действи-

---

[1] Континуум-гипотеза, или первая проблема Гильберта, — любое бесконечное подмножество континуума является либо счетным, либо континуальным. Континуум-гипотеза стала первой из двадцати трех математических проблем, о которых Давид Гильберт доложил на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году. — *Примеч. ред.*

тельных чисел является следующей по величине бесконечностью после бесконечности натуральных чисел. Ее также можно сформулировать по-другому: не существует множества, размер которого находится в промежутке между множеством натуральных чисел и множеством действительных чисел. Это означает, что если некий объект вырвется на свободу и станет больше множества натуральных чисел, то ему все равно будет суждено быть лишь равным множеству действительных чисел. Правда это или нет, доказать невозможно. В одних мирах это правда, в других — ложь, все зависит от того, какой мир вы выберете.

Доказано, что континуум-гипотезу *невозможно* доказать с помощью стандартного типа логики, называемой системой Цермело — Френкеля[1]. Также доказано, что ее невозможно опровергнуть! Это означает, что мы можем найти мир, в котором она верна, и точно так же можем найти мир, в котором она ложна. Результат *не зависит* от законов логики. Курт Гедель доказал в 1940 году, что гипотеза не может быть опровергнута, а Пол Коэн доказал в 1963 году, что она не может быть доказана. Это был настолько значительный вклад в науку, что Коэну дали Филдсовскую премию.

Следующая по величине бесконечность после $\aleph_0$ должна называться $\aleph_1$. Континуум-гипотезу еще можно сформулировать следующим образом: континуум действительных чисел равен $\aleph_1$. В этом вопросе мы можем пойти дальше, так как из предыдущей главы нам уже известно, чему равна мощность множе-

[1] Система аксиом Цермело — Френкеля (ZF) является стандартной системой аксиом для теории множеств. Названа в честь Эрнста Цермело и Адольфа Френкеля. Современная теория множеств строится на системе аксиом — утверждений, принимаемых без доказательства, — из которых выводятся все теоремы и утверждения теории множеств. — *Примеч. ред.*

ства действительных чисел в отношении к мощности множества натуральных чисел. А значит, если мощность натуральных чисел равна $\aleph_0$, то количество действительных чисел будет $2^{\aleph_0}$ (при использовании двоичных дробей).

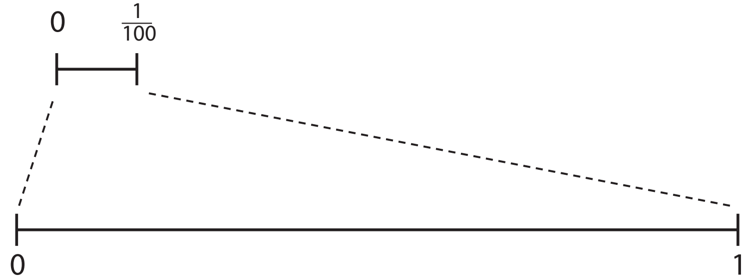
Возможно, вы заметили, что если бы мы использовали десятичные дроби, то ответ был бы $10^{\aleph_0}$. Двоичная система более разумна с точки зрения математики по нескольким причинам. Во-первых, потому что 10 — это странное произвольное число, применяемое при счете действительных чисел, исключительно потому, что у нас десять пальцев и мы предпочитаем десятичную систему исчисления на базе 10. А вот число 2 — вовсе не произвольное: это самая маленькая из возможных баз.

Другая причина еще логичнее: $2^{\aleph_0}$ *выглядит* меньше, чем $10^{\aleph_0}$. А ведь мы как раз ищем то, что меньше, то есть пытаемся выяснить, можно ли множество $2^{\aleph_0}$ *назвать* следующей, меньшей по величине бесконечностью после $10^{\aleph_0}$. Будет логично выразить ответ так, чтобы он выглядел меньше. Формально нет никакой разницы, ведь бесконечность размера $2^{\aleph_0}$ равна бесконечности размера $10^{\aleph_0}$. Фактически они обе равны $1\,000\,000\,000\,000^{\aleph_0}$, но если я скажу вам, что это и есть следующая по величине бесконечность после $\aleph_0$, то вы можете спросить, так ли важна в данном случае первая часть числа, то есть «1 000 000 000 000». Если мы остановимся на $2^{\aleph_0}$, то все становится понятнее: для того, чтобы создать следующую по величине бесконечность, нужно возвести некое число в степень предыдущей бесконечности, даже если ее размер был всего лишь 2.

Возможно, сейчас вы вспомнили, что раньше мы игнорировали знаки до запятой. Это было довольно бесцеремонно с моей стороны, но на самом деле тут нет большой разницы. Но давайте исправляться. Знаки перед запятой — это целая часть числа. Нам известно, что существует $\aleph_0$ целых чисел. Значит, нужно умножить количество наших действительных чисел на

$\aleph_0$ — так мы допускаем все возможные целые числа. Однако умножение гиганта $2^{\aleph_0}$ на счетную бесконечность не сделает бесконечность больше. Скажу по секрету, я всегда знала об этом, именно поэтому меня не особенно волновали знаки до запятой.

Геометрический способ выразить это заключается в том, что, игнорируя целую часть числа, мы считаем только действительные числа от 0 до 1. А теперь давайте посмотрим на отрезок числовой оси с этими действительными числами. Сколько раз мы должны будем скрепить части этого отрезка, чтобы он стал непрерывным? По одному разу на каждое натуральное число, так что у нас будет $\aleph_0$ копий этого отрезка. Более того, мы можем ограничиться *любым* отрезком оси действительных чисел (даже самым крошечным, размер тут не имеет значения), и на нем всегда будет одно и то же общее количество чисел. Один из способов убедиться в этом — биективное отображение, то есть создание идеальных пар между числами крошечного отрезка и числами от 0 до 1. Например, давайте рассмотрим только действительные числа от 0 до $\frac{1}{100}$. Представьте, что мы хотим объединить их в пары с действительными числами от 0 до 1. Для этого нам нужно просто умножить их на 100 и составить пары с ответами. Это все, что требуется. Похоже на перенос маленького кусочка числовой оси на большую ось.



Это работает для интервала любого размера: от любого действительного числа до любого другого действительного числа. Но если мы будем рассматривать вообще все действительные числа, то нужен способ хитрее — простого «умножения всех чисел на бесконечность» будет уже недостаточно. Мы можем получить все положительные действительные числа так: начните с x, взятого на отрезке от 0 до 1. Далее посчитайте $1/x$, и вы получите некое число от 1 до бесконечности. Затем вычтите из него 1. Так вы получите пары действительных чисел от 0 до 1 со всеми действительными числами от 0 до бесконечности.

Теперь, когда мы знаем, чему равна мощность множества всех действительных чисел, мы можем записать континуум-гипотезу в виде уравнения:

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}.$$

Итак, мы научились взбираться на первую ступеньку лестницы в бесконечность. Если у вас математический склад ума, то сейчас вы (в точности как маленький ребенок) стремитесь повторить то, чему вы только что научились, и возвести 2 в степень этой новой бесконечности. В более обобщенной версии континуум-гипотезы говорится, что на любом этапе это кратчайший путь добраться до новой, большей по величине бесконечности. Так мы можем получить иерархию бесконечностей, или алефов,

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots,$$

где в каждом случае $\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$. Это еще более сложный вариант континуум-гипотезы, поэтому мы не можем доказать, что кратчайший путь к созданию серии увеличивающихся бесконечностей действительно именно такой, но мы можем попытаться увидеть, как бесконечности будут увеличиваться.

ЭТИ БЕСКОНЕЧНОСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНО БОЛЬШЕ?

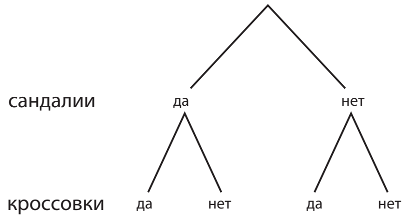
Если $\aleph_0$ — это «размер натуральных чисел», то как можно возвести 2 в его степень? Обычно мы определяем 2^n как «2, умноженное на само себя *n* раз», но с бесконечностью это не сработает, потому что вы не можете «умножить число 2 на само себя бесконечное количество раз».

Ключевой момент — перестать воспринимать 2^n как нечто, что мы можем делать только с числами, и вспомнить, что мы рассматриваем мощность как размер конкретного множества или, если хотите, официальной числовой сумки. Так, *n* фактически — это размер множества *n* объектов. Давайте не будем смотреть на 2^n как на размер некоего множества по отношению к множеству *n* объектов. Идея в том, чтобы создать концепцию, которая будет разумной для конечных чисел, а потом применить ее к бесконечным множествам, потому что мы знаем, что $\aleph_0$ — это не что иное, как размер множества натуральных чисел.

Мы вскоре убедимся в том, что это похоже на выбор обуви для отпуска. Принимая это важное решение, вы можете либо долго глядеть на всю вашу обувь, выбирая из всего количества те пары, которые вы хотите взять с собой; либо поочередно рассматривать каждую пару и задавать себе вопрос: да или нет. Итак, сколько может быть возможных комбинаций? Если у вас всего две пары, скажем, кроссовки и сандалии, то выбор такой:

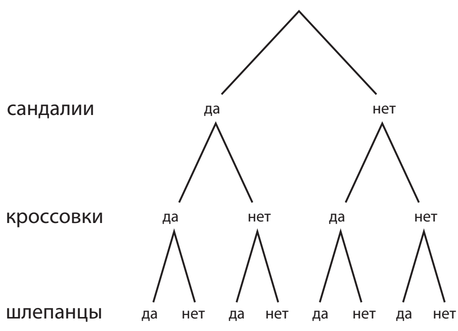
- Вообще ничего не брать. Ходить босиком.
- Взять только сандалии.
- Взять только кроссовки.
- Взять и кроссовки, и сандалии.

Всего четыре возможных варианта. Другой способ посчитать все варианты — метод «да или нет». Чтобы им воспользоваться, нужно нарисовать дерево принятия решения:



(И да, если вы действительно возьметесь рисовать дерево принятия решения, чтобы выбрать из двух пар обуви, то все будут смеяться над вами, потому что это абсурд. Хотя весьма в духе математиков. Я известна тем, что иногда рисую схемы оптимизации времени, проведенного на кухне за приготовлением угощения для большой вечеринки, но я всегда стараюсь поскорее выбросить эти схемы, чтобы их никто не увидел.)

Возможно, вы вспомнили это дерево. Точно такое же мы уже рисовали для выбора вариантов меню и для двоичных дробей. А если у нас будет три пары обуви, то дерево будет выглядеть так:



Теперь общее количество возможных вариантов будет $2 \times 2 \times$ $\times\ 2 = 2^3 = 8$.

Если у нас n-е количество пар обуви, то у нас будет 2^n возможных вариантов, точно так же, как итоговое количество двоичных дробей с n-м количеством десятичных знаков.

Теперь нам осталось только перенести этот алгоритм на случаи, когда n будет равно бесконечности. Это называется *генерализацией*, и это очень важная часть математического мышления. Вы изучаете хорошо знакомые вещи, а потом пробуете перенести концепцию на что-то менее знакомое, не нарушая при этом исходные условия этой концепции. Мы уже вскользь упоминали «бесконечные деревья», но тогда это были лишь робкие попытки заглянуть в неизвестность. Сейчас мы будем действовать гораздо точнее.

Выбирая обувь для отпуска, мы получили 2^n. Это *подмножество* нашего общего множества обуви. Вывод: если в нашем распоряжении есть n пар обуви, то у нас будет 2^n возможных подмножества обуви, которую мы можем взять с собой в отпуск.

Эта концепция работает даже при n, равном бесконечности, то есть если n будет любой интересующей нас версией бесконечности. Начнем с натуральных чисел. Мы определили мощность множества натуральных чисел как $\aleph^0$. Теперь рассмотрим множество всех возможных подмножеств натуральных чисел. *Определим* мощность этого множества как $2^{\aleph_0}$. Мы не стали считать мощность этого множества, а просто воспользовались идеей возвести 2 в бесконечную степень, сделав это так, чтобы получилось конечное множество значений степени для числа 2.

Нет никакой надежды на то, что однажды у нас получится записать все возможные подмножества для множества всех натуральных чисел; с другой стороны, мы никогда не сможем записать все натуральные числа. Фактически ситуация сложилась еще хуже. Подмножества натуральных чисел несчетные, а значит, бессмысленно пытаться составить их список.

Это невозможно даже теоретически, как минимум одно число будет пропущено.

Если вы помните, что $2^{\aleph_0}$ считается размером всех действительных чисел, то вам может прийти в голову, что попытки определить «количество всех действительных чисел» через «количество всех возможных подмножеств натуральных чисел» делаются наугад. Если это вас смущает, вот как можно убедиться в том, что эти два понятия напрямую связаны друг с другом. Мы помним, что для того, чтобы создать подмножество натуральных чисел, мы можем:

- написать список натуральных чисел, которые мы включили в наше подмножество;
- просмотреть список всех натуральных чисел и подписать рядом с каждым числом «да» или «нет», указав так, находится оно в нашем подмножестве или нет.

Если вы использовали второй метод, то у вас получилась длинная вереница «да» и «нет», которую вы можете превратить в длинную вереницу единиц и нолей, продолжающихся бесконечно. А это и есть двоичная дробь!

Получается, что мы можем использовать нечто вроде диагонального аргумента Кантора для того, чтобы доказать, что набор подмножеств всегда больше самого множества. Если речь идет о конечных множествах чисел, то все вполне очевидно. Независимо от того, сколько всего у вас пар обуви, возможных обувных комбинаций для отпуска у вас будет еще больше. С бесконечными множествами то же самое, и это можно доказать, хотя дело тут обстоит немного сложнее. По тому, как мы считаем 2^n, уже ясно, что 2^n всегда будет больше, чем n. Это значит, что вот эта наша предполагаемая иерархия бесконечностей

$$\begin{aligned}
&\aleph_0\\
&\aleph_1 = 2^{\aleph_0}\\
&\aleph_2 = 2^{\aleph_1} = 2^{2^{\aleph_0}}\\
&\aleph_3 = 2^{\aleph_2} = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

продолжаясь, действительно будет увеличиваться. Итак, независимо от того, насколько велика наша бесконечность, мы всегда можем получить еще большую бесконечность, использовав свойство набора всех ее подмножеств.

А значит, когда в детском споре речь заходит о бесконечности, то для того, чтобы сделать свою бесконечность больше, нужно сказать: «Я прав два в бесконечной степени раз!». Продолжение спора будет выглядеть примерно так:

```
«А я прав два в бесконечной степени два в бесконечной
                            степени раз!»
«А я прав два в бесконечной степени
                            два в бесконечной степени
                                  два в бесконечной степени раз!»
                                              ⋮
```

9

ЧТО ТАКОЕ БЕСКОНЕЧНОСТЬ?

Во время походов в горы мы часто идем исхоженными тропами. Я не профессиональный альпинист, поэтому тоже предпочитаю проторенные дороги, иногда даже с указателями. Мне запомнился один случай во время экспедиции по программе герцога Эдинбургского во Франции. Уже почти добравшись до места стоянки, мы поняли, что ошиблись на последнем повороте. Тропинок было больше, чем указано на карте. Показания нашего компаса, казалось, не соответствовали ни одной из них в точности. Мы устали. Помню, в тот день мы прошли 42 километра с 9–13,5-килограммовыми рюкзаками (в те времена палатки были очень тяжелыми). Нам не хотелось идти неверным путем, поэтому мы повернули назад и начали искать подсказки: какая тропинка кажется более проторенной, какая тропинка больше соответствует показаниям компаса, какая тропинка кажется ведущей к открытому пространству. В конце концов мы заметили стрелку, выложенную галькой в грязи. Ее сделал какой-то добрый человек, побывавший здесь до нас.

В первой части этой книги, совершая наше восхождение, мы часто заходили в тупик и были вынуждены возвращаться назад по своим же следам. Но в конце концов мы нашли многообещающую тропинку, ведущую к бесконечности. Теперь у нас есть несколько подсказок, чем на самом деле является бесконечность.

- Числа могут быть измерены с помощью официальной числовой сумки, или множества. Бесконечность не исключение.

- Емкость натурального ряда является самой малой бесконечной емкостью.
- Бесконечность действительных чисел больше, чем бесконечность натуральных чисел.
- Вы всегда можете получить еще большую бесконечность, возведя 2 в степень этой бесконечности. Это утверждение справедливо для любой бесконечности.

Кажется, что первый пункт указывает на следующее: несмотря на то, о чем мы узнали в первых главах, бесконечность фактически является чем-то вроде числа. При условии, что мы рассматриваем числа определенным образом. Целые, рациональные и действительные числа — это продолжение натуральных чисел, но в том смысле, который не особенно помогает нам в вопросе бесконечности. Однако мы узнали, что метод рассмотрения чисел как «официальных числовых сумок» даст нам такое продолжение натуральных чисел, которое *поможет* разобраться с бесконечностью. Фактически у нас будет два пути: порядковые числа и количественные числа. Сейчас мы узнаем, что они собой представляют и как им удается избежать проблемы, с которой мы сталкивались раньше, рассматривая бесконечность как число.

Мы уже говорили о мощности множества как о мере измерения «размера» числа. Количественные числа — это официальные числовые сумки, которые мы используем для измерения размера чисел, и в особенности размеров все больших и больших бесконечностей. (На практике конечные количественные числа не многим отличаются от конечных натуральных чисел.)

Однако существует еще один аспект бесконечности, о котором мы не должны забывать. Давайте вспомним, с чего мы начали наш разговор об отеле Гильберта. У нас был полный отель, и в него приехал еще один гость. Сначала нам казалось, что для него нет места, но потом нам пришла в голову мысль переместить всех проживающих в отеле на один номер вперед. Прекрасная идея, но мы совершенно упустили из виду суматоху, которая начнется при таком переезде. Совсем другое дело, если этот гость прибудет первым, и уже потом приедет бесконечно полный автобус с остальными гостями. Тогда никому не нужно будет переселяться, и никакой суматохи. Однако если сначала приедет бесконечно полный автобус, а потом еще один гость, то для того, чтобы его разместить, все обязательно должны будут сдвинуться на один номер. А значит, суматоха неизбежна!

Речь в данном случае идет о порядке прибытия гостей. Представьте, что номер 1 — самый лучший в отеле, номер 2 — следующий по комфортабельности номер и так далее. Каждый следующий номер становится хуже предыдущего. Будет нечестно размещать последнего гостя в самом хорошем номере. Разве вы будете в таком случае заселять гостей в комнаты исключительно согласно порядку их прибытия?

Это напоминает то, как я обычно стою в очереди в Альберт-холл[1] за билетами. Когда вы приходите, вам дают билетик с вашим номером в очереди. Однажды я приехала туда в 6 часов утра, потому что очень хотела попасть на выступление восхитительного оркестра имени Симона Боливара под руководством Густаво Дудамеля, который должен был исполнять симфонию № 2 Малера. Одно из моих самых любимых произведений. Я была безумно рада получить билетик с номером 6. Проведя целый день в очереди, я очень подружилась с номером 5. (Номерами 7 и 8 были мои родители.) В подобных случаях порядок прибытия действительно важен. Я приехала так рано, потому что мне очень хотелось сидеть в первом ряду. Проведя в очереди 13 часов подряд, я вовсе не хотела, чтобы

---

[1] Лондонский королевский зал искусств и наук имени Альберта. Считается одной из наиболее престижных концертных площадок в Великобритании и во всем мире. — *Примеч. ред.*

кто-то пролез вперед меня. Номер 1, 2 и 3 ночевали в палатках, чтобы получить места в очереди.

Совсем другое дело, когда вы устраиваете вечеринку в баре, который вмещает максимум 100 человек. Вы можете выдавать каждому на входе билетик с номером, и после того, как вы выдадите билетик номер 100, вы будете точно знать, что бар полон. Неважно, в каком порядке прибывают люди, нужно просто знать, когда вы дойдете до 100.

Такова разница между *кардинальными*, или *количественными*, и *порядковыми* числами. Кардинальными числами измеряют размер объектов, независимо от того, где эти объекты находятся по отношению друг к другу. А порядковые числа учитывают порядок следования. Точно так же, как менеджер отеля Гильберта, который переселял всех, чтобы разместить новых гостей, и устроил настоящую неразбериху.

Если мы рассматриваем только конечные числа, то между этими двумя типами чисел — порядковыми и кардинальными — не будет ощутимой разницы. Но если мы будем рассматривать также бесконечные числа, то разница становится очень существенной. Порядковые числа гораздо более деликатные, чем количественные.

В предыдущей главе мы говорили о размере объектов множества самом по себе, называя его «мощностью множества». Мы говорили также о порядковых числах. Одна существенная разница между кардинальными и порядковыми числами заключается в том, сколько различных типов бесконечностей они образуют. Мы уже знаем, что самая маленькая бесконечность — это множество натуральных чисел и что размер множества действительных чисел, возможно, является следующей по величине бесконечностью. Тем не менее если мы будем учитывать порядок прибытия гостей в отеле Гильберта и вспомним суматоху при их переезде, то между этими двумя бесконечностями *определенно* должны существовать некие порядковые бесконечности. Если для вас имеет значение, в каком порядке приезжают гости, то ситуация резко меняется и становится гораздо более причудливой.

Пример с отелем Гильберта, в который приехал новый гость, доказал нам, что «один плюс бесконечность» можно разместить в бесконечности без сутолоки и несправедливости. А при «*бесконечность* плюс один» обязательно будет неразбериха. Мы можем записать этот установленный нами факт следующим образом:

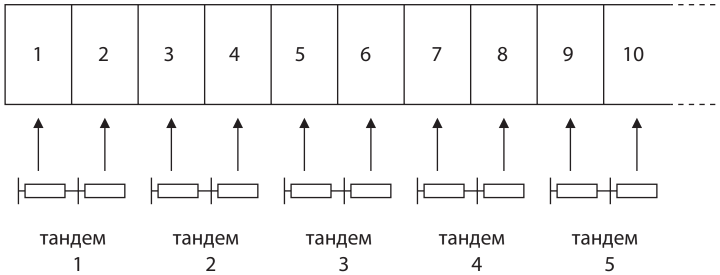
$$\infty + 1 \neq 1 + \infty.$$

Теперь давайте рассмотрим пример с двумя бесконечно полными автобусами. Если вы разместите пассажиров первого автобуса в отеле по порядку, то, когда приедет второй автобус, у вас возникнет проблема. Вы можете попросить пассажиров первого автобуса удвоить номер своей комнаты и переехать, оставив нечетные номера свободными. Таким образом можно разместить вновь прибывших. Но тогда новые гости будут заселены перед теми, которые приехали раньше. А это нечестно! У нас получилось «поместить два раза по *бесконечность* в бесконечность», но неразберихи мы не избежали.

Теперь давайте предположим, что вместо двух групп по *бесконечности* у нас бесконечные пары. Например, бесконечное количество двухместных велосипедов-тандемов, каждый — с двумя пассажирами. Очень реалистичный пример, правда?

Итак, подъезжает первый тандем, и вы размещаете первого пассажира в комнате 1, а второго пассажира в комнате 2.

Подъезжает следующий тандем, и вы размещаете его первого пассажира в комнате 3, а второго пассажира в комнате 4.



И так далее. Каждый раз, когда приезжает тандем, его пассажиры занимают два следующих номера. Ключевой момент здесь — *никому не пришлось переезжать*. Когда приехал второй бесконечный автобус, у нас получилось «два раза по *бесконечность*», а в этот раз у нас — «бесконечное количество раз по два», так как приехало бесконечное количество пар. В обычной арифметике с конечными числами мы не различаем, скажем, «два раза по пять» и «пять раз по два», потому что мы знаем, что это одно и то же. А в нашем случае мы выяснили, что «бесконечное количество раз по два» вмещается в отель при условии суматохи, а «два раза по *бесконечность*» размещается в отеле без всякой неразберихи. С учетом суматохи у нас получается следующее:

$$\infty \times 2 \neq 2 \times \infty.$$

Вот еще один намек на то, что бесконечность не ведет себя как обычное число, — при условии, что мы принимаем в расчет суматоху.

Возможно, вы думаете, что понятие «суматоха» не похоже на математический термин. Это правда. Поэтому давайте будем рассматривать ее как порядок. Вы можете определить, возникла ли «неразбериха», проверив, проживают ли гости в номерах в соответствии с порядком их прибытия. Если вас не волнует неразбериха, то вы можете не обращать внимание на порядок прибытия; важно только, хватило всем места или нет.

Это называется «арифметика кардинальных чисел», потому что мощность множества — это как раз количество объектов во множестве. Если вы обращаете внимание на порядок прибытия, то это уже «арифметика ординалов», то есть порядковых чисел, в которой речь идет не только о том, сколько всего объектов, но и об их порядке. Если мы говорим о конечных числах, то разницы между этими двумя арифметиками нет. Но вот что интересно: все становится иначе, когда речь заходит о бесконечности. Возникают две разные версии бесконечности, и обе верны.

БЕСКОНЕЧНЫЕ ОЧЕРЕДИ

Теперь давайте поразмышляем над порядком прибытия гостей. Для этого будет полезно вспомнить об очередях. Представьте, что вы отвечаете за выдачу билетиков с номером места в очереди. Это удивительно длинная очередь, что-то типа «очереди Гильберта», потому что в ней стоит бесконечное количество людей. У вас пачка билетиков по одному на каждое натуральное число: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и так далее. Люди приходят, и вы каждому выдаете билетик согласно порядку его прибытия.

Теперь представьте, что прибыло бесконечное количество человек (точно так же, как в отеле Гильберта) и вы использовали все свои билетики. Если сейчас приедет еще один человек, то вы *можете* просто попросить всех сдвинуться на одно место назад, чтобы освободить номер один, и тогда вы сможете выдать новичку запасной билетик. Но этот человек перепрыгнет всю бесконечную очередь. А это будет несправедливо. Самое справедливое, что мы можем сделать в этом случае, — начать новую пачку билетиков другого цвета. Допустим, первая пачка была красной, а вторая пачка будет синей. Но обязательно нужно помнить, что сначала выдаются *все* красные билетики и только потом — *все* синие билетики.

Вы можете спросить меня: есть ли способ разрешить эту ситуацию без второй пачки билетиков? Ответ: такого способа нет, потому что иначе кто-нибудь обязательно перепрыгнет очередь. Таким образом, мы видим, что при использовании *порядковых* чисел «*бесконечность* плюс один» будет больше, чем просто бесконечность. Когда мы рассматриваем бесконечность натуральных чисел в порядковом, а не в количественном (учитывая только размер) виде, то мы обозначаем ее как ω. Итак, у нас получилось $\omega + 1 > \omega$. С другой стороны, $1 + \omega$ означает, что один человек прибыл первым, а после него прибыло бесконечное количество людей. В таком случае вы можете довольно легко обойтись одной пачкой билетиков. Вторая пачка вообще не понадобится. Это значит, что $1 + \omega = \omega$.

Это начало удивительной и невероятной арифметики порядковых чисел, в которой приходится переосмыслить все правила, которые были верны для обычных чисел. Первое правило, которое необходимо переосмыслить, касается порядка сложения. Мы знаем, что при сложении обычных конечных чисел порядок сложения не имеет никакого значения. Например,

$$5 + 3 = 3 + 5.$$

Давайте запишем это в более общем виде:

$$a + b = a + b,$$

где a и b — любые действительные числа. (Мы помним, что действительные числа — это все десятичные числа: рациональные и нерациональные.) Мы уже встречали пример, когда это правило не сработало с бесконечными порядковыми числами, потому что

$$1 + \omega = \omega,$$

но

$$\omega + 1 \neq \omega,$$

значит,

$$1 + \omega \neq \omega + 1.$$

Свойство $a + b = a + b$, если оно является верным, называется *коммутативностью сложения*, потому что a и b можно «переставлять местами» по отношению друг к другу. Оно является верным для конечных чисел, даже если мы рассматриваем их в этом новом порядковом аспекте. Давайте проверим это свойство на числах 5 и 3.

Представьте, что вы снова отвечаете за выдачу билетиков в очереди. Приходят пять человек. Вы выдаете им билетики 1, 2, 3, 4, 5. Если придет еще три человека, то вы выдадите им 6, 7, 8. Это значит, что $5 + 3 = 8$, если мы используем порядковые числа.

Если сначала придут три человека, вы выдадите им билетики 1, 2, 3. А затем придут еще пять человек, и вы выдадите им билетики 4, 5, 6, 7, 8. Ответ все равно будет 8. Вам даже *необязательно* выдавать билетики в таком порядке. Факт остается фактом: в обоих случаях вы *можете* выдать им билетики от 1 до 8 и порядок очереди не нарушится. Ответ всегда будет одним и тем же, порядок выдачи билетиков не имеет значения.

Вы могли бы повести себя очень странно и начать выдавать билетики не по порядку, а вот так: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 или даже 1, 5, 9, 14, 18, 100, 200, 378. Это тоже вполне допустимо. Каждый человек все равно будет стоять в очереди в порядке своего прибытия. Просто нужно помнить, какие билетики вы перепрыгнули, и не выдавать их, если придет кто-то еще.

Что касается случая с 1 и ω, нельзя выдать человеку, пришедшему после ω людей, билетик из той же пачки, так как вы можете это сделать, когда ω людей приходит после одного человека. Иначе порядок очереди будет нарушен. Возможно, вы заметили, что это не математический аргумент, а просто разумная мысль. По-настоящему математический способ показать, что $1 + \omega$ не то же самое, что $\omega + 1$, состоит в следующем: нужно задать себе вопрос, кто стоит в очереди последним. В первом случае мы не можем этого сказать, потому что у нас ω людей, которые бесконечно прибывают. А во втором случае мы точно знаем, кто последний, — тот, кто пришел *после* бесконечного количества людей, которые пришли до него. Любая очередь с «идентифицируемым последним» — это не то же самое, что очередь с неидентифицируемым последним.

> В математике очереди, в которых нет последнего, называются предельными порядковыми числами. Потому что при достижении определенного предельного значения все ваши билетики будут использованы и вы не сможете продолжить выдавать их, не начав новую пачку.

Однако имейте в виду, что существует множество очередей разной длины, у которых есть «идентифицируемый последний». К примеру, это могут быть абсолютно все конечные очереди. Скоро мы узнаем, что есть также очень много очередей разной длины, у которых *нет* «идентифицируемого последнего».

УМНОЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ ОЧЕРЕДЕЙ

Обычно после вычитания мы беремся за умножение. Потому что умножение строится на повторении сложения. Мы знаем, что при умножении обычных чисел порядок не имеет значения, то есть

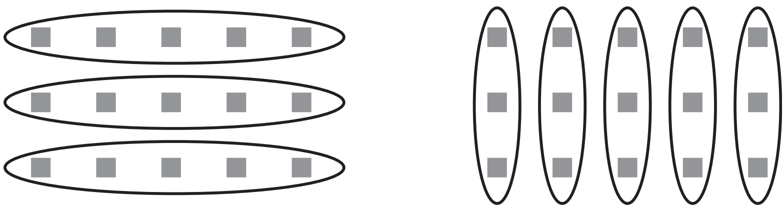
$$5 \times 3 = 3 \times 5.$$

В более общем виде это выглядит так:

$$a \times b = b \times a,$$

где a и b — любое действительное число. Это называется *коммутативностью умножения*. С бесконечными числами это не работает: первые намеки на эту мысль мы заметили, сравнив бесконечное количество двухместных велосипедов, прибывающих в отель Гильберта, и два бесконечно полных автобуса.

На этом этапе мы должны быть очень внимательны к тому, что такое умножение. Ведь есть много разных способов повторить сложение. При этом нам не стоит беспокоиться об обычных числах, так как любые способы умножения обычных чисел всегда дают один и тот же ответ. Возможно, вы совершенно забыли, что умножение можно рассматривать двумя разными способами. Вот эти два способа: 5 × 3 — это «пять раз по три» или «три раза по пять»? Это пять пачек печенья по три штучки в каждой или три пачки печенья по пять штучек в каждой? Это 3 + 3 + 3 + 3 + 3 или 5 + 5 + 5? Если мы говорим об обычных числах, то тут нет никакой разницы, потому что мы знаем, что ответ будет один и тот же. Однако когда мы объясняем умножение маленькому ребенку, он не сразу верит в это. Обычно требуется некоторое время для того, чтобы его убедить. Для этого можно выстроить предметы в виде прямоугольной решетки.



“3 раза по 5” “5 раз по 3”

Для бесконечных порядковых чисел это *имеет значение*, поэтому необходимо решить, что значит a раз по b. Обычно в математике это решается так: $a \times b$ значит «a, прибавленное к самому себе b раз». (Что-то вроде аналогии с a^b значит «a, умноженное на само себя b раз».)

Итак, мы можем рассматривать 5 × 3 как 5 человек, вставших в очередь, после которых пришли еще 5, а затем еще 5. Вы выдадите им билетики с номерами с 1-го по 15-й. А 3 × 5 мы можем рассматривать как трех человек, вставших в очередь, после которых пришли еще 3, затем еще 3, еще 3 и еще 3. И вы точно так же можете выдать им билетики с номерами с 1-го по 15-й.

А теперь давайте снова вспомним о полных автобусах и двухместных велосипедах. Если ω людей окажется после другой ω людей, то вы истратите всю пачку билетиков, скажем, все красные билетики, а потом всю пачку синих билетиков.

С другой стороны, если приедет бесконечное количество двухместных велосипедов, то пассажирам первого велосипеда вы выдадите билетики 1 и 2, пассажирам второго велосипеда — билетики 3 и 4, затем 5 и 6 и так далее. Вы можете продолжать в том же духе, и вам никогда не потребуется вторая пачка билетиков.

В первом случае это будет «ω, прибавленная к самой себе 2 раза», то есть $\omega \times 2$. Ответ: две пачки полностью истраченных билетиков, что то же самое, что и $\omega + \omega$. Во втором случае это будет «2, прибавленное к самому себе ω раз», что в нашем понимании умножения означает $2 \times \omega$. В этот раз ответ будет: только одна пачка билетиков, то есть только одна ω.

$$\omega \times 2 = \omega + \omega,$$

$$2 \times \omega = \omega.$$

Теперь $\omega + \omega$ даже больше, чем $\omega + 1$, что само по себе больше, чем просто ω. Это значит

$$2 \times \omega \neq \omega \times 2.$$

Таким образом, порядковые числа не обладают свойством *коммутативности умножения*.

Возможно, сейчас вы хотите спросить, получится ли доказать это тем же методом, что и в прошлый раз, — снова попытаться найти последнего в очереди. В этот раз так не выйдет! Потому что ни в одной очереди не будет последнего. Здесь требуется несколько другой подход. Представьте, что вы просите каждого человека в очереди посмотреть на того, кто стоит перед ним. В очереди с ω людей единственным человеком, который не будет знать, кто стоит перед ним, будет человек с билетиком 1. Ведь перед ним никого нет. А в очереди с $\omega + \omega$ людей будет *два* человека, которые не знают, кто стоит перед ними:

1) человек с красным билетиком номер 1, перед которым никого нет;
2) человек с синим билетиком номер 1, потому что перед ним стоят все люди с красными билетиками, но «последнего» среди них нет, то есть перед ним нет идентифицируемого человека.

Мы можем использовать этот метод для того, чтобы доказать, что, прибавляя еще одну ω, мы каждый раз получаем новый порядковый номер, потому что при этом каждый раз возникает еще один человек номер 1 с новым цветом билетика, который не будет знать, кто стоит перед ним.

БЕСКОНЕЧНОЕ ВЫЧИТАНИЕ

Теперь давайте рассмотрим вычитание, которое доставило нам столько проблем в самом начале, когда мы пытались доказать, что бесконечность — это обычное число. Объясняя, что такое вычитание целых чисел, мы использовали понятие «противоположный элемент», то есть пользовались отрицательными числами. Однако среди порядковых чисел нет отрицательных. Кто может быть минус первым в очереди? Конечно, маленький ребенок вполне может назвать себя минус первым, чтобы оказаться в очереди перед номером один. Но в реальной жизни такого не бывает. Вы также не можете убрать одного человека из одной очереди и поставить его в другую очередь. (Конечно же, маленькому ребенку нечто подобное тоже может прийти в голову, но этим он рассердит всех математиков разом. Это так же недопустимо, как объяснять арифметику с помощью печенья, но не разрешать его съесть.)

Но давайте лучше вспомним, как вы вычитали, когда были совсем маленькими и еще не умели считать назад. Для примера возьмем 5 – 3. Все мы знаем, что ответ будет 2. Потому что мы можем отсчитать от 5 назад. Или потому что мы можем загнуть пять пальцев, затем выпрямить два и сосчитать оставшиеся. Или просто потому, что мы это знаем. Тем не менее если вы умеете считать только в прямом порядке и не умеете считать в обратном порядке, то вы можете начать считать с 3. Нужно подумать, сколько требуется шагов, чтобы дойти до 5. Когда так считают маленькие дети, они обычно задают вопрос: «Что я должен прибавить к 3, чтобы получилось 5?» Добавим немного фантазии и запишем эту мысль в виде уравнения:

$$3 + x = 5.$$

Есть еще один похожий вопрос: «Есть ли число, к которому я могу прибавить 3, чтобы получилось 5?» Обратите внимание на то, что это совершенно другая формулировка. Это можно выразить в виде уравнения:

$$x + 3 = 5.$$

Если речь идет об обычных числах, то оба уравнения — это одно и то же, потому что $3 + x = x + 3$. Но мы уже знаем, что при сложении бесконечных порядковых чисел (если мы поставим их на место 3 и 5) перестановочности *не бывает*. А значит, у этих двух уравнений могут быть разные решения. Давайте рассмотрим оба примера с бесконечными порядковыми числами по отдельности.

Как насчет такого вопроса: что нужно прибавить к 1, чтобы получить ω?

$$1 + x = \omega.$$

Такое уравнение можно решить так:

$$x = \omega.$$

Ведь мы знаем, что

$$1 + \omega = \omega.$$

Но наоборот не получится. Есть ли число, к которому я могу прибавить 1, чтобы получить ω? Иными словами:

$$x + 1 = \omega.$$

Мы уже не можем взять $x = \omega$, потому что

$$\omega + 1 \neq \omega.$$

Нам это уже известно. Фактически тут нет правильного решения. Ведь независимо от того, что мы берем за x, $x + 1$ всегда будет «последним в очереди» (или первым с конца), в то время как ω не имеет «последнего в очереди». Это значит, что мы не можем решить уравнение

$$x + a = b.$$

как обычно, с помощью вычитания. Давайте узнаем почему.

Вспомните, что при прибавлении некоего числа к бесконечности слева мы можем получить не такой ответ, как при прибавлении того же числа справа. А значит, вычитание из бесконечности слева и вычитание из бесконечности справа, вероятно, тоже может дать разный результат. Вычитание — это «отмена сложения». Если мы отменяем сложение слева, то мы убираем людей из начала очереди. Если мы отменяем сложение справа, то мы убираем людей из конца очереди. Но тут возникает проблема. Если в нашей очереди нет «идентифицируемого последнего», то у нас не получится убрать из нее последнего, потому что мы просто не сможем его найти. Именно поэтому мы не можем решить уравнение

$$x + 1 = \omega.$$

Ведь для того, чтобы найти x, мы должны отменить $+ 1$ справа от ω. А вот уравнение

$$1 + x = \omega$$

мы можем решить, потому что $+ 1$ в нем стоит слева от ω, то есть как бы в начале очереди.

Это та же самая проблема, с которой мы уже сталкивались ранее, доказывая, что бесконечность не относится ни к одному из рассмотренных нами типов чисел. Мы надеялись получить

$$1 + \infty = \infty.$$

Но это невозможно, потому что «вычитание ∞» с обеих сторон дает нам

$$1 = 0.$$

Наконец-то мы нашли способ дать определение бесконечности, не сталкиваясь больше с этой проблемой. У нас есть

$$1 + \omega = \omega,$$

но мы *не можем* вычесть ω, стоящую справа от 1, из обеих частей уравнения. Мы можем вычесть только ω, стоящую слева от 1. Если мы попытаемся вычесть ω людей из начала очереди 1 + ω, то никого не останется. Точно так же, как если бы мы вычли ω людей из начала ω очереди. Итак, вычитание ω, стоящей слева, из обеих сторон равенства дает

$$0 = 0.$$

Как и должно быть. Наконец-то мы нашли логически верное определение бесконечности, которое объясняет ее странное поведение при вычитании. Наконец-то решен спор моего маленького племянника и его друга о том, является бесконечность числом или нет.

Бесконечность не является ни натуральным,

ни целым,

ни рациональным,

ни действительным числом.

Бесконечность является кардинальным числом и порядковым числом.

Кардинальные и порядковые числа не обязаны подчиняться всем правилам, которым подчиняются названные выше типы чисел. Именно поэтому бесконечность так себя ведет.

У нас также появились новые аргументы для детского спора, как быть правым «бесконечное количество раз». Если спор ведется в порядковых числах, то у вас будет огромное количество разных, едва отличимых друг от друга уровней бесконечности. Их будет гораздо больше, чем если бы вы вели спор в кардинальных числах. В случае с кардинальными числами для того, чтобы получить б**о**льшую бесконечность и быть правым, нужно допрыгнуть до «2 в бесконечной степени». А в случае с порядковыми числами вам нужно просто прибавить 1, но будьте внимательны: 1 должна стоять после бесконечности, а не перед ней.

Мой любимый пример взят из «*Укрощения строптивой*»:

> *If this be not that you look for, I have no more to say,*
> *But bid Bianca farewell for ever and a day.*[1]

Если *forever* (навечно) — это ω, то *forever and a day* (навечно и на один день) будет ω + 1. Шекспир знал, что ω + 1 больше, чем ω. По крайней мере, мне хотелось бы так думать.

---

[1] «Если это не то, чего вы ищете, то мне нечего больше сказать,
Тогда прощай Бьянка навечно и один день».

В переводе П. Мелкова:

«А если вы не к этому стремитесь,
Смолкаю я, но Бьянки вы лишитесь». — *Примеч. пер.*

Часть вторая
НАБЛЮДЕНИЯ

10

ГДЕ ИСКАТЬ БЕСКОНЕЧНОСТЬ?

Я хотела бы владеть искусством телепортации. Мне нравится мысль о том, что, подумав о каком-нибудь месте, можно мгновенно там очутиться. Но я бы все равно любила обычные прогулки, потому что они прекрасны. Но если бы мне нужно было попасть куда-нибудь по делам или навестить друзей, то телепортация сэкономила бы много времени и сил.

Одна из моих самых любимых вещей в абстрактном мире — это то, что в нем все происходит сразу же, как только вы об этом подумали. Если мне захочется побывать в другом абстрактном мире, *достаточно просто подумать* о нем, и я уже там. Если я хочу поиграть с новой абстрактной игрушкой, я могу сделать это сразу же, как только подумаю об этом. Как только у вас в голове появляется некая идея, она уже существует в абстрактном мире. Хорошо бы и обед появлялся сразу, как только мне приходит в голову, что я хотела бы сейчас поесть.

Конечно, сейчас мы можем долго рассуждать о том, что в абстрактном мире означает «существовать». Но лично для меня «существует» означает «я могу с этим поиграть». Зачастую абстрактные математические исследования работают именно так. Как только у вас появилась новая математическая концепция, вы сразу же можете начать играть с ней в голове: строить из нее разные вещи или смотреть, как она взаимодействует с другими объектами. Ваша новая концепция может вызывать противоречия или даже разрушить весь мир вокруг, но она существует и вы можете с ней играть. Это совсем не похоже на концепцию нового автомобиля или лекарства. Ведь в этом случае вам нужно придумать, как сделать концепцию «реальной», как найти оборудование и материалы для ее реализации, как получить средства на оборудование и материалы и так далее.

Например, концепция чисел существует, ведь мы можем о ней размышлять. Означает ли это, что числа существуют в действительности? Это зависит от того, кого вы об этом спросите. Философы пустятся в долгие рассуждения по этому поводу. Лично мне больше всего нравится мысль о том, что числа — это не более чем идея. Меня не особенно волнует, существуют ли числа, меня больше занимает вопрос, существую ли я. Вопрос: «Существую ли я?» — я задаю себе постоянно. Вопрос: «Существуют ли числа?» — я постоянно задаю математике. Мое отношение к бытию может показаться вам несколько странным. Я единственная из всех известных мне людей, кто верит в существование Санта-Клауса и считает его идеей, являющейся причиной появления подарков на Рождество. Некоторые могут подумать, что существует лишь *идея* Санта-Клауса, а не он сам. Но я всегда с радостью сообщаю, что Санта-Клаус — это абстрактная идея, точно такая же, как и числа. Числа тоже существуют как абстрактная идея, и точка.

Меня также очень радует факт, что бесконечность тоже существует. И существует она тоже в виде абстрактной идеи. Но вопрос «существует ли бесконечность также на менее абстрактном уровне?» все еще остается без ответа. Существуют ли в «реальной жизни» вообще какие-либо бесконечные объекты? Я всегда несколько секунд сомневаюсь, прежде чем произнести слова «реальная жизнь». Это происходит по нескольким причинам. Во-первых, потому что абстрактные вещи не обязательно должны быть менее реальными, чем по-настоящему «реальные» вещи. Усталость — абстрактна, но я ощущаю ее очень даже реалистично. А вот дно Тихого океана реально, но мне оно кажется очень абстрактным, потому что я никогда не прикоснусь к нему, не увижу его и не почувствую, какое оно. Другая причина, по которой я отношусь к понятию «реальная жизнь» с опаской, в том, что слишком многие математические задачи, взятые якобы из реальной жизни, совершенно неправдоподобны. Вроде задачек про то, что у вас сбежали лошади Пржевальского или вы купили 75 арбузов.

Не факт, что во Вселенной существует бесконечное количество каких-нибудь «реальных вещей». Конечно, есть огромное количество молекул или атомов, но мы уже знаем, что между «огромным количеством» и «бесконечностью» есть большая разница. Сама Вселенная кажется нашему маленькому конечному мозгу бесконечной, но она вполне может оказаться конечной (но это не точно).

Мы точно знаем, что существуют бесконечные количества *абстрактных* объектов. Возьмем числа. Нам точно известно, что у натуральных чисел нет никаких границ. В отличие от Вселенной, о которой мы не можем точно этого сказать. Каждое натуральное число конечно, но вместе они продолжают увеличиваться вечно. Взятые целиком, числа бесконечны. В следующей главе мы познакомимся с вещами, которые так сильно увеличиваются, что их совершенно невозможно остановить. Точно так же, как и натуральные числа. Они конечны в любой конкретный момент, но в то же время беспрерывно увеличиваются, поэтому мы можем назвать их «приближающейся бесконечностью», и такому поведению можно найти объяснение. У меня есть друг, который завел чудесного щенка датского дога. Щенок растет настолько быстро, что иногда кажется, что он тоже приближающаяся бесконечность.

В главах 12 и 13 мы узнаем о способах, позволяющих нашему мозгу получить безграничные возможности, даже если сам по себе наш мозг не бесконечен. Мы способны воспринимать нескончаемое количество тонкостей, благодаря чему в главе 12 мы научимся различать многомерные пространства. Они отличаются от физических пространств, потому что являются скорее местом обитания мыслей, чем областью физического существования. Мы увидим, что простая идея сюжета книги может показаться «немного одномерной», тогда как наша жизнь невероятно многомерна. В действительности количество измерений невозможно ограничить. Это утверждение тоже приближает нас к бесконечности. В главе 13 мы будем говорить о другом типе измерений. Об измерении, которое пришло из теории категорий. Теория категорий — это часть абстрактной математики, которая изучает свойства отношений между объектами. В этой главе мы будем размышлять о природе отношений между объектами, а потом займемся изучением отношений между этими отношениями, и отношений между этими отношениями, и так далее до «бесконечности», и это приведет нас к категориям бесконечных измерений. Благодаря этим двум типам измерений мы получим еще более тонкие и выразительные способы изучения окружающего нас мира.

Затем мы пойдем другим путем, в результате чего объекты будут казаться нам бесконечными. Причем объекты в крошечных пропорциях интересуют нас даже больше, чем нечто настолько большое, что кажется беспредельным. Именно поэтому мы поймем, что если рассматривать бесконечно малые доли объектов, то объекты можно поделить на бесконечное множество таких бесконечно малых долей. В главе 14 мы увидим, что рассуждения о бесконечно малых объектах открывают очень странные парадоксы, на разгадку которых ушли тысячи лет. В главе 15 мы увидим, как математики, занимаясь этими вопросами, поняли, что они совсем не знают, чем на самом деле являются действительные числа. По крайней мере, они не знают этого настолько хорошо, чтобы привести достаточно убедительные и точные аргументы при решении этого вопроса. В главе 16 мы увидим невероятные вещи, которые возникают в результате этого нового понимания бесконечных и бесконечно малых объектов. И наконец, в главе 17 мы узнаем о случаях, когда бесконечность тайно присутствует в нашей жизни в виде петель, продолжающихся вечно. Но что означает это «вечно»?

АБСТРАКТНАЯ ВЕРСИЯ ВЕЧНОСТИ

Бесконечность возникает в повседневной жизни, например, когда мы говорим о вещах, которые «продолжаются вечно». У нас есть десятичные знаки, которые «продолжаются вечно». У нас есть натуральные числа, которые «продолжаются вечно». В *реальной* жизни ничто не может длиться вечно, но в математике у нас есть абстрактная версия вечности, благодаря чему мы можем легко и просто почувствовать вечность. Это одно из тех замечательных свойств абстрактного мира, которые приносят столько радости.

В самом начале книги я уже упоминала мою любимую компьютерную программу, которая выводит на экране бесконечное количество строк со словом `HELLO`. Требуются лишь две строчки программного кода. Одна строчка — чтобы начать и вторая — чтобы «повторить еще раз». Именно так можно создать абстрактную бесконечность. Это очень похоже на наш способ конструирования натуральных чисел. Мы начинаем с 1 и «бесконечно» прибавляем к ней 1. Мы делаем это *абстрактно*, в действительности нам не нужно постоянно повторять одно и то же действие — прибавлять 1, потом еще 1, потом еще 1. Иначе это длилось бы «вечно» и нам не хватило бы жизни. Тем не менее, абстрактно прибавляя 1, мы получаем все натуральные числа сразу. Это как делать что-то не практически, а теоретически. Делать что-нибудь теоретически и делать что-нибудь практически в абстрактном мире — это одно и то же, в этом его забавное свойство. В действительности тут нет почти никакой разницы в отличие от известной присказки: «В теории нет разницы между теорией и практикой. А на практике есть».

Такой способ создания всех натуральных чисел является базой для так называемого *принципа математической индукции*. Фактически этот принцип подразумевает, что вы можете рассматривать натуральные числа все вместе, просто рассматривая число 1 и процесс постоянного прибавления единицы (происходящий в теории).

Собственно говоря, этот принцип гласит: если вы хотите доказать, что нечто является верным для каждого натурального числа, то вам не нужно обходить с проверкой каждое натуральное число. Достаточно доказать:

- начальную точку, то есть доказать, что это является верным для числа 1;
- постоянное прибавление единицы, то есть доказать, что если это является верным для n, значит, это будет также верно для $n + 1$.

Достаточно просто доказать это, и вот вы уже точно знаете, что это верно для всех натуральных чисел. Все так просто!

Это похоже на то, как маленький ребенок вдруг понимает, что он научился забираться на первую ступеньку, и теперь ему нужно только, чтобы кто-нибудь из взрослых плюхнул его на пол рядом с лестницей. И тогда он сам сможет вскарабкаться по ней настолько высоко, насколько ему захочется (пока его не снимут оттуда). Теоретически он может карабкаться вечно, хотя фактически, даже если его не снимут с лестницы, он либо проголодается, либо устанет. Математические объекты не могут ни проголодаться, ни устать. Если в некоей математической ситуации что-то теоретически можно повторить еще раз[1], значит,

[1] Метод индукции часто критикуют, и он действительно не всегда верен. Например, доказательство гипотезы Ферма о простых числах, про-

это можно повторять бесконечное количество раз. В математике это как раз и называется «продолжаться бесконечно». Числа могут продолжаться бесконечно, последовательность чисел может продолжаться бесконечно, десятичные знаки могут продолжаться бесконечно.

Тот факт, что у нас есть бесконечное количество натуральных чисел, открывает нам доступ ко всем прочим видам абстрактно бесконечных вещей, причем в обоих направлениях: как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения. Мы уже знаем, что можно взять бесконечное множество натуральных чисел и создать из него бесконечные множества, которые будут становиться все больше и больше. Но где в окружающем нас мире можно найти такие бесконечно большие множества (если это вообще возможно)? Один из вариантов — бесконечно малые вещи. Это основа математического анализа — области математики с самым широким применением. Математический анализ заключается в изучении вещей, которые являются непостоянными. Крайне трудно создавать теории о том, что постоянно меняется, но математический анализ справляется с этим, рассматривая бесконечно малые величины и скрепляя вместе бесконечное количество этих бесконечно малых величин. Такие бесконечно малые величины находятся повсюду вокруг нас, они составляют бесконечные множества вещей, с которыми мы сталкиваемся практически каждый день, порой даже не подозревая об этом. Во второй части книги мы узнаем о ситуациях, когда бесконечность возникает рядом с нами, независимо от того, осознаем мы это или нет.

веденное по индукции, было опровергнуто простым нахождением «непростого» числа по его «математически доказанной» формуле. Простейший пример того, что мы не можем «продолжать вечно», но можем продолжать «достаточно долго»: $N = \sqrt{(N-1)}$, где первое N может быть любым (но конечным) числом. Когда-нибудь мы упремся в ноль, а далее корень из отрицательного числа не будет иметь смысла — по крайней мере, над полем действительных чисел. — *Примеч. ред.*

Одно их странных свойств математики заключается в том, что она все равно присутствует в нашей жизни, вне зависимости от того, видим ли мы и понимаем ли мы ее. Это как ехать на поезде: проносящиеся мимо пейзажи существуют вне зависимости от того, смотрим мы в окно или нет и знаем ли мы, где в данный момент проезжаем, или нет. Другими словами, понимание математики дает людям возможность создавать более эффективные системы и решать более сложные проблемы. А еще эти знания могут пролить свет на то, как мы взаимодействуем с миром вокруг нас и как работает наш собственный мозг. Подобное просвещение — более тонкий, но менее эффектный результат по сравнению с решением конкретных проблем или разработкой технологий. Но лично мне кажется, что при всей своей скромности такие результаты фундаментальны и перспективны.

11
ПОЧТИ БЕСКОНЕЧНОСТЬ

Я почти убеждена в том, что я никогда не поднимусь на вершину Эвереста. Будучи оптимисткой, я допускаю лишь возможность телепортации, но в остальном я уверена, что никогда там не окажусь. Я почти наверняка никогда не попаду на Южный полюс. Я не знаю никого, кто покорил Эверест, но я знакома с одним астрофизиком, который работал на Южном полюсе. Я знаю, что до Южного полюса очень трудно добраться, даже на самолете, но, тем не менее, он находится на конечно далеком расстоянии от нас. Я знаю также, что высота Эвереста конечна. Но для меня оба эти места все равно бесконечно далеки, ведь я никогда туда не попаду.

Бесконечность существует, но сможем ли мы когда-нибудь добраться до нее? Сможем ли мы когда-нибудь создать бесконечное количество вещей? Может быть, если эти вещи будут достаточно малы? Прежде чем разбираться в этих вопросах, давайте вспомним об объектах, которые кажутся нам настолько большими, что могли бы быть почти бесконечными, и о таких случаях, когда нам кажется, что мы повторяем что-то практически бесконечное количество раз.

Есть известная задача о зернышках риса на шахматной доске. Один человек просит положить одно рисовое зернышко на первую клетку шахматной доски. Затем он берет вдвое больше зернышек и кладет их на вторую клетку, затем он снова удваивает количество зернышек и кладет их на третью клетку, и так далее, пока доска не будет заполнена. Вопрос: сколько всего получилось рисовых зернышек? Можно ответить кратко: слишком много. Но сколько точно?

В принципе, это не такой уж трудный вопрос, нужно просто умножать на 2 и складывать ответы вместе, пройдя таким образом все 64 клетки. Однако если вы попробуете посчитать, то вы обнаружите, что числа растут ужасно быстро. Очень скоро они станут настолько большими, что ваш калькулятор или даже компьютер в стандартных настройках не сможет с ними справиться (если только у вас нет специальных вычислительных программ). Есть способ ускорить расчеты, но в любом случае в итоге вы получите очень большое число: 18 446 744 073 551 615 рисовых зернышек.

Конечно, в обычной жизни мы не измеряем рис в зернышках, так бывает разве что в абсурдных математических задачах. (Впервые я услышала эту задачку на уроке математики и попыталась посчитать вручную. Мой ответ был неверным.) Итак, сколько получится риса, если мы будем измерять его привычным образом? Я попробовала взвесить 1 грамм риса, а потом посчитала, сколько в нем зернышек. Кажется, у меня получилось примерно 50 штук. Теперь мы можем посчитать приблизительно:

	1 г	**= 50 зернышек риса**
1 чашка	= 100 г	= 5000 зернышек
1 человек	= 4 чашки риса в день	= 20 000 зернышек
весь мир	= 7 миллиардов человек	140 000 000 000 000 зернышек
год	= примерно 500 дней	70 000 000 000 000 000 зернышек

В этом числе 16 нулей! А количество зернышек, которое мы получили на шахматной доске, составляло 18 446 744 073 551 615, что приблизительно равно 2 с 19 нулями на конце. То есть на 4 нуля больше, а это примерно множитель 1000. Получается, что мы могли бы кормить этим количеством риса население всего мира в течение примерно 1000 лет. (Мы не берем в расчет тот факт, что если на нашей планете ничего не изменится, то ее население продолжит каждый год значительно увеличиваться.)

Мои расчеты очень приблизительные, но они позволяют понять основную мысль: с помощью безобидного удваивания количества риса по мере движения по шахматной доске вы быстро дойдете до нереального количества, превышающего все существующие на сегодняшний день запасы риса в мире.

СЛОЕНОЕ ТЕСТО

Слоеное тесто основывается на тех же принципах, что и повторяющееся умножение, которое заставляет вещи расти чрезвычайно быстро. Слоеное тесто состоит из нереального количества тонких слоев; для того, чтобы их создать, нужно сложить тесто втрое всего лишь 6 раз. Внутри теста зажат толстый слой масла такой консистенции, что если вы раскатаете тесто, то масло аккуратно расплющится внутри слоистой конструкции. Затем вы складываете тесто втрое, делая тем самым 6 слоев. Далее вы охлаждаете тесто, чтобы слои затвердели и не могли таять и склеиваться друг с другом. После этого раскатываете тесто, снова складываете втрое и снова охлаждаете. Это нужно проделать 6 раз. Благодаря повторному умножению на 3 количество слоев очень быстро растет. При выпекании тонкие слои масла тают, при этом жидкие составляющие масла испаряются, образуется пар, из-за которого тесто распирает так, что вы видите, как оно по-настоящему растет в духовке. Причем не абстрактно, как числа, а совершенно реально.

Это мой любимый способ демонстрации экспоненциального роста. Обычно, когда люди говорят об экспоненциальном росте, они имеют в виду, что что-то очень сильно увеличивается. Это верно отчасти, однако официальное математическое значение этого выражения предполагает именно постоянное и пропорциональное увеличение. Если сначала я сложу слоеное тесто втрое, затем вчетверо, затем впятеро, затем вшестеро, то количество слоев будет расти еще быстрее, но оно уже не будет экспоненциальным, так как коэффициент увеличения будет меняться[1].

Мне нравится, что экспоненциальный рост воплощается в аппетитной слоеной выпечке. Дело тут не только в том, что многократно увеличившиеся слои теста выглядят красиво и эффектно, но еще и в том, что они такие тоненькие и приятно тают во рту. У слоеной выпечки репутация сложного блюда, однако я считаю, что этот метод приготовления хорош тем, что на самом деле использование экспоненты скорее упрощает создание этих невероятно тонких слоев. В конце концов, было бы очень трудно раскатывать каждый такой тонкий слой по отдельности. А в этом и заключается суть математики — делать сложные вещи проще. Но, к сожалению, зачастую складывается такое впечатление, что математика, наоборот, создает трудности из ниоткуда.

IPOD SHUFFLE

Когда впервые появился плеер iPod Shuffle, я увидела на вагоне метро большой рекламный плакат со слоганом: «200 песен: миллион вариантов!» Идея была в том, чтобы впечатлить всех тем фактом, что 200 песен можно прослушать миллионом разных способов, если проигрывать их не по очереди от на-

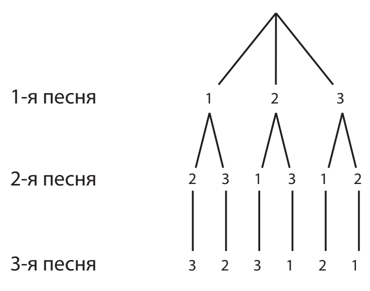
[1] При экспоненциальном росте скорость роста должна быть пропорциональна значению самой величины, то есть растущий объект воспроизводит сам себя или его рост обусловлен чем-то, что воспроизводит само себя. — *Примеч. ред.*

чала до конца плейлиста, а в различных произвольных порядках.

На самом деле это кошмарное преуменьшение. Я села в этот вагон и ради развлечения начала считать, сколько песен действительно потребуется, чтобы получился миллион способов прослушивания.

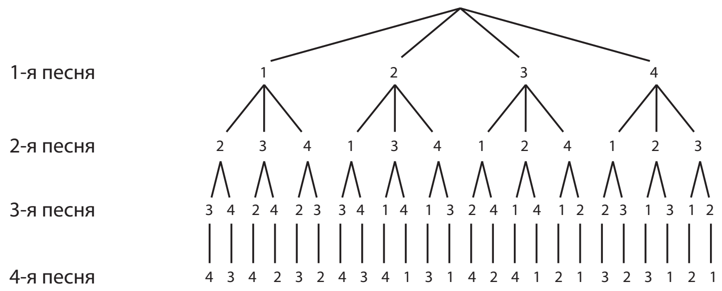
Если у вас две песни, то у вас будет лишь два способа их проиграть. Вы либо начнете с одной, затем прослушаете вторую, либо наоборот. А теперь предположим, что у вас три песни. Тогда у вас будет выбор из трех вариантов для первой прослушиваемой песни. Далее выбор уже сокращается до двух оставшихся песен, а для последней песни выбора не будет вообще. (Предположим, что вы не хотите слушать одну и ту же песню два раза подряд, хотя я часто ставлю какую-нибудь песню на повтор и слушаю ее часами.)

Мы снова можем изобразить это в виде схемы-дерева, но в этот раз на каждом его уровне будет становиться все меньше и меньше веточек, потому что у нас постепенно будут заканчиваться песни, — при условии, что мы не хотим, чтобы они повторялись.



Итак, у нас 6 возможных вариантов прослушивания, каждый из которых можно увидеть на дереве, проследив по линии вниз. Мы могли бы также рассчитать это, использовав количество возможных вариантов на каждом этапе: $3 \times 2 \times 1$.

Если у нас будет четыре песни, то мы получим вот такое дерево:



Либо можно рассчитать это следующим образом:

- 4 возможных варианта для первой песни,
- 3 возможных варианта для второй песни,
- 2 возможных варианта для третьей песни и
- 1 возможный вариант для последней песни.

Итак, общее количество способов прослушивания будет $4 \times 3 \times 2 \times 1$. (На самом деле нам не обязательно писать в конце 1, так как при умножении на 1 ничего не меняется.)

В математике это называется факториалом. «Факториал четырех» обозначается как «4!». Вообще, факториал n равен

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

Мы также можем определить это методом индукции, так как это не что иное, как замкнутый круг, чем-то похожий на мою пресловутую программу `HELLO`:

- $1! = 1$
- $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Итак, если у нас n песен, то общее количество порядков их прослушивания будет $n!$, потому что у нас будет n вариантов для первой песни, $n - 1$ вариантов для второй песни, $n - 2$ вариантов для третьей песни, и так далее вплоть до двух вариантов со второй по последнюю песню и только одного варианта для последней песни.

Теперь вернемся к вопросу, на который я пыталась найти ответ: сколько нужно песен, чтобы получить как минимум миллион разных вариантов прослушивания? Говоря математическим языком, мы ищем самое маленькое значение n, при котором $n!$ будет больше миллиона. Мы можем просто выписывать первые значения факториала до тех пор, пока не получим нужный ответ. При этом необходимо помнить, что для того, чтобы перейти от одного ряда к следующему, нужно просто умножить полученное число на следующее значение n.

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 3 \times 2 = 6$$

$$4! = 466 = 24$$

$$5! = 5 \times 24 = 120$$

$$6! = 6 \times 120 = 720$$

$$7! = 7 \times 720 = 5040$$

$$8! = 8 \times 5040 = 40\,320$$

$$9! = 9 \times 40\,320 = 362\,880$$

$$10! = 10 \times 362\,880 = 3\,628\,800$$

Бинго! Мы укротили миллион! Нам нужно всего 10 песен, и у нас уже будет более 3 миллионов способов прослушивания.

Теперь давайте зададим себе другой вопрос: сколько вариантов прослушивания можно получить, имея 200 песен? Посчитаем так:

$$200 \times 199 \times 198 \times ... \times 3 \times 2 \times 1.$$

Производить такие расчеты без специального оборудования — безнадежное занятие, потому что цифры слишком большие. Можно провести быстрый эксперимент на компьютере с помощью обычного табличного процессора, например MS Excel, в результате чего у нас получится дойти только до 17!, не прибегая при этом к округлению. Так мы получим

$$17! = 355\ 687\ 428\ 096\ 000.$$

Я очень сильно обрадовалась, узнав, что калькулятор моего мобильного телефона на один шаг впереди, ведь он выдал мне

$$18! = 6\ 402\ 373\ 705\ 728\ 000.$$

Потом калькулятор мобильного телефона начинает округлять полученные значения. А потом и вовсе сдается, сообщая мне последнее:

$$103! \simeq 9{,}9 \times 10^{163}.$$

После этого значения он начинает выдавать сообщение об ошибке. Табличный процессор на компьютере, округляя, продолжал впахивать вплоть до 170.

$$170! \simeq 7{,}3 \times 10^{306}.$$

После чего сдался и он. Это было вызвано способом, которым мой старый хилый компьютер пользовался, чтобы держать в памяти большие числа. 171! стал первым факториалом, оказавшимся слишком большим, чтобы держать его в памяти.

Специалист по статистике в вычислительной технике Рик Виклин написал программу для вычисления больших факториалов. Это позволило ему опубликовать значение факториала 200! в своем блоге. Он обошел проблему слишком больших чисел, заставив компьютер хранить их в памяти в виде очень длинных вереницотдельных цифр. Затем компьютер должен был умножать точно так же, как вы умножали бы вручную: шаг за шагом, при необходимости, перенося цифры в следующий столбик. В результате он получил удивительное число. Факториал 200! равен

7886578673647905035523632139321850622951359776871732
6329474253324435944996340334292030428401198462390417
7212138919638830257642790242637105061926624952829931
1134628572707633172373969889439224456214516642402540
3329186413122742829485327752424240757390324032125740
5579568660226031904170324062351700858796178922222789
62370389737472 0000
000000000000000000000000000000000000000000000.

Мне кажется, что это самое большое число, которое я когда-либо видела своими глазами. Оно состоит из 375 цифр, и оно на очень, очень и очень много порядков больше, чем «1 миллион способов прослушивания», о которых говорится в рекламе.

Я начала развлекаться с этими абсурдно длинными числами, и вдруг мне пришло в голову, что я могу определить, сколько песен должно быть на iPod, чтобы получить больше, чем рисинок на шахматной доске, способов прослушивания. Ответ: 21. Это значит, что удвоение чисел позволяет им расти очень быстро, а факториал позволяет им увеличиваться *еще быстрее*.

Возможно, вам будет интересно узнать, случайно ли в конце этого числа так много нолей, а именно 49. Большие факториалы обречены на то, чтобы иметь в конце огромное количество нолей. Причем мы можем вычислить, сколько их будет, даже не зная ответа на факториал. Каждый 0 получается из делителя на 10 в конечном ответе, а каждая десятка получается из делителя на 2 и делителя на 5 в отдельных компонентах факториала. Вокруг нас болтается гораздо больше делителей на 2, чем делителей на 5, поэтому нам просто нужно посчитать все величины, кратные 5, от 1 до числа, факториал которого мы хотим получить. При этом необходимо помнить, что некоторые числа имеют кратные множители, равные 5. Именно так возникают многократные нули.

КАК БЫСТРО МЫ РАСТЕМ?

Маленькие дети растут очень быстро. Нам даже кажется, что они растут быстрее, чем есть, именно потому, что они маленькие. В первые годы жизни дети подрастают на 10 сантиметров каждый год. Темпы роста грудного младенца, учитывая его первоначальный размер, впечатляют еще сильнее. Конечно, дети растут по-разному. Некоторые долго остаются маленькими, а потом происходит внезапный скачок роста, и они становятся выше многих своих сверстников.

Математики тоже интересуются этой темой. Им хочется знать, насколько быстро растут разные объекты и могут ли одни объекты расти быстрее других. В случае с рисом у нас было 2^n, где n постоянно увеличивается. А в примере с песнями у нас было $n!$, где n постоянно увеличивается. В обоих случаях числа росли невероятно быстро, но оставались конечными. Мы можем выразить это математическим языком: «2^n стремится к бесконечности, так как n стремится к бесконечности», при этом мы осторожно избегаем утверждений, что что-то является бесконечностью. Факториал $n!$ тоже стремится к бесконечности, так как n стремится к бесконечности. Но мы чувствуем, что $n!$ растет «быстрее», чем 2^n. Но что это значит?

С одной стороны, мы можем соотнести эти два примера друг с другом, выразив их дробью $\frac{n!}{2n}$, и посмотреть, кто из них «победит», если n будет расти. Если дробь будет постоянно увеличиваться, это значит, что $n!$ побеждает. Если дробь будет уменьшаться, то победит 2^n. Если дробь станет константой, это будет означать, что игра сыграна вничью. А сейчас мы можем применить еще один хитрый трюк. Мы можем записать эту дробь следующим образом:

$$\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\times4\times3\times2\times1}{2\times2\times2\times2\times\ldots\times2\times2\times2\times2}.$$

А затем мы можем разбить ее на отдельные дроби вот так:

$$\frac{n}{2}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-3}{2}\times\ldots\times\frac{4}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{2}\times\frac{1}{2}.$$

И теперь мы видим, что *почти всегда* числовая нагрузка этих дробей находится в верхней части (то есть *числитель больше знаменателя,* за исключением одной-единственной последней дроби $\frac{1}{2}$). Кроме того, если n будет увеличиваться, то, соответственно, начнет увеличиваться конечный результат, причем растущее значение *еще сильнее* будет «перегружать» верхнюю часть, потому что, в то время как верх (числитель) становится больше, нижняя часть (знаменатель) все время остается равной 2. В итоге становится *очевидно*, что верхняя часть побеждает нижнюю.

Это своего рода иерархия: разные объекты стремятся к бесконечности разными темпами. Эта иерархия несколько отличается от иерархии бесконечностей, которую мы уже изучили, но идея та же.

Мы только что убедились, что $n!$ растет быстрее, чем 2^n. А 2^n, в свою очередь, растет быстрее, чем n^2. Фактически 2^n растет быстрее, чем n^3, n^4 или n в какой-нибудь *другой степени*, даже в такой: $n^{1000000000000000000}$. Этот последний пример кажется гигантским числом. Поначалу оно действительно будет больше, чем 2^n (за исключением того случая, когда $n = 1$), но в конечном итоге 2^n его обгонит. Мы можем проверить это утверждение на менее абсурдном числе. Скажем, на n^{100}. Мой компьютер говорит, что n^{100} будет лидировать до $n = 125$, а затем побеждает 2^n.

Мы рассматриваем только n в положительной степени, потому что отрицательные степени на самом деле не растут вообще. Они уменьшаются пропорционально увеличению значения n.

Есть одна вещь, которая растет медленнее, чем n в любой из возможных степеней. Это $\log n$. Возможно, вы помните, что логарифм обратен к экспоненте[1]. Если мы возьмем основание 10, то $\log n$ будет «степенью, в которую нужно возвести 10, чтобы получить n». Итак, log 100 равен 2, потому что, возведя 10 во вторую степень, вы получите 100. А log 1000 равен 3. Логарифм любого числа от 100 до 1000 всегда равен числу от 2 до 3. Логарифм по основанию 10 обычно учитывает, сколько знаков имеет число по основанию 10. Это значит, если n будет увеличиваться, то $\log n$ тоже будет увеличиваться, но гораздо медленнее. Когда n дойдет до миллиона, $\log n$ все еще будет равен лишь 6.

Именно в этом заключается практическая польза логарифмов: они позволяют конвертировать большие числа в маленькие, чтобы с ними было удобнее обращаться. Существует теория, что, когда числа, увеличиваясь, достигают определенного значения, наш мозг больше не может осознавать такие громадные величины. В таких случаях мы можем мыслить логарифмически, то есть учитывать лишь количество знаков в числе. Вы даже можете делать это, не осознавая, что такое «логарифмическое мышление». Ранее я уже говорила вам, что гигантское число 200! имеет 375 знаков, потому что 375 — это число, которое мы способны осознать. Это и называется «мыслить логарифмически». Когда число становится таким

---

[1] Экспонента — показательная функция $f(x) = \exp(x) = e^x$, где e — основание натуральных логарифмов. Соответственно, обратной функцией к экспоненциальной функции является натуральный логарифм $\ln a$. Автор далее рассматривает логарифмы по основанию 10, которые называются десятичными, $\lg a$. — *Примеч. ред.*

большим, уже не имеет особого значения, прибавили ли вы к нему 1. Поэтому в примере с рисом я проявила некоторую небрежность и сказала, что в году 500 дней. Я знала, что в общей картине эта погрешность не играет существенной роли. Все, что мне нужно было сделать, это взять число с тем же количеством знаков, что и число 365. Я мыслила логарифмически.

Логарифмы растут медленнее, чем число n, возведенное в любую фиксированную степень.

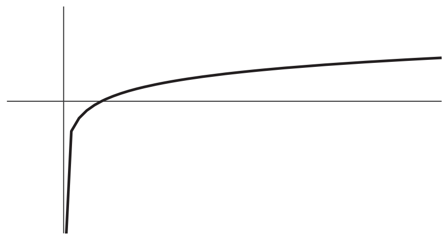
МЕДЛЕННЫЙ РОСТ

Рост может проходить настолько медленно, что это вообще не будет заметно, и все же это будет рост. Представьте, что вы съели половинку кусочка торта, потому что вы на диете. Потом вам захотелось взять еще треть кусочка, потому что торт оказался очень вкусным. Затем вы съедаете еще четверть кусочка, потому что вы, точно так же, как я, постоянно стараетесь не набрать лишний вес, но всегда хотите съесть еще. После этого вы берете еще пятую часть кусочка, потом шестую часть и так далее. Сколько вы съедите в конечном итоге? Спустя некоторое время ваши новые кусочки станут практически несуществующими, потому что после миллионной добавки в следующий раз вы возьмете лишь одну миллионную долю кусочка, то есть фактически ничего, не так ли?

Нет, не так! Если вы будете продолжать в том же духе бесконечно, вы закончите тем, что съедите *бесконечное количество торта*[1]. Фактически количество съеденного вами растет логарифмически. Это очень медленный рост, со временем он становится еще более медленным, но все же количество съеденного торта неумолимо продвигается по направлению к бес-

[1] Фактически уже после четверти кусочка от него ничего не останется, так как 1/2 + 1/3 + 1/4 = 13/12. — *Примеч. ред.*

конечности. Вот так выглядит график логарифмической функции:



Из вышеприведенного графика вы можете понять, сойдет ли количество съеденного торта в конечном итоге полностью на нет. Нет, не сойдет! Этот график *не ограничен*[1], это значит, какое бы число вы ни взяли, он будет располагаться выше этого числа. Не имеет значения, насколько большим будет это число, он всегда в конечном итоге станет еще больше. Мы объясним это явление в главе 16.

Этот пример показывает, что мы должны быть очень аккуратными, когда речь идет о бесконечном росте, ведь наша интуиция легко может ввести нас в заблуждение. Чем закончится поедание бесконечного торта, если каждый следующий кусочек — почти ничто? Именно для подобных случаев нужна математическая точность измерений, чтобы объяснить такие очевидные противоречия и дать точный ответ, съедим мы бесконечное количество торта или нет.

[1] Логарифмическая функция не является ни четной, ни нечетной, не имеет точек максимума и минимума, а также не ограничена сверху и снизу. — *Примеч. ред.*

12 БЕСКОНЕЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Хотели бы вы научиться путешествовать во времени? Звучит одновременно и увлекательно, и пугающе. Ведь даже небольшое вмешательство в прошлое способно привести к катастрофическим последствиям. Меня всегда интриговали временные петли и парадоксы, это мой самый любимый сюжет: фильм «*Назад в будущее*», книга «*Жена путешественника во времени*» и более современный фильм «*Петля времени*», который так сломал мне мозг, что одновременно с просмотром мне пришлось читать его краткое содержание в Википедии.

Путешествие во времени будет иметь меньше всего потенциально опасных последствий, если продлится недолго и вы ни с кем не будете вступать в контакт. Данное утверждение звучит бессмысленно, но в некоторых ситуациях может оказаться крайне полезным: например, когда за вами гонятся злодеи. Причем побег от злодеев в данном случае подразумевает под собой также побег от злодеев в *четвертое измерение*. В этой главе мы будем размышлять о том, сколько измерений существует в нашем мире.

Представьте себе, что вы пытаетесь скрыться от погони на поезде. Вашим преследователям не обязательно догонять поезд, им достаточно заблокировать его спереди и сзади. Если поезд не может ездить по кругу, то его движение довольно легко ограничить, ведь он перемещается в одном измерении.

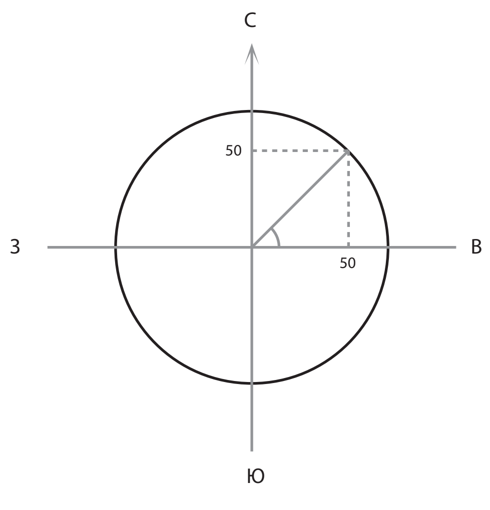
Если вы пытаетесь скрыться от погони на автомобиле, то злодеи будут вынуждены заблокировать всю территорию вокруг вас, потому что вы можете ездить по кругу. В этом случае для того, чтобы скрыться от них, вам нужно стать Джеймсом Бондом: нажать кнопку, которая превратит ваш автомобиль в самолет, и улететь из западни. Это называется побегом в третье измерение.

Теперь единственный способ поймать вас — это сбросить на вас сверху сеть. Тогда, чтобы скрыться от злодеев, вам потребуется четвертое измерение...

Мы настолько привыкли жить в трехмерном мире, что с трудом представляем себе, какими могут быть другие измерения. Возможно, сейчас вы подумали: «Но ведь других измерений *не существует*». Если мы говорим о физических измерениях, то это верно. Однако это всего лишь один из способов изучения измерений, очень конкретный и материальный способ. Конкретные примеры помогают понять основную идею, но часто имеют свои ограничения, например, как способ изучения счета с помощью печенья. Это вкусно, но отрицательные числа на печенье не объяснишь, потому что трудно представить себе «отрицательное печенье».

Один из подходов к изучению четырехмерного пространства называется генерализацией трех измерений. Чтобы понять, как работает генерализация, нужно сделать несколько шагов назад, чтобы иметь возможность «начать с разгона». Если мы знаем, как перейти от одного измерения к двум, а затем от двух к трем, то мы сможем понять, как перейти от трех измерений к четырем, от четырех — к пяти, от n — к $n + 1$. Это похоже на то, как малыш осторожно карабкается вверх по ступенькам, или на то, как мы постепенно взбираемся вверх по лестнице бесконечности. Если мы не будем останавливаться, то, возможно, так мы доберемся до бесконечного количества измерений. (Иногда мне кажется, что идея бесконечной генерализации — это пример математического оптимизма.)

Если вы находитесь в одномерном мире, то вы живете «на прямой линии». Вообще-то, линия не обязана быть физически прямой, просто существует только одно направление, по которому вы можете двигаться (вперед и назад — это положительный и отрицательный вариант одного и того же направления). Вы можете указать свое местоположение, назвав только одну координату. Независимо от того, является улица прямой или извилистой, дома на ней будут пронумерованы по порядку. Если вы идете по круговому маршруту, то тоже можете указать только одну координату своего местонахождения. Вы можете просто сказать, насколько далеко вы ушли. Вы *могли бы* указать две координаты, уточнив, насколько далеко вы ушли на север и насколько далеко вы ушли на восток, но эта информация будет излишней. Например, вместо того чтобы сказать, что вы продвинулись на 50 метров на север и на 50 метров на восток, вы можете просто сказать, что вы находитесь на 45° в направлении против часовой стрелки от определенной начальной точки.



В этом отношении одномерные миры очень просты. Существует только одна *переменная*, которая определяет, насколько далеко вы ушли от начальной точки. И все-таки удивительно, что, несмотря на это, я много раз умудрялась заблудиться в одномерном мире. Когда я работала в университете в Ницце, где кафедра была круговая, я никогда не могла найти свой кабинет. Еще я периодически теряюсь в поезде, когда возвращаюсь на свое место после посещения туалета, потому что, хотя направления вперед и назад являются частью одного и того же измерения, фактически между ними существует очень большая разница. В таких ситуациях я всегда пытаюсь мыслить математически, но помогает это редко.

Вы можете сбежать из одномерного пространства в двумерное. Это происходит, например, когда вы выходите из поезда (или выпрыгиваете в окно, если вы Джеймс Бонд). Проблемы одномерного мира ярко проявляются в городе Шеффилд, где однонаправленные трамваи двигаются по одной улице с двунаправленными автомобилями. (Конечно, теоретически и трамваи и автомобили могут перемещаться в двух направлениях; в данном случае я имею в виду количество направлений, в которых они двигаются фактически.) Если автомобиль сломается на пути следования трамвая, то другие автомобили легко могут его объехать, а вот трамвай будет полностью заблокирован до тех пор, пока сломанный автомобиль не будет эвакуирован. Трамвай не может просто сдать назад, потому что тогда он будет следовать против направления движения. Поймать кого-то в одномерном мире очень просто, нужно просто заблокировать его. Именно по этой причине вокруг замков сооружались рвы, путь к замку становился одномерным (по подъемному мосту), и его можно было легко заблокировать. Если у вас нет рва, то вам нужен крепостной вал по всему периметру вокруг замка.

Можно сказать, что мир является двумерным, потому что для определения нашего местоположение нам всегда нужно иметь две координаты: насколько далеко мы находимся «вдоль» и насколько далеко мы находимся «поперек». Именно поэтому в театрах и в самолетах в номерах мест указываются и ряд, и номер кресла. (Теоретически числа конечны, поэтому вы можете просто пронумеровать все кресла, начиная с единицы и так далее по порядку, но так будет гораздо труднее найти свое место.)

Поверхность Земли — это очень забавная вещь; *кажется*, что она трехмерна, но фактически существует лишь два измерения, потому что для определения местоположения вам достаточно назвать всего две координаты: широту и долготу. При этом мы не берем в расчет, насколько глубоко вы можете находиться под землей. Земля существует в трехмерной Вселенной, но ее сферическая поверхность двумерна. Это говорит о том, что «измерения» не так просты, как может показаться, даже если мы рассматриваем только физические измерения. Вот еще примеры: окружность является одномерной, хотя для того, чтобы ее нарисовать, вам потребуется двумерный лист бумаги. Горная дорога тоже одномерна, но она извивается и отклоняется не только влево и вправо, но и вверх и вниз, так что она вписывается в трехмерное пространство. Два измерения двумерного пространства часто являются декартовыми координатами, то есть координатами X и Y как в системе координат Чикаго:

Хотя недавно я была в Амстердаме и обнаружила, что концентрическая сеть каналов превратила город в полярную систему координат, поэтому для указания своего местоположения вместо запада-востока и севера-юга нужно указывать, как далеко по окружности (угол) и насколько близко к центру ты находишься:

Третье измерение позволяет сбежать из двухмерного мира. Одна из причин, по которой я люблю подводное плавание, состоит в том, что оно дает мне ощущение трехмерной свободы. Мне кажется, что отчасти поэтому многие увлекаются парапланеризмом или парашютным спортом. Я слишком труслива для подобных вещей, кроме того, не думаю, что я чувствовала бы себя по-настоящему свободной, находясь в таком трехмерном пространстве, ведь я целиком и полностью во власти гравитации. Измерения — это причина того, что для коровы нужен забор, а для птицы потребуется клетка. А еще именно поэтому управлять самолетом гораздо труднее, чем автомобилем, ведь для определения местоположения самолета нужны уже не две, а три координаты: широта, долгота, а также высота, на которой он летит. Еще именно поэтому вы можете поймать корову с помощью лассо (возможно, *вы* не можете, но кто-то другой точно сможет), а для ловли рыбы или для поимки Супермена вам уже потребуется сеть (или некоторое количество криптонита).

Четвертое измерение позволяет сбежать из трехмерного мира. Если бы у рыбы был волшебный выход в четвертое измерение, то она легко смогла бы выпутаться из вашей сети. Если бы вы были Джеймсом Бондом, который летит в самолете, окруженном злодеями, вы могли бы нажать кнопку и сбежать от них в другое (четвертое) измерение.

ВОЗМОЖНЫЕ ВАРИАНТЫ ЧЕТВЕРТОГО ИЗМЕРЕНИЯ

Если все это кажется вам слишком сложным, то вы можете представить себе четвертое измерение как время. Это вполне правильный и очень эффективный подход к изучению времени, его широко используют в теоретической физике; это также способ изучения четвертого измерения, но далеко не единственный способ. Я имею в виду следующее: если вас поймали злодеи, то вы всегда сможете сбежать от них, если умеете путешествовать во времени. Это классический сюжет фантастических книг и кино про путешествия во времени. В фильме «*Назад в будущее*» Марти удается скрыться от преследователей, которые стреляют в Дока, переместившись во времени (хотя это вышло случайно). В книге «*Жена путешественника во времени*» Генри сбегает из-под ареста благодаря перемещению во времени, но тоже совершенно случайно.

Еще один подход к изучению измерений заключается в том, чтобы рассматривать время как еще одну координату, которая необходима для определения местоположения. Когда вы назначаете встречу, вы указываете не только место, но и время, потому что если вы придете в условленное место в неправильное время, встреча не состоится. Ваше местонахождение в пространстве будет верным, а ваше местонахождение во «временном континууме» — нет.

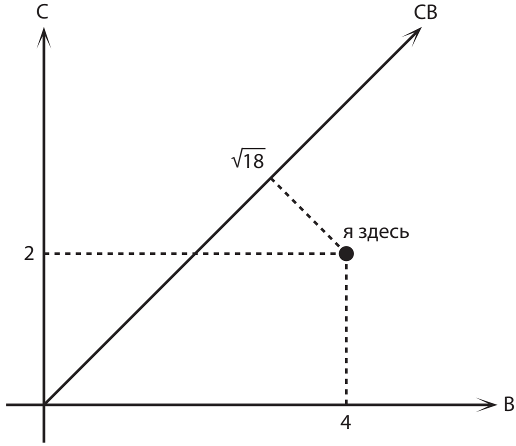
Как скрыться от преследователей, использовав время в качестве четвертого измерения? Во-первых, давайте вспомним, как можно убежать из двумерного пространства в третье измерение. Если вы окружены забором, то убежать несложно: нужно просто перелезть через забор. Вам это удастся, если ваши преследователи ошибочно полагают, что вы способны передвигаться только в двух измерениях; иначе говоря, что вы не можете изменить координату своего местоположения по вертикали. От вас требуется только изменить координату по вертикали, то есть просто перелезть через забор. После чего ваша координата по вертикали снова будет равна нулю, а ваши восточная и северная координаты будут находиться в безопасности, а именно — за забором.

Если злодеи поймали вас в сеть, то, чтобы сбежать от них, вам нужно изменить временную координату своего местонахождения. Проще говоря, переместиться во времени во вчерашний день, когда вы еще не были пойманы в сеть, и немного отойти в сторону. Затем вы снова возвращаетесь в сегодняшний день, но физические координаты вашего местоположения будут уже находиться в безопасности — за пределами сети.

Можно посмотреть с другой стороны: представьте себе, что четвертое измерение — это цвета. Вы находитесь в определенном месте только в том случае, если вы имеете определенную восточную, северную и вертикальную координату *и* вы определенного цвета. Вы можете изменить свою цветовую координату, перекрасившись в другой цвет. Значит, чтобы удержать вас в белой комнате, злодеям нужно покрасить вас в белый цвет. А вам, чтобы сбежать, нужно изменить свой цвет, например, на фиолетовый. Перекрасившись, вы легко пройдете сквозь белые стены. После побега вы снова можете стать белым или выбрать для себя любой другой цвет. Это похоже на плащ-невидимку, но у плаща есть только два состояния — видимое и невидимое; причем, даже если вы будете невидимым, не факт, что вы сможете проходить сквозь стены.

Недавно я объясняла все это одному музыканту, который немедленно отреагировал на мои слова: «Значит, музыка также является четвертым измерением, ведь она тоже позволяет убегать из физического трехмерного мира?» Думаю, да, хотя тут все немного сложнее, потому что музыка не может помочь нам убегать *постоянно*. Если вы заперты в комнате, то, слушая музыку, вы можете сбежать от ощущения замкнутого пространства, но вы не сможете физически выйти за пределы комнаты. Однако когда я еду в поезде и слушаю музыку, а мой сосед слушает что-то совершенно другое, то действительно кажется, что мы находимся в абсолютно разных мирах; или когда я выхожу на улицу после потрясающего концерта, то мне тоже кажется, что я нахожусь в ином измерении, чем окружающие меня люди. Музыка способна также дать мне ощущение путешествия во времени в случае, когда, услышав определенное музыкальное произведение, я мгновенно мысленно перемещаюсь в другое время (и в другое место), которое у меня прочно с ним ассоциируется.

Возможно, вы удивляетесь, почему я постоянно говорю про побег. Причина в том, что если вы не убежите из предыдущих измерений, то не сможете по-настоящему попасть в новое измерение. Это как если бы вы *могли* использовать больше координат для определения своего точного местоположения. Вы могли бы сказать, как далеко вы переместились на восток, как далеко вы переместились на север, а также как далеко вы ушли на северо-восток. «Мое местоположение: 4 мили на восток, 2 мили на север и $\sqrt{18}$ миль на северо-восток».



Это будет очень точное, но совершенно излишнее определение местоположения. В математике есть понятие «независимость» измерений. Если одно из измерений может быть выражено с помощью другого измерения, то оно не является независимым. С лингвистической точки зрения в нашем примере это вполне очевидно, потому что слово «северо-восток» состоит из слов «север» и «восток».

СУЩЕСТВУЕТ ЛИ ГДЕ-НИБУДЬ ЧЕТВЕРТОЕ ИЗМЕРЕНИЕ?

Область моих исследований — многомерная теория категорий, поэтому я очень часто беседую с людьми об измерениях, причем это могут быть как формальные, так и неформальные беседы. Если я выступаю не перед профессионалами в этой области, то обычно в аудитории находится человек, который очень возмущается и настаивает, что все эти разговоры бессмысленны, потому что четвертого измерения просто-напросто *не существует* и мы живем в обычном трехмерном мире.

С точки зрения физики это верно. Но когда мы начинаем рассматривать измерения как независимые координаты, обстоятельства сильно меняются. Ранее я уже говорила о том, что в математике достаточно что-то себе представить, как оно сразу же начинает существовать на самом деле. Если у нас есть более трех независимых друг от друга идей, то мы создаем идейное пространство, в котором более трех измерений. Я уверена, что в вашей жизни найдется более трех независимых друг от друга идей. Возможно, в большинстве случаев, сами того не осознавая, вы думаете гораздо больше чем в трех измерениях; как мольеровский «*Мещанин во дворянстве*», который внезапно обнаружил, что всю свою жизнь говорит прозой, сам не замечая этого.

В конце концов, координаты — это просто череда чисел. Числа могут выражать все, что можно разместить на шкале измерений. Одна из таких вещей — расстояние, его можно отметить на шкале измерений. Если воспринимать эти слова буквально, то вес (или скорее масса) тоже будет параметром, который вы можете указать на шкале измерений. Когда я в последний раз была у врача, он спросил, каковы мой возраст, рост, вес, пульс и показания артериального давления. С учетом того, что показатель давления состоит из двух чисел, всего получилось шесть чисел. Значит, если мы захотим начертить график основной личной информации, то нам потребуется шестимерный график.

Недавно я провела целых шесть дней, тренируясь делать французские пирожные макарони. Это было непросто, потому что в процессе их приготовления очень много переменных. Хоть в рецепте и не так много ингредиентов, постоянно требуется принимать разные решения: например, сколько сахарной пудры, сахарного песка и миндальной муки нужно взять на 100 граммов яичных белков. Помимо этого, нужно решить, как долго взбивать яичные белки, как долго замешивать тесто, насколько большими должны быть половинки пирожных, как долго они должны сушиться перед выпеканием, при какой температуре и как долго их нужно выпекать. Получается девятимерное пространство! И это я еще не говорю о степени моего замешательства при покупке яиц, у которых есть свои собственные параметры: размер, цвет, яйца от кур свободного выгула или нет, органические или нет. Я хотела, чтобы они были большими, коричневыми, от кур свободного выгула и органическими, но зачастую, когда дело доходило до контроля параметров, получалось, что я забывала о той или иной желаемой переменной.

Каждый раз, когда вы сравниваете что-то по списку критериев, вы фактически изучаете пространство измерений, количество которых равно количеству критериев. Исходя из этого в нашей жизни довольно редко можно встретить всего лишь три измерения. Если вам быстро надоедает перечислять сравниваемые критерии, значит, скорее всего, их больше трех. Так бывает, даже если вы их не перечисляете и вообще о них не думаете. Например, когда я покупаю билет на самолет, то всегда анализирую цену, авиакомпанию, расписание рейсов, количество пересадок, но делаю это почти неосознанно.

РОБОТЫ-МАНИПУЛЯТОРЫ

Возможно, сейчас вы думаете: «Все это, конечно, прекрасно, но есть ли вообще необходимость в *изучении* этих многомерных пространств? Зачем нам знать, что они существуют?» Да, вы превосходно жили и без всяких многомерных пространств; вы уже много лет «говорите прозой», сами того не зная.

Без многомерных пространств не обойтись, например, при изучении пространственно-временного континуума, который состоит из нашего обычного трехмерного пространства и времени, являющегося четвертым измерением. Согласно общей теории относительности Эйнштейна, это четырехмерное пространство-время искривлено.

Если мы немного конкретизируем все эти теоретические рассуждения, то получим область разработки роботов-манипуляторов. Роботы-манипуляторы используются повсеместно: на производстве, в околоземном космическом пространстве, в хирургии минимального доступа и в аркадных играх. Сам по себе манипулятор перемещается в пределах трехмерного пространства, но если мы будем рассматривать амплитуду его движения, то нужно знать, что каждый шарнир и каждая соединительная муфта делают в каждый конкретный момент. Каждый шарнир является переменной, поэтому мы получаем пространство с количеством измерений, равным количеству шарниров — или даже большим, если это соединительные муфты более сложной конфигурации.

Понаблюдайте за своей рукой, когда она находится в движении. Если вы просто спокойно сидите и машете ею из стороны в сторону, то она будет двигаться в пределах трехмерного пространства. Как именно рука будет двигаться? У нее есть суставы, которые задают специфические типы движения.

- Если вы вращаете всей рукой по кругу, при этом рука от плеча до ладони зафиксирована и сама по себе не движется, то вы видите, что ваш плечевой сустав задает двумерное движение: то есть, чтобы определить, где находится плечевая часть руки по отношению к остальному телу, вам нужны две координаты — вверх-вниз и вперед-назад.
- Ваш локоть дает одну координату: угол предплечья по отношению к плечевой части руки.
- Ваше запястье дает две координаты, которые определяют положение кисти по отношению к предплечью: одна координата — вверх-вниз, а вторая — слева-справа.
- Вы можете также вращать рукой в предплечье, что можно рассматривать просто как различные положения ладони: вращение происходит от положения «ладонь вверху» до положения «ладонь внизу», и наоборот.

* Ваша рука может также вращаться в плечевой части: вы можете вращать плечевой частью руки, не меняя ее местоположения по отношению к остальному телу и зафиксировав угол предплечья. Нечто похожее происходит, когда вы машете кому-то рукой — не так, когда нужно сгибать и разгибать ладонь, а чертя ею в воздухе что-то вроде арки.

Получилось семь измерений. Неужели наша рука действительно способна двигаться в семимерном пространстве?

Если вы носите или носили платья, то вам наверняка хоть раз приходилось мучиться, пытаясь застегнуть молнию на спине. Если вы никогда не носили платьев, то, вероятно, вы сталкивались с аналогичными трудностями, когда наносили на спину солнцезащитный крем. Что касается молнии на платье, обычно нижнюю ее часть удается застегнуть довольно легко, однако потом вам приходится изменить положение руки, подняв ее так, чтобы вы могли дотянуть застежку до верха. Если ваша гибкость не позволяет вам справиться с такой задачей, то вы будете вынуждены просить о помощи. То же самое происходит, когда вы наносите на спину солнцезащитный крем.

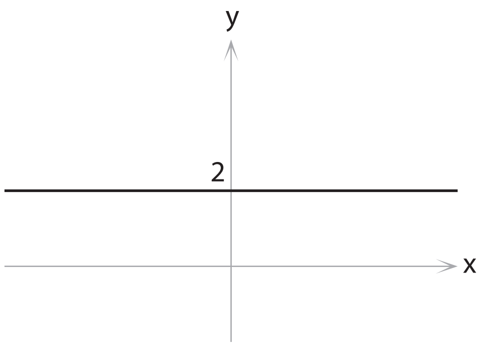
Дело в том, что существует граница, до которой способна дотянуться ваша рука из своего нижнего положения. Если вы достаточно гибки, то эта граница будет проходить как раз рядом с тем местом, куда ваша рука может добраться из своего верхнего положения, или, возможно, даже выше этого места. Ваша кисть из разных позиций может достичь одного и того же места в пределах трехмерного пространства. Однако если мы будем рассматривать всю вашу руку целиком — от плеча до пальцев, то увидим, что она обладает совершенно иной конфигурацией, и для того, чтобы перейти из первого положения во второе, ей приходится проделать сложный путь в пределах семимерного пространства. А значит, эти два положения вашей руки будут расположены очень далеко друг от друга. При проектировании роботов-манипуляторов подобного рода вещи очень важны. Нам необходимо знать, как «манипулятор» должен двигаться в обычном трехмерном пространстве; причем нужно понимать, какие его положения будут находиться близко друг от друга и в трехмерном, и в многомерном пространстве движения манипулятора. Если во время проведения хирургической операции с минимальным доступом вам нужно что-то аккуратно переместить на минимальное расстояние, то будет не очень хорошо, если для этого робот-манипулятор начнет выполнять полную реконфигурацию своего положения.

УМЕНЬШАЯ КОЛИЧЕСТВО ИЗМЕРЕНИЙ

В многомерных пространствах очень трудно разобраться, поэтому им посвящен целый раздел математики. Именно поэтому в математике, как и в обычной жизни, мы часто уменьшаем количество измерений, чтобы немного упростить ситуацию. Это можно сделать разными способами.

Один из способов — просто проигнорировать некоторые измерения. Например, когда мы хотим оценить что-то по списку критериев, часто получается слишком много критериев, и нам приходится сосредоточить свое внимание на самых важных из них. Такое игнорирование менее значимых критериев автоматически сокращает общее количество измерений, то есть углов зрения, под которыми мы рассматриваем объект, что облегчает процесс принятия решения.

Вы также можете временно игнорировать некоторые измерения, определив для себя несколько самых основных переменных. В попытках усовершенствовать пирожные макарони в конечном итоге я пришла к тому, что нужно рассматривать процесс их приготовления в одном единственном измерении. Сначала я сделала одну партию макарони и попробовала выпекать их при разных температурах. Так я определила оптимальную температуру выпечки. Затем я сделала еще одну партию по другой технологии: выдавливая смесь, я одновременно ее перемешивала. После того как я определилась с этими двумя пунктами, то немного поменяла количество миндальной муки. Все это похоже на обычное двумерное пространство, в котором координата y зафиксирована, скажем, как 2. В этом случае мы получаем прямую линию, на которой x может быть равно чему угодно, а y всегда будет равно 2:



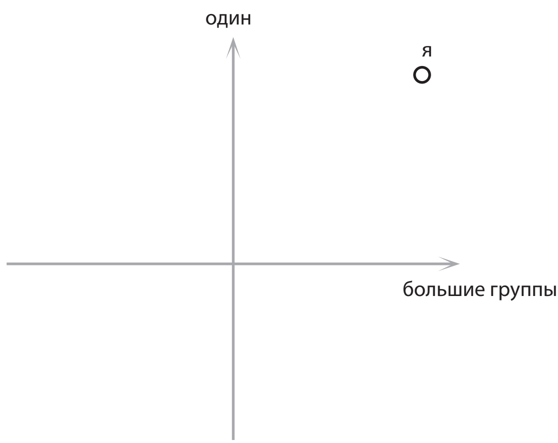
Таким образом, мы превратили двумерную плоскость в одномерную линию. Это не сильно отличается от простого игнорирования одной из переменных: полностью проигнорировать переменную — это как уменьшить все до оси x, то есть зафиксировать y равным 0.

В случае с моими макарони все было сложно, потому что я не знала, будет ли оптимальная для одного рецепта температура выпечки оптимальной и для другого рецепта. Поэтому после изменения количества миндальной муки я была вынуждена снова попробовать все возможные температуры. Как вы можете себе представить, мои исследовательские работы продолжались долго.

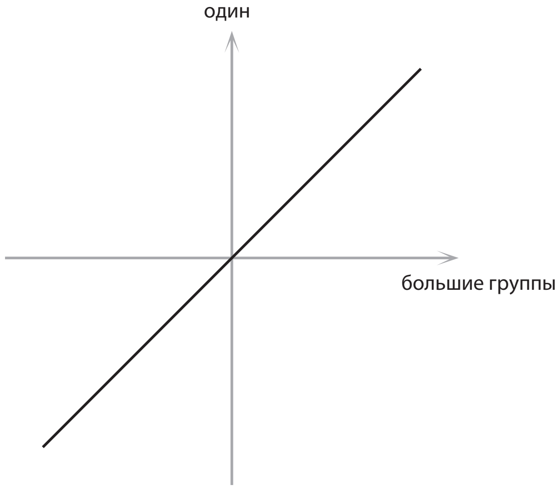
Существует более деликатный (я бы даже сказала, более хитрый) способ сокращения количества измерений — объединение двух измерений в одно. Это бывает при заполнении анкет с такими вопросами, как «я предпочитаю общение в больших группах, а не один на один», когда вам нужно отметить на шкале, согласны вы с этим утверждением или нет:

○	○	○	○	○
категорически не согласен	не согласен	ничто из указанного	согласен	определенно согласен

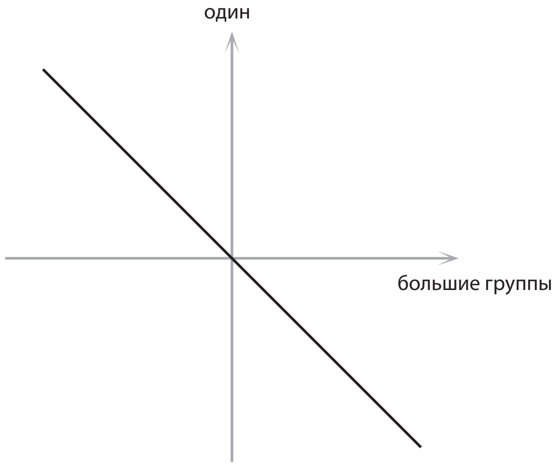
Казалось бы, в этих вариантах больше нюансов, чем в простых ответах «да» или «нет»; помимо черного и белого нам предлагается еще и серый. Тем не менее вопросы такого рода всегда ставят меня в тупик, потому что я очень часто бываю одновременно *и* категорически согласна, *и* категорически не согласна. Казалось бы, я должна выбрать вариант «ничто из указанного», но я не считаю его правильным, потому что «ничто из указанного» звучит как «мне все равно», тогда как иногда мне *действительно* хочется общаться с большой группой людей, а в другие дни мне *действительно* хочется пообщаться с человеком один на один. Такое происходит, потому что такой вопрос *действительно* является двумерным: насколько вам нравится общение в большой группе людей и насколько вам нравится общение один на один? В этом вопросе две переменные, и его можно изобразить вот так:



Я отмечу себя в самом верху справа, потому что я люблю и то и другое. Тот, кто *ненавидит* и то и другое, одинаково был бы в самом низу слева. Фактически вся диагональ — это разные способы согласия и несогласия в равной степени.



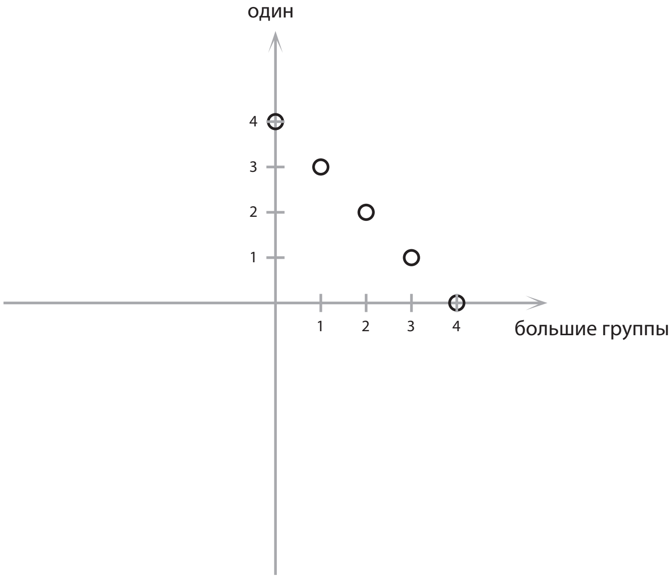
С точки зрения математики это линия, где $x = y$. На первоначальной шкале ответов она была сжата до одного-единственного варианта «ничто из указанного». Авторы таких анкет считают, что общение в больших группах и общение в малых группах — это две «противоположности»: насколько вам нравится одно, настолько вам должно не нравиться другое. Это похоже на игру на выбывание. С математической точки зрения игра на выбывание означает $x + y = 0$, то есть получается вот такая линия:



Наш пример больше похож на «игру с четырьмя победителями». Вы можете быть согласны или не согласны с утверждением по шкале от 0 до 4, но в итоге всегда должно быть 4. Тогда такой вопрос в анкете будет подразумевать следующее: вы согласны с утверждением по шкале от 0 до 4, и одновременно вы не согласны с ним на оставшиеся пункты от 0 до 4, что выглядит вот так:

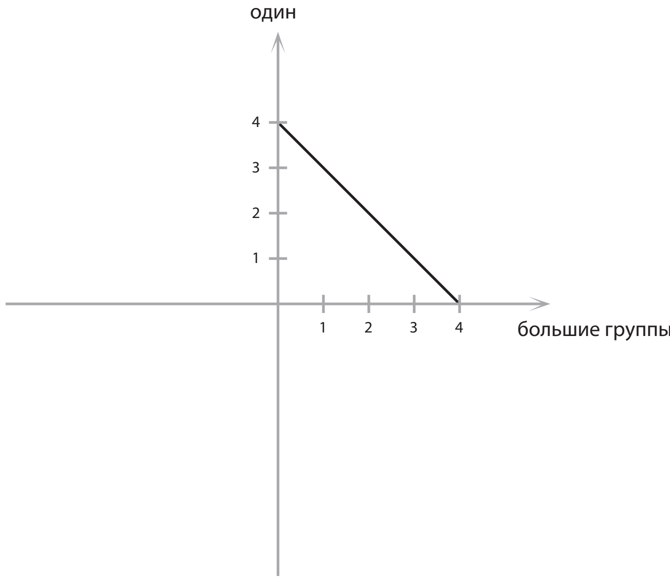
один	4	3	2	1	0
большие группы	0	1	2	3	4
	○	○	○	○	○
	категорически не согласен	не согласен	ничто из указанного	согласен	определенно согласен

Если мы попробуем изобразить такие варианты ответа на графике, то у нас получится вот что:



Иногда авторы анкет пытаются выявить больше нюансов и признают, что все варианты ответа — это континуум, тогда они дают вам возможность отметить любое место на шкале «согласен» и «не согласен».

В этом случае мы будем рассматривать всю линию $x + y = 4$, которая выглядит следующим образом:



Вы можете взять любую точку на этой линии, и увидите, что ее координаты x и y в сумме дают 4. Несколько странным образом мы снова уменьшили количество измерений: из двумерного пространства мы получили простую одномерную линию.

Еще один подход к изучению шкалы ответов заключается в том, чтобы представить ее как фактическое отношение того, насколько нам нравится один тип общения в сравнении с другим. В этом случае мы берем координаты x и y и сокращаем их до $\frac{x}{y}$. Это более сложный способ превращения двух измерений в одно. Существуют интернет-сервисы, которые позволяют создать трехмерные графики. Вы можете попробовать сделать график для $z = \frac{x}{y}$, чтобы посмотреть, какое значение будет у каждой позиции в двумерной плоскости. Это очень трудно себе представить.

Похожее сокращение количества измерений происходит, когда мы говорим о политических убеждениях. Например, мы можем сказать, что тот или иной человек тяготеет к «левым» или к «правым»; хотя это, конечно, крайне упрощенный подход. Интернет-сайт `politicalcompass.org` утверждает, что на самом деле существует две основные категории: экономические убеждения и социальные убеждения, и вместе они представляют собой двумерный график политических взглядов. Но обычно мы стремимся втиснуть его в одно-единственное измерение. В упрощенном подходе всегда есть и плюсы, и минусы. Плюс в данном случае в том, что простые вещи легче воспринимаются, но есть еще и минус — упрощая, мы утрачиваем часть информации. Такие вещи всегда следует внимательно взвешивать, мы должны, как минимум, знать, что мы теряем какое-то количество информации.

Политические убеждения — это пространство, в котором гораздо больше двух измерений, ведь количество величин, характеризующих наши политические убеждения, безгранично. Вероятно, это будет даже пространство с бесконечным количеством измерений, но мы всегда сокращаем их количество, чтобы иметь возможность причислить себя к какой-либо группе, имеющей сходные с нами политические взгляды. Проблема в том, что при этом мы объединяем несколько измерений в одно, а не игнорируем некоторые из них. Вместо того чтобы признать, что некоторые измерения не так важны, мы делаем вид, что они *объединены* с другими. С математической точки зрения это очень разные способы сокращения количества измерений.

КОНТИНУУМ ИЗМЕРЕНИЙ

Иногда, оценивая все за и против в какой-либо ситуации, я обнаруживаю, что критерии оценки очень сложно отличить друг от друга. Например, вы анализируете краткосрочные и долгосрочные выгоды. Затем вы вспоминаете про среднесрочные выгоды. Я также начинаю думать о микросрочных выгодах (мгновенное вознаграждение). Но в какой момент краткосрочное превращается в среднесрочное? Где проходит граница между ними?

Например, вы сравниваете два предложения о работе: оцениваете степень удовлетворения от работы и зарплату. Однако эти два пункта пересекаются, потому что зарплата дает удовлетворение. Возможно, зарплата — это просто один из аспектов удовлетворения от работы? Вы начинаете выделять все более специфические критерии удовлетворения от работы, при этом границы между ними становятся все более размытыми.

В итоге вы понимаете, что все ваши критерии тоже находятся на одной непрерывной прямой. Это означает, что вы анализируете не только каждый отдельный критерий, но и общую ценность всех критериев на этой прямой. Вы находитесь в пространстве с несчетным количеством измерений. Неудивительно, что решения всегда даются нам с трудом.

13

КАТЕГОРИИ С БЕСКОНЕЧНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ИЗМЕРЕНИЙ

Моя подруга рассказала в социальной сети про аппетитный круассан-сэндвич. Я мгновенно представила себе круассан внутри сэндвича, но быстро поняла, что она имела в виду круассан, который был не начинкой, а внешней частью сэндвича.

Вы когда-нибудь задумывались о приготовлении «сэндвича с сэндвичем»? Это сэндвич с начинкой из еще одного сэндвича. Наверное, между слоями хлеба нужно будет положить листья салата-латука? Некоторые люди уверены, что салат-латук играет в сэндвиче жизненно важную — можно даже сказать структурообразующую — роль, защищая хлеб от намокания из-за начинки (лично я никогда не ем салат-латук, потому что не люблю его). В таком случае сэндвич x будет состоять из

хлеба
салата-латука
x (начинки)
салата-латука
хлеба.

Например, сэндвич с курицей будет состоять из

хлеба
салата-латука

курицы
салата-латука
хлеба.

В таком случае сэндвич с сэндвичем с курицей будет состоять из

хлеба
салата-латука
сэндвича с курицей
салата-латука
хлеба.

А если мы подробно распишем все его составляющие, то получится

хлеб
салат-латук
хлеб
салат-латук
курица
салат-латук
хлеб
салат-латук
хлеб.

Это напоминает мой любимый повторяющийся «шахматный» кекс «Баттенберг»,

приготовленный так, что каждая отдельная его часть сама по себе тоже является кексом «Баттенберг».

Возможно, в нем тоже нужен слой марципана, который будет разделять маленькие шахматные кексы внутри большого шахматного кекса?

Оба этих примера демонстрируют нам, как нечто создается из самого себя. В математике такое случается довольно часто: например, когда многомерные пространства строятся из пространств с меньшим количеством измерений. Это происходит потому, что математика имеет дело с абстрактными идеями, такими как пространство, измерения и бесконечность, и потому, что математика сама по себе тоже является абстрактной идеей. Физические объекты не ведут себя подобным образом. Если вы склеите вместе несколько птиц, то не получите новую птицу. Такой номер с птицами не пройдет! В каких случаях вещь является достаточно абстрактной, чтобы стать повторяющейся?

ЛЕГО ИЗ ЛЕГО

Представьте себе гигантские кубики Лего, состоящие из кубиков Лего. Такое вполне можно себе представить, потому что в Лего есть нечто абстрактное. Вы не можете сделать гигантскую птицу, состоящую из птиц. По крайней мере, с настоящими птицами это будет невозможно. Но вы можете сделать гигантскую модель птицы из более маленьких моделей птиц, потому что модель птицы достаточно абстрактна для этого, а настоящая птица — нет. Некоторые художники создают мозаичные портреты людей, используя маленькие портреты в качестве отдельных элементов. Вы можете создать портрет из портретов, потому что портрет тоже достаточно абстрактен для этого, а вот реальный человек — нет.

Когда я была маленькой, я училась программировать на компьютере «Спектрум», как и целое поколение юных британских программистов, математиков и детей из семей «с уклоном в эту сторону». Я уже рассказывала о своей любимой бесконечной программе `HELLO`. Мне никогда не надоедает описывать концепцию компьютера «Спектрум» тем, кто с ним не знаком, потому что она невероятно проста и невероятно уникальна. Сейчас я еще раз опишу ее просто на всякий случай. У меня была одна из первых (или, возможно, даже самая первая) версия персонального компьютера. Фактически он состоял из одной клавиатуры — крошечной штуки с резиновыми клавишами. У компьютера не было экрана, он подключался к обычному телевизору. Чтобы сохранить информацию, нужно было использовать обычную кассетную ленту и кассетный рекордер. Вы просто нажимаете кнопку записи на рекордере и `Save` на «Спектруме», после этого ваша программа записывается в виде забавных звуков. Пропев эти звуки, я могу произвести крайне благоприятное впечатление на любого, кто, так же как и я, вырос со «Спектрумом», по крайней мере, достаточно благоприятное, чтобы его накрыла волна воспоминаний и, возможно, даже приступ истерического хихиканья. Для того чтобы снова загрузить программу, нужно было нажать `Play` на рекордере и `Load` на «Спектруме», забавные звуки проигрывались в обратном порядке, и программа удивительным образом загружалась снова. Существовали также довольно увлекательные игры для «Спектрума», которые тоже продавались на кассетах (некоторые я находила не особенно увлекательными, примерно как авиационные симуляторы, в которых, как мне кажется, вообще ничего не происходит, хотя, возможно, я просто ничего в них не понимаю).

Принтер был чудесной маленькой штукой, которая подключалась к «Спектруму» уже не помню каким образом. Самым запоминающимся был рулон металлизированной бумаги, похожий на рулон туалетной бумаги, но меньшего размера. С печатной стороны бумага была серебристого цвета. Думаю, что печать осуществлялась с помощью нагрева. У этого принтера был один-единственный шрифт только одного размера, поля и расстояния между буквами тоже всегда были одинаковыми, примерно как в Courier.

Мне нравилось печатать вывески, например, такие, как `КОМНАТА ЮДЖИНИИ`, но я никак не могла поменять размер шрифта. Самое забавное, что можно было сделать, чтобы надпись была достаточно крупной, — это составить каждую букву из множества других букв, вот так:

```
EEEEEEEEEEEE
EEEEEEEEEEEE
EEEE
EEEEEEEE
EEEEEEEE
EEEE
EEEEEEEEEEEE
EEEEEEEEEEEE
```

И так далее. С буквами это получается легко, потому что они тоже абстрактны. В математике все абстрактно, поэтому вы всегда можете построить из математических вещей другие математические вещи, даже если они не будут точно такими же. Например, вы можете сделать букву `E` из букв `A`, что ужасно нелогично.

AAAAAAAAAAAAA
AAAAAAAAAAAAA
AAA
AAAAA
AAAAA
AAA
AAAAAAAAAAA
AAAAAAAAAAA

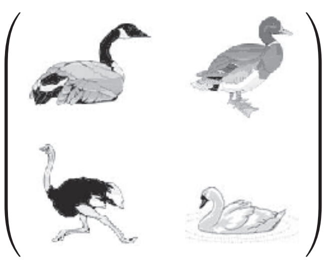
Вы можете сделать такого рода конструкцию из математических объектов, потому что они абстрактны. Например, вы наверняка помните матрицы. Они выглядят так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Эта матрица построена из чисел, но мы также можем строить матрицы из других вещей. Когда я изучала математику в средней школе, то графические калькуляторы только появлялись, и — о, чудо! — они тоже могли строить матрицы. Люди, разрабатывающие экзамен на аттестат зрелости, быстро поняли это и начали делать матрицы не из чисел, а из букв, чтобы мы не смогли пользоваться калькуляторами. Матрица, сделанная из букв, выглядит так:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Мы могли бы также сделать матрицу из птиц.



Или матрицу из ... матриц:

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Матрицы достаточно абстрактны для того, чтобы можно было создавать матрицы из матриц. Математика тоже достаточно абстрактна для того, чтобы мы смогли создать еще больше математики из математики. В потрясающей книге Кристофера Дэнилсона «*Найди лишнее*!» (Which one doesn't belong?) есть задание, в котором нужно найти лишнее из нескольких заданий на «Найди лишнее!»: то есть найди лишнее из «Найди лишнее!».

В своей предыдущей книге (How to Bake Pi: Easy Recipes for Understanding Complex Maths) я рассказывала об области своих исследований — о теории категорий, называя ее «математикой математик». А как можно назвать математику теории категорий? Это все еще будет теория категорий, но у нее появится еще больше измерений. Как это? Все дело в том, что теория категорий занимается изучением отношений между разными вещами. А что будет, если эти «вещи» и есть отношения?

САМОЛЕТЫ, ПОЕЗДА И АВТОМОБИЛИ

В самом начале этой книги я сравнивала путешествие по воздуху и путешествие по воде. Когда мне нужно пересечь Атлантику, я всегда лечу самолетом, но не ради красивых видов, ведь почти всю дорогу смотреть все равно будет нечего. Возможно, однажды я выберу корабль, хотя обычно у меня не хватает времени на такое долгое путешествие.

Когда вы планируете отпуск, вы думаете, как лучше добраться до места, или всегда летите на самолете? Вероятно, вы хотите поехать туда, где тепло и солнечно, в таком случае, если вы живете в Великобритании, скорее всего, вам придется лететь. Либо долго-долго сидеть в поезде.

Когда я была маленькой, мы часто ездили во Францию на машине: посещали виноградники, покупали вино и возвращались назад. Мы жили рядом с Брайтоном, поэтому нам было удобно пользоваться паромной переправой. У нас было два варианта маршрута: Ньюхавен — Дьепп и Дувр — Кале. До Ньюхавена было гораздо ближе, но оттуда значительно дольше плыть на пароме. Я не знаю, что было дороже; в то время я была слишком юной, чтобы задаваться такими вопросами.

Однажды, когда я все еще была довольно юной, появился новый вариант путешествия — судно на воздушной подушке. Это совершенно чудесное транспортное средство могло лететь по воде. Представьте себе мое разочарование, когда я в первый раз поехала на нем и обнаружила, что поездка совсем не ощущается как полет. Ты чувствуешь себя точно так же, как на обычном корабле, за исключением единственной вещи: если я правильно помню, жесткость сидений на таком судне ощущалась гораздо сильнее. И да, еще нас всех ужасно тошнило.

Путешествие на автомобиле — это самый практичный выбор в том случае, если у вас есть маленькие дети, причем независимо от того, выйдет оно дешевле или нет. Вы можете закинуть в машину все необходимое, и там останется еще куча места для покупок, особенно если у вашей машины такой же большой багажник, как у нашего старого «Сааба». Предположим, что вы решили ехать на автомобиле, тогда вам нужно выбрать маршрут. Если вы воспользуетесь поисковиком, то он выдаст вам много разных вариантов. Вы сможете сравнить время в пути, расстояние и качество дорог, по которым вам предстоит проехать. Если вы, как я, то вы выберете самый простейший маршрут, по главным дорогам, чтобы ни в коем случае не заблудиться; хотя многие предпочитают самый кратчайший или самый быстрый путь.

Таким образом, мы сравниваем разные варианты пути из одного пункта в другой. Маршрут из точки A в точку B — это тоже своего рода «отношение» между двумя населенными пунктами, которое тоже может иметь множество разных вариантов. Теперь, если вы начнете изучать отношения между разными маршрутами, это будут отношения между отношениями.

Теория категорий изучает отношения между вещами, и мы только что обнаружили в теории категорий понятие «*измерение*».

- Если вы игнорируете отношения между вещами, то есть рассматриваете их так, как будто они происходят в вакууме, то у вас получается пространство с нулевым количеством измерений.
- Если вы допускаете наличие отношений между вещами или между маршрутами, то у вас получается одномерное пространство.
- Если вы учитываете отношения между этими отношениями, то у вас получается двухмерное пространство.
- Если вы допускаете отношения между отношениями между отношениями, то у вас получается трехмерное пространство

... и так далее.

Если мы учитываем отношения между вещами, то почему мы не должны учитывать также отношения между этими отношениями? Изучение отношений между вещами — это помещение вещей в контекст. Если мы хотим изучать вещи в их контексте, то разве мы не должны изучать и отношения в их контексте? Например, мы сравниваем, как лучше добраться до места проведения отпуска, и выясняем, что лететь на самолете будет быстрее, однако дороже, чем ехать на машине. Теперь нам нужно сравнить эти отношения: что для нас важнее — скорость или стоимость? Или, предположим, вы сплетничаете об отношениях других людей (но, конечно же, вы никогда такого не делаете). Вы видите, что одна пара замечательно проводит время друг с другом, но часто ссорится, а другая пара никогда не ссорится, но кажется, что им не так уж хорошо вместе. Теперь вы можете сравнить, что важнее: приятно проводить время друг с другом или никогда не ссориться.

Теория категорий основывается на отношениях между вещами и разными способами изучает такие отношения: характеризует вещи посредством свойств, которыми они обладают, находит пруд, где эти вещи становятся самой жирной рыбой, помещает вещи в контекст или предполагает, что эти вещи являются «более-менее одним и тем же». А многомерная версия теории категорий делает все то же самое с самими отношениями. Так мы переходим на другой уровень абстракции и попадаем в *многомерную теорию категорий*.

В теории категорий мы можем изобразить отношения между разными вещами как стрелку, вот так:

$$A \xrightarrow{F} B$$

Представим, что A — это то место, где мы живем, B — это то место, куда мы собираемся поехать в отпуск, а F — то, как мы можем туда добраться. Наше путешествие — это «отношение» между нашим домом и местом проведения нашего отпуска. Теперь предположим, что у нас есть два варианта того, как мы можем добраться до места проведения отпуска: вариант F и вариант G, и есть способ их сравнения. В многомерной теории категорий мы можем нарисовать вот такую стрелку:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow a"] & B \end{tikzcd}$$

Здесь двойная стрелка, обозначенная как a, — это отношение между вариантом F и вариантом G; это отношение можно расшифровать как сравнение цены и длительности пути, или цены и удовольствия от поездки, или цены и видов, которыми можно будет насладиться во время путешествия.

Теперь на основании этого отношения мы можем построить вот такой график (этот график взят из моих исследований):

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "{G(b_1, \_)}"] \arrow[ddr, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\epsilon_{b_1} \Swarrow"] & A^\bullet \arrow[d, bend right] \arrow[d, bend left] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow \eta_{b_2}"] \arrow[ddr, "1"] & \\
& A^\bullet \times B^\bullet \arrow[d, "F^\bullet"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \eta_{b_2}"] & \\
& C \arrow[r, "{G(b_2, \_)}"'] & A^\bullet
\end{tikzcd}
$$

Многомерная теория категорий изучает такие многомерные структуры, которые никогда не перестанут формироваться, пока вы не скажете: «Стоп! Довольно! Больше никаких измерений!» Если вы так не скажете, то они будут формироваться бесконечно и превратятся в категории с *бесконечным количеством измерений*. Далее мы увидим, что в некоторых случаях такие категории бывают проще, чем категории с конечным количеством измерений, потому что их формирование проходит более «естественным» путем. В математике, а особенно в теории категорий, вещи, которые растут органично, без каких-либо вмешательств с нашей стороны, часто бывают простыми. Тогда как созданные нами искусственные отношения делают вещи практичнее, но сложнее. В некотором смысле это похоже на то, что во взрослом мире есть гораздо больше ограничений, чем в фантазийном и идеальном мире детей. Ограничения делают мир взрослых более практичным и одновременно более сложным для навигации. Идеализм — прост, если ты не тот, кто должен превратить его в работоспособную логистическую систему.

В теории категорий всегда есть некоторая нестыковка между идеализмом и логистикой. Существует много структур, которые естественным образом хотят иметь бесконечное количество измерений, но это слишком непрактично, поэтому мы думаем о них в контексте простого конечного количества измерений и пытаемся совладать с последствиями превращения такой логистики в нечто работоспособное. Точно так же, как в предыдущей главе, где мы говорили о разных способах снижения количества измерений при сравнении критериев оценки ситуации, теория категорий тоже располагает разными способами снижения количества измерений. Каждый способ предполагает разные проблемы.

Возможно, вам интересно, почему мы не можем просто забыть некоторые из них, как мы сделали это в последней главе. Мы вернемся к этому вопросу позже, после того, как рассмотрим, как математика распространяется. Каждое измерение отношений, которые мы рассматриваем, создает новое измерение отношений, которое тоже необходимо учитывать; каждый вопрос, на который мы отвечаем, создает еще больше вопросов.

ПОКОРИТЬ КАЖДУЮ ВЕРШИНУ

Фильм «*Выжить*!» рассказывает ужасающую историю знаменитой авиакатастрофы 1972 года, когда самолет уругвайских авиалиний, выполнявший рейс номер 571, упал в горной местности, в Андах, в плохую погоду. Оставшиеся в живых поймали радиосигнал и из выпуска новостей узнали, что их никто не пытается спасти, поиски прекращены из-за неблагоприятных погодных условий. Выжившие пассажиры решают, что самые сильные и выносливые из них должны отправиться в долину за помощью. На самолете находилась уругвайская сборная по регби в полном составе, поэтому некоторые из выживших были довольно спортивными.

Трое мужчин упаковали все необходимое для такого пути. Сначала они должны были забраться на ближайший горный хребет, а затем спуститься в долину. Но добравшись до вершины хребта, они увидели перед собой не долину, а еще более высокие горы. Эти горы загораживал хребет, но сейчас они забрались достаточно высоко, чтобы увидеть, какую высоту им в действительности придется преодолеть, чтобы попасть в долину.

Они понимают, что провизии на троих не хватит, поэтому один отдает свою часть припасов и возвращается к месту крушения самолета, чтобы ждать помощи вместе с остальными. Трудно поверить, но в конце концов им удается добраться до долины и позвать на помощь.

В математике нет ничего пугающего, но она тоже похожа на бесконечную горную цепь. Взобравшись на горный хребет и едва успев насладиться победой, вы понимаете, что покоренная вершина открыла перед вами еще более высокие горные пики. Это напоминает мне тот случай, когда я с большим трудом добралась до горной вершины в Нью-Мексико и только тогда смогла увидеть, что горная цепь продолжается дальше. Или тот случай, когда я плыла к пляжу вдоль извилистого берега и за каждым изгибом открывалась новая береговая линия.

Так бывает всегда, и это одна из суперспособностей математики. Дело в том, что изучаемые нами структуры могут формировать еще более крупные структуры, и это происходит снова и снова, до бесконечности. Такое возможно благодаря их абстрактной природе. Если мы взбираемся на горную вершину, то мы при этом не строим новые горы из покоренных гор, мы просто можем видеть больше, чем прежде. А в математике, покоряя вершину, мы создаем новую.

Мы делаем это не намеренно, это происходит по причине того, что методы, разработанные для изучения разных математических объектов, сами по себе тоже являются разделами математики. Для их изучения мы вынуждены создавать новые разделы математики, которые тоже приходится изучать. Если бы мы изучали птиц, то ничего подобного не было бы. Методы, которыми мы пользуемся для изучения птиц, сами по себе не являются птицами.

Таким образом возникла теория категорий как новый раздел математики для изучения самой математики. В некотором смысле теория категорий — это высшая степень абстракции. Для абстрактного изучения мира мы используем науку, для абстрактного изучения науки мы используем математику, для абстрактного изучения математики мы используем теорию категорий.

ПОЧЕМУ ВСЕ ТАК СЛОЖНО?

Возможно, вам интересно, почему мы не можем просто добавить измерения к нашей теории и закончить на этом. Что это значит? Чтобы найти конкретную точку в двумерном пространстве, мы должны указать две координаты: координату x и координату y. Чтобы найти определенную точку в трехмерном пространстве, мы должны добавить еще одну координату. Мы можем добавить сколько угодно координат и получим сколько угодно измерений, даже если при этом не будем знать, как эти измерения выглядят *в пространстве*.

Координаты и измерения не обязательно должны иметь какое-либо отношение к физическому пространству: в любое время и в любом случае у нас есть четыре независимые переменные для четырех измерений. Измерения не должны находиться в пространстве и во времени — мы знаем это из предыдущей главы, в которой говорилось об измерениях, возникающих из критериев оценки или из шарниров робота-манипулятора.

С этой точки зрения можно рассматривать сбои в компьютерных системах. Абстрактное пространство (в отличие от физического) можно составить из различных конфигураций компьютера, которые задаются с помощью различных переменных, а путь, ведущий в тупик, приводит к сбою в системе. Пространство можно рассматривать с точки зрения *топологии*, раздела математики, изучающего основные формы пространства. В топологии пончик обладает такой же формой, что и чашка кофе (которая с ручкой), потому что оба они имеют отверстие, и в итоге учитывается только оно одно.

И все-таки почему все так сложно? Как ни прискорбно это осознавать, несмотря на все прилагаемые усилия, компьютерные сбои все еще существуют. Причина, к сожалению, немного сложнее, чем я описала выше. Мы не можем просто постоянно добавлять новые измерения к нашим категориям, увеличивая количество отношений между отношениями. Мы должны добавлять еще и аксиомы или законы, регулирующие эти отношения. И чем больше измерений мы добавляем, тем труднее понять, какими должны быть эти аксиомы.

Одна из возникающих при этом проблем — вопрос «ассоциативности». Вы знаете, что в самом общем виде этот вопрос заключается в следующем:

$$(3 + 5) + 5 = 3 + (5 + 5).$$

В данном случае нет никакой разницы, где в этом примере будут стоять скобки. Тут все просто, но если мы возьмем более сложные объекты, чем числа, то данное утверждение больше не будет абсолютно верным.

(яичный желток + сахар) + молоко

получается заварной крем. Однако если будет вот так:

яичный желток + (сахар + молоко),

то крем не получится.

А вот математический пример. Топология изучает формы пространства, а *алгебраическая* топология изучает путешествия в пространстве. Вот современный способ изучения путешествий с помощью теории категорий. Категория — это математическая структура, обладающая

- объектами;
- отношениями между этими объектами, выраженными стрелками;
- способом объединения отношений, если стрелки указывают в одном и том же направлении; в этом случае у вас будут вот такие стрелки:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

Вы можете объединить стрелки вот таким образом:

$$A \xrightarrow{g o f} C.$$

В этом случае наши объекты — это все возможные места в пространстве, а наши стрелки — это путешествия из одного места в другое. У нас есть способ объединения отношения: если у вас есть потенциальный путь из A в B и потенциальный путь из B в C, то вы можете последовательно объединить их и получите более длинный путь из A в C.

Обычно решая, как добраться из A в B, мы думаем, сколько будет длиться это путешествие в минутах, в часах или в чем-нибудь еще. В абстрактном математическом пространстве нет никаких единиц измерения расстояния и нет никаких единиц измерения времени. Есть только цифры. Если вам, так же как и мне, снижали оценки на школьных контрольных из-за путаницы в единицах измерения, то это обстоятельство станет для вас облегчением.

Чтобы было проще сравнивать разные путешествия, предположим, что их длительность всегда равна 1. Аналогичным образом мы поступаем, когда считаем в процентах: мы соотносим все с 100, чтобы у нас была возможность сравнивать разные объекты. Нас просто не интересует, сколько времени займет каждый отрезок пути по отношению ко всей длительности маршрута. Итак, мы «стандартизируем» длительность как 1.

Мы знаем, что если нам предстоит путешествие из A в B и еще одно путешествие из B в C, то мы можем объединить их и вместо 1 получим 2. Далее, вместо того чтобы «стандартизировать» все путешествие и получить стрелку $A \to C$, мы будем считать, что каждое отдельное путешествие проходит в два раза быстрее, чем все путешествие целиком. То есть мы проведем половину времени, добираясь из A в B, и половину времени, добираясь из B в C.

Все это прекрасно, однако если речь пойдет о трех таких путешествиях, то возникают трудности:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D.$$

Возможно, сейчас вы подумали, что будет логично, если каждое путешествие будет в три раза быстрее, чем все путешествие целиком. Но ассоциативность работает иначе. Мы не можем просто изобрести новый способ объединения трех объектов в один, мы должны сначала применить способ, который изначально использовался при объединении двух объектов, а потом ставить скобки в разных местах и смотреть, что получится. Если мы сначала совершаем объединенное путешествие:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C,$$

а затем прибавляем в конце h, то все должно быть точно так же, как если мы начинаем с путешествий:

$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D,$$

а затем прибавляем в начале f. Проблема заключается в том, что это *не совсем верно*. Ведь в первом случае, когда мы объединили вместе f и g, мы совершали каждое из них в два раза быстрее, чем все путешествие целиком, так что в итоге мы потратили на них следующее количество времени:

Путешествие	**Затраченное время**
f	$\frac{1}{2}$
g	$\frac{1}{2}$

Теперь, если мы добавим в конец h, тоже должны будем совершать *все* путешествия в два раза быстрее, то есть мы должны будем провести половину общего времени, совершая f и g *вместе*, и половину времени, совершая h. Это значит, что мы затратим следующее количество времени:

Путешествие	**Затраченное время**
f	$\frac{1}{2}$
g	$\frac{1}{4}$
h	$\frac{1}{2}$

Однако если мы сначала объединим путешествия g и h, то должны будем совершить каждое из них в два раза быстрее:

Путешествие	**Затраченное время**
g	$\frac{1}{2}$
h	$\frac{1}{2}$

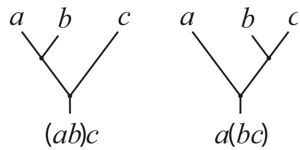
Затем, если мы прибавим в начало f, то мы должны будем потратить половину времени, совершая f, и половину, совершая g и h, объединенные вместе:

Путешествие	**Затраченное время**
f	$\frac{1}{2}$
g	$\frac{1}{4}$
h	$\frac{1}{4}$

Если мы сравним эти две таблицы, то увидим, что ответы получились разные. В первом случае мы затратили четверть общего времени на f и g и половину времени на h, а во втором случае мы затратили половину времени на f и только четверть на g и h. Итак, данный метод объединения не *ассоциативен*. Для нас действительно очень важно, где стоят скобки.

В математике существуют различные подходы к этому явлению, и все зависит от баланса между практичностью и абстрактностью логистики. Можно упростить ситуацию, и все станет более практичным, но так утрачиваются некоторые тонкости. Один из подходов заключается в использовании более строгого понятия тождественности путешествий, так что эти два путешествия, на которые в разных случаях вы затратили разное количество времени, считаются одним и тем же. Это входит в область исследований с помощью так называемой теории гомотопий, потому что понятие тождественности называется гомотопией.

Еще одним способом является регистрация небольших различий с помощью графиков-деревьев, похожих на те, которые мы уже рисовали ранее; так мы можем учитывать разные позиции скобок. Например, эти два дерева выражают разные позиции скобок:



Это относится к области исследований, называемой *теорией операд*, потому что данная алгебраическая структура называется операдой.

Можно также рассматривать взаимоотношения между этими путешествиями. Это относится к многомерной теории категорий, где с многомерностью происходит нечто забавное. Мы можем бесконечно продолжать рассматривать отношения между этими путешествиями (или «путями», как они правильно называются в математике), отношениями между отношениями и так далее. В любой момент мы можем решить, что мы устали и хотим прекратить думать о все новых и новых измерениях и новых и новых отношениях. Это похоже на решение, о котором мы говорили ранее, что определенные критерии сравнения не так важны, поэтому их можно проигнорировать и рассматривать два объекта как одно и то же, даже если они различаются по этим критериям. Например, вы решили, что при покупке яиц вы не будете учитывать их цвет: белые они или коричневые.

При этом в теории категорий возникает проблема того, что такое решение имеет последствия для аксиом, которые мы должны принимать во внимание. Получается, что в некотором смысле легче, *никогда не останавливаясь*, продолжать думать о новых и новых измерениях, потому что так мы никогда не будем сталкиваться с последствиями принуждения объектов считаться «одинаковыми», тогда как в *действительности* они одинаковыми не являются.

Возможно, вам кажется, что это противоречит здравому смыслу, но посмотрите на это с другой стороны. Представьте, что мы решили, что должно существовать самое большое число, но большие числа слишком сложны, поэтому мы выбрали 1000; теперь чисел больше 1000 не будет. Такое решение приведет к катастрофическим последствиям, потому что оно противоестественно. Нам необходимы постоянно увеличивающиеся числа, даже если мы никогда ими не пользуемся.

Что касается измерений в теории категорий, мне нравится рассматривать их под таким углом: с каждым новым измерением мы добавляем еще один слой тонкости и точности, поэтому мы можем отсрочить необходимость принуждать вещи становиться одинаковыми и решать, какие аксиомы к ним применять. Если у нас есть бесконечное количество измерений, то мы можем отсрочить это навсегда. А если бы мы были бессмертны, то мы могли бы откладывать это решение и прокрастинировать *вечно*.

14 БЕСКОНЕЧНО МАЛОЕ

Каждый раз, когда я пролетаю на самолете над городом, меня восхищает вид с высоты. Я не перестаю удивляться тому, что здания выглядят такими огромными вблизи и такими крошечными из окна самолета. Манхэттен представляет собой сюрреалистическую картину, ведь его небоскребы кажутся сплющенными и с трудом втиснутыми на маленький остров. Прежний авиамаршрут в гонконгский аэропорт Кайтак был ужасен — самолет пролетал очень близко к зданиям. Вот небоскребы кажутся похожими на крошечные торчащие из земли булавки, а уже в следующую минуту вы смотрите в чью-то квартиру и видите, как ее обитатели занимаются домашними делами.

До этого мы говорили о постоянно увеличивающихся объектах или о бесконечном количестве объектов, которые возникают, потому что один образуется из другого. Но мы можем изменить масштаб и взяться за изучение крохотных вещей. Это будет совершенно другой способ получения бесконечного количества — бесконечно большое количество бесконечно малых вещей. Вам кажется, что мы жульничаем? Что ж, иногда математические открытия происходят потому, что мы изменили перспективу. Не создали что-то абсолютно новое и пошли совершенно в другом направлении, а просто взглянули на проблему под другим углом, в результате обнаружив кучу новых возможностей. Именно это озарение подарило нам математический анализ и понимание всего изогнутого, находящегося в движении, жидкого и постоянно меняющегося.

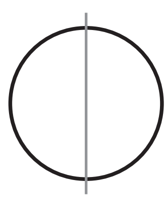
Лишь немногие вещи в нашем мире не подпадают под это описание. В большинстве своем компьютеры — это цифровые устройства; это значит, что они состоят из определенных битов, которые меняются в четко определенных этапах, то есть не непрерывно. Однако компьютеры используют электричество, а оно вполне подпадает под определение «непрерывно меняющейся» субстанции. Один из немногих предметов, которые я могу видеть перед собой прямо сейчас, не имеет ничего общего с математическим анализом — это мой письменный стол. Стол существовал задолго до появления математического анализа, однако данный конкретный стол был сделан на фабрике Икеа, которая совершенно точно использует в своем производстве математический анализ. Я хочу сказать, что изучение бесконечности может казаться чем-то абстрактным и находящимся вне нашего мира, выражаясь буквально и фигурально («фигурно», как любит шутить один из моих друзей), но в конечном итоге оно тоже приводит нас к математическому анализу, который является неотъемлемой частью нашей жизни.

Отправной точкой для всего этого служат размышления об объектах, находящихся «бесконечно близко друг к другу». Когда мы рисуем на компьютере круг или печатаем букву О, они выглядят гладкими и ровными. Но если мы хорошенько приблизим изображения, то они становятся пиксельными. Это буква О в увеличенном масштабе на экране моего компьютера.

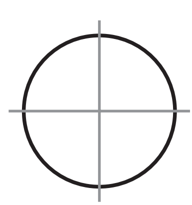
Мы видим конечное количество крошечных квадратов, маскирующихся под круг. Мой компьютер старательно подделал круг, он добавил несколько точек серого цвета. Компьютер не может иначе, потому что он способен воспринимать и обрабатывать только отдельные точки в конечном количестве и фиксированном размере.

А как насчет нашего мозга? Смысл математического анализа в том, что наш мозг, в принципе, способен на большее: мы можем воспринимать и обрабатывать бесконечно большие количества объектов, даже если они бесконечно малы. Именно эту тему мы сейчас будем изучать.

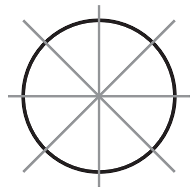
Однажды я помогала с математикой в начальной кембриджской школе на Парк-стрит. Я должна была объяснить симметрию двум шестилетним детям. Сначала я попросила их нарисовать линии симметрии на нескольких треугольниках, потом на квадрате, потом на пятиугольнике, потом на шестиграннике. Самым забавным было, когда один из малышей сказал: «Я знаю, что у восьмигранника восемь сторон, потому что слово “в**осьми**гранник” похоже на ОСЬМИНОГ». В конце концов я дала им круг. Один из ребят нарисовал вот такую линию на круге:



Другой нарисовал вот такие:

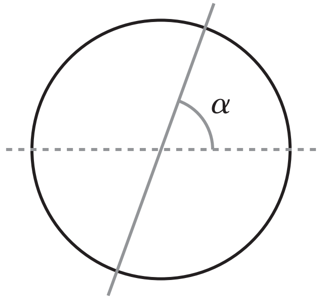


Тогда первый нарисовал еще две линии:

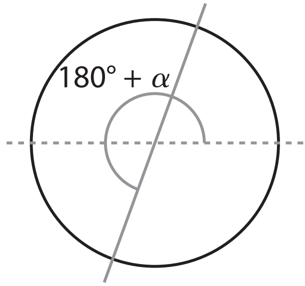


Дальше стало еще веселее. Первый ребенок воскликнул: «Их сотни!», а второй сказал: «Их *миллион*!», после этого первый заметил: «Ты можешь всю свою жизнь рисовать эти линии и никогда не закончишь!», далее возникла пауза, после которой второй ребенок поднял карандаш, закрасил им весь круг целиком и сказал: «Смотри! Я закончил!»

Я растерялась, но была вынуждена признать, что они оба правы. Вы можете потратить всю свою жизнь на рисование линий симметрии на круге и никогда не закончите, потому что их бесконечное количество. Фактически их *несчетно* бесконечное количество. Мы можем убедиться в этом. Представьте себе, что мы определили, где проходит линия симметрии, задав угол, который она образует с горизонталью.



Мы можем взять любой угол — от 0 до 180° или в радианах — любой от 0 до π. Если угол будет больше, то линия повторит одну из уже нарисованных:



Возьмем любое действительное число от 0 до 180, причем это не обязательно должно быть целое или рациональное число. Мы уже знаем, что действительных чисел от 0 до 180 несчетно много.

У нас получится несчетно много линий симметрии на круге, однако если вы закрасите весь круг, то вы фактически закрасите их все. Возможно, сейчас вы подумали, что это похоже на жульничество, потому что настоящие линии симметрии должны пересекаться бесконечно много раз в центре круга, а у нас в центре бесконечно много слоев карандаша. Но если мы не будем обращать внимание на центр, а просто попытаемся отметить точки по краю круга, которых касаются линии симметрии, то для этого будет достаточно провести карандашом по краю круга. Нарисуем ли мы таким образом бесконечно большое количество точек? Будет ли в этой линии бесконечно большое количество точек?

Если да, то как далеко друг от друга они расположены? А если их конечное количество, то сколько?

ДЕЛЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТЬ

Если мы делим линию на все большее и большее количество отрезков, то отрезки становятся все меньше и меньше. Сможем ли мы таким образом разделить линию на бесконечно большое количество отрезков? Я хочу сказать, сможем ли мы сделать нечто бесконечно малым, разделив его на бесконечность.

Представьте себе лотерею, в которой могут выпасть все действительные числа. В лототроне будет бесконечное количество шаров, но на каждом из них будет указано определенное конечное число. В этом случае вероятность выигрыша будет довольно странной. Обычно в лотерее в Великобритании выпадают 6 из 59 шаров. Существует примерно 45 миллионов комбинаций, и все эти комбинации одинаково вероятны. Ваш шанс выиграть равен 1 : 45 миллионам. Это очень маленькое число (приблизительно 0,00000002), но не 0; хотя мне кажется, оно настолько близко к 0, что фактически может считаться 0. Если вы снова умножите его на общее количество возможных комбинаций (45 миллионов), то получится 1, что совершенно верно, потому что это и будет вероятность выигрыша, если вы купите все лотерейные билеты.

В бесконечной лотерее есть бесконечное количество комбинаций, поэтому ваш шанс выиграть будет равен «1 к бесконечности». Как это выразить с помощью дроби? Ответ не может быть больше 0, потому что если бы он был больше 0, то, умножив его снова на общее количество возможных результатов (бесконечность), мы получим число больше 1. Означает ли это, что вероятность выигрыша равна 0? Но кто-то действительно может выигрывать каждый раз. Вы можете справедливо заметить, что на практике такая лотерея невозможна, но этот ваш довод не отменяет этот парадокс. Тут все точно так же, как с отелем Гильберта: факт, что такой отель не может существовать, не отменяет парадокса.

Мы снова вернулись к одной из первых наших попыток найти бесконечность, утверждая, что

$$\frac{1}{0} = \infty.$$

Мы знаем, что такое уравнение порождает противоречие, если мы попытаемся умножить обе его стороны на 0. Но теперь мы хотим сказать, что деление на бесконечность дает 0 или

$$\frac{1}{\infty} = 0.$$

Сейчас мы уже больше знаем о бесконечности и сразу видим, что с этим уравнением что-то не так. Проблема здесь в том, что способ, с помощью которого мы пытались найти бесконечность, а именно — используя бесконечный набор объектов, не подразумевал деления на бесконечность. Правильный математический ответ в данном случае должен быть таким: «Ну что ж, давайте попробуем! Если мы так еще не делали, это не значит, что это невозможно».

Давайте попробуем поступить точно так же, как мы поступили с вычитанием. Снова вернемся к идее того, что все вокруг — это множества объектов. Это как считать на счетных палочках: вы не можете сломать счетную палочку пополам (к великому разочарованию многих детей). Если мы берем множество натуральных чисел, то нельзя частично его сократить.

Помните, когда мы пытались выразить вычитание через бесконечность, мы вспоминали детские рассуждения: 6 – 3 означает «сколько я должен отсчитать назад, чтобы от 3 снова вернуться к 6». Другими словами, мы решали вот такое уравнение:

$$3 + x = 6.$$

А теперь давайте возьмем 6 : 3. Мы можем рассматривать 6 : 3 двумя разными способами.

- Сколько раз по 3 вмещается в 6? Другими словами, сколько раз я должен прибавить 3 к самому себе, чтобы получилось 6? Это все равно что решать вот такое уравнение:

$$3 \times x = 6.$$

* Какое число вмещается в 6 ровно три раза? Иначе говоря, какое число я могу прибавить к самому себе три раза, чтобы получилось 6? Это все равно что решать вот такое уравнение:

$$x \times 3 = 6.$$

И в том и в другом случае ответ будет 2, потому что эти формулировки не имеют никакого значения, если мы говорим о конечных числах. Но мы уже знаем, что с бесконечностью не все так просто.

Например, прибавлять 3 бесконечное количество раз — это не то же самое, что прибавить три раза по *бесконечность*. То есть

$$3 \times \omega \neq \omega \times 3.$$

Давайте зададим себе вопрос: «Сколько раз я должен прибавить 3 к самому себе, чтобы получить ω?» Ответ: ω. Представьте себе, что вы снова превратились в человека, который раздает в очереди отрывные билетики. Люди приходят группами по 3 человека. Сколько групп из 3 человек должно прийти, чтобы у вас кончилась бесконечная пачка билетиков? Ответ: ω. Вы будете просто бесконечно продолжать выдавать по 3 билетика каждой группе.

Если мы посмотрим с другой стороны: «Какое число я могу прибавить к самому себе 3 раза, чтобы получилась ω?», то в этом случае возможного ответа нет. Если вы сложите вместе 3 конечных числа, то ответ всегда будет конечным. Если вы сложите вместе 3 бесконечных числа, каждое из них будет как минимум равно ω (потому что ω — это самая маленькая бесконечность), а все вместе они будут еще больше, это как «бесконечность и еще один день». Мы можем снова рассмотреть это на примере с отрывными билетиками. Если приедет один бесконечно полный автобус, то вы потратите на его пассажиров всю свою бесконечную пачку отрывных билетиков (как минимум). Если после этого приедет еще один бесконечно полный автобус, то вы будете вынуждены взять пачку с билетиками другого цвета.

Оба этих вопроса были попытками «разделить *бесконечность* на 3», но дали нам разные ответы. Это доказывает, что деление, точно так же, как и умножение, не самый лучший способ решения, если речь идет о бесконечности, даже если это просто деление на маленькое конечное число. Если вместо этого мы попытаемся разделить что-то на бесконечность, то все станет еще хуже. Предположим, что мы хотим сделать следующее: $\frac{1}{\infty}$. Тогда у нас будет два варианта. Первый: сколько раз мы должны прибавить ω к самой себе, чтобы получить 1? Это очевидно невозможно, так как ω — это слишком много. Второй вариант: какое число мы можем прибавить к самому себе ω количество раз, чтобы получить 1? И снова это будет абсолютно невозможно.

Несмотря на все вышесказанное, действительно кажется, что 1, деленная на бесконечность, должна быть равна 0. Может ли это утверждение быть разумным ответом на заданные выше вопросы? Если мы прибавим ω к самой себе 0 раз, мы не получим ничего, так что в этом действии нет никакого смысла. Будет как с 0 бесконечно полных автобусов, для них вам вообще не потребуются отрывные билетики. Что касается второго вопроса: «Можем ли мы прибавить 0 к самому себе ω раз, чтобы получилась 1?», то тут все будет как в случае с 0 людей, которые встают в очередь бесконечное количество раз. Вам снова не понадобятся для них никакие отрывные билетики.

Тут мы могли бы сдаться и сказать: «О’кей, значит, $\frac{1}{\infty}$ — это не ноль». Или попробовать поступить как математики и сказать: «Все это действительно кажется разумным, может быть, у нас получится придать этому какое-нибудь *другое* математическое значение, если наши рассуждения не будут основываться на бесконечных наборах?» Одна из задач математики — взять то, что интуитивно кажется верным, и придать ему точное логическое объяснение. Мы не должны так легко сдаваться!

ОБОРОТНАЯ СТОРОНА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Возможно, сейчас вы задаете себе вопрос, почему мы не можем просто придумать что-нибудь бесконечно малое и при этом не равное 0, ведь раньше я говорила, что мы можем создавать абстрактные вещи, просто подумав о них. Математики уже пробовали применить такой способ, хоть он и кажется бессмысленным (как и сама идея бесконечности, которая тоже кажется бессмысленной до тех пор, пока не начнешь достаточно интенсивно ее изучать). Это похоже на оборотную сторону бесконечности. Бесконечность больше любого числа, а бесконечно малая величина меньше любого числа. Если вы прибавите бесконечность к самой себе, то получите бесконечность, а если вы прибавите бесконечно малую величину к самой себе, то снова получите бесконечно малую величину. А если вы умножите бесконечность на бесконечно малую величину, то получите 1, как в примере про вероятность выигрыша в лотерею.

Такой подход порождает те же проблемы, что и наша прежняя «выдуманная» бесконечность. Тут нужно действовать с особой аккуратностью или скорее с техническим мастерством, как мы это делали раньше, когда хотели сформулировать четкое определение понятия «бесконечность», но так как проблемы возникают слишком часто, более элегантно будет попробовать их обойти. Если во время прогулки на вашем пути попалась большая грязная лужа, то вы либо наступите на нее, надеясь, что ботинки не промокнут, либо попытаетесь ее обойти. (Конечно, некоторые люди, особенно дети, обожают наступать прямо на центр лужи. В математике такое тоже бывает.)

Вот как можно аккуратно обойти проблему деления на бесконечность. Представьте себе, что вам нужно поделить шоколадный торт на несколько человек. Если вы делите его на двоих, то каждый получает очень много. Если вы делите на троих, то каждый все еще получает много, но уже меньше, чем в первом случае. Если это будут четыре человека, то они получат еще меньше. Чем больше людей, тем меньше торта получает каждый из них. Если количество людей станет по-настоящему огромным, то будет глупо пытаться разделить один несчастный торт на всех. Вы когда-нибудь пробовали разделить торт на сто человек? (Свадебные торты обычно состоят из нескольких ярусов, которые по сути являются отдельными тортами.) А как насчет тысячи человек? А миллиона? В какой-то момент, когда людей станет слишком много, каждый получит настолько маленький кусочек, что это будет фактически ничтожное количество, то есть почти ничего.

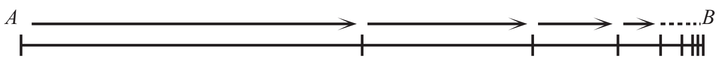
Если у нас есть миллион человек и только один торт, то чисто *технически* каждый получит свой кусочек — вероятно, это будут миллиарды миллиардов молекул торта. Но внешне количество торта будет почти равно 0, и с увеличением количества людей оно будет все больше и больше стремиться к 0. Так мы придали математический смысл идее того, что деление на бесконечность дает 0. На самом деле мы никогда не делим на бесконечность (потому что в этом нет здравого смысла). Давайте лучше вернемся к примеру, о котором мы уже говорили в главе 11, когда нечто стремится к бесконечности. Мы попробовали делить на то, что стремится к бесконечности, и выяснили, что ответ будет тоже стремиться к 0. Возможно, некоторые умники сейчас принесут микроскоп и скажут, что они все же видят на тарелке какое-то количество торта. Но мы всегда можем поделить его еще немного, и торта снова не будет видно. Это не значит, что 1, деленная на бесконечность, *равна* 0, но эти рассуждения дали нашим интуитивным догадкам математическое объяснение, а с этого и начинался весь современный математический анализ.

ПАРАДОКСЫ ЗЕНОНА

Математический анализ уходит своими корнями в давние времена. Вопросом, как что-то может состоять из бесконечного количества бесконечно малых частей, задавался еще греческий философ Зенон более 2,5 тысячи лет назад. Точно так же, как и Гильберт тысячи лет спустя, Зенон изучал парадоксы, доказывающие, что с бесконечным количеством объектов нужно обращаться очень аккуратно.

Один из парадоксов Зенона похож на размышления ребенка о шоколадном торте: если я съем половину от того, что осталось, потом еще половину от того, что осталось, и так далее, то я буду есть только половину от того, что осталось, и означает ли это, что торт станет бесконечным?

Зенон формулирует этот парадокс так: если вы хотите добраться из пункта A в пункт B, то сначала вы должны преодолеть половину расстояния. Затем вы должны пройти половину оставшегося расстояния. После чего вы должны будете пройти половину нового оставшегося расстояния, и так далее. Вы постоянно проходите только половину оставшегося расстояния.



После каждого этапа всегда остается еще половина расстояния, и всегда можно пройти только половину от того, что осталось. Означает ли это, что вы никогда не доберетесь до места?

Математики очень любят создавать новые понятия из старых, уже изученных. Давайте тоже вернемся к уже пройденной бесконечности натуральных чисел. Мы говорили, что нам нужно преодолеть половину всего расстояния, затем четверть, затем одну восьмую, одну шестнадцатую и так далее «бесконечно». Как мы уже знаем, натуральные числа продолжаются бесконечно. Предположим, что нам нужно пройти одну милю. Тогда можно выделить следующие этапы пути:

	мили
этап 1	$\frac{1}{2}$
этап 2	$\frac{1}{4}$
этап 3	$\frac{1}{8}$
⋮	
этап n	$\frac{1}{2^n}$
⋮	

У нас есть бесконечное количество n, значит, у нас будет бесконечное количество этапов пути. Мы не можем указать длину каждого этапа, но мы можем записать ее в общем виде: для этого мы применили формулу с переменной n. Но если мы не можем записать длину каждого этапа, то можем ли мы закончить каждый из них? Ответ должен быть: да, потому что заканчивать путь — это вполне нормально для каждого из нас. Обычно мы заканчиваем наши пути, даже самые короткие, причем делаем это каждый день. (Я не каждый день выхожу из дома, однако иногда умудряюсь несколько раз за час сходить к холодильнику.)

В аналогичном парадоксе, тоже сформулированном Зеноном, речь идет об Ахиллесе и черепахе, которые бегут наперегонки из точки A в точку B. Черепахе разрешается начать движение первой, скажем, в точке A_1, но она движется очень медленно, ведь она же черепаха! А Ахиллес должен сначала добежать до места черепашьего старта. За это время черепаха уходит немного дальше, допустим, до точки A_2. Теперь Ахиллес должен добраться до этой точки; пока он это делает, черепаха проходит еще немного, например до точки A_3. Сейчас Ахиллес должен добраться уже до A_3, и за это время черепаха доползает до точки A_4. Каждый раз, когда Ахиллес добегает до того места, где черепаха была в момент, когда мы последний раз проверяли статус гонки, черепаха уходит еще немного дальше. Означает ли это, что черепаха победит в забеге?

Оба этих парадокса строятся на вполне логичных доказательствах, которые приводят к абсурдному выводу. Обычно мы вполне способны добраться до места назначения. И очевидно, что если Усейн Болт побежит наперегонки с черепахой, то выиграет гонку. Смысл этих парадоксов заключается не в том, чтобы обнаружить ошибки в нашей реальности, а в том, чтобы обнаружить ошибки в логике наших аргументов.

Этот парадокс отличается от парадокса про отель Гильберта, который хотя и может быть заполненным, еще способен размещать вновь прибывших постояльцев. В нем вывод *звучит* абсурдно, потому что наши интуитивные представления о бесконечных отелях не совсем правильные.

Такие парадоксы, как парадокс про отель Гильберта, называются **истинными** парадоксами; в них веские доводы приводят к выводу, который кажется противоречивым, но на самом деле таковым не является. Такие парадоксы, как парадокс Зенона, называются **ложными** парадоксами, в них противоречивый вывод получается из аргументов, которые кажутся верными, но не являются таковыми в действительности.

И в том и в другом случае суть парадокса в том, чтобы продемонстрировать странности, которые возникают, когда мы начинаем думать о бесконечности: в парадоксе про отель Гильберта мы имеем дело с бесконечно *большими* объектами, а в парадоксах Зенона — с бесконечно *малыми*. В парадоксе про отель Гильберта перед нами встает проблема бесконечного возникновения объектов, чего в реальной жизни не бывает, будь то туфли, носки, отрывные билетики или номера в отеле. А в парадоксах Зенона нам начинает казаться, что объекты возникают бесконечно, если мы допускаем оговорку, что при этом они становятся бесконечно малыми. Они не могут *быть* бесконечно малыми, потому что мы не знаем, что это означает на самом деле. Но они могут *становиться* бесконечно малыми. Мы каждый день сталкиваемся с бесконечными множествами объектов, порой даже не зная об этом и не имея необходимости об этом знать.

БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЕ КОЛИЧЕСТВО БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ОБЪЕКТОВ

В парадоксе о пути из точки *A* в точку *B* нам удалось добраться до места назначения, а это значит, что мы смогли преодолеть бесконечное количество отрезков пути. Однако это возможно только потому, что эти отрезки становились все меньше и меньше и время, которое мы затрачивали на каждый отрезок, тоже становилось все меньше и меньше. Причем это происходило в реальном мире, а не в фантастическом мире Гильберта, где у нас каким-то образом появляется достаточно времени для того, чтобы заполнить бесконечное количество номеров отеля или выдать бесконечное количество отрывных билетиков. В реальной жизни мы каждый день можем делать бесконечное количество вещей, но только в том случае, если время, которое мы тратим на каждую из них, будет бесконечно малым.

Представьте себе, например, что вам нужно пройти милю до железнодорожной станции. Допустим, вы идете с постоянной скоростью 4 мили в час. Значит, это должно занять у вас 15 минут. Но о чем говорит парадокс Зенона?

* Сначала вы должны пройти первую половину мили, что займет у вас 7,5 минуты.
* Затем вы должны будете пройти следующую четверть мили, что займет у вас 3,75 минуты.
* Далее вы должны будете пройти одну восьмую часть мили, что займет у вас 1,875 минуты.
* После этого вы должны будете пройти одну шестнадцатую часть мили, что займет у вас 0,9375 минуты.
* ...

Вы должны пройти все эти бесконечно уменьшающиеся отрезки пути, но у вас уходит на это бесконечно уменьшающееся количество времени. Сколько вы пройдете таких маленьких отрезков, пока будете добираться до железнодорожной станции? Ответ: бесконечно много; если вы будете останавливаться после каждого *конечного* отрезка пути, то всегда будет оставаться еще немного.

Очевидно, что это совершенно абсурдный способ считать, сколько времени потребуется, чтобы добраться до железнодорожной станции, особенно потому, что в определенный момент крошечное расстояние, которое вам еще осталось пройти, станет меньше ступни. Однако для нас это важный мысленный эксперимент, который демонстрирует следующее: нам кажется, что можно сложить бесконечно большое количество объектов и получить конечный результат, если эти объекты постоянно становятся все меньше и меньше. В реальном мире мы не сможем выдать бесконечное количество отрывных билетиков, потому что все отрывные билетики имеют одинаковый размер. Но даже если бы они становились все меньше и меньше, нам все равно требовался бы определенный и отдельный отрезок времени, чтобы выдать каждый билетик, поэтому мы действительно не можем этого сделать. Мы не можем откусывать один шоколадный торт бесконечно, даже если наши «откусы» становятся бесконечно малыми, потому что расстояние до нашего рта всегда будет одинаковым. (Хотя мы можем одновременно сокращать расстояние до рта, но в итоге все закончится подбородком на тарелке с тортом.)

Здесь есть две загадки. В каких случаях имеет смысл складывать бесконечно большое количество крошечных объектов? И как в таких случаях мы сможем посчитать ответ? Этот вопрос, мучивший математиков тысячи лет, был наконец-то разрешен в XIX веке с появлением математического анализа. Мы вернемся к нему в следующей главе.

15

КОГДА БЕСКОНЕЧНОСТЬ ПОЧТИ СЛОМАЛА МАТЕМАТИКУ (И, ВОЗМОЖНО, ВАШ МОЗГ ТОЖЕ)

Я несколько раз в своей жизни ныряла с трубкой и маской, мне очень нравится плавать с рыбами, следуя естественному морскому течению, и любоваться кораллами. Иногда я медленно плыву вдоль кораллового рифа, рассматривая морской ландшафт, и вдруг коралловый риф внезапно обрывается как горный утес. От этого у меня начинается странное головокружение. Это не похоже на то чувство, когда стоишь на обрыве в горах и есть реальная опасность сорваться вниз. Ведь я просто плыву и никак не могу упасть; это просто искажение восприятия.

Некоторые понятия в математике тоже способны вызывать подобное искажение восприятия, и бесконечность — одно из них. Сначала вам кажется, что вы понимаете, что происходит вокруг, в следующий момент вы взглянули немного в другом направлении, и все внезапно оборвалось. Математики переживают подобное, когда вдруг понимают, что земля уходит у них из-под ног и они должны срочно все исправить. Размышления о бесконечно малых объектах однажды вызвали похожие ощущения: математики вдруг осознали, что не могут точно сказать, что такое натуральные числа.

В предыдущей главе мы выяснили, что мы можем делать бесконечно большое количество бесконечно малых вещей в течение конечного отрезка времени и что мы можем разместить бесконечно большое количество бесконечно малых вещей в конечном пространстве. Фактически все вокруг состоит из бесконечно большого количества бесконечно малых вещей.

Кажутся ли вам такие аргументы убедительными? У математиков ушло очень много времени на то, чтобы облечь эти рассуждения в форму, подходящую под математические стандарты логики. Такова история математики, состоящая из множества вопросов, которые ведут к одному и тому же ответу, или из множества ручейков, которые ведут к одному источнику. Парадоксы Зенона приводят нас к вопросу о сложении бесконечно большого количества бесконечно малых объектов. Скоро мы увидим, как можно выйти на этот вопрос другим путем: пытаясь понять изгибы, изрубив их на мелкие прямые линии, или области искривления геометрических форм, нарубив их на квадраты.

Но есть еще один вопрос, о котором мы умолчали в первой части этой книги: что такое иррациональные числа? Мы беспечно, как это часто бывает на уроке математики, утверждали, что иррациональные числа — это десятичные знаки, которые продолжаются бесконечно, не повторяясь. Фактически это то же самое сложение бесконечно большого количества бесконечно малых объектов, потому что, когда мы добавляем к числу все больше и больше десятичных знаков, по сути, мы добавляем ему все больше и больше крошечных долей.

Иррациональные числа необходимы нам, чтобы заполнить «пробелы», которые вынужденно возникают между всеми рациональными числами. И случилось так, что один-единственный верный способ заполнить их — воспользоваться бесконечно длинными долями, то есть бесконечными суммами бесконечно малых объектов. Теперь мы должны понять, что выражает эта сумма. Самое удивительное, что математики даже не совсем поняли, что они не разобрались в этой проблеме до конца, они просто обошли ее, используя числа так же беспечно, как и мы. Математики Кантор и Дедекинд[1] поняли, что не знают, как дать строго научное определение числам. Дедекинд, вероятно, готовился к уроку математики. Мне знакомо это чувство, когда ты готовишься к уроку и вдруг осознаешь, — что-то, что казалось тебе понятным, на самом деле недостаточно понятно для того, чтобы объяснять это другим людям. В случае с Кантором и Дедекиндом случилось так, что *никто в мире* не понимал этого достаточно хорошо. К счастью, они смогли разобраться во всем, и математика не развалилась на мелкие кусочки, а получила новое развитие.

ПРИБЛИЖАЮЩИЕСЯ КРУГИ

Когда мой племянник пошел в детский сад, нам выдали список детских книг по математике. Мы сели вместе с ним и прочитали «*Жадный треугольник*» Мэрилин Бернс (The Greedy Triangle by Marilyn Burns). Главный герой этой книги — треугольник, которому надоело быть треугольником. Он обращается к «мастеру форм» и просит дать ему еще одну сторону. Так он становится квадратом. Однако скоро ему снова надоедает быть тем, кем он стал, он опять просит еще одну сторону и становится пятиугольником. Затем ему снова становится скучно, и он превращается в шестиугольник, затем в семиугольник, а потом в восьмиугольник.

---

[1] Георг Кантор, немецкий математик. Известен как создатель наивной теории множеств (1870–1872). Его теория был воспринята как нарушение многовековых традиций, заложенных еще древними греками. Рихард Дедекинд, немецкий математик. Стал одним из первых сторонников канторовской теории множеств, активно развивал ее в своих работах в 1885–1895 годах. — *Примеч. ред.*

Я была очень увлечена чтением этой книги, мне было интересно узнать, чем все закончится. Мой племянник тоже был довольно увлечен. (Вероятно, моя увлеченность заразительна. Надеюсь, что это так.) Я практически видела, как его маленький мозг дымится от напряжения. И вдруг племянник произнес: «Я знаю, чем все закончится! Он превратится в круг!»

Но развязка была другой, и это меня немного огорчило. Вместо превращения в круг, что было бы введением в математический анализ, произошло нечто более морально и нравственно вдохновляющее: герой книги понял, что был гораздо счастливее, будучи тем, кем он был раньше, и снова стал треугольником.

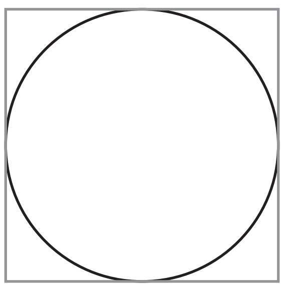
Идея моего племянника похожа на идею, которая тысячи лет назад помогла древним вавилонянам определить площадь круга. Определить площадь круга трудно, потому что он изогнутый. На самом деле трудно даже сказать, *что такое* «площадь круга». Это своего рода «количество квадратных единиц измерения, которое вы можете разместить внутри круга», вот только для этого вы должны будете расплавить эти квадратные единицы измерения и залить их в круглую форму. Или вы можете поступить по-другому: расплавьте круг, залейте его в квадрат и посмотрите, насколько большой у вас получится квадрат. В этом заключается древняя задача «квадратуры круга»[1]. В моей жизни она тоже возникает (хотя не каждый день), когда я беру квадратную форму для выпекания круглого пирога. Я часто так делаю, потому что у меня есть регулируемая квадратная форма для выпекания, в которой можно испечь пирог любого размера от 2,5 до 30 сантиметров, а круглых форм у меня всего лишь три. Обычно я просто ис-

[1] Квадратура круга — задача, заключающаяся в нахождении построения с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого по площади данному кругу. Является одной из самых известных неразрешимых задач на построение с помощью циркуля и линейки. — *Примеч. ред.*

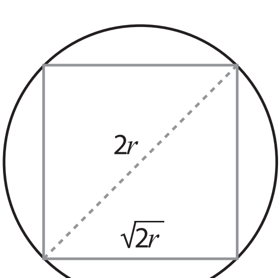
пользую формулу определения площади круга (как правило, я беру $\pi = 3$). Как они додумались до этой формулы?

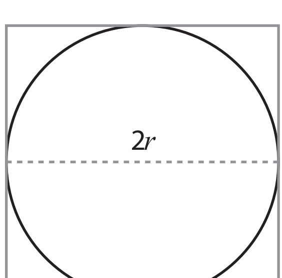
Одним из способов, который вы можете применить, без расплавления квадратов и кругов (и без пустой траты теста), является приближение круга к прямым сторонам. Чем больше у вас сторон, тем точнее будет ваше приближение.

Например, если вы используете квадрат (ставите его внутри либо снаружи круга), то его прямые линии будут довольно далеко от круга. А если вы попробуете использовать 20-сантиметровую форму для выпекания для рецепта, который рассчитан на 8-сантиметровую круглую форму, то вам чуть-чуть не хватит теста.



Мы можем определить, насколько далеко они находятся друг от друга. Пусть радиус круга будет r. Давайте попробуем применить и внутреннее, и внешнее приближение.





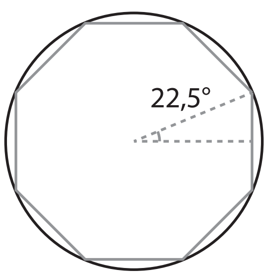
Площадь круга равна πr^2. Площадь внутреннего квадрата равна $2r^2$. Площадь внешнего квадрата равна $4r^2$.

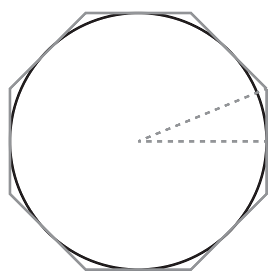
Вы можете вычислить площадь внутреннего квадрата с помощью теоремы Пифагора, определив длину его стороны. Либо вы можете использовать треугольник, обозначенный пунктирной линией, и разместить вместе четыре таких треугольника так, чтобы получился квадрат с пунктирной линией, идущей по кругу с внешней стороны, — длина каждой стороны равна $2r$. Так, площадь этого нового квадрата будет равна $4r^2$, а квадрат, площадь которого мы хотим рассчитать, будет его половиной.

Итак, мы можем сравнить «реальную» площадь и два предположения:

круг = $\pi r^2 \approx 3{,}14r^2$	
внутренний круг = $2r^2$	погрешность $\simeq -36$ %
внешний круг = $4r^2$	погрешность $\simeq +27$ %

Если вы возьмете восьмиугольник, то он будет находиться ближе.





В этом случае у вас получится следующее:

круг = $\pi r^2 \simeq 3{,}14r^2$	
внутренний восьмиугольник = 2,83	погрешность $\simeq -5$ %
внешний восьмиугольник = 3,31	погрешность $\simeq + 10$ %

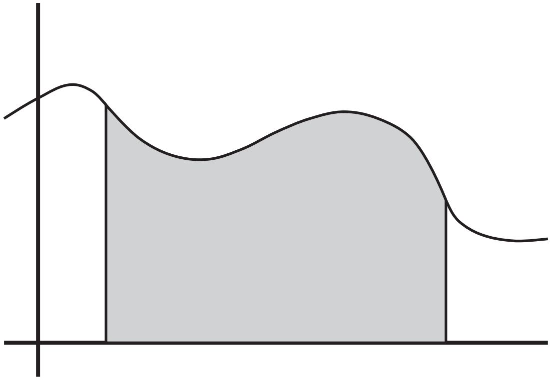
Мы можем определить площадь этих восьмиугольников, разбив их на 16 прямоугольных треугольников, как указано выше. Меньший угол, в центре круга, будет равен:

$$360/16 = 22{,}5.$$

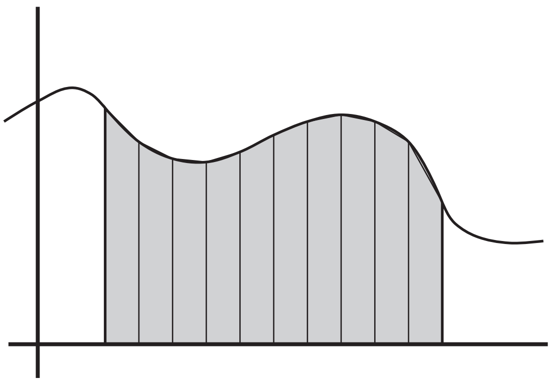
Теперь, прибегнув к традиционной тригонометрии, мы определяем длину сторон треугольника. Использование тригонометрии можно рассматривать как жульничество, но мы просто продемонстрировали суть метода, а не имитировали ход истории.

Итак, идея в том, что мы используем многоугольники с прогрессивно увеличивающимся количеством сторон; чем больше сторон, тем короче прямые грани и тем меньше отклонение между прямой гранью и реальным изгибом стороны круга. «Истинная» площадь круга втиснута между площадью внутренней и площадью внешней приближенной фигуры; и вы можете получить ее в любой точности, в какой только пожелаете, использовав фигуру с еще большим количеством сторон.

Аналогичным образом можно определить площадь фигуры, образованной изогнутой линией или находящейся «под» ней. Вот как можно это сделать:



Вы рубите ее на кусочки и по частям приближаете ее к прямым граням, при этом вы стараетесь сделать не совсем прямые грани настолько маленькими, насколько это возможно. Чем больше у вас кусочков, тем точнее приближение.



Но сможете ли вы когда-нибудь получить правильный ответ? Конечно, вы будете подходить к нему все ближе и ближе, но на самом деле никогда не достигнете его, потому что прямые стороны никогда не будут точно совпадать с изогнутыми. Так?

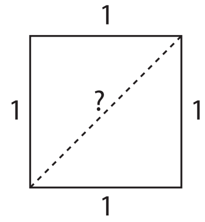
Решение этой головоломки — один из самых мощных мотивирующих факторов, стоящих за современным математическим анализом. Разгадка на первый взгляд может показаться вам несколько занудной, что вполне типично для абстрактной математики. (Общепризнанный факт, что математика — и математики — порой кажутся занудными.) Итак, разгадка в том, чтобы определиться с тем, что значит «правильный ответ», то есть ответ, который нам подходит. Правильный ответ как минимум не должен порождать никаких противоречий, а также должен пройти проверку на совпадение с нашими интуитивными представлениями. Например, он должен оставаться правильным, если кривая на самом деле будет прямой линией!

Ключ к разгадке в том, что во всех этих случаях (круг, кривая и парадоксы Зенона) мы совершаем некое действие все большее и большее количество раз и каждый раз делаем еще один шаг, приближающий нас к ответу. После любого конечного количества шагов мы так и не доберемся до ответа, мы будем приближаться к нему бесконечно. Однако нам нужно определиться с тем, что будет после того, как закончится это «бесконечно». Здесь у нашей интуиции возникает проблема: мы не планируем жить вечно, поэтому мы не можем представить себе, что может быть после «бесконечно». В этой главе мы узнаем, что, когда какой-то вариант интуитивно кажется нам разумным, нужно смело выбирать его и смотреть, что произойдет. Чудесным образом это позволит нам наконец-то заполнить нудные пробелы между рациональными числами.

ПРОБЕЛЫ МЕЖДУ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

Из главы 4 мы уже знаем, что если рассматривать ряд, состоящий только из чисел, являющихся отношениями целых чисел, то между ними обязательно будут пробелы. Правда, они будут совсем крошечными. Даже бесконечно крошечными. Что это значит?

Один из таких пробелов между рациональными числами очень легко обнаружить. Он становится заметен, когда вы рисуете квадрат с длиной сторон 1. (1 — это значение, при котором обычно неважно, какую единицу измерения вы используете.)



Чему равна диагональ квадрата? Если мы нарисуем диагональ этого квадрата, то получится два прямоугольных треугольника. Из теоремы Пифагора мы знаем, что «квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов двух других сторон». Давайте обозначим длину диагонали как d, тогда

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Итак, длина диагонали — это некое число, которое при возведении в квадрат дает 2, то есть квадратный корень из 2. Однако мы можем доказать, что если такое число обязательно должно быть отношением двух целых чисел, то его *не существует*. Вот как это доказывается.

Доказательство. Предположим прямо противоположное: допустим, что существует два целых числа, a и b, которые дают $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Одновременно предположим, что эта дробь находится в своем максимально сокращенном виде, то есть вы больше не можете делить числитель и знаменатель на какое-либо число, чтобы сделать дробь проще.

Теперь возводим обе стороны уравнения в квадрат и получаем

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\text{или } 2b^2 = a^2.$$

Пока все идет гладко. Мы уже знаем, что a^2 — это два раза по *что-то*, а значит, это *четное* число; a тоже должно быть четным числом, потому что если a будет нечетным, то a^2 тоже будет нечетным.

Что значит для a быть четным? Это значит, что оно делится на 2, что, в свою очередь, значит, что $\frac{a}{2}$ — это все еще целое число. Скажем

$$\frac{a}{2} = c$$

$$\text{или } a = 2c.$$

А теперь подставим это в вышеприведенное уравнение и получим:

$$2b^2 = (2c)^2 =$$

$$= 4c^2$$

$$\text{или } b^2 = 2c^2.$$

Теперь мы можем проделать все то же самое с b. Мы знаем, что b^2 — это два раза по *что-то*, то есть четное число. Это означает, что b тоже должно быть четным числом, потому что если b будет нечетным, то b^2 тоже будет нечетным.

Так мы выяснили, что a и b являются четными числами. Но в самом начале мы предположили, что $\frac{a}{b}$ — это дробь *в своем максимально сокращенном виде*; это значит, что a и b не могут быть четными. Возникает противоречие.

Итак, предположение, что $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, было неверным с самого начала. Это означает, что $\sqrt{2}$ нельзя записать как дробь, значит, оно иррационально Что и требовалось доказать. ■

Итак, мы неизбежно приходим к тому, что длина диагонали квадрата (того, который мы рисовали выше) равна иррациональному числу. Это значит, что между рациональными числами должен быть маленький пробел, где находится $\sqrt{2}$. Если мы нарисуем круг с радиусом 1, то обнаружим еще один пробел между рациональными числами: длина линии, которая образует круг (длина окружности), тоже будет иррациональным числом. (Хотя это гораздо труднее доказать, чем иррациональность диагонали квадрата.)

Длина диагонали квадрата не так противоречива, длину же окружности круга описывать гораздо сложнее. Представьте себе квадрат. Очевидно, что его диагональ должна иметь ту или иную длину. Если эта длина не равна какому-нибудь числу, значит, в нашей системе исчисления есть разрыв. Подобные пробелы порождают также другие проблемы. Их наличие означает (а это очень странно), что можно нарисовать две линии, которые будут пересекать друг друга, но не скрещиваться, потому что между ними находится крошечный пробел. Так мы пришли к моей любимой области применения математики: мини-морковки.

СУЩЕСТВУЮТ ЛИ МИНИ-МОРКОВКИ?

Однажды на конференции по математике я грызла мини-морковку, которую принесла с собой на кофе-брейк, чтобы не объедаться печеньем. Я умудрилась вступить в дискуссию, существуют ли вообще мини-морковки? В то время я еще не жила в США, где (так уж случилось) можно купить нарезанные мини-морковки. Это обычные морковки, которые были просто нарезаны как мини-морковки. Они имеют цилиндрическую форму, скругленные края и равномерны по всей длине. Сейчас я знаю, что в США такую морковь можно встретить гораздо чаще, чем распространенные в Великобритании настоящие мини-морковки, которые вообще не вырастают большими.

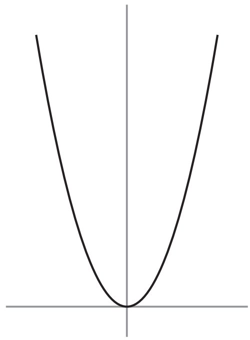
Настоящие мини-морковки в Великобритании часто можно купить совершенно неповрежденными, даже с зеленой ботвой. А когда я была маленькой, мы выращивали морковь в нашем саду, и, выдергивая ее из земли, я видела, что некоторые морковки значительно меньше остальных.

Для меня это совершенно очевидные вещи о моркови, однако мой американский коллега был крайне удивлен такому разоблачению. Мы оба были математиками, поэтому мне удалось убедить его в своей правоте с помощью *теоремы о промежуточном значении*[1], утверждающей, что так как морковка растет с постоянной скоростью из ничего до определенного размера, то в какой-то момент она обязательно будет маленькой.

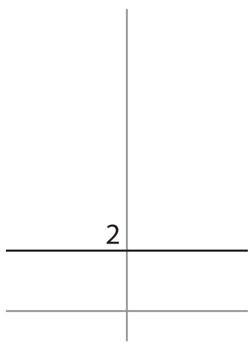
Конечно, сразу же возникли попытки опровержения (что характерно для математиков): «Откуда ты знаешь, что морковка растет с постоянной скоростью?», «Откуда ты знаешь, что она не состояла из зеленой желеобразной массы до того, как приобрести определенный размер, а после этого в какой-то момент спонтанно превратилась в морковку, примерно как бабочка появляется из куколки сразу в своем полном размере?» Математические споры часто выглядят как перетягивание каната между математиками и скептиками или между математиками и умниками. Мы оба прекрасно понимали, что подобные аргументы — это просто математический юмор; однако этот случай до сих пор является моей любимой областью применения теоремы о промежуточном значении. (Теперь вы по праву можете обвинять меня в том, что я не особенно мотивирована к открытию фундаментальных областей применения теорем.)

[1] Теорема о промежуточном значении (или Теорема Больцано — Коши) утверждает, что если непрерывная функция, определенная на вещественном промежутке, принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними.

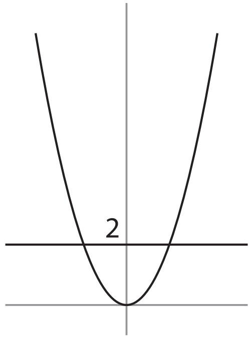
Но давайте рассмотрим, о чем, собственно, идет речь в теореме о промежуточном значении. Вот другой — математический — способ объяснить суть этой теоремы. Если мы нарисуем график $y = x^2$, то он будет выглядеть так:



Такая форма называется параболой. А если мы нарисуем график $y = 2$, то он будет выглядеть так:



А теперь мы наложим эти два графика друг на друга, чтобы посмотреть, где они пересекутся:



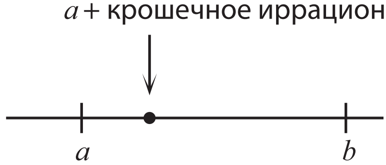
Если у нас есть только рациональные числа, то мы будем знать, что рационального числа x не существует, так как $x^2 = 2$, то есть эти две линии нигде не встречаются. В параболе будет крошечный «пробел», поэтому прямая линия не будет касаться параболы ни в одной точке. Она сверхъестественным образом переходит от одного значения к другому, не встретившись с параболой. Это напоминает мне нью-йоркское метро, ветки которого пересекаются во множестве точек, но перехода с одной ветки на другую нет. В лондонском метро всегда (или почти всегда) есть возможность пересесть на другую ветку, если линии пересекаются. (Правда, в западной части Лондона пара таких случаев тоже есть, но в центральной его части я не смогла найти ни одного исключения.)

Выше я говорила, что пробелы находятся на параболе. Но может быть, на прямой линии тоже есть пробелы? На самом деле они есть и там и там. И не только! Пробелы есть везде, поэтому везде будут точки, в которых прямая линия пересекает параболу, не коснувшись ее. Если сдвинуть прямую линию от значения 2 к значению 3, то мы получим еще одну такую точку. В подобные моменты *хочется* срочно заполнить чем-нибудь все эти пробелы. Мы хотим быть уверены, что если мы рисуем две пересекающиеся линии, то в какой-нибудь точке они обязательно будут соприкасаться. Такова теорема о промежуточном значении. Она так называется, потому что в своей самой базовой версии звучит так: если вы растете с постоянной скоростью от высоты A к высоте B, то в разные моменты времени вы должны достичь всех промежуточных высот. Тот, чей рост сейчас равен шести футам (183 см), в прошлом был пяти футов (152,5 см) роста. А все морковки когда-то были мини-морковками.

ПРОБЕЛЫ ПОВСЮДУ

Теперь мы знаем, что между рациональными числами есть минимум один «пробел», тот, в котором находится $\sqrt{2}$. В главе 4 мы уже упоминали, что между *любыми двумя* рациональными числами стоит иррациональное число. Это значит, что иррациональные числа встречаются повсеместно, они теснятся в «пробелах» между рациональными числами. Действительные числа — это своего рода полосы между рациональными и иррациональными числами. Мы должны быть очень аккуратными с их значениями.

А теперь давайте докажем, что, если какие-то умники начнут бросаться в нас рациональными числами, мы всегда сможем найти иррациональные числа между ними вне зависимости от того, насколько близко друг от друга будут расположены брошенные в нас рациональные числа. Предположим, что умники кинули в нас двумя рациональными числами a и b. Нам нужно прибавить крошечное иррациональное число к a, потому что рациональное число плюс иррациональное число дает иррациональное число.



Насколько крошечной должна быть эта прибавка, чтобы уместиться в «пробеле»? Она должна быть меньше, чем $b - a$. Все просто: мы можем получить настолько маленькие иррациональные числа, насколько нам будет угодно, просто разделив $\sqrt{2}$ на что-нибудь громадное, например $\frac{\sqrt{2}}{100}$, или $\frac{\sqrt{2}}{1000000}$, или $\frac{\sqrt{2}}{10000000000}$. Число, на которое мы будем делить, может быть сколь угодно большим, а иррациональное число, которое мы получим, может быть сколь угодно маленьким. Не имеет значения, насколько близко друг к другу наши злобные оппоненты-умники поставят свои a и b.

Иррациональное число, деленное на рациональное число, остается иррациональным. Это можно доказать через противоречие, точно так же, как мы доказывали аналогичный факт, связанный со сложением иррационального числа с рациональным.

Можно получить иррациональное число, которое будет стоять *бесконечно близко* к a. Если понятие «бесконечно близко» было бы реальной величиной, то мы могли бы обозначить его буквой ε (эта буква греческого алфавита называется «эпсилон») и объявить, что мы пытаемся найти иррациональное число, которое стоит между ε и a. Тем не менее ε как реальная величина не существует, она есть лишь в форме идеи. Единственный способ сделать ε реальной величиной — отдать ее умникам или нашим злобным оппонентам, которые выберут для ε любое значение: настолько маленькое, насколько пожелают. Чем меньше будет значение, тем сложнее будет задача. А мы должны доказать, что независимо от того, насколько маленьким они сделают ε, мы все равно сможем попасть между ε и a. Это похоже на выигрышную стратегию или безотказный механизм: неважно, какими будут a и b, которыми умники хотят нас напугать, мы всегда знаем, как найти иррациональное число между ними. Мы разработали безупречную стратегию и уверены, что нас невозможно победить. Такова основная идея, благодаря которой современный математический анализ стал строго научным, независимо от того, имеем ли мы дело с бесконечно большими или с бесконечно малыми объектами. «Бесконечно большой» означает «настолько большой, что умникам никогда не удастся нас победить», а «бесконечно малый значит «настолько малый, что умникам никогда не удастся нас подловить».

Крошечное расстояние, которое брали умники, чтобы усложнить нам задачу, в математике традиционно называется ε. Есть даже понятие «ε proof[1]» — это общее название для всех доказательств. По сути, ε представляет собой произвольно малое число, которое наши умники собираются в нас бросить. Если бы они бросили в нас большое число, это упростило бы нам путь к победе и было бы глупо с их стороны. Этот пример возвращает нас в те времена, когда математики уточняли свои аргументы с помощью по-настоящему «бесконечно малых» количеств. Тем не менее ε — это лишь потенциальное, а не конкретное малое значение. Иногда ε неформально используют в качестве синонима для «совсем крошечного количества». Например, математики могут сказать такие вещи: «Мне уже давно кажется, что я на расстоянии ε от того, чтобы закончить этот проект». Существует даже математическая шутка: пусть ε будет большим отрицательным числом. Если вы долгие годы бьетесь над доказательством ε, то этого будет достаточно, чтобы у вас случился нервный срыв.

Такого рода доказательства сильно отличаются от тех, когда нужно решить уравнение или построить геометрическую фигуру. Они скорее похожи на то, что мы делали ранее, когда обходили сложные вопросы стороной и никак не могли до-

[1] Доказательство ε.

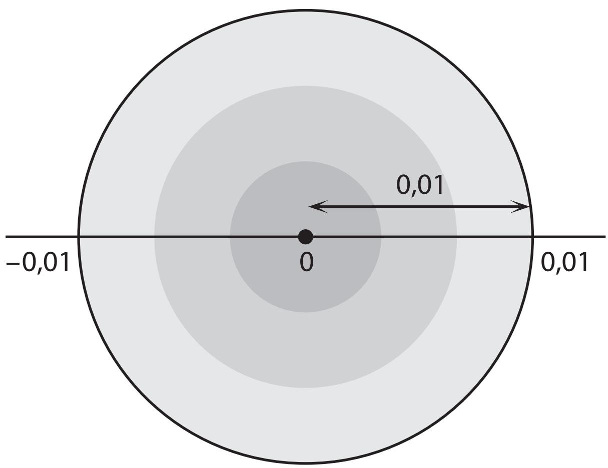
браться до места назначения. Когда студенты впервые сталкиваются с математическим анализом, он часто приводит их в полнейшее замешательство: они не ожидали от математики ничего подобного. Когда вы знакомитесь с так называемым математическим анализом, он обычно предстает перед вами в виде довольно хорошо организованного набора правил и действий для расчета таких вещей, как кривизна графика или площадь области графика, находящейся под кривой. Однако вопрос: «Почему эти правила и действия позволяют нам получать правильные ответы?» — обычно прячется за кулисами, потому что такое просто не укладывается в голове. Но почему это может не укладываться в голове? Потому что, размышляя о бесконечно малых вещах, нам приходится свою голову ломать. Мы уже убедились, что бесконечно большие объекты способны создать в нашей голове настоящую путаницу, а теперь пришло время бесконечно малых объектов.

Представьте себе, что вы должны пройти сложное испытание: вам нужно выстрелить с определенного расстояния и попасть в мишень. В самом начале допускается сделать несколько промахов, но потом вы должны постоянно попадать в мишень, только так вы сможете пройти испытание. Если вы попали в мишень — то ваш оппонент уменьшает ее, и вы начинаете сначала. Если вы снова попали, то он опять ее уменьшает, и т. д. Он постоянно будет уменьшать мишень, пытаясь вас подловить. Это трудное испытание считается пройденным только в том случае, если вы всегда будете попадать в мишень, *вне зависимости от того, насколько маленькой* она будет.

СТРЕЛЬБА ПО МИШЕНИ

Давайте воспользуемся этим «прицельным испытанием» как примером того, как нечто якобы становится бесконечно малым: $\frac{1}{n}$, где n становится все больше и больше. Мы знаем, что все снова будет точно так же, как в случае с «делением на бесконечность, которое дает 0», но в этот раз мы сможем понять суть явления. Идея в том, что $\frac{1}{n}$ на самом деле никогда не будет равно 0, но если 0 — это «яблочко» нашей мишени, то мы всегда сможем попадать в мишень, независимо от того, насколько маленькой ее сделают наши злобные оппоненты. Однако нам недостаточно попасть в мишень один раз. Допускается сделать несколько промахов в самом начале, а потом нужно постоянно попадать в мишень. Возможно, вам интересно, что значит «несколько» промахов в самом начале. Сколько конкретно можно сделать промахов? Ответ: любое конечное количество, потому что в сравнении с «постоянно» и «вечно» ни одно конечное количество промахов не имеет большого значения.

Допустим, что злобные оппоненты сделали мишень шириной всего лишь 0,01 (в радиусе). Значит, нам нужно попасть вот в такую зону:



Наша цель — только часть этой оси, я просто нарисовала ось, чтобы было больше похоже на настоящую стрельбу по мишени.

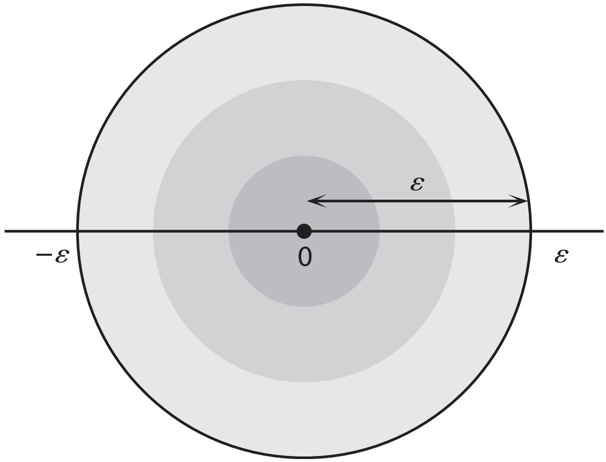
Наши попытки попасть в мишень подразумевают, что n прогрессивно становится все больше и больше, значит, их можно выразить так:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{9},\ \ldots$$

Десятая попытка равна $\frac{1}{10}$, то есть 0,01. Она будет своего рода рикошетом от края мишени. Следующая попытка станет первой удачей — $\frac{1}{11}$. С этого момента мы можем расслабиться: все последующие попытки будут становиться меньше и меньше, поэтому мы всегда будем попадать в мишень.

Итак, нам удалось пройти эту часть испытания. Но наши злобные оппоненты не успокоились. Они заменили старую мишень на новую, меньшего размера — шириной всего 0,001. В этот раз нам потребуется гораздо больше времени, чтобы в нее попасть, но, как вы помните, в начале допускается сделать любое конечное количество промахов. Теперь рикошет от края мишени будет $\frac{1}{1000}$, то есть ровно 0,001. Однако следующий выстрел будет $\frac{1}{1001}$, то есть еще меньше, чем было в последний раз, поэтому мы точно попадем в мишень. Все последующие выстрелы будут еще меньше, а значит, мы всегда будем попадать в мишень — и снова легко проходим испытание.

Возможно, вам кажется, что этот процесс может длиться вечно, но сейчас с помощью одного хитрого приема мы докажем, что будем побеждать всегда, *независимо от того, насколько маленькой* наши злобные оппоненты сделают мишень. Это похоже на то, как мы доказывали, что всегда сможем найти иррациональное число между числами a и b, несмотря на размер пробела между ними. В этот раз мы хотим доказать, что сможем пройти испытание при размере мишени ε, независимо от того, насколько маленьким будет ε; оно по-прежнему не является конкретной бесконечно малой величиной, потому что для него не существует строго научного определения, ε — это потенциальная малая величина, она настолько мала, насколько пожелают наши злобные оппоненты.



Нужно всего лишь немного подождать, а именно до тех пор, пока все наши $\frac{1}{n}$ не начнут попадать в цель. А теперь, так как $\frac{1}{n}$ становится все меньше и меньше, по мере того как продолжается наше испытание, мы просто должны найти любое старое значение, которое дает попадание в мишень; так мы будем точно знать, что, начиная с него, мы всегда выигрываем. Не имеет значения, будет это именно первое значение или нет. Нужно просто найти любое, которое дает попадание в цель.

Значит, нам надо найти n, при котором $\frac{1}{n} < \varepsilon$, а это нетрудно, нужно лишь сделать n реально громадным, настолько, насколько это нам необходимо. Точно так же, как в прошлый раз, когда мы смогли создать крошечное иррациональное число, разделив $\sqrt{2}$ на число, которое мы сделали настолько громадным, насколько нам это было необходимо.

Если нам захочется предельной точности, то можно вычислить, насколько громадным должно быть число, на которое мы будем делить. В данном случае мы пытаемся получить $\frac{1}{n} < \varepsilon$ или $\frac{1}{\varepsilon} < n$, если записать по-другому. Итак, мы просто должны найти n, которое будет больше, чем $\frac{1}{\varepsilon}$, каким бы оно ни было. И мы знаем, что мы можем это сделать, потому что эти n становятся все больше и больше и никогда не заканчиваются.

Фактически это значит, что мы всегда сможем пройти такое испытание стрельбой по мишени, и неважно, насколько маленькую мишень предложат нам наши злобные оппоненты.

Если выразить это математическим языком, то получится, что 0 — это *предел* данной последовательности

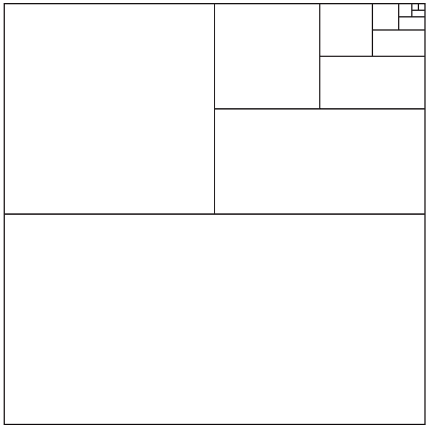
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$$

Это не обязательно означает, что данная последовательность чисел когда-нибудь дойдет до нуля. Это означает лишь то, что она будет все ближе подходить к нулю вместе с точным значением каждой попытки в описанном испытании на стрельбу по мишени.

И СНОВА ТОРТ

Теперь давайте воспользуемся этим методом, чтобы дать строго научный ответ на вопрос, можем ли мы сделать торт бесконечным, если съедим только половину, потом половину от того, что осталось (то есть четверть), потом снова половину от того, что осталось, и так далее... бесконечно. Вы можете подумать, что таким образом ваш торт действительно станет бесконечным, но однажды то, что останется, будет настолько маленьким, практически ничтожным количеством, что по факту получится, что вы съели весь торт.

Это можно очень убедительно продемонстрировать на квадратном торте, если вас не смущает, что некоторые куски будут квадратными, а некоторые продолговатыми.



Вопрос звучит так: сколько торта мы съедим после того, как перейдем к бесконечному поеданию торта? На каждом этапе мы съедаем следующее количество торта:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$$

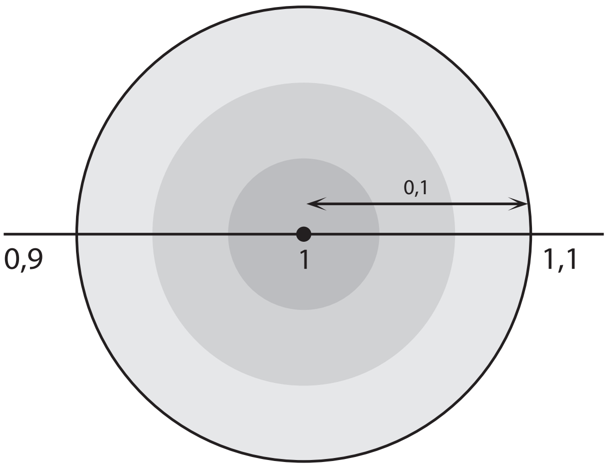
Только в этот раз нас интересует не количество торта, которое мы будем съедать на каждом этапе, а *общее количество* уже съеденного. Общее количество торта, съеденное после каждого этапа, будет таким:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} \\ \vdots \end{array}$$

А теперь мы предположим, что если мы «будем продолжать в том же духе вечно», то съедим весь торт. Мы хотим сказать, что мы будем все ближе и ближе подбираться к тому, чтобы съесть весь торт, и подберемся настолько близко, насколько только могут представить наши умники, как в испытании со стрельбой по мишени, описанном выше.

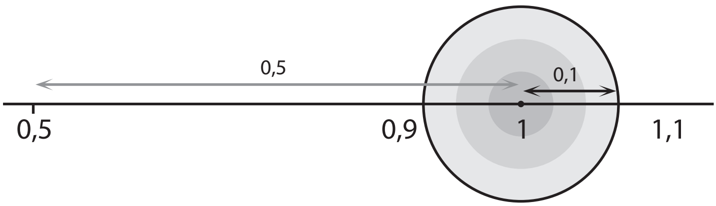
На языке математики это звучит так: *предел* съеденного количества торта равен 1, то есть всему торту целиком.

Тут снова пришли умники, чтобы нас испытать. В этот раз «яблочко» мишени будет равно 1. Сначала они дадут нам мишень, которая будет иметь ширину 0,1 (по радиусу).



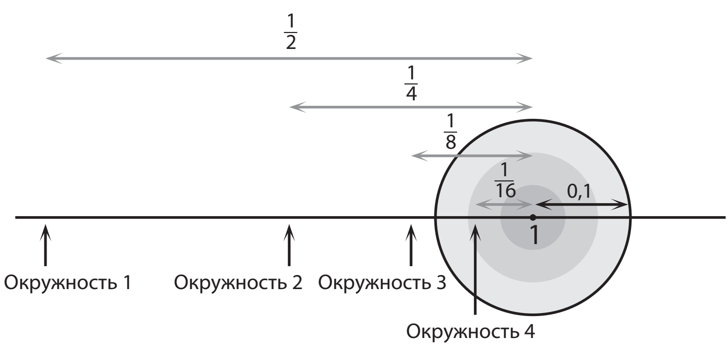
Мы должны доказать, что после некоторого допустимого конечного количества промахов мы попадем в мишень, после чего всегда будем попадать во время всех последующих попыток. В этот раз последующие попытки — это последовательность дробей из таблицы выше. Возможно, сейчас вы подумали, что нам нужно записать все дроби, чтобы найти ответ для каждого этапа, но в данном случае мы можем полениться. (Ведь лениться, когда это возможно, — одна из основных вещей в математике.) Гораздо проще рассмотреть, сколько торта *остается*, так мы узнаем, насколько далеко мы находимся от «яблочка» мишени на каждом этапе.

После первой попытки остается $\frac{1}{2}$ торта, значит, мы находимся на расстоянии $\frac{1}{2}$ от «яблочка», то есть от 1. Если принять во внимание, что ширина мишени равна только 0,1, а $\frac{1}{2} = 0{,}5$, то есть больше 0,1, то мы не попали в цель.



Наша следующая попытка позволит нам подобраться ближе: у нас остается $\frac{1}{4}$ торта, значит, мы находимся на расстоянии $\frac{1}{4} = 0{,}25$ от «яблочка», то есть от 1.Теперь 0,25 все еще больше, чем 0,1, поэтому мы снова не попали в мишень.

После нашей следующей попытки остается 0,125 торта, но этого все еще недостаточно, чтобы попасть в мишень. После следующей попытки остается 0,0626 торта. Наконец-то меньше 0,1, а значит, мы угодили совсем близко от «яблочка», то есть от 1. Все последующие этапы позволят нам подобраться еще ближе к «яблочку», поэтому мы вечно будем оставаться в пределах мишени. Таким образом, мы прошли испытание стрельбой по конкретной цели.



Фактически мы всегда можем пройти это испытание, независимо от размера мишени. Предположим, умники выбрали для нас мишень шириной ε. Тут будет немного труднее, потому что мы должны разработать выигрышную стратегию, которая работает, несмотря на значение ε. Если размер мишени равен конкретному числу (например, 0,1, как в прошлом примере), то можно просто постоянно проверять, сколько торта остается на каждом этапе, и остановиться тогда, когда остаток будет меньше, чем это конкретное число. Чтобы разработать стратегию, которая будет работать при *любом* ε, мы должны определить, когда остаток торта будет меньше ε, при условии, что мы не знаем, чему точно равно ε. В этот момент математика становится невероятной и ломает мозг, потому что вместо реального числа появляется буква и вы даже не знаете, что конкретно она обозначает.

Все, что нам сейчас нужно, это понять, что после каждого этапа поедания торта мы делим остаток пополам, так что количество торта становится:

$$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \ldots$$

Так, оставшееся количество после n этапов поедания будет:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

Упрощенно мы можем выразиться следующим образом: «так как n становится все больше и больше, то 2^n станет просто *огромным*, а значит, увеличивая n, мы всегда можем сделать остаток торта меньше ε».

Если быть точнее, нам нужно дойти до точки, в которой остаток будет меньше ε, то есть:

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon, \text{ что то же самое, что } \frac{1}{\varepsilon} < 2^n.$$

Теперь $2n$ всегда будет больше n (пока n будет больше 2), так что если мы просто убедимся в том, что $n > \frac{1}{\varepsilon}$, то мы получим неравенство $2^n > n > \frac{1}{\varepsilon}$, которое дает такой ответ, какой нам был нужен. Это не самый простой способ доказательства, мы не обязательно должны определять первое попадание в мишень. Это не имеет особого значения, нам просто нужно убедиться, что мы можем попадать в мишень вечно, и нам не нужно знать, когда именно это произойдет. Такое доказательство выглядит вполне удовлетворительно, если вы лентяй, и вовсе не удовлетворительно, если вы предпочитаете точность во всем. Я люблю точность, но лень побеждает.

Итак, у нас есть безупречная стратегия прохождения теста на стрельбу по мишени при любом размере мишени. Говоря математическим языком: предел оставшегося количества торта равен нулю, а предел реально съеденного количества торта равен единице. Это ответ на наш вопрос: «Что будет, если я буду продолжать так бесконечно?»

Имейте в виду, что «предел» — это не конец. Предел не означает максимальное количество торта, которое вы способны съесть (хотя, по сути, это и *есть* максимальное количество торта, которое вы можете съесть, потому что в нашем примере речь идет только об одном торте). Слово «предел» предполагает, что что-то продолжается вечно и в конечном итоге перестает «болтаться» и стабилизируется.

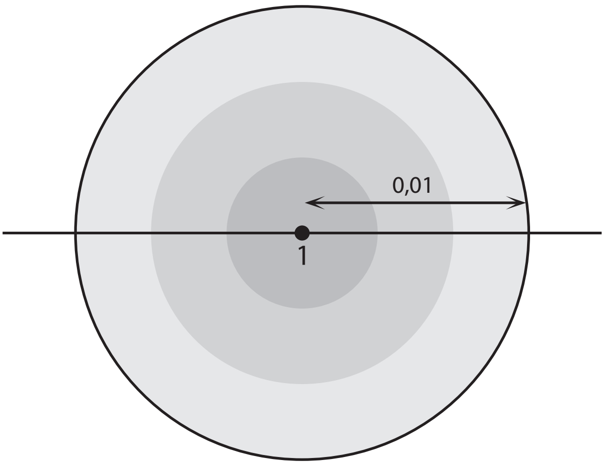
Аналогичным образом можно объяснить то, как мы вышли из положения, разгадывая парадокс Зенона про путешествие из точки A в точку B. Мы должны были пройти половину пути, затем половину оставшегося пути и так далее. Ключ к разгадке в том, чтобы обратить внимание на то, *сколько* времени занимает каждый этап пути. Если мы будем продолжать идти с постоянной скоростью, тогда каждый этап по времени будет занимать половину предыдущего этапа. Итак, несмотря на то что нам нужно пройти бесконечное количество этапов, они станут настолько короткими, что общее время, которое мы на них затратим, будет конечным. Фактически это точно такие же расчеты, как в примере с шоколадным тортом. Если первый этап займет полчаса, второй — четверть часа, третий — одну восьмую часа (и да, обычно мы не говорим «одна восьмая часа») и так далее. Если мы продолжим в том же духе, то мы снова попадем в ситуацию «испытания стрельбой по мишени», которое устраивали умники, и снова получим аналогичный ответ, как в примере про шоколадный торт: все, что мы прибавим, будет равно одному часу, независимо от того, что у нас бесконечно большое количество этапов.

Получается, что мы можем сделать бесконечное количество вещей в пределах конечного временного промежутка. И мы делаем нечто подобное каждый день, когда добираемся из одного пункта в другой. Конечно, если мы не проводим весь день в постели, но это совсем другая история.

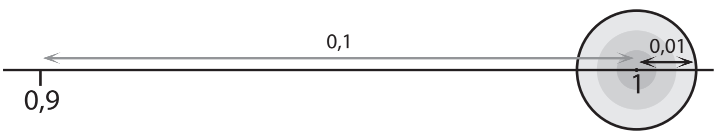
ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ДЕСЯТИЧНЫЕ ЗНАКИ

А теперь давайте пройдем еще одно испытание стрельбой по мишени, в этот раз на примере повторяющихся десятичных знаков. Возьмем самые странные из них: 0,999999999... Это число можно также записать как 0,(9), и, возможно, однажды вам говорили, что оно будет «равно 1». Что это значит? Обычно мы рассматриваем такие повторяющиеся десятичные знаки как «0,999... где девятки повторяются бесконечно», но теперь мы знаем, как обращаться с ними с учетом всей математической строгости. Это похоже на поедание торта. Мы будем проходить знаки поочередно. После первого знака у нас будет 0,9. После второго знака у нас будет 0,99. После третьего знака у нас будет 0,999. И так далее. Предположим, что *предел* этого процесса будет 1. Это вовсе не означает, что мы когда-нибудь фактически дойдем до 1. Это означает, что если снова придут наши злобные оппоненты и установят для нас мишень с «яблочком» шириной 1, то мы сможем пройти тест, причем независимо от того, насколько маленькой будет эта мишень.

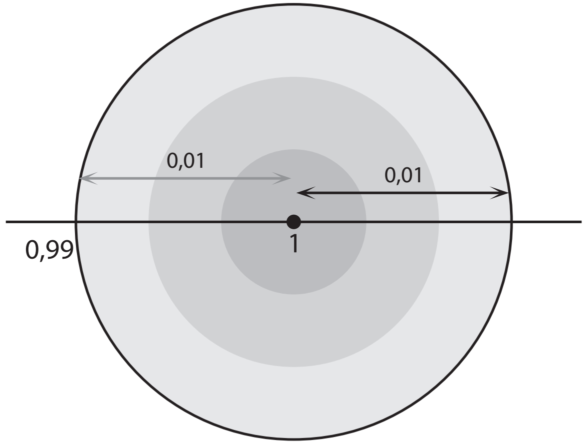
Давайте попробуем. Допустим, ширина первой мишени равна 0,01. Значит, она будет выглядеть так:



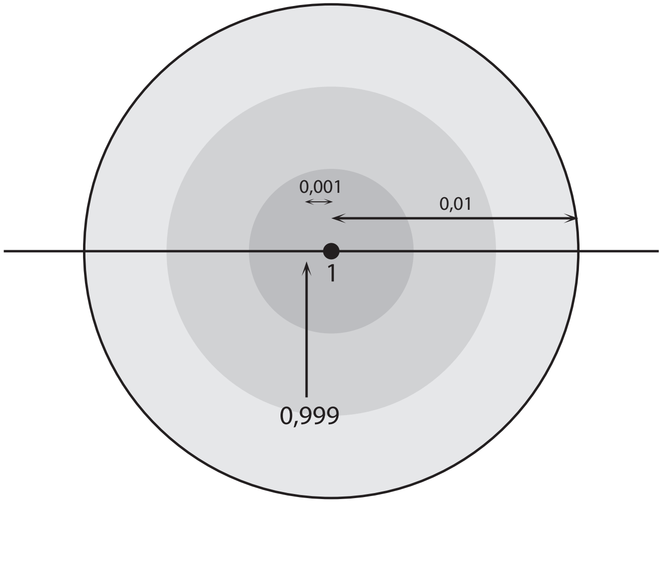
Наша первая попытка — 0,9. Как далеко это будет от «яблочка», то есть от 1? Ответ: мы попадаем в точку 0,1 от «яблочка», а это больше, чем 0,01. Итак, мы промахнулись.



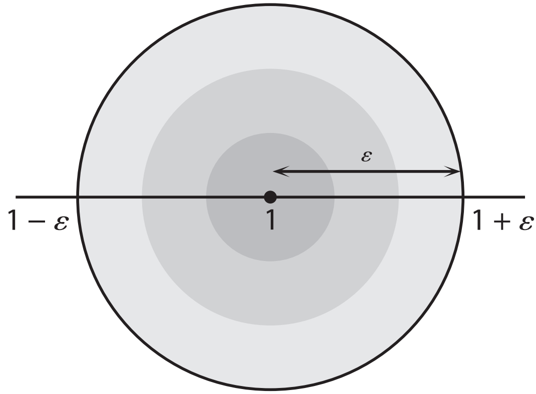
Наша следующая попытка — 0,99. Мы попадаем в точку 0,01 от «яблочка»: это рикошет от края мишени.



Наша следующая попытка — 0,999. Теперь мы попадаем в точку всего лишь 0,001 от «яблочка», то есть от 1. В этот раз мы очевидно попадаем в мишень. Более того, все наши последующие попытки будут *все ближе и ближе* к центру мишени, а значит, мы точно знаем, что с этого момента все наши попытки всегда будут попадать в мишень. Итак, нам удалось пройти испытание стрельбой по мишени.



Теперь мы должны убедиться в том, что сможем пройти это испытание, независимо от размеров мишени. Допустим, наши злобные оппоненты предложили нам мишень шириной ε. В какой момент мы начнем попадать в нее?



Нам уже известно, что мы начинаем попадать в мишень, когда наша допустимая погрешность становится меньше ε, это означает, что у нас должно быть 0,0000...001 < ε для некоторого количества нулей. Это вполне возможно, потому что мы можем поставить столько нулей, сколько захотим.

Это очень похоже на пример с тортом, только вместо того, чтобы каждый раз съедать половину оставшегося торта, мы делим его на 10. Итак, нам нужно такое n, чтобы получилось:

$$\frac{1}{10^n} < \varepsilon, \text{ или по-другому: } \frac{1}{\varepsilon} < 10^n.$$

Так же как и в прошлый раз, мы можем воспользоваться утверждением, что $10^n > n$, поэтому если мы просто возьмем $n > \frac{1}{\varepsilon}$, то у нас получится $10^n > n > \frac{1}{\varepsilon}$, как мы и хотели.

Итак, если вы думаете, что 0,999... «фактически» никогда не попадет в 1, то вы правы, но вы упускаете суть. Научное определение этих повторяющихся десятичных знаков уже включает в себя этот факт, то есть это число и не должно «попадать» в 1, чтобы быть равным 1.

Существует еще один подход к этой проблеме, он основывается на вопросе: «Если 0,999... не равно 1, то чему оно равно?» Оно не может быть меньше 1, потому что мы только что доказали, что оно ближе к 1, чем пробел любого возможного размера. Итак, насколько бы маленьким, по вашему мнению, ни был пробел между 0,(9) и 1, в реальности он просто не может быть больше 0. Теперь у нас есть два варианта:

1. Мы утверждаем, что 0,999... не имеет никакого смысла и не является настоящим числом.
2. Мы утверждаем, что 0,999... — это 1.

Давайте сравним оба этих варианта. Если мы выберем первый, то сможем придать математический смысл всем другим бесконечным десятичным знакам и таким образом заполним пробелы между рациональными числами. Если мы выберем второй вариант, то сможем заполнить пробелы между рациональными числами и с точки зрения логики не произойдет ничего плохого: мы просто испытаем нечто похожее на тошноту от качки. Если вы вспомните, что 0,999... — это условное сокращение для «предела, когда n приближается к бесконечности 0,99...9 через n-е количество десятичных знаков», то, я надеюсь, ваша тошнота пройдет и вы будете «наслаждаться поездкой».

Пример с тортом похож на периодическую дробь, если вместо десятичных мы возьмем двоичные дроби, потому что $\frac{1}{2}$ в двоичной системе равно 0,1, и тогда, если мы добавим $\frac{1}{4}$, то получим 0,11, затем, если мы добавим $\frac{1}{8}$, то получим 0,111 и так далее. Так, количество торта, которое мы съедим, если продолжим есть бесконечно, будет двоичной периодической дробью 0,1111... А согласно приведенной выше аргументации, мы можем доказать, что ее предел равен 1.

В СТОРОНЕ ОТ «БЕСКОНЕЧНОГО»

Мы уже много раз пытались представить себе, что случится, если что-то будет продолжаться бесконечно, будь то бесконечная выдача отрывных билетиков, бесконечное прибытие новых постояльцев отеля или бесконечное количество этажей небоскреба. Это очень сложно, потому что ни одна из этих ситуаций в реальности невозможна. Что случится, если невозможное вдруг станет возможным?

В художественной литературе есть такой забавный прием — поменять в реальности что-то одно, а все остальное оставить как есть. Например, на Земле живет Супермен, а все остальные жители планеты совершенно обычные люди. Или герой построил машину времени, а другие люди живут обычной жизнью. В наших мысленных экспериментах над «бесконечным» мы делаем похожие вещи.

С точки зрения математики и логики это довольно сложно, потому что если мы делаем ложное верным, то *все вокруг* тоже должно стать верным. Это все равно что сделать 1 = 0, тогда *все вокруг* тоже будет вынуждено стать равным 0.

Есть такой аргумент: «Если ты прав, то я царица Савская». То есть если оппонент прав, то и все остальное тоже может быть правдой, включая такие фантастические вещи, что я царица Савская. С точки зрения логики вы не можете просто взять ложное, сделать его истиным и полагать, что ваши действия не повлекут за собой никаких последствий. В этом случае ваша логическая система больше не будет достоверной. Единственный способ сохранить достоверность логической системы — это сделать *все вокруг* тоже истинным. Тогда «истинное» и «ложное» будут означать одно и то же, и мир рухнет. Именно поэтому отель Гильберта или бесконечное печенье, которые мы теоретически можем себе представить, — это не логические аргументы, а лишь наши мысленные эксперименты. Поэтому они вполне могут подлежать обсуждению. И нужно очень постараться, чтобы превратить их в истинные математические аргументы, которые больше не будут подлежать обсуждению, по крайней мере, со стороны людей, которые разбираются в математике.

ПРОЧИЕ ДЛИННЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ЗНАКИ

Теперь у нас есть некоторое понимание того, что такое «бесконечно длинные десятичные знаки». Это значит, что они находятся над мишенью. Каждый раз, когда вы добавляете к числу один десятичный знак, вы его немного меняете (если это новый десятичный знак, а не ноль). Но если вы будете добавлять все больше и больше десятичных знаков, то будете менять число все меньше и меньше. В какой-то момент изменение станет фактически ничтожным, то есть вы будете точно знать, что вы и дальше будете продолжать попадать в мишень злобных оппонентов независимо от того, насколько маленькой они ее сделают.

Повторяющиеся десятичные знаки строятся по определенному повторяющемуся шаблону. Этот шаблон не обязательно должен стоять в начале, а повторяющиеся циклы могут быть настолько длинными, насколько вам нравится, но они должны повторяться. Ниже пример:

0,111111...	0,(1)
0,131313...	0,(13)
0,18640278278278	0,18640(278)

Колонка справа представляет собой более понятный способ записывать десятичные знаки: совершенно ясно, какая часть будет повторяться.

Странность иррациональных чисел в том, что не существует шаблона, по которому мы можем растянуть их знаки после запятой. Цифры стоят произвольно и никогда не повторяются, даже в очень и очень длинных циклах. Итак, как мы можем сказать, к какому «яблочку» стремится такое число? Это очень хороший вопрос, и ответ на него будет: «Никак не можем!»

Вот момент, когда мы ставим все с ног на голову, а потом возвращаем на свои места. В математике такое иногда случается и может даже вызвать настоящую тошноту, как при укачивании. Когда я плыву на корабле (особенно на маленьком корабле), меня обычно сильно тошнит, пока я не подстроюсь под качку и не начну двигаться в такт с кораблем. Это удивительно! (Вот только мне никогда не удается сделать то же самое, когда я катаюсь на этих больших каруселях в парках аттракционов. От них меня по-настоящему тошнит.) Но еще труднее бывает снова сойти на землю. Обычно я настолько «включаюсь» в качку, что потом никак не могу настроиться на скучную однородную землю.

Давайте снова настроимся на цель! Изначально наши злобные оппоненты поместили мишень вокруг «яблочка», в которое мы должны были целиться. Теперь *мы не будем знать, где находится «яблочко»*. У нас просто есть мишень, которая становится все меньше и меньше. Пока мы продолжаем попадать в мишень, как мы делали это раньше, мы выигрываем. А что именно мы выигрываем? Мы выигрываем по меньшей мере знание того, что где-то там есть «яблочко», даже если мы не знаем, где точно оно находится.

Такое происходит с бесконечно длинными десятичными знаками иррациональных чисел. Нам уже известно, что, когда десятичные знаки становятся длиннее, число как бы стабилизируется и начинает постоянно попадать в очень маленькую мишень, но мы никогда не узнаем, где именно находится «яблочко» этой мишени. Возьмем число π. Примечательный факт: вы можете взять любой круг, но отношение его окружности к диаметру всегда будет одинаковым. Это отношение остается постоянным для кругов всех размеров. Это отношение является иррациональным числом, и мы называем его числом π.

Но что такое число? Это нам неизвестно. Но мы знаем очень много его десятичных знаков (до триллиона цифр), что вовсе не означает, что мы понимаем, что выражают все эти десятичные знаки. Мы даже можем рассчитать любую заданную цифру в числе π, не зная предыдущую. Для этого применяется алгоритм Саймона Плаффа[1], разработанный в 1995 году. Однако все десятичные знаки числа π мы назвать не сможем.

Мы знаем, что сможем попасть в любую бесконечно маленькую мишень, если уйдем очень далеко в конец десятичных знаков, потому что после 5 миллионов десятичных знаков число практически перестает меняться, когда к нему добавляют дополнительные десятичные знаки. Хотя оно продолжает меняться, и мы не знаем, к какому «яблочку» оно приближается. Это одна из странностей иррациональных чисел. Они находятся повсюду, но мы действительно не знаем, что они означают, нам известно лишь несколько косвенных фактов, связанных со сжимающимися мишенями. Так случилось, что π нельзя точно *охарактеризовать* без какой-либо привязки к десятичным знакам, потому что оно является отношением любой окружности к ее диаметру. А $\sqrt{2}$ можно охарактеризовать как положительное число с привязкой к 2. Однако большинство иррациональных чисел нельзя охарактеризовать подобным образом. Итак, как сформулировать, что такое иррациональные числа? Это непросто!

[1] Формула Бэйли — Боруэйна — Плаффа (ББП-формула, BBP-формула) для вычисления n-го знака числа π в шестнадцатеричной системе счисления. — *Примеч. ред.*

ЧТО ТАКОЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА?

Неудивительно, что так много времени ушло на то, чтобы выяснить, что такое действительные числа. До этого момента у нас довольно легко получалось дать научное определение всем предыдущим типам чисел. Мы без труда дали определение натуральным, целым и рациональным числам. Но когда в игру вступают иррациональные числа, ситуация становится крайне сложной.

Это был один из удивительнейших моментов в истории математики: два разных человека в двух разных странах работали над одной и той же проблемой почти в одно и то же время, но используя разные методы. Такое случается довольно часто. Как будто в воздухе появляется нечто, способное помочь математикам в разных точках мира решить одну и ту же проблему в одно и то же время. Хотя вряд ли дело в воздухе. Вероятно, математические исследования просто достигают определенного уровня, и возникает некая готовность к новому. Действительные числа были окончательно изучены Кантором и Дедкиндом независимо друг от друга и совершенно разными методами, произошло это в 1872 году.

Кантор сделал это с помощью метода на попадание в сжимающуюся мишень, который мы описывали ранее. Но по какой-то причине с конструированием действительных чисел обычно ассоциируется имя другого математика, а именно Огюстена Луи Коши. Возможно, потому, что метод сжимающейся мишени основывается на его идеях. Тем не менее именно Кантор впервые использовал этот метод для конструирования действительных чисел. Что касается Дедкинда, он больше занимался обнаружением пробелов между рациональными числами. Действительные числа начали выглядеть совершенно иначе, нежели все, с чем мы сталкивались прежде, изучая числа. У нас уже был подобный опыт, когда мы конструировали бесконечность: она внезапно превратилась в «количество объектов во множестве», несмотря на то что нам точно неизвестно, что такое множество.

С помощью метода Кантора действительные числа можно сконструировать как последовательность рациональных чисел, которая выполняет условия теста на попадание в мишень. Вот несколько знаменитых примеров. Иррациональное число *e* можно выразить через последовательность рациональных чисел: $\frac{1}{n!}$. Мы помним, что $n!$ — это

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times ... \times 3 \times 2 \times 1.$$

А вот техническая сторона дела: мы начали с $n = 0$ и определили, что $0! = 1$.

> Одним из доказательств служит тот факт, что $n!$ — это количество разных порядков проигрывания n-го количества песен на вашем iPod. Если на iPod 0 песен (как недавно было на моем новом телефоне), то у вас будет только один вариант: ничего не слушать.

Итак, возьмем числа:

$$\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, ...$$

и будем перечислять их так вечно. В этом случае мы пройдем испытание на попадание в мишень, которое устраивают наши злобные оппоненты, даже если точно не знаем, где находится «яблочко»; мы знаем только, что оно где-то есть, и обозначаем его как *e*.

> Удивительным образом это то же самое число, которое встречается в более известном научном определении *e*, в котором *e* выражено через функцию e^x. Эта функция обладает двумя следующими свойствами:

- Градиент функции везде является самим собой, то есть если вы начертите график этой функции, то наклон в любой точке будет равен y в этой точке.
- Значение y (и градиента) в точке 0 равно 1.

Число e, таким образом, равно значению y (и градиенту) в точке 1.

Вот еще один пример. На этот раз мы возьмем такие рациональные числа:

$$4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{11}, \ldots$$

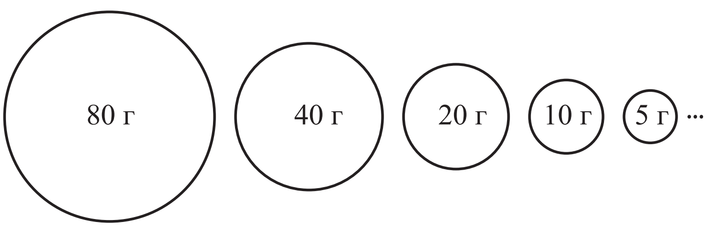
В этом случае мы снова сможем пройти испытание на попадание в мишень, которое устраивают наши злобные оппоненты, и снова мы точно не знаем, где находится «яблочко». Теперь мы обозначаем «яблочко» числом π. Именно π. Довольно любопытный итог! Это можно доказать с помощью достаточно сложной техники, взятой из математического анализа.

Доказывать, что сложные абстрактные объекты могут вести себя как числа, — довольно трудоемкое занятие. Сначала мы должны продемонстрировать, как они складываются, как они умножаются, а потом подтвердить, что они подчиняются тем же правилам, что и числа, например: от порядка сложения и умножения ответ не изменяется, можно вычитать с обеих сторон уравнения и так далее. Удивительно, как вещи, которые кажутся нам интуитивно понятными, бывает так трудно превратить в строгую математику. Именно поэтому некоторые считают математику запутанной, другие — беспомощной, а третьи — просто бессмысленной. А вот мне кажется поразительным, что наше шестое чувство настолько сильно и настолько непостижимо для нашего мозга. В любом случае это не значит, что мы не должны пытаться разобраться в этом деле. Хотя можно просто порадоваться тому, что такие великие математики, как Кантор и Дедкинд, сделали все за нас, а нам остается просто восхищаться результатами их работы.

16 СТРАННОСТИ

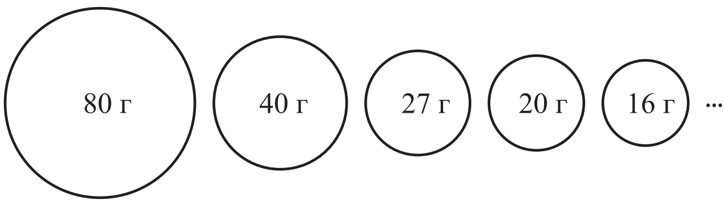
Прежде чем закончить эту книгу, я хочу рассказать вам о некоторых странностях, проистекающих из наших новых знаний о бесконечно малых вещах. Бесконечные и конечные вещи начинают странным образом смешиваться друг с другом.

Начнем с того, как приготовить бесконечное количество печенья из конечного количества теста. Сначала вы делаете первую печеньку, а затем делаете вторую из половины того количества теста, которое вы потратили на первую.



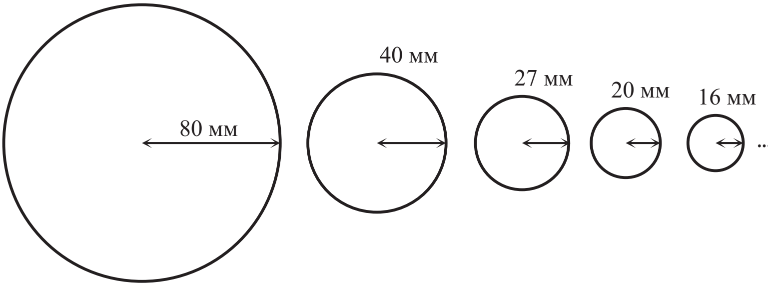
Далее вы делаете следующую печеньку снова из половины того количества теста, которое вы потратили на вторую, затем снова из половины, затем снова из половины и так далее. Если ваша первая печенька не была гигантским монстром, на которого потребовалась половина всего теста (или даже больше), то тесто никогда не закончится. (Хотя мне кажется, что в наши дни бывает, что люди действительно делают одну огромную печеньку и выпекают ее, как пиццу.) Итак, у вас получилось бесконечное количество печенья, единственная загвоздка состоит в том, что ваши печеньки — бесконечно маленькие, и однажды они станут настолько маленькими, что вы больше не сможете их увидеть.

А как насчет того, чтобы печеньки становились меньше не так быстро? Вместо того чтобы лепить каждую последующую печеньку из половины теста, которое ушло на предыдущую, можно каждый раз возвращаться к первой штучке и просто немного менять ее пропорции. Так, вторая печенька будет половиной от первой, следующая — ее третью, следующая — четвертью, следующая —пятой частью и так далее.



Трудность здесь в том, что вам потребуется бесконечное количество теста.

С другой стороны, вы можете сделать вторую печеньку из половины *радиуса* первой, следующую — из трети радиуса, следующую — из четверти радиуса, следующую — из одной пятой радиуса и так далее.



В этот раз вам будет достаточно конечного количества теста. Однако если вы выстроите все получившиеся печеньки в один длинный ряд, то он будет тянуться бесконечно долго.

Как будет выглядеть такой ряд?

ГАРМОНИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Числовая последовательность, о которой мы думаем,

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \ldots$$

называется *гармоническим рядом*[1]. Это понятие пришло из музыки; музыкальная гармония — это длина волн, создающая гармоничное звучание нот, выраженное через отношение основных нот друг к другу. Возьмем скрипку. Если вы сыграете на струне соль, не зажав ни одного пальца, то получите ноту соль. Чтобы ноты звучали выше, можно зажать струну пальцами и сократить ее вибрирующую часть. Но чтобы играть «гармонично», вам нужно слегка касаться струны в определенных местах, не зажимая ее полностью. Тогда звучание будет более утонченным и воздушным.

Если вы зажмете струну лишь наполовину, то гармонический призвук, который вы получите, будет нотой соль на одну октаву выше, чем обычная нота соль. Если вы зажмете струну на треть легче обычного, то получите ноту ре на полторы октавы выше обычной ноты ре. Чтобы получить другие гармонические

[1] Гармонический ряд представляет собой *сумму*, составленную из бесконечного количества членов, обратных числам натурального ряда. Числовой ряд в общем виде записывается как $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. В данном случае автор приводит числовую последовательность гармонического ряда (члены ряда) для дальнейших операций с рядом. — *Примеч. ред.*

призвуки, нужно зажать струну на четверть, затем на одну пятую, затем на одну шестую. Большего на скрипичной струне вы не услышите, однако струны виолончели способны дать немного больше, ведь они гораздо длиннее, поэтому есть больше места, чтобы найти гармонию.

На духовых инструментах можно играть точно так же, просто меняя степень напряжения в губах, даже без помощи пальцев. Скорее всего, основная нота духовых инструментов — это си-бемоль, но далее гармонические ряды имеют точно такие же *интервалы*, что и ноты выше: октава, затем на пол-октавы выше и так далее.

В математике гармонические ряды важны так же, как и в музыке. Однако странность в том, что если мы будем продолжать прибавлять эти дроби «вечно», то *никогда* не попадем ни в какую мишень. Иначе говоря, умники всегда будут одерживать победу. Сумма дробей будет стремиться к бесконечности. Мы уже упоминали об этом в главе 11, когда говорили о вещах, которые растут очень медленно, но не смогли этого доказать.

Вот что случится, если мы попытаемся победить в испытании на попадание в мишень. Даже если какое-то время мы будем попадать в мишень, однажды мы все равно снова начнем промахиваться. Ведь так как мы добавляем все новые и новые дроби, то общий итог постоянно растет, и однажды мы «выпадем» с другого края мишени. Общий итог стремится к бесконечности, несмотря на то что количество, которое мы прибавляем каждый раз, кажется ничтожным. То обстоятельство, что общий итог постоянно растет, само по себе не означает, что мы будем промахиваться. В конце концов, когда мы добавляем $\frac{1}{2}$, затем $\frac{1}{4}$, затем $\frac{1}{8}$ и так далее, общий итог тоже растет. Но этот рост такой медленный, что мы никогда не пройдем 1. Гармонические ряды тоже растут медленно, но все же достаточно быстро, чтобы в итоге всегда выйти за любые пределы, которые мы установим.

Вот несколько примеров.

* Давайте посмотрим, сможем ли мы пройти 1, чтобы было не так, как в примере с тортом, когда мы каждый раз ели половину от того, что осталось, и так никогда и не смогли съесть весь торт целиком, а «вечно» приближались к 1. Итак, мы хотим посмотреть, сможем ли мы прибавить достаточно дробей к гармоническому ряду, чтобы получить в итоге больше 1. Сделаем это так:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=$$
$$=\frac{13}{12}.$$

  А это больше 1.

* Давайте посмотрим, сможем ли мы пройти 2. На этом этапе я вынуждена признаться, что для расчетов буду обращаться к своему табличному процессору. Итак, табличный процессор сообщил мне, что, дойдя до $\frac{1}{11}$, я уже пройду 2:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}>2.$$

* Раз уж я прибегла к помощи табличного процессора, давайте заодно посмотрим, когда я смогу пройти 5. Процесс становится действительно медленным, но это все же произойдет на $\frac{1}{227}$.

Изначально я хотела также посмотреть, когда я смогу пройти 10, но это заняло слишком много времени, и я оставила эту затею. Очевидно, что если мы хотим доказать, что этот процесс движется в сторону бесконечности, то нужен метод, более надежный. Кроме того, расчеты табличного процессора не относятся к достоверным математическим методам. Но даже если бы и относились, доказывать таким образом, что нечто стремится к бесконечности, вряд ли хорошая идея. Ведь даже на то, чтобы доказать, что это нечто больше 10, требуется очень много времени.

Вот более хитрый способ. Хотя он скорее не хитрый, а разумный. Мы создадим группы, объединив их в классы по одному члену, затем по два, затем по четыре, затем по восемь и так далее.

1. Первая группа дробей будет включать только $\frac{1}{2}$, это номер один в гармоническом ряду.
2. Вторая группа будет включать в себя две следующие дроби, то есть $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$.
3. Третья группа будет включать в себя вдвое больше дробей, чем предыдущая, а именно следующие четыре дроби:

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \ldots$$

4. Четвертая группа будет включать в себя уже в два раза больше дробей:

$$\frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}.$$

Итак, подводим итог. У нас получились вот такие группы:

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{1-я группа}} + \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\text{2-я группа}} + \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\text{3-я группа}} + \underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots}_{\text{4-я группа}}$$

А теперь давайте на секунду остановимся и подытожим. Я собираюсь доказать, что каждая из этих групп в сумме дает *больше* $\frac{1}{2}$, не считая первой группы, которая состоит только из $\frac{1}{2}$, а значит, ее сумма тоже будет равна $\frac{1}{2}$.

Я — большая лентяйка, возможно, как и вы, поэтому (помните про экономию умственных усилий?) мы не будем считать сумму всех этих групп. Мы просто докажем, что сумма у них у всех будет больше $\frac{1}{2}$. Возьмем, например, вторую группу, которая включает в себя $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. Каждое из этих чисел больше или равно $\frac{1}{4}$. Значит, сумма тоже будет больше или равна $2\times\frac{1}{4}$, потому что у нас есть два члена, и оба они больше или равны $\frac{1}{4}$. Но $2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

$$\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}$$

Подобный способ доказать, что $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$, выглядит несколько экстравагантно по сравнению с обычным методом: просто посчитать сумму всех дробей. Однако суть в том, что такой способ позволяет *обобщить* данные и произвольным образом выйти за пределы итоговой суммы. А такие методы, как приведение дробей к общему знаменателю для того, чтобы их сложить, или расчеты в табличном процессоре, не позволят нам в достаточной мере обобщить данные. Методы, позволяющие оптимально обобщать данные, часто выглядят глупыми, когда вы применяете их к базовым примерам. Это одна из причин, по которой математика часто дается нам с трудом: все базовые примеры порой выглядят глупо, бессмысленно или противоречиво.

Давайте продолжим и перейдем к рассмотрению третьей группы. Она включает в себя четыре члена. Самый маленький из четырех членов — последний: $\frac{1}{8}$. Итак, все остальные члены больше последнего, это значит, что сумма будет больше, чем $4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$.

$$\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}$$

Теперь займемся четвертой группой. Она включает в себя *восемь* членов, и самый маленький из них — это $\frac{1}{16}$. Итак, сумма будет больше, чем $8\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$.

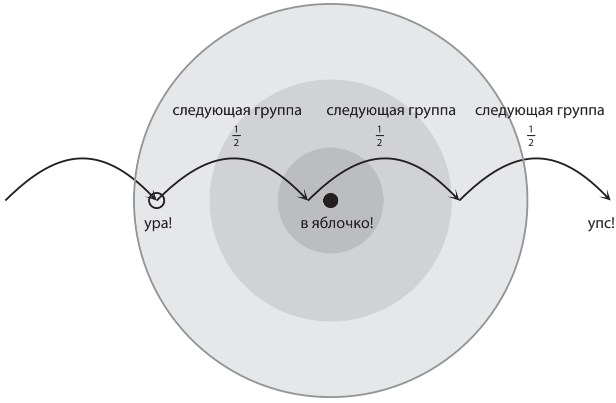
$$\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}==\frac{8}{16}=\frac{1}{2}}$$

Мы можем бесконечно продолжать в том же духе. В следующий раз у нас будет 16 членов, и в итоге получится $\frac{1}{32}$. Каждый член будет больше или равен $\frac{1}{32}$, поэтому сумма будет больше $\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$. Затем мы возьмем 32 члена и получим $\frac{1}{64}$. Затем мы возьмем 64 члена и получим $\frac{1}{128}$. И так далее.

> Самый лучший способ сказать «продолжается бесконечно» или «и так далее» — это сказать, что случится с n-й группой, где n может быть равно любому числу. N-я кучка будет включать в себя 2^{n-1} члена и в итоге даст $\frac{1}{2^n}$. Каждый член будет больше или равен $\frac{1}{2^n}$, а сумма будет больше чем $\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

Итак, мы убедились, что если мы будем складывать все члены бесконечно, итоговая сумма получается больше, чем если бесконечно прибавлять $\frac{1}{2}$ к самой себе. И если мы действительно будем это делать, то мы совершенно точно никогда не перестанем расти.

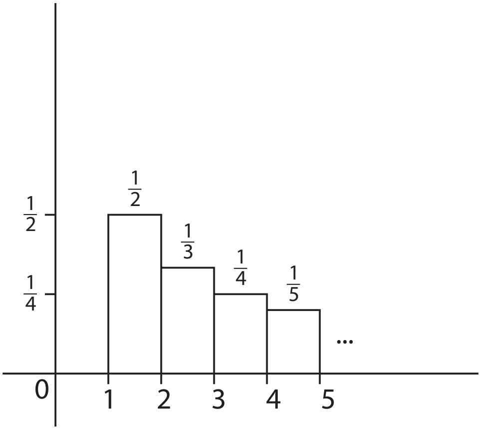
Вот еще один подход к данной теме. Если злобные оппоненты в этом случае снова поставят перед вами мишень и вам удастся в нее попасть, то вы обречены на то, чтобы однажды промахнуться. В какой-то момент мы добавим достаточно много кучек с числами, каждое из которых больше $\frac{1}{2}$, поэтому наша сумма станет слишком большой и выйдет за пределы мишени.



В этом случае злобные оппоненты одерживают победу.

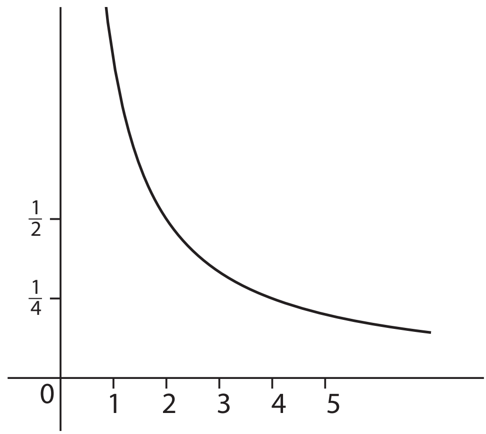
СТОЛБИКОВЫЕ ГРАФИКИ

Мы можем изобразить гармонические ряды как своего рода столбиковый график, например вот такой:



Здесь каждый столбик имеет ширину 1, значит, площадь каждого прямоугольника равна ширине, умноженной на высоту, которая будет $\frac{1}{n}$ для каждого n. Итак, общая площадь всех столбиков — это то, что мы только что пытались сосчитать, а именно сумма всех членов в гармоническом ряду. Значит, эта площадь будет «бесконечной». На самом деле, независимо от того, насколько большим будет число, которое мы загадаем, если мы пойдем достаточно далеко по графику (n будет становиться все больше и больше), то сможем найти место, в котором общая площадь до этой точки очевидно будет больше, чем число, которое мы загадали. Значит, если мы берем все большее и большее n, то площадь будет стремиться к бесконечности; подобное мы уже видели в главе 11.

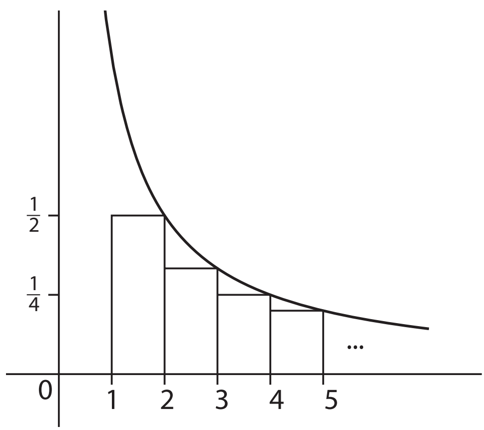
Давайте вернемся к вопросу об области, ограниченной кривой. Если мы начертим график $\frac{1}{x}$, то он будет выглядеть так:



Во-первых, обратите внимание на то, что $\frac{1}{x}$ становится очень большим по мере того, как x приближается к 0. Мы не знаем, чему точно он будет равен, когда x достигнет 0, но мы можем сказать, что $\frac{1}{x}$ стремится к бесконечности точно так же, как x стремится к 0, что означает, как уже было сказано выше: независимо от того, насколько большим будет число, которое мы загадаем, мы всегда сможем найти настолько маленький x, чтобы $\frac{1}{x}$ был больше.

С другой стороны, так как график продолжается вправо, x становится бесконечно большим, а $\frac{1}{x}$ становится бесконечно малым. Возможно, сейчас вы подумали, что если мы игнорируем бесконечную начальную часть графика в начале, то область под графиком должна быть конечной. Однако это не так.

Если мы начертим эту кривую поверх столбикового графика, то получим вот такое изображение, из которого видно, что столбики плотно втиснуты под кривой.



Нам известно, что общая площадь столбиков бесконечна, и если вы посмотрите на область между столбиками и кривой, то увидите, что столбики не заполняют ее всю целиком, область под кривой *больше*. Область под кривой больше, что само по себе уже является бесконечностью, значит, она тоже должна быть бесконечной.

Фактически область под этой кривой измеряется натуральным логарифмом, который записывается как ln. (Это логарифм по основанию e, но мы не будем углубляться в эту тему.) На самом деле это один из способов *определить* функцию натурального логарифма: $\ln b$ — это область под графиком от 1 до b. Данная версия столбикового графика демонстрирует нам, что натуральный логарифм растет (медленно) в направлении бесконечности, как мы утверждали в главе 11.

ОБЛАСТИ ПОД КРИВЫМИ

Метод размещения «столбикового графика» плотно под графиком — это суть определения области под кривой. Еще он известен под названием «интегрирование». Это немного похоже на то, как в предыдущей главе мы разделывали круг на аккуратные многоугольники и треугольники, чтобы определить его площадь. А сейчас мы собираемся порубить график на прямоугольные столбики и оценить площадь, сложив все эти прямоугольники. Чем у́же будут прямоугольники, тем точнее мы сможем оценить площадь.

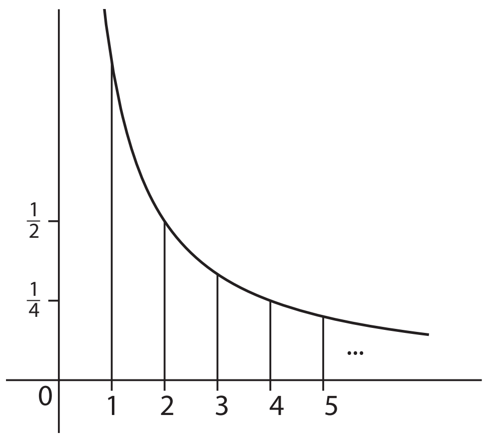
Нахождение площади области под кривой — это еще один мощный мотивирующий фактор, который стоит за пониманием всей темы бесконечно малых объектов. Сначала люди пытались использовать понятие фактическая «бесконечно малая» длина; они хотели выяснить, что значит иметь прямоугольники с «бесконечно малой» шириной. Математики очень беспокоились по этому поводу, и правильно делали: как мы сказали раньше, бесконечно малая длина не имеет никакого математического смысла в отличие от действительных чисел и тем более от бесконечно больших действительных чисел.

Это снова был один из тех моментов, когда два разных человека в двух разных странах одновременно, но с помощью разных методов работали над одним и тем же вопросом. В этот раз это были Лебег и Риман[1], но их исследования не были

1 Анри Леон Лебег — французский математик, профессор Парижского университета (1910), один из основоположников современной теории функций вещественной переменной. Георг Фридрих Бернхард Ри-

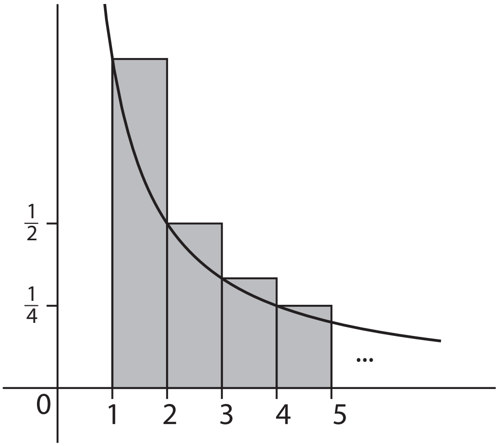
настолько близки друг к другу, как исследования Кантора и Дедкинда, которым удалось сконструировать действительные числа. Риман использовал вертикальные столбики, как в нашем предыдущем примере про $\frac{1}{x}$. А Лебег использовал горизонтальные столбики, что весьма забавно. (Тут я немного упростила, но это упрощение дает нам общее понимание о разнице в их подходах.) Вероятно, метод Лебега был менее интуитивным, однако он был более эффективным. Сейчас я не буду углубляться в него, потому что для этого требуется гораздо больше «специальной подготовки».

Метод Римана заключался в использовании вертикальных столбиков для того, чтобы получить две оценки площади: переоцененную и недооцененную. Для примера возьмем снова $\frac{1}{x}$. И просто разделим график на вертикальные столбики:

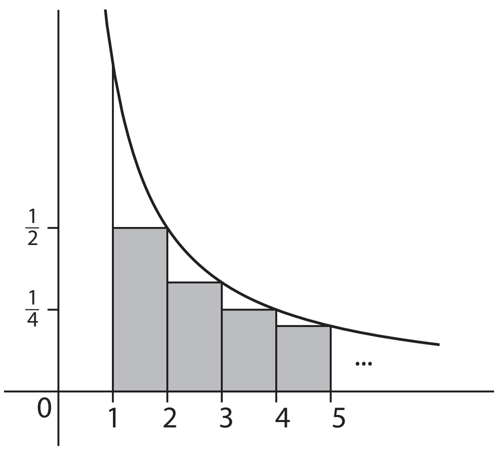


У нас есть два способа создания прямоугольников. Мы можем начертить горизонтальные линии над графиком:

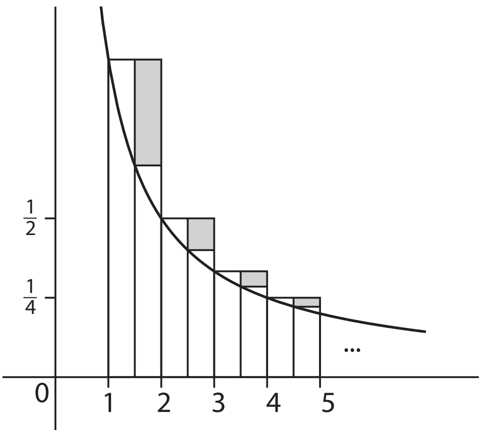
ман — немецкий математик, механик и физик, его исследования относятся к теории функций комплексного переменного, геометрии, математической и теоретической физике, теории дифференциальных уравнений. — *Примеч. ред.*



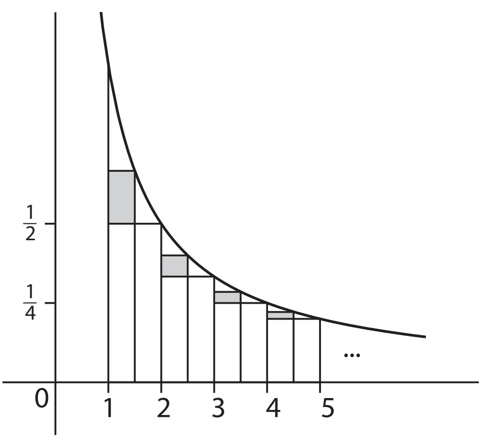
Или под графиком:



Это немного похоже на то, как мы вписывали круг в многоугольник, а затем вписывали многоугольник в круг, втискивая его внутрь. Если мы поместим прямоугольники над графиком, то под ним будет *больше* пространства, и таким образом мы получим переоцененную площадь под кривой. Если мы поместим прямоугольники под графиком, то потеряем некоторое пространство под кривой, а значит, это будет недооцененная площадь. Если мы сделаем столбики у́же, то они будут располагаться ближе к кривой, и обе оценки станут точнее. Например, давайте сделаем столбики шириной 0,5 вместо 1. Теперь переоцененная площадь «уточнится» благодаря затемненным частям:



Если мы сделаем то же самое с недооцененной площадью, то она «уточнится» благодаря следующим затемненным частям:



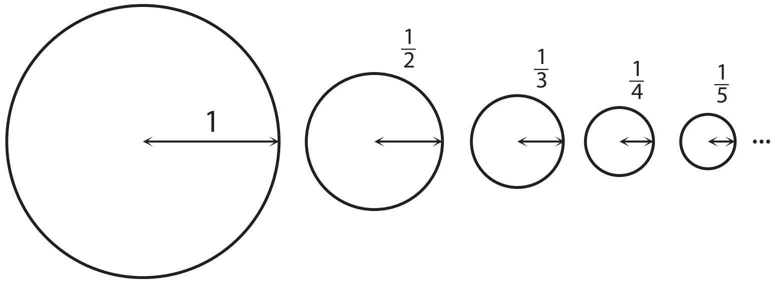
Оригинальный график втиснут между ними. Здесь возникает вопрос: смогут ли переоцененная и недооцененная площади вообще когда-нибудь встретиться? *В действительности* они так никогда и не встретятся, но смогут так близко подойти друг к другу, что расстояние между ними будет считаться ничтожным. Насколько ничтожным? Достаточно ничтожным, чтобы снова одержать победу над умниками. Это похоже на испытание на стрельбу по мишени, которое вы проходите вместе с другом. Вы оба должны бесконечно попадать в одну и ту же мишень, несмотря на ее размер. Если у вас получится, то вы победили. И снова: вам не нужно знать, где находится «яблочко», оно просто должно быть где-то в пределах мишени. Это и есть ответ на вопрос про площадь под кривой.

Если вы проходили вычисление интегралов в школе, то, скорее всего, вам преподносили это как некую хитроумную формулу. Если вас попросят интегрировать какую-нибудь функцию, то вы просто совершите с ней определенные манипуляции и получите ответ. Однако *причина*, по которой эта хитроумная формула работает, заключается именно в таком процессе разделки графика на бесконечно маленькие столбики. Как в случае с бесконечным печеньем, испытание на стрельбу по мишени — это пример того, как понимание сути помогает придать вещам математический смысл.

ПОТРЯСАЮЩАЯ ГОЛОВОЛОМКА ПРО ПЕЧЕНЬЕ

А сейчас мы снова вернемся к последней, самой странной головоломке про бесконечное количество печенья из конечного количества теста. Итак, если выстроить все получившиеся печеньки в один длинный ряд, то он будет тянутся до бесконечности. Как такое возможно?

Мы готовили печенье так: вторая штучка была размером $\frac{1}{2}$ радиуса первой штучки, третья — $\frac{1}{3}$ радиуса первой штучки, следующая — $\frac{1}{4}$ и так далее.



Если мы выстроим их в ряд, то его длина будет составлять два гармонических ряда, то есть то, что уже было бесконечностью, удваивается. А значит, мы без всяких сомнений получаем бесконечность! Но как насчет объема теста? Почему объем теста остается конечным?

Давайте предположим, что у всех печенек круглая и идеально ровная форма. Однажды меня публично раскритиковали за то, что я предположила то же самое о пшеничных лепешках. Меня обвиняли в том, что я беру лепешки из магазина. Для протокола: я пеку лепешки сама, и я прекрасно знаю, что ничто на свете не бывает *идеально* круглым и ровным, но обычно мои лепешки достаточно круглые и ровные для того, чтобы я могла использовать их в математических дискуссиях! В конце концов, некоторая погрешность — это не конец света.

В любом случае объем теста, необходимого для каждой печеньки, будет равен площади круга, умноженной на толщину печеньки. Площадь равна πr^2, а радиус n-й печеньки равен $\frac{1}{n}$. Давайте обозначим толщину как некое постоянное значение t. Это немного странно, что толщина остается постоянной в то время, как печеньки становятся бесконечно маленькими. Однако мы знаем, что в этом случае у нас получается конечный объем теста, а значит, если толщина будет становиться меньше по мере того, как уменьшаются печеньки, то мы будем *абсолютно уверены*, что получим конечный объем теста.

Когда мы делаем несколько нереалистичное предположение, это является ключом к чистой математике. Мы ищем ответ на конкретный вопрос и по ходу рассуждений делаем разные предположения, которые, как нам кажется, не окажут существенного влияния на конечный ответ, просто сделают наши расчеты менее «жизненными». Если бы мы искали ответ на вопрос: «Сколько точно нам потребуется теста?», то предположение, что все печеньки имеют одинаковую толщину, очевидно повлияло бы на конечный ответ. А мы лишь пытаемся ответить на вопрос: «Является количество теста конечным или бесконечным?».

Предположим, что объем n-й печеньки равен πr^2, умноженному на толщину, то есть:

$$\pi \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times t = \frac{\pi t}{n^2},$$

что дает нам следующую последовательность объемов:

$$\frac{\pi t}{2^2}, \frac{\pi t}{3^2}, \frac{\pi t}{4^2}, \frac{\pi t}{5^2}, \frac{\pi t}{6^2}, \ldots$$

Теперь πt даже не меняется. Но остановимся и подумаем о той единственной части, которая меняется, а именно о числах:

$$\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \ldots$$

Это гармонические ряды:

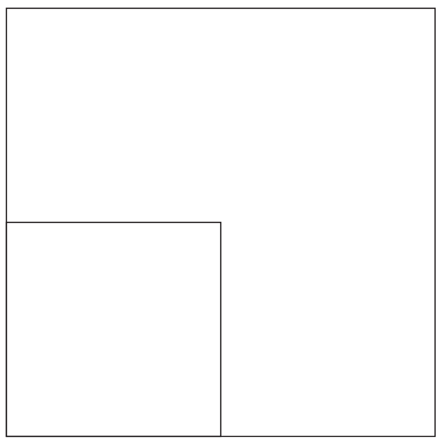
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

но теперь каждый член возведен в квадрат. (То же самое мы получим, если вместо круглых печенек будем печь квадратные.)

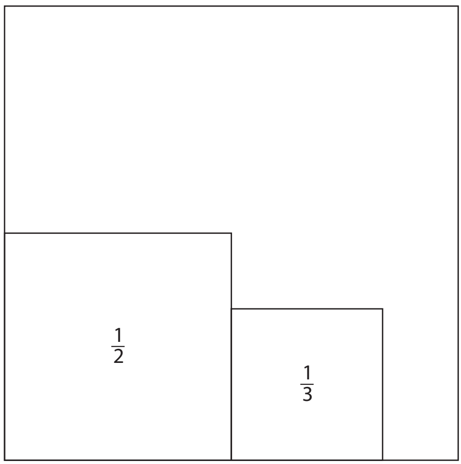
Если мы возводим в квадрат дробь, которая меньше 1, это делает ее еще меньше (потому что это будет дробь дроби), поэтому наши числа становятся меньше *быстрее*, чем обычные числа в гармоническом ряду. Это ключ к пониманию вопроса: будет ли сумма расти, стремясь в направлении бесконечности, или стабилизируется, достигнув определенного предела. Отдельные члены должны становиться меньше, причем довольно быстро. Члены гармонического ряда не делают этого достаточно быстро. А члены, возведенные в квадрат, *делают* это достаточно быстро. Итак, эта сумма конечна. Фактически мы попадаем в «яблочко» на $\frac{\pi^2}{6}-1$.

Это довольно трудно доказать, но можно лишь попробовать убедиться в этом, размещая маленькие квадратики внутри квадрата размером 1 × 1. Если вы используете маленький квадрат с длиной стороны $\frac{1}{n}$, то площадь маленького квадрата будет $\frac{1}{n^2}$. Таким образом, размещение в квадрате размером 1 × 1 квадратов с длиной сторон $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, похоже на нахождение суммы $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$ и сравнение ее с площадью большого квадрата, которая равна 1.

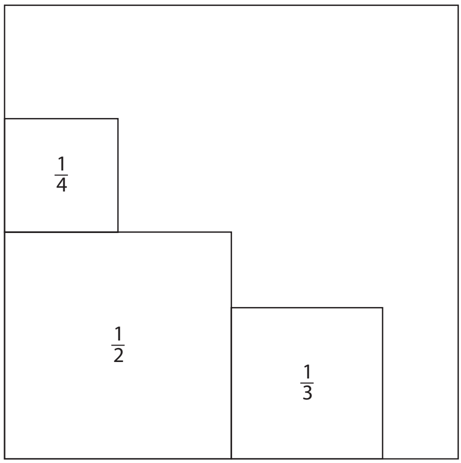
Давайте начнем с того, что поместим квадрат $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ в угол квадрата 1 × 1, например вот так:



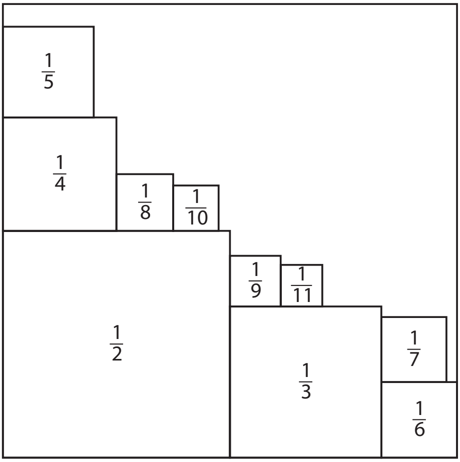
Дальше мы должны разместить квадрат $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$. Мы можем сделать это так:



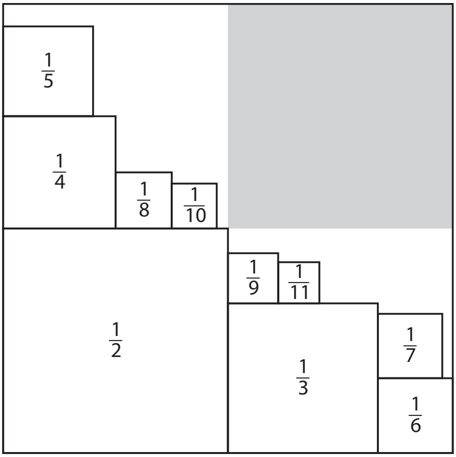
Теперь пришла очередь квадрата $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$. Мы не можем разместить его в правом нижнем углу, так как там недостаточно места (там осталось лишь $\frac{1}{6}$ ширины), однако мы можем поместить его над квадратом $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$. Вот так:



Дальше мы продолжаем в том же духе:

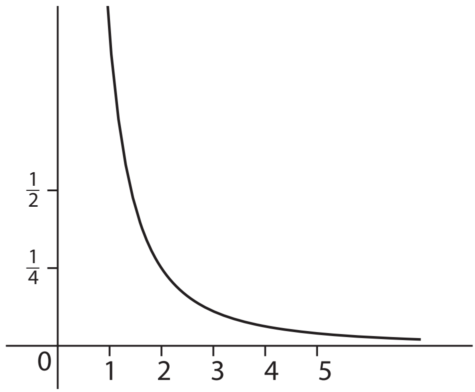


Если вы попробуете сделать это самостоятельно, то обнаружите, что у вас всегда остается куча места для следующего квадрата. Этот факт еще не является доказательством, однако он дает *ощущение*, что место в квадрате никогда не закончится. Может даже показаться, что верхняя правая часть квадрата нам вообще никогда не потребуется.

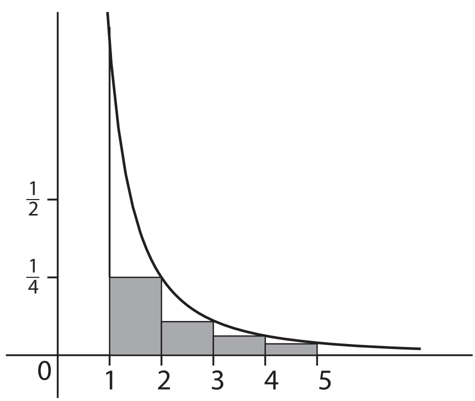


То есть мы сможем разместить все маленькие квадратики в пределах площади $\frac{3}{4}$. Это верно, если вы попробуете посчитать $\frac{\pi^2}{6} - 1$ на калькуляторе, то обнаружите, что получается 0,645, а это меньше $\frac{3}{4}$.

Если вы помните вычисление интегралов, то знаете, что мы можем доказать, что сумма конечна, с помощью графика $\frac{1}{x^2}$, и это не так сложно.



Область под графиком должна быть больше суммы, которую мы хотим вычислить, если мы представим, что разделили эту область на вертикальные столбики.



Итак, если область под графиком конечна, то наша сумма тоже должна быть конечной. Если вы помните, как интегрировать $\frac{1}{x^2}$, то вам будет несложно выяснить, что область под графиком от 1 до b равна $1-\frac{1}{b}$, что будет меньше 2, независимо от того, насколько большим станет b. Значит, она очевидно конечна.

Количество печенья, которое у нас получилось, не совсем похоже на «квадратную» версию гармонических рядов; нужно умножить все на толщину печеньки π раз. И так как раньше оно было конечным, оно должно остаться конечным и после умножения. (Только если у нас не будет бесконечно толстых печенек. А их, к сожалению, у нас нет. А может, и к счастью! Иначе я была бы бесконечно толстой.) Существует еще один вариант последнего этапа: мы можем разместить каждую из наших круглых печенек внутри соответствующего ей квадрата из рисунка выше, и у нас останется свободное место.

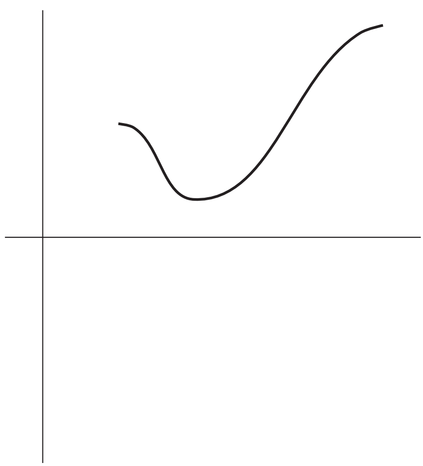
Итак, общий *объем* теста конечен, несмотря на то что мы можем выстроить все получившееся из него печенье в один ряд и он будет тянуться бесконечно.

НЕВООБРАЗИМЫЕ ОБЪЕМЫ

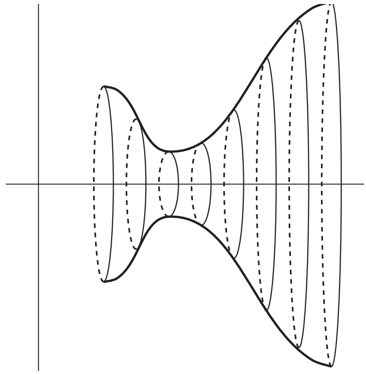
Странная ситуация с печеньем напоминает другой очень странный, но немного более математический пример. Мы можем взять бесконечную площадь, начать вращать ее в воздухе и таким образом создать из нее конечный объем. Идея вращения фигур в воздухе для создания объема немного похожа на гончарный круг. Гончарный круг постоянно вращается, поэтому независимо от того, какую форму вы придаете глине своими руками, в итоге все равно получится округлый горшок. Меня всегда восхищал этот процесс, но у меня еще не было возможности попробовать сделать это самой. Это похоже на магию бумажных снежинок: нужно просто несколько раз свернуть лист бумаги и сделать надрезы, которые превратятся в 8 или 16 симметричных отверстий. Гончарный круг — это своего рода приглаженная версия этого процесса.

Представьте себе большой обруч, с помощью которого делают гигантские мыльные пузыри. Если вы сделаете таким обручем полный круг в воздухе, то сможете создать форму пончика (того, который колечком), по-научному такая форма называется *тор*. Можно сделать другие формы: например, если вы будете вращать обруч по большому кругу, то у вас получится объем, имеющий в одном поперечном сечении круг, а в другом — форму обруча. Возможно, вы видели китайские игрушки из свернутой бумаги. Вы разворачиваете их веером, завершая таким образом круг, и у вас получается маленькая фигурка, которая почти становится «твердой».

Мы можем сделать нечто похожее на примере вот такой формы:

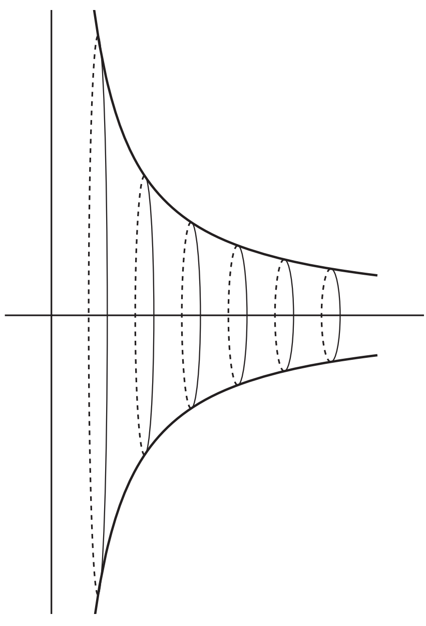


Мы будем вращать ее в воздухе вокруг оси x, чтобы создать нечто похожее на вазу:

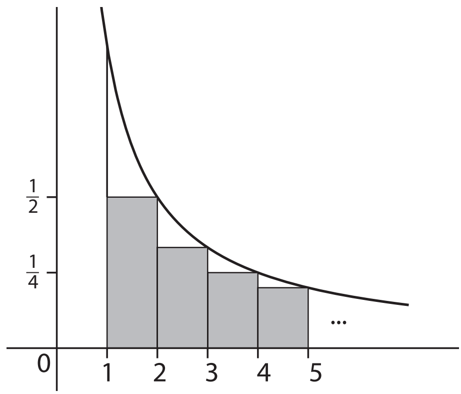


Такие формы называются «формами оборота», потому что они создаются посредством одного полного оборота вокруг своей оси.

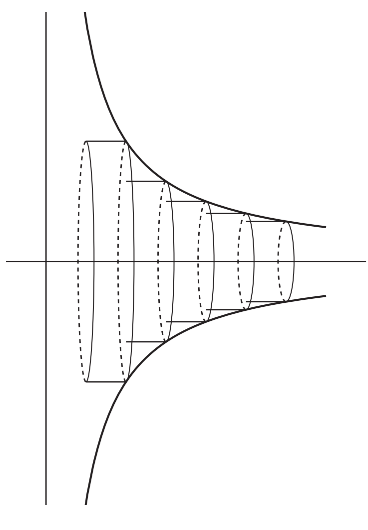
А теперь давайте построим график $\frac{1}{x}$ и будем вращать его вокруг оси x, так мы получим следующее:



Получилось нечто более-менее похожее на печенье, которое мы пекли в предыдущем примере. Радиус каждого n равен $\frac{1}{n}$, значит, объем, который мы создали вращением, практически такой же (с поправкой на некоторую изломанность), что и объем наших печенек. На самом деле, если мы хотим создать форму, еще более похожую на наше печенье, мы можем вращать вот такие прямоугольные столбики:



Чтобы получилось следующее:



И тут начинается самое странное. *Площадь* прямоугольных столбиков бесконечна. Но ведь объем наших печенек конечен. Высота бесконечной кучи печенья бесконечна. Поперечное сечение кучи печенья бесконечно! (Это площадь прямоугольных столбиков, умноженная на 2.)

Надеюсь, что сейчас вы чувствуете себя абсолютно дезориентированными в пространстве, как будто вы плывете на корабле, болтающемся на волнах вверх и вниз, где-нибудь посреди громадного сумасшедшего океана. Прекрасно! Это и есть радость бесконечности! Для меня самая настоящая радость — понимать скрывающуюся за всем этим логику и знать, как со всем этим обращаться с учетом математической строгости. Потому что только тогда мы сможем оседлать волну, забыть о морской болезни и почувствовать приятное оживление от путешествия.

Недавно я ездила в Сидней на конференцию, где за день до ее начала мне удалось совершить экскурсию на корабле, с которого мы наблюдали за китами. Море было неспокойным, и я изо всех сил старалась качаться на волнах вверх и вниз вместе с нашим кораблем, а не пытаться сопротивляться качке. Когда мы вышли из порта, почти все пассажиры почувствовали тошноту и захотели прилечь, лишь немногие из нас смогли в полной мере насладиться невероятной мощью, величественностью и элегантностью горбатых китов. С математикой все точно так же. Да, это совсем другой тип мощи, величественности и элегантности. Но все-таки жаль, что многих по пути начинает тошнить.

17

ГДЕ НАХОДИТСЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ?

Моя любимая история про Винни-Пуха та, где Винни и Пятачок изучают следы вокруг дерева, выслеживая Слонопотама. Вернувшись туда, откуда начали, они так и не догадались, что это их собственные следы на снегу. Они решили, что к первому «Слонопотаму» (который на самом деле является Винни-Пухом) присоединились еще двое. На самом деле два набора следов принадлежали Винни-Пуху (который уже два раза обошел вокруг дерева), а третий — Пятачку, присоединившемуся к выслеживанию Слонопотама. После того как они еще пару раз обошли дерево, до них наконец дошло, что происходит. После чего, смущенные, они отправились домой.

В начале этой книги я уже рассказывала о том, что выросла в доме с камином и печной трубой посередине. У нас не было центрального отопления, и предполагалось, что печная труба будет отапливать центр дома, поэтому все комнаты прилегали к ней. Вместо того чтобы иметь вход снаружи, все комнаты переходили одна в другую и располагались по кругу.

В детстве мы с сестрой могли играть в догонялки, нарезая круги вокруг камина через кухню, столовую, гостиную и снова через кухню, столовую, гостиную. И конечно, одна из нас вдруг меняла направление движения, после чего мы обе визжали и бежали уже в противоположном направлении: через кухню, гостиную, столовую и снова через кухню, гостиную, столовую. Самое замечательное в домах с подобными круговыми петлями — это то, что вы живете будто в *бесконечном* доме. То есть вы можете идти по нему бесконечно. Да, вы будете постоянно возвращаться в одно и то же место, но это все равно не то же самое, что идти из точки A в точку B, а потом снова в точку A. Если бы вы шли вокруг печной трубы как Тесей по лабиринту, разматывая клубок, то в итоге вы дошли бы по кругу до того места, откуда вы начали, но это все равно не то же самое, что просто идти из точки A в точку B, а потом снова в точку A, потому что нить намотает петли вокруг печной трубы. Вы совершите настоящее путешествие!

Математики изучают этот феномен в форме явления под названием «накрывающее пространство». Вместо того чтобы рисовать карту здания, где все будет обозначено, можно нарисовать план всех маршрутов, которым вы можете следовать, разматывая нить, как будто вы находитесь в лабиринте. Представьте, что один конец нити тянется ко входу, а другой — к вам, да так, что, когда вы находитесь в лабиринте, все сообщается. Если вы восстановите в памяти свой маршрут, то ваша нить будет следовать за вами. Но если вы выберете иную дорогу к выходу, то нить может намотаться и застрять где-нибудь в туннеле. Если я снова вернусь в дом моего детства и приделаю нить ко входной двери, а затем побегу вокруг камина, то мне понадобится бесконечно длинный клубок (и спасатель, который меня остановит и запрет в комнате). В математической интерпретации накрывающих пространств такой бег фактически является бесконечно длинным маршрутом, а не петлями, которые накладываются друг на друга. Как Пятачок и Винни-Пух, мы не будем понимать, что каждый раз возвращаемся к тому месту, откуда начали.

Один из моих честолюбивых замыслов — снова жить в доме с настоящей круговой петлей. В разговорах с математиками я называю такой дом «домом с гомотопией», потому что гомотопия — это математическая концепция, которая измеряет петли в пространстве. (Мы уже упоминали о ней в главе 13.)

Если это петля, которую вы можете просто тянуть, как Тесей свою нить, и она не застрянет, например, намотавшись вокруг печной трубы, то она не считается настоящей петлей. Петля считается настоящей только тогда, когда намотается на что-нибудь. Тут не подойдет тот печальный и бесцельный круг по кухне — самая длинная прогулка, которую я могла совершить после операции на колене.

Особенно сильно меня интригуют дома, в которых больше одного лестничного пролета. Помимо того что они огромны, мне нравится, что внутри них есть *вертикальная* петля. Вы можете подняться наверх по одному пролету, спуститься вниз — по другому, затем внизу пройти от второго пролета к первому и так далее. Вы не сможете вытянуть за собой нить.

Там, где я сейчас живу, нет настоящих петель. Никакой гомотопии!

БЕСКОНЕЧНЫЕ МАРШРУТЫ

Хотя я больше и не играю со своей сестрой в догонялки по кругу, я все равно люблю здания с петлями, ведь я могу идти по ним бесконечно. Математики, да и все остальные тоже, любят гулять, потому что это помогает им думать. В размеренном движении есть что-то, помогающее мне сфокусироваться на своих мыслях. Иногда я думаю, что прогулка просто держит логическую часть моего мозга занятой, а мечтательная математическая часть оказывается свободной от влияния своей второй половины, постоянно надоедающей с такими вещами, как: «Не забудь купить яйца!»

Но проблема бесконечно длинных прогулок в том, что они обычно заканчиваются бесконечно далеко от вашего дома. Если я выхожу на улицу, чтобы погулять и одновременно подумать о математике, то велика вероятность, что я потеряюсь или меня собьет машина.

Дом с петлей решает подобные проблемы, потому что вы можете гулять по кругу «вечно». При этом вы не чувствуете, что ваше движение бессмысленно, как круги по кухне, ведь вы ходите вокруг чего-то массивного, а не просто по пустому пространству. Как я уже говорила, кафедра математики в Университете Ниццы расположена по кругу, в нем есть круговой коридор, а внутри располагается прекрасный круглый внутренний дворик. В коридоре есть окна от пола до потолка, выходящие внутрь. Все кабинеты располагаются по внешнему кругу, и когда вы идете по круговому коридору, то можете любоваться этим красивым внутренним двориком. Я с радостью признаюсь вам, что была далеко не единственной, кто иногда ходил по нему кругами просто так, размышляя о чем-нибудь своем. В такой бесконечности есть что-то освобождающее.

Но проблема этого факультета в том, что он настолько симметричен, что ничего невозможно запомнить. Там было четыре одинаково расположенных лестничных пролета, и я никогда не могла угадать, в какую сторону мне лучше пойти — налево или направо, чтобы попасть туда, куда мне нужно. Самым забавным было то, сколько раз я в итоге проходила по кругу, потому что случайно пропускала нужное место.

ЛИФТ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ ПАТЕРНОСТЕР

Еще одна поистине бесконечная конструкция — это лифт непрерывного действия, или патерностер. В Башне искусств Университета Шеффилда есть один такой лифт. Это совершенно нормальный лифт, за исключением того, что он состоит из круговой петли из капсул, каждая из которых может перевозить двух человек (не обязательно именно двух, но в Шеффилде — двух). Одна капсула постоянно идет вверх, а другая — вниз, и таким образом в самом верху или в самом низу образуется петля. У патерностера нет дверей, и он никогда не останавливается. Вы должны просто запрыгнуть в капсулу, когда она проходит мимо вас, и выпрыгнуть, когда она сравняется с нужным вам входом. На самом деле лифт движется довольно медленно, но первые несколько раз мне все равно было очень страшно и мой пульс учащался, когда нужно было зайти или выйти. Удивительно, что он до сих пор не подпадает под действие нормативов по охране труда.

Теоретически залезать на него и под него запрещено, но, увидев такой лифт впервые, каждый думает именно об этом, и я догадываюсь, что в университете есть люди, которые пробовали сделать это.

Этот лифт называется патерностер, потому что он напоминает молитвенные четки, предназначенные для того, чтобы следить, сколько раз вы произнесли определенную молитву. В них могут быть, например, десять маленьких бусин для «Аве, Мария», потом одна бусина крупнее, означающая, что пришло время для «Отче наш», затем снова десять «Аве, Мария». Со слова *Paternoster* начинается молитва «Отче наш» на латыни. Бусины нужны, чтобы физически отслеживать количество повторений и освободить мозг для размышлений.

Мне кажется, что лифт-патерностер тоже на это способен. Мне очень хотелось бы, чтобы в каждом здании вместо обычного лифта был патерностер. Тогда все здание будет казаться объединенным в одну бесконечную петлю, а не состоящим из отдельных этажей с конечным пространством. Это значит, что мой мозг не следит за перемещением по этажам, и непрерывное предсказуемое движение патерностера освобождает его для мыслительной деятельности, чего не происходит, когда я жду обычный непредсказуемый лифт. Звучит несколько патетично, но, когда я размышляю о математике, именно такого рода вещи помогают мне достичь гораздо большего прогресса.

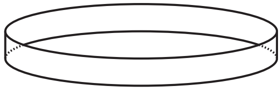
Кроме того, лифт-патерностер — это удивительная вертикальная версия движения по кругу (хотя вы не сможете играть на нем в догонялки), а еще он вызывает ощущение бесконечно большого здания. Если вы прикрепите вашу нить к первому этажу, затем зайдете в патерностер и поедете в нем по кругу, то вам снова понадобится клубок бесконечной длины.

ЕЩЕ КРУГИ

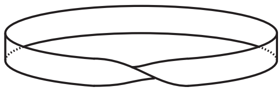
Мы уже говорили, что в мире нет ничего бесконечного, но теперь мы видим, что круги волшебным образом становятся бесконечными, если вы используете их как маршрут. Круговые (или овальные) гоночные трассы — умная вещь, потому что на них вы можете устраивать гонки любой протяженности. Маленький мальчик по имени Якоб недавно написал мне письмо, в котором сообщил, что математика — это его любимый предмет и еще что он может пройти по турнику-рукоходу 84 метра. Интересно, у него есть такой длинный турник рукоход, или в конце он поворачивается и идет обратно, или это круговой турник-рукоход и он может ходить по нему столько, сколько пожелает?

Кольцевая ветка лондонского метро раньше была гораздо увлекательнее, потому что можно было вечно сидеть в вагоне и ездить по кругу, что, конечно, гораздо больше напоминает бесконечное путешествие, чем просто ехать от начальной станции до конечной по обычной прямой ветке. Некоторые люди были просто в восторге от непрерывного движения по кольцевой автомагистрали M25 вокруг Лондона (лично я тоже всегда радуюсь, когда мне удается проделать хотя бы часть пути по Лондону, не застряв в пробке). Думаю, что свои поклонники есть и у других кольцевых маршрутов вокруг других городов: например, кольцевая автодорога Периферик вокруг Парижа или столичная кольцевая дорога вокруг Вашингтона.

Есть еще более интересная версия круга — лента Мёбиуса. Ее можно сделать из полоски бумаги. Один конец вы приклеиваете к другому, но не обычным способом:



а перекрутив полоску перед тем, как скрепить концы вместе.



Самое интригующее в ленте Мёбиуса — что и с точки зрения физики, и с точки зрения математики вы скрепили ее переднюю поверхность с задней, а заднюю с передней, значит, теперь у нее есть только одна сторона, то есть перед и зад теперь одно и то же.

Существует много интересных вещей, которые можно сделать с этой лентой. Самое простое — взять ее и пройтись по ней пальцами по кругу. Вам будет непросто следить за тем, в какой точке ленты вы сейчас находитесь — сверху или снизу. Запутаться гораздо легче, чем если бы вы просто шли пальцами по кругу, потому что между верхом и низом нет никакой разницы. А еще вы можете пройти пальцами по краю петли Мёбиуса. Край — это отдельный круг, кажется, что он закольцовывается назад и снова «идет по кругу», хотя он проходит по кругу только один раз. Это похоже на восьмерку, а восьмерка — это еще одна очень подходящая форма для вечного хождения по кругу. Как верно, что эти два символа становятся началом и концом нашего квеста к бесконечности:

$$0 \quad \infty$$

Хотя теперь мы знаем, что конца не существует, потому что не только бесконечность способна продолжаться вечно, но и иерархия бесконечностей, состоящая из все больших и больших бесконечностей, тоже продолжается вечно, даже когда мы спокойно сидим внутри нашего большого, но конечного мира.

Вероятно, мы не должны удивляться тому, что бесконечное иногда может разместиться внутри конечного. Кажется, что там, где замешана бесконечность, нет почти ничего невозможного. Мир математики способен уместиться в нашем мозге, однако он больше всей Вселенной.

Бесконечность дает свободу, но иногда она становится *слишком* освобождающей. Я способна мыслить гораздо эффективнее и креативнее, если в моем распоряжении будет бесконечное количество времени. Вероятность того, что я докажу теорему, повышается, если у меня нет никаких планов до конца дня, даже если это доказательство занимает всего два часа. Если у меня будет всего два часа на доказательство теоремы, скорее всего, я не смогу ее доказать.

И еще. Мы уже говорили, что если бы мы были бессмертны, то смогли бы прокрастинировать вечно. Зная себя, вероятно, я и в самом деле прокрастинировала вечно. Имея в распоряжении бесконечное количество измерений, мы получаем бесконечное количество связанных с ними нюансов. Мы продолжаем мечтать о них, даже если порой не можем объяснить свои мечты.

Я действительно верю, что не всегда нужно все объяснять. Главное, объяснить столько, сколько мы можем объяснить. А еще важнее — знать, где проходит граница между объяснимым и необъяснимым. В моем воображении сфера объяснимого находится в центре вселенной идей, и цель математики — идти к этой сфере настолько быстро, насколько это возможно. Эта сфера постоянно расширяется, и, соответственно, ее поверхность тоже постоянно растет. Поверхность — это место, где встречаются объяснимое и необъяснимое.

Самое прекрасное в мире — это вещи, находящиеся за пределами логики. Мы можем долго пытаться их объяснить, но в итоге они просто ускользнут от нас. Я могу долго объяснять, почему определенный музыкальный отрывок вызывает у меня слезы, но в какой-то момент происходит что-то, что мои аналитические способности не в силах объяснить. То же самое с морем: почему вид моря приводит меня в экстаз? А почему любовь так восхитительна? А почему бесконечность так поражает нас? Существуют вещи, которые мы не можем до конца объяснить, они находятся далеко от логического центра вселенной идей. Что касается меня, я думаю, вся красота сосредоточена именно там — на границе между объяснимым и необъяснимым. Перемещая все больше вещей в мир логики, мы увеличиваем сферу логики, а значит, ее поверхность тоже растет. Зона соприкосновения объяснимого и необъяснимого растет, и мы получаем доступ к большему количеству прекрасных вещей. Именно об этом я хотела рассказать.

В жизни и в математике часто возникает спор между красотой и практичностью, между мечтами и реальностью, между объяснимым и необъяснимым. Бесконечность — это красивая мечта внутри другой красивой мечты, которая называется математикой.

БЛАГОДАРНОСТИ

В первую очередь, я хотела бы выразить признательность моей недавней студентке Лизе Куивинен (Lisa Kuivinen), которая показала мне самое интересное применение парадокса Зенона — в манга. Я хотела бы поблагодарить всех моих студентов в Чикагском институте искусства и в Университетах Чикаго, Шеффилда и Кембриджа, а также учеников начальной школы на Парк-стрит в Кембридже, начальной школы Хиллсборо, начальной школы Шеффилда и школы Фрэнсиса Паркера в Чикаго. Я верю в то, что обучение — это двусторонний процесс, и я многому научилась от своих студентов за все эти годы.

Ничего этого не случилось бы без поддержки и вдохновения моих родителей, сестры и моих маленьких племянников — Лиама (Liam) и Джека (Jack).

Также благодарю моих друзей, чьи открытия и интриги всегда подстрекали меня к тому, чтобы думать о вещах по-другому и более ясно. Особая благодарность тем, на чьи мысли я ссылалась в этой книге: Амайе Габантксо (Amaia Gabantxo), Джейсону Грунебауму (Jason Grunebaum), Кристоферу Дэниелсону (Christopher Danielson), Ричарду Вуду (Richard Wood), Тому Кроуфорду (Tom Crawford,), Салли Рэндал (Sally Randall), Сэму Дюплессису (Sam Duplessis), Кэтрин Финчер (Katherine Fincher), Элис Шей (Alice Sheu), Джеральду Финли (Gerald Finley). Выражаю благодарность Кортни Нзерибе (Courtney Nzeribe), Тимоти Мэдену (Timothy Madden) и Роану Чжоу Ли

(Rohan Zhou-Lee) за помощь с трансатлантическим культурным контекстом.

Глава 12 посвящается Грегори Пиблзу (Gregory Peebles) и его непреходящей любви к измерениям.

Я хотела бы поблагодарить моего учителя английского языка Марис Ларкин (Marise Larkin) за то, что она научила меня писать эссе так, что их можно легко объединять в книги; моего агента Диану Бэнкс (Diane Banks); Ника Ширина (Nick Sheerin) и Эндрю Франклина (Andrew Franklin) из «Профайл»; Тиджея Келлехера (TJ Kelleher) и Лару Хаймерт (Lara Heimert) из «Бэйсик Букс»; Сару Габриэль (Sarah Gabriel) за то, что продолжает быть моим маяком в тумане мозга; Рубена Томаса (Reuben Thomas) за помощь с Ubuntu и \LaTeX; Оливера Камачо (Oliver Camacho) за то, что он всегда рядом.

И наконец, спасибо Майклу (Michael) из «Аканто» за еду, напитки и разговоры о Зеноне.