А. Я. Дороговцев

Математический анализ

Краткий курс в современном изложении

Оглавление

Предисловие

Настоящая книга представляет собой переиздание с некоторыми изменениями и дополнениями книги автора, изданной в 1985 г. Киевским издательством «Выща школа» под заглавием *Математический анализ. Справочное пособие.* Изменения состоят в следующем. Усовершенствовано изложение ряда разделов курса, добавлены новые примеры и задачи, исправлены некоторые неточности в тексте и опечатки. Автор благодарит преподавателей и студентов, обративших его внимание на погрешности. Педагогические намерения автора, методические установки и особенности изложения материала представлены в нижеследующем предисловии к первому изданию. Содержание книги полно представлено в детальном оглавлении.

Заметим также, что изданная в 1987 году книга автора *Математический анализ. Сборник задач* (Киев. Выща школа) содержит задачи для практических занятий по курсу анализа, по содержанию и расположению материала соответствующая настоящей книге.

Из предисловия к первому изданию

Книга содержит краткое и вместе с тем достаточно полное по охвату материала изложение современного курса математического анализа. Она рассчитана на студентов университетов и технических вузов и предназначена для первоначального изучения курса. Поэтому главное внимание сосредоточено на разъяснении основных понятий, идей и фактов, а также примеров их использования.

При отборе материала учтены современные тенденции развития математики и её приложений, модернизировано изложение ряда разделов, в том числе тем, посвящённым функциям многих переменных, кратным интегралам, интегралам по многообразиям и др.

Автор использовал многолетний опыт чтения лекций по курсу математического анализа на механико-математическом факультете Киевского университета. В книге меньше, чем обычно, уделено внимания материалу технического или второстепенного для понимания основных идей характера, а также вопросам чисто логического обоснования. По педагогическим соображениям автор не стремился доказывать теоремы при наиболее общих условиях, выбирая в каждом случае предположения, которые хорошо выявляют идею теоремы и в определённом смысле типичны.

Одной из целей автора было достижение единого уровня изложения, в том числе единого разумного уровня строгости изложения, уровня детализации доказательств, формализации и т. п. Работа над математическим текстом должна побуждать к самостоятельному продумыванию материала, вызывать посильное участие читателя в получении результатов. Поэтому определённая часть работы по усвоению материала постоянно оставляется читателю, хотя все принципиальные моменты, в частности доказательства, детально изложены. Этим же частично объясняется лаконичность изложения, в частности, отсутствие многочисленных оговорок, которые часто не соответствуют индивидуальным представлениям новичков и только уводят в сторону, создавая дополнительные помехи усвоению.

Изучение курса математического анализа, как и любого математического предмета, невозможно без систематического самостоятельного решения задач. Именно процесс активного продумывания материала при попытках решения задач помогает выработать правильные интуитивные представления о глубоких и абстрактных понятиях анализа, для понимания которых недостаточно обычных внематематических представлений. Поэтому настоящая книга представляет собой и задачник. Всего книга содержит около 1500 примеров и упражнений. Часть из них детально разобраны в тексте, другие предназначены для контроля усвоения материала или содержат предупреждающие от неверного представления примеры. Ряд других включают разъясняющие или дополнительные факты. Расположение задач таково, что подавляющая их часть вполне посильна для самостоятельного решения при условии усвоения предшествующего материала. Кроме того, имеется ряд задач олимпиадного характера, они отмечены звёздочкой. Материал книги разбит на четыре цикла, которые соответствуют четырём семестрам при полном двухгодичном чтении лекций. Каждый такой цикл заканчивается набором дополнительных задач, для решения которых, как правило, используется весь предшествующий материал. Это задачи семестрового экзамена, задачи олимпиад, которые могут быть использованы в работе математических кружков и для курсовых работ. Большинство этих задач более трудны для решения нежели задачи из текста глав.

В отношении методики изложения ряда разделов автор следовал в первую очередь известным курсам:

Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. В 2-х т. М

ква. Высш. шк., 1970.

Рудин У. Основы математического анализа. Москва. Мир. 1966.

Tutschke W. Grunlagen der reelen Analysis. Berlin. VEB Deutscher der Wissenschaften. 1972. Vol. 1 — 2.

Blatter C. Analysis. Berlin. N.-Y. Heidelberg. Springer Verlag. 1974. Vol. 1 — 3.

Настоящее пособие является весьма кратким. Однако, опыт работы показывает, что студенты, активно усвоившие курс в предлагаемом объёме, успешно владеют основными идеями и методами математического анализа и могут без особого труда читать современные абстрактные курсы. Этого вполне достаточно для продолжения математического образования и дальнейшей самостоятельной работы.

Автор.

Глава 1

Введение

1.1 Логические знаки

1.1.1 Вступление

Современный математический текст состоит из математических формул и собственно текста, написанного, например, на русском языке. При этом ряд слов и словосочетаний, которые выражают наиболее важные и часто используемые в математических рассуждениях отношения между объектами, получили специальные обозначения и называются *логическими знаками*. Далее используются следующие общеупотребительные логические знаки:

$\Longrightarrow$	— «влечёт за собой», «следует»;
$\Longleftrightarrow$	— «тогда и только тогда», «равносильно», «если и только если»;
$\forall$	— «для всех», «для каждого»;
$\exists$	— «существует»;
$\exists\,!$	— «существует только один»;
$:=$	— «равно по определению».

Замечание. Знак $\forall$ представляет собой перевёрнутую первую букву английского слова All – *все*. Знак $\exists$ представляет собой перевёрнутую первую букву английского слова Exist – *существует*. Знаки $\forall$ и $\exists$ называются также *кванторами общности и существования* соответственно.

1.1.2 Примеры использования логических знаков

Приведём примеры утверждений о свойствах *натуральных* чисел и их записей с помощью логических знаков. Проверить справедливость следующих утверждений и равносильность записей.

1a. Из неравенства $m < n$ следует неравенство $m^2 < n^2$.

1b. $m < n \implies m^2 < n^2$.

2a. Неравенство $m < n$ равносильно неравенству $m^2 < n^2$.

2b. $m < n \iff m^2 < n^2$.

3a. Число $\frac{m}{n}$ целое тогда и только тогда, когда число $\frac{m^2}{n^2}$ целое.

3b. $\frac{m}{n}$ целое $\iff$ $\frac{m^2}{n^2}$ целое.

4a. Для каждого n число $n^2 - 1$ неотрицательно.

4b. $\forall n: \quad n^2 - 1 \geq 0$.

5a. Существует число n такое, что $|n - 3| = 1$.

5b. $\exists n: \quad |n - 3| = 1$.

6a. Существует точно одно число n такое, что $3n = 2n + 1$.

6b. $\exists ! n: \quad 3n = 2n + 1$.

7a. Для любого n число $n(n+1)$ чётно, то есть представимо в виде $n(n+1) = 2m$ с натуральным числом m.

7b. $\forall n \;\; \exists m: \quad n(n+1) = 2m$.

Замечание. Двоеточие после знака $\forall n$ следует читать как «выполнено» или «справедливо». Двоеточие после знака $\exists n$ следует читать как «такое, что».

Упражнение 1. Проверить следующие утверждения.

1. $\forall n: \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $\forall n > 9: \quad n^2 - 9n - 1 > 0$. 3. $\forall n \;\; \exists m: \quad n(n+1)(n+2) = 6m$.

4. $\forall n \;\; \forall k \;\; \exists m: \quad n(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k-1) = m \cdot k!$,
здесь $k! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

1.2 Элементы теории множеств

1.2.1 О понятии множества

Понятие *множества* является одним из важнейших исходных и неопределяемых понятий современной математики. Можно говорить о множестве N всех натуральных чисел, о множестве Q всех рациональных чисел, о множестве всех изданных к настоящему времени книг и т. п. Создатель теории множеств *Г. Кантор* использовал следующее «определение»:

множество или совокупность — это собрание определённых и различных объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое в качестве целого.

Как синонимы слова «множество» часто используются слова *семейство, совокупность, класс.* Составляющие множество объекты называются *элементами* или *точками* этого множества. Множество будем считать определённым, если о каждом рассматриваемом объекте можно сказать, что он либо принадлежит, либо не принадлежит множеству.

Пусть A – множество. Тот факт, что элемент x входит в множество A, или что элемент x принадлежит множеству A, обозначается одним из символов $x \in A$, $A \ni x$. Тот факт, что элемент x не входит в множество A, обозначается одним из символов $x \notin A$, $x \overline{\in} A$.

Далее используются следующие способы задания множества.

(i) *Задание множества с помощью перечисления или указания его элементов.* Например, множество A состоит из элементов a, b, $c, \ldots, k$. При этом используется следующее обозначение $A = \{a, b, c, \ldots, k\}$. Для множества всех натуральных чисел используется обозначение $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, а для множества всех целых чисел — обозначение $Z = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

(ii) *Задание множества указанием свойства его элементов.* В каждой математической задаче обычно рассматриваются элементы некоторого вполне определённого множества X, которое называется *основным.* Нужные множества при этом выделяют с помощью любого свойства P, *удовлетворяющего специальному условию:* для каждого элемента x из X либо свойство P выполнено (в этом случае будем говорить, что элемент x обладает свойством P, и писать $P(x)$), либо свойство P для элемента x не выполнено (элемент x не обладает свойством P). С помощью каждого такого свойства выделяется множество всех тех элементов из X, которые свойством P обладают. Это множество обозначается $\{x \in X \mid P(x)\} = \{x \mid P(x)\}$.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$.

1.2.2 Примеры

Справедливы утверждения.

1. $1 \in N$, $-1 \notin N$, $-1 \in Z$, $\dfrac{1}{2} \notin N$. 2. $\forall n \in N: \ \dfrac{n(n+1)}{2} \in N$.

3. $N = \{x \in Z \mid x > 0\}$. Здесь свойство P означает «быть положительным», это свойство специальному условию удовлетворяет: каждое целое число либо положительно, либо неположительно.

4. Пусть P означает «быть чётным». Тогда $\{2, 4, 6, \ldots, 2k, \ldots\} = \{x \in \boldsymbol{N} \mid P(x)\}$.

5. $\boldsymbol{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} \;\middle|\; n \in \boldsymbol{N},\quad m \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

1.2.3 Упражнения

Следующие простые упражнения рекомендуются для обязательного решения.

Упражнение 2. Перечислить элементы множества:

a) $\{n \in \boldsymbol{N} \mid (n-3)^2 < 7^2\}$;
b) $\{n \in \boldsymbol{Z} \mid (n+3)^2 < 7^2\}$;
c) $\{n \in \boldsymbol{N} \mid n^3 > 4n\}$;
d) $\{n \in \boldsymbol{Z} \mid n^3 > 10n^2\}$;
e) $\left\{n \in \boldsymbol{N} \;\middle|\; \dfrac{n^2+3n-12}{n} \in \boldsymbol{N}\right\}$;
f) $\left\{n \in \boldsymbol{N} \;\middle|\; \dfrac{n+9}{n+1} \in \boldsymbol{N}\right\}$;
g) $\{x \in \boldsymbol{Z} \mid \exists\, y \in \boldsymbol{Z}:\ \ |x| + |y| = 2\}$.

Упражнение 3. Верны ли утверждения:
a) $\forall a \in \boldsymbol{Z}\ \exists x \in \boldsymbol{N}:\ x^2 + ax = 0$; $b)\ \forall a \in \boldsymbol{Z}\ \exists x \in \boldsymbol{Z}:\ x^2 + ax = 0$?

1.2.4 Действия над множествами

Определение 1. *Множество A называется **подмножеством** множества B, если $\forall x \in A:\ \ x \in B$.*

<u>Обозначение:</u> $A \subset B$ или $B \supset A$.

По определению для любого множества A справедливо следующее включение $\varnothing \subset A$.

Примеры. Проверить утверждения.

1. $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.
2. Для множества $\{a, b, c\}$ всеми его подмножествами являются

$$\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},\ \{a,b,c\}.$$

Определение 2. *Множества A и B **равны**, если*

$$A \subset B \quad \text{и} \quad B \subset A.$$

<u>Обозначение:</u> $A = B$.

Таким образом, $A = B \iff A \subset B$ и $B \subset A$.

Пример. 3. $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, c, a\}$.

Определение 3. ***Объединением*** *множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат по крайней мере одному из множеств A, B.*

Обозначение: $C = A \cup B$.

Таким образом, $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

***Определение 4. Пересечением** двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат каждому из множеств A и B.*

Обозначение: $C = A \cap B$.

Таким образом, $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$.

***Определение 5. Разностью** множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.*

Обозначение: $C = A \setminus B$.

Таким образом, $A \setminus B = \{x \in A$ и $x \notin B\}$.

Пусть X – основное множество и $A \subset X$.

***Определение 6. Дополнением** к множеству A называется множество $\overline{A} := X \setminus A$.*

Таким образом, $\overline{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}$.

Определения объединения и пересечения двух множеств обобщаются на случай любого семейства множеств. Пусть T — некоторое множество индексов и для каждого $t \in T$ задано множество A_t.

***Определение 7. Объединение** и **пересечение** семейства множеств A_t, $t \in T$ определяются соответственно соотношениями*

$$\bigcup_{t\in T} A_t := \{x \mid \exists\, t_0 \in T : \quad A_{t_0} \ni x\}, \qquad \bigcap_{t\in T} A_t := \{x \mid \forall\, t \in T : \quad A_t \ni x\}.$$

Примеры.

5. Пусть для каждого $n \in N$ множество $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $A_n \subset A_{n+1}$ для $n \in N$ и $\bigcup\limits_{n\in N} A_n = N$, $\bigcap\limits_{n\in N} A_n = \{1\}$; и для фиксированного $m \in N$ имеем $\bigcup\limits_{n\geq m} A_n = N$, $\bigcap\limits_{n\geq m} A_n = A_m$, $\bigcup\limits_{n\leq m} A_n = A_m$.

6. Пусть для каждого $n \in N$ множество $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$. Тогда для каждого фиксированного $m \in N$ справедливы следующие равенства $\bigcup\limits_{n\geq m} A_n = A_m$, $\bigcap\limits_{n\geq m} A_n = \varnothing$, $\bigcup\limits_{n\leq m} A_n = N$.

Упражнение 4. $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C =: A \cup B \cup C$.

Упражнение 5. $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C =: A \cap B \cap C$.

Упражнение 6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Упражнение 7. $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$.

Из определений действий над множествами следует ряд свойств этих действий. В упражнениях ниже перечислены наиболее существенные из свойств.

Правила двойственности. Для любых множеств A, B справедливы следующие равенства: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

[Доказательство первого равенства: $x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin (A \cup B) \iff x \notin A$ и $x \notin B \iff x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B} \iff x \in (\overline{A} \cap \overline{B})$.]

Упражнение 8. Доказать утверждения: $A \subset B \subset C \Longrightarrow C = A \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus B)$, $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$.

Упражнение 9. Доказать, что $\overline{\bigcup_{t \in T} A_t} = \bigcap_{t \in T} \overline{A_t}$, $\overline{\bigcap_{t \in T} A_t} = \bigcup_{t \in T} \overline{A_t}$.

Определение 8. ***Упорядоченной парой*** *(a, b) элементов a и b называется множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.* ***Декартовым произведением*** *множеств A и B называется множество $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$. Аналогично,* ***упорядоченный набор*** *(a, b, c) из трех элементов a, b, c есть множество $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, а* ***декартово произведение*** *множеств A, B, C есть множество $A \times B \times C := \{(a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$.*

Декартово произведение $n \in N$ множеств определяется аналогично. Далее используются также следующие обозначения

$$A^2 := A \times A, \quad A^3 := A \times A \times A, \quad A^n := \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ раз}}, \quad n \in N.$$

Упражнение 10. Если $a \neq b$, то $(a, b) \neq (b, a)$. В общем случае $A \times B \neq B \times A$.

Упражнение 11. $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

Определение 9. Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется ***конечным.***

Обозначения. Для конечного множества A число его элементов обозначается символом $|A|$. Для множества A ***семейство всех его подмножеств***, включая $\varnothing$ и A, обозначается символом 2^A.

Упражнение 12. Для конечных множеств A и B доказать следующие равенства:

a) $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$, b) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$,
c) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, d) $|2^A| = 2^{|A|}$.

1.3 Общее понятие отображения или функции

Определение 1. Пусть X и Y — два множества. ***Отображением*** *f множества X в множество Y называется правило или предписание, которое каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие точно один элемент $y \in Y$. Множество X называется* ***множеством определения*** *отображения f и обозначается $D(f)$. Множество $R(f) := \{y \in Y \mid \exists\, x \in D(f): \ f(x) = y\}$ называется* ***множеством значений*** *отображения f. Элемент y, который отображение f ставит в соответствие элементу x, называется* ***образом*** *элемента x при отображении f или* ***значением*** *отображения f* ***в точке*** *x и обозначается символом $f(x)$, при этом будем писать $x \mapsto f(x)$.*

Обозначения. Каждая из следующих записей 1) $f: X \to Y$; 2) $X \xrightarrow{f} Y$; 3) $y = f(x)$, $x \in X$ означает, что f есть отображение множества X в множество Y.

Далее слова ***отображение, функция, преобразование, соответствие, оператор*** употребляются как синонимы.

Замечания. 1.Часто рассматривается случай, когда множество определения $D(f)$ есть часть более широкого множества.

2. Задание функции f согласно определению 1 предполагает задание следующих трех объектов: $D(f)$, Y и правила, ставящего в соответствие каждому элементу из $D(f)$ точно один элемент из Y.

Упражнение 13. Определить $R(f)$ для функций:
a) $X = Y = Z$, $f(x) = x + 1$, $x \in Z$;
b) $X = Y = Z$, $f(x) = |x| + 1$, $x \in Z$;
c) $X = Y = Z$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $x \in Z$.

Определение 2. Функции $f_1: X_1 \to Y_1$, $f_2: X_2 \to Y_2$ называются ***равными****, если выполняются следующие условия 1) $X_1 = X_2$ и 2) $\forall\, x \in X_1: \ f_1(x) = f_2(x)$.*

Обозначение: $f_1 = f_2$.

Определение 3. Пусть $f: X \to Y$ и $X_0 \subset X$. Функция $f_0: X_0 \to Y$, определяемая соотношением $\forall\, x \in X_0: \ f_0(x) = f(x)$, называется ***сужением функции*** *f на множество*

X_0, а функция f называется ***продолжением*** *функции f_0 на множество X.*

Определение 4. *Пусть $f:\ X \to Y$.* ***График*** *функции f есть множество $G(f) := \{(x,y) \in (X \times Y) \mid x \in X,\ y = f(x)\}$.*

Отметим, что график функции f есть подмножество декартового произведения $X \times Y$.

Определение 5. *Пусть $f:\ X \to Y$ и $g:\ Y \to Z$. Функция $h:\ X \to Z$, определяемая равенством $h(x) := g(f(x))$, $x \in X$, называется* ***сложной функцией*** *или* ***суперпозицией***[1] *функций f и g.*

Обозначения: $h = g(f)$ или $h = g \circ f$.

Определение 6. *Пусть $f:\ X \to Y$ и $A \subset X$, $B \subset Y$.* ***Образом*** *множества A при отображении f называется множество $f(A) := \{y \in Y \mid \exists\, x \in A:\ \ f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}$.* ***Прообразом*** *множества B при отображении f называется множество $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid \exists\, y \in B:\ \ y = f(x)\} = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.*

Замечание. Обратим внимание на то, что $f(A) \subset Y$, $f^{-1}(B) \subset X$.

Упражнение 14. Для каждой из функций упражнения 13 найти $f(N)$ и $f^{-1}(N)$.

Упражнение 15. Пусть $f:\ X \to Y$ и $A_1 \subset X$, $A_2 \subset X$. Проверить соотношения:

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; b) $f(A_1 \cap A_2) \subset (f(A_1) \cap f(A_2))$;

c) $(f(A_1) \setminus f(A_2)) \subset f(A_1 \setminus A_2)$; d) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$;

e) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$; f) $(f(X) \setminus f(A_1)) \subset f(\overline{A_1})$.

Упражнение 16. Пусть $f:\ X \to Y$ и $B_1 \subset Y$, $B_2 \subset Y$. Проверить следующие соотношения: a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$; b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$; c) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$; d) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$; e) $f(f^{-1}(B_1)) = B_1 \cap f(X)$; f) $f^{-1}(\overline{B}_1) = \overline{f^{-1}(B_1)}$.

Определение 7. *Отображение $f:\ X \to Y$ называется* ***отображением*** *множества X* ***на*** *множество Y или* ***сюръекцией,*** *если $f(X) = Y$.*

Определение 8. *Отображение $f:\ X \to Y$ называется* ***взаимно однозначным*** *отображением множества X в множество Y или* ***инъекцией,*** *если $\forall\, x_1 \in X\ \forall\, x_2 \in X:\ x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*

---

[1] От лат. suppono — подставлять.

Определение 9. *Отображение f, которое является сюръекцией и инъекцией, называется* ***биекцией.*** *В этом случае также говорят, что функция f осуществляет* ***взаимно однозначное соответствие*** *между множествами X и Y.*

Упражнение 17. Какие из функций упражнения 13 являются сюръекцией? Инъекцией? Биекцией?

Упражнение 18. Доказать, что суперпозиция биекций есть биекция.

Упражнение 19. Проверить следующие утверждения:
a) $f: X \to Y$ есть сюръекция $\iff$ $\forall y \in Y: f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$;
b) $f: X \to Y$ есть инъекция $\iff$ $\forall y \in Y:$ множество $f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$ либо состоит из одного элемента;
c) $f: X \to Y$ есть биекция $\iff$ $\forall y \in Y:$ множество $f^{-1}(\{y\})$ состоит из одного элемента.

Упражнение 20. Пусть X и Y конечные множества, причем $|X| = m \in N, |Y| = n \in N$. Проверить утверждения:
a) существует сюръекция $f: X \to Y$ $\iff$ $m \geq n$;
b) существует инъекция $f: X \to Y$ $\iff$ $m \leq n$;
c) существует биекция $f: X \to Y$ $\iff$ $m = n$;
d) в случае c) существует $n!$ биекций;
e) в случае a) существует $m(m-1)\ldots(m-n+1)n^{m-n}$ сюръекций;
f) в случае b) существует $n(n-1)\ldots(n-m+1)$ инъекций;
g) всего существует n^m отображений $f: X \to Y$.

Упражнение 21. Доказать, что

$$f \text{ — инъекция} \iff \forall \subset X: f^{-1}(f(A)) = A \iff$$
$$\iff \forall A \subset X \quad \forall B \subset X: f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \iff$$
$$\iff \forall A \subset X \quad \forall B \subset X,\ A \supset B: f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

Упражнение 22. Пусть отображения $f: X \to Y$ и $g: Y \to X$ таковы, что $\forall x \in X: g(f(x)) = x$. Доказать, что f — инъекция, а g — сюръекция.

Определение 10. *Пусть $f: X \to Y$ есть биекция. Тогда $\forall y \in Y\ \exists! x \in X: f(x) = y$, положим $f^{-1}(y) := x$. Функция $f^{-1}: Y \to X$ называется* ***обратной*** *к функции f.*

Упражнение 23. Если $f: X \to Y$ — биекция, то f^{-1} — также биекция с обратной функцией f. Доказать это утверждение.

Упражнение 24. Доказать, что в условиях определения 10 справедливы утверждения: $\forall x \in X: f^{-1}((f(x)) = x$; $\forall y \in Y: f(f^{-1}(y)) = y$.

Упражнение 25. Пусть функции $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ таковы, что $\forall x \in X : g(f(x)) = x, \quad \forall y \in Y : f(g(y)) = y$. Доказать, что f и g биекции и $g = f^{-1}$.

Определение 11. *Отображение вида $f : N \to X$ называется* ***последовательностью элементов*** *из X.*
Обозначения: $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, $\{a_n : n \geq 1\}$ или $\{a_n \mid n \geq 1\}$, где $a_n := f(n)$ есть n-ый член последовательности.

1.3.1 Историческая справка

Слово «функция» происходит от лат. functio — выполнять. Этот термин, а также обозначение 3) функции ввёл в математику ***Г. Лейбниц.*** Отметим также, что определение 1 не является определением в обычном для современной математики смысле. Оно лишь подменяет слово «функция» словами «правило», «предписание», которые более близки нашей интуиции. Это определение было предложено ещё в 1817 г. ***Б. Больцано*** (1781 — 1848), однако оно стало использоваться после его введения ***П. Г. Дирихле*** (1805 — 1859). Тем не менее, это определение является исключительно важным этапом развития понятия «функция» и этого определения вполне достаточно для нашего изложения. О развитии понятия функции можно прочесть в интересной статье ***Г. Е. Шилова*** «Что такое функция?» (Математика в школе. 1964. N.1. С. 7-15). Формальное определение приведено, например, в книге ***Ж. Дьедонне*** «Основы современного анализа» (М.: Мир. 1964.).

1.4 Мощность множества. Счётные множества

Конечные множества сравниваются по запасу их элементов просто — нужно сравнить числа элементов в этих множествах. Представляет интерес другой способ сравнения, относящийся к случаям, когда числа элементов велики и фактический подсчёт числа требует много времени. Контролёр в кинотеатре перед началом сеанса по наличию пустых кресел делает вывод о том, что не все билеты проданы, то есть, что число зрителей меньше числа мест в зале. При этом фактически используется тот факт, что между множеством зрителей и занятыми ими креслами устанавливается взаимно однозначное соответствие. В связи с этим вторым способом сравнения чисел элементов множеств полезно рассмотрение упражнения 20.

Как сравнивать по запасу элементов бесконечные множества? Одинаковы ли по запасу элементов множества N, Z, Q? Следует обратить внимание на то, что $N \subset Z \subset Q$. Поставленный вопрос и ответ на него не являются простыми. ***Г. Кантор*** построил естественную и изящную математическую теорию, которая содержит ответ на поставленный и другие подобные вопросы. Исходным пунктом этой теории является следующее определение.

Определение 1. Множества A и B ***равномощны*** *или* ***имеют одинаковую мощность****, если существует биекция $f: A \to B$. То, что множества A и B равномощны, обозначается следующим образом $A \sim B$.*

Замечания. 1. Таким образом, $A \sim B$, если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие.

2. С помощью определения 1 точные определения конечного и бесконечного множеств формулируются следующим образом. Множество A ***конечно*** $\iff \exists n \in N: \quad A \sim \{1, 2, \dots, n\}$. Множество $\varnothing$ также конечно и $|\varnothing| := 0$. В остальных случаях множество A называется ***бесконечным.***

3. Пусть A и B конечные множества. Тогда $A \sim B \iff |A| = |B|$.

Примеры.

1. $N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ и $B = \{0, 1, 2, 3, \dots, n-1, \dots\} = \{0\} \cup N$ — равномощные множества, так как отображение $N \ni n \mapsto (n-1) \in B$ есть биекция. Отметим, что $N \subset B$ и что $N \neq B$.

2. Множества $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $B = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ равномощны, так как отображение $N \ni n \mapsto 2n \in B$ есть биекция. Отметим, что $B \subset N$.

Упражнение 26. Доказать следующие утверждения. Множество A конечно тогда и только тогда, когда не существует множества $B \subset A$, $B \neq A$ такого, что $B \sim A$. Множество A бесконечно тогда и только тогда, когда существует множество $B \subset A$, $B \neq A$ такое, что $B \sim A$.

Упражнение 27*. Доказать, что множества A и 2^A не равномощны. Указание: пусть $f: A \to 2^A$ - биекция. Рассмотреть множество $\{x \in A \mid x \notin f(x)\}$ для получения противоречия.

Определение 2. Множество A называется ***счётным*** *множеством, если $A \sim N$.*

Замечание. 1. Если $A \sim N$, то говорят, что элементы множества A можно ***занумеровать.*** Пусть $f: N \to A$ — некоторая биекция, с этой биекцией связана следующая нумерация: элементу $f(n) \in A$ ставится в соответствие номер $n \in N$. При этом все элементы множества A получат номера, различным элементам будут отвечать разные номера и все номера из N будут использованы. Другая биекция между множествами N и A приведёт к другой нумерации множества A.

Теорема 1. *Бесконечное подмножество счётного множества также счётно.*

⌈ Пусть A счётное множество, занумеруем его каким-нибудь образом $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$. Пусть B бесконечное подмножество A. Занумеруем элементы B следующим образом. Пусть $a_{k(1)}$ – первый элемент в последовательности A, который входит в B. Сопоставим элементу $a_{k(1)}$ номер 1. Пусть $a_{k(2)}$ — первый из элементов $a_{k(1)+1}, a_{k(1)+2}, \ldots$, который входит в B. Сопоставим элементу $a_{k(2)}$ номер 2. Продолжая аналогично, мы занумеруем все элементы B, при этом все номера из N будут использованы, так как B бесконечно. ⌋

Теорема 2. *Бесконечное множество содержит счётное подмножество.*

⌈ Пусть A – бесконечное множество и a_1 – произвольный элемент из A. Тогда множество $A \setminus \{a_1\}$ также бесконечно, так как $A = \{a_1\} \cup (A \setminus \{a_1\})$. Пусть a_2 – произвольный элемент из множества $A \setminus \{a_1\}$. Множество $((A \setminus \{a_1\}) \setminus \{a_2\}) = A \setminus \{a_1, a_2\}$ также бесконечно. Пусть a_3 – произвольный элемент из $A \setminus \{a_1, a_2\}$ и т. д. Получим счётное множество $B := \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset A$. ⌋

Определение 3. *Множество конечное или счётное называется* ***не более чем счётным.***

Теорема 3. *Если для множества A существует инъекция $f: A \to N$, то множество A не более чем счётно.*

⌈ По теореме 1 множество $f(A)$ не более чем счётно. Поскольку $f: A \to f(A)$ есть биекция, то множество A также не более чем счётно. ⌋

Упражнение 28. Пусть A – бесконечное множество и $x \notin A$. Доказать, что $(A \cup \{x\}) \sim A$.

Упражнение 29. Пусть A – бесконечное множество и B – счётное множество. Доказать, что $(A \cup B) \sim A$.

Теорема 4. *Объединение счётного семейства счётных множеств счётно.*

⌈ Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ – счётные множества. Тогда для каждого $n \geq 1$

$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots, a_{nn}, \ldots\}$, а объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_{mn} \mid m \in N,\ \ n \in N\}$ есть множество, состоящее из всех элементов таблицы рис. 1, которые можно занумеровать, например, в порядке, указанном стрелками на рис. 1.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\overset{1}{a_{11}} & \to & \overset{2}{a_{12}} & & \overset{6}{a_{13}} & \to & \overset{7}{a_{14}} & \dots & a_{1n} & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
\overset{3}{a_{21}} & & \overset{5}{a_{22}} & & \overset{8}{a_{23}} & & a_{24} & \dots & a_{2n} & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & \\
\overset{4}{a_{31}} & & \overset{9}{a_{32}} & & a_{33} & & a_{34} & \dots & a_{3n} & \dots \\
 & \swarrow & & & & & & & & \\
\overset{10}{a_{41}} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & \dots & a_{4n} & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\
a_{n1} & & a_{n2} & & a_{n3} & & a_{n4} & \dots & a_{nn} & \dots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \dots
\end{array}
$$

Рис. 1.

Предыдущая теорема имеет следующее обобщение.

Теорема 5. *Объединение не более чем счётного семейства не более чем счётных множеств не более чем счётно.*

Упражнение 30. Другое доказательство теоремы 4. Проверить, что функция $f : \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \to N$, определённая следующими равенствами $f(a_{mn}) := 2^m 3^n$, $m \in N$, $n \in N$, есть инъекция.

Упражнение 31. Объединение двух счётных множеств счётно.

Теорема 6. *Декартово произведение двух счётных множеств счётно.*

⌈ Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, тогда множество $A \times B$ состоит из пар (a_m, b_n), $m \in N$, $n \in N$, которые располагаются в таблицу, аналогичную изображённой на рис. 1, и могут быть аналогично занумерованы. ⌋

Приведём теперь следующий важный принцип, часто используемый в математических рассуждениях.

Принцип математической индукции. *Пусть M — такое множество, что:*

1) $1 \in M$;

2) $\forall n \in N$ из того, что $n \in M \implies (n+1) \in M$. Тогда $M \supset N$. В частности, если $M \subset N$, то $M = N$.

Этот принцип (иногда говорят ***метод математической индукции***) является аксиомой натуральных чисел.

Упражнение 32. Доказать, что принцип математической индукции равносилен утверждению: любое непустое подмножество множества N имеет наименьший злемент.

Упражнение 33. Доказать неравенства:

a) $2^n > n,\quad n \geq 1$; b) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n},\quad n \geq 1$;

c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{n},\ n \geq 1.$

Упражнение 34. Доказать, что для любого $n \in N$ число $6^n + 7^{2n+3}$ делится на 43.

Упражнение 35. Вывести из принципа математической индукции такое утверждение. Пусть $k \in N$ — фиксированное число и M — множество такое, что:

1) $k \in M$;

2) $\forall n \in N,\ n \geq k$ из того, что $n \in M \implies (n+1) \in M$.

Тогда $M \supset \{k, k+1, k+2, k+3, \ldots\}$.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ — счётное множество и для фиксированного $m \in N$ $A^m = \{(a_{k(1)}, a_{k(2)}, \ldots, a_{k(m)}) \mid k(j) \in N,\ 1 \leq j \leq m\}$ — множество всех упорядоченных m-членных цепочек злементов из A.

Теорема 7. *Для каждого $m \in N$ множество A^m счётно. Множество $B := \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A^m$ также счётно.*

⌈ Пусть число $m \in N$ фиксировано. Тогда следующая функция $f((a_{k(1)}, a_{k(2)}, \ldots, a_{k(m)})) := p_1^{k(1)} p_2^{k(2)} \ldots p_m^{k(m)}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – фиксированные попарно взаимно простые натуральные числа, есть инъекция множества A^m в множество N. Второе утверждение есть следствие теоремы 4. Другое доказательство следует и теоремы 6 и принципа математической индукции. ⌋

Упражнение 36. Доказать, что множества Z и Q счётны.

Упражнение 37. Доказать, что множество всех многочленов с рациональными козффициентами счётно.

Упражнение 38. ***Алгебраическим числом*** называется корень многочлена с целыми коэффициентами. Рациональные числа являются алгебраическими. Доказать, множество всех алгебраических чисел счётно.

Указание: многочлен степени n не может иметь более, чем n корней.

Теорема 8. *Существуют несчётные множества.*

⌈ Пусть A – множество всех возможных бесконечных последовательностей, составленных из двух символов, например, из 0 и 1, следующего вида $x = (0,1,1,0,1,0,\ldots,0,\ldots)$. Множество A несчётно. Действительно, допустим, что элементы множества A занумерованы:

$$\begin{array}{l} x_1 = (a_{11}, \quad a_{12}, \quad \ldots, \quad a_{1n}, \quad \ldots), \\ x_2 = (a_{21}, \quad a_{22}, \quad \ldots, \quad a_{2n}, \quad \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = (a_{n1}, \quad a_{n2}, \quad \ldots, \quad a_{nn}, \quad \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

где каждое из чисел a_{mn} равно 0 или 1. Однако следующий элемент $y = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, в котором $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $\ldots$, $b_n \neq a_{nn}$, $\ldots$ и каждое b_n равно 0 или 1, принадлежит согласно определению множеству A, однако не совпадает ни с одним из занумерованных. Полученное противоречие показывает, что элементы множества A нельзя занумеровать. ⌋

Замечания. 1. Метод рассуждения, использованный при доказательстве теоремы 7, называется ***диагональным методом Кантора.***

2. Следует сравнить доказательство теоремы 8 и упражнение 27.

Упражнение 39. Доказать, что множество 2^N несчётно.

Упражнение 40.* Доказать, что множество A из доказательства теоремы 8 и множество 2^N равномощны.

1.4.1 Историческая справка

Кантор Георг (1845 — 1918) — выдающийся немецкий математик (родился в Петербурге), создатель теории множеств — основания всей современной математики. Его революционные математические идеи были встречены непониманием и необоснованной критикой со стороны многих ведущих математиков того времени. Работы Кантора были по достоинству оценены и признаны лишь спустя несколько десятилетий после их опубликования. Они оказали исключительно плодотворное влияние на развитие современной математики. Позже теория бесконечных множеств, предложенная Кантором, была названа наивной теорией множеств. Она приводит к ряду логических противоречий, которые были известны и самому Кантору. Защищал теорию Кантора величайший математик всех времён *Д. Гильберт* (1862 – 1943), в частности заявивший, что «Никто не изгонит нас из рая, созданного Кантором». Дальнейшее развитие математики подтвердило правоту Д. Гильберта.

1.5 Действительные числа

1.5.1 Введение

Натуральные и положительные рациональные числа, а также их свойства, известны около 4 000 лет. Однако, ещё в древности математикам пришлось столкнуться с необходимостью введения чисел иной природы. Обнаруженная в школе *Пифагора* (570 – 496 г. до н.э.) несоизмеримость диагонали и стороны квадрата означает, что длина диагонали не может быть выражена рациональным числом, если в качестве единицы длины взять длину стороны квадрата. Необходимость введения чисе̇л, отличных от рациональных, возникает и при решении простейших уравнений типа $x^2 - 6 = 0$.

Пример. 1. Не существует числа $x \in Q$ такого, что $x^2 = 2$.

⌈ Назовём число $\dfrac{m}{n}$ с $m \in N$ и $n \in N$ "настоящей" дробью, если $n > 1$ и числа m и n взаимно просты. Если $\dfrac{m}{n}$ "настоящая" дробь, то $\dfrac{m^2}{n^2}$ также "настоящая" дробь. Следовательно, $\sqrt{2}$ не может быть "настоящей" дробью. Кроме того, число $\sqrt{2} \notin N$, так как $1^2 < 2$, $2^2 = 4 > 2$ и т. д. ⌋

Упражнение 41. Доказать, что: $a)\sqrt{6} \notin Q$; $b)(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \notin Q$.

Упражнение 42*. Пусть $\alpha = r\pi$, $r \in Q$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Доказать, что: a) если $r \neq \dfrac{1}{6}$, то $\sin\alpha \notin Q$; b) если $r \neq \dfrac{1}{4}$, то $\operatorname{tg}\alpha \notin Q$.

Упражнение 43. Для каждого $n \in N$ число $\sqrt{n} \in N$ или $\sqrt{n} \notin Q$.

Упражнение 44. Для любых $\{m, n\} \subset N$ число $m^{1/n} \in N$ или $m^{1/n} \notin Q$.

Далее предполагаются известными свойства натуральных, целых и рациональных чисел, а также правила перевода простой рациональной дроби в десятичную и десятичной периодической дроби в простую.

3 — 4-1168

К понятию действительного числа приводит задача об измерении отрезка. Пусть задана единица длины, например метр, и мы хотим измерить длину заданного отрезка J. Предположим, что 1 м укладывается целиком на J 13 раз и при этом остаётся отрезок J_1, длина которого меньше 1 м. Тогда длина отрезка J приближённо равна 13 м: длина $J \approx 13$ м. Если такая точность неудовлетворительна, то можно рассмотреть $\frac{1}{10}$ единицы измерения, то есть 1 дм, и определить, сколько раз 1 дм укладывается целиком в остатке J_1. Пусть 1 дм укладывается целиком в остатке J_1 7 раз и при этом получается остаток J_2, длина которого меньше 1 дм. Так получаем более точное приближённое значение длины J : длина $J \approx 13,7$ м. Продолжая процедуру получения всё более точных приближений для длины J, приходим к реализации одной из следующих двух возможностей:

(i) либо на каком-то шаге, например на $(n+1)$-ом, $\frac{1}{10^n}$ единицы длины отложится на остатке предыдущего шага J_n точно α_n раз. В этом случае процесс измерения приведёт к точному значению длины J :

$$\text{длина } J = 13,7\alpha_2 \ldots \alpha_n \text{ м.} \tag{1}$$

(ii) Либо процесс измерения будет продолжаться неограниченно[2] (например, если длина J равна $\frac{4}{3}$ м) и тогда точным значением длины J следует считать бесконечную десятичную дробь

$$\text{длина } J = 13,7\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \text{ м.}$$

Упражнение 45. Проверить, что в результате процесса измерения отрезка бесконечная десятичная дробь с цифрой 9 в периоде получена быть не может.

Заметим теперь, что конечную десятичную дробь (1) можно рассматривать как бесконечную, считая равными 0 все знаки после n-го:

$$13,7\alpha_2 \ldots \alpha_n = 13,7\alpha_2 \ldots \alpha_n 000 \ldots 0 \ldots .$$

Таким образом, процесс измерения отрезка приводит рассмотрению бесконечных десятичных дробей вида

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots, \tag{2}$$

где

$$\alpha_0 \in (N \cup \{0\}); \quad \forall n \in N: \quad \alpha_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \tag{3}$$

причём дробь (2) цифры 9 в периоде не содержит.

Упражнение 46. Что означает для дроби (2) утверждение:

[2]Предположение о неограниченности процесса измерения является типичным примером математической абстракции. Для реальной процедуры измерения на определённом этапе начнёт сказываться дискретность вещества.

a) $\forall n \in N\ \exists m \geq n:\ \alpha_m \neq 9$? b) $\exists n \in N\ \forall m \geq n:\ \alpha_m = 9$?

Рассмотрим прямую с фиксированной точкой O — началом координат и фиксированной единицей длины. Тогда каждой точке P, лежащей на этой прямой справа от точки O, можно поставить в соответствие бесконечную десятичную дробь вида (2), не содержащую цифры 9 в периоде, как результат измерения отрезка OP. Точке O поставим в соответствие дробь $0,00\ldots0\ldots$.

Это соответствие между точками полупрямой и дробями вида (2), удовлетворяющими условию (3) и не содержащими цифры 9 в периоде, взаимно однозначно. В частности, среди этих дробей есть и та, которая отвечает отрезку, равному диагонали квадрата со стороной 1.

Все дроби вида (2), удовлетворяющие условию (3) и не содержащие цифры 9 в периоде, можно разбить на два класса:

(i) ***периодические***, в том числе дроби вида (1), они переводятся в неотрицательные рациональные числа и их можно отождествить с этими рациональными числами;

(ii) дроби ***непериодические***. Они представляют новые, нужные для решения математических задач, числа, это ***иррациональные*** числа. В частности, длина диагонали квадрата с единичной стороной есть иррациональное число.

1.5.2 Определение действительных чисел

Определение 1. ***Неотрицательное действительное или вещественное число есть бесконечная последовательность цифр с одной запятой между ними, то есть бесконечная десятичная дробь вида*** $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, *где числа* $\alpha_0 \in (N \cup \{0\})$; $\forall n \in N:\ \alpha_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Неотрицательное действительное число a называется ***положительным***, *если* $\exists n \in (N \cup \{0\}):\ \alpha_n > 0$.

Отрицательное *действительное число есть по определению положительное действительное число со знаком "−".*

Множество всех действительных чисел обозначается символом $\boldsymbol{R}$.

Замечания. 1. С учётом обсуждения в п.1.5.1 имеем следующие включения $N \subset Q \subset R$.

2. Правила действий со знаком "−" в R те же, что и в множестве Q. Поэтому далее в настоящем п.1.5.2 рассматриваются только неотрицательные действительные числа.

Определение 2. *Числа из множества $R \setminus Q$ называются* ***иррациональными***[3].

Определение 3. *Неотрицательные действительные числа* $a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ *и* $b = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ *называются* ***равными*** *(обозначение: $a = b$) в одном из следующих двух случаев:*

(i) $\forall n \in (N \cup \{0\}): \quad \alpha_n = \beta_n$;

(ii) $\exists n \in (N \cup \{0\}): \quad \alpha_k = \beta_k,\ 0 \le k < n,\ \alpha_n = \beta_n + 1$;
$\forall m > n: \quad \alpha_m = 0,\ \beta_m = 9$

(при $n = 0$ равенство с индексом k следует опустить).

Далее, рассматривая действительные числа, ***ограничимся десятичными дробями, не содержащими цифры 9 в периоде.***

Определение 4. *Пусть числа* $a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ *и* $b = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ *— неотрицательны. Число a* ***меньше*** *числа b (обозначение: $a < b$) или число b* ***больше*** *числа a (обозначение: $b > a$), если*

$$\exists n \in (N \cup \{0\}): \quad \alpha_k = \beta_k,\ 0 \le k < n,\ \alpha_n < \beta_n$$

(при $n = 0$ равенство с индексом k следует опустить).

Упражнение 47. Проверить, что:

а) для чисел вида (1) п. 1.5.1 неравенство из определения 4 совпадает с обычным неравенством в Q;

б) для периодических бесконечных дробей неравенство определения 4 совпадает с обычным неравенством между соответствующими рациональными числами.

Упражнение 48. Доказать, что для любых $\{a, b\} \subset R$ справедливо одно и только одно из соотношений: $a = b$, $a < b$, $a > b$, то есть любые два действительных числа сравнимы.

Упражнение 49. Доказать, что для любых $\{a, b, c\} \subset R$ $a > b$ и $b > c \implies a > c$.

1.5.3 Числовая прямая

Рассмотрим прямую с фиксированной точкой O — началом координат. Пусть также задана единица длины. Множество R можно поставить во взаимно однозначное соответствие с точками прямой следующим образом. Точке P, лежащей на прямой справа от точки O, поставим в соответствие число $x \in R$, равное длине отрезка OP; точке Q, лежащей на прямой левее точки O, — число $-y$, где y — длина отрезка QO;

[3] От лат. irracionalis — неразумный.

точке O — число 0=0,00...0.... Число x, которое отвечает точке P, называется ***координатой точки*** P, а прямая с описанным соответствием называется ***числовой прямой.***

Многие свойства действительных чисел имеют простую геометрическую интерпретацию на числовой прямой. Например, неравенство $a < b$ равносильно тому, что точка с координатой a лежит слева от точки с координатой b. Эта же геометрическая интерпретация может быть использована для геометрического определения суммы действительных чисел, как это делали древние греки и их последователи.

Пусть $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$ и $a < b$. Далее постоянно используются следующие понятия:

$$
\begin{aligned}
&[a,b] := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x \le b\} \text{ — отрезок;}\\
&(a,b) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x < b\} \text{ — интервал;}\\
&[a,b) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a \le x < b\} \text{ — полуинтервал;}\\
&(a,b] := \{x \in \boldsymbol{R} \mid a < x \le b\} \text{ — полуинтервал;}
\end{aligned}
$$

числа a и b называются ***концами.***

Кроме того, для $a \in \boldsymbol{R}$ положим $[a,+\infty) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \ge a\}$, $(-\infty,a) := \{x \in \boldsymbol{R} \mid x < a\}$, $(-\infty,+\infty) := \boldsymbol{R}$.

1.5.4 Элементарные свойства действительных чисел

Следующие два простых утверждения весьма важны для дальнейшего изложения.

1^0. ***Аксиома Архимеда.*** $\forall\, a \in \boldsymbol{R} \quad \exists\, m \in \boldsymbol{N}: \quad m > a.$

⌈ Пусть $a = \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots > 0$. Положим $m := \alpha_0 + 1$, тогда $m \in \boldsymbol{N}$ и согласно определению 4 получим $a < m$. ⌋

2^0. $\forall\, a \in \boldsymbol{R} \quad \forall\, b \in \boldsymbol{R}, a < b: \quad (a,b) \ne \varnothing.$

⌈ Докажем, что существует число $r \in \boldsymbol{Q}$, для которого $r \in (a,b)$. Пусть $a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots > 0$, $b = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$, причём для некоторого числа $m \in (\boldsymbol{N}\cup\{0\})$ $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\ldots$, $\alpha_{m-1} = \beta_{m-1}$, $\alpha_m < \beta_m$. Пусть k – минимальный номер из тех, которые больше m и для которых $\alpha_k < 9$. Положим $r := \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m+1}\ldots(\alpha_k + 1)$. Тогда число $r \in \boldsymbol{Q}$ и $a < r < b$. ⌋

Упражнение 50. Доказать, что множество $(a,b) \cap \boldsymbol{Q}$ счётно.

Упражнение 51. Доказать, что любое семейство попарно непересекающихся интервалов на прямой не более чем счётно.

Упражнение 52. Доказать, что любое семейство интервалов с концами из $\boldsymbol{Q}$ на прямой не более чем счётно.

Упражнение 53. Доказать, что любая система попарно непересекающихся кругов в плоскости не более чем счётна.

Упражнение 54. Доказать, что множество $[0,1]$ несчётно.

*Определение 5. Множество, равномощное множеству чисел $[0,1]$, называется множеством **мощности континуум.***

Упражнение 55.* Доказать, что $(0,1) \sim [0,1] \sim \boldsymbol{R} \sim \boldsymbol{R}^2 \sim \boldsymbol{R}^3$. Относительно третьего утверждения ***Г. Кантор*** в 1877 г. писал ***Р. Дедекинду*** «Я вижу это, но не могу в это поверить». Тем не менее Г. Кантор поверил в правильность полученного им результата. Об этом и других интересных деталях см. книгу ***М. Клайна*** Математика. Утрата определённости. Москва. Мир. 1984.

1.5.5 Точные грани множества действительных чисел

*Определение 6. Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$. Если $\exists\, a \in A\ \forall\, b \in A:\ b \le a$, то число a называется **наибольшим** или **максимальным** элементом множества A и обозначается одним из символов $a = \max A = \max\{x \mid x \in A\} = \max\limits_{x \in A} x$.*

*Если $\exists\, c \in A\ \forall\, b \in A:\ b \ge c$, то число c называется **наименьшим** или **минимальным** элементом множества A и обозначается одним из следующих символов $c = \min A = \min\{x \mid x \in A\} = \min\limits_{x \in A} x$.*

Примеры.

1. Для $A = \{1,2,3,4,5\}$ имеем $\min A = 1, \quad \max A = 5$.

2. Для множества $A = \boldsymbol{N}$ имеем $\min A = 1$ и максимального элемента не существует, так как $\forall\, n \in \boldsymbol{N} \quad \exists\,(n+1) \in \boldsymbol{N}: \quad n+1 > n$, то есть любой элемент множества A не является максимальным.

3. Пусть A – конечное множество чисел из $\boldsymbol{R}$. Проверить, что $\min A$ и $\max A$ существуют.

4. Пусть $A = \boldsymbol{Z}$. Проверить, что для множества $\boldsymbol{Z}$ наибольшего и наименьшего элементов не существует.

5. Пусть $A = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right\} = \left\{\dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \boldsymbol{N}\right\}$. Тогда $\max A = 1$, так как $\forall\, n \in \boldsymbol{N}:\ \dfrac{1}{n} \le 1 \iff n \ge 1$. Наименьшего элемента множество A не имеет, так как $\forall\, n \in \boldsymbol{N}\ \exists\,(n+1) \in \boldsymbol{N}:\ \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \iff n < n+1$, то есть любой элемент $\dfrac{1}{n} \in A$ не является наименьшим.

Упражнение 56. Найти $\min A$ и $\max A$:

$$a)\ A=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\ \Big|\ n\in N\right\},\qquad b)\ A=\left\{\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\ \Big|\ n\in N\right\}.$$

Определение 7. *Пусть $A\subset R$. Если $\exists\, c\in R\ \forall x\in A:\ c\le x$, то множество A называется **ограниченным снизу**, а число c называется **нижней гранью** множества A.*

*Если $\exists\, d\in R\ \forall x\in A:\ x\le d$, то множество A называется **ограниченным сверху**, а число d — **верхней гранью** множества A. Множество, ограниченное снизу и сверху, называется **ограниченным.***

Примеры.

1. Для множества $A=N$ любое число $c\le 1$ является нижней гранью, следовательно множество N ограничено снизу. Множество N не имеет ни одной верхней грани, так как согласно аксиоме Архимеда $\forall\, d\in R\ \exists\, n\in N:\ n>d$. Следовательно, множество N не ограничено сверху и не является ограниченным.

2. Множество $A=Z$ не ограничено и снизу и сверху.

3. Множество $A=\left\{\frac{1}{n}\ \Big|\ n\in N\right\}$ ограничено снизу, так как любое число $c\le 0$ является нижней гранью множества A. Оно ограничено сверху, так как любое число $d\ge 1$ является верхней гранью множества A. Следовательно, множество A ограничено.

Упражнение 57. Доказать, что конечное множество $A\subset R$ ограничено.

Упражнение 58. Доказать, что множество A ограничено тогда и только тогда, когда $\exists\, c\in R\ \ \forall x\in A:\ -c\le x\le c \iff |x|\le c$.

Упражнение 59. Доказать, что следующие множества ограничены:

a) $\{\sin n\mid n\in N\}$, b) $\left\{\frac{n}{n+1}\ \Big|\ n\in N\right\}$,

c) $\left\{\frac{(-1)^n n+1}{n-(-1)^n}\ \Big|\ n\in N\right\}$, d) $\left\{\frac{2^n}{2^n-1}\ \Big|\ n\in N\right\}$.

Определение 8. *Пусть $A\subset R$. Число $c_*\in R$ называется **точной нижней гранью** множества A, если:*

1) c_* — нижняя грань множества A;

2) $\forall\, c$ — нижней грани множества A: $c\le c_*$.

*Число $c^*\in R$ называется **точной верхней гранью** множества A, если:*

1) c^* — верхняя грань множества A;

2) $\forall\, d$ — верхней грани множества A: $c^*\le d$.

Обозначения: $c_* = \inf A = \inf\{x \mid x \in A\} = \inf\limits_{x \in A} x$, $c^* = \sup A = \sup\{x \mid x \in A\} = \sup\limits_{x \in A} x$.

Замечания. 1. Согласно определению 8, точная нижняя грань множества есть наибольшая из нижних граней этого множества. Аналогично, точная верхняя грань множества есть наименьшая из верхних граней этого множества.

2. Точные грани могут не существовать. Например, N не имеет точной верхней грани, так как оно не имеет ни одной верхней грани.

Упражнение 60. Проверить утверждения: а) если $c_* = \inf A$, то любое число $c < c_*$ является нижней гранью множества A; b) если $c^* = \sup A$, то любое число $d > c^*$ является верхней гранью множества A. Таким образом, если $c_* = \inf A$, $c^* = \sup A$, то $A \subset [c_*, c^*]$.

Упражнение 61. Если существует $\min A$, то $\inf A = \min A$. Если существует $\max A$, то $\sup A = \max A$. Проверить эти утверждения.

Упражнение 62. Если множество A не ограничено сверху, то зто множество не имеет точной верхней грани. Если множество A не ограничено снизу, то это множество не имеет точной нижней грани. Проверить эти утверждения.

Теорема 9. *Число $c_* = \inf A$ тогда и только тогда, когда:*
1) c_* — *нижняя грань множества* A;
2) $\forall\, a > c_* \quad \exists\, x \in A: \quad x < a$.

Число $c^* = \sup A$ тогда и только тогда, когда:
1) c^* — *верхняя грань множества* A;
2) $\forall\, a < c^* \quad \exists\, x \in A: \quad x > a$.

⌈ Доказательство рассмотрим для нижней грани. Пусть $c_* = \inf A$. Тогда условие 1) теоремы выполнено согласно определению нижней грани. Условие 2) также выполнено. Действительно, если для некоторого числа $a > c_*$ не существует $x \in A$ такого, что $x < a$, то, следовательно, для любого $x \in A$ имеем $x \geq a$ и потому a есть нижняя грань, большая, чем c_*. Последнее противоречит определению точной нижней грани.

Предположим теперь, что условия 1) и 2) выполнены. Тогда выполнены оба требования из определения точной нижней грани, поскольку из 2) следует, что любое число $a > c_*$ нижней гранью не является. Следовательно, c_* – наибольшая нижняя грань. ⌋

Пример. 1. Пусть $A = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in N\right\}$. Тогда $\sup A = \max A = 1$. Докажем, что $\inf A = 0$.

⌈ Воспользуемся теоремой 9. Условие 1) выполнено, поскольку $0 < \frac{1}{n}$ для любого $n \in N$. Рассмотрим теперь любое число $a > 0$. Тогда существует $r \in Q$, для которого $0 < r < a$ и существует $n \in N$ такое, что $\frac{1}{n} < r < a$. Действительно, $\frac{1}{n} < r \iff n > \frac{1}{r}$ и можно воспользоваться аксиомой Архимеда. Поэтому условие 2) также выполнено. ⌋

Обратим внимание на то, что $\min A$ не существует, а также на то, что $\inf A = 0 \notin A$.

Условимся дальше писать $\sup A = +\infty$ или $\inf A = -\infty$, если множество A не ограничено сверху или если множество A не ограничено снизу соответственно.

1.5.6 Действительное число как точная грань чисел рациональных

Рассмотрим представление любого действительного числа как точной грани множества чисел рациональных. Пусть $a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ — произвольное неотрицательное число. Для каждого $n \in (N \cup \{0\})$ обозначим $a'_n := \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$; $a''_n := \alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_n+1)$. Здесь запись для числа a''_n условна, если $\alpha_n = 9$, в этом случае n-ый знак после запятой равен 0, а предыдущий увеличен на 1. Числа a'_n и a''_n суть конечные десятичные дроби. Согласно определению неравенства между действительными числами для любого $n \in (N \cup \{0\})$ имеем такие неравенства $a'_n \in Q$, $a''_n \in Q$; $a'_n \le a < a''_n$.

Теорема 10. *Для любого неотрицательного действительного числа a выполняются следующие равенства:* $a = \sup\limits_{n\ge 0} a'_n$, $a = \inf\limits_{n \ge 0} a''_n$.

⌈ Рассмотрим доказательство только первого равенства. Множество $\{a'_n \mid n \ge 0\}$ ограничено, поскольку для любого $n \ge 0$ имеем $0 \le a'_n \le a$. Если $a = 0$, то $a'_n = 0$ для всех $n \ge 0$ и утверждение верно. Предположим теперь, что $a > 0$. Воспользуемся теоремой 9. Число a удовлетворяет условию 1) этой теоремы. Проверим выполнение условия 2). Пусть $b = \beta_0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots$ — любое число такое, что $0 < b < a$ Согласно предположению $b < a$ $\exists m \in (N \cup \{0\}) : \beta_k = \alpha_k,\ 0 \le k < m;\ \beta_m < \alpha_m$. Но тогда $a'_m > b$. Таким образом, условие 2) теоремы 9 для числа a также выполнено. ⌋

Упражнение 63. Доказать второе утверждение теоремы 10.

Упражнение 64. Пусть $A \subset B$ и B ограничено сверху. Доказать, что $\sup A \le \sup B$.

Упражнение 65. Множества A и B ограничены сверху. Доказать, что $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

Упражнение 66. Пусть $A = \{a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \mid \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 5\}$. Найти $\inf A$ и $\sup A$.

1.5.7 Теорема о существовании точных граней

Теорема 11. *Непустое ограниченное сверху множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань. Непустое ограниченное снизу множество действительных чисел имеет точную нижнюю грань.*

⌈ Докажем первое утверждение, доказательство второго аналогично. Достаточно рассмотреть случай, когда $A \subset [0, +\infty)$ и $A \neq \varnothing$. По условию теоремы множество A ограничено сверху, следовательно имеем $\exists c \in \boldsymbol{R}\ \forall a \in A: \ a \leq c$. С учётом аксиомы Архимеда можно считать, что $c \in \boldsymbol{N}$.

целые части чисел из A

Пусть $B_0 := \{\alpha_0 \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\}) \mid \exists a \in A: \ a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots\}$. Множество $B_0 \neq \varnothing$ и ограничено сверху числом c. Следовательно, B_0 — ограниченное подмножество множества $\boldsymbol{N} \cup \{0\}$, то есть B_0 — конечное множество неотрицательных целых чисел. Поэтому существует верхняя грань $\max B_0 =: \omega_0, \ \omega_0 \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\})$.

Положим теперь $A_0 := \{a \in A \mid a = \omega_0, \alpha_1 \ldots\}, \ A_0 \subset A, \ A_0 \neq \varnothing$. Пусть далее $B_1 := \{\alpha_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \mid \exists a \in A_0: \ a = \omega_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots\}$. Тогда множество $B_1 \neq \varnothing$ и конечно. Поэтому существует $\max B_1 =: \omega_1, \ \omega_1 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Положим далее $A_1 := \{a \in A_0 \mid a = \omega_0, \omega_1\alpha_2 \ldots\}, \ A_1 \subset A_0, \ A_1 \neq \varnothing$.

Аналогично, пусть $B_2 := \{\alpha_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \mid \exists a \in A_1: a = \omega_0, \omega_1\alpha_2\alpha_3 \ldots\}$, множество $B_2 \neq \varnothing$ и конечно, следовательно, существует $\max B_2 =: \omega_2, \ \omega_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Определим множество $A_2 := \{a \in A_1 \mid a = \omega_0, \omega_1\omega_2\alpha_3 \ldots\}, \ A_2 \subset A_1, \ A_2 \neq \varnothing$.

Продолжая аналогично построение чисел $\omega_3, \omega_4, \omega_5$ и т. д., получим действительное число $z := \omega_0, \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n \ldots$.

Докажем, что $z = \sup A$. Для этого проверим выполнение условий теоремы 9. Для проверки условия 1) заметим, что согласно определению числа ω_0 для любого $a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots$ из A справедливо неравенство $\alpha_0 \leq \omega_0$. Если при этом $\alpha_0 < \omega_0$, то $a < z$. Если же $\alpha_0 = \omega_0$, то число $a = \omega_0, \alpha_1 \ldots$ входит в A_0 и по определению ω_1 имеем $\alpha_1 \leq \omega_1$. Если $\alpha_1 < \omega_1$, то $a < z$. Если же $\alpha_1 = \omega_1$, то число $a = \omega_0, \omega_1\alpha_2 \ldots$ входит в A_1 и по определению числа ω_2 имеем $\alpha_2 \leq \omega_2$ и т. д. В результате возможны следующие два исхода:

(i) $\exists\, n \in N: \quad \alpha_0 = \omega_0,\ \alpha_1 = \omega_1,\ \ldots\ , \alpha_{n-1} = \omega_{n-1},\ \alpha_n < \omega_n;$
тогда $a < z$;
(ii) $\forall\, n \in (N \cup \{0\}): \quad \alpha_n = \omega_n,$
тогда $a = z$. Таким образом, в обоих случаях $a \leq z$ и z — верхняя грань множества A.

Для проверки условия 2) теоремы 9 рассмотрим любое число $d = \delta_0, \delta_1\delta_2 \ldots \delta_n \ldots < z$. Согласно определению неравенства между числами

$$\exists\, m \in (N \cup \{0\}): \quad \delta_0 = \omega_0,\ \delta_1 = \omega_1,\ \ldots,\ \delta_{m-1} = \omega_{m-1}, \quad \delta_m < \omega_m,$$

тогда для любого $x \in A_m \subset A$ имеем $x > d$. ⌋

Замечания. 1. Построенное при доказательстве теоремы с помощью определённого процесса число z может иметь цифру 9 в периоде. 2. Число z может принадлежать, так и не принадлежать, множеству A.

Упражнение 67. Найти число z для множества $A = [0, 1)$.

Упражнение 68. Проверить, что теорема 11 не верна в Q. Точнее. Непустое ограниченное множество $A \subset Q$ согласно теореме 11 имеет $\sup A$, однако число $\sup A$ не обязательно рационально.

Упражнение 69. Пусть $A = \{0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \mid \forall\, n \in N:\ \alpha_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$ Найти $\sup A$ и $\inf A$.

1.5.8 Действия над числами

Арифметические действия над числами из Q и над конечными десятичными дробями предполагаются известными.

Пусть a и b — произвольные положительные числа.

Определение 9. *Положим по определению* $a + b := \sup\limits_{n \geq 0}(a'_n + b'_n)$, $\quad a \cdot b := \sup\limits_{n \geq 0}(a'_n \cdot b'_n)$, $\quad \dfrac{a}{b} := \sup\limits_{n \geq 0} \dfrac{a'_n}{b''_n}$; *для* $a > b$ $a - b := \sup\limits_{n \geq 0}(a'_n - b''_n)$; $\quad a^0 := 1$; $\quad \forall\, n \in N: \quad a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}.$

Замечания. 1. Все числа, фигурирующие в определении 9 под знаком sup, рациональны и для них арифметические операции определены.

2. Выше было показано, что $\sup A$ не всегда существует. Однако, в определении 9 все точные верхние грани существуют. Рассмотрим, например, случай суммы двух чисел. Для каждого $n \in (N \cup \{0\})$ имеем $a'_n \leq a < a''_n$, $\quad b'_n \leq b < b''_n$; следовательно, $a'_n < a''_0$, $\quad b'_n < b''_0$; откуда следует, что $a'_n + b'_n < a''_0 + b''_0$. Таким образом, число $a''_0 + b''_0$ — верхняя

грань множества $\{a'_n + b'_n \mid n \in (N \cup \{0\})$, поэтому это множество ограничено и по теореме 11 имеет точную верхнюю грань.

Упражнение 70. Доказать существование всех точных граней в определении 9.

Относительно свойств, введенных в определении 9 операций над действительными числами, заметим следующее. Все известные свойства арифметических операций над рациональными числами справедливы и для операций из определения 9 над любыми действительными числами. Однако,теперь эти свойства нуждаются в доказательстве. Например, для любых положительных чисел a и b справедливо такое равенство $a + b = b + a$, то есть равенство $\sup\limits_{n\geq 0}(a'_n + b'_n) = \sup\limits_{n\geq 0}(b'_n + a'_n)$. Последнее равенство очевидно, поскольку для рациональных чисел $a'_n + b'_n = b'_n + a'_n$, $n \geq 0$. Более сложным является доказательство того, что $a + a = 2a$, которое равносильно следующему равенству $\sup\limits_{n\geq 0}(a'_n + a'_n) = \sup\limits_{n\geq 0}((2)'_n \cdot a'_n)$, которое, однако, сводится к просто проверяемому равенству $\sup\limits_{n\geq 0}(2a'_n) = 2\sup\limits_{n\geq 0}(a'_n)$ с учётом того, что $(2)'_n = 2$, $n \geq 0$.

Упражнение 71. Доказать равенства:
a) $a \cdot b = b \cdot a$, b) $a + (b + c) = (a + b) + c =: a + b + c$,
c) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c =: a \cdot b \cdot c$.
d) $a + b = \inf\limits_{n\geq 0}(a''_n + b''_n)$, $a > 0$, $b > 0$.

В настоящей книге доказательства всех свойств операций над действительными числами из определения 9 не приводятся.

1.5.9 Неравенства для модуля суммы и Я. Бернулли

Для числа $a \in R$ положим $|a| := \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0. \end{cases}$ Отметим, что $-|a| \leq a \leq |a|$, а также то, что $|a| < c \iff -c < a < c$. Эти утверждения систематически используются в дальнейшем. Кроме того, $|a| = |-a|$.

Теорема 12. *Для любых $a \in R$, $b \in R$ справедливы неравенства:* 1) $|a+b| \leq |a|+|b|$, 2) $|a-b| \geq ||a|-|b||$. *Для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из R справедливо следующее неравенство* $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$.

⌈ Поскольку $-|a| \leq a \leq |a|$, $-|b| \leq b \leq |b|$, то после сложения этих неравенств имеем $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$, то есть справедливо неравенство 1). Заметим теперь, что в силу 1) $|a| = |a - b + b| \leq$

$|a-b|+|b|$, откуда $|a|-|b| \leq |a-b|$. А поскольку $|a-b| = |b-a| \geq |b| - |a|$, то получаем 2). Последнее неравенство теоремы получается, как и неравенство 1), сложением неравенств $-|a_k| \leq a_k \leq |a_k|, \quad 1 \leq k \leq n$. ⌋

Теорема 13. *Для любых чисел $\alpha > -1$ и $n \in N$ справедливо неравенство $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$,* ***(неравенство Я. Бернулли)****, в котором знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $n=1$ или $\alpha = 0$.*

⌈ При $n=1$ и $\alpha=0$ неравенство выполнено со знаком равенства. Пусть $\alpha \neq 0$, тогда при $n=2$ имеем $(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha+\alpha^2 > 1+2\alpha$. Используем теперь принцип математической индукции. Утверждение теоремы 13 верно для $n=2$. Предположим, что неравенство верно для индекса $n \geq 2$. Тогда получим $(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n > (1+\alpha)(1+n\alpha) = 1+(n+1)\alpha+n\alpha^2 > 1+(n+1)\alpha$. ⌋

Упражнение 72. Пусть $a > 0$, $b > -a$ и $n \in N$. Доказать, что $(a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b$, ***(неравенство Я. Бернулли)***, причём знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $n=1$ или $b=0$.

Указание. Положить в теореме 13 число $\alpha = \frac{b}{a}$ и умножить полученный результат на положительное число a^n.

Упражнение 73. Доказать, что:
a) $2^n \geq n+1, \quad n \geq 1$; b) $3^n \geq 2n+1, \quad n \geq 1$; c) $2^n > (\sqrt{2}-1)^2 n^2, \quad n \geq 1$;
d) для $k \in N: \quad 3^n > (\sqrt[k]{3}-1)^k n^k, \quad n \geq 1$.

Указание к c), d). Использовать неравенство Бернулли и представление $2^n = ((\sqrt{2})^n)^2 = ((1+(\sqrt{2}-1))^n)^2$.

Упражнение 74. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — положительные числа. Доказать, что $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(1+\alpha_n) \geq 1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$.

Упражнение 75. Пусть: $a > 0$, $n \in N$, $0 < b < \frac{a}{2n}$. Доказать, что $(a+b)^n \leq a^n + 2na^{n-1}b$.

1.5.10 Определение корня натуральной степени из положительного действительного числа

Теорема 14. *Пусть $a > 0$ и $n \in N$. Тогда*

$$\exists!x > 0: \quad x^n = a.$$

⌈ Достаточно рассмотреть случай, когда $a \neq 1$ и $n > 1$. Введём множество $A := \{y > 0 \mid y^n < a\}$. Множество $A \neq \varnothing$. Действительно, если $a < 1$, то $a^n < a$ и потому $a \in A$. Если же $a > 1$, то $1^n = 1 < a$ и

$1 \in A$. Множество A ограничено сверху числом $c := \max\{1, a\}$. Действительно, если $y \in A$ и $y \le 1$, то $y \le c$. Если же $y \in A$ и $y > 1$, то $y < y^n < a$ и снова $y \le c$. Поэтому к множеству A применима теорема о существовании точной верхней грани. Пусть $x := \sup A$, причём $x > 0$. Поскольку $\{x^n, a\} \subset \boldsymbol{R}$, то возможен один из трёх случаев: $(i)\ x^n > a$, $(ii)\ x^n < a$, $(iii)\ x^n = a$.

Предположим сначала, что верно неравенство (i) $x^n > a$. Тогда число $\Delta := x^n - a > 0$. Пусть $m \in N$таково, что $x > \dfrac{1}{m} \iff m > \dfrac{1}{x}$. Согласно неравенству Бернулли, имеем $\left(x - \dfrac{1}{m}\right)^n > x^n - \dfrac{nx^{n-1}}{m}$. Подчиним теперь число m дополнительному условию $\dfrac{nx^{n-1}}{m} < \Delta \iff m > \dfrac{nx^{n-1}}{\Delta}$, то есть возьмём m таким, чтобы $m > \max\left\{\dfrac{1}{x}, \dfrac{nx^{n-1}}{\Delta}\right\}$, Тогда $\left(x - \dfrac{1}{m}\right)^n > x^n - \Delta = a$, и, следовательно, $\left(x - \dfrac{1}{m}\right) \notin A$. Потому $\forall\, z > x - 1/m\ :\ z \notin A$, откуда $x = \sup A \le x - 1/m$, что противоречит определению числа x.

Рассмотрим теперь случай (ii) $x^n < a$. Тогда число $\delta := a - x^n > 0$. Для числа m такого, что $\dfrac{1}{m} < \dfrac{x}{2n} \iff m > \dfrac{2n}{x}$, согласно неравенству упражнения 72, имеем $\left(x + \dfrac{1}{m}\right)^n < x^n + \dfrac{2nx^{n-1}}{m}$. Если теперь число m взять таким, чтобы $m > \left\{\dfrac{2n}{x}, \dfrac{2nx^{n-1}}{\delta}\right\}$, то $\left(x + \dfrac{1}{m}\right)^n < x^n + \delta = a$. Следовательно, число $\left(x + \dfrac{1}{m}\right) \in A$ и $x + \dfrac{1}{m} > x$, что противоречит определению числа x.

Таким образом случаи (i) и (ii) приводят к противоречиям и, следовательно, справедливо равенство $x^n = a$. Число, удовлетворяющее последнему равенству, является единственным. ⌋

Теорема о существовании корня натуральной степени является основой следующего определения.

Определение 10. *Пусть $a > 0$ и $n \in N$.* ***Корнем n-ой степени*** *из положительного числа a называется единственное положительное число x, удовлетворяющее равенству $x^n = a$.*

Обозначения для числа x: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. Условимся также считать, что $\sqrt[n]{0} = 0$, $n \in N$.

Определение 11. *Пусть $a > 0$ и $r \in Q$, $r > 0$. По определению $a^r := (a^m)^{1/n}$, где $r = \dfrac{m}{n}$, $m \in N$, $n \in N$.*

Определение 12. *Пусть* $a > 1$ *и* $b > 0$. *Положим по определению* $a^b := \sup\limits_{n \geq 0} a^{b'_n}$.

Введенная выше операция возведения в степень обладает всеми известными из школьного курса математики свойствами.

Упражнение 76. Доказать существование точной верхней грани в определении 12. Доказать также, что $a^b = \sup\limits_{n \geq 0} (a'_n)^{b'_n}$.

Упражнение 77. Привести определение a^b для случая $0 < a < 1$.

Упражнение 78. Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$, $B \subset \boldsymbol{R}$ – ограниченные сверху множества. Доказать, что $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, где $A + B := \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$.

Упражнение 79. Доказать, что $\sup\limits_{n \geq 0} \{\sqrt{n}\} = 1$. Здесь $\{a\} := a - [a]$, и $[a]$ – наибольшее целое число, не превосходящее a.

Упражнение 80*. Доказать, что $\inf\limits_{n \geq 0} \sin n = -1$, $\sup\limits_{n \geq 0} \sin n = 1$.

Указание. Использовать без доказательства то, что $\pi \notin \boldsymbol{Q}$.

Упражнение 81*. Числа, которые не являются алгебраическими, называются *трансцендентными*[4]. Доказать, что множество трансцендентных чисел имеет мощность континуум.

Упражнение 82. Для числа $\sqrt{2} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots$ найти значения α_0, α_1, α_2 и α_3.

Указание. Поскольку $1 < \sqrt{2} < 2 \iff 1 < 2 < 4$, то $\alpha_0 = 1$. Затем проверить, что число $\sqrt{2} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$ лежит в интервале $\left(\dfrac{4}{10}, \dfrac{5}{10}\right)$. Таким образом, $\alpha_1 = 4$. После этого легко проверить, что $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{5 + 5\sqrt{2}} \in \left(\dfrac{1}{100}, \dfrac{2}{100}\right)$, откуда следует $\alpha_2 = 1$ и т. д.

1.5.11 Лемма о вложенных отрезках

Теорема 15. *Пусть* $\{[a_n, b_n] \ :\ n \geq 1\}$ *— последовательность отрезков, удовлетворяющая условиям: 1)* $\forall\, n \geq 1 :$ $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$; *2)* $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n \in \boldsymbol{N} :\ b_n - a_n < \varepsilon$;

Тогда $\exists!\, x \in \boldsymbol{R}\ \forall\, n \geq 1 :\ x \in [a_n, b_n]$, *то есть* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x\}$.

[4]От лат. transcendo — выходящий за пределы, превышающий.

⌈ Поскольку $[a,b] \subset [c,d] \iff c \le a < b \le d$, то в силу условия 1) $\forall n \ge 1 : a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n < b_n \le b_{n-1} \le \ldots \le b_1$. Рассмотрим множество $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ и докажем, что при любом $m \in \boldsymbol{N}$ число b_m есть верхняя грань для множества A. Действительно, если $n \le m$, то по условию 1) $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n] \iff a_n \le a_m < b_m \le b_n$, откуда $a_n < b_m$. Если же $n > m$, то по условию 1) $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \iff a_m \le a_n < b_n \le b_m$, и снова $a_n < b_m$.

По теореме о существовании точных граней $\exists x \in \boldsymbol{R} : x = \sup A$, причём, согласно определению точной верхней грани, $\forall n \in \boldsymbol{N} : a_n \le x$ и $\forall m \in \boldsymbol{N} : x \le b_m$. Поэтому $\forall n \in \boldsymbol{N} : x \in [a_n, b_n]$.

Пусть $y \in \boldsymbol{R}$ такое число, что $\forall n \in \boldsymbol{N} : y \in [a_n, b_n]$. Допустим, что $y \ge x$. Из условия 2) следует, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \boldsymbol{N} : 0 \le y - x \le b_n - a_n < \varepsilon$, то есть $\forall \varepsilon > 0 : 0 \le y - x < \varepsilon$, откуда $y = x$ (если $y > x$, то достаточно взять $\varepsilon = (y-x)/2$ для получения противоречия). ⌋

Упражнение 83. Доказать, что теорема 15 не верна, если вместо отрезков рассматривать интервалы или полуинтервалы. Рассмотреть последовательность $(0, 1/n]$, $n \ge 1$.

Упражнение 84. Как изменится утверждение теоремы 15, если опустить условие 2)?

Упражнение 85.* Приняв утверждение теоремы 15 в качестве аксиомы, доказать теорему о существовании точных граней.

Упражнение 86. (Теорема Хелли). Любая система отрезков, каждые два из которых имеют общую точку, имеют непустое пересечение.

1.5.12 Неравенства Коши

Для суммы и произведения действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ введём обозначения $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Упражнение 87. Проверить, что

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$, b) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} a_k$, c) $\sum\limits_{k=1}^{n} (ca_k) = c\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,

d) $\sum\limits_{k=1}^{2m} a_k = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{2j} + \sum\limits_{j=1}^{m} a_{2j-1}$, e) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

Теорема 16. *(Неравенство Коши). Пусть для $n \in \boldsymbol{N}$ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n\}$[5] $\subset \boldsymbol{R}$.*

[5]Здесь и далее обозначение $\{a,b\} \subset \mathrm{R}$, и аналогичные ему, не предполагает, что элементы a и b различны.

Тогда справедливо неравенство $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$, *в котором знак равенства возможен тогда и только тогда, когда* $\exists\,\lambda \in \boldsymbol{R}\ \exists\,\mu \in \boldsymbol{R}, |\lambda| + |\mu| \ne 0: \quad \lambda a_k = \mu b_k,\ 1 \le k \le n.$

$\ulcorner$ Если $A := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0 \iff \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}: \ a_k = 0$ или аналогично $B := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 = 0 \iff \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}: \ b_k = 0$, то неравенство выполняется со знаком равенства. При этом, если $A = 0$, то можно положить $\lambda = 1$, $\mu = 0$, а если $B = 0$, то $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

Пусть теперь $A > 0$ и $B > 0$. Тогда можно считать, что $A = B = 1$. Если это не так, перейти к числам $\alpha_k := \dfrac{a_k}{\sqrt{A}}$, $\beta_k := \dfrac{b_k}{\sqrt{B}}$; $1 \le k \le n$.

Заметим теперь, что для любых действительных чисел a и b имеем $|ab| \le \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \iff 0 \le (|a| - |b|)^2$, пичём знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $|a| = |b|$. С помощью этого неравенства имеем $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2}(a_k^2 + b_k^2) = \dfrac{1}{2}(A + B) = 1$, причём знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $|a_k| = |b_k|$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le 1.$ $\lrcorner$

Упражнение 88. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \boldsymbol{R}$. Доказать неравенства $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \le \sqrt{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \le \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|\sqrt{n}.$

Упражнение 89. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset (0, +\infty)$. Доказать неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k} \ge n^2.$

Упражнение 90. Рассмотрим наборы $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ такие, что $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$. Для таких наборов определить наименьшее значение суммы: a) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$, b) $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^2$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — фиксированные положительные числа.

Упражнение 91. Определить минимальное значение следующей суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ при условии $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k = 1$ с заданными числами $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Упражнение 92. Для любых чисел $\{a, b, c\} \subset \boldsymbol{R}$ доказать неравенство $|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \le |b - c|$.

4 — 4-1168

Указание. Домножить на сумму; неравенство имеет простую геометрическую трактовку.

Упражнение 93. Доказать, что для $n > 1$ справедливо неравенство $\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^n > n$.

Указание. Согласно неравенству Бернулли имеем неравенство $\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^n = \left[\left(\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)^n\right]^2 = \left[\left(1+\left(\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}-1\right)\right)^n\right]^2 >$ $> n^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}-1\right)^2$. Далее $\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}-1 > \frac{1}{\sqrt{n}} \iff 1+\frac{3}{\sqrt{n}} >$ $> \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \iff 1+\frac{3}{\sqrt{n}} > 1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n} \iff \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n},\ n>1$.

Упражнение 94. Пусть $\{a_k,\ b_k,\ c_k \mid 1 \le k \le n\} \subset \boldsymbol{R}$. Доказать справедливость неравенства $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k c_k\right)^4 \le \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^4 \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^4 \left(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2\right)^2$.

Упражнение 95. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \boldsymbol{R}$. Доказать следующее неравенство $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \le (n-1)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 + 2a_1a_2\right)$.

Определение 13. *Предположим, что $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \boldsymbol{R}$.* ***Средним арифметическим*** *чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число $A_n := \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.*

Упражнение 96. Доказать, что: a) $\min\limits_{1\le k\le n} a_k \le A_n \le \max\limits_{1\le k\le n} a_k$; b) $\min\limits_{1\le k\le n} a_k < A_n < \max\limits_{1\le k\le n} a_k$, если не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ одинаковы.

Определение 14. *Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset [0, +\infty)$.* ***Средним геометрическим*** *чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется следующее число $G_n := \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.*

Упражнение 97. Доказать, что $\min\limits_{1\le k\le n} a_k \le G_n \le \max\limits_{1\le k\le n} a_k$. В каком случае оба неравенства строгие?

Определение 15. *Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset (0, +\infty)$.* ***Средним гармоническим*** *чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется такое число $H_n := \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$.*

Упражнение 98. Доказать, что $\min\limits_{1\le k\le n} a_k \le H_n \le \max\limits_{1\le k\le n} a_k$.

Теорема 17. ***(Неравенство Коши).*** *Для любого набора чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset [0, +\infty)$ справедливо неравенство*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

причём знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

⌈ Заметим, что неравенство выполняется со знаком равенства, если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, поскольку тогда $A_n = G_n = a_1$, и что имеет место строгое неравенство, если хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно 0 и они не все одинаковы. При $n = 1$ утверждение очевидно.

Пусть теперь числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны и $n > 1$, тогда имеем $\dfrac{A_n}{A_{n-1}} > 0 \iff \dfrac{A_n}{A_{n-1}} - 1 > -1$. С помощью неравенства Бернулли получим следующее неравенство

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right) = \frac{A_{n-1} + nA_n - nA_{n-1}}{A_{n-1}} = \frac{a_n}{A_{n-1}},$$

и, следовательно, $A_n^n \geq a_n A_{n-1}^{n-1}$. Отсюда $A_n^n \geq a_n A_{n-1}^{n-1} \geq a_n a_{n-1} A_{n-2}^{n-2} \geq \ldots \geq a_n a_{n-1} \ldots a_2 A_1^1 = G_n$, поэтому $A_n \geq G_n$.

Поскольку $n > 1$, то знак равенства в неравенстве Бернулли возможен тогда и только тогда, когда $\dfrac{A_n}{A_{n-1}} - 1 = 0$, то есть когда $A_n = A_{n-1}$, откуда следует, что $a_n = A_{n-1} = A_n$. Поэтому знак равенства в неравенстве $A_n \geq G_n$ возможен тогда и только тогда, когда

$$a_n = A_n = A_{n-1}, \; a_{n-1} = A_{n-1} = A_{n-2}, \; \ldots, \; a_2 = A_2 = A_1 = a_1. \quad ⌋$$

Упражнение 99. Вывести неравенство Бернулли из неравенства Коши теоремы 17.

Указание. Рассмотреть величину $\sqrt[n]{\underbrace{(1+nx) \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n}}$. Таким образом, неравенства Бернулли и Коши равносильны.

Упражнение 100. Доказать, что $H_n \leq G_n$, причём знак равенства возможен тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Таким образом, $H_n \leq G_n \leq A_n$.

Упражнение 101. Доказать, что $\forall\, n \geq 1: \; \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{2}{3}$.

Упражнение 102. Многочлен $x^{13} - 13x^{12} + \ldots - 1$ имеет 13 положительных корней. Найти эти корни.

Упражнение 103. Доказать, что $\dfrac{\sqrt{n}}{2} \le \sqrt[n]{n!} \le \dfrac{n+1}{2}$. $n \geq 1$

Упражнение 104. Для любого набора чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset (0,1)$ справедливо неравенство $\prod\limits_{k=1}^{n} (1 - a_k) \ge 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

1.5.13 Историческая справка

Бернулли Якоб (1654 — 1705) — представитель замечательной семьи швейцарских математиков Бернулли. Один из основателей методов математического анализа и вариационного исчисления. Решил ряд задач комбинаторики (ввёл числа Бернулли), автор первого закона больших чисел (теорема Бернулли) в теории вероятностей. Среди его учеников был П. Эйлер — отец Л. Эйлера. О семье Бернулли см. книгу ***В. А. Никифоровского*** Великие математики Бернулли. Москва. Наука. 1984.

Коши Огюстен Луи (1789 — 1857) — выдающийся французский математик. Много внимания уделял логическому построению математического анализа. Автор ряда основополагающих понятий и результатов математического анализа, теории аналитических функций, геометрии, математической физики. Написал свыше 800 научных работ.

Являющееся основным для математического анализа глубокое и абстрактное понятие действительного числа оказалось исключительно трудным для понимания. К этому понятию математики пришли после введения производной, интеграла, теории рядов и т. п., и это обстоятельство до середины XIX в. лишало логического обоснования новейшие и эффективные достижения математики того времени. Различные теории иррациональных чисел были построены только в семидесятые годы XIX в. ***Ш. Мерэ*** (1835 — 1911), ***К. Вейерштрассом*** (1815 — 1897), ***Р. Дедекиндом*** (1831 — 1916), а затем ***Э. Гейне*** (1821 — 1881) и ***Г. Кантором.***

Глава 2

Предел последовательности действительных чисел

2.1 Определения и примеры

2.1.1 Определения

В этой главе изучаются свойства последовательностей действительных чисел. Эти свойства характеризуются тем, что они не зависят от любого произвольного конечного числа членов последовательности.

Определение 1. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subset R$ *называется* ***ограниченной последовательностью,*** *если* $\exists C > 0\ \forall n \geq 1 : \quad |a_n| \leq C$.

Замечание. Иными словами, последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ограничена тогда и только тогда, когда существует отрезок $[-C, C]$, на котором лежат все члены последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$. Если последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ограничена, то полученная из нее произвольной заменой произвольного конечного числа членов последовательность также ограничена.

Примеры. 1. Последовательность $\{(-1)^n \mid n \geq 1\}$ ограничена и её члены лежат в отрезке $[-1, 1]$.

2. Последовательность $\{\sin n \mid n \geq 1\}$ ограничена и её члены лежат в отрезке $[-1, 1]$.

3. Последовательность $\{n \mid n \geq 1\}$ не является ограниченной, так как для любого $C > 0$ в силу аксиомы Архимеда существует $n \in N : \ n > C$.

4. Последовательность $\{n2^{-n} \mid n \geq 1\}$ является ограниченной и лежит в отрезке [0,1] в силу результата упражнения 73 гл. 1.

Упражнение 1. Доказать ограниченность последовательности:

a) $\left\{\dfrac{2^n}{n!} \;\middle|\; n \geq 1\right\}$; b) $\left\{a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ корней}} \;\middle|\; n \geq 1\right\}$;

c) $\left\{a_n = 1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\ldots+\dfrac{n}{2^{n-1}} \;\middle|\; n \geq 1\right\}$; d) $\{\sqrt{n^2+n\sin n+1}-n \mid n \geq 1\}$.

Указания. c) Заметить, что $\dfrac{1}{2}a_n = a_n - \dfrac{1}{2}a_n$. d) Использовать неравенство $\sqrt{2} < 2$.

Упражнение 2. Определить значения $x \in \boldsymbol{R}$, для которых последовательность $\left\{\left(\dfrac{x}{2}\right)^n + x^{-n} \;\middle|\; n \geq 1\right\}$ ограничена.

Упражнение 3*. Доказать, что последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена последовательность $\{a_n^3 - a_n \mid n \geq 1\}$.

Определение 2. *Пусть $x \in \boldsymbol{R}$ и $\varepsilon > 0$ – заданы.* ***Окрестностью*** *или* ***ε-окрестностью*** *точки x называется интервал $B(x,\varepsilon) := (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{y \in \boldsymbol{R} \mid |y-x| < \varepsilon\}$.*

Упражнение 4. Проверить, что: a) $(a,b) = B\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right)$; b) пересечение конечного числа окрестностей точки x есть окрестность точки x; c) пересечение двух окрестностей есть либо $\varnothing$, либо окрестность.

Определение 3. *Число $a \in \boldsymbol{R}$ называется* ***пределом последовательности*** *$\{a_n \mid n \geq 1\}$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \boldsymbol{R} \ \forall n \geq N: \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначения: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ или $a_n \to a$, $n \to \infty$.

Замечания. 1. Если число a удовлетворяет определению 3, то говорят, что последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ***сходится*** к числу a или ***стремится*** к числу a, а сама последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ называется ***сходящейся.*** Если для последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ числа a, удовлетворяющего определению 3, не существует, то последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ называется ***расходящейся.***

2. Обратимся к числовой прямой. Определение 3 означает следующее: число a есть предел последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$, если любая

ε-окрестность точки a содержит все члены этой последовательности, начиная с некоторого. Действительно, $|a_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \iff a_n \in B(a, \varepsilon)$.

3. Заметим, что $\exists\, N \in \boldsymbol{N}\; \forall\, n \geq N \ldots \iff \exists\, N \in \boldsymbol{R}\; \forall\, n \geq N \ldots$.

4. Если некоторого $\varepsilon_0 > 0 \;\; \exists\, N_0 \in \boldsymbol{N}\; \forall\, n \geq N_0 : \;\; |a_n - a| < \varepsilon_0$, то для любого $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ имеем $\exists\, N = N_0\; \forall\, n \geq N_0 : \;\; |a_n - a| < \varepsilon_0 \leq \varepsilon$. Таким образом, для любого числа $\varepsilon_0 > 0$ определение 3 равносильно следующему: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \iff \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\; \exists\, N \in \boldsymbol{N}\; \forall\, n \geq N :$ $|a_n - a| < \varepsilon$.

5. Обратим также внимание на то, что имеют место равенства следующего вида $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$.

6. В определении 3 для каждого $\varepsilon > 0$ любое из чисел некоторого множества $A_\varepsilon \subset \boldsymbol{R}$ можно взять в качестве N. Например, если число N удовлетворяет условию определения 3, то любое число $N + C$, где $C > 0$, также удовлетворяет этому условию. Число N в определении 3 есть одно (любое) из чисел A_ε. Обычно множество A_ε изменяется с изменением ε, а именно, "сдвигается" вправо с уменьшением ε. В некоторых случаях удаётся найти $\inf A_\varepsilon$, тогда можно положить $N = \inf A_\varepsilon + 1$.

Упражнение 5. Для каких последовательностей $\{a_n \mid n \geq 1\}$ число N в определении 3 можно взять одним и тем же для любого $\varepsilon > 0$?

Ответ: $\exists\, m \in \boldsymbol{N} \;\; \forall\, n \geq m \; : \;\; a_n = a$.

Упражнение 6. Доказать, что предел последовательности не зависит от порядка следования её членов. Точнее, для сходящейся к числу a последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ и любой биекции $\sigma : \;\; \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ последовательность $\{a_{\sigma(n)} \mid n \geq 1\}$ также сходится к числу a.

Указание. Это несколько неожиданное на первый взгляд утверждение становится простым, если обратиться к числовой прямой: для любого $\varepsilon > 0$ вне ε-окрестности точки a лежит только конечное число членов последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$, следовательно, и членов последовательности $\{a_{\sigma(n)} \mid n \geq 1\}$ также.

Упражнение 7. Доказать утверждения:

a) $a_n \to a, \;\; n \to \infty \iff |a_n - a| \to 0, \;\; n \to \infty$;

b) $a_n \to 0, \;\; n \to \infty \iff |a_n| \to 0, \;\; n \to \infty$;

c) $a_n \to a, \;\; n \to \infty \iff \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \boldsymbol{N} : \;\; \{a_N, a_{N+1}, \ldots\} \subset B(a, \varepsilon)$;

d) $a_n \to 0, \;\; n \to \infty \iff \sup\limits_{k \geq n} |a_k| \to 0, \;\; n \to \infty$;

e) $a_n \to a, \;\; n \to \infty \implies |a_n| \to |a|, \;\; n \to \infty$.

Указание к e). Воспользоваться неравенством $\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a|$.

Упражнение 8. Какое свойство последовательности содержится в утверждении $\exists a \in \boldsymbol{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \boldsymbol{N} \quad \forall n \geq N : \quad |a_n - a| < \varepsilon$?

Упражнение 9. Привести пример последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$, для которой $\exists a \in \boldsymbol{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \boldsymbol{N} \quad \forall n \geq N : \quad |a_n - a| \geq \varepsilon$.

Теорема 1. *Последовательность действительных чисел может иметь только один предел.*

⌈ Пусть $a_n \to a$, $n \to \infty$ и $a_n \to b$, $n \to \infty$. Тогда согласно определению 3 имеем $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 \; \forall n \geq N_1 : \quad |a_n - a| < \varepsilon$ и $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_2 \; \forall n \geq N_2 :$ $|a_n - b| < \varepsilon$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \; \forall n \geq \max(N_1, N_2) : \quad |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 : \quad |a - b| < 2\varepsilon$. Если $a \neq b$, положим $\varepsilon = \dfrac{1}{3}|a-b| > 0$. Тогда $|a-b| < \dfrac{2}{3}|a-b| \implies \dfrac{1}{3}|a-b| < 0$, что невозможно. Следовательно, $a = b$. ⌋

2.1.2 Примеры

3. Последовательность $\{a, a, \ldots, a, \ldots\}$, где $a \in \boldsymbol{R}$ сходится к числу a. В определении 3 для любого $\varepsilon > 0$ можно положить $N = 1$.

Теорема 2. *Справедливо равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

⌈ Заметим сначала, что для любого $\varepsilon > 0 : \quad \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N := \left(\dfrac{1}{\varepsilon} + 1\right) \in \boldsymbol{R} \quad \forall n \geq N : \quad \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. ⌋

Следствие 1. *Для любого $k \in \boldsymbol{N}$* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$.

⌈ Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N := \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \in \boldsymbol{R} \quad \forall n \geq N : \quad \left|\frac{1}{n^k} - 0\right| = \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon. \quad ⌋$$

Следствие 2. *Для любого $k \in \boldsymbol{N}$* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$.

⌈ Действительно, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N := \left(\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^k + 1\right) \in \boldsymbol{R} \; \forall n \geq N : \quad \left|\dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} - 0\right| =$

$$= \frac{1}{\sqrt[k]{n}} \leq \frac{1}{\sqrt[k]{N}} < \varepsilon. \quad ⌋$$

Следствие 3. *Для любого $\alpha > 0$* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$.

Указание. Для любого $\alpha > 0$ существуют натуральные числа k и m такие, что $\dfrac{1}{k} \leq \alpha \leq m$.

Теорема 3. *Пусть* $a \in \boldsymbol{R}, |a| > 1,\ \alpha \in \boldsymbol{R}$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

⌈ Пусть $k \in N$ таково, что $k \geq 1 + \alpha$. Согласно неравенству Бернулли для любого $n \in N$ получаем $|a|^n = (|a|^{n/k})^k = ((1 + (|a|^{1/k} - 1))^n)^k >$ $> n^k(|a|^{1/k} - 1)^k$. Поэтому $\left|\dfrac{n^\alpha}{a^n} - 0\right| = \dfrac{n^\alpha}{|a|^n} \leq \dfrac{n^{k-1}}{|a|^n} < \dfrac{1}{n(|a|^{1/k} - 1)^k} <$ $< \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon(|a|^{1/k} - 1)^k}$. Следовательно, можно утверждать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N := \frac{1}{\varepsilon(|a|^{1/k} - 1)^k} + 1 \quad \forall n \geq N : \quad \left|\frac{n^\alpha}{a^n} - 0\right| < \varepsilon. \qquad ⌋$$

Следствие 4. *Справедливы утверждения:*

1) $\forall a \in \boldsymbol{R}, |a| > 1 : \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = 0$; *2)* $\forall a \in \boldsymbol{R}, |a| < 1 : \quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$;

3) $\forall a \in \boldsymbol{R}, |a| < 1 \quad \forall \alpha \in \boldsymbol{R} : \quad \lim\limits_{n\to\infty} (n^\alpha a^n) = 0$.

Указание к 2) и 3). При $a = 0$ утверждения очевидны. Если же $a \neq 0$, то положить $b := \dfrac{1}{a}$, тогда $|b| > 1$.

Теорема 4. *Справедливо утверждение* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lg n}{n} = 0$.

⌈ Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. Заметим, что для любого $n \in N$ имеем $0 \leq \dfrac{\lg n}{n} < \varepsilon \iff n < 10^{n\varepsilon} \iff \dfrac{n}{(10^\varepsilon)^n} < 1$. Согласно теореме 3 имеем $\dfrac{n}{(10^\varepsilon)^n} \to 0,\quad n \to \infty$, откуда на основании определения 3 для числа $\varepsilon = 1 : \quad \exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 : \quad \dfrac{n}{(10^\varepsilon)^n} < 1$. Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_1\ \forall n \geq N : \quad \left|\frac{\lg n}{n} - 0\right| = \frac{\lg n}{n} < \varepsilon. \qquad ⌋$$

Теорема 5. *Справедливо утверждение* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

⌈ Согласно упражнению 93 гл. 1 $\left(1 + \dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)^n > n, \quad n > 1$, откуда следует, что $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{3}{\sqrt{n}}, \quad n > 1$. Тогда можно утверждать, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N := \frac{9}{\varepsilon^2} + 1\ \forall n \geq N : \ |\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{3}{\sqrt{n}} \leq \frac{3}{\sqrt{N}} < \varepsilon. ⌋$$

Упражнение 10. Доказать, что:

1) $\forall \alpha > 0 \quad \forall \beta > 0 : \quad \dfrac{\lg^\beta n}{n^\alpha} \to 0, \quad n \to \infty$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2} = 1$;

3) $\forall a > 0 : \quad \sqrt[n]{a} \to 1, \quad n \to \infty$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + |\sin n|} = 1$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Пример. 4. Последовательность $\{a_n = n \mid n \geq 1\}$ предела не имеет.
⌈ Согласно определению 3 нужно убедиться, что любое число $a \in R$ не удовлетворяет этому определению. Действительно, для любого $a \in R$ и любого $\varepsilon > 0$ окрестность $B(a,\varepsilon)$ содержит не более $1 + [2\varepsilon]$ целых чисел. Поэтому, начиная с некоторого номера, все члены последовательности лежат вне $B(a,\varepsilon)$. ⌋

Замечания. 1. Определение 1 – это определение ограниченной последовательности. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$, не удовлетворяющая этому определению, обладает следующим свойством $\forall\, C > 0 \quad \exists\, n \geq 1 \ : \quad |a_n| > C$.

2. Тот факт, что число a не является пределом последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$, можно записать следующим образом $\exists\, \varepsilon^* > 0\ \forall\, N \in N\ \exists\, n \geq N : \quad |a_n - a| \geq \varepsilon^*$. Последнее означает, что вне окрестности $B(a,\varepsilon^*)$ лежит бесконечное множество членов последовательности.

Определение 4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall\, C \in R\ \exists\, N\ \forall\, n \geq N :$ $a_n \geq C$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff \forall\, C \in R\ \exists\, N\ \forall\, n \geq N : \ a_n \leq C$.

Упражнение 11. Доказать, что следующая последовательность $\left\{\dfrac{1}{3}, 1 - \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, 1 - \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, 1 - \dfrac{1}{5}, \ldots\right\}$ не имеет предела.

Упражнение 12. Пусть $\{a_n \mid n \geq 1\} \subset R \setminus \{0\}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$.

Упражнение 13*. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^{\sqrt{n}}} = 0$.

Упражнение 14. Проверить, что предел последовательности не зависит от произвольного изменения произвольного фиксированного конечного числа членов последовательности.

Упражнение 15. Доказать утверждение. Последовательность чисел $\{a_n \mid n \geq 1\}$ не сходится к числу a тогда и только тогда, когда $\exists\, \varepsilon^* > 0 :$ множество $\{n \in N \mid |a_n - a| \geq \varepsilon^*\}$ бесконечно.

Упражнение 16. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ такова, что $\dfrac{a_n}{n} \to 0, \quad n \to \infty$. Доказать, что $\dfrac{\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}{n} \to 0, \quad n \to \infty$.

Упражнение 17. Предположим, что $a_n \to a, \quad b_n \to b, \quad n \to \infty$. Доказать, что $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{a, b\}, \quad \to \infty$.

Упражнение 18. Доказать, что последовательность $\{\{\sqrt{n}\} \mid n \geq 1\}$ предела не имеет.

Упражнение 19. Доказать, что последовательность $\{\sin n \mid n \geq 1\}$ предела не имеет.

Упражнение 20. Доказать, что $\forall\, a \in R$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Указание. $\forall\, a \in R \quad \exists\, k \in N \ : \quad k+1 > |a|$ и для $n > k$ имеем $\dfrac{|a|^n}{n!} = \dfrac{|a|^k}{k!}\,\dfrac{|a|}{k+1}\,\dfrac{|a|}{k+2}\cdots\dfrac{|a|}{n} < \dfrac{|a|^k}{k!}\left(\dfrac{|a|}{k+1}\right)^{n-k}$, причём $\dfrac{|a|}{k+1} < 1$.

Упражнение 21*. Пусть $a > 0$. Для произвольного $x_0 > 0$ рассмотрим последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$, члены которой определяются равенствами $a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{a}{a_{n-1}}\right)$, $n \geq 1$; $a_0 = x_0$. Доказать, что $a_n \to \sqrt{a}$, $n \to \infty$.

Указание. С помощью математической индукции проверить равенство $\dfrac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}} = \left(\dfrac{a_0 - \sqrt{a}}{a_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$, $n \geq 1$, откуда $\dfrac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}} \to 0$, $n \to \infty$. Из этого соотношения получить нужное утверждение.

Упражнение 22*. Привести пример ограниченной последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$, которая не имеет предела и для которой $a_{n+1} - a_n \to 0$, $n \to \infty$.

2.2 Свойства сходящихся последовательностей

2.2.1 Доказательства теорем

Теорема 6. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

⌈ Пусть $a_n \to a \in R$, $n \to \infty$. Согласно определению предела последовательности для числа $\varepsilon = 1 > 0$: $\exists N \in N \ \ \forall n \geq N$: $|a_n - a| < 1$. Положим $C := \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a| + 1)$. Тогда для $n \in \{1, 2, 3, \ldots, N-1\}$ по определению числа C имеем $|a_n| \leq C$. Для значений $n \geq N$ справедливы неравенства $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq C$. Таким образом, $\forall\, n \in N$: $|a_n| \leq C$. ⌋

Упражнение 23. Привести пример ограниченной последовательности, не имеющей предела.

Теорема 7. *Пусть $a_n \to a \in \boldsymbol{R}$, $n \to \infty$ и число $b > a$. Тогда $\exists\, N \in \boldsymbol{N}$ $\forall\, n \geq N$: $a_n < b$. Аналогично, $\forall\, c < a$ $\exists\, K \in \boldsymbol{N}$ $\forall\, n \geq K$: $c < a_n$.*

⌈ Докажем первое утверждение. По определению предела последовательности для числа $\varepsilon = b - a > 0$ $\exists\, N \in \boldsymbol{N}$ $\forall\, n \geq N$: $|a_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Longrightarrow a_n < b$. ⌋

Упражнение 24. Пусть $a_n \to a > 0$, $n \to \infty$. Доказать, что $\exists\, N \in \boldsymbol{N}$ $\forall\, n \geq N$: $a_n > 0$.

Упражнение 25. Пусть $a_n \to a \neq 0$, $n \to \infty$. Доказать, что $\exists\, N \in \boldsymbol{N}$ $\forall\, n \geq N$: $a_n \neq 0$.

Теорема 8. *Предположим, что для последовательностей $\{a_n \mid n \geq 1\}$ и $\{b_n \mid n \geq 1\}$ выполнены условия: 1) $a_n \to a$, $b_n \to b$, $n \to \infty$; 2) $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$: $a_n \leq b_n$. Тогда $a \leq b$.*

⌈ Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. Согласно неравенству $a - \varepsilon < a$ по теореме 7 имеем $\exists\, N_1 \in \boldsymbol{N}$ $\forall\, n \geq N_1$: $a - \varepsilon < a_n$. Аналогично $\exists\, N_2 \in \boldsymbol{N}$ $\forall\, n \geq N_2$: $b_n \leq b + \varepsilon$. Таким образом, $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N :=$ $= \max(N_1, N_2)$ $\forall\, n \geq N$: $a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon$. Следовательно, $\forall\, \varepsilon > 0$: $a - \varepsilon < b + \varepsilon \iff a - b < 2\varepsilon$, откуда следует, что $a - b \leq 0$, то есть $a \leq b$. ⌋

Упражнение 26. Пусть $a_n = 0$, $b_n = 1/n$, $n \geq 1$; $a = 0$, $b = 0$. При этом $a_n < b_n$, $n \geq 1$. Этот пример показывает, что замена условия 2) теоремы 8 строгим неравенством не приводит к строгому неравенству для пределов.

Упражнение 27. Доказать, что утверждение теоремы 8 сохраняется, если условие 2) заменить более слабым $\exists\, m \in \boldsymbol{N}$ $\forall\, n \geq m$: $a_n \leq b_n$.

Теорема 9. *(О трех последовательностях). Пусть последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$, $\{b_n \mid n \geq 1\}$, $\{c_n \mid n \geq 1\}$ удовлетворяют условиям: 1) $a_n \to a \in \boldsymbol{R}$, $c_n \to a$, $n \to \infty$; 2) $\forall\, n \geq 1$: $a_n \leq b_n \leq c_n$. Тогда $b_n \to a$, $n \to \infty$.*

⌈ Для каждого $\varepsilon > 0$ согласно теореме 7 имеем $\exists\, N_1 \in \boldsymbol{N}$ $\forall\, n \geq N_1$: $a - \varepsilon < a_n$ и $\exists\, N_2 \in \boldsymbol{N}$ $\forall\, n \geq N_2$: $c_n < a + \varepsilon$. Поэтому с учётом условия 2) получим такое утверждение $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N := \max(N_1, N_2)$ $\forall\, n \geq N$: $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$, откуда имеем $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N \in \boldsymbol{N}$ $\forall\, n \geq N$: $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon \iff |b_n - a| < \varepsilon$. ⌋

Теорема 10. *Пусть $a_n \to a \in \boldsymbol{R}$, $b_n \to b \in \boldsymbol{R}$, $n \to \infty$.*

Тогда a) $\forall c \in \boldsymbol{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$; *b)* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; *c)* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

d) если дополнительно $b \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

⌈ Доказательство c). Сначала заметим, что для любого $n \geq 1$

$$|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n - a|\cdot|b_n| + |a|\cdot|b_n - b|. \quad (1)$$

Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. По теореме 6 $\exists\, C > 0 \quad \forall n \geq 1$: $|b_n| \leq C$, а согласно определению предела последовательности $\exists\, N_1 \in \boldsymbol{N}\ \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2C}$, и $\exists\, N_2 \in \boldsymbol{N}\ \forall n \geq N_2 : |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$. Таким образом, с помощью (1) имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N := \max(N_1, N_2)\ \forall n \geq N$: $|a_nb_n - ab| < \dfrac{\varepsilon}{2C}C + |a|\dfrac{\varepsilon}{2(|a|+1)} < \varepsilon.$

Доказательство d). Для определённости пусть $b > 0$. По теореме 7 с учётом неравенства $\dfrac{b}{2} < b$ имеем $\exists\, N_1 \in \boldsymbol{N} \quad \forall n \geq N_1 : \quad \dfrac{b}{2} < b_n$, а согласно определению предела последовательности для $\varepsilon > 0$ получаем $\exists\, N_2 \in \boldsymbol{N}\ \forall n \geq N_2 : \quad |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon b}{4}$ и $\exists\, N_3 \in \boldsymbol{N}\ \forall n \geq N_3 : \quad |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon b^2}{4(|a|+1)}$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, N := \max(N_1, N_2, N_3)\ \forall n \geq N$:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_nb - ab_n}{bb_n}\right| = \frac{|a_nb - ab + ab - ab_n|}{|bb_n|} \leq \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a|\cdot|b_n - b|}{|bb_n|}$$
$$< \frac{\varepsilon b}{4}\frac{2}{b} + \frac{2|a|}{b^2}\frac{\varepsilon b^2}{4(|a|+1)} < \varepsilon.$$
⌋

Упражнение 28. Доказать утверждения a) и b) теоремы 10.

Упражнение 29. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ограничена, а последовательность $b_n \to 0, \quad n \to \infty$. Доказать, что $a_nb_n \to 0, \quad n \to \infty$.

Упражнение 30. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ограничена, а последовательность $b_n \to +\infty, \quad n \to \infty$. Доказать, что $a_n + b_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

2.2.2 Примеры применения

Рассмотрим примеры применения теорем предыдущего пункта.

1. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}} = 1.$

⌈ Пусть в теореме 9 для $n \in N$ $a_n = 1$, $b_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}$, $c_n = \sqrt[n]{n}$; при этом $a_n < b_n < c_n$, $n > 1$ и $a_n \to 1$, $c_n \to 1$, $n \to \infty$. ⌋

2. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 2^n + 5^n} = 5$.

⌈ Заметим сначала, что для любого $n \geq 1$: $5 = \sqrt[n]{5^n} < \sqrt[n]{n^2 2^n + 5^n} < \sqrt[n]{2n^2 5^n}$. Положим в теореме 9 для $n \geq 1$ $a_n = 5$, $b_n = \sqrt[n]{n^2 2^n + 5^n}$, $c_n = \sqrt[n]{2n^2 5^n}$. Тогда $a_n < b_n < c_n$, $n \geq 1$ и, кроме того, имеем $a_n \to 5$, $c_n = 5\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2 \to 5$, $n \to \infty$ в силу теоремы 10 и того, что $\sqrt[n]{2} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$, $n \to \infty$. ⌋

3. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + n\lg n + 3}{2n^2 + \sin n + 1} = \dfrac{1}{2}$.

⌈ Теорема 10 непосредственно не применима. Однако, стоящую под знаком предела дробь можно представить в виде $\dfrac{n^2 + n\lg n + 3}{2n^2 + \sin n + 1} = \dfrac{1 + \frac{\lg n}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{\sin n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}$. К правой части последнего равенства можно применить теорему 10. Действительно, сначала с помощью теоремы 4, следствия 1 и теоремы 10 имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{\lg n}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right) = 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lg n}{n} + 3\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 1$. Далее с учётом неравенств $-\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{\sin n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 1$ и теоремы 9 получим $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n^2} = 0$. По теореме 10 имеем также $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \dfrac{\sin n}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 2 \neq 0$. Применив теорему 10 ещё раз, получим требуемое. ⌋

Упражнение 31. Найти пределы:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + \sin n}{n + \cos n^2}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + (-1)^n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + 2b^n}{3a^n + 4b^n}$, $a > 0$, $b > 0$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} k^\pi}$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3 + k}}$, g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k 3^{n-k}}$, k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{2^n}$,

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{n}$, m) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n}$, n) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^\alpha]{\sum\limits_{k=1}^{n} k^n}$, где $\alpha = 1$, $\alpha = 2$.

Упражнение 32. Пусть $a_n \geq 0$, $n \geq 1$ и $a_n \to a$, $n \to \infty$. Доказать, что $\forall k \in N$: $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$, $n \to \infty$.

Упражнение 33*. Пусть $a_0 = a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

2.2.3 Линейное регулярное преобразование последовательности

Пусть

$$\{c_{nk} \mid 1 \leq k \leq n,\ n \geq 1\} \subset R \tag{1}$$

— набор фиксированных чисел. Для последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ рассмотрим последовательность $\{b_n \mid n \geq 1\}$, общий член которой имеет вид $b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk}a_k$, $n \geq 1$. Представляет интерес вопрос: при каких условиях на числа (1) справедливо утверждение: для любой сходящейся последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ последовательность $\{b_n \mid n \geq 1\}$ также сходится к тому же пределу?

Теорема 11. *(Теорема Тёплица о регулярном преобразовании последовательности). Пусть числа $\{c_{nk} \mid 1 \leq k \leq n,\ n \geq 1\} \subset R$ удовлетворяют условиям:*

1) $\forall k \in N$: $c_{nk} \to 0$, $n \to \infty$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} \to 1$, $n \to \infty$;

3) $\exists C > 0$ $\forall n \geq 1$: $\sum\limits_{k=1}^{n} |c_{nk}| \leq C$.

Тогда для любой сходящейся последовательности чисел $\{a_n \mid n \geq 1\}$ последовательность $\left\{b_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk}a_k \;\middle|\; n \geq 1\right\}$ также сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

⌈ Для последовательности $\{a_n = a \mid n \geq 1\}$, $a \in R$, имеем $b_n = a\sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} \to a$, $n \to \infty$, в силу условия 2). Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

Следующее неравенство

$$|b_n - 0| = |b_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_{nk}a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{m-1} |c_{nk}| \cdot |a_k| + \sum_{k=m}^{n} |c_{nk}| \cdot |a_k| \tag{2}$$

справедливо для каждого m, $1 < m \leq n$.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ задано. Согласно определению предела последовательности,

$$\exists N_1 \in N\ \forall n \geq N_1 : \ |a_n| < \frac{\varepsilon}{2C}, \tag{3}$$

кроме того, по теореме 6

$$\exists D > 0\ \forall n \geq 1:\quad |a_n| \leq D. \tag{4}$$

Пусть далее в неравенстве (2) $n \geq N_1$ и $m = N_1$. По условию 1) теоремы $\forall k, 1 \leq k \leq N_1 - 1:\ c_{nk} \to 0,\ n \to \infty,\ \Longleftrightarrow\ |c_{nk}| \to 0,\ n \to \infty,\ \Longrightarrow\ \sum\limits_{k=1}^{N_1-1} |c_{nk}| \to 0,\ \ n \to \infty$. Следовательно,

$$\exists N_2 \in N\ \forall n \geq N_2:\quad \sum_{k=1}^{N_1-1} |c_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2D}. \tag{5}$$

Тогда для номеров $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ из неравенства (2) с учётом неравенств (3) — (5) и условия 3) получим $|b_n - 0| \leq D \sum\limits_{k=1}^{N_1-1} |c_{nk}| + \frac{\varepsilon}{2C} \sum\limits_{k=N_1}^{n} |c_{nk}| < D\frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2C} \sum\limits_{k=1}^{n} |c_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2C} C = \varepsilon.$]

Упражнение 34. Доказать, что условия 1) и 2) теоремы Тёплица необходимы.

Указание. Рассмотреть, например, такие последовательности: $\{a_n = 1 \mid n \geq 1\}$, $\{a_n = \delta_{nk} \mid n \geq 1\}$, $\delta_{nk} = 1$, если $n = k$, $\delta_{nk} = 0$, если $n \neq k$, для фиксированного k.

Замечание. Условия 1) — 3) теоремы Тёплица необходимы и достаточны. Однако, доказательство необходимости условия 3) несколько сложнее и здесь не приводится.

Упражнение 35. Доказать, что если в теореме Тёплица $c_{nk} > 0$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, то условие 3) можно опустить. Кроме того, тогда $a_n \to +\infty,\ n \to \infty \Longrightarrow b_n \to +\infty,\ n \to \infty$.

Упражнение 36. Доказать, что сходимость $a_n \to a$, $n \to \infty$ влечёт сходимость $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a,\ \ n \to \infty$.

Упражнение 37. Пусть $a_n \to a$, $n \to \infty$. Доказать сходимость $\dfrac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + 1 \cdot a_n}{n^2} \to \dfrac{a}{2},\ \ n \to \infty$.

Упражнение 38. Пусть $a_n > 0$, $n \geq 1$, и $a_n \to a$, $n \to \infty$. Доказать, что $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \to a,\ \ n \to \infty$.

Упражнение 39. Пусть $a_n > 0$, $n \geq 1$, и $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to a$, $n \to \infty$. Доказать, что $\sqrt[n]{a_n} \to a,\ \ n \to \infty$.

Упражнение 40*. Пусть $a_n \to a, \quad b_n \to b \quad n \to \infty$. Доказать, что $\dfrac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_n b_1}{n} \to ab, \quad n \to \infty$.

2.2.4 Теорема Штольца

Теорема 12. *Предположим, что последовательности $\{x_n \mid n \geq 1\}$ и $\{y_n \mid n \geq 1\}$ удовлетворяют условиям:*
1) $\forall n \geq 1 : \quad y_n < y_{n+1}$;
2) $y_n \to +\infty, \quad n \to \infty$;
3) существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in (\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$.

⌈ Можно предположить, что $y_1 > 0$. Положим $x_0 = 0, \ y_0 = 0$ и

$$c_{nk} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n}, \ 1 \leq k \leq n, \ n \geq 1; \ a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \ n \geq 1.$$

Числа $\{c_{nk}\}$ удовлетворяют условиям теорема Тёплица. Действительно,

$$c_{nk} > 0, \ 1 \leq k \leq n, \ n \geq 1; \ \forall k \geq 1 : \quad c_{nk} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

в силу условия 2) и $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{nk} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{y_k - y_{k-1}}{y_n} = 1, \ n \geq 1$. Поэтому, согласно теореме Тёплица,

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} = \frac{x_n}{y_n} \to a, \quad n \to \infty. \qquad ⌋$$

Упражнение 41. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$.

Указание. Применить дважды теорему Штольца.

Упражнение 42. Вычислить пределы:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}, \quad k \in \boldsymbol{N}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{a^{n+1}} \left(a + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^3}{3} + \ldots + \dfrac{a^n}{n} \right) \right), \quad a > 1$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 1a + 2a^2 + \ldots + na^n}{na^{n+1}}, \quad a > 1$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^{k+1}} \left(k! + \dfrac{(k+1)!}{1!} + \ldots + \dfrac{(k+n)!}{n!} \right) \right), \quad k \in \boldsymbol{N}$;

5 — 4-1168

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{C_n^2}+\sqrt{C_{n+1}^2}+\ldots+\sqrt{C_{2n}^2}\right)\right)$.

Упражнение 43. Пусть $a_n \to a$, $n\to\infty$. Вычислить пределы:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{k}}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1}+\frac{a_{n-1}}{2^1}+\frac{a_{n-2}}{2^2}+\ldots+\frac{a_1}{2^{n-1}}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1\cdot 2}+\frac{a_{n-1}}{2\cdot 3}+\frac{a_{n-2}}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{a_1}{n(n+1)}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{1}-\frac{a_{n-1}}{2^1}+\frac{a_{n-2}}{2^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{a_1}{2^{n-1}}\right)$.

Упражнение 44. Последовательность $\{a_n \mid n\geq 1\}$ удовлетворяет условию $a_{n+1}-a_n\to a\in \boldsymbol{R}$, $n\to\infty$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a$.

Упражнение 45. Предположим, что последовательности $\{x_n \mid n\geq 1\}$ и $\{y_n \mid n\geq 1\}$ удовлетворяют условиям:

1) $\forall\, n\geq 1\ :\quad y_n<y_{n+1}$;

2) $x_n\to 0,\ \ y_n\to 0,\ \ n\to\infty$;

3) существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a\in(\boldsymbol{R}\cup\{-\infty,+\infty\})$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$.

Упражнение 46.* Для последовательности $\{a_n \mid n\geq 1\}$ последовательность $u_n:=2a_n+a_{n-1}$, $n\geq 2$, сходится: $u_n\to u$, $n\to\infty$. Доказать, что последовательность $\{a_n \mid n\geq 1\}$ также сходится, и найти её предел.

2.3 Монотонные последовательности

2.3.1 Существование предела монотонной последовательности

*Определение 1. Последовательность $\{a_n \mid n\geq 1\}$ называется **монотонно возрастающей в строгом смысле**, если $\forall\, n\geq 1:\ \ a_n<a_{n+1}$.*

*Последовательность $\{a_n \mid n\geq 1\}$ называется **монотонно неубывающей**, если $\forall\, n\geq 1:\ \ a_n\leq a_{n+1}$.*

*Последовательность $\{a_n \mid n\geq 1\}$ называется **монотонно убывающей в строгом смысле**, если $\forall\, n\geq 1: a_n>a_{n+1}$.*

*Последовательность $\{a_n \mid n\geq 1\}$ называется **монотонно невозрастающей**, если $\forall\, n\geq 1:\ \ a_n\geq a_{n+1}$.*

*Последовательность, удовлетворяющая хотя бы одному из приведенных условий, называется **монотонной**.*

Пример. 1. Последовательность $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ возрастает в строгом смысле, последовательность $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, n, n, \ldots\}$ неубывающая, а последовательность $\{1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots\}$ не является монотонной.

Упражнение 47. Доказать, что монотонно неубывающая последовательность чисел ограничена тогда и только тогда, когда она ограничена сверху.

Упражнение 48. Доказать, что последовательность $\{n2^{-n} \mid n \geq 2\}$ убывает в строгом смысле.

Упражнение 49. Доказать существование числа $m \in N$ такого, что последовательность $\{n2^{-\sqrt{n}} \mid n \geq m\}$ строго убывает.

Упражнение 50. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ удовлетворяет условию $\forall\, n \geq 1: \quad a_{n+1} \geq a_n - \dfrac{1}{2^n}$. Доказать, что последовательность

$$\left\{b_n := a_n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \;\middle|\; n \geq 1\right\}$$

монотонна. Доказать также, что последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ограничена $\iff$ $\{b_n \mid n \geq 1\}$ ограничена.

Упражнение 51.* Пусть для числа $c > 2$ $a_1 = c^2$, $a_{n+1} = (a_n - c)^2$, $n \geq 1$. Доказать, что последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ строго возрастает.

Теорема 13. *Монотонная и ограниченная последовательность действительных чисел имеет предел.*

⌈ Доказательство проведём для случая неубывающей последовательности, то есть предположим, что $\forall\, n \in N \;:\; a_n \leq a_{n+1}$. По условию теоремы $\exists\, C \in R \;\; \forall\, n \geq 1 \;:\; a_n \leq C$. Поэтому множество значений последовательности $A := \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ непусто и ограничено. По теореме о существовании точной верхней грани $\exists\, a \in R \;:$ $\sup A = \sup\limits_{n \geq 1} a_n = a$. Докажем, что $a_n \to a$, $n \to \infty$. Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. Согласно определению точной грани и теореме о её характеризации для числа $a - \varepsilon < a$ имеем a) $\forall\, n \in N: \quad a_n \leq a$; b) $\exists\, a_m: \quad a_m > a - \varepsilon$. С учётом условия теоремы отсюда получаем $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N := m\; \forall\, n \geq N : a - \varepsilon < a_m \leq a_n \leq a \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. ⌋

Упражнение 52. Если в теореме 13 последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ строго возрастает, то $\forall n \in N \ : \quad a_n < a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Проверить это утверждение.

Упражнение 53. Доказать теорему 13 для монотонно невозрастающей последовательности.

Упражнение 54. Проверить, что теорема 13 остаётся верной, если вместо условия монотонности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ потребовать только монотонность последовательности $\{a_n \mid n \geq m\}$, где m – произвольное число из N.

Замечание. 1. Таким образом, для монотонно неубывающей ограниченной последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ имеем равенства $a = \sup\limits_{n\geq 1} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, аналогично для монотонно невозрастающей ограниченной последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ $a = \inf\limits_{n\geq 1} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Примеры. 1. Докажем равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$.

⌈ Сначала заметим, что $\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} < \dfrac{n^2}{2^n} \iff 2 < (n-1)^2 \iff n \geq 3$. Поэтому последовательность $\left\{\dfrac{n^2}{2^n} \;\middle|\; n \geq 3\right\}$ строго убывает и ограничена. По теореме 13 получим $\exists\, a \in R \ : \ a = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$. С учётом этого утверждения, теоремы 10 и равенства $\dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \dfrac{n^2}{2^n}\dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$, $n \geq 1$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{2n^2}$, то есть $a = a\dfrac{1}{2}$, откуда следует, что $a = 0$. ⌋

2. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!} = 0$.

⌈ Сначала заметим, что $\dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!} < \dfrac{10^n}{n!} \iff 10 < n+1 \iff n > 9$. Следовательно, последовательность $\left\{\dfrac{10^n}{n!} \;\middle|\; n \geq 10\right\}$ строго убывает и ограничена. По теореме 11 $\exists\, a \in R \ : \ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!} = a$. Отсюда и из равенства $\dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{10^n}{n!}\dfrac{10}{n+1}$, $n \geq 1$, аналогично примеру 1, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10}{n+1}$, то есть $a = a \cdot 0$ или $a = 0$. ⌋

Упражнение 55. Доказать, что: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{2^{n^2}} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^{\sqrt{n}}} = 0$.

Упражнение 56. Найти предел следующей последовательности $\{\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ldots\}$.

Упражнение 57. Пусть $a_1 = 1;\ a_n = \dfrac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\,a_{n-1},\ n \geq 2$. Доказать, что последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ сходится.

Упражнение 58. Пусть $a_1 = \dfrac{3}{2};\quad a_n^2 = 3a_{n-1} - 2,\ n \geq 2$. Доказать, что последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ сходится, и найти её предел.

Упражнение 59. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ такова, что $\forall n \geq 1:\ 0 < a_n < 1,\ (1 - a_{n+1})a_n > \dfrac{1}{4}$. Доказать сходимость этой последовательности и найти её предел.

Упражнение 60. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ограничена и такова, что $\forall n \in N:\ a_{n+1} > a_n - \dfrac{1}{2^n}$. Доказать сходимость этой последовательности.

Упражнение 61*. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ограничена и такова, что $\forall n \in N:\ a_{n+2} \leq \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{2}{3}a_n$. Доказать сходимость этой последовательности.

Упражнение 62*. Пусть $\{a_{jk} \mid j \geq 1,\ k \geq 1\} \subset R$, причём при каждом фиксированном $k \geq 1$ последовательность $\{a_{jk} \mid j \geq 1\}$ монотонно не убывает и при каждом фиксированном $j \geq 1$ последовательность $\{a_{jk} \mid k \geq 1\}$ монотонно не убывает. Доказать следующее равенство

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{j\to\infty} a_{jk}\right) = \lim_{j\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty} a_{jk}\right).$$

2.3.2 Операции над действительными числами и предел

Пусть $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ неотрицательное действительное число, при этом $\alpha_0 \in (N \cup \{0\})$, $\forall n \in N:\ \alpha_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Для $n \geq 0$ пусть $a_n' := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n;\quad a_n'' := \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_n + 1)$. Тогда для любого $n \geq 0$ имеем: $a_n' \in Q,\quad a_n'' \in Q,\quad a_n' \leq a < a_n'',\quad a_n' = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \leq \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1} = a_{n+1}',\quad a_n'' = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots(\alpha_n + 1) \geq \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\alpha_{n+1}+1) = a_{n+1}''$. Таким образом, для каждого $n \geq 0$ получим $a_0' \leq a_1' \leq a_2' \leq \ldots \leq a_n' \leq a < a_n'' \leq a_{n-1}'' \leq \ldots \leq a_1'' \leq a_0''$.

Отметим также, что для чисел $a \leq b$ имеем $a_n' \leq b_n',\quad n \geq 0$.

Теорема 14. *Пусть a – неотрицательное действительное число. Тогда* $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n' = \lim\limits_{n\to\infty} a_n''$.

⌈ Теорема 10 гл. 1 утверждает, что $a = \sup\limits_{n\geq 0} a'_n$, $a = \inf\limits_{n\geq 0} a''_n$. Так как последовательности $\{a'_n \mid n \geq 1\}$ и $\{a''_n \mid n \geq 1\}$ монотонны и ограничены, то по теореме 13 получаем $a = \sup\limits_{n\geq 0} a'_n = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n$ и $a = \inf\limits_{n\geq 0} a''_n = \lim\limits_{n\to\infty} a''_n$. ⌋

Замечание. Теорема 14 даёт представление всякого неотрицательного действительного числа с помощью предела последовательности рациональных чисел, а с учётом знака "$-$" и любого числа. Согласно теореме 14, например, имеем для любых $a > 0$, $b > 0$ $a + b = \lim\limits_{n\to\infty} (a+b)'_n$, $ab = \lim\limits_{n\to\infty} (ab)'_n$. Кроме того, как и в теореме 14 доказывается, что $a + b = \lim\limits_{n\to\infty} (a'_n + b'_n)$, $ab = \lim\limits_{n\to\infty} (a'_n b'_n)$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} (a+b)'_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a'_n + b'_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} (ab)'_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a'_n b'_n)$.

Последние равенства и свойства пределов позволяют просто доказывать свойства действительных чисел. Докажем, например, что для любых $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ справедливо равенство $a(b+c) = ab+ac$. Действительно, с помощью теоремы 10 имеем $a(b+c) = \lim\limits_{n\to\infty} (a'_n (b+c)'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (b+c)'_n = a \lim\limits_{n\to\infty} (b'_n + c'_n) = a \lim\limits_{n\to\infty} b'_n + a \lim\limits_{n\to\infty} c'_n = ab+ac$.

2.3.3 Число e

Рассмотрим следующие две последовательности положительных чисел

$$\left\{a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \geq 1\right\}, \quad \left\{b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \,\middle|\, n \geq 1\right\}.$$

Докажем следующие свойства этих чисел.

1^0. $\forall n \in N: \quad a_n < b_n$; 2^0. $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \geq 1\right\}$ строго возрастает;

3^0. $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \,\middle|\, n \geq 1\right\}$ строго убывает.

⌈ Поскольку $b_n = a_n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n + \frac{a_n}{n} > a_n$, $n \geq 1$, то свойство 1^0 доказано. Для доказательства 2^0 применим для $n \geq 2$ неравенство Бернулли $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{n}{n^2}\right) = 1$. Отсюда, $a_n > a_{n-1}$, $n \geq 2$.

Для доказательства 3^0 с помощью аналогичных рассуждений получаем также $\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} =$

$$= \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{n+1}{n^2-1}\right) = 1, \quad n \geq 2,$$ а потому $b_{n-1} > b_n, \quad n \geq 2.$ ⌋

Из свойств $1^0 - 3^0$ для любого $n \geq 1$ следуют такие неравенства

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < \ldots < b_2 < b_1.$$

Таким образом, последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$, $\{b_n \mid n \geq 1\}$ монотонны и ограничены, следовательно, по теореме 13 сходятся. Обозначим буквой e[1] предел последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$. Таким образом, $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Известно, что число e трансцендентное, его значение с точностью до 10^{-15} равно $e \approx 2,718281828459045$. Число e – одна из важнейших фундаментальных постоянных в математике.

Поскольку $b_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$, то $b_n \to e$, $n \to \infty$. Отметим также, что $\forall\, n \geq 1: \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Логарифмы при основании е называются ***натуральными*** и обозначаются символом $\ln := \log_e$.

Прологарифмировав последнее неравенство, получим

$$\forall\, n \geq 1 \ : \ \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Упражнение 63. Доказать, что $\forall\, n \geq 1 \ : \quad 0 < e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}.$

Упражнение 64. Доказать, что первая из следующих последовательностей $\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \;\middle|\; n \geq 1\right\}$, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \;\middle|\; n \geq 1\right\}$ строго убывает и сходится к 1, а вторая – строго возрастает и не ограничена.

Упражнение 65. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 1.$

Упражнение 66. Доказать,что монотонно неубывающая и неограниченная последовательность сходится к $+\infty$.

Упражнение 67. Для $r \in Q$, $r > 0$, найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{rn}$.

---

[1]Это обозначение, как и обозначение числа π и ∞, принадлежит Л. Эйлеру.

Упражнение 68. Доказать, что для каждого $x > 0$ последовательность $\left\{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \mid n \geq 1\right\}$ строго возрастает и ограничена.

Упражнение 69. Вычислить пределы:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}}{\ln n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{1/n}+e^{2/n}+\ldots+e^{n/n}}{n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} (n(\sqrt[n]{e}-1))$.

Упражнение 70. Пусть $a_n \to a$, $n \to \infty$. Доказать справедливость равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\ln n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{k}\right) = a$.

Упражнение 71. Доказать, что $n^n e^{-n} e < n! < n^{n+1} e^{-n} e$, $n > 1$.

Упражнение 72. Вычислить пределы: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n!}{n^n e^{-n}}\right)^{1/n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(n!)^2}{n^{2n}}\right)^{1/n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{(n!)^3}{n^{3n} e^{-n}}\right)^{1/n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^{3n}}{(n!)^3}\right)^{1/n}$.

2.4 Подпоследовательности и их свойства

2.4.1 Подпоследовательности и частичные пределы

Пусть $\{a_n \mid n \geq 1\}$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{m(k) \mid k \geq 1\} \subset N$ такую, что $1 \leq m(1) < m(2) < \ldots < m(k) < m(k+1) < \ldots$. Отметим, что $\forall\, k \geq 1 : m(k) \geq k$; $m(k) \to +\infty$, $k \to \infty$. Примерами таких последовательностей натуральных чисел являются следующие последовательности:

1. $m(k) = k$, $k \geq 1$; $\{m(k) \mid k \geq 1\} = \{1, 2, 3, \ldots, k, \ldots\}$,
2. $m(k) = 2k$, $k \geq 1$; $\{m(k) \mid k \geq 1\} = \{2, 4, 6, \ldots, 2k, \ldots\}$,
3. $m(k) = k^2$, $k \geq 1$; $\{m(k) \mid k \geq 1\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$,
4. $m(k) = 2^k$, $k \geq 1$; $\{m(k) \mid k \geq 1\} = \{1, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$.

Определение 1. *Последовательность $\{a_{m(k)} \mid k \geq 1\}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$.*

Пример. 1. Подпоследовательностями последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$, например, являются: a) $\{a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2k}, \ldots\} = \{a_{2k} \mid k \geq 1\}$, b) $\{a_1, a_4, a_9, \ldots, a_{k^2}, \ldots\} = \{a_{k^2} \mid k \geq 1\}$ и c) $\{a_3, a_6, a_9, \ldots, a_{3k}, \ldots\} = \{a_{3k} \mid k \geq 1\}$.

Из определения подпоследовательности следуют такие свойства подпоследовательностей.

1^0. Если последовательность ограничена, то любая её подпоследовательность также ограничена.

2^0. Если последовательность сходится к a (возможно $a = +\infty$ или $a = -\infty$), то любая её подпоследовательность также сходится к a.

3^0. Пусть $a_n \to a,\ \ n \to \infty;\ \ \{\nu(k) \mid k \geq 1\} \subset N,\ \ \nu(k) \to +\infty,\ \ k \to \infty$. Тогда $a_{\nu(k)} \to a,\ \ k \to \infty$.

⌈ Доказательство 3^0 для $a \in R$. Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. По определению предела последовательности $\exists N \in N\ \forall n \geq N:$ $|a_n - a| < \varepsilon$; $\exists K \in N\ \forall k \geq K:\ \nu(k) \geq N$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists K \in N\ \ \forall k \geq K:\ \ |a_{\nu(k)} - a| < \varepsilon$. ⌋

Упражнение 73. Доказать утверждения 1^0 и 2^0. Чем отличаются утверждения 2^0 и 3^0?

Упражнение 74. Последовательность, которая является монотонной и содержит ограниченную подпоследовательность, является ограниченной (поэтому и все её подпоследовательности ограничены). Доказать это утверждение.

Упражнение 75. Доказать, что последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся следующие три ее подпоследовательности $\{a_{2k} \mid k \geq 1\}$, $\{a_{2k-1} \mid k \geq 1\}$, $\{a_{3k} \mid k \geq 1\}$.

Упражнение 76. Доказать, что последовательность $a_n \to a,\ \ n \to \infty$ тогда и только тогда, когда каждая её подпоследовательность содержит в себе подпоследовательность, которая сходится к a.

Упражнение 77. Привести пример не имеющей предела последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$, для которой для каждого $m \geq 2$ подпоследовательность $\{a_{m \cdot k} \mid k \geq 1\}$ сходится.

Определение 2. *Число $a \in R$ называется **частичным пределом** последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$, если существует подпоследовательность $\{a_{m(k)} \mid k \geq 1\}$ такая, что $a_{m(k)} \to a,\ \ k \to \infty$. Значение $+\infty$ $(-\infty)$ называется **частичным пределом** последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$, если существует подпоследовательность $\{a_{m(k)} \mid k \geq 1\}$ такая, что $a_{m(k)} \to +\infty,\ \ k \to \infty$ $\ (a_{m(k)} \to -\infty,\ \ k \to \infty)$.*

Пусть A — ***множество всех частичных пределов*** последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$.

Примеры. 1. Для последовательности $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ множество всех частичных пределов $A = \{+\infty\}$.

2. В силу свойства 2^0 подпоследовательностей для последовательности $a_n \to a \in \boldsymbol{R}$, $n \to \infty$ множество $A = \{a\}$.

Упражнение 78. Доказать, что для следующей последовательности $\{1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots\}$ множество $A = \{-1, 1\}$.

Упражнение 79. Доказать, что для ограниченной последовательности множество A также ограничено.

Упражнение 80. Привести пример последовательности, для которой множество A состоит из: a) трёх чисел, b) n чисел, $n \in \boldsymbol{N}$.

Упражнение 81. Доказать следующие утверждения: a) $-\infty \in A \iff \{a_n \mid n \geq 1\}$ не ограничена снизу; b) $+\infty \in A \iff \{a_n \mid n \geq 1\}$ не ограничена сверху.

Упражнение 82.* Привести пример последовательности, для которой множество $A = \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Упражнение 83.* Определить множество A для последовательности: a) $\{\sin \pi n\alpha \mid n \geq 1\}$, $\alpha \in \boldsymbol{Q}$; b) $\{\sin \pi n\alpha \mid n \geq 1\}$, $\alpha \notin \boldsymbol{Q}$;
c) $\{n\alpha - [n\alpha] \mid n \geq 1\}$, $\alpha \in \boldsymbol{Q}$; d) $\{n\alpha - [n\alpha] \mid n \geq 1\}$, $\alpha \notin \boldsymbol{Q}$;
e) $\left\{\frac{2n^2}{7} - \left[\frac{2n^2}{7}\right] \;\middle|\; n \geq 1\right\}$; f) $\{a_n \mid n \geq 1\}$, состоящей из занумерованных в каком-либо порядке элементов множества $\{\sqrt{n} - \sqrt[3]{m} \mid n \in \boldsymbol{N},\ m \in \boldsymbol{N}\}$.

2.4.2 Существование монотонной подпоследовательности

Теорема 15. *(Характеризация частичного предела). Число $a \in \boldsymbol{R}$ есть частичный предел последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \boldsymbol{N}\ \exists \overline{n} \in \boldsymbol{N}:\ \overline{n} \geq N,\ |a_{\overline{n}} - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

⌈ Необходимость. Пусть $a \in A$. Тогда существует подпоследовательность $a_{m(k)} \to a$, $k \to \infty$.

Предположим, что числа $\varepsilon > 0$ и $N \in \boldsymbol{N}$ заданы. По определению предела последовательности $\exists K_1 \in \boldsymbol{N}\ \ \forall k \geq K_1:\ |a_{m(k)} - a| < \varepsilon$, аналогично $\exists K_2 \in \boldsymbol{N}\ \ \forall k \geq K_2:\ m(k) \geq N$. Положим теперь $\overline{k} := \max(K_1, K_2)$, $\overline{n} := m(\overline{k})$. Тогда $\overline{n} \geq N$, $|a_{\overline{n}} - a| < \varepsilon$.

Достаточность. Предположим, что условие (1) теоремы для числа a выполнено. Тогда для $\varepsilon = 1$, $N = 1$ по условию (1) $\exists m(1) \geq 1:$ $|a_{m(1)} - a| < 1$. Аналогично, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $N = m(1) + 1$ по условию (1)

$m(\tilde{k}) = \tilde{n}$

$\exists\, m(2) \geq m(1) + 1 : \ |a_{m(2)} - a| < \dfrac{1}{2}$. Далее, для $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$, $N = m(2) + 1$ по условию (1) $\exists\, m(3) \geq m(2) + 1 : \ |a_{m(3)} - a| < \dfrac{1}{3}$. и т. д. В результате получим подпоследовательность $\{a_{m(k)} \mid k \geq 1\}$, для которой $|a_{m(k)} - a| < \dfrac{1}{k}$, $k \geq 1$. Следовательно, $a_{m(k)} \to a$, $k \to \infty$. ⌋

Упражнение 84. Определить множество A для последовательности, занумерованных каким-либо образом множества всех рациональных чисел.

Упражнение 85. Доказать, что $+\infty \in A$ $(-\infty \in A)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall C \in \boldsymbol{R}$ $\forall N \in \boldsymbol{N}$ $\exists \overline{n} \in \boldsymbol{N}$: $\overline{n} \geq N$ и $a_{\overline{n}} > C$ $(a_{\overline{n}} < C)$.

Теорема 16. *Любая последовательность действительных чисел содержит монотонную подпоследовательность.*

⌈ Рассмотрим множество $M := \{n \in N \mid \forall m > n : \ a_m > a_n\}$. Если M бесконечно и $M = \{n(1), n(2), \ldots, n(k), \ldots\}$, при этом $n(1) < < n(2) < n(3) < \ldots$, то согласно определению множества M имеем $a_{n(1)} < a_{n(2)} < \ldots < a_{n(k)} < \ldots$, и $\{a_{n(k)} \mid k \geq 1\}$ — строго возрастающая подпоследовательность.

Если M конечно, то пусть $n(1)$ – наименьшее натуральное число такое, что $\forall m \geq n(1) : \ m \notin M$. Так как $n(1) \notin M$, то $\exists\, n(2) > n(1)$: $a_{n(1)} \geq a_{n(2)}$; аналогично, так как $n(2) \notin M$, то $\exists\, n(3) > n(2)$: $a_{n(2)} \geq a_{n(3)}$ и т. д. Таким образом получим невозрастающую подпоследовательность $\{a_{n(k)} \mid k \geq 1\}$. a_1 - не наиб. эл. ⌋

Упражнение 86. Указать строго монотонную подпоследовательность последовательности $\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \geq 1\}$.

Следствие 5. *Для любой последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ множество всех её частичных пределов $A \neq \varnothing$.*

⌈ По теореме 16 существует монотонная подпоследовательность $\{a_{n(k)} \mid k \geq 1\}$. Если эта подпоследовательность ограничена, то по теореме о существовании предела монотонной ограниченной последовательности она сходится к некоторому действительному числу a. Тогда $a \in A$. Если же подпоследовательность не ограничена, например, сверху, то она сходится к $+\infty$ и $+\infty \in A$. ⌋

Теорема 17. ***(Больцано-Вейерштрасса)***. *Любая ограниченная последовательность действительных чисел содержит сходящуюся к действительному числу подпоследовательность.*

⌈ Следствие теоремы 16 и теоремы 13. ⌋

Упражнение 87. Доказать, что любое бесконечное ограниченное множество действительных чисел содержит сходящуюся к действительному числу последовательность.

2.4.3 Верхний и нижний пределы последовательности

Определение 3. Пусть $\{a_n \mid n \geq 1\} \subset \boldsymbol{R}$ — последовательность и A — множество её частичных пределов. ***Нижним пределом последовательности*** *называется величина*

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -\infty, & \text{если } \{a_n \mid n \geq 1\} \text{ не ограничена снизу;} \\ \inf A, & \text{если } \{a_n \mid n \geq 1\} \text{ ограничена снизу и} \\ & A \neq \{+\infty\}; \\ +\infty, & \text{если } A = \{+\infty\}. \end{cases}$$

Верхним пределом последовательности *называется величина*

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \{a_n \mid n \geq 1\} \text{ не ограничена сверху;} \\ \sup A, & \text{если } \{a_n \mid n \geq 1\} \text{ ограничена сверху и} \\ & A \neq \{-\infty\}; \\ -\infty, & \text{если } A = \{-\infty\}. \end{cases}$$

Замечание. Если $\{a_n \mid n \geq 1\}$ — ограниченная последовательность, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \inf A \in \boldsymbol{R}$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A \in \boldsymbol{R}$.

Пример. 1. Если последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ сходится к a, то $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Упражнение 88. Доказать, что $a_n \to a,\ n \to \infty \iff \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Примеры. 2. Для последовательности $\{a_n = n \mid n \geq 1\}$ множество $A = \{+\infty\}$, поэтому $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

3. Для ограниченной последовательности $\{(-1)^n \mid n \geq 1\}$ множество $A = \{-1, 1\}$. Действительно, любая её подпоследовательность либо содержит конечное число членов, равных -1, либо содержит конечное

число членов, равных 1, либо содержит бесконечно много членов, равных -1, и бесконечно много, равных 1. В первом случае подпоследовательность сходится к 1, во втором — к -1, в третьем предела не имеет. Таким образом, $\varliminf\limits_{n\to\infty}(-1)^n=-1$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-1)^n=1$.

Упражнение 89. Определить нижний и верхний пределы последовательностей: a) $\left\{(-1)^n+\frac{1}{n}\ \middle|\ n\geq 1\right\}$; b) $\left\{n-5\left[\frac{n}{5}\right]\ \middle|\ n\geq 1\right\}$; c) $\left\{\left\{\frac{2n^3}{7}\right\}\ \middle|\ n\geq 1\right\}$; d) $\{\{\sqrt[3]{n}\}\mid n\geq 1\}$; e) $\{\sin n\mid n\geq 1\}$.

Теорема 18. *Пусть для последовательности чисел* $\{a_n\mid n\geq 1\}$ $\alpha=\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n$, $\beta=\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n$. *Тогда* $\alpha\in A$, $\beta\in A$.

⌈ Достаточно рассмотреть случай $\alpha\in\boldsymbol{R}$, $\beta\in\boldsymbol{R}$. Доказательство проведём для числа α. Докажем, что $\alpha=\inf A\in A$, то есть, что α есть частичный предел последовательности $\{a_n\mid n\geq 1\}$. Воспользуемся теоремой о характеризации частичного предела. Пусть $\varepsilon>0$ и $N\in\boldsymbol{N}$ заданы Тогда, согласно определению $\inf A=\alpha$, $\exists a\in A$: $a<\alpha+\varepsilon$. Поскольку a — частичный предел, то для чисел $\alpha+\varepsilon-a>0$ и N получим $\exists\overline{n}$: $\overline{n}\geq N$ и $|a_{\overline{n}}-a|<\alpha+\varepsilon-a$. Тогда $|a_{\overline{n}}-\alpha|\leq|a_{\overline{n}}-a|+|a-\alpha|<$ $<\alpha+\varepsilon-a+a-\alpha=\varepsilon$. ⌋

Замечание. Из теоремы следует, что для ограниченной последовательности множество A содержит минимальный и максимальный элементы и $\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n=\min A$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n=\max A$.

Теорема 19. ***(О характеризации нижнего и верхнего пределов).*** *Пусть* $\{a_n\mid n\geq 1\}$ *— ограниченная последовательность. Тогда*

$$\alpha=\varliminf_{n\to\infty}a_n\iff$$

$$\iff\ \forall\varepsilon>0\ :\ \begin{cases}1)\ \textit{множество}\ \{n\in N\mid a_n<\alpha-\varepsilon\}\\ \textit{конечно и}\\ 2)\ \textit{множество}\ \{n\in N\mid a_n<\alpha+\varepsilon\}\\ \textit{бесконечно}.\end{cases}$$

$$\beta=\varlimsup_{n\to\infty}a_n\iff$$

$$\iff\ \forall\varepsilon>0\ :\ \begin{cases}1)\ \textit{множество}\ \{n\in N\mid a_n>\beta+\varepsilon\}\\ \textit{конечно и}\\ 2)\ \textit{множество}\ \{n\in N\mid a_n>\beta-\varepsilon\}\\ \textit{бесконечно}.\end{cases}$$

⌈ Доказательство рассмотрим для верхнего предела.

Необходимость. Пусть $\beta = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \sup A$ и $\varepsilon > 0$ задано. Согласно теореме 18 $\beta \in A$, поэтому существует подпоследовательность $a_{m(k)} \to \beta$, $k \to \infty$. По определению предела последовательности для числа ε имеем $\exists K \in N \quad \forall k \geq K : \ |a_{m(k)} - \beta| < \varepsilon \Longrightarrow a_{m(k)} > \beta - \varepsilon$ и, таким образом, условие 2) выполнено.

Предположим, что условие 1) не выполняется. Тогда существуют $\varepsilon^* > 0$ и подпоследовательность $\{a_{m(k)} \mid k \geq 1\}$ такие, что

$$\forall k \geq 1: \ a_{m(k)} > \beta + \varepsilon^*. \tag{1}$$

По теореме о существовании монотонной подпоследовательности существует монотонная подпоследовательность $\{a_{m(k(j))} \mid j \geq 1\}$. Пусть $\gamma := \lim\limits_{j\to\infty} a_{m(k(j))}$, заметим, что $\gamma \in \boldsymbol{R}$ и $\gamma \in A$. Кроме того, согласно неравенству (1), $\gamma \geq \beta + \varepsilon^*$, поэтому $\beta = \sup A \geq \gamma \geq \beta + \varepsilon^*$, что невозможно. Противоречие показывает, что условие 1) также выполнено.

Достаточность. Пусть число β удовлетворяет условию теоремы. Докажем сначала, что $\beta \in A$. Используем теорему о характеризации частичного предела. Согласно условиям 1) и 2), для любого заданного $\varepsilon > 0$ множество $\{n \in N \mid \beta - \varepsilon < a_n < \beta + \varepsilon\}$ бесконечно, поэтому $\beta \in A$. Докажем теперь, что $\beta = \sup A$. Предположим, что существует $\gamma \in A$, $\gamma > \beta$. Тогда для числа $\varepsilon = (\gamma - \beta)/2 > 0$ множество номеров $\{n \in N \mid \gamma - \varepsilon < a_n < \gamma + \varepsilon\}$ бесконечно, так как $\gamma \in A$. Однако, $\gamma - \varepsilon = (\gamma + \beta)/2 > \beta$, и, таким образом, получаем противоречие с условием 1). Следовательно, предположение о том, что $\exists \gamma \in A : \ \gamma > \beta$, приводит к противоречию, Поэтому $\beta = \sup A$. ∎

Упражнение 90. Проверить равенства: a) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\inf\limits_{k\geq n} a_k) = \sup\limits_{n\geq 1}(\inf\limits_{k\geq n} a_k)$; b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sup\limits_{k\geq n} a_k) = \inf\limits_{n\geq 1}(\sup\limits_{k\geq n} a_k)$.

Упражнение 91*. Для последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ пусть $A_n := \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, $n \geq 1$. Доказать справедливость следующих неравенств $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, A_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Упражнение 92*. Доказать, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(a_n + b_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$.

Упражнение 93*. Пусть $a_n > 0$, $n \geq 1$. Доказать неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{a_n}.$$

Упражнение 94*. Доказать, что справедливо следующее равенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \max(a_n, b_n) = \max(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n).$$

2.5 Фундаментальные последовательности и критерий Коши

2.5.1 Фундаментальные последовательности и их свойства

Определение 1. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\} \subset \boldsymbol{R}$ *называется* ***фундаментальной*** *или* ***последовательностью Коши,*** *если справедливо такое утверждение* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \boldsymbol{N}\ \forall\, m \geq N\ \forall\, n \geq N : |a_m - a_n| < \varepsilon$.

Примеры. 1. Последовательность $\{a, a, \ldots, a, \ldots\}$, где $a \in \boldsymbol{R}$, фундаментальна, так как в определении 1 для любого $\varepsilon > 0$ можно положить $N = 1$.

2. Последовательность $\left\{\frac{1}{2^n} \;\middle|\; n \geq 1\right\}$ фундаментальна. Действительно, поскольку $\frac{1}{2^n} \to 0$, $n \to \infty$, то для заданного $\varepsilon > 0$ $\exists\, N \in \boldsymbol{N}\ \forall\, n \geq N$: $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Тогда $\forall\, m \geq N\ \forall\, n \geq N$: $\left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$, где $k := \min(m, n) \geq N$.

3. Последовательность $\{a_n = n \mid n \geq 1\}$ не является фундаментальной, поскольку для $\varepsilon^* = \frac{1}{2}$ $\forall\, N \in \boldsymbol{N}\ \forall\, m \geq N\ \exists\, n = m + 1 \geq N$: $|a_m - a_n| = 1 > \frac{1}{2}$.

4. Последовательность $\{a_n = (-1)^n \mid n \geq 1\}$ не является фундаментальной, поскольку для $\varepsilon^* = 1$ имеем $\forall\, N \in \boldsymbol{N}\ \forall\, m \geq N\ \exists\, n = m + 1 \geq N$: $|a_m - a_n| = 2 > 1$.

5. Пусть $\{i(k) \mid k \geq 1\}$ – фиксированная последовательность, причём $\forall\, k \in \boldsymbol{N}$: $i(k) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Докажем, что последовательность $\left\{a_n := \frac{i(1)}{10} + \frac{i(2)}{10^2} + \ldots + \frac{i(n)}{10^n} \;\middle|\; n \geq 1\right\}$ фундаментальна.

⌈ Сначала заметим, что для любых натуральных чисел m, n, $m \leq n$ $|a_m - a_n| = \frac{i(m+1)}{10^{m+1}} + \frac{i(m+2)}{10^{m+2}} + \ldots + \frac{i(n)}{10^n} \leq \frac{9}{10^{m+1}} + \frac{9}{10^{m+2}} + \ldots + \frac{9}{10^n} < \frac{9}{10^{m+1}} \frac{10}{9} = \frac{1}{10^m}$. Поскольку $\frac{1}{10^m} \to 0$, $m \to \infty$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N_1 \in \boldsymbol{N}\ \forall\, n \geq N_1$: $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, и потому $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N = N_1\ \forall\, m \geq N\ \forall\, n \geq N$: $|a_m - a_n| < \varepsilon$. ⌋

Замечание. Пусть $a = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ – действительное число такое, $\alpha_k = i(k)$, $k \geq 1$. Тогда по теореме 14 $a_n = a'_n \to a$, $n \to \infty$.

Упражнение 95. Доказать, что монотонная последовательность, содержащая фундаментальную подпоследовательность, фундаментальна.

Упражнение 96. Доказать, что следующая последовательность чисел $\left\{a_n = \frac{\sin 1}{2^1} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n} \mid n \geq 1\right\}$ фундаментальна.

Упражнение 97. Доказать, что неограниченная последовательность не фундаментальна.

Упражнение 98. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ фундаментальна тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{m \geq N, n \geq N} |a_m - a_n| \to 0, \quad N \to \infty$.

Следующие свойства фундаментальных последовательностей часто используются.

1^0. Сходящаяся к действительному числу последовательность фундаментальна.

⌈ Пусть $a_n \to a \in \boldsymbol{R}$, $n \to \infty$. Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. По определению предела для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists N_1 \in \boldsymbol{N}\ \forall n \geq N_1 : \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_1\ \forall m \geq N\ \forall n \geq N : \quad |a_m - a_n| =$ $= |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ⌋

2^0. Фундаментальная последовательность ограничена.

⌈ Пусть $\{a_n \mid n \geq 1\}$ — фундаментальна. Тогда согласно определению 1 для $\varepsilon = 1\ \exists N\ \forall m \geq N\ \forall n \geq N : \quad |a_m - a_n| < 1$. Положим $C := \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1)$, тогда $\forall n \geq 1 : \quad |a_n| \leq C$. Действительно, последнее неравенство выполнено для $n \leq N$ по определению числа C. Если же $n > N$, то $|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| <$ $< 1 + |a_N| \leq C$. ⌋

2.5.2 Критерий Коши

Теорема 20. *Для того чтобы последовательность действительных чисел сходилась к действительному числу, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

⌈ Необходимость. Содержится в свойстве 1^0 п. 2.5.1.

Достаточность. Пусть $\{a_n \mid n \geq 1\}$ — фундаментальная последовательность, тогда в силу свойства 2^0 п. 2.5.1 она ограничена. По теореме о существовании монотонной подпоследовательности существует монотонная подпоследовательность $\{a_{m(k)} \mid k \geq 1\}$, которая также ограничена. По теореме о существовании предела монотонной последовательности $\exists a \in \boldsymbol{R} : \quad a_{m(k)} \to a, \quad k \to \infty$.

Докажем, что $a_n \to a$, $n \to \infty$. Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. Поскольку последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ фундаментальна, то для числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists N_1 \in \boldsymbol{N}\ \forall m \geq N_1\ \forall n \geq N_1 :$ $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ По определению предела последовательности имеем $\exists K \in \boldsymbol{N}\ \forall k \geq K :$ $|a_{m(k)} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_1\ \forall n \geq N :$ $|a_n - a| =$ $= |a_n - a_{m(k)} + a_{m(k)} - a| \leq |a_n - a_{m(k)}| + |a_{m(k)} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, где $m(k)$ – какое-нибудь из чисел таких, что $k \geq K$, $m(k) \geq N_1$. ⌋

Упражнение 99. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ такова, что $\exists \lambda \in [0,1)\ \forall n \geq 1 :$ $|a_{n+1} - a_{n+2}| \leq \lambda |a_n - a_{n+1}|$. Доказать, что эта последовательность сходится.

Упражнение 100. Пусть для $n \geq 1$ и $x \in [0,3]$ величина $P_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$, где $\{a_n, b_n, c_n \mid n \geq 1\} \subset \boldsymbol{R}$. Предположим, что $\forall x \in [0,3] :$ $P_n(x) \to P(x) \in \boldsymbol{R}$, $n \to \infty$. Доказать, что каждая из последовательностей $\{a_n \mid n \geq 1\}$, $\{b_n \mid n \geq 1\}$, $\{c_n \mid n \geq 1\}$ сходится и что P — многочлен на $[0,3]$.

Упражнение 101. Последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$, $\{b_n \mid n \geq 1\}$ таковы, что $\forall n \in \boldsymbol{N} :$ $|a_n - b_n| < \frac{|b_n|}{n}$. Доказать, что сходимость одной последовательности влечёт сходимость второй и что их пределы равны.

Упражнение 102. Пусть $a > 0$. Для произвольного $x_0 > 0$ рассмотрим последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$, члены которой определяются равенствами $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right)$, $n \geq 1$, $a_0 = x_0$. Доказать, что $a_n \to \sqrt{a}$, $n \to \infty$.

Указание. Рассмотреть отношение $\frac{a_n - \sqrt{a}}{a_n + \sqrt{a}}$, $n \geq 1$.

2.5.3 Определение предела последовательности векторов

Пусть $\boldsymbol{R}^m := \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_j \in \boldsymbol{R},\ 1 \leq j \leq m\}$.

Определение 2. *Последовательность векторов* $\{\vec{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \mid n \geq 1\}$ *сходится к вектору* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *если* $\forall j, 1 \leq j \leq m :$ $x_j^{(n)} \to x_j$, $n \to \infty$.

Используются обозначения: $\vec{x}^{(n)} \to \vec{x}$, $n \to \infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}$.

Упражнение 103. Доказать справедливость следующего утверждения $\vec{x}^{(n)} \to \vec{x}$, $n \to \infty \iff \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k^{(n)} - x_k| \to 0$, $n \to \infty$.

2.5.4 Историческая справка

Тёплиц Отто (1881 — 1940) — немецкий математик.

Больцано Бернард (1781 — 1848) — чешский математик. Его основные математические работы, опубликованные спустя столетие после его смерти, содержали точные формулировки ряда основных понятий математического анализа, а также доказательства многих существенных теорем. Эти результаты не были замечены современниками.

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815 — 1897) — выдающийся немецкий математик. Внёс большой вклад в логическое обоснование математического анализа. Именно К. Вейерштрассу принадлежат определения предела с помощью ε и δ, он же ввёл общепринятое теперь обозначение предела

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Разработал основы теории функций комплексного переменного, автор многих плодотворных идей в алгебре, дифференциальной геометрии, в вариационном исчислении. Постоянно занимался педагогической работой, лекции К. Вейерштрасса пользовались исключительной популярностью. Большая часть его математических работ была впервые опубликована только в 1898 г.

Глава 3

Предел функции в точке. Непрерывные функции

3.1 Предел функции в точке

3.1.1 Предельная точка множества

Определение 1. Пусть $A \subset R$. Число $x_0 \in R$ называется предельной точкой множества A, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in A, y \neq x_0 \ : \quad |y - x_0| < \varepsilon.$$

Примеры. 1. Для множества $A = [0,1]$ множество всех предельных его точек есть множество A.

2. Для множества $A = (0,1] \cup \{2\}$ множество всех предельных его точек есть множество $[0,1]$.

3. Для множества $A = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \geq 1\right\}$ множество всех предельных его точек есть множество $\{0\}$.

4. Множество $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\right\}$, $n \in N$, предельных точек не имеет.

Таким образом, предельная точка множества A может принадлежать множеству A, а может не принадлежать A.

Определение 2. Значение $+\infty$ есть предельная точка множества A, если $\forall C \in R \quad \exists y \in A \ : \quad y > C$.

Значение $-\infty$ есть предельная точка множества A, если $\forall C \in R \quad \exists y \in A \ : \quad y < C$.

Примеры. 1. Для множества N значение $+\infty$ есть предельная точка.

2. Для множества Z значения $+\infty, -\infty$ — предельные точки.

Определение 3. Точка $x \in A$, которая не является предельной точкой множества A, называется ***изолированной точкой множества*** *A.*

Замечание. Точка $x \in A$ есть изолированная точка множества A, если $\exists\, \delta > 0 \ : \quad B(x,\delta) \cap A = \{x\}$.

Упражнение 1. Доказать, что множество всех предельных точек множества $\boldsymbol{Q}$ есть $\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Упражнение 2. Пусть $x_0 \in \boldsymbol{R}$ — предельная точка множества A. Доказать, что в любой окрестности точки x_0 лежит бесконечно много точек из множества A.

Теорема 1. *Значение x_0 — предельная точка множества $A \subset \boldsymbol{R}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n \mid n \geq 1\}$, удовлетворяющая условиям: 1) $\forall n \geq 1: \ x_n \in A, \ x_n \neq x_0$; 2) $x_n \to x_0, \ n \to \infty$.*

⌈ Рассмотрим случай, когда $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Необходимость. Пусть x_0 — предельная точка для A. По определению предельной точки для числа $\varepsilon = 1$ имеем следующее утверждение $\exists\, x_1 \in A, x_1 \neq x_0 \ : \ |x_1 - x_0| < 1$. Аналогично, для числа $\varepsilon = \frac{1}{2}$ получим $\exists\, x_2 \in A, x_2 \neq x_0 : \ |x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$, для числа $\varepsilon = \frac{1}{3}$ $\exists\, x_3 \in A, x_3 \neq x_0 : \ |x_3 - x_0| < \frac{1}{3}$, и т. д. Получим последовательность $\{x_n \mid n \geq 1\}$, удовлетворяющую условию 1) по построению. Кроме того, из неравенств $\forall n \geq 1 : \ |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ следует, что $x_n \to x_0, \ n \to \infty$.

Достаточность. Это часть утверждения теоремы следует из определений предела и предельной точки. ⌋

Упражнение 3. Проверить, что среди членов последовательности удовлетворяющей условиям теоремы 1 бесконечно много различных.

Упражнение 4.* Определить множество предельных точек множества: a) $A = \{\{\sqrt{n}\} \mid n \geq 1\}$; b) $\{\sin n \mid n \geq 1\}$; c) $\{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n} \mid m \in \boldsymbol{N}, \ n \in \boldsymbol{N}\}$.

Замечание. Наиболее частым расположением предельной точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$ множества A относительно множества A являются следующие: (i) $\exists\, \delta > 0 : \ (B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}) \subset A$; (ii) $\exists\, \delta > 0 : \ (x_0 - \delta, x_0) \subset A$; (iii) $\exists\, \delta > 0 : \ (x_0, x_0 + \delta) \subset A$.

Удобно положить $\breve{B}(x_0,\delta) := B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}$. Говорят, что $\breve{B}(x_0,\delta)$ — "проколотая" δ-окрестность точки x_0.

3.1.2 Определение Коши предела функции в точке и примеры

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$, $A \neq \varnothing$, далее рассматриваются функции вида $f: A \to \boldsymbol{R}$.

Определение 4. *Пусть $x_0 \in \boldsymbol{R}$ — предельная точка множества A и $f: A \to \boldsymbol{R}$. Число $p \in \boldsymbol{R}$ называется **пределом (или предельным значением)** функции f в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta)) \; : \quad |f(x) - p| < \varepsilon$.*

Обозначения: $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; $\quad f(x) \to p, \quad x \to x_0$.

Замечания. 1. Заметим, что имеет место следующее равенство $A \cap \check{B}(x_0, \delta) = \{x \in A \mid |x - x_0| < \delta, \quad x \neq x_0\}$.

2. Определение 1 можно представить в таком виде $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0: \; f(A \cap \check{B}(x_0, \delta)) \subset B(p, \varepsilon)$.

3. Из определения 1 следует единственность числа p, доказательство будет приведено ниже.

4. Следующие 4 утверждения равносильны:

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta)) \; \ldots,$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \in (0, 1) \quad \forall x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta)) \; \ldots,$

(iii) $\forall \varepsilon \in (0, 1) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta)) \; \ldots,$

(iv) $\forall \varepsilon \in (0, 1) \quad \exists \delta \in (0, 1) \quad \forall x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta)) \; \ldots,$

Равносильность утверждений (i)-(iv) весьма полезна в рассуждениях, связанных с понятием предела.

Примеры. 1. Пусть $A = \boldsymbol{R}$, $c \in \boldsymbol{R}$ и $\forall x \in \boldsymbol{R} : \; f(x) = c$ (f — постоянная функция). Тогда $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}: \; \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ или $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

⌈ Для каждого $\varepsilon > 0$ в определении 1 можно положить $\delta = 1 > 0$. ⌋

2. Пусть $A = \boldsymbol{R}$, $f(x) = x$, $\; x \in \boldsymbol{R}$. Тогда $\forall x_0 \in \boldsymbol{R} \; : \; \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

⌈ Действительно, для значения $p = x_0$ имеем $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \varepsilon \; \forall x \in B(x_0, \delta) : \; |f(x) - x_0| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$. ⌋

3. Пусть $A = \boldsymbol{R}$ и $f(x) = x^2$, $\; x \in \boldsymbol{R}$. Тогда $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}: \; \lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$.

⌈ Можно ограничиться только теми x, для которых $|x - x_0| < 1$. Тогда $|x^2 - x_0^2| = |x + x_0| \cdot |x - x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \cdot |x - x_0| < (|x - x_0| + 2|x_0|)|x - x_0| < (1 + 2|x_0|)|x - x_0|$. Поэтому $\forall \varepsilon \in (0, 1) \; \exists \delta := \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} > 0 \; \forall x \in B(x_0, \delta) : \; |x^2 - x_0^2| < (1 + 2|x_0|)|x - x_0| < (1 + 2|x_0|)\delta = \varepsilon$. ⌋

Упражнение 5. Доказать, что $\forall k \in \boldsymbol{N} \quad \forall x_0 \in \boldsymbol{R}: \; \lim\limits_{x \to x_0} x^k = x_0^k$.

Примеры. 4. Пусть $A = R \setminus \{1\}$, $x_0 = 1$, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $x \in A$. Тогда $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

⌈ Действительно, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \varepsilon > 0\ \forall\, x \in \check{B}(1,\delta)$: $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1} - 2\right| =$
$= |x+1-2| = |x-1| < \delta = \varepsilon$. ⌋

5. Пусть $A = R \setminus \{0\}$, $x_0 = 0$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in A$. Тогда справедливо равенство $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

⌈ Сравнивая площади треугольников и сектора в круге радиуса 1, с помощью определения функций sin, tg приходим к следующим неравенствам $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, из которых следует, что $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$, $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ с учётом чётности функций. Поэтому $0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} < 2\dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x^2}{2}$ для значений x, $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$. Таким образом, $\forall\, \varepsilon \in (0,1)\ \exists\, \delta := \varepsilon > 0\ \forall\, x \in \check{B}(0,\delta)$:
$\left|\dfrac{\sin x}{x} - 1\right| = 1 - \dfrac{\sin x}{x} < \dfrac{x^2}{2} < \dfrac{\delta^2}{2} < \varepsilon$. ⌋

Следствие 1. Справедливо следующее неравенство $\forall\, x \in R :\ |\sin x| \le |x|$, *причём знак* " = " $\iff x = 0$.

Упражнение 6. Доказать, что $\forall\, n \in N\ \forall\, x \in R :\ |\sin nx| \le n|\sin x|$.

Упражнение 7. Доказать, что $\forall\, x \in R$: $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Упражнение 8. Для $x \in R$ такого, что $\sin x \ne 0$, доказать неравенство $\forall\, n \in N$: $1 + \sum\limits_{m=1}^{n-1} \dfrac{\sin(2m+1)x}{\sin x} \le n^2$.

Пример. 6. Докажем, что для любого $x_0 \in R$ $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

⌈ Положим $A = R$, $p = \sin x_0$ для доказательства первого утверждения. Имеем $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta := \varepsilon > 0\ \forall\, x \in B(x_0,\delta)$: $|\sin x - \sin x_0| =$
$= 2\left|\cos\dfrac{x+x_0}{2}\right|\cdot\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right| \le 2\cdot 1\cdot\dfrac{|x-x_0|}{2} < \delta = \varepsilon$. ⌋

Упражнение 9. Доказать второе утверждение примера 6.

Пример. 7. Пусть $a > 0$. Тогда $\forall\, x_0 \in R :\ \lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, в частности $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

⌈ Рассмотрим случай $a > 1$. В этом случае функция $f(x) = a^x$, $x \in R$ строго возрастает на R, то есть $x_1 < x_2 \implies a^{x_1} < a^{x_2}$. Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. Так как $a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \to 1$, $a^{-1/n} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$, $n \to \infty$, то в силу теоремы 7 гл. 2 имеем $\exists N_1 \in N\ \forall n \ge N_1 :$ $a^{-1/n} > 1 - \varepsilon a^{-x_0}$; $\exists N_2 \in N\ \forall n \ge N_2 :$ $a^{1/n} < 1 + \varepsilon a^{-x_0}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta := \dfrac{1}{\max(N_1, N_2)} > 0\ \forall x \in B(x_0, \delta) :$ $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1| < a^{x_0}\varepsilon a^{-x_0} = \varepsilon$, поскольку для значений $x \in B(x_0, \delta)$ имеем также $-\varepsilon a^{-x_0} < a^{-\delta} - 1 < a^{x-x_0} - 1 < a^{\delta} - 1 < \varepsilon a^{-x_0}$. ⌋

Упражнение 10. Провести доказательство в примере 7 для числа $a \in (0, 1)$.

Определение 5. *Пусть $x_0 \in R$ — предельная точка множества A и $f: A \to R$. Значение $+\infty$* ***есть предел функции f в точке*** *x_0, если $\forall C \in R\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta)) :$ $f(x) > C$. Значение $-\infty$ есть предел функции f в точке x_0, если $\forall C \in R\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta)) :$ $f(x) < C$.*

Пример. 8. Пусть $A = R \setminus \{0\}$, $x_0 = 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \ne 0$. Тогда $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Упражнение 11. Доказать, что $\dfrac{1}{f(x)} \to 0$, $x \to x_0$, если $f(x) \to +\infty$, $x \to x_0$.

Определение 6. *Пусть $+\infty$ — предельная точка множества A. Число $p \in R$* ***называется пределом функции*** *f при $x \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists C \in R\ \forall x > C : |f(x) - p| < \varepsilon$.*

Упражнение 12. Привести определения пределов:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = p \in R$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Пример. 9. Пусть $A = (0, +\infty)$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$. Тогда $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

⌈ Действительно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists C := \dfrac{1}{\varepsilon} > 0\ \forall x > C :$ $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| = \dfrac{1}{x} < \varepsilon$. ⌋

Упражнение 13. Пусть $\alpha > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0$.

Пример. 10. Пусть $a > 1$, $A = R$, $m \in N$, $f(x) = x^m a^{-x}$, $x \in A$. Докажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^m}{a^x} = 0$.

⌈ Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Поскольку согласно теореме 3 гл. 2 $\frac{(n+1)^m}{a^n} = \frac{(n+1)^m}{a^{n+1}} a \to 0, \quad n \to \infty$, то в силу определения предела последовательности для числа ε имеем $\exists N \in \boldsymbol{N}\ \forall n \geq N: \ \frac{(n+1)^m}{a^n} < \varepsilon$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists C := N\ \forall x > C: \ \left|\frac{x^m}{a^x} - 0\right| = \frac{x^m}{a^x} < \frac{([x]+1)^m}{a^{[x]}} < \varepsilon$, так как $[x] \geq C = N$. ⌋

Упражнение 14. Пусть $a > 1, \ \alpha \in \boldsymbol{R}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$.

Упражнение 15. Пусть $a \in (0,1), \ \ \alpha \in \boldsymbol{R}$. Доказать следующее утверждение $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^\alpha a^x) = 0$.

Пример. 11.Докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

⌈ Пусть $\varepsilon > 0$ задано. По теореме 4 гл. 2 $\frac{\ln(n+1)}{n} = \frac{\ln(n+1)}{n+1}\,\frac{n+1}{n} \to 0, \quad n \to \infty$, следовательно, по определению предела последовательности для числа ε имеем $\exists N \in \boldsymbol{N} \quad \forall n \geq N: \ \frac{\ln(n+1)}{n} < \varepsilon$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists C := N\ \forall x > C: \ \left|\frac{\ln x}{x} - 0\right| = \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln([x]+1)}{[x]} < \varepsilon$, поскольку $[x] \geq C = N$. ⌋

Упражнение 16. Пусть $\alpha > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

Пример. 12. Докажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

⌈ Пусть $\varepsilon > 0$ задано. По определению числа e имеем

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \to e, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \to e$$

при $n \to \infty$, поэтому по определению предела последовательности для ε получим $\exists N \in \boldsymbol{N}\ \forall n \geq N: \ e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n, \ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon$. Таким образом, доказано такое утверждение $\forall \varepsilon > 0\ \exists C := N\ \forall x > C: \ e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e + \varepsilon \Longrightarrow \left|\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon$. ⌋

Упражнение 17. Доказать, что:
a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$.

Упражнение 18. Доказать, что: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right) = 1$; b) предел $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ не существует.

Указание. Проверить, что существуют последовательности $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset (0,+\infty)$ и $\{y_n \mid n \geq 1\} \subset (0,+\infty)$ такие, что: $x_n \to 0$, $\sin\dfrac{1}{x_n} \to 1$; $y_n \to 0$, $\sin\dfrac{1}{y_n} \to 0$, $n \to \infty$.

Упражнение 19. Доказать, что: a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a \iff \lim\limits_{x\to 0} f(x^3) = a$; b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a \implies \lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = a$. Привести также пример к b), показывающий, что обратное утверждение не верно.

Упражнение 20.* Предположим, что для функции $f:\ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ выполнено условие $\forall a \in \boldsymbol{R}:\ f\left(\dfrac{a}{n}\right) \to 0,\ n \to \infty$. Существует ли предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Упражнение 21. Для функции $f:\ \boldsymbol{R} \to (0,+\infty)$ справедливо соотношение $f(x) + \dfrac{1}{f(x)} \to 2,\ \ x \to 0$. Доказать, что $f(x) \to 1,\ \ x \to 0$.

3.1.3 Определение Гейне предела функции в точке. Эквивалентность определений Коши и Гейне

Определение 7. *Пусть x_0 — предельная точка множества A, $f:\ A \to \boldsymbol{R}$. Значение p (возможно, что $p = -\infty$ или $p = +\infty$) называется пределом функции f в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n \mid n \geq 1\}$, удовлетворяющей таким условиям: 1) $\forall n \geq 1:\ x_n \in A,\ x_n \neq x_0$; 2) $x_n \to x_0,\ \ n \to \infty$, справедливо следующее соотношение $f(x_n) \to p,\ \ n \to \infty$.*

Замечание. Определение Гейне охватывает ситуацию всех трёх определений п. 3.1.2.

Теорема 2. *Определения Коши и Гейне предела функции в точке эквивалентны.*

Γ Доказательство проведём для случая $\{x_0, p\} \subset \boldsymbol{R}$.

(i) Предел в точке по Коши есть предел по Гейне. Пусть $p = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в соответствии с определением 4 и пусть $\{x_n \mid n \geq 1\}$ –

произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям 1) и 2) определения 7. Докажем, что $f(x_n) \to p$, $n \to \infty$. Пусть число $\varepsilon > 0$ задано. По определению Коши $\exists\, \delta > 0\ \forall x \in A, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 :$ $|f(x) - p| < \varepsilon$. Теперь по определению предела последовательности для числа δ имеем $\exists\, N \in \boldsymbol{N}\ \forall n \geq N :\ |x_n - x_0| < \delta$. Таким образом, получим такое утверждение $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \boldsymbol{N}\ \forall n \geq N :\ |f(x_n) - p| < \varepsilon$.

(ii) Предел по Гейне есть предел по Коши. Пусть p есть предел функции f в точке x_0 по определению 7. Допустим, что p не есть предел функции f в точке x_0 по определению 4. Это означает, что

$$\exists\, \varepsilon^* > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x(\delta) \in A, |x(\delta) - x_0| < \delta, x(\delta) \neq x_0 :\ |f(x(\delta)) - p| \geq \varepsilon^*.$$

Пусть $x_n := x\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$. Последовательность $\{x_n \mid n \geq 1\}$ удовлетворяет условию 1) определения 7, кроме того, выполнено и условие 2), поскольку $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$. Поэтому $f(x_n) \to p$, $n \to \infty$, что противоречит следующему неравенству $|f(x_n) - p| \geq \varepsilon^*$, $n \geq 1$. ⌋

Упражнение 22. Доказать теорему 1 для следующих случаев: a) $x_0 \in \boldsymbol{R}$, $p = +\infty$; b) $x_0 = -\infty$, $p = +\infty$.

Упражнение 23. Доказать, что предел функции $\sin\dfrac{1}{x}$ в точке $x_0 = 0$ не существует.

Упражнение 24. Вычислить предел: a) $\lim\limits_{x \to 0}\left(x \sin\dfrac{1}{x}\right)$;

b) $\lim\limits_{x \to 0}\left(x\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$; c) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\sin\dfrac{1}{n^2} + \sin\dfrac{2}{n^2} + \ldots + \sin\dfrac{n}{n^2}\right)$;

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$; e) $\lim\limits_{n \to \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

3.1.4 Свойства пределов функции

Пусть x_0 – предельная точка множества A.

Теорема 3. *Если* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = p_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = p_2$, *то* $p_1 = p_2$.

⌈ Пусть $\{x_n \mid n \geq 1\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям 1) и 2) определения Гейне. Тогда в силу эквивалентности определений Коши и Гейне имеем $f(x_n) \to p_1$ и $f(x_n) \to p_2$, $n \to \infty$. Однако, по теореме 1 гл. 2 предел последовательности определяется единственным образом, поэтому $p_1 = p_2$. ⌋

Теорема 4. *Пусть* $x_0 \in \boldsymbol{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = p \in \boldsymbol{R}$ *и число* $q > p$. *Тогда* $\exists\, \delta > 0\ \forall x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta)) :\ f(x) < q$.

⌈ Согласно определению Коши предела функции в точке для числа $\varepsilon := q-p > 0$ имеем $\exists\,\delta > 0\,\forall\,x \in (A\cap\check{B}(x_0,\delta)):\ |f(x)-p| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) < p+\varepsilon = q$. ⌋

Упражнение 25. Пусть для некоторого $\gamma > 0$ имеем $\check{B}(x_0,\gamma) \subset A$ и предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$. Доказать, что $\exists\,\delta > 0\,\forall\,x \in \check{B}(x_0,\delta):\ f(x) > 0$.

Упражнение 26. Пусть $+\infty$ – предельная точка множества A и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$. Доказать, что $\exists\,C \in \boldsymbol{R}\ \ \forall\,x > C, x \in A:\ f(x) > 0$.

Упражнение 27. Пусть $a > 1$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Доказать, что $\exists\,C > 0\,\forall\,x > C:\ x^\alpha < a^x$.

Указание. Воспользоваться следующими известными утверждениями: a) $x^\alpha a^{-x} \to 0$, $x \to +\infty$; b) $0 < 1$.

Упражнение 28. Доказать, что $\exists\,C > 0\,\forall\,x > C:\ \ln x < \sqrt{x}$.

Упражнение 29. Доказать следующее утверждение $\exists\,C > 0\,\forall\,x > C:\ x^3 + 7x^2 - 3x + 1 < 2x^3$.

Теорема 5. *Предположим, что функции $f:\ A \to \boldsymbol{R}$, $g:\ A \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяют условиям: 1) $\forall\,x \in A:\ f(x) \le g(x)$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = p$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = q$.*

Тогда $p \le q$, то есть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

⌈ Пусть $\{x_n \mid n \ge 1\}$ – произвольная последовательность значений аргумента x, удовлетворяющая условиям 1) и 2) определения Гейне. Тогда для последовательностей $\{f(x_n) \mid n \ge 1\}$, $\{g(x_n) \mid n \ge 1\}$ имеем a) $\forall\,n \ge 1:\ f(x_n) \le g(x_n)$; b) $f(x_n) \to p$, $g(x_n) \to q$, $n \to \infty$. Согласно теореме 8 гл. 2 имеем $p \le q$. ⌋

Следствие 2. *Если для функций $f:\ A \to \boldsymbol{R}$, $g:\ A \to \boldsymbol{R}$ $\exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in (A\cap\check{B}(x_0,\delta)):\ |f(x) - p| \le g(x)$, $g(x) \to 0$, $x \to x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = p$.*

Теорема 6. *Предположим, что для функций $f, g:\ A \to \boldsymbol{R}$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = p \in \boldsymbol{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = q \in \boldsymbol{R}$.*

Тогда: 1) $\forall\,C \in \boldsymbol{R}$: $\lim\limits_{x\to x_0} (Cf(x)) = C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

4) если дополнительно $q \ne 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

⌈ Пусть $\{x_n \mid n \geq 1\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям 1) и 2) определения Гейне. По условию теоремы 6 $f(x_n) \to p$, $g(x_n) \to q$, $n \to \infty$, а потому на основании теоремы 10 гл. 2 имеем $Cf(x_n) \to Cp$, $f(x_n) + g(x_n) \to p + q$, $f(x_n)g(x_n) \to pq$, $n \to \infty$ и при условии $q \neq 0$ $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{p}{q}$, $n \to \infty$. ⌋

Упражнение 30. Пусть $x_0 \notin \pi Z$. Доказать, что $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0$.

Указание. Использовать пример 6 п. 3.1.2.

Упражнение 31. Доказать, что $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$, $x_0 \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi Z\right\}$.

Упражнение 32. Доказать, что $\lim\limits_{x \to x_0} (x^3 + 7x^2 + 2x + 1) = x_0^3 + 7x_0^2 + 2x_0 + 1$.

Упражнение 33. Доказать, что для $m \in N$ и $x_0 \neq 0$ справедливо равенство $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{x^m} = \dfrac{1}{x_0^m}$.

Упражнение 34. Доказать, что для $x_0 > 0$ $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

Указание. Для $x > 0$ имеем $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \dfrac{1}{\sqrt{x_0}}|x - x_0|$.

Упражнение 35. Вычислить предел:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + \ln x + 1}{\sqrt{x^4 + 1} + x + 3}$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x - 1))$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1 - \cos x}\right)$; d) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\sin x - 1}{\cos x}$;

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}$; f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{\sqrt[3]{1 + \sin x} - 1}$;

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[m]{\cos x} - \sqrt[n]{\cos x}}{\sin^2 x}$, $\{m, n\} \subset N$; h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{ax + 1} - \sqrt{x})$, $a > 0$.

Упражнение 36. Пусть для функций $f : A \to R$ и $g : A \to R$ выполнены условия: 1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = z_0$; 2) $\forall x \neq x_0 : f(x) \neq y_0$ ($x_0 \in R$, $y_0 \in R$). Доказать, что $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = z_0$.

Упражнение 37*. Функция $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такова, что $\forall x > 0\ \forall y > 0 : f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. Доказать существование предела $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

3.1.5 Односторонние пределы

Пусть множество $A \subset \boldsymbol{R}$ и точка $x_0 \in \boldsymbol{R}$ таковы, что $\exists\gamma > 0$: $(x_0-\gamma, x_0) \subset A$.

Определение 8. *Число $p \in \boldsymbol{R}$ называется* ***пределом слева функции*** *f в точке x_0, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in (x_0-\delta, x_0)$: $|f(x)-p| < \varepsilon$.*

<u>Обозначения:</u> $p = f(x_0-)$, $p = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$, $p = \lim\limits_{x\to x_0, x<x_0} f(x)$.

Пусть множество $A \subset \boldsymbol{R}$ и точка $x_0 \in \boldsymbol{R}$ таковы, что $\exists\gamma > 0$: $(x_0, x_0+\gamma) \subset A$.

Определение 9. *Число $p \in \boldsymbol{R}$ называется* ***пределом справа функции*** *f в точке x_0, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$: $|f(x)-p| < \varepsilon$.*

<u>Обозначения:</u> $p = f(x_0+)$, $p = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, $p = \lim\limits_{x\to x_0, x>x_0} f(x)$.

Пример. 1. Для функции $f(x) = 1,\ x > 0,\ f(x) = -1,\ x < 0,\ f(0) = 0$, имеем $f(0-) = -1,\quad f(0+) = 1$.

Упражнение 38. Доказать, что существование предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ равносильно существованию обоих односторонних пределов $f(x_0-)$, $f(x_0+)$ и их равенству.

Упражнение 39. Дать определение пределов $f(x_0-) = +\infty$ и $f(x_0+) = +\infty$.

Упражнение 40. Найти пределы:

a) $\lim\limits_{x\to\pi/2, x<\pi/2} \dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{1-\sin x}}$; b) $\lim\limits_{x\to\pi/2, x>\pi/2} \dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}}{\sqrt{1-\sin x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\pi, x<\pi} \left(|\pi-x| \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to\pi, x>\pi} \left(|\pi-x| \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 0, x>0} e^{-1/x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$.

Указание к e), f). Положить $z = \dfrac{1}{x}$ и заметить, что $z \to +\infty$ равносильно тому, что $x \to 0,\ x > 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0, x>0}\left(\dfrac{1}{x}e^{-1/x}\right) = \lim\limits_{z\to+\infty}(ze^{-z}) = \lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{z}{e^z}$, см. пример 10 п. 3.1.2.

Упражнение 41. Пусть $a > 0$. Найти $\lim\limits_{x\to 0, x>0} a^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to 0, x<0} a^{1/x}$.

3.1.6 Существование предела функции в точке

Пусть $A \subset \mathbf{R}$, $f: A \to \mathbf{R}$.

*Определение 10. Функция f называется **монотонно неубывающей на** A (**монотонно невозрастающей на** A), если* $\forall \{x_1, x_2\} \subset A: \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$.

*Функция f называется **строго возрастающей на** A (**строго убывающей на** A), если* $\forall \{x_1, x_2\} \subset A: \ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Пример. 1. Функция $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$ строго убывает на $(-\infty, 0]$ и строго возрастает на $[0, +\infty)$.

*Определение 11. Функция $f: A \to \mathbf{R}$ называется **ограниченной на множестве** A, если множество $f(A)$ ограничено, то есть, если* $\exists C > 0\ \forall x \in A: \ |f(x)| \le C$.

Теорема 7. *Пусть для множества A существует число $\gamma > 0$: $(x_0 - \gamma, x_0) \subset A$, и функция $f: A \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условиям: 1) f монотонно не убывает на A; 2) f ограничена на A. Тогда существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0, x<x_0} f(x)$.

⌈ Пусть $B := \{f(x) \mid x \in (A \cap \{x < x_0\})\}$. Множество B непусто и ограничено. По теореме о существовании точных граней $\exists p \in \mathbf{R}: \ \sup B = p$. Докажем, что $f(x_0-) = p$. Для $\varepsilon > 0$ по теореме о характеризации точных граней $\exists \overline{x} < x_0 : \ f(\overline{x}) > p - \varepsilon$. С учётом условия 1) имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta :\doteq x_0 - \overline{x} > 0\ \forall x \in ((x_0 - \delta, x_0) \cap (x_0 - \gamma, x_0)) : \ p - \varepsilon < f(\overline{x}) \le$ $\le f(x) \le p \Longrightarrow |f(x) - p| < \varepsilon$. ⌋

Упражнение 42. Доказать аналог теоремы 6 для монотонно невозрастающей функции.

Упражнение 43. Пусть числа $\{a, b, c\} \subset \mathbf{R}$. Для следующей функции $f(x) = x + 1$, $x < 1$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \ge 1$, определить значения a, b, c, при которых функция f монотонна на $\mathbf{R}$.

Упражнение 44. Пусть f — монотонно неубывающая на отрезке $[a, b]$ функция, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$. Для любого $c \in (a, b)$ доказать существование пределов $f(a+)$, $f(c-)$, $f(c+)$, $f(b-)$. Проверить неравенства $f(a) \le f(a+) \le f(c-) \le f(c) \le f(c+) \le f(b-) \le f(b)$. Доказать также, что $\lim\limits_{x\to c+} f(x-) = f(c+)$, $\lim\limits_{x\to c-} f(x+) = f(c-)$.

Теорема 8. ***(Критерий Коши).*** *Пусть $x_0 \in \boldsymbol{R}$ — предельная точка множества A и $f: A \to \boldsymbol{R}$. Конечный предел функции f в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \{x, y\} \subset (A \cap \check{B}(x_0, \delta))$: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

⌈ Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. По определению предела функции в точке для числа $\varepsilon/2$ имеем $\exists \delta_1 > 0 \ \forall x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta_1))$: $|f(x) - p| < \varepsilon/2$, где $p := \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta := \delta_1 \ \forall \{x, y\} \subset (A \cap \check{B}(x_0, \delta))$: $|f(x) - f(y)| = |f(x) - p + p - f(y)| \le |f(x) - p| + |f(y) - p| <$ $< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Достаточность. Предположим, что условие теоремы 8 выполнено. Для доказательства существования предела функции f в точке x_0 воспользуемся определением Гейне. Пусть $\{x_n \mid n \ge 1\}$ и $\{y_n \mid n \ge 1\}$ — две произвольные последовательности, удовлетворяющие условиям 1) и 2) определения Гейне. Тогда этим условиям удовлетворяет также последовательность $\{z_n \mid n \ge 1\} := \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots\}$. Докажем, что последовательность $\{f(z_n) \mid n \ge 1\}$ сходится. Для этого согласно критерию Коши сходимости последовательности нужно проверить её фундаментальность. Пусть для $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ удовлетворяет условию теоремы 8. Поскольку $z_n \to x_0, \quad n \to \infty$, то по определению предела последовательности для числа δ имеем $\exists N_1 \in \boldsymbol{N} \ \forall n \ge N_1$: $|z_n - x_0| < \delta$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N := N_1 \quad \forall m \ge N \ \forall n \ge N$: $|f(z_m) - f(z_n)| < \varepsilon$. Следовательно, $f(z_n) \to p \in \boldsymbol{R}, \ n \to \infty$. Тогда $f(x_n) \to p, \ f(y_n) \to p; \ n \to \infty$. По определению Гейне $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. ⌋

Упражнение 45. Доказать утверждение $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = p \in \boldsymbol{R} \iff$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists C > 0 \ \forall x > C \ \forall y > C : \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Упражнение 46. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} (\mathrm{tg}(\sin(\mathrm{tg}\, x)) \,\mathrm{ctg}(\mathrm{tg}(\sin x)))$.

3.2 Исследование локального поведения функций

3.2.1 Предположения

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$ и x_0 — предельная точка множества A. В настоящем разделе все рассуждения проводятся в одной из следующих ситуаций:

1) $x_0 \in \boldsymbol{R}; \quad \exists \gamma > 0 \ : \quad (B(x_0, \gamma) \setminus \{x_0\}) \subset A$;

2) $x_0 \in \boldsymbol{R}; \quad \exists \gamma > 0 \ : \quad (x_0 - \gamma, x_0) \subset A$;

3) $x_0 \in \boldsymbol{R}; \quad \exists \gamma > 0 \ : \quad (x_0, x_0 + \gamma) \subset A$;

4) $x_0 = +\infty$; $\exists\, c \in \boldsymbol{R}$: $(c, +\infty) \subset A$; 5) $x_0 = +\infty$; $A = \boldsymbol{N}$.

Ниже рассматриваются функции $f : A \to \boldsymbol{R}$, поведение которых при $x \to x_0$ таково, что: (i) $f(x) \to 0$, $x \to x_0$ либо (ii) $f(x) \to +\infty$, $x \to x_0$.

3.2.2 Отношение подчинённости

Пусть x_0 — предельная точка множества A и $f : A \to \boldsymbol{R}$, $g : A \to \boldsymbol{R}$.

Определение 1. *Пусть $x_0 \in \boldsymbol{R}$. Функция f* ***подчинена*** *функции g* ***при*** *$x \to x_0$, если выполняется следующее условие* $\exists\, L > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta)) :\ |f(x)| \le L|g(x)|$.

Пусть $x_0 = +\infty$. Функция f ***подчинена функции*** *g* ***при*** *$x_0 \to +\infty$, если* $\exists\, L > 0\ \exists\, c \in \boldsymbol{R}\ \forall\, x > c :\ |f(x)| \le L|g(x)|$.

<u>Обозначения:</u> $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$; $f = O(g)$, $x \to x_0$.

Упражнение 47. Верно ли , что $f(x) = O(f(x))$, $x \to x_0$?

Упражнение 48. Проверить, что для любого $c \ne 0$ $f = O(g)$, $x \to x_0 \iff f = O(cg)$, $x \to x_0$.

Упражнение 49. Пусть $x_0 \in \boldsymbol{R}$. Доказать, что $f = O(1)$, $x \to x_0$, тогда и только тогда, когда f ограничена на $B(x_0, \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ при некотором $\delta > 0$.

Упражнение 50. Пусть $x_0 \in \boldsymbol{R}$ и $\forall\, x \in (A \setminus \{x_0\}) :\ g(x) \ne 0$. Доказать, что $f = O(g)$, $x \to x_0$, тогда и только тогда, когда $\dfrac{f}{g}$ ограничена на $B(x_0, \delta) \cap A \setminus \{x_0\}$ при некотором $\delta > 0$.

Упражнение 51. Проверить, что для функции g, отличной от 0 на A, $f = O(g)$, $x \to +\infty$, тогда и только тогда, когда $\dfrac{f}{g}$ ограничена на $(c, +\infty)$ при некотором $c \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 52. Верно ли утверждение: для любых двух функций f и g имеем $f = O(g)$, $x \to x_0$, либо $g = O(f)$, $x \to x_0$?

Указание. Рассмотреть пример: $x_0 = +\infty$, $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x \sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Пример. Пусть $m \in \boldsymbol{N}$, $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset \boldsymbol{R}$. Докажем утверждение $x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m = O(x^m)$, $x \to +\infty$.

Поскольку, $1 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \ldots + \dfrac{a_m}{x^m} \to 1$, $x \to +\infty$, то $\exists\, c \in \boldsymbol{R}\ \forall\, x > c :$ $\left|1 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \ldots + \dfrac{a_m}{x^m}\right| \le 2$. Отсюда приходим к утверждению

$\forall\, x > c: \quad |x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_m| = |x^m| \cdot \left|1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_m}{x^m}\right| \le 2|x^m|.$

Упражнение 53. Доказать, что:

a) $\sin x = O(x), \quad x \to 0;$

b) $\sin x = O(1), \quad x \to +\infty;$

c) $x^2 = O(x), \quad x \to 0;$

d) $x = O(x^2), \quad x \to +\infty;$

e) $\ln x = O(x), \quad x \to +\infty;$

f) $n \ln n = O(2^n), \quad n \to \infty;$

g) $\forall\, m \in N: \quad x^m = O(2^x), \quad x \to +\infty;$

h) $x \sin x + \sqrt{x} = O(x), \quad x \to +\infty.$

3.2.3 Свойства отношения "O"

1^0. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = p \in \boldsymbol{R}$, то имеет место соотношение $f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0$.

⌈ Доказательство следует из того, что $|p| \in \boldsymbol{R}$ и свойства предела функции в точке, см. теорему 4. ⌋

Упражнение 54. Утверждение, обратное к 1^0, не выполняется. Привести пример.

Упражнение 55. В каком случае при условиях 1^0 имеет место соотношение $g(x) = O(f(x)), \quad x \to x_0$?

2^0. Если $f = O(g), \ x \to x_0$, и $g = O(h), \ x \to x_0$, то $f = O(h), \quad x \to x_0$. Таким образом, $O(O(h)) = O(h), \quad x \to x_0$.

3^0. Если $f = O(g), \ x \to x_0$, и $h = O(g), \ x \to x_0$, то $f + h = O(g), \quad x \to x_0$. Таким образом, $O_1(g) + O_2(g) = O(g), \quad x \to x_0$.

4^0. Если $f_k = O(g_k), \quad x \to x_0$, для $k = 1, 2$, то $f_1 f_2 = O(g_1 g_2), \quad x \to x_0$. Таким образом, $O(g_1)O(g_2) = O(g_1 g_2), \quad x \to x_0$.

⌈ Пусть $x_0 \in \boldsymbol{R}$. Согласно условию, для $k = 1, 2 \ \exists\, L_k > 0 \ \exists\, \delta_k > 0 \ \forall\, x \in (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}): \ |f_k(x)| \le L_k |g_k(x)|$. Поэтому для $L := L_1 L_2, \ \delta := \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ получим утверждение $\forall\, x \in (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}):$ $|f_1(x) f_2(x)| \le L |g_1(x) g_2(x)|$. ⌋

Упражнение 56. Доказать утверждения 2^0 и 3^0.

3.2.4 Отношение пренебрежимости

Пусть x_0 — предельная точка множества A и $f: \ A \to \boldsymbol{R}, \ g: \ A \to \boldsymbol{R}$.

Определение 2. *Функция* f *называется* ***пренебрежимой по сравнению с функцией*** g ***при*** $x \to x_0 \in \boldsymbol{R}$, *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta)) : \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$.

Функция f ***называется пренебрежимой по сравнению с функцией*** g ***при*** $x \to +\infty$, *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists c \in \boldsymbol{R}\ \forall x > c :$ $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$.

Обозначения: $f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0;\quad f = o(g),\ x \to x_0$.

Упражнение 57. Доказать, что:

a) $f(x) = o(1),\ x \to x_0 \iff f(x) \to 0,\ x \to x_0$;

b) $f(x) = o(x),\ x \to +\infty \iff \dfrac{f(x)}{x} \to 0,\ x \to +\infty$;

c) $f = o(g),\ x \to x_0 \iff f = o(cg),\ x \to x_0,\ c \in \boldsymbol{R},\ c \neq 0$.

Упражнение 58. Пусть $\forall x \in (A \setminus \{x_0\}) : \ g(x) \neq 0$. Тогда $f(x) = o(g(x)),\ x \to x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Упражнение 59. Верно ли утверждение: для любых двух функций f и g справедливо утверждение $f = o(g),\ x \to x_0$, либо $g = o(f),\ x \to x_0$? Для каких функций $f = o(f),\ x \to x_0$?

Указание. Рассмотреть следующий пример: $x_0 = +\infty,\ f(x) = 1,$ $g(x) = 1,\ x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 60. Доказать, что: a) $x^2 = o(x),\ x \to 0$; b) $x = o(x^2),\ x \to +\infty$; c) $x^3 = o(2^x),\ x \to +\infty$; d) $\ln x = o(\sqrt{x}),\ x \to +\infty$; e) $n^2 + n + 1 = o(2^n),\ n \to \infty$; f) $x - \sin x = o(x),\ x \to 0$.

3.2.5 Свойства отношения "o"

1^0. Если $f = o(g),\ x \to x_0$, то $f = O(g),\ x \to x_0$.

2^0. Если $f = o(g),\ x \to x_0$, и $g = O(h),\ x \to x_0$, то $f = o(h),\ x \to x_0$.

Таким образом, $o(O(h)) = o(h),\ x \to x_0,\quad O(o(h)) = o(h),\ x \to x_0$.

3^0. Если $f_k = o(g),\ x \to x_0$, для $k = 1, 2$, то $f_1 + f_2 = o(g),\ x \to x_0$.

4^0. Если $f_1 = o(g_1),\ x \to x_0$, и $f_2 = O(g_2),\ x \to x_0$, то $f_1 f_2 = o(g_1 g_2),\ x \to x_0$.

Таким образом, $o(g_1)O(g_2) = o(g_1 g_2),\ x \to x_0$.

$\ulcorner$ Пусть $x_0 \in \boldsymbol{R}$. Согласно определениям отношений "o" и "O" имеем

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta_1)) \ : \quad |f_1(x)| \leq \eta |g_1(x)|, \quad (1)$$

$$\exists L > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta_2)) \ : \quad |f_2(x)| \leq L |g_2(x)|. \quad (2)$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ положим $\eta = \varepsilon/L$ и $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда из (1) и (2) имеем $\forall\, x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta))$: $|f_1(x) f_2(x)| \le L\eta |g_1(x) g_2(x)| = \varepsilon |g_1(x) g_2(x)|$. ⌋

Упражнение 61. Доказать свойства 2^0 и 3^0.

5^0. Имеет место соотношение $f - g = o(f)$, $x \to x_0$ $\iff$ $f - g = o(g)$, $x \to x_0$.

⌈ Достаточно доказать, что из утверждения $f - g = o(f)$, $x \to x_0$, следует $f - g = o(g)$, $x \to x_0$. Для этого с учётом свойства 2^0 достаточно показать, что $f = O(g)$, $x \to x_0$. По определению отношения "о" для числа $\varepsilon = 1/2 > 0$ имеем $\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in (A \cap \check{B}(x_0, \delta))$: $|f(x) - g(x)| \le |f(x)|/2$, отсюда следует, что $|f(x)| - |g(x)| \le |f(x)|/2$, поэтому имеем неравенство $|f(x)| \le 2|g(x)|$. ⌋

Упражнение 62. Пусть $m \in \boldsymbol{N}$, $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset \boldsymbol{R}$. Доказать, что $a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = o(x^{m+1})$, $x \to +\infty$.

Упражнение 63. Пусть $a > 1$, $g(x) \to +\infty$, $x \to x_0$, и $f = o(g)$, $x \to x_0$. Доказать, что $a^{f(x)} = o(a^{g(x)})$, $x \to x_0$.

3.2.6 Эквивалентные функции

О п р е д е л е н и е 3. *Функции f и g называются эквивалентными при $x \to x_0$, если $f - g = o(f)$, $x \to x_0$.*

<u>Обозначения:</u> $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$; $f \sim g$, $x \to x_0$.

Упражнение 64. Доказать, что: a) $x^2 + x \sim x$, $x \to 0$; b) $x^2 + x \sim x^2$, $x \to +\infty$; c) $\sqrt{x^2 + x + 1} \sim x$, $x \to +\infty$; d) $\sin x \sim x$, $x \to 0$; e) $x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m \sim x^m$, $x \to +\infty$; $m \in \boldsymbol{N}$, $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset \boldsymbol{R}$; f) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \to +\infty$.

3.2.7 Свойства отношения эквивалентности

1^0. Пусть $\forall\, x \in (A \setminus \{x_0\})$: $g(x) \ne 0$. Тогда $f \sim g$, $x \to x_0$ $\iff$ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

⌈ Если $f \sim g$, $x \to x_0$, то, согласно определению $f - g = o(g)$, $x \to x_0 \implies \dfrac{f}{g} - 1 = \dfrac{o(g)}{g}$, $x \to x_0 \implies \lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Если же $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1 = o(1)$, $x \to$

$x_0 \Longrightarrow f(x) - g(x) = g(x)o(1) = O(g(x))o(1) = o(g(x)), \ x \to x_0$. Поэтому $f \sim g$ при $x \to x_0$. ⌋

2^0. Для любой функции f : $f \sim f, \quad x \to x_0$.

3^0. Если $f \sim g, \quad x \to x_0$, и $g \sim h, \quad x \to x_0$, то $f \sim h, \quad x \to x_0$.

⌈ Из соотношения $f \sim g, \ x \to x_0$, следует, что $f = O(g)$, $g = O(f)$, $x \to x_0$. Согласно предположению $f - g = o(g)$, $x \to x_0$; $g - h = o(g)$, $x \to x_0$, откуда на основании свойства 3^0 п. 3.2.5 $f - h = o(g)$, $x \to x_0$, и, согласно свойству 2^0 п. 3.2.5 $f - h = o(f)$, $x \to x_0$. Следовательно, $f \sim h, \quad x \to x_0$. ⌋

4^0. Если $f_k \sim g_k, \quad x \to x_0$, для $k = 1, 2$, то $f_1 f_2 \sim g_1 g_2, \quad x \to x_0$.

⌈ Имеем $f_1 f_2 - g_1 g_2 = f_1 f_2 - f_1 g_2 + f_1 g_2 - g_1 g_2 = f_1(f_2 - g_2) + (f_1 - f_2) g_2 = O_1(g_1) o_1(g_2) + o_2(g_1) O_2(g_2) = o(g_1 g_2), \quad x \to x_0$. ⌋

Теорема 9. *Пусть $\forall x \in (A \setminus \{x_0\})$: $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, $f \sim g, \quad x \to x_0$ и $h : A \to \boldsymbol{R}$ — произвольная функция.*

Тогда из существования одного из следующих пределов $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)h(x))$; $\lim\limits_{x \to x_0} (g(x)h(x))$ следует существование второго и их равенство.

Аналогично, из существования одного из следующих пределов $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{f(x)}$; $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ следует существование второго и их равенство.

⌈ Пусть существует $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)h(x))$. Тогда получим $\lim\limits_{x \to x_0} (g(x)h(x)) =$
$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(x)}{f(x)} (f(x)h(x)) \right) = 1 \cdot \lim_{x \to x_0} (f(x)h(x)).$$ ⌋

Пример. 1. Найдём предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin 3x}$. Имеем $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin 3x} =$
$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \frac{x^2}{4}}{3x^2} = \dfrac{1}{6}$, при этом использованы такие эквивалентности $\sin 3x \sim 3x$, $\sin^2 \dfrac{x}{2} \sim \dfrac{x^2}{4}$, $x \to 0$.

Упражнение 65. Из того, что $f \sim g, \quad x \to x_0$ не следует, что $2^f \sim 2^g, \quad x \to x_0$. Привести пример.

Упражнение 66. Из того, что $f_k \sim g_k, \quad x \to x_0, \ k = 1, 2$ не следует, что $f_1 \pm f_2 \sim g_1 \pm g_2, \quad x \to x_0$. Привести пример.

3.2.8 Порядок одной функции относительно другой

Пусть функция $g : A \to \boldsymbol{R}$ такова, что $\forall x \in (A \setminus \{x_0\})$: $g(x) > 0$.

Определение 4. *Функция f имеет **порядок** $\rho \in \boldsymbol{R}$ относительно функции g при $x \to x_0$, если существует*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^\rho} = a \in \boldsymbol{R}, \ a \neq 0.$$

Примеры. 1. Пусть $x_0 = 0$. Функция $f(x) = \sin x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$ имеет порядок 2 относительно функции $g(x) = x$, $x \in \boldsymbol{R}$ при $x \to 0$, а функция $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ имеет порядок -2 относительно g.

2. Пусть $x_0 = +\infty$. Функция $f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$, $x \in \boldsymbol{R}$, где $m \in \boldsymbol{N}$, $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset \boldsymbol{R}$, имеет порядок m относительно функции $g(x) = x$, $x \in \boldsymbol{R}$ при $x \to +\infty$, а функция $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $x > 0$ имеет порядок $-\dfrac{1}{2}$ относительно g при $x \to +\infty$.

3.2.9 Шкала сравнения

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$, x_0 — предельная точка множества A. Рассматриваются функции вида $f: A \to \boldsymbol{R}$.

Определение 5. *Семейство функций G называется **шкалой сравнения** при $x \to x_0$, если: 1) $\forall \{f, g\} \subset G$ либо $f = o(g)$, $x \to x_0$, либо $g = o(f)$, $x \to x_0$, либо $f = g$; 2) $\forall f \in G \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in (A \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}): \ f(x) \neq 0$.*

В случае $x_0 = +\infty$ определение аналогично с очевидным изменением в условии 2).

Примеры. 1. Пусть $x_0 = 0$, $A = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$. Семейства функций $G_1 = \{A \ni x \mapsto x^n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$; $G_2 = \{A \ni x \mapsto x^n \mid n \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$ являются шкалами сравнения при $x \to 0$.

2. Пусть $x_0 = 0$, $A = (0, a)$, $0 < a \leq +\infty$. Семейство функций $G = \{A \ni x \mapsto x^\alpha \mid \alpha \in \boldsymbol{R}\}$ есть шкала сравнения при $x \to 0+$.

3. Пусть $x_0 = +\infty$, $A = (a, +\infty)$, $a > 0$. Семейства функций $G_1 = \{A \ni x \mapsto x^n \mid n \in \boldsymbol{Z}\}$; $G_2 = \{A \ni x \mapsto x^n \mid n \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$ являются шкалами сравнения при $x \to +\infty$.

3.2.10 Главная часть. Асимптотическое разложение

Пусть G — шкала сравнения при $x \to x_0$, f — некоторая функция.

Определение 6. *Если $\exists L \neq 0 \ \exists g \in G: \ f(x) \sim Lg(x)$, $x \to x_0$, то функция Lg называется **главной частью функции** f **относительно шкалы** G при $x \to x_0$,*

Замечание. Главная часть f относительно заданной шкалы может не существовать. Привести пример.

Теорема 10. *(О единственности главной части).* *Если* $f(x) \sim L_k g_k(x)$, $x \to x_0$, $k = 1,2$, *где* $L_1 \neq 0$, $L_2 \neq 0$ *и* $g_k \in G$, $k = 1,2$, *то* $L_1 = L_2$ *и* $g_1 = g_2$.

⌈ Поскольку $L_1 g_1 \sim L_2 g_2$, $x \to x_0$, согласно 3^0, то $L_1 g_1 - L_2 g_2 = o(L_1 g_1)$, $x \to x_0$, и $L_1 g_1 - L_2 g_2 = o(g_1)$, $x \to x_0$, Если $g_1 \neq g_2$, то получаем равенство $L_2 g_2 = L_1 g_1 + o(g_1)$, $x \to x_0$. Из него следует, что предположение $g_2 = o(g_1)$, $x \to x_0$ приводит к соотношению $g_1 = o(g_1)$, $x \to x_0$, что невозможно для функции из шкалы. Аналогично отвергается случай $g_1 = o(g_2)$, $x \to x_0$. Поэтому $g_1 = g_2$, откуда $(L_1 - L_2) g_1 = o(g_1)$, $x \to x_0$, и, таким образом, $L_1 = L_2$. ⌋

Последовательное выделение главной части относительно соответствующим образом подобранной шкалы позволяет детально изучить поведение функции при $x \to x_0$. Опишем кратко эту процедуру и рассмотрим её на примере.

Пусть f — некоторая функция и G — шкала сравнения при $x \to x_0$.

Определим сначала главную часть $L_1 g_1$ функции f относительно шкалы G при $x \to x_0$. Тогда $L_1 \neq 0$, $g_1 \in G$; $f \sim L_1 g_1$, $x \to x_0$; $f - L_1 g_1 = o(g_1)$, $x \to x_0$. Тогда $f(x) = L_1 g_1(x) + o(g_1(x))$, $x \to x_0$.

Пусть далее $L_2 g_2$ — главная часть функции $f - L_1 g_1$ относительно шкалы G при $x \to x_0$. Тогда $L_2 \neq 0$, $g_2 \in G$; $f - L_1 g_1 \sim L_2 g_2$, $x \to x_0$. Поэтому $g_2 = o(g_1)$, $x \to x_0$. Кроме того, $f - L_1 g_1 - L_2 g_2 = o(g_2)$, $x \to x_0$, и $f(x) = L_1 g_1(x) + L_2 g_2(x) + o(g_2(x))$, $x \to x_0$.

Поступая аналогично, после n шагов получим следующее представление для функции f

$$f(x) = L_1 g_1(x) + L_2 g_2(x) + \ldots + L_n g_n(x) + o(g_n(x)), \quad x \to x_0, \qquad (1)$$

где $L_k \neq 0$, $g_k \in G$, $1 \leq k \leq n$; $g_{k+1} = o(g_k)$, $x \to x_0$, для $1 \leq k \leq n-1$.

Правая часть формулы (1) называется ***асимптотическим разложением при*** $x \to x_0$ функции f относительно шкалы G с точностью до g_n.

Упражнение 67. Доказать, что асимптотическое разложение функции f с точностью до g_n определяется единственным образом.

Пример. Найдём предел

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^{2/3} \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x-2} - 3\sqrt[3]{x} \right) \right).$$

⌈ Для числа $a \in R$, $a \neq 0$ и функции $f(x) = \sqrt[3]{x+a}$, $x \geq -a$, найдём асимптотическое разложение при $x \to +\infty$ относительно следующей шкалы $G = \{(0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha \mid \alpha \in R\}$. Сначала определим главную часть f относительно G при $x \to +\infty$, то есть определим числа $L_1 \neq 0$, $\alpha_1 \in R$ так, чтобы $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x+a}}{L_1 x^{\alpha_1}} = 1$. Для этого нужно положить $L_1 = 1$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{3}$. При этом получим $\sqrt[3]{x+a} \sim \sqrt[3]{x}$, $x \to +\infty$.

Найдём теперь главную часть функции $\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x}$, $x \geq \max(0,-a)$ при $x \to +\infty$ относительно шкалы G, то есть определим числа $L_2 \neq 0$, $\alpha_2 \in \boldsymbol{R}$ так, чтобы

$$\frac{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x}}{L_2 x^{\alpha_2}} = \frac{a}{L_2 x^{\alpha_2}\left(\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{x(x+a)}+\sqrt[3]{x^2}\right)} \to 1$$

при $x \to +\infty$. Для этого нужно положить $L_2 = \dfrac{a}{3}$, $\alpha_2 = -\dfrac{2}{3}$. Таким образом, имеем $\sqrt[3]{x+a} = \sqrt[3]{x} + \dfrac{a}{3\sqrt[3]{x^2}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$, $x \to +\infty$. Этого разложения достаточно для вычисления предела

$$x^{2/3}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x-2}-3\sqrt[3]{x}\right) =$$
$$= x^{2/3}\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[3]{x}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}-3\sqrt[3]{x}+o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{3}+\frac{o(x^{-2/3})}{x^{-2/3}}, \quad x \to +\infty.$$

Следовательно, искомый предел равен $\dfrac{1}{3}$. ⌋

Упражнение 68. Доказать, что:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{3/2}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}-\dfrac{3}{2\sqrt{x}}\right)\right) = -\dfrac{9}{8}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{1/3}\left(\sqrt[3]{x^2+5x+1}+\sqrt[3]{x^2+x+1}-2x^{2/3}\right)\right) = 2$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{5/3}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}-2\sqrt[3]{x}\right)\right) = -\dfrac{2}{9}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}-3\sqrt{x}\right)\right) = -\dfrac{7}{4}$.

3.3 Непрерывные функции

3.3.1 Определения и примеры

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$, $x_0 \in A$ — предельная точка множества A, причём $x_0 \in A$, и $f:\ A \to \boldsymbol{R}$.

Определение 1. *Функция f называется **непрерывной в точке** x_0, если* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$.

С помощью определений Коши и Гейне получаем следующие две равносильные определению 1 формулировки определения непрерывности в точке.

Определение 2. Функция f ***непрерывна в точке*** x_0, *если* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(A\cap B(x_0,\delta)):\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Определение 3. Функция f ***непрерывна в точке*** x_0, *если для любой последовательности* $\{x_n \mid n\ge 1\}$, *удовлетворяющей условиям: 1)* $\forall n\in N:\ x_n\in A$ *и 2)* $x_n\to x_0$, $n\to\infty$ *выполняется соотношение* $f(x_n)\to f(x_0)$, $n\to\infty$.

Замечание. Наибольший интерес представляет случай, когда для точки x_0 существует $\delta>0$ такое, что $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset A$. Тогда определению непрерывности в точке можно придать следующую форму $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\quad f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon)$, то есть, для любой окрестности V точки $f(x_0)$ существует окрестность U точки x_0 такая, что $f(U)\subset V$.

Пусть A и x_0 таковы, что $\exists\delta>0:\quad (x_0-\delta,x_0]\subset A$.

Определение 4. Функция f *называется* ***непрерывной слева в точке*** x_0, *если* $f(x_0-)=f(x_0)$, *то есть, если* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0]:\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Пусть A и x_0 таковы, что $\exists\delta>0:\quad [x_0,x_0+\delta)\subset A$.

Определение 5. Функция f *называется* ***непрерывной справа в точке*** x_0, *если* $f(x_0+)=f(x_0)$, *то есть, если* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in[x_0,x_0+\delta):\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Упражнение 69. Пусть для некоторого $\delta>0$ окрестность $B(x_0,\delta)\subset A$. Функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда f непрерывна слева и справа в точке x_0. Доказать это утверждение.

Определение 6. *Каждая функция непрерывна в изолированной точке. Функция* f *называется* ***непрерывной на множестве*** A, *если она непрерывна в каждой точке множества* A.

<u>Обозначение:</u> $f\in C(A)\quad\Longleftrightarrow\quad f$ непрерывна на A.

Теорема 11. *Пусть функции* $f: A\to \boldsymbol{R}$, $g: A\to\boldsymbol{R}$ *непрерывны в точке* $x_0\in A$. *Тогда:*

1) $\forall c\in\boldsymbol{R}:\quad (cf)$ *непрерывна в точке* x_0;

2) $f+g$ *непрерывна в точке* x_0;

3) fg *непрерывна в точке* x_0;

4) *если дополнительно значение* $g(x_0)\ne 0$, *то* f/g *непрерывна в точке* x_0.

⌈ Доказательство этих утверждений непосредственно следует из определения 1 и теоремы 5 о свойствах предела функции в точке. ⌋

Примеры. 1. Пусть для некоторого $c \in \boldsymbol{R}$ $f(x) = c$, $x \in \boldsymbol{R}$. Тогда $f \in C(\boldsymbol{R})$.

⌈ Действительно, для любого фиксированного $x_0 \in \boldsymbol{R}$ имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \varepsilon > 0 \forall x \in B(x_0, \delta) : |f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \delta = \varepsilon$. ⌋

2. Пусть $f(x) = x$, $x \in \boldsymbol{R}$. Тогда $f \in C(\boldsymbol{R})$.

⌈ Пусть $x_0 \in \boldsymbol{R}$ фиксировано. Имеем
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta) : |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.⌋

3. Пусть $P(x) := a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$, $x \in \boldsymbol{R}$, где $m \in \boldsymbol{N}$ и $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\} \subset \boldsymbol{R}$. Функция P есть ***многочлен*** от x. Тогда $P \in C(\boldsymbol{R})$.

⌈ Следствие примера 2 и теоремы 11. ⌋

4. ***Рациональная*** функция есть отношение многочленов P и Q : $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $x \in \{z \in \boldsymbol{R} \mid Q(z) \neq 0\}$. Из примера 3 и теоремы 11 следует, что рациональная функция непрерывна во всех тех точках, в которых она определена.

5. $\{\sin, \cos\} \subset C(\boldsymbol{R})$, а функции tg, ctg непрерывны на множестве определения.

⌈ Пусть произвольное $x_0 \in \boldsymbol{R}$ фиксировано. Заметим, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \varepsilon > 0\ \forall x \in B(x_0, \delta) :\ |\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos \dfrac{x + x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin \dfrac{x - x_0}{2}\right| \le |x - x_0| < \delta = \varepsilon$. Для функции cos рассуждения аналогичны, для функций tg и ctg применить теорему 11. ⌋

6. Пусть $a > 0$ и $f(x) = a^x$, $x \in \boldsymbol{R}$. Тогда $f \in C(\boldsymbol{R})$.

⌈ Следствие примера 7 п. 3.1.2. ⌋

Упражнение 70. Найти пределы:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2\cos x + 7x + 1}{x + \sin x + 3^x}$; b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x \sin x + 1}{x^3 + 1}$.

Упражнение 71. Пусть для $\{a, b\} \subset \boldsymbol{R}$ $f(x) = x + 1$, $x \le 0$ и $f(x) = ax + b$, $x > 0$. a) Для каких значений a, b функция f монотонна на $\boldsymbol{R}$? b) Для каких значений a, b функция $f \in C(\boldsymbol{R})$?

Упражнение 72. Пусть $f(x) = [x] \sin \pi x$, $x \in \boldsymbol{R}$. Доказать, что $f \in C(\boldsymbol{R})$ и построить график функции f.

Указание. Если $x \in [k, k+1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $[x] = k$ и $f(x) = k \sin \pi x$. В точках $x = k \in \boldsymbol{Z}$ найти $f(k-)$ и $f(k+)$.

Упражнение 73. Пусть $f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]}$, $x \ge 1/2$. Доказать, что функция $f \in C([1/2, +\infty))$ и строго возрастает на $[1, +\infty)$.

Упражнение 74. Функция $f: \ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$ и $\forall\, r \in \boldsymbol{Q} \ : \quad f(r) = r^3 + r + 1$. Найти f.

Указание. Пусть $a \in (\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q})$, $a > 0$. Тогда по теореме 12 гл. 2 $a = \lim\limits_{n\to\infty} a'_n$; $\ a'_n \in \boldsymbol{Q}$, $\ n \geq 1$. Следовательно, в силу непрерывности функции f в точке a и свойств предела последовательности $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} ((a'_n)^3 + a'_n + 1) = a^3 + a + 1$.

Ответ: $f(x) = x^3 + x + 1, \ \ x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 75. Если $f \in C(\boldsymbol{R})$, то $|f| \in C(\boldsymbol{R})$. Доказать это утверждение и рассмотреть пример, показывающий, что обратное утверждение неверно. Пример: $f(x) = -1, \ x \leq 0$ и $f(x) = 1, \ x > 0$.

Упражнение 76. Для функций $\{f, g\} \subset C(A)$ положим $h(x) := \min(f(x), g(x))$, $k(x) := \max(f(x), g(x))$, $x \in A$. Доказать включение $\{h, k\} \subset C(A)$.

Указание. Воспользоваться следующими равенствами

$$\min(a,b) = \frac{1}{2}\,(a + b - |a-b|), \qquad \max(a,b) = \frac{1}{2}\,(a + b + |a-b|).$$

Упражнение 77. Для функции $f \ : \ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ положим $g(x) := f(x^3)$, $h(x) := f(x^2)$; $x \in \boldsymbol{R}$. Какие из следующих утверждений верны:
a) $f \in C(\boldsymbol{R}) \implies \{g, h\} \subset C(\boldsymbol{R})$, b) $g \in C(\boldsymbol{R}) \implies f \in C(\boldsymbol{R})$,
c) $h \in C(\boldsymbol{R}) \implies f \in C(\boldsymbol{R})$?

Упражнение 78. Пусть $f \in C(\boldsymbol{R})$ и $\exists\, c > 0 \ \forall\, r \in \boldsymbol{Q} : \ |f(r)| \leq c$. Доказать, что функция f ограничена на $\boldsymbol{R}$.

Упражнение 79. Пусть $\{f, g\} \subset C([0,1])$. Могут ли функции f и g быть различными: a) только в конечном числе точек отрезка $[0,1]$, b) только в счётном множестве точек отрезка $[0,1]$?

Упражнение 80. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^x x^{2n} + x^2 + 1}{x^{2n} + 1}$, $\ x \in \boldsymbol{R}$. Построить график функции f и исследовать её на непрерывность.

Упражнение 81*. Функция $f \ : \ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ непрерывна в точке 0 и такова, что $\forall\, x \in \boldsymbol{R} : f(x) + f\left(\dfrac{2x}{3}\right) = x$. Доказать, что $f(x) = \dfrac{3}{5}\,x, x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 82*. Функция $f \ : \ (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такова, что $\forall\, \{x, y\} \subset (0, +\infty) \ : \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$. Доказать утверждение $\exists\, c > 0 \quad \forall\, x > 0 : \ \ f(x) = cx$.

Упражнение 83*. Функция $f \in C(\boldsymbol{R})$ удовлетворяет соотношению

$$\forall\, x \in \boldsymbol{R} \quad \forall\, y \in \boldsymbol{R} \ : \quad f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{1}$$

Доказать, что $f(x) = f(1)x$, $x \in \boldsymbol{R}$. Уравнение (1) относительно функции f называется ***функциональным уравнением Коши.***

*Определение 7. Если функция f не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что функция f **разрывна в точке** x_0 и что точка x_0 есть **точка разрыва** f.*

Пример. Пусть $f(x) = -1$, $x < 0$, $f(x) = 1$, $x > 0$, $f(0) = 0$. Тогда $f \in C(\boldsymbol{R} \setminus \{0\})$, $f(0-) = -1$, $f(0+) = 1$ и f разрывна в точке 0.

Упражнение 84. Доказать, что функция $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ разрывна в точке 0.

Упражнение 85. Пусть $f(x) = 1$, $x \in \boldsymbol{Q}$, $f(x) = 0, x \in (\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q})$ — ***функция Дирихле.*** Доказать, что f разрывна в каждой точке.

Упражнение 86. Пусть $f(x) = \sin x$, $x \in \boldsymbol{Q}$, $f(x) = 0$, $x \in (\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q})$. Доказать, что функция f непрерывна в точках $\pi \boldsymbol{Z}$ и разрывна в остальных точках.

Упражнение 87. Пусть функция $f : \ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такова, что $\forall x \in \boldsymbol{R} \ \forall n \in \boldsymbol{N} : \ f\left(x - \dfrac{1}{n}\right) \leq f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$. 1) Является ли функция f монотонной? 2) Доказать, что f монотонна на $\boldsymbol{R}$, если $f \in C(\boldsymbol{R})$.

3.3.2 Элементарные свойства непрерывных функций

Теорема 12. *Пусть функция f непрерывна в точке x_0 и q — произвольное число такое, что $q > f(x_0)$. Тогда*

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in (A \cap B(x_0, \delta)) \quad : \quad f(x) < q.$$

⌈ Следствие теоремы 4 для $p = f(x_0)$. ⌋

Теорема 13. *(**О пределе сложной функции**). Пусть x_0 — предельная точка множества A (возможно $x_0 = -\infty$ или $x_0 = +\infty$), для функции $f : \ A \to \boldsymbol{R}$ существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = p \in \boldsymbol{R}$; для множества $B \supset (\{f(x) \mid x \in A\} \cup \{p\})$ пусть $g : \ B \to \boldsymbol{R}$ — функция, непрерывная в точке p.*

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(p) \iff \lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim\limits_{x \to x_0} f(x))$.

⌈ Для любой последовательности $\{x_n \mid n \geq 1\}$, удовлетворяющей условиям 1) и 2) определения Гейне, согласно предположению теоремы $f(x_n) \to p$, $n \to \infty$, а с учётом непрерывности функции g в точке p, имеем $g(f(x_n)) \to g(p)$, $n \to \infty$. ⌋

Теорема 14. *(О непрерывности суперпозиции). Предположим, что функция $f: A \to \boldsymbol{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in A$, множество $B \supset \{f(x) \mid x \in A\}$ и функция $g: B \to \boldsymbol{R}$ непрерывна в точке $f(x_0)$.*

Тогда функция $h(x) := g(f(x)), x \in A$ непрерывна в точке x_0.

⌈ Следствие теоремы 13 с $p = f(x_0)$. ⌋

Пусть $(a, b) \subset \boldsymbol{R}$, возможно, что $-\infty \leq a$ и (или) $b \leq +\infty$. Пусть $f: (a, b) \to \boldsymbol{R}$ – монотонно неубывающая на (a, b) функция. Согласно теореме 6 существует предел $\lim\limits_{x \to a+} f(x) =: c \in \boldsymbol{R}$, если f ограничена снизу на (a, b), и $f(x) \to -\infty =: c$, $x \to a+$, если f не ограничена снизу на (a, b). Поведение функции f при $x \to b-$ аналогично, существует предел $\lim\limits_{x \to b-} f(x) =: d$, $d \leq +\infty$.

Теорема 15. *(О существовании и непрерывности обратной функции). Пусть функция $f: (a, b) \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет условиям: 1) f строго возрастает на (a, b) и 2) $f \in C((a, b))$.*

Положим $c := \lim\limits_{x \to a+} f(x)$, $d := \lim\limits_{x \to b-} f(x)$; $-\infty \leq c < d \leq +\infty$.

Тогда существует единственная функция $g: (c, d) \to (a, b)$, удовлетворяющая условиям:

a) g строго возрастает на (c, d); b) $g \in C((c, d))$;

c) $\forall\, x \in (a, b): g(f(x)) = x$; $\forall\, y \in (c, d): f(g(y)) = y$.

⌈ I. Докажем сначала, что $\forall\, y_0 \in (c, d)\ \exists!\, x_0 \in (a, b): f(x_0) = y_0$. Пусть произвольное $y_0 \in (c, d)$ фиксировано, при этом $c < y_0 < d$. Рассмотрим множество $M := \{x \in (a, b) \mid f(x) < y_0\}$, множество M обладает следующими свойствами. (i) $M \neq \varnothing$. Действительно, поскольку $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = c < y_0$, то для фиксированной последовательности $\{x_n' \mid n \geq 1\}$, удовлетворяющей требованиям определения Гейне: $x_n' \in (a, b)$, $n \geq 1$ и $x_n' \to a$, $n \to \infty$, имеем $f(x_n') \to c < y_0$, $n \to \infty$, откуда согласно теореме 7 гл. 2 $\exists\, N_1 \in \boldsymbol{N}\ \forall\, n \geq N_1: f(x_n') < y_0 \Longrightarrow x_n' \in M$. (ii) Множество M ограничено сверху. Пусть $\{x_n'' \mid n \geq 1\}$ – произвольная фиксированная последовательность такая, что: $x_n'' \in (a, b)$, $n \geq 1$ и $x_n'' \to b$, $n \to \infty$. Тогда $f(x_n'') \to d > y_0$, $n \to \infty$. Поэтому $\exists\, N_2 \in \boldsymbol{N}\ \forall\, n \geq N_2: f(x_n'') > y_0 \Longrightarrow x_n'' \notin M$. Тогда x_{N_2}'' есть верхняя грань для M, поскольку по условию 1) имеем $x > x_{N_2}'' \Longrightarrow f(x) > f(x_{N_2}'') > y_0 \Longrightarrow x \notin M$.

Применим теперь к множеству M теорему о существовании точной верхней грани. Получим $\exists\, x_0 \in \boldsymbol{R}: \sup M = x_0$. Отметим также, что $x_{N_1}' < x_0 < x_{N_2}''$, $x_0 \in (a, b)$.

Докажем теперь, что $f(x_0) = y_0$. Пусть $n_0 \in N$ такое, что $\forall\, n \geq n_0$: $a < x_0 - \dfrac{1}{n} < x_0 < x_0 + \dfrac{1}{n} < b$. Поскольку $x_0 = \sup M$, то по условию 1) для $n \geq n_0$ имеем $\left(x_0 - \dfrac{1}{n}\right) \in M \Longrightarrow f\left(x_0 - \dfrac{1}{n}\right) < y_0$. Воспользуемся теперь теоремой 8 гл. 2 и непрерывностью функции f в точке x_0, см. условие 2), $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_0 - \dfrac{1}{n}\right) \leq y_0$. Отсюда $f(x_0) \leq y_0$. Кроме того, для $n \geq n_0$ имеем $\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) \notin M \Longrightarrow f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) \geq y_0$. Откуда, как и выше, получим $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) \geq y_0$. Следовательно, $f(x_0) \geq y_0$. Таким образом, $f(x_0) = y_0$.

Если $z \in (a, b)$ такое число, что $f(z) = y_0$, то из предположения $z < x_0$ имеем по условию 1) $y_0 = f(z) < f(x_0) = y_0$, что невозможно. Аналогично приводит к противоречию и предположение $z > x_0$. Следовательно, $z = x_0$.

II. Определим теперь функцию $g: \ (c, d) \to (a, b)$, положив для $y \in (c, d)$ значение $g(y)$ равным тому единственному числу $x \in (a, b)$, для которого $f(x) = y$. При этом $\forall\, x \in (a, b): \ g(f(x)) = x; \ \ \forall\, y \in (c, d): f(g(y)) = y$, а функция g является обратной для функции f.

III. Пусть $c < y_1 < y_2 < d$. Докажем, что $g(y_1) < g(y_2)$. Предположим, что последнее неравенство неверно, то есть, пусть $g(y_1) \geq g(y_2)$. Положим $x_k = g(y_k)$, $k = 1, 2$, при этом $a < x_2 \leq x_1 < b$. Тогда по условию 1) теоремы $f(x_2) \leq f(x_1) \iff f(g(y_2)) \leq f(g(y_1)) \Longrightarrow y_2 \leq y_1$, что невозможно. Таким образом, функция g строго возрастает на (c, d).

IV. Докажем теперь, что $g \in C((c, d))$. Пусть произвольное значение $y_0 \in (c, d)$ фиксировано. Воспользуемся определением Гейне. Для произвольной последовательности $\{y_n \mid n \geq 1\}$, удовлетворяющей условиям: $y_n \in (c, d)$, $n \geq 1$ и $y_n \to y_0$, $n \to \infty$, нужно доказать соотношение $g(y_n) \to g(y_0)$, $n \to \infty$. Можно предположить, что $y_n \in [f(x'_{N_1}), f(x''_{N_2})]$, $n \geq 1$. Положим $x_n := g(y_n)$, $n \geq 1$; $x_0 := g(y_0)$, при этом $x_n \in [x'_{N_1}, x''_{N_2}] \subset (a, b)$, $n \geq 0$. Предположим, что последовательность $\{x_n \mid n \geq 1\}$ не сходится к x_0. Это означает, что существует число $\varepsilon^* > 0$ такое, что неравенство $|x_n - x_0| \geq \varepsilon^*$ выполняется для бесконечного набора номеров $n = n(k)$, $k \geq 1$. Выберем из ограниченной последовательности $\{x_{n(k)} \mid k \geq 1\}$ монотонную подпоследовательность $\{x_{n(k(j))} \mid j \geq 1\}$, тогда $x_{n(k(j))} \to z$, $j \to \infty$, причём $z \in [x'_{N_1}, x''_{N_2}]$ и $|z - x_0| \geq \varepsilon^*$. Согласно условию 2) теоремы $f(x_{n(k(j))}) \to f(z) \neq f(x_0)$, $j \to \infty$. Следовательно, $y_{n(k(j))} \to f(z) \neq y_0$, $j \to \infty$, что невозможно. ⌋

Замечания. 1. Утверждение, аналогичное теореме 15 , справедливо для строго убывающей и непрерывной функции.

2. Если $a \in R$, то теорема 15 верна для множества $[a, b)$, при этом непрерывность в точке a есть непрерывность справа в точке a.

3.3.3 Обратные функции к некоторым элементарным

Здесь приводятся определение и свойства логарифмической и обратных тригонометрических функций в качестве применения теоремы 15.

Примеры. 1. Определение и свойства степенной функции с показателем $\dfrac{1}{m}$, $m \in N$. Пусть число $m \in N$ фиксировано, $[a, b) = [0, +\infty)$, $f(x) = x^m$, $x \in [0, +\infty)$. Функция f удовлетворяет условиям теоремы 15, именно, строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$. При этом $c = \lim\limits_{x \to 0+} x^m = 0$, $d = \lim\limits_{x \to +\infty} x^m = +\infty$.

Согласно теореме 15 существует единственная строго возрастающая и непрерывная на $[0, +\infty)$ функция g, обратная к f. Функция g обычно обозначается следующим образом $g(y) = \sqrt[m]{y} = y^{1/m}$, $y \geq 0$, причём $\forall\, x \geq 0: \quad \sqrt[m]{x^m} = x$; $\forall\, y \geq 0: \quad (\sqrt[m]{y})^m = y$.

Замечания. 1. Таким образом, функции вида $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$ непрерывны на $[0, +\infty)$.

2. Если $m = 2k - 1$ с числом $k \in N$, то утверждение примера 1 справедливо для интервала $(a, b) = R$. Тогда $(c, d) = R$. Следовательно функции $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_2(x) = \sqrt[5]{x}$, $x \in R$ строго возрастают и непрерывны на R.

Упражнение 88. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2 + x + 1}}{2 + \sqrt[5]{\sin x}}$.

Упражнение 89. Применить теорему 15 к функции $f(x) = x^2$, $x \leq 0$ и найти обратную функцию.

2. Определение и свойства логарифмической функции. Пусть $d > 0$, $d \neq 1$, и $f(x) = d^x$, $x \in R$. Докажем, что функция f имеет обратную, которая называется ***логарифмической*** функцией. Рассмотрим случай, когда $d > 1$. Для $d > 1$ функция f строго возрастает на R и согласно результату примера 7 п. 3.1.2 непрерывна на R. При этом $c = \lim\limits_{x \to -\infty} d^x = 0$, $d = \lim\limits_{x \to +\infty} d^x = +\infty$. По теореме 15 $\forall\, y \in (0, +\infty) \quad \exists\, !x \in R: \quad d^x = y$, число x называется ***логарифмом*** числа y при основании d и обозначается символом $x = \log_d y$. Функция $g(y) = \log_d y$, $y > 0$, обратная к f, строго возрастает и непрерывна на $(0, +\infty)$. Кроме того, $\forall\, x \in R: \ \log_d d^x = x$; $\forall\, y \in (0, +\infty): \ d^{\log_d y} = y$, в частности, $d^0 = 1$, $\log_d 1 = 0$.

Таким образом, для $d > 1$ ***логарифмическая функция*** $\log_d$ ***определена, строго возрастает и непрерывна на*** $(0, +\infty)$.

Аналогично, для $d \in (0,1)$ ***логарифмическая функция*** $\log_d$ ***определена, строго убывает и непрерывна на*** $(0,+\infty)$.

Упражнение 90. Построить график логарифмической функции для $d > 1$ и $d < 1$.

3. Определение и свойства обратных тригонометрических функций.

a) Пусть $[a,b] = [-\pi/2, \pi/2]$; $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Согласно определению синуса, функция $\sin$ строго возрастает, а в силу результата примера 5 п. 3.1.2 она непрерывна на $[-\pi/2, \pi/2]$. При этом $c = \lim\limits_{x \to -\pi/2} \sin x = \sin(-\pi/2) = -1$, $d = \lim\limits_{x \to \pi/2} \sin x = 1$. По теореме 15 $\forall\, y \in [-1,1]$ $\exists\, ! x \in [-\pi/2, \pi/2]$: $\sin x = y$, число x называется ***арксинусом*** числа y и обычно обозначается символом $x = \arcsin y$. Обратная к $f = \sin$ функция $g(y) = \arcsin y$, $y \in [-1,1]$ строго возрастает и непрерывна на $[-1,1]$. Кроме того, имеем равенства $\forall\, x \in [-\pi/2, \pi/2]$: $\arcsin(\sin x) = x$; $\forall\, y \in [-1,1]$: $\sin(\arcsin y) = y$.

b) Пусть $[a,b] = [0,\pi]$, $f(x) = \cos x$, $x \in [0,\pi]$. Функция $\cos$ строго убывает на $[0,\pi]$, согласно примеру 5 п. 3.1.2 она непрерывна на этом отрезке и $c = -1$, $d = 1$. По теореме 15 $\forall\, y \in [-1,1]$ $\exists\, ! x \in [0,\pi]$: $\cos x = y$, число x называется ***арккосинусом*** числа y и обозначается символом $x = \arccos y$. Обратная к $f = \cos$ функция $g(y) = \arccos y$, $y \in [-1,1]$ строго убывает и непрерывна на $[-1,1]$. При этом $\forall\, x \in [0,\pi]$: $\arccos(\cos x) = x$; $\forall\, y \in [-1,1]$: $\cos(\arccos y) = y$.

c) Пусть $(a,b) = (-\pi/2, \pi/2)$; $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Функция $f = \operatorname{tg}$ строго возрастает и непрерывна на $(-\pi/2, \pi/2)$. Кроме того, $c = -\infty$, $d = +\infty$. По теореме 15 $\forall\, y \in (-\infty, +\infty)$ $\exists\, ! x \in (-\pi/2, \pi/2)$: $\operatorname{tg} x = y$; число x называется ***арктангенсом*** числа y и обозначается символом $x = \operatorname{arctg} y$. Обратная к $f = \operatorname{tg}$ функция $g(y) = \operatorname{arctg} y$, $y \in \boldsymbol{R}$ строго возрастает и непрерывна на $\boldsymbol{R}$. При этом справедливы равенства $\forall\, x \in (-\pi/2, \pi/2)$: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$; $\forall\, y \in \boldsymbol{R}$: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = y$. В частности, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

d) Пусть $(a,b) = (0,\pi)$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0,\pi)$. Функция $f = \operatorname{ctg}$ строго убывает и непрерывна на $(0,\pi)$, а значения $c = -\infty$, $d = +\infty$. По теореме 15 $\forall\, y \in (-\infty, +\infty)$ $\exists\, ! x \in (0,\pi)$: $\operatorname{ctg} x = y$, число x называется ***арккотангенсом*** числа y и обозначается следующим символом $x = \operatorname{arcctg} y$. Обратная к $f = \operatorname{ctg}$ функция $g(y) = \operatorname{arcctg} y$, $y \in \boldsymbol{R}$ строго убывает и непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Кроме того, имеем равенства $\forall\, x \in (0,\pi)$: $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$; $\forall\, y \in \boldsymbol{R}$: $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} y) = y$, в частности, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{arcctg} 0 = \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{arcctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Упражнение 91. Построить графики следующих функций: arcsin, arccos, arctg, arcctg.

Упражнение 92. Найти пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)+\arcsin x^2}{\arccos x+\cos x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+\operatorname{arcctg} x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$; f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{4}}{x-1}$;

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg} x}$.

Указания. c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{\sin y} = 1$, с учётом того, что $x\to 0 \iff y=\arcsin x\to 0$.

$$\text{d)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\arccos x-\frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)} = -\lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = -1.$$

$$\text{e)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{y}{\sin y}\cdot\cos y\right) = 1.$$

$$\text{f)}\ \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{4}}{x-1} = \lim_{y\to \pi/4} \frac{y-\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} y-1} =$$

$$= \lim_{y\to \pi/4} \frac{y-\frac{\pi}{4}}{\sin y-\cos y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{y\to \pi/4} \frac{y-\frac{\pi}{4}}{\sin\left(y-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Упражнение 93. Пусть $f(x)=x$ при $x\le 1$ и $f(x)=x^2$ при $x>1$. Применить к f теорему 15 и найти обратную функцию.

3.3.4 Свойства логарифмической функции и замечательные пределы

Теорема 16. *Пусть* $a>0$, $a\ne 1$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, *в частности, при* $a=e$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

⌈ Применим теорему 12 о пределе сложной функции для $A=(-1,+\infty)$, $f(x)=(1+x)^{1/x}$, $x>-1$, $x_0=0$, $p=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e>0$; $B=$

$(0,+\infty)$, $g(y) = \log_a y$, $y > 0$. В примере 2 установлено, что функция g непрерывна на $(0,+\infty)$, а, следовательно, и в точке $p = e$. Согласно теореме 12 получаем следующее равенство $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} =$ $= \lim\limits_{x\to 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a e$. ⌋

Теорема 17. *Пусть $a > 0$. Тогда* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, *в частности, при $a = e$ имеем* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

⌈ При $a = 1$ утверждение верно, пусть $a \neq 1$. В силу непрерывности и монотонности показательной функции $z := a^x - 1 \to 0 \iff x \to 0$, при этом $x = \log_a(1+z)$. Поэтому в силу теоремы 15 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} =$ $= \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{\log_a(1+z)} = \dfrac{1}{\log_a e} = \ln a$. ⌋

Теорема 18. *Пусть $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Тогда* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

⌈Для $\alpha = 0$ утверждение верно. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда, используя непрерывность логарифмической функции, имеем $\ln(1+x) \to 0$, $x \to 0$. С помощью теорем 15 и 16 получаем такое равенство $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{\alpha\ln(1+x)} - 1)\alpha\ln(1+x)}{x\alpha\ln(1+x)} = \alpha \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha\ln(1+x)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

Теорема 19. *Пусть $\alpha \in \boldsymbol{R}$ и $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$. Тогда $f \in C((0,+\infty))$.*

⌈Поскольку для любого $x > 0$ справедливо равенство $f(x) = e^{x\ln x}$, то непрерывность f следует из теорем о непрерывности суперпозиции и непрерывности показательной и логарифмической функций. ⌋

Упражнение 94. Найти пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^x$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x(\ln(1+x) - \ln x))$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\sin 2x}{\cos 2x}\right)^{1/x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-\cos 2x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) + e^x - \cos x}{e^{x^2} - 1 + \sin x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin(x-1)}{x^m - 1}$, $m \in \boldsymbol{N}$; h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x \cos 2x}{x^2}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+\sin^2 x} - 1}{x^2}$; k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[7]{\cos x} - 1}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}$;

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos mx)^m}{x^2}$, $m\in N$; m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos mx)^{1/m}}{x^2}$, $m\in N$;

n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x$; o) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin\left(\dfrac{\pi}{6}\cos x\right)$;

p) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_n}{\ln b_n}$, если $a_n>0$, $b_n>0$, $n\geq 1$; $b_n\to+\infty$, $n\to\infty$; $\dfrac{a_n}{b_n}\to c\in(0,+\infty)$, $n\to\infty$.

Упражнение 95. Пусть f — монотонно неубывающая и непрерывная на R функция и $\{x_n \mid n\geq 1\}\subset R$. Доказать следующие равенства $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n)$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n)$.

Упражнение 96. Пусть f — монотонно невозрастающая и непрерывная на R функция и $\{x_n \mid n\geq 1\}\subset R$. Доказать следующие равенства $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n)$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n)$.

3.3.5 Свойства функций, непрерывных на отрезке

Далее $-\infty<a<b<+\infty$, непрерывность функции f на отрезке $[a,b]$ означает для точек a и b непрерывность справа и слева соответственно.

Теорема 20. *(Первая теорема Вейерштрасса). Предположим, что $f\in C([a,b])$. Тогда функция f ограничена на отрезке $[a,b]$.*

⌈ Предположим, что утверждение теоремы неверно, то есть, что функция f не является ограниченной на $[a,b]$. Это означает, что $\forall n\in N\ \exists x_n\in[a,b]:\ |f(x_n)|\geq n$. Ограниченная последовательность $\{x_n \mid n\geq 1\}$ в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса содержит сходящуюся подпоследовательность $x_{n(k)}\to x_0$, $k\to\infty$. С учётом неравенств $a\leq x_{n(k)}\leq b$, $k\geq 1$ и теоремы 9 гл. 2 имеем $a\leq x_0\leq b$. По условию теоремы функция f непрерывна в точке x_0 и потому $f(x_{n(k)})\to f(x_0)$, $k\to\infty$, что, однако, невозможно, так как $|f(x_{n(k)})|\geq n(k)\to+\infty$, $k\to\infty$. ⌋

Примеры. 1. Функция $f\in C((a,b])$ не обязательно ограничена на множестве $(a,b]$.

⌈ Пусть $(a,b]=(0,1]$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,1]$. Тогда $f\in C((0,1])$, $f(x)==\dfrac{1}{x}\to+\infty$, $x\to 0+$. ⌋

2. Пусть $f\in C([0,+\infty))$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=:p\in R$. Тогда функция f ограничена на $[0,+\infty)$.

⌈Согласно определению Коши предела функции в точке $|f(x)|\to|p|$, $x\to+\infty$; $\exists c>0\ \forall x>c:\ |f(x)|\leq|p|+1$. К отрезку $[0,c]$ и функции f применима первая теорема Вейерштрасса, следовательно, $\exists\, d > 0 \quad \forall\, x \in [0, c]: \quad |f(x)| \le d$. Таким образом, имеем $\exists\, C := = \max(d, |p| + 1) \quad \forall\, x \in [0, +\infty): \ |f(x)| \le C$. ⌋

3. Пусть функция $f \in C(\boldsymbol{R})$ и периодична с периодом $\tau > 0$, то есть $\forall\, x \in \boldsymbol{R}: \quad f(x + \tau) = f(x)$. Тогда f ограничена на $\boldsymbol{R}$.

⌈ На отрезке $[0, \tau]$ к функции f применима первая теорема Вейерштрасса и потому $\exists\, C > 0 \quad \forall\, x \in [0, \tau]: \quad |f(x)| \le C$. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{R}$ в силу периодичности $|f(x)| = |f(x - [x/\tau]\tau)| \le C$, $(x - [x/\tau]\tau) \in [0, \tau]$, где $[a]$ — целая часть числа a, то есть, $[a]$ есть наибольшее целое число, не превосходящее a. ⌋

Упражнение 97. Доказать, что функция $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x, \quad x > 0$ ограничена на $(0, +\infty)$.

Указание. Теорема 20 к интервалу $(0, +\infty)$ не применима. Найти пределы f при $x \to 0+$ и при $x \to +\infty$. Затем см. пример 2.

Упражнение 98. Доказать, что функция — многочлен чётной степени $P(x) = x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \ldots + a_{2m}$, $x \in \boldsymbol{R}$, где $m \in \boldsymbol{N}$, $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2m}\} \subset \boldsymbol{R}$, ограничена снизу на $\boldsymbol{R}$, то есть, $\exists\, C \in \boldsymbol{R} \quad \forall\, x \in \boldsymbol{R}: \quad P(x) \ge C$.

Упражнение 99. Доказать, что функция $f(x) = e^{-|x|} P(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$, где P — произвольный многочлен, ограничена на $\boldsymbol{R}$.

Определение 8. *Функция $f: A \to \boldsymbol{R}$* ***принимает в точке*** *$x^* \in A$* ***наибольшее или максимальное на множестве*** *A* ***значение,*** *если $\forall\, x \in A: \quad f(x) \le f(x^*)$.* *Функция $f: A \to \boldsymbol{R}$* ***принимает в точке*** *$x_* \in A$* ***наименьшее или минимальное на множестве*** *A* ***значение,*** *если $\forall\, x \in A: \quad f(x_*) \le f(x)$.*

Отметим, что $f(x_*) = \min\limits_A f = \min\limits_{x \in A} f(x); \quad f(x^*) = \max\limits_A f = \max\limits_{x \in A} f(x)$.

Примеры. 4. Функция $f(x) = \{x\} = x - [x]$, $x \in [0, 2]$ принимает наименьшее значение 0 в каждой из точек 0,1,2 и не принимает наибольшего значения. При этом $f(0) = \min\limits_{x \in [0,2]} \{x\}$, $\sup\limits_{x \in [0,2]} \{x\} = 1$, $\quad \forall\, x \in [0, 2]: \ \{x\} < 1$.

Упражнение 100. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$ не принимает наименьшего значения, так как $\inf\limits_{x \in (0,1)} \dfrac{1}{x} = 1; \ \forall\, x \in (0, 1): \ \dfrac{1}{x} > 1$.

Теорема 21. ***(Вторая теорема Вейерштрасса).*** *Предположим, что $f \in C([a, b])$. Тогда функция f принимает наибольшее и наименьшее значения на $[a, b]$, то есть, $\exists\, \{x_*, x^*\} \subset [a, b] \ \forall\, x \in [a, b]: \ f(x_*) \le f(x) \le f(x^*)$.*

⌈ Докажем существование точки x^*. Множество $f([a,b])$ значений функции f на отрезке $[a,b]$ ограничено по первой теореме Вейерштрасса, следовательно, по теореме о существовании точных граней $\exists\, p \in \boldsymbol{R}: \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = p$. В силу теоремы о характеризации точной грани $\forall n \in \boldsymbol{N}\ \exists\, x_n \in [a,b]: \ p - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \le p$. К последовательности $\{x_n \mid n \ge 1\} \subset [a,b]$ применим теорему Больцано- Вейерштрасса, согласно которой существует сходящаяся подпоследовательность $x_{n(k)} \to x^*, \ k \to \infty$, причём число $x^* \in [a,b]$. По условию $f \in C([a,b])$, следовательно, непрерывна в точке x^*, потому $f(x_{n(k)}) \to f(x^*), \ k \to \infty$. Кроме того, по построению $\forall k \ge 1: \ p - \dfrac{1}{n(k)} < f(x_{n(k)}) \le p$ и в силу теоремы 9 гл. 2 $f(x_{n(k)}) \to p, \ k \to \infty$. Поэтому $p = f(x^*)$. Таким образом, $f(x^*) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. ⌋

Упражнение 101. Доказать существование точки x_* в теореме 21.

Примеры. 6. Функция $f \in C(\boldsymbol{R})$ и периодическая с периодом $\tau > 0$ принимает наибольшее и наименьшее значения.

⌈ К функции f на отрезке $[0,\tau]$ применима вторая теорема Вейерштрасса, согласно которой $\exists \{x_*, x^*\} \subset [0,\tau]\ \forall x \in [0,\tau]: \ f(x_*) \le f(x) \le$ $\le f(x^*)$, а поскольку для любого $x \in \boldsymbol{R}$ в силу периодичности $f(x) =$ $f(x - [x/\tau]\tau)$, $(x - [x/\tau]\tau) \in [0,\tau]$, то $\forall x \in \boldsymbol{R}: \ f(x_*) \le f(x) \le f(x^*)$. ⌋

7. Пусть $P(x) = x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \ldots + a_{2m}$, $x \in \boldsymbol{R}$, где $m \in \boldsymbol{N}, \{a_1, a_2, \ldots, a_{2m}\} \subset \boldsymbol{R}$. Докажем, что $\exists\, x_* \in \boldsymbol{R}\ \forall x \in \boldsymbol{R}: \quad P(x_*) \le P(x)$.

⌈ Заметим, что $P \in C(\boldsymbol{R})$ и что $P(x) \to +\infty, \ x \to -\infty$; $P(x) \to +\infty, \ x \to +\infty$. Поэтому $\exists\, c > 0 \ \ \forall x, \ |x| > c: \quad P(x) > P(0) + 1$. Применим к отрезку $[-c, c]$ и функции P вторую теорему Вейерштрасса. Получим $\exists\, x_* \in [-c, c]\ \forall x \in [-c, c]: \ P(x_*) \le P(x)$, причём $P(x_*) \le$ $\le P(0)$. Следовательно, $\forall x \in \boldsymbol{R}: \ P(x_*) \le P(x)$ или $P(x_*) = \min\limits_{\boldsymbol{R}} P$. ⌋

Упражнение 102. Пусть P — произвольный многочлен. Доказать, что $\exists\, x_* \in \boldsymbol{R} \ \ \forall x \in \boldsymbol{R}: \quad |P(x_*)| \le |P(x)|$.

Упражнение 103. Пусть $f \in C([0,+\infty))$ и $f(x) \to +\infty, \ \ x \to +\infty$. Доказать, что $\exists\, x_* \in [0,+\infty): \quad f(x_*) = \inf\limits_{[0,+\infty)} f = \min\limits_{[0,+\infty)} f$.

Упражнение 104*. Для функции $f \in C([a,b])$ введём функции $g(x) := \max\limits_{[a,x]} f, \ h(x) ;= \min\limits_{[a,x]} f, \quad x \in [a,b]$. Доказать, что $\{g,h\} \subset C([a,b])$.

Указание. Проверить для $a \le x_1 < x_2 \le b$ справедливость неравенств $g(x_1) \le g(x_2) \le g(x_1) + \max\limits_{x_1 \le x \le x_2} |f(x) - f(x_1)|$. Заметить, что

$$g(x_2) = \max\Big(g(x_1), \max_{[x_1,x_2]} f\Big) = \max\Big(g(x_1), f(x_1) + \max_{x_1 \le x \le x_2}(f(x) - f(x_1))\Big) \le$$
$$\le \max(g(x_1), g(x_1) + \max_{x_1 \le x \le x_2} |f(x) - f(x_1)|).$$

Упражнение 105. Для функции $f: \ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$ и $\delta > 0$ пусть $\omega(x_0, \delta) := \sup\limits_{x:\ |x - x_0| < \delta} |f(x) - f(x_0)| \le +\infty$. Доказать, что функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\omega(x_0, \delta) \to 0, \ \ \delta \to 0$.

Упражнение 106. Пусть $\in C(\boldsymbol{R})$ и $f(x) \to -\infty, \ \ x \to -\infty; \ \ f(x) \to +\infty, \ \ x \to +\infty$. Положим $g(x) := \sup\{t \in \boldsymbol{R} \mid f(t) < x\}, \ \ x \in \boldsymbol{R}$. Является ли функция g непрерывной?

Теорема 22. *Предположим, что функция f удовлетворяет условиям: 1) $f \in C([a,b])$ и 2) $f(a) < 0 < f(b)$ либо $f(a) > 0 > f(b)$. Тогда $\exists\, x_0 \in [a,b]: \ f(x_0) = 0$.*

$\ulcorner$ Рассмотрим случай, когда $f(a) < 0 < f(b)$. Определим множество $M = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$. Множество $M \ne \varnothing$, поскольку $a \in M$, и ограничено, так как $M \subset [a,b]$. По теореме о существовании точных граней существует $\sup M =: x_0$. Проверим, что $a < x_0 < b$. С учётом условий 1) и 2) и теоремы 3 имеем $\exists\, \delta_1 > 0 \ \forall x \in [a, a + \delta_1) : f(x) < 0; \ \ \exists\, \delta_2 > 0 \ \forall x \in (b - \delta_2, b] : \ f(x) > 0$, откуда следует, что $[a, a + \delta_1) \subset M, \ \ \sup M \le b - \delta_2$. Таким образом, $a < x_0 < b$. $\to (b - \delta_2, b] \cap M = \varnothing$

Докажем теперь, что $f(x_0) = 0$. По теореме о характеризации точных граней $\forall n \in \boldsymbol{N} \ \exists\, x_n \in M : \ \ x_0 - \dfrac{1}{n} < x_n \le x_0 = \sup M$, откуда $x_n \to x_0, \ \ n \to \infty; \ \ \forall n \in \boldsymbol{N} : \ \ f(x_n) < 0$. На основании условия 1) и теоремы 4 имеем $f(x_n) \to f(x_0), \ \ n \to \infty; \ \ \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \le 0$, откуда следует, что $f(x_0) \le 0$. Кроме того, из неравенства $x_0 < x$ следует, что $x \notin M, \ \ f(x) \ge 0$. Поэтому $\lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} f(x) \ge 0$; $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} f(x) \ge 0$. Следовательно, $f(x_0) = 0$. $\lrcorner$

Примеры. 8. Пусть $P(x) = x^{2m-1} + a_1 x^{2m-2} + \ldots + a_{2m-1}, \ \ x \in \boldsymbol{R}$, где $m \in \boldsymbol{N}, \ \ \{a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}\} \subset \boldsymbol{R}$. Доказать, что $\exists\, x_0 \in \boldsymbol{R}: \ \ P(x_0) = 0$. Таким образом, многочлен нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень.

$\ulcorner$ Поскольку $P(x) \to -\infty, \ \ x \to -\infty$ и $P(x) \to +\infty, \ \ x \to +\infty$, то $\exists\, c > 0 \ \forall x < -c : \ \ P(x) < -1$, и $\forall x > c : \ \ P(x) > 1$. Для отрезка $[-c, c]$ и функции f выполнены условия 1) и 2) теоремы 22, поскольку $P(-c) \le -1, \ \ P(c) \ge 1$. Следовательно, согласно этой теореме $\exists\, x_0 \in [-c, c] : \ \ P(x_0) = 0$. $\lrcorner$

9. Пусть $\{f, g\} \subset C([a,b])$ и $f(a) < g(a), \ \ f(b) > g(b)$. Тогда $\exists\, x_0 \in (a, b) : \ f(x_0) = g(x_0)$.

⌈ Для функции $h := f - g$ выполнено условие 1) теоремы 22, кроме того, $h(a) < 0, \quad h(b) > 0$ и условие 2) также выполнено. ⌋

10. ***Теорема о хорде.*** Пусть $f \in C([0,2])$ и $f(0) = f(2)$. Доказать, что $\exists \{x_1, x_2\} \subset [0,2] \ : \quad x_2 - x_1 = 1$ и $f(x_1) = f(x_2)$.

⌈ Если $f(0) = f(1)$, то можно положить $x_1 = 0, \quad x_2 = 1$. Далее $f(1) \neq f(0)$. Функция $g(x) := f(x+1) - f(x), \quad x \in [0,1]$ удовлетворяет условию 1) теоремы 22, а поскольку $g(0) = f(1) - f(0)$, $g(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1)$, то и условию 2). По теореме 22 имеем $\exists x_1 \in [0,1]$: $g(x_1) = 0 \iff f(x_1 + 1) = f(x_1)$ и, положив $x_2 := x_1 + 1$, получим утверждение примера 10. ⌋

Теорема 23. ***(Теорема Коши о промежуточном значении).*** *Пусть функция* $f \in C([a,b])$. *Тогда для каждого числа* L *из отрезка с концами* $f(a)$ *и* $f(b)$ *справедливо утверждение* $\exists x_0 \in [a,b] : \ f(x_0) = L$.

⌈ Если $f(a) = f(b)$, то $L = f(a)$ и $x_0 = a$. Далее пусть $f(a) < f(b)$ и $L \in (f(a), f(b))$. Тогда функция $g(x) := f(x) - L, \quad x \in [a,b]$ удовлетворяет условию 1) теоремы 22 и, поскольку $g(a) < 0, \quad g(b) > 0$, то и условию 2). По теореме 22 $\exists x_0 \in (a,b) : \ g(x_0) = 0 \iff f(x_0) = L$. ⌋

Примеры. 11. Для функции $f \in C([a,b])$ множество её значений $f([a,b])$ есть отрезок.

⌈ Согласно второй теореме Вейерштрасса $\exists \{x_*, x^*\} \subset [a,b] \ \forall x \in [a,b] : \quad f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$, а в силу теоремы Коши о промежуточном значении для любого $L \in [f(x_*), f(x^*)]$ существует точка x на отрезке с концами x_* и x^*, для которой $f(x) = L$. Таким образом, $f([a,b]) = [f(x_*), f(x^*)]$. ⌋

12. Пусть $f(x) = x^3 - x, \quad x \in \boldsymbol{R}$. Доказать, что $f : \ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ есть сюръекция, но не инъекция.

⌈ Отметим сначала, что $f(x) \to -\infty, \ x \to -\infty$; $f(x) \to +\infty, \ x \to +\infty$. Пусть произвольное $L \in \boldsymbol{R}$ задано. Тогда $\exists \{x_1, x_2\} \subset \boldsymbol{R} : \quad f(x_1) < L < f(x_2)$. Для определённости пусть $x_1 < x_2$. Тогда к отрезку $[x_1, x_2]$ и функции f применима теорема 23, согласно которой $\exists x_0 \in [x_1, x_2]$: $L = f(x_0)$. Следовательно, f есть сюръекция. Функция $f : \ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ не есть инъекция, так как $0 \neq 1$, а $f(0) = f(1) = 0$. ⌋

Замечание. Обратим внимание на то, что определение непрерывности в точке является локальным. Непрерывность в заданной точке определяется, грубо говоря, только значениями функции, лежащими в как угодно малой окрестности этой точки. Теоремы 20 — 23 показывают, что непрерывным функциям и их графикам действительно присущи те интуитивно угадываемые свойства, которые обычно описываются словом *непрерывный*.

Упражнение 107. Функция $f: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ строго возрастает на $[a,b]$ и такова, что $\forall\, L \in [f(a), f(b)] \quad \exists\, x_0 \in [a,b]: \quad f(x_0) = L$. Доказать, что $f \in C([a,b])$.

Упражнение 108. Пусть $P(x) = x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \ldots + a_{2m}, \quad x \in \boldsymbol{R}$, где $m \in \boldsymbol{N}, \quad \{a_1, a_2, \ldots, a_{2m}\} \subset \boldsymbol{R}$. Доказать, что функция $P: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ не есть сюръекция и не есть инъекция.

Упражнение 109. Функции $f, g: \quad [0,1] \to [0,1]$ непрерывны на отрезке $[0,1]$ и f является сюръекцией. Доказать, что $\exists\, x_0 \in [0,1]:$ $f(x_0) = g(x_0)$.

Упражнение 110. Пусть $f: \quad [-1,1] \to [-1,1], \quad f \in C([-1,1])$. Доказать, что $\exists\, \{x_1, x_2\} \subset [-1,1]: \quad f(x_1) = x_1$ и $f(x_2) = -x_2$.

Упражнение 111. Функции $f, g: [0,1] \to [0,1]$ непрерывны на $[0,1]$ и $g(0) = 0, \quad g(1) = 1$. Доказать, что $\exists\, x_0 \in [0,1]: \quad f(x_0) = g(x_0)$.

Упражнение 112. Пусть P – произвольный многочлен и $f(x) = e^{x^2} + P(x), \quad x \in \boldsymbol{R}$. Доказать, что функция $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ не есть сюръекция и не есть инъекция.

Упражнение 113. Пусть для $n \in \boldsymbol{N}$ a_n — такое число, что выполняется равенство $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+a_n} = e$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3.3.6 Равномерно непрерывные функции

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$ и $f: A \to \boldsymbol{R}$.

Определение 9. *Функция f называется **равномерно непрерывной на множестве** A, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \{x', x''\} \subset A, |x' - x''| < \delta: \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

Замечание. Если функция f равномерно непрерывна на множестве A, то $f \in C(A)$. Обратное неверно, см. ниже пример 3.

Примеры. 1. Функция $f(x) = x, \quad x \in \boldsymbol{R}$ равномерно непрерывна на $\boldsymbol{R}$, поскольку $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \varepsilon > 0\ \forall\, \{x', x''\} \subset \boldsymbol{R}, |x' - x''| < \delta:$ $|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \delta = \varepsilon$.

2. Функции $\sin$ и $\cos$ равномерно непрерывны на $\boldsymbol{R}$.

⌈ Рассмотрим функцию $\sin$, она равномерно непрерывна на $\boldsymbol{R}$, так как

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta := \varepsilon > 0 \quad \forall\, \{x', x''\} \subset \boldsymbol{R}, |x' - x''| < \delta \ :$$

$$|\sin x' - \sin x''| = 2\left|\sin\frac{x' - x''}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x' + x''}{2}\right| \le |x' - x''| < \delta = \varepsilon. \ ⌋$$

3. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,1]$ не является равномерно непрерывной на $(0,1]$.

⌈ Действительно, для числа $\varepsilon^* = \dfrac{1}{2} > 0$ имеем $\forall\, \delta > 0\ \exists \left\{x' := \dfrac{1}{n}, x'' := = \dfrac{1}{n+1}\right\} \subset (0,1], |x' - x''| < \delta :\ \left|\dfrac{1}{x'} - \dfrac{1}{x''}\right| = |n - (n+1)| = 1 > \varepsilon^* = \dfrac{1}{2}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1/\delta$. ⌋

4. Функция $f(x) = x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$ не является равномерно непрерывной на $\boldsymbol{R}$, поскольку $\exists\, \varepsilon^* = \dfrac{1}{2} > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists \{x' := \sqrt{n}, x'' := \sqrt{n+1}\} \subset \boldsymbol{R}, |x' - x''| < \delta :\ |(x')^2 - (x'')^2| = |n - (n+1)| = 1 > \dfrac{1}{2}$, где $n > 1/(4\delta^2)$.⌋

Упражнение 114. Доказать равномерную непрерывность на соответствующих множествах следующих функций:

a) $f(x) = \ln x$, $x \in [1, +\infty)$; b) $f(x) = \sin(\cos x)$, $x \in \boldsymbol{R}$;

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$; d) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

Упражнение 115. Доказать, что следующие функции не являются равномерно непрерывными на заданных множествах:

a) $f(x) = \ln x$, $x \in (0,1]$; b) $f(x) = x\sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$;

c) $f(x) = \sin x^2$, $x \in [0, +\infty)$; d) $f(x) = x \sin x$, $x \in [0, +\infty)$;

e) $f(x) = \sin(x \sin x)$, $x \geq 0$.

Упражнение 116. Доказать, что:

a) сумма равномерно непрерывных на некотором множестве функций равномерно непрерывна на этом множестве;

b) произведение равномерно непрерывных на некотором множестве функций не обязательно равномерно непрерывно на этом множестве.

Теорема 24. *(Теорема Кантора). Пусть $f \in C([a,b])$. Тогда функция f равномерно непрерывна на $[a,b]$.*

⌈ Предположим, что f не является равномерно непрерывной на $[a,b]$. Это означает по определению 9, что $\exists\, \varepsilon^* > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists \{x'(\delta), x''(\delta)\} \subset [a,b], |x'(\delta) - x''(\delta)| < \delta :\ |f(x'(\delta)) - f(x''(\delta))| \geq \varepsilon^*$. Зафиксируем такое число ε^* и рассмотрим для него следующую последовательность $\left\{\dfrac{1}{n} \mid n \geq 1\right\}$ значений δ, а также соответствующих пар $x'(\delta), x''(\delta)$. Положим $x'_n := x'\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $x''_n := x''\left(\dfrac{1}{n}\right)$; $n \in \boldsymbol{N}$. Последовательность $\{x'_n \mid n \geq 1\}$ по теореме Больцано-Вейерштрасса содержит сходящуюся подпоследовательность $x'_{n(k)} \to x_0 \in [a,b]$, $k \to \infty$. Поскольку

$|x'_{n(k)} - x''_{n(k)}| < \dfrac{1}{n(k)}$, $k \geq 1$, то имеем также $x''_{n(k)} \to x_0$, $k \to \infty$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 $f(x'_{n(k)}) \to f(x_0)$, $f(x''_{n(k)}) \to f(x_0)$; $k \to \infty$, следовательно, $f(x'_{n(k)}) - f(x''_{n(k)}) \to 0$, $k \to \infty$. Однако, по построению $|f(x'_{n(k)}) - f(x''_{n(k)})| \geq \varepsilon^*$, $k \geq 1$. Противоречие показывает, что исходное предположение о функции f неверно, а, следовательно, функция f является равномерно непрерывной на $[a,b]$. ⌋

Примеры. 5. Предположим, что для функции $f \in C(\boldsymbol{R})$ существуют пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =: c \in \boldsymbol{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =: d \in \boldsymbol{R}$. Докажем, что функция f равномерно непрерывна на $\boldsymbol{R}$.

⌈ Для произвольного $\varepsilon > 0$ по определению предела $\exists\, C > 1\ \forall\, x < -C$: $|f(x) - c| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\forall\, x > C$: $|f(x) - d| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Так как $f \in C([-C-1, C+1])$, то по теореме Кантора для числа ε $\exists\, \delta \in (0,1)\ \forall\, \{x', x''\} \subset [-C-1, C+1], |x'-x''| < \delta$: $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$. Пусть теперь $\{x',x''\} \subset \boldsymbol{R}$, $|x'-x''| < \delta$. Если при этом $\{x',x''\} \cap [-C,C] \neq \varnothing$, то $\{x',x''\} \subset [C-1, C+1]$ и потому $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Если же $\{x',x''\} \cap [-C,C] = \varnothing$, то либо a) $\{x',x''\} \subset (-\infty, -C)$, либо b) $\{x',x''\} \subset [C, +\infty)$. В случае a) имеем $|f(x')-f(x'')| = |f(x')-c+c-f(x'')| \leq |f(x')-c|+|f(x'')-c| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, а в случае b) аналогично $|f(x') - f(x'')| = |f(x') - d + d - f(x'')| \leq |f(x') - d| + |f(x'') - d| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ⌋

6. Пусть функция $f \in C(\boldsymbol{R})$ и периодична с периодом $\tau > 0$. Тогда функция f равномерно непрерывна на $\boldsymbol{R}$.

⌈ По предположению $f \in C([0, 2\tau])$ и, следовательно, по теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на $[0, 2\tau]$ и $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_1 \in (0, \tau)\ \forall\, \{z', z''\} \subset [0, 2\tau], |z' - z''| < \delta_1$: $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$. Заметим теперь, что для любых x', x'', $x' \leq x''$ имеем $z' := (x' - [x'/\tau]\tau) \in [0, \tau]$, $z'' := (x'' - [x'/\tau]\tau)$, $z' - z'' = x' - x''$, причём $z'' \in [0, 2\tau]$, если $|x' - x''| < \delta_1$. При этом $|f(x') - f(x'')| = |f(z') - f(z'')|$ в силу периодичности f. Таким образом, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta := \delta_1 > 0\ \forall\, \{x', x''\} \subset \boldsymbol{R}, |x' - x''| < \delta$: $|f(x') - f(x'')| = |f(z') - f(z'')| < \varepsilon$. ⌋

Упражнение 117. Пусть $f \in C([0, +\infty))$ и $(f(x) - x) \to 0$, $x \to +\infty$. Доказать, что f равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$.

Упражнение 118. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\ln x + 1}{\ln x}$, $x \geq 2$ равномерно непрерывна на $[2, +\infty)$.

Упражнение 119. Предположим, что функция $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет условию $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, g \in C([a,b])\ \forall\, x \in [a,b] : |f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Доказать, что $f \in C([a,b])$.

*Упражнение 120**. Предположим, что функции $f, g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ периодичны и $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Доказать, что эти функции имеют одинаковый период и совпадают на $\boldsymbol{R}$.

*Упражнение 121**. Для функции $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ выполняется условие

$$\exists\,\lambda \in [0,1) \quad \forall\,\{x', x''\} \subset \boldsymbol{R} : \quad |f(x') - f(x'')| \le \lambda |x' - x''|.$$

Проверить, что f равномерно непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Для произвольного $x_0 \in \boldsymbol{R}$ положим $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \ge 0$. Доказать, что уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение x^* и что $x_n \to x^*$, $n \to \infty$.

Упражнение 122. Функция $f : (0, +\infty) \to \boldsymbol{R}$ непрерывна в точке 1 и удовлетворяет условию $\forall\, x > 0 : \quad f(x) = f(x^2)$. Доказать, что $f(x) = f(1)$, $x > 0$.

Упражнение 123. Функция $f \in C(\boldsymbol{R})$, отлична от 0 на $\boldsymbol{R}$ и такова, что $\forall\,\{x, y\} \subset \boldsymbol{R}$: $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$. Доказать, что $f(x) = f(1)^x$, $x \in \boldsymbol{R}$, где $f(1) > 0$.

3.3.7 Разрывы функций

Пусть $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, и $x_0 \in (a, b)$. Функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют пределы слева и справа

$$f(x_0-), \quad f(x_0+) \tag{1}$$

в точке x_0 и справедливы равенства

$$f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+). \tag{2}$$

Если функция f в точке x_0 не является непрерывной, то точка x_0 есть точка разрыва функции f.

Определение 10. *Если оба предела в (1) существуют (конечны), но хотя бы одно из равенств (2) нарушается, то точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода**. При этом говорят, что функция имеет в точке x_0 **скачёк**. Если хотя бы один из пределов (1) не существует (в частности, бесконечен), то точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода**.*

Замечание. Иногда выделяют случай, когда оба предела (1) существуют и равны, но $f(x_0-) = f(x_0+) \ne f(x_0)$. Тогда точку x_0 называют точкой ***устранимого разрыва***.

Примеры. 1. Для функции $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \boldsymbol{R}$, имеем для $x_0 = 0$: $f(0) = 0$, $f(0-) = -1$, $f(0+) = 1$. Точка 0 есть точка разрыва первого рода.

2. Для функции $f(0) = \{x\}$, $x \in \boldsymbol{R}$, каждая из точек множества $\boldsymbol{Z}$ есть точка разрыва первого рода.

3. Пусть $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. В точке 0 функция f не имеет пределов слева и справа, поэтому точка 0 есть точка разрыва второго рода.

Замечание. В случаях, аналогичных примеру 3, значение в точке x_0 иногда не рассматривают. Например, о функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, говорят, что она в точке 0 имеет разрыв второго рода.

Теорема 25. *Пусть $\{a, b\} \subset \boldsymbol{R}$ и $f: [a, b] \to \boldsymbol{R}$ — монотонная на $[a, b]$ функция. Функция f может иметь в качестве точек разрыва только скачки.*

$\lceil$ Пусть f монотонно не убывает на $[a, b]$. Согласно теореме 7 существуют $f(a+)$, $f(b-)$; $\forall c \in (a, b)$: $f(c-)$, $f(c+0)$, причём справедливы неравенства $f(a) \leq f(a+) \leq f(c-) \leq f(c) \leq f(c+) \leq f(b-) \leq f(b)$. $\rfloor$

Упражнение 124. Доказать, что утверждение теоремы 25 остаётся верным и для монотонной функции на (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Упражнение 125. Доказать, что монотонная функция может иметь не более чем счётное множество точек разрыва первого рода.

3.4 Теорема Вейерштрасса

3.4.1 Вспомогательные тождества

Пусть $n \in \boldsymbol{N}$ и $x \in [0, 1]$.

(i) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1.$

$\lceil$ Это равенство следует из тождества $1^n = (x + (1-x))^n$ и формулы бинома Ньютона. $\rfloor$

(ii) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(\dfrac{k}{n} - x\right) x^k (1-x)^{n-k} = 0.$

$\lceil$ Поскольку $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ при $k \geq 1$, то $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \dfrac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} =$ $= \sum\limits_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum\limits_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x$. Отсюда следует нужное тождество. ⌋

(iii) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(\dfrac{k}{n} - x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} = \dfrac{x(1-x)}{n}$.

⌈ Сначала, как и при доказательстве (ii) имеем

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1)x^k(1-x)^{n-k} = nx\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j j x^j(1-x)^{n-1-j} = n(n-1)x^2.$$

Далее с помощью (i) и (ii) получим $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left(\dfrac{k}{n} - x\right)^2 x^k(1-x)^{n-k} =$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1)x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k k x^k(1-x)^{n-k}\right) -$$

$$2x\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{k}{n} x^k(1-x)^{n-k} + x^2 = \frac{n(n-1)}{n^2}x^2 + \frac{nx}{n^2} - 2x^2 + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Упражнение 126. Пусть P — многочлен. Доказать, что функция $Q(t) = P(at+b)$, $t \in \boldsymbol{R}$, где числа a и b фиксированы, также есть многочлен по t.

3.4.2 Теорема Вейерштрасса о приближении

Теорема 26. *Пусть $f \in C([a,b])$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует многочлен P_ε такой, что справедливо утверждение* $\forall\, x \in [a,b] : \ |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon \iff \max\limits_{[a,b]} |f - P_\varepsilon| < \varepsilon$.

⌈ Достаточно доказать теорему для отрезка $[0,1]$. Действительно, если теорема справедлива для отрезка $[0,1]$, то для функции $f \in C([a,b])$ и заданного $\varepsilon > 0$ существует многочлен P_ε такой, что $\forall\, t \in [0,1]$: $|f(a+t(b-a)) - P_\varepsilon(t)| < \varepsilon$, и потому $\forall\, x \in [a,b] : \ \left|f(x) - P_\varepsilon\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon$.

Пусть функция $f \in C([0,1])$. Введём многочлены

$$B_n(f;x) := \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1], \ n \in \boldsymbol{N}.$$

Здесь $0^0 := 1$, $B_n(f;\cdot)$ — ***многочлен Бернштейна*** степени n для функции f. Положим $p_{nk}(x) := C_n^k x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$, $x \in [0,1]$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. По теореме Кантора для числа $\varepsilon/2 > 0$ имеем $\exists\, \delta > 0\ \forall\, \{x', x''\} \subset [0,1], |x' - x''| < \delta : \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon/2$. Используя тождества (i) — (iii), получим

$\forall\, x \in [0,1] : \ |f(x) - B_n(f;x)| =$

$$= \left|f(x)\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) - B_n(f;x)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)p_{nk}(x)\right| \leq$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| p_{nk}(x) = \sum_{k\,:\,|x-\frac{k}{n}|<\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| p_{nk}(x) +$$

$$+ \sum_{k\,:\,|x-\frac{k}{n}|\ge\delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| p_{nk}(x) < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k\,:\,|x-\frac{k}{n}|<\delta} p_{nk}(x) +$$

$$+2L \sum_{k\,:\,|x-\frac{k}{n}|\ge\delta} p_{nk}(x) \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) + \frac{2L}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 p_{nk}(x) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2L}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{L}{2n\delta^2}, \quad L := \max_{[0,1]} |f|.$$

Пусть теперь N таково, что $\forall\, n \ge N : \ \dfrac{L}{2n\delta^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall\, n \ge N \ \forall\, x \in [0,1] : \ |f(x) - B_n(f;x)| < \varepsilon$. ⌋

Упражнение 127. Для функции $f \in C([0,1])$ доказать утверждение

$$\forall\, x \in [0,1] \ : \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Упражнение 128*. Функция f удовлетворяет условию

$$\exists\, L > 0 \quad \forall\, \{x', x''\} \subset [0,1] \ : \quad |f(x') - f(x'')| \le L|x' - x''|.$$

С помощью неравенства Коши и тождеств (i) — (iii) доказать, что

$$\forall\, n \ge 1 \quad \forall\, x \in [0,1] \ : \quad |f(x) - B_n(f;x)| \le \frac{L}{2\sqrt{n}}.$$

3.4.3 Историческая справка

Гейне Генрих Эдуард (1821 — 1881) — немецкий математик. Теорема Кантора была доказана Гейне.

Центральным понятием этой главы является понятие предела функции в точке, включающее в себя и понятие предела последовательности. Идея предельного перехода возникла фактически у математиков древней Греции, наиболее существенными были работы ***Евдокса*** ($\sim$ 408 – $\sim$ 355 г. до н.э.) с "методом исчерпывания" и ***Архимеда*** ($\sim$ 287 — 212 г. до н.э.). Однако формальное определение предела было введено в математику позже, например, таких по существу определяемых с помощью понятия предела понятий, как производная и интеграл. При этом творцы дифференциального и интегрального исчисления Ньютон и Лейбниц постоянно возвращались к обоснованию предельных переходов, но их основное внимание было поглощено развитием методов исчисления и его эффективными приложениями в физике. Слово "предел" — limes ввёл в математику Ньютон. Отсутствие точных и определённых понятий дифференциального и интегрального исчисления вызвало критику не только математиков, английский философ ***Дж. Беркли*** (1685 — 1783) издал памфлет с резкой критикой работ Ньютона и Лейбница. Современное понятие предела функции в точке принадлежит Больцано и Коши. Близок к современному понятию предела последовательности был также ***К. Ф. Гаусс*** (1777 — 1855). Коши был первым, кто попытался построить математический анализ с помощью понятия предела.

Непрерывными функциями сначала называли функции, определяемые одним аналитическим выражением. Так понимали непрерывность ***Л. Эйлер*** (1707 — 1783) и некоторые его предшественники. Современное определение принадлежит Больцано и Коши. Интуитивное представление о непрерывной функции, как о функции, график которой можно начертить одним росчерком пера, не отрывая его от бумаги, является следствием этого определения.

Понятие равномерной непрерывности было введено ***Д. Г. Стоксом*** (1819 — 1903) и ***Ф. Л. Зейделем*** (1821 — 1896), а затем Коши. Различие между непрерывностью и равномерной непрерывностью является весьма тонким, этого различия вначале не замечал Коши.

Дирихле П. Г. Л. (1805 — 1859) - немецкий математик. Ему принадлежит ряд основополагающих результатов в математическом анализе, теории чисел, вариационном исчислении и математической физике.

Бернштейн Сергей Натанович (1880 — 1968) — выдающийся советский математик, получивший ряд фундаментальных результатов в теории приближения функций, теории вероятностей и в других разделах математики. Предложенное им в 1912 г. доказательство теоремы Вейерштрасса основано на изящной теоретико-вероятностной идее, оно весьма элементарно и обладает тем преимуществом, что приближающие функцию многочлены строятся явно.

Глава 4

Производная и её приложения

4.1 Определение, примеры и обсуждение

4.1.1 Определение и примеры

Пусть $A \subset R$, $x_0 \in A$, причём $\exists\,\delta > 0 :\ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$. Пусть $f :\ A \to R$. Введём для $x \in A$, $x \neq x_0$ разности $\Delta x := x - x_0$, $\Delta f(x) := f(x) - f(x_0)$, при этом $\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 1. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, *то этот предел называется* ***производной*** *функции f в точке x_0.*

Обозначения: $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\dot{f}(x_0)$.

Таким образом, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Определение 2. Если существует конечный предел слева $\lim\limits_{x \to x_0, x < x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, *то этот предел называется* ***производной слева*** *функции f в точке x_0 и обозначается символом $f'_-(x_0)$. Если существует конечный предел справа* $\lim\limits_{x \to x_0, x > x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, *то этот предел называется* ***производной справа*** *функции f в точке x_0 и обозначается символом $f'_+(x_0)$.*

Замечание. Таким образом, производная $f'(x_0)$ существует тогда и только тогда, когда существуют $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Рассмотрим теперь примеры типичного поведения отношения (*разностного отношения*) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ при $x \to x_0$.

Примеры. 1. Для функции $f(x) = x$, $x \in \boldsymbol{R}$ и любой точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$ имеем $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} 1 = 1$. Следовательно, $x' = 1$, $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Для функции $f(x) = |x|$, $x \in \boldsymbol{R}$ и точки $x_0 = 0$ имеем равенства $\lim\limits_{x\to 0, x<0} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0, x<0} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0, x<0} (-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{|x| - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0, x>0} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0, x>0} 1 = 1$. Таким образом, $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$, а производная $f'(0)$ не существует.

3. Для функции $f(x) = x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$ и любой точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$ имеем $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0$. Таким образом, $(x^2)' = 2x$, $x \in \boldsymbol{R}$.

4. Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \boldsymbol{R}$ и точки $x_0 = 0$ справедливо равенство $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$. Следовательно, производная функции f в точке 0 не существует.

5. Для функции $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ для $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ и точки $x_0 = 0$ отношение $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin \dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$ предела не имеет. Поэтому производная функции f в точке 0 не существует.

Упражнение 1. Проверить, что $(x|x|)' = 2|x|$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 2. Для функции $f(x) = |x^2 - x|$, $x \in \boldsymbol{R}$ найти $f'(x)$ для $x \in (\boldsymbol{R} \setminus \{0, 1\})$. В точках 0 и 1 найти производные слева и справа.

Упражнение 3. Для функции $f(x) = |x^2 - 2|x||$, $x \in \boldsymbol{R}$ найти $f'(x)$ для $x \in (\boldsymbol{R} \setminus \{-2, 0, 2\})$. В точках -2, 0 и 2 найти производные слева и справа.

4.1.2 Интерпретации производной

Понятие производной было введено в математику для решения задач математики и других наук, в первую очередь для описания законов движения и решения задачи о построении касательных.

(i) ***Физическая интерпретация.*** Точка P движется по числовой прямой, $s(t)$ — координата точки P в момент времени t. Пусть t_1, t_2 — два момента времени, причём $t_1 < t_2$. Средняя скорость движения точки за период времени $[t_1, t_2]$ равна $\dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$, где $s(t_2) - s(t_1)$ — путь, пройденный за время от момента t_1 до момента t_2. Если движение не является равномерным, то ***мгновенная скорость в точке*** t_1 определяется как предел $\lim\limits_{t_2 \to t_1+} \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$. Таким образом, мгновенная скорость $v(t)$ точки P в момент t есть производная в точке t от пути s, именно $v(t) = s'(t)$. Если мгновенная скорость точки в момент t известна, то приближённое значение пути, проходимого за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, равно $s'(t)\Delta t$.

(ii) ***Геометрическая интерпретация.*** Пусть $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Прямая, проходящая через точки $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $P(x) = (x, f(x))$ графика функции f, называется ***секущей.*** Положение секущей определяется точкой P_0 и углом наклона секущей $\alpha(P(x))$, который отсчитывается от положительного направления оси абсцисс. Тангенс этого угла равен

$$\operatorname{tg} \alpha(P(x)) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{1}$$

при этом достаточно ограничиться следующими значениями угла $\alpha(P(x)) \in (-\pi/2, \pi/2]$, см. рис. 2. Если абсциссу x приближать к x_0, то точка $P(x)$ будет приближаться, перемещаясь по графику функции f, к точке P_0. При этом может оказаться, что секущая приближается к некоторому определённому положению. Точнее это означает, что угол $\alpha(P(x)) \to \alpha_0$, $x \to x_0$.

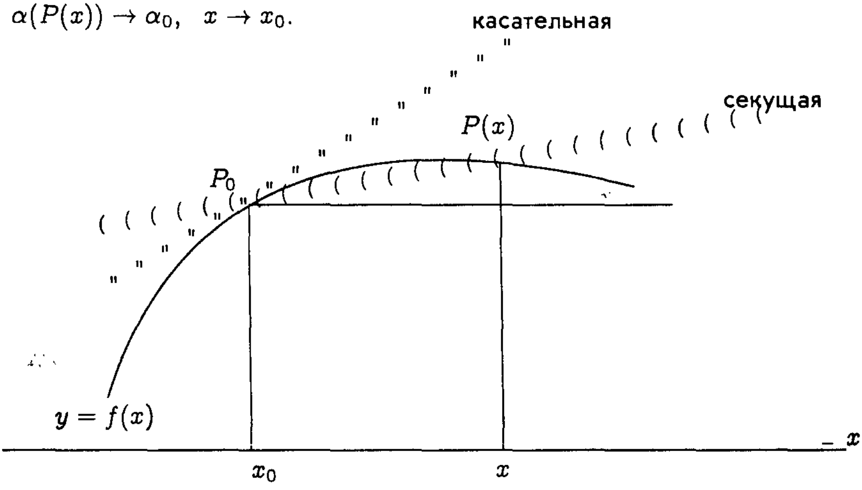


Рис. 2.

Определение 3. *Если существует предельное положение секущей при $x \to x_0$, то есть существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(P(x)) =: \alpha_0$, то прямая, проходящая через точку P_0 и образующая угол α_0 с положительным направлением оси абсцисс, называется* ***касательной*** *к графику функции f в точке P_0.*

Замечание. Возможно, что существует $\lim\limits_{x\to x_0, x<x_0} \alpha(P(x)) = \alpha_0-$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0, x>x_0} \alpha(P(x)) = \alpha_0+\right)$. Тогда прямая, проходящая через точку P_0 с углом наклона α_0- (α_0+) к положительному направлению оси абсцисс называется ***левой (правой) полукасательной в точке*** P_0. Если $\alpha_0- = \alpha_0+$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(P(x)) = \alpha_0- = \alpha_0$ и существует касательная в точке P_0.

Теорема 1. *Касательная к графику функции f в точке $P_0 = (x_0, f(x_0))$ с углом наклона $\alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ к положительному направлению оси абсцисс существует тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x_0)$, при этом $\operatorname{tg}\alpha_0 = f'(x_0)$.*

⌈ Пусть существует производная $f'(x_0)$. Тогда согласно равенству (1) и определению производной существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{tg}\alpha(P(x)) = f'(x_0)$, а так как $\operatorname{arctg} \in C(\boldsymbol{R})$, то $\alpha(P(x)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha(P(x))) \to \operatorname{arctg} f'(x_0)$, $x \to x_0$, причём $\operatorname{arctg} f'(x_0) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Следовательно, касательная в точке P_0 существует и $\alpha_0 = \operatorname{arctg} f'(x_0)$.

Пусть существует касательная в точке P_0, то есть $\alpha(P(x)) \to \alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $x \to x_0$. Отсюда с учётом того, что $\operatorname{tg} \in C((-\pi/2, \pi/2))$, получим с помощью равенства (1) $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg}\alpha(P(x)) \to \operatorname{tg}\alpha_0 \in \boldsymbol{R}$, $x \to x_0$. Поэтому существует $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha_0$. ⌋

Упражнение 4. Рассмотреть поведение секущей при $x \to x_0 = 0$ в примерах 2 и 5 п. 4.1.1.

Упражнение 5. Доказать, что функция f имеет вертикальную касательную с $\alpha_0 = \pi/2$ к графику в точке $(x_0, f(x_0))$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to +\infty$ $(-\infty)$, $x \to x_0$. Поэтому в этом случае иногда говорят о ***бесконечной производной*** и пишут $f'(x) = +\infty$ $(-\infty)$.

Упражнение 6. Доказать, что функция $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ имеет $f'(0) = 0$.

iii) ***Микроскоп.*** Пусть $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$. Тогда $f'(x) = 2x$, $x \in \boldsymbol{R}$ ı $f'(0) = 0$. Поэтому касательная в точке $(0, 0)$ существует, это ось абс-цисс. Рассмотрим рис. 3. Общий вывод состоит в следующем. Если в очке x_0 функция f имеет производную, то при большом увеличении асть графика функции, лежащая вблизи точки $(x_0, f(x_0))$, почти совпа-дает с отрезком касательной. На последнем фрагменте рис. 3 концы рафика поднимаются над осью абсцисс на $\frac{1}{10000}$.

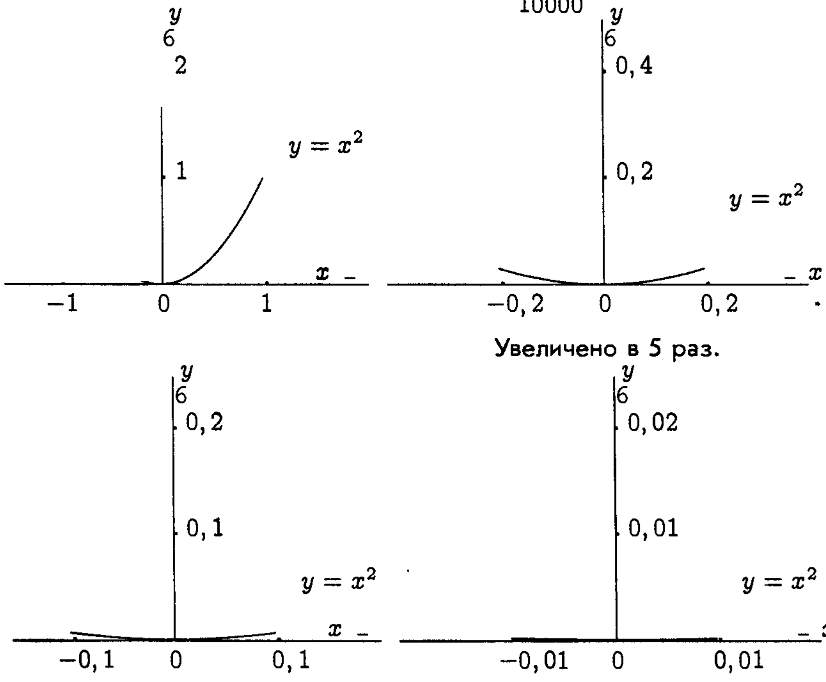


Рис. 3.

.1.3 Замечания к определению производной

ıонятие производной является весьма сложным и тонким математиче-ским понятием. Дополнительная информация об этом понятии содер-кится в следующих утверждениях.

. Определение производной в точке имеет локальный характер

очнее это означает следующее: предельное поведение отношения $\frac{(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ при $x \to x_0$ не изменится, если для любого заданного

$\delta > 0$ произвольно изменить значения функции f вне δ-окрестности точки x_0.

2. Близость к касательной

Если в точке x_0 существует производная, то график функции f в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$ близок к прямой. Точнее, если существует производная $f'(x_0)$, то $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),\quad x \to x_0$.

⌈ Действительно, поскольку $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то разность $\alpha(x) := \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \to 0,\quad x \to x_0$. Поэтому имеем $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$. ⌋

Упражнение 7. Если $\exists\, L \in \boldsymbol{R}:\ f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(x - x_0),\ x \to x_0$, то существует производная $f'(x_0) = L$. Доказать это утверждение.

3. Определение касательной

Формальное определение касательной к графику функции состоит в следующем.

Определение 4. *Прямая вида $g(x) = f(x_0) + L(x - x_0),\quad x \in \boldsymbol{R}$, где $L \in \boldsymbol{R}$ — фиксированное число, называется* ***касательной*** *к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$, если*

$$f(x) - g(x) = o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Упражнение 8. Проверить, что определения 3 и 4 равносильны.

4. Непрерывность

Существование у функции производной в точке влечёт непрерывность функции в этой точке.

Теорема 2. *Если в точке x_0 существует производная $f'(x_0) \in \boldsymbol{R}$, то функция f непрерывна в точке x_0.*

⌈ Согласно замечанию 2 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0),\quad x \to x_0$, поэтому $f(x) \to f(x_0),\quad x \to x_0$. ⌋

Упражнение 9. Привести пример непрерывной в точке функции, не имеющей производной в этой точке.

5. Дифференцирование

Определение 5. Если для каждого $x \in A$ существует производная $f'(x)$, то функция f', определяемая соотношением $A \ni x \mapsto f'(x)$ называется ***производной функции f на множестве A***. *Операция определения функции f' называется* ***дифференцированием*** *функции f.*

Упражнение 10. Функция f имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0. Выразить через значения $f(x_0)$, $f'(x_0)$ значения следующих пределов:

a) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$; b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$;

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(n\left(f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) - f(x_0)\right)\right)$; d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(n\left(f\left(\dfrac{n+1}{n} x_0\right) - f(x_0)\right)\right)$;

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(xx_0) - f(x_0)}{x - 1}$; f) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right)}{f(x_0)}\right)^n$;

g) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$, если $x_0 \neq 0$; $x_n \neq x_0$, $n \geq 1$, $x_n \to x_0$, $n \to \infty$;

h) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(x_0 + \dfrac{k}{n^2}\right) - nf(x_0)\right)$, $f(x_0) > 0$.

Упражнение 11.* Обязательно ли при условии предыдущего упражнения существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}$ для последовательностей $x_n \to x_0$, $z_n \to x_0$, $n \to \infty$; $x_n \neq z_n$, $n \geq 1$?

Указание. Рассмотреть для точки для точки $x_0 = 0$ функции $f(x) = x^3$, $x \in \boldsymbol{R}$; $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ для $x \neq 0$ и $g(0) = 0$.

Упражнение 12. Доказать, что из существования обоих односторонних производных $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ следует непрерывность функции f в точке x_0.

Упражнение 13. Функция $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ имеет производную f' на $\boldsymbol{R}$. В каких точках функция $|f|$ имеет производную? Найти эту производную. В тех точках, в которых производная не существует, найти односторонние производные.

Упражнение 14. Для функций $f, g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ существуют производные f', g' на $\boldsymbol{R}$. В каких точках функция $h(x) := \max(f(x), g(x))$, $x \in \boldsymbol{R}$ имеет производную? Найти эту производную. В остальных точках определить односторонние производные.

4.2 Правила вычисления производных и примеры

4.2.1 Правила вычисления производных

Следующие теоремы содержат основные средства для вычисления производных.

1^0. ***Производная суммы, произведения и частного.***

Теорема 3. *Пусть функции $f, g: A \to R$ имеют производные $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ в точке $x_0 \in A$. Тогда:*

1) для любого числа $c \in R$ функция cf имеет производную в точке x_0, причём $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$;

2) функция $f+g$ имеет производную в точке x_0, причём $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

3) функция fg имеет производную в точке x_0, причём $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;

4) если дополнительно значение $g(x_0) \neq 0$, то имеет место равенство $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

⌈ Доказательство утверждения 3). Поскольку $\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$, то с учётом определения производной, теоремы 2, согласно которой $g(x) \to g(x_0)$, $x \to x_0$, и теоремы 6 гл. 3 получаем утверждение 3).

Доказательство утверждения 4). Поскольку $g(x_0) \neq 0$, то по теореме 4 гл. 3 $g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Для значений x из этой окрестности имеем равенство $\frac{1}{x - x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} =$

$= \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right)$, в котором правая часть аналогично имеет нужный предел при $x \to x_0$. ⌋

Упражнение 15. Доказать утверждения 1) и 2) теоремы 3.

Упражнение 16. Пусть для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$ функция $f_j : A \to R$ имеет производную $f_j'(x_0)$ в точке $x_0 \in A$. Доказать, что:

a) $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} f_j\right)'(x_0) = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j'(x_0)$; b) $\left(\prod\limits_{j=1}^{n} f_j\right)'(x_0) = f_1'(x_0)f_2(x_0)\dots f_n(x_0)$ $+ f_1(x_0)f_2'(x_0)\dots f_n(x_0) + \dots + f_1(x_0)f_2(x_0)\dots f_n'(x_0)$.

Упражнение 17. Пусть дополнительно к условиям предыдущего упражнения $f_j(x_0) \neq 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}$. доказать следующее равенство $\dfrac{\left(\prod\limits_{j=1}^{n} f_j\right)'(x_0)}{\prod\limits_{j=1}^{n} f_j(x_0)} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{f_j'(x_0)}{f_j(x_0)}$.

Упражнение 18. Пусть P — многочлен степени n с различными действительными корнями $x_1, x_2, \dots, x_n$. Доказать, что для любого $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ справедливо равенство $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{x - x_j}$.

2^0. ***Правило дифференцирования сложной функции или цепное правило.***

Теорема 4. *Пусть функция $f : A \to R$ имеет производную $f'(x_0)$ в точке $x_0 \in A$, множество $B \supset \{f(x) \mid x \in A\}$ и функция $g : B \to R$ имеет производную $g'(y_0)$ в точке $y_0 := f(x_0)$. Тогда функция $g(f)$, определяемая соотношением $A \ni x \mapsto g(f(x))$, имеет производную в точке x_0, причём*

$$(g(f))'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

⌈ Согласно утверждению п. 4.1.3, 2 имеем $g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \alpha(y)(y - y_0)$, причём $\alpha(y) \to 0, \ y \to y_0$. Положим в этом равенстве $y = f(x), \ y_0 = f(x_0)$ и разделим его на $x - x_0$ при $x \neq x_0$. Получим следующее равенство

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \alpha(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (1)$$

По теореме 2 $f(x) \to f(x_0) = y_0, \quad x \to x_0$, а потому $\alpha(f(x)) \to 0, \quad x \to x_0$. Переходя к пределу при $x \to x_0$ в равенстве (1), имеем существование производной функции $g(f)$ в точке x_0 и нужное равенство. ⌋

Упражнение 19. Сформулировать и доказать правило дифференцирования суперпозиции трёх функций.

Упражнение 20. Для функции $f : R \to R$ существует производная f' на R. Доказать утверждения:

a) производная f' чётной функции f есть нечётная функция;

b) производная f' нечётной функции f есть чётная функция;

c) производная f' периодической с периодом $T > 0$ функции f есть периодическая с периодом T функция.

Упражнение 21. Функции $f, g: A \to \boldsymbol{R}$ имеют производные $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ в точке $x_0 \in A$, причём $f(x) > 0,\ x \in A$. Доказать равенство

$$(f^g)'(x_0) = f(x_0)^{g(x_0)} \left(\frac{g(x_0)}{f(x_0)} f'(x_0) + g'(x_0) \ln f(x_0) \right).$$

Указание. Воспользоваться равенством $f^g = e^{g \ln f}$.

3^0. ***Правило дифференцирования обратной функции.***

Теорема 5. *Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$ и функция $f: (a,b) \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет условиям: 1) $f \in C((a,b))$ и 2) f строго возрастает на (a,b). Пусть $(c,d) := \{f(x) \mid x \in (a,b)\}$, при этом $-\infty \le c < d \le +\infty$. Пусть также $g: (c,d) \to (a,b)$ — функция, обратная к f.*

Если в точке $x_0 \in (a,b)$ существует производная $f'(x_0) \neq 0$, то функция g имеет производную $g'(y_0)$ в точке $y_0 := f(x_0)$, причём $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(g(y_0))}$.

⌈ Обратная функция g существует в силу теоремы 15 гл. 3, при этом g строго возрастает. Пусть $y \neq y_0$, тогда $g(y) \neq g(y_0)$. Согласно определению обратной функции и утверждению п. 4.1.3, 2 имеем $y - y_0 = f(g(y)) - f(g(y_0)) = f'(g(y_0))(g(y) - g(y_0)) + \alpha(g(y))(g(y) - g(y_0))$, где $\alpha(g(y)) \to 0$ при $g(y) \to g(y_0)$. Поскольку $g \in C((c,d))$, то $y \to y_0 \Longrightarrow g(y) \to g(y_0) \Longrightarrow \alpha(g(y)) \to 0$. Поэтому получим $\dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} =$

$$= \frac{g(y) - g(y_0)}{f'(g(y_0))(g(y) - g(y_0)) + \alpha(g(y))(g(y) - g(y_0))} = \frac{1}{f'(g(y_0)) + \alpha(g(y))},$$

правая часть последнего равенства сходится к $\dfrac{1}{f'(g(y_0))}$ при $y \to y_0$. ⌋

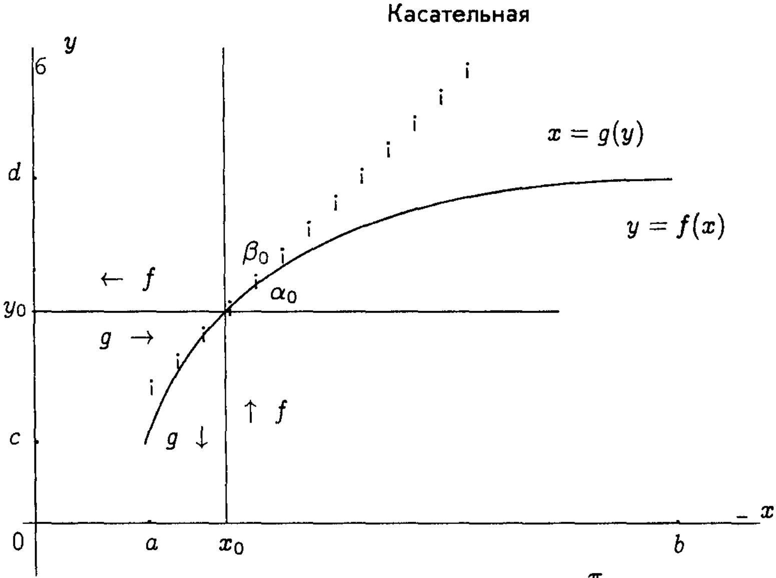
Отметим, что геометрически утверждение теоремы 5 очевидно, см. рис. 4 на следующей странице.

Замечание. Допустим, что в теореме 5 для каждой точки $x \in (a,b)$ существует производная $f'(x) \neq 0$. Тогда для каждого $y \in (c,d)$ существует $g'(y)$ и связь между производными f и g можно получить, дифференцируя по x или по y соответственно тождества $g(f(x)) = x,\ x \in (a,b)$; $f(g(y)) = y,\ y \in (c,d)$ на основании теоремы 4. Получим $g'(f(x))f'(x) = 1,\ x \in (a,b)$; $f'(g(y))g'(y) = 1,\ y \in (c,d)$.

Упражнение 22. Доказать существование обратной функции g к функции f и найти производную $g'(f(x))$:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2},\ x > 1$; b) $f(x) = x^3 + 3x,\ x \in \boldsymbol{R}$;

c) $f(x) = x + \sin x,\ x \in \boldsymbol{R}$; d) $f(x) = x + \ln x,\ x > 0$.



$$\mathrm{tg}\alpha_0 = f'(x_0), \quad \mathrm{tg}\beta_0 = g'(y_0), \quad \alpha_0 + \beta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{tg}\beta_0 = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) = \mathrm{ctg}\alpha_0 = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Рис. 4.

4.2.2 Примеры вычисления производных

В следующих примерах содержится необходимый для дальнейших рассуждений набор производных.

1. Пусть $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Тогда $\forall\, x > 0 \ : \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Для $\alpha = n \in \boldsymbol{N}$ имеем $\forall\, x \in \boldsymbol{R} \ : \quad (x^n)' = nx^{n-1}$.

Для $\alpha = m \in \boldsymbol{Z}$ имеем $\forall\, x \in (\boldsymbol{R} \setminus \{0\}) : \quad (x^m)' = mx^{m-1}$.

⌈ С помощью теоремы 18 гл. 3 для $x > 0$ получаем

$$\frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \frac{\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}} \to x^{\alpha-1} \cdot \alpha, \quad \Delta x \to 0. \quad ⌋$$

Упражнение 23. Доказать, что $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)' = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1}$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \boldsymbol{R}$.

2. Пусть $a > 0$. Тогда $\forall\, x \in \boldsymbol{R} \ : \quad (a^x)' = a^x \ln a$, в частности, для $a = e \ \ \forall\, x \in \boldsymbol{R} \ : \quad (e^x)' = e^x$.

⌈ С помощью теоремы 17 гл. 3 имеем $\dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \to$
$\to a^x \ln a, \ \Delta x \to 0.$ ⌋

3. $\forall\, x \in \boldsymbol{R}:\ (\sin x)' = \cos x,\quad (\cos x)' = -\sin x;$

$\forall\, x \in \left(\boldsymbol{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi \boldsymbol{Z}\right)\right):\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

$\forall\, x \in (\boldsymbol{R} \setminus \pi \boldsymbol{Z}):\ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

⌈ Для любого $x \in \boldsymbol{R}$ имеем утверждение $\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$

$$= \frac{2}{\Delta x} \sin\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x,\ \Delta x \to 0.$$

Отсюда с учётом теоремы 4 для любого $x \in \boldsymbol{R}$ получаем $(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x$. Применим теперь теорему 3. Получим $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ для $x \in \left(\boldsymbol{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi \boldsymbol{Z}\right)\right)$. ⌋

4. Пусть $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$. Тогда $\forall\, x > 0:\ (\log_\alpha x)' = \frac{1}{x \ln \alpha}$. В частности, $\forall\, x > 0:\ (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

⌈ Рассмотрим случай $\alpha > 1$ и воспользуемся теоремой 5, положив $(a,b) = \boldsymbol{R}$, $f(x) = \alpha^x$, $x \in \boldsymbol{R}$, $(c,d) = (0,+\infty)$. Согласно теореме 19 гл. 3 функция $f \in C(\boldsymbol{R})$, а с учётом примера 2 $\forall\, x \in \boldsymbol{R}:\ f'(x) = \alpha^x \ln \alpha \neq 0$. Применим теорему 5 к логарифмической функции — функции, обратной к f, получим $g'(y) = (\log_\alpha y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\alpha^x \ln \alpha} = \frac{1}{y \ln \alpha}$, где $y = f(x) > 0$. ⌋

Упражнение 24. Доказать утверждение примера 4 для $\alpha \in (0,1)$.

5. $\forall\, x \in \boldsymbol{R}:\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$

⌈ Воспользуемся теоремой 5, положив в ней $(a,b) = (-\pi/2, \pi/2)$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (a,b)$, $(c,d) = \boldsymbol{R}$. При этом имеем $\operatorname{tg} \in C((\pi/2, \pi/2))$, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$, $x \in (\pi/2, \pi/2)$, и $g(y) = \operatorname{arctg} y$, $y \in \boldsymbol{R}$. Поэтому для любого $y \in \boldsymbol{R}$ имеем $g'(y) = (\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x =$

$$= \cos^2(\operatorname{arctg} y) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1+y^2},\ \text{где } x = g(y),\ \operatorname{tg} x = y. \quad ⌋$$

6. $\forall\, x \in \boldsymbol{R}:\ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$

$\forall\, x \in (-1,1):\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

$$\forall\, x \in (-1,1): \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Упражнение 25. Доказать утверждения примера 6 с помощью теоремы 5.

Упражнение 26. Доказать ***формулу бинома Ньютона*** $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, где числа $n \in \boldsymbol{N}$, $\{a,b\} \subset \boldsymbol{R}$ и использованы обозначения $C_n^0 := 1$, $C_n^k := \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$, $1 \leq k \leq n$.

Указание. Достаточно доказать следующее тождество $(z+a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k z^k a^{n-k}$, $z \in \boldsymbol{R}$. Заметить, что многочлен $(a+z)^n$ имеет вид

$$(a+z)^n = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n, \quad z \in \boldsymbol{R} \tag{1}$$

и нужно определить лишь числа $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Положив в (1) $z = 0$, находим $b_0 = a^n$. Найдём теперь производную по z от (1)

$$n(a+z)^{n-1} = b_1 + 2b_2 z + \ldots + n b_n z^{n-1}, \quad z \in \boldsymbol{R}, \tag{2}$$

положив в (2) $z = 0$, находим $b_1 = na^{n-1}$ и т. д.

Упражнение 27. Вычислить сумму: a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k e^{kx}$, $x \in \boldsymbol{R}$; b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k C_n^k$; c) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k+1) C_n^k$.

Указания. a) Для производной от $z + z^2 + \ldots + z^n = \dfrac{z - z^{n+1}}{1-z}$, $z \neq 1$ имеем $1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1} = \dfrac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$, $z \neq 1$, откуда после умножения на z получим $z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n = \dfrac{z-(n+1)z^{n+1}+nz^{n+2}}{(1-z)^2}$, $z \neq 1$. Затем положить $z = e^x$, $x \neq 0$. Случай $x = 0$ рассмотреть отдельно.

b) Найти производную суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k z^k = (1+z)^n$, а затем положить $z = 1$. Ответ: $n2^n$.

c) Ответ: $2^{n-1}(n+2)$.

Упражнение 28. Пусть P — многочлен степени n с действительными корнями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и старшим коэффициентом 1. Вычислить $P'(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Упражнение 29. Вычислить производные на R следующих функций: a) $f(x) = |\sin x| \sin x,\ x \in \boldsymbol{R}$; b) $f(x) = [x] \sin^2 \pi x,\ x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 30. Привести пример отличных от постоянных функций f, g, для которых справедливо следующее "правило"вычисления производной произведения двух функций $(fg)' = f'g'$.

Упражнение 31. Пусть $f(x) = x^2$ при $x \le 1$ и $f(x) = ax + b$ при $x > 1$. При каких значениях $\{a, b\} \subset \boldsymbol{R}$: a) функция $f \in C(\boldsymbol{R})$; b) функция f имеет производную на R? Найти f'.

Упражнение 32. Пусть $f(x) = |\sin x|^\alpha,\ x \in \boldsymbol{R},\ \alpha > 0$. При каких значениях α функция f имеет производную на R? Найти f'.

Упражнение 33. Пусть $f(x) = \dfrac{2}{x}$ при $0 < x \le 1$ и $f(x) = ax^2 - \dfrac{4}{a}x + b$ при $x > 1$. Определить значения a и b, при которых функция f имеет на $(0, +\infty)$ производную и найти её.

Упражнение 34. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x^3} e^{-1/x^2}$ при $x \ne 0$ и $f(0) = 0$. Доказать, что $f'(0) = 0$.

Упражнение 35. Определить числа b, c так, чтобы графики функций $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = x^2 + bx + c$ имели в точке (1,3) общую касательную.

Упражнение 36. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$ для $x \in [0,1]$ и $f(x) = ax^2 + bx + 3a^3 + b$ для $x > 1$. Определить a, b, для которых функция f имеет производную на $(0, +\infty)$.

Упражнение 37. Доказать, что

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \dots & a'_{1j}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a'_{2j}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a'_{nj}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

если элементы исходного определителя имеют производную в точке x.

4.3 Теоремы о функциях, имеющих производную

4.3.1 Доказательства теорем

Теорема 6. *(Ферма). Пусть* $f: (a,b) \to \boldsymbol{R}$, $x_0 \in (a,b)$ *и* $f(x_0) = \max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ *или* $f(x_0) = \min\limits_{x\in(a,b)} f(x)$. *Если в точке* x_0 *существует производная* $f'(x_0)$, *то* $f'(x_0) = 0$.

⌈ Предположим, что $f(x) = \max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$. Тогда $\forall\, x \in (a,b): \quad f(x) \le f(x_0)$. Поэтому

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0, x<x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0, \tag{1}$$

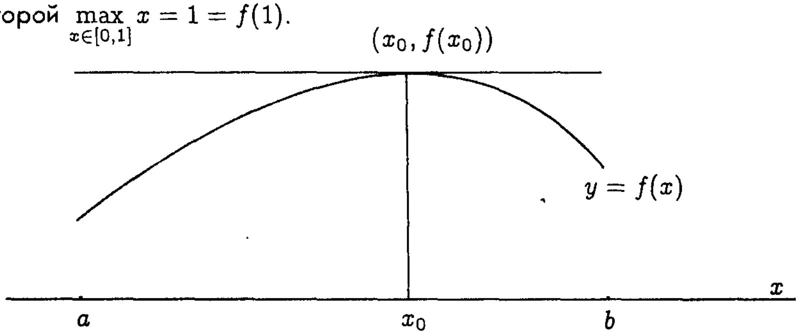
аналогично

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0, x>x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что $f'(x_0) = 0$. ⌋

Замечания. 1. Геометрически утверждение теоремы Ферма очевидно. Оно означает, что если в точке минимума или максимума существует касательная, то она параллельна оси абсцисс. См. рис. 5.

2. В теореме Ферма существенно, что $a < x_0 < b$. Утверждение теоремы неверно, например, для функции $f(x) = x$, $x \in [0,1]$, для которой $\max\limits_{x\in[0,1]} x = 1 = f(1)$.



$\mathrm{tg}\alpha_0 = f'(x_0) = 0, \quad \alpha_0 = 0$

Рис. 5.

Упражнение 38. Предположим, что для функции $f: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ существуют $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$. Доказать утверждения:

а) $f'_+(a) \ge 0$, если $f(a) = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$;

b) $f'_+(a) \le 0$, если $f(a) = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$;

c) $f'_-(b) \ge 0$, если $f(b) = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$;

d) $f'_-(b) \le 0$, если $f(b) = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.

Упражнение 39. Обобщение теоремы Ферма. Пусть $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$, $x_0 \in (a,b)$ и $f(x_0) = \max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$. Если точке x_0 существуют $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, то $f'_-(x_0) \ge 0$, $\quad f'_+(x_0) \le 0$.

Теорема 7. *(Ролля). Пусть функция $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет условиям: 1) $f \in C([a,b])$; 2) $\forall x \in (a,b)$ существует $f'(x)$; 3) $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$.*

⌈ Если $\forall x \in [a,b] : \ f(x) = f(a) \implies \forall c \in (a,b) : \ f'(c) = 0$.

Пусть теперь
$$\exists x' \in [a,b] \ : \ f(x') \ne f(a). \tag{3}$$

С учётом условия 1) и второй теоремы Вейерштрасса $\exists \{x_*, x^*\} \subset [a,b]$: $f(x_*) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(x^*) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Согласно условию 3) и предположению (3) либо $f(x_*) \ne f(a)$, либо $f(x^*) \ne f(a)$. Рассмотрим случай, когда $f(x^*) \ne f(a)$, второй случай рассматривается аналогично. Тогда $x^* \ne a$ и $x^* \ne b$, и, следовательно, $x^* \in (a,b)$. Для функции f на интервале (a,b) и точки $x_0 = x^*$ выполнены все условия теоремы Ферма, по которой $f'(x^*) = 0$. Положим $c = x^*$. ⌋

Упражнение 40. Пусть для $f \in C([a,b])$ существует f' на (a,b), причём $\forall x \in (a,b) : \ f'(x) \ne 0$. Доказать, что $f(a) \ne f(b)$.

Упражнение 41. Доказать, что уравнение $x^{13} + 7x^3 - 5 = 0$ имеет точно один положительный корень.

Упражнение 42. Функция $f \in C([a,b])$ имеет производную на (a,b) и $f(a) = f(b)$. Доказать, что для каждого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ следующее уравнение $\alpha f(x) + f'(x) = 0$ имеет по крайней мере один корень на (a,b).

Указание. Применить теорему Ролля к функции $g(x) = f(x)e^{\alpha x}$ на отрезке $[a,b]$.

Упражнение 43. Пусть P — многочлен степени n, все корни которого различны и действительны. Доказать, что все корни P' также действительны.

Упражнение 44. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют следующему условию $\dfrac{a_0}{n+1} + \dfrac{a_1}{n} + \dfrac{a_2}{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Доказать, что многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ имеет по крайней мере один корень на $(0,1)$.

*Упражнение 45**. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – отличные от 0 действительные числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – попарно различные действительные числа. Доказать, что функция $f(x) = a_1 e^{\alpha_1 x} + a_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + a_n e^{\alpha_n x}$, $x \in \boldsymbol{R}$ может иметь не более чем $n-1$ корень на $\boldsymbol{R}$.

Указание. Применить теорему Ролля и метод математической индукции.

Упражнение 46. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset \boldsymbol{R}$ и $f(x) = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \ldots + a_n x^{\alpha_n}$, $x > 0$, — функция, отличная от 0 в некоторой точке. Доказать, что функция f может иметь не более $(n-1)$-го положительного нуля.

Упражнение 47. Функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Ролля. Доказать, что $\exists\, c \in (a,b) :\ \ f'(c) + f(c)g'(c) = 0$.

Теорема 8. (*Лагранжа*). *Предположим, что функция $f :\ [a,b] \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет условиям: 1) $f \in C([a,b])$; 2) $\forall\, x \in (a,b)$ существует $f'(x)$.*

Тогда $\exists\, c \in (a,b) :\ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

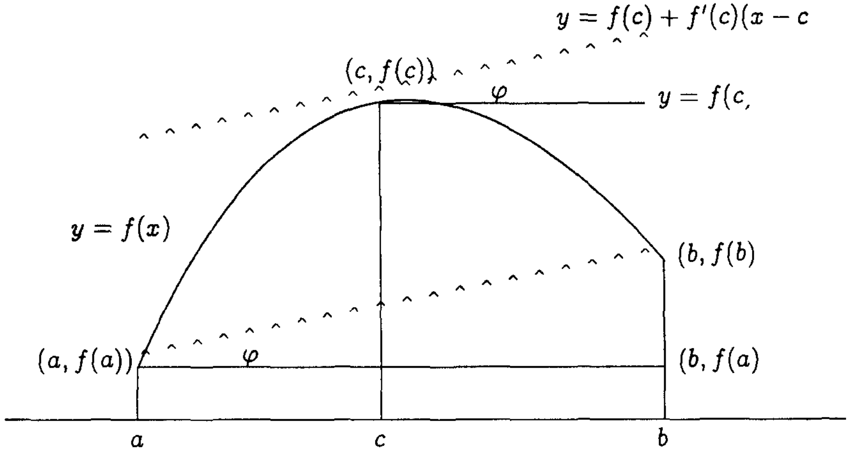
⌈ Функция $g(x) := f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $x \in [a,b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, причём $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $x \in (a,b)$. По теореме Ролля существует число $c \in (a,b) :\ g'(c) = 0 \iff$ $f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \iff f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \iff f(b) - f(a) =$ $= f'(c)(b-a)$. ⌋

Замечания. 1. Теорема Лагранжа называется также ***теоремой о среднем значении*** или ***теоремой о конечном приращении***.

2. Отношение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть тангенс угла наклона к оси абсцисс секущей, которая проходит через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Теорема Лагранжа утверждает существование точки c такой, что касательная к графику в точке $(c, f(c))$ параллельна секущей. См. рис. 6 на следующей странице. Существование точки c становится наглядным, если проследить за поведением касательной в точке графика $(x, f(x))$ при передвижении точки x от точки a до точки b.

Упражнение 48. Доказать, что теорема Ролля следует из теоремы Лагранжа. Таким образом, теоремы Ролля и Лагранжа равносильны.

Упражнение 49. Пусть $f(x) = x^2 + 2px + q$, $x \in [a,b]$; $\{p,q\} \subset \boldsymbol{R}$. Определить число c в теореме Лагранжа.



$$f'(c) = \mathrm{tg}\varphi = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Рис. 6.

Упражнение 50. Для функции $f(x) = \ln x, \quad x \in [1, b], \quad b > 1$ определить число c в теореме Лагранжа.

Упражнение 51. Пусть функция f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа и условию

$$\exists\, L \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \ : \quad |f'(x)| \leq L. \qquad (4$$

Доказать, что $\forall\, \{x', x''\} \subset [a, b] : \quad |f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''|$.

Упражнение 52. Доказать, что удовлетворяющая условию (4) функция равномерно непрерывна на (a, b).

Упражнение 53. Функция $f : (a, b) \to \boldsymbol{R}$ имеет производную на (a, b) и такова, что $\forall\, \{x', x''\} \subset (a, b) : \quad f(x'') - f(x') = f'(x')(x'' - x')$. Доказать, что f есть линейная функция на (a, b).

Упражнение 54. Функция $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ имеет производную на $\boldsymbol{R}$ и удовлетворяет условию $\forall\, \{x, y\} \subset \boldsymbol{R} : \ f(x) - f(y) = f'\left(\dfrac{x + y}{2}\right)(x - y)$. Найти все функции, удовлетворяющие этим условиям.

Упражнение 55. Для функции $f \in C([a, b])$ существует f'_+ на $(a, b$ и $f(a) < f(b)$. Доказать, что $\exists\, c \in (a, b) \quad f'_+(c) \geq 0$.

Указание. Существуют числа α, β, $a < \alpha < \beta < b$ такие, что $f(\alpha) < f(\beta)$. Если $f'_+(x) < 0$ для $x \in [\alpha, \beta]$, то существует $x_0 \in (\alpha, \beta)$: $f(x_0) < f(\alpha)$. Поэтому $\min\limits_{[\alpha,\beta]} f = f(x_*)$, $x_* \in (\alpha, \beta)$. Тогда $f'_+(x_*) \geq 0$.

Упражнение 56. Для функции $f \in C([a,b])$ существует f'_+ на (a,b) и $f(a) = f(b)$. Доказать, что $\exists\, c_1 \in (a,b)$: $f'_+(c_1) \geq 0$, $\exists\, c_2 \in (a,b)$: $f'_+(c_2) \leq 0$.

Упражнение 57. Для функции $f \in C([a,b])$ существует f'_+ на (a,b). Доказать, что $\exists\,\{c_1, c_2\} \subset (a,b)$: $f'_+(c_1) \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_+(c_2)$.

Упражнение 58*. Для функции $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ существует $f'_+ \in C((a,b))$. Доказать, что существует производная f' и $f' = f'_+$ на (a,b).

Теорема 9. ***(Коши).*** *Пусть функции* $f, g : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ *удовлетворяют условиям: 1)* $\{f, g\} \subset C([a,b])$; *2)* $\forall\, x \in (a,b)$ *существуют* $f'(x), g'(x)$; *3)* $\forall\, x \in (a,b)$: $g'(x) \neq 0$.

Тогда $\exists\, c \in (a,b)$: $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

⌈ Сначала заметим, что $g(a) \neq g(b)$, так как если бы $g(a) = g(b)$, то по теореме Ролля существовала бы точка $c \in (a,b)$, для которой $g'(c) = 0$. Последнее же противоречит условию 3).

Функция $h(x) := f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$, $x \in [a,b]$ удовлетворяет на отрезке $[a,b]$ условиям теоремы Ролля. Согласно этой теореме $\exists\, c \in (a,b)$: $h'(c) = 0 \iff f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$. ⌋

Замечания. 1. Теорема Лагранжа есть частный случай теоремы Коши для функции $g(x) = x$, $x \in [a,b]$. Поэтому теоремы Ролля, Лагранжа и Коши равносильны.

2. Следует обратить внимание на то, что теорема Ферма, а следовательно, и важнейшая теорема Лагранжа, фактически является следствием определения производной.

Упражнение 59*. Пусть функции $f_j : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, $j = 1,2,3$ удовлетворяют условиям: 1) $\{f_1, f_2, f_3\} \subset C([a,b])$; 2) $\forall\, x \in (a,b)$ существуют производные $f'_1(x), f'_2(x), f'_3(x)$. Доказать утверждение $\exists\, c \in (a,b)$: $\begin{vmatrix} f_1(a) & f_1(b) & f'_1(c) \\ f_2(a) & f_2(b) & f'_2(c) \\ f_3(a) & f_3(b) & f'_3(c) \end{vmatrix} = 0$. Получить теоремы Ролля, Лагранжа и Коши в качестве частных случаев.

Упражнение 60. Функция $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Доказать, что $\exists\, c \in (a,b) : f(b) - f(a) = e^{-c} f'(c)(e^b - e^a)$.

4.3.2 Первые применения теоремы Лагранжа

1. Определение функции по производной

Следствие 1. Функция $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ имеет производную f' на (a,b) и такова, что выполняется следующее условие $\forall\, x \in (a,b) : f'(x) = 0$. Тогда $\exists\, L \in \boldsymbol{R}\ \forall\, x \in (a,b) : f(x) = L$.

⌈ Пусть $x_0 \in (a,b)$ — произвольная фиксированная точка и $x \neq x_0$. Применим к отрезку с концами x и x_0 теорему Лагранжа. Получим $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0$. Положим $L = f(x_0)$. ⌋

Следствие 2. Функции $f, g : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ имеют производные f' и g' на (a,b) и, кроме того, $\forall\, x \in (a,b) : f'(x) = g'(x)$. Тогда $\exists\, L \in \boldsymbol{R}\ \forall\, x \in (a,b) : f(x) = g(x) + L$.

⌈ Применить предыдущее следствие к функции $f - g$. ⌋

Следствие 3. Функция $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ имеет производную на (a,b) и $\exists\, L \in \boldsymbol{R}\ \forall\, x \in (a,b) : f'(x) = L$. Тогда справедливо утверждение $\exists\, M \in \boldsymbol{R}\ \forall\, x \in (a,b) : f(x) = Lx + M$.

⌈ Применить предыдущее следствие к функциям f и $g(x) = Lx$. ⌋

Упражнение 61. Пусть числа a, b фиксированы. Определить все функции $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, для которых $f'(x) = ax + b$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 62. Определить все функции $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, для которых $f'(x) = f(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Указание. Заметить, что $(f(x)e^{-x})' = (f'(x) - f(x))e^{-x}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 63. Функции $f, g : (a,b) \to (0, +\infty)$ имеют производные на (a,b), причём $\forall\, x \in (a,b) : \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$. Доказать, что в этом случае $\exists\, L > 0\ \forall\, x \in (a,b) : f(x) = Lg(x)$.

Указание. Рассмотреть функции $\ln f$ и $\ln g$.

2. Существование односторонней производной

Следствие 4. Функция $f : (a,b] \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет условиям: 1) $f \in C((a,b])$; 2) $\forall\, x \in (a,b)$ существует $f'(x)$; 3) существует $\lim\limits_{x \to b, x < b} f'(x) =: L$. Тогда существует производная слева $f'_-(b)$ и $f'_-(b) = L$.

⌈ Пусть $a < x < b$. Применим теорему Лагранжа к функции f на отрезке $[x, b]$. Получим $\exists\, c = c(x) \in (x, b) : \quad \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(c(x))$. Отсюда с учётом условия 3) и того, что $c(x) \to b-$ при $x \to b-$, получим утверждение следствия. ⌋

3. Доказательство неравенств

Приводимые ниже неравенства постоянно используются в математических рассуждениях.

Пример. 1. Докажем, что: $\forall \{x', x''\} \subset \boldsymbol{R}$:

$$|\sin x' - \sin x''| \le |x' - x''|; \qquad |\cos x' - \cos x''| \le |x' - x''|;$$

$$|\operatorname{arctg} x' - \operatorname{arctg} x''| \le |x' - x''|;$$

$$\forall \{x', x''\} \subset [1, +\infty) : \quad |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \le \frac{1}{2}\,|x' - x''|.$$

⌈ Доказательства этих неравенств аналогичны. Докажем первое и последнее из них. Пусть для определённости $x' < x''$. Применяя теорему Лагранжа к функции $\sin$ на отрезке $[x', x'']$, получим $\exists\, c \in (x', x'')$: $|\sin x'' - \sin x'| = |\cos c|(x'' - x')$, а поскольку $|\cos u| \le 1$ для любого $u \in \boldsymbol{R}$, то $|\sin x' - \sin x''| \le |x' - x''|$.

Для доказательства последнего неравенства применим теорему Лагранжа к функции $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \ge 1$ на отрезке $[x', x'']$, получим $\exists\, c \in (x', x'') : \quad |\sqrt{x''} - \sqrt{x'}| = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}\,(x'' - x')$, отсюда, поскольку $c > x' \ge 1$, имеем $|\sqrt{x''} - \sqrt{x'}| \le \dfrac{1}{2}\,|x'' - x'|$. ⌋

Упражнение 64. Доказать второе и третье неравенства примера 1.

Пример. 2. Докажем, что: a) $\forall\, x \in \boldsymbol{R} : \; e^x \ge 1 + x$, $'' = '' \iff x = 0$;
b) $\forall\, x > 0 : \; e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

⌈ a) Для случая $x > 0$ применим теорему Лагранжа к функции $f(u) = e^u, \quad u \in [0, x]$, получим $\exists\, c \in (0, x) : \quad e^x - e^0 = e^c(x - 0) > x$, поскольку $e^c > 1$ для $c > 0$. Если $x < 0$, применим теорему Лагранжа к функции $f(u) = e^u, \quad u \in [x, 0]$. Получим $\exists\, c \in (x, 0) : \quad e^0 - e^x = e^c(0 - x) < -x$, так как $-x > 0$, а $e^c < 1$ для $c < 0$. Таким образом, $e^x > 1 + x, \quad x \ne 0$.

b) Применим теорему Коши к функциям $f(u) = e^u$, $g(u) = 1 + u + {}$ $+ \dfrac{u^2}{2}$, $u \in [0, x]$. Получим $\exists\, c \in (0, x) : \quad \dfrac{e^x - e^0}{1 + x + \dfrac{x^2}{2} - 1} = \dfrac{e^c}{1 + c}$. С учётом неравенства a) отсюда имеем $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$. ⌋

Упражнение 65. Доказать такое неравенство $\forall n \in \boldsymbol{N}\ \forall x > 0$: $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$.

Указание. Использовать математическую индукцию и пример 2.

Упражнение 66. Доказать, что $\forall x > -1 : \dfrac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$, $'' = '' \iff x = 0$.

Упражнение 67. Обобщение неравенства Бернулли. Для $a > 1$, доказать, что $\forall x > -1 :\ (1+x)^a \ge 1 + ax$, $'' = '' \iff x = 0$.

Упражнение 68. Доказать, что:

a) $\forall x \ge 0 : \quad x - \dfrac{x^3}{3!} \le \sin x \le x$; b) $\forall x \ge 0 : \quad 1 - \dfrac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$.

Упражнение 69. Предположим, что функции $f, g : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяют условиям теоремы Лагранжа и условию $\forall x \in (a,b)$: $f'(x) < g'(x)$. Доказать, что $f(b) - f(a) < g(b) - g(a)$.

Упражнение 70. Доказать неравенство $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 > 0\ \forall x > x_0$: $\ln x < x^\varepsilon$.

4. Исследование монотонности функции

Теорема 10. *Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$ и функция $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ имеет производную $f'(x)$ для каждого $x \in (a,b)$. Для того чтобы функция f была монотонно неубывающей на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall x \in (a,b) \quad : \quad f'(x) \ge 0. \tag{1}$$

⌈ Достаточность. Пусть условие (1) выполнено и $a < x' < x'' < b$. Применяя к функции f на отрезке $[x', x'']$ теорему Лагранжа, получим $\exists c \in (x', x'') : f(x'') - f(x') = f'(c)(x'' - x') \ge 0$. Следовательно, имеем неравенство $f(x'') \ge f(x')$.

Необходимость. Пусть f монотонно не убывает на (a,b). Тогда для числа $x \in (a,b)$ имеем $f'(x) = f'_+(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0, \Delta x > 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ge 0$, поскольку $\Delta x > 0$, $f(x + \Delta x) \ge f(x)$. ⌋

Теорема 11. *Пусть $-\infty \le a < b \le +\infty$ и функция $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ имеет производную $f'(x)$ для каждого $x \in (a,b)$. Для того чтобы функция f строго возрастала на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\forall x \in (a,b) \quad : \quad f'(x) \ge 0$;

2) *не существует интервала $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ такого, что*

$$\forall\, x \in (\alpha, \beta) \ : \quad f'(x) = 0. \qquad (2)$$

$\ulcorner$ Необходимость. Пусть функция f строго возрастает на (a, b). Тогда f монотонно не убывает на (a, b) и согласно теореме 10 условие 1) выполнено. Условие 2) также выполнено, поскольку из существования интервала $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, для которого выполнено равенство (2), следует согласно следствию 1, что функция f постоянна на (α, β). Последнее противоречит предположению о строгом возрастании f.

Достаточность. Предположим, что условия 1) и 2) выполнены. Тогда по теореме 10 функция f монотонно не убывает. Пусть теперь $a < x' < x'' < b$, $f(x') = f(x'')$. Тогда получим следующее утверждение $\forall\, x \in [x', x''] \ : \ f(x) = f(x') \iff \forall\, x \in (x', x'') \ : \ f'(x) = 0$, что противоречит условию 2). Поэтому $f(x') < f(x'')$. $\lrcorner$

Упражнение 71. Доказать аналоги теорем 10 и 11 для убывающей функции.

Указание. Применить теоремы 10 и 11 к функции $-f$.

Примеры. 1. Функция $f(x) = e^x$, $x \in \boldsymbol{R}$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$ согласно теореме 11, поскольку $f'(x) = e^x > 0$, $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Функция $f(x) = x^2 + bx + c$, $x \in \boldsymbol{R}$ строго убывает на $(-\infty, -b/2]$ и строго возрастает на $[-b/2, +\infty)$ согласно теореме 11, поскольку $f'(x) = 2x + b < 0$, $x < -\dfrac{b}{2}$; $f'(x) = 2x + b > 0$, $x > -\dfrac{b}{2}$.

3. Функция $f(x) = \sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$ строго возрастает на $[-\pi/2, \pi/2]$ согласно теореме 11, поскольку $f'(x) = \cos x > 0$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

4. Функция $f(x) = \ln x$, $x > 0$ строго возрастает на $(0, +\infty)$ согласно теореме 11, поскольку $f'(x) = 1/x > 0$, $x > 0$.

5. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ строго возрастает на $(-\pi/2, \pi/2)$ согласно теореме 11, поскольку $f'(x) = 1/\cos^2 x > 0$ на интервале $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

6. Функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \boldsymbol{R}$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$ согласно теореме 11, поскольку $f'(x) = 1/(1 + x^2) > 0$, $x \in \boldsymbol{R}$.

7. Функция $f(x) = x + \sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$ согласно теореме 11.

8. Функция $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$ строго возрастает на $(0, e]$ и строго убывает на $[e, +\infty)$ согласно теореме 11, поскольку $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, $x > 0$ положительна на $(0, e)$ и отрицательна при $x > e$.

9. Функция $f(x) = x^x$, $x > 0$ строго убывает на $(0, 1/e]$ и строго возрастает на $[1/e, +\infty)$ согласно теореме 11, поскольку $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$, $x > 0$ положительна на $(1/e, +\infty)$ и отрицательна на $(0, 1/e)$.

Упражнение 72. Определить интервалы монотонности функции:
a) $f(x)=\dfrac{x(x-3)}{x^2-2x+2}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}$; c) $f(x)=\dfrac{x^4+2}{2x^2+1}$;
d) $f(x)=x+\sqrt{|1-x^2|}$.

Упражнение 73. Определить значения $a\in \boldsymbol{R}$, для которых функция $f(x)=x+a\sin x,\quad x\in \boldsymbol{R}$ монотонна на $\boldsymbol{R}$.

Упражнение 74. Какое из чисел π^e, e^π больше?

Упражнение 75. Доказать неравенство: a) $\ln(1+x)<\dfrac{x(x+2)}{2(x+1)}$, $x>0$; b) $x^2\cos x<\sin^2 x,\ x\in(0,\pi/2)$.

Упражнение 76. Пусть $a>0,\ b>0$. Доказать, что следующие функции строго возрастают на $(0,+\infty)$:

a) $f(x)=\dfrac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)},\quad a<b;$ b) $f(x)=\left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^{b+x},\quad a\neq b.$

Упражнение 77. Пусть $f:\ [\theta_1,\theta_2]\to(0,+\infty)$, существует f' на (θ_1,θ_2) и $f(\theta_1)=f(\theta_2)$. Доказать существование значения $\theta_0\in(\theta_1,\theta_2)$ такого, что касательная к графику $r=f(\theta),\ \theta\in[\theta_1,\theta_2]$ в точке $(\theta_0,f(\theta_0))$ перпендикулярна к радиусу-вектору этой точки.

Упражнение 78. Исследовать на монотонность следующие функции $f_1(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(1+\dfrac{1}{2x+1}\right)$, $f_2(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)$, определённые при $x>0$, и доказать следующее полезное неравенство

$$\frac{e}{2n+2}<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{e}{2n+1},\ n\geq 1.$$

4.3.3 Дифференциал функции

Пусть $f:\ A\to \boldsymbol{R}$ и точка x_0 такова, что $\exists\,\delta>0\ :\quad (x_0-\delta,x_0+\delta)\subset A$.

Определение 1. *Функция f называется **дифференцируемой** в точке x_0, если*

$$\exists\, L\in \boldsymbol{R}:\ f(x)=f(x_0)+L(x-x_0)+o(x-x_0),\ x\to x_0. \tag{1}$$

*Для дифференцируемой в точке x_0 функции f линейная функция $y=L(x-x_0),\ x\in \boldsymbol{R}$ называется **дифференциалом** в точке x_0.*

<u>Обозначения:</u> $x-x_0=dx,\quad L(x-x_0)=Ldx=df(x_0)$.

Более логичным является не очень распространённое обозначение $df(x_0, h) = Lh, \quad h \in \boldsymbol{R}$.

Замечания. 1. Дифференциал функции f в точке x_0 есть главная часть (линейная по $x - x_0$) приращения $f(x) - f(x_0)$ функции f относительно шкалы сравнения $\{\boldsymbol{R} \ni \mapsto (x - x_0)^n \mid n \in \boldsymbol{N}\}$ при $x \to x_0$.

2. Число L в (1) определяется единственным образом.

Теорема 12. *Функция f дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$.*

⌈ Необходимость. Если f дифференцируема в точке x_0, то из (1) при $x \neq x_0$ имеем $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L + \dfrac{o(x - x_0)}{x - x_0}$, $x \to x_0$. Поэтому существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$, следовательно, существует производная $f'(x_0) = L$.

Достаточность содержится в замечании 4.1.3, 2. ⌋

Замечания. 3. Таким образом, $df(x_0) = f'(x_0)dx$. Поэтому обозначение производной $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ можно понимать, как отношение дифференциалов. Из правил вычисления производных легко получить правила вычисления дифференциалов. Например, $d(fg) = gdf + fdg$ и т. п.

4. Представляет интерес правило вычисления дифференциала сложной функции. Предположим, что выполнены условия теоремы 4. Тогда $dg(y_0) = g'(y_0)dy$; $dh(x_0) = dg(f(x_0)) = g'(f(x_0))f'(x_0)dx$, где $h = g(f)$. В правой части первого равенства имеем дифференциал функции g в точке y_0, в правой части второго — дифференциал сложной функции в точке x_0. Причём правые части имеют одну и ту же форму, поскольку $f(x_0) = y_0$ и $dy = df(x_0) = f'(x_0)dx$. Это свойство часто называют ***инвариантностью формы дифференциала.***

5. Введенные выше производная и дифференциал называются также ***производной и дифференциалом первого порядка.***

Упражнение 79. Если функция $y = f(x)$, $x \in A$ задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, то $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, если x' и y' существуют и $x'(t) \neq 0$. Доказать это утверждение.

4.4 Производные старших порядков

4.4.1 Определение и примеры

Предположим, что для функции $f:\ (a,b)\to \boldsymbol{R}$ в каждой точке $x\in(a,b)$ существует производная $f'(x)$. Функцию $g=f':\ (a,b)\to\boldsymbol{R}$ определим равенством $g(x)=f'(x),\quad x\in(a,b)$.

Определение 1. Если в точке $x_0\in(a,b)$ существует производная $g'(x_0)$ функции g в точке x_0, то эта производная называется ***производной второго порядка*** *функции f в точке x_0 и обозначается символами $f''(x_0)$, $\dfrac{d^2f(x_0)}{dx^2}$. Если производная порядка $n\in N$ на (a,b) определена, ее обозначения $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$, $x\in(a,b)$, то* ***производная порядка*** *$n+1$ в точке x определяется как $\dfrac{df^{(n)}(x)}{dx}$, если последняя существует.*

Примеры. *1.* Пусть $a>0$. Для каждого $x\in\boldsymbol{R}$ получаем равенства $(a^x)'=a^x\ln a,\quad (a^x)''=(a^x\ln x)'=a^x(\ln a)^2,\dots,(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n,\ n\in N$. В частности, для $a=e$ имеем $(e^x)^{(n)}=e^x,\ x\in\boldsymbol{R},\ n\in N$.

2. Проверим, что для $n\in N$ и $x\in\boldsymbol{R}$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\Big(x+n\frac{\pi}{2}\Big),\qquad (\cos x)^{(n)}=\cos\Big(x+n\frac{\pi}{2}\Big).$$

⌈ Действительно, $(\sin x)'=\cos x=\sin\Big(x+\dfrac{\pi}{2}\Big)$, $(\sin x)''=(\cos x)'=$ $=-\sin x=\sin\Big(x+2\dfrac{\pi}{2}\Big)$, $(\sin x)'''=(-\sin x)'=-\cos x=\sin\Big(x+3\dfrac{\pi}{2}\Big)$ и так далее. ⌋

3. Пусть $\alpha\in\boldsymbol{R}$. Проверим, что для $n\in N$ и $x>0$

$$(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

⌈ Имеем для $x>0:\ (x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $(x^\alpha)''=(\alpha x^{\alpha-1})'=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, $(x^\alpha)'''=(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2})'=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$, и т. д. ⌋

Заметим, что для $\alpha\in N$ и $n>\alpha$ $\ (x^\alpha)^{(n)}=0,\ \ x\in\boldsymbol{R}$.

4. Пусть $\alpha\in\boldsymbol{R}$. Для $n\in N$ и $x>-1$ имеем

$$((1+x)^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

5. Для $n\in N$ и $x>0$ $\ (\ln x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

⌈ Действительно, для $x>0$ имеем $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, $(\ln x)''=\Big(\dfrac{1}{x}\Big)'=$ $=-\dfrac{1}{x^2}$, $(\ln x)'''=\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)'=\dfrac{2}{x^3}$, $(\ln x)^{(4)}=\Big(\dfrac{2}{x^3}\Big)'=\dfrac{-3!}{x^4}$ и т. д. ⌋

Упражнение 80. Найти производную n-го порядка:

a) $f(x) = 2^{x-1}$, $x \in \boldsymbol{R}$; b) $f(x) = 2^x 3^{-x}$, $x \in \boldsymbol{R}$; c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$;

d) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x > -1$; e) $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$;

f) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, $x \in \boldsymbol{R}$; g) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \boldsymbol{R}$.

4.4.2 Свойства производных старших порядков

Теорема 13. *Пусть функции f, g имеют на (a,b) производные порядка $n \in \boldsymbol{N}$.*

Тогда справедливы равенства:

1) $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $(f^{(n-k)})^{(k)} = (f^{(k)})^{(n-k)} = f^{(n)}$, $f^{(0)} := f$;

2) $\forall\, c \in \boldsymbol{R}$: $(cf)^{(n)} = cf^{(n)}$;

3) $(f \mp g)^{(n)} = f^{(n)} \mp g^{(n)}$;

4) $(f(\alpha x + \beta))^{(n)} = \alpha^n f^{(n)}(\alpha x + \beta)$, $\{\alpha, \beta\} \subset \boldsymbol{R}$.

Упражнение 81. Привести подробное доказательство теоремы 13.

Примеры. 1. Для чисел $n \in \boldsymbol{N}$ и $x \in \boldsymbol{R}$ имеем $(\sin^2 x)^{(n)} =$
$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n)} - \frac{1}{2}(\cos 2x)^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

2. Для $n \in \boldsymbol{N}$ и $x \neq -1$ имеем
$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{(n)} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{(n)} = (1)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{n!(-1)^{n-1}}{(x+1)^{n+1}}.$$

3. Для $n \in \boldsymbol{N}$ и $x \in (-1, 1)$: $\left(\ln\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{(n)} = (\ln(1-x) - \ln(1+x))^{(n)} =$
$$= (\ln(1-x))^{(n)} - (\ln(1+x))^{(n)} = \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n} + \frac{(-1)^n (n-1)!}{(1+x)^n}.$$

4. Для $n \in \boldsymbol{N}$ и $x \in (-1, 1)$ имеем
$$(\ln(1-x^2))^{(n)} = (\ln(1-x) + \ln(1+x))^{(n)} = \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n} - \frac{(-1)^n (n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Упражнение 82. Найти производную порядка n :

a) $f(x) = \sin x \cos^2 x$, $x \in \boldsymbol{R}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6}$, $x \in \boldsymbol{R}$;

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4}$, $|x| \neq 2$; d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$, $x \notin \{1, 2\}$.

Упражнение 83. Пусть $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$, $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Найти производную $f^{(n)}(0)$ для $n \geq 1$.

Определение 2. *Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$ и $n \in \boldsymbol{N}$.*

$$f \in C^{(n)}(A) \iff \forall x \in A \text{ существует } f^{(n)}(x) \text{ и } f^{(n)} \in C(A).$$

Замечание. Если $A = [a,b]$, то под производными функции f в точках a, b будем понимать $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ соответственно. Аналогично — со старшими производными.

Теорема 14. *Для любого $n \in \boldsymbol{N}$*

$$C^{(n)}(A) \subset C^{(n-1)}(A) \subset \ldots \subset C^1(A) \subset C(A).$$

⌈ Следствие определения производных и того, что имеющая производную в точке функция непрерывна в этой точке. ⌋

Упражнение 84. Пусть $\{f, g\} \subset C^{(n)}(\boldsymbol{R})$. Доказать следующее утверждение $g(f) \in C^{(n)}(\boldsymbol{R})$.

Упражнение 85. Функция $f \in C^{(n)}((a,b))$ имеет обратную g, причем $f'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$. Доказать, что $g \in C^{(n)}((c,d))$, где $(c,d) := \{f(x) \mid x \in (a,b)\}$.

Определение 3. $C^{(\infty)}(A) := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C^{(n)}(A)$.

Упражнение 86. Проверить, что функции $\sin$, $\cos$, arctg, e^x, $x \in \boldsymbol{R}$ принадлежат классу $C^{(\infty)}(\boldsymbol{R})$.

Упражнение 87. Пусть $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$, $x > 0$ и $f(x) = 0$ при $x \leq 0$. Доказать, что $f^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 1$ и что $f \in C^{(\infty)}(\boldsymbol{R})$.

Упражнение 88. Для функции $g \in C^{(\infty)}(\boldsymbol{R})$ функция $f \in C^1((a,b))$ удовлетворяет соотношению $f'(x) = g(f(x))$, $x \in (a,b)$. Доказать, что $f \in C^{(\infty)}((a,b))$.

Теорема 15. ***(Формула Лейбница).*** *Для числа $n \in \boldsymbol{N}$ пусть $\{f, g\} \subset C^{(n)}((a,b))$. Тогда $(fg) \in C^{(n)}((a,b))$ и на (a,b) справедливо равенство*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}. \tag{1}$$

⌈ Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ имеем $(fg)' = C_1^0 f^{(0)} g^{(1-0)} + C_1^1 f^{(1)} g^{(1-1)} = fg' + f'g$, что верно согласно теореме 3.

Предположим, что формула (1) верна для индекса n. Тогда

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}) = \\ &= C_n^0 f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_n^n f^{(n+1)} g = \\ &= C_{n+1}^0 f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)},\end{aligned}$$

поскольку согласно определению $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$ и

$$\begin{aligned}C_n^{k-1} + C_n^k &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{(k-1)!}\left(1 - \frac{n-k+1}{k}\right) = \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+2)}{k!} = C_{n+1}^k.\end{aligned}$$

$\rfloor$

Упражнение 89. Найти: a) $(x^2 e^x)^{(n)}$, $x \in \boldsymbol{R}$; b) $(x^3 \sin x)^{(n)}$, $x \in \boldsymbol{R}$; c) $(x^n e^x)^{(n)}$, $x \in \boldsymbol{R}$; d) $(x^n \ln x)^{(n)}$, $x > 0$.

Упражнение 90. Доказать, что $(e^x \sin x)^{(n)} = 2^{n/2} e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$, $n \geq 1$.

4.4.3 Дифференциалы старших порядков

Предположим, что для функции $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ существует f' на (a,b). Рассмотрим первый дифференциал $df(x,h_1) = f'(x)h_1$, $x \in (a,b)$, $h_1 \in \boldsymbol{R}$ функции f, как функцию от x, считая h_1 фиксированным. Первый дифференциал, если он существует, этой функции, то есть

$$d(df(x)) = d(df(x,h_1)) = df'(x,h_1)h_1 = f''(x)h_1h_2,\ h_j \in \boldsymbol{R},\ j = 1,2,$$

называется ***вторым дифференциалом*** функции f в точке x и обозначается символом $d^2 f(x,h_1,h_2)$. ***Дифференциал порядка*** n есть дифференциал первого порядка от $d^{n-1} f(x,h_1,\dots,h_{n-1})$. Имеет место формула

$$d^n f(x,h_1,\dots,h_n) = f^{(n)}(x)h_1\dots h_n,\ h_j \in \boldsymbol{R},\ 1 \leq j \leq n,\quad n \geq 1.$$

Иногда дифференциалом порядка n называется также функция $d^n f(x,h) = f^{(n)}(x)h^n$, $h \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 91. Вычислить дифференциал d^2F, где $F = f(g)$ для функций $\{f,g\} \subset C^2(R)$.

Упражнение 92. Для функции $y = f(x)$, $x \in A$, заданной параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, вычислить $\frac{d^2y}{dx^2}$, если $\{x,y\} \subset C^2(T)$ и $x'(t) \neq 0$, $t \in T$.

4.4.4 Историческая справка

Основы дифференциального исчисления были разработаны в основном в течение семнадцатого столетия. Это было время создания удобных алгоритмических процедур и общих методов эффективного решения задач механики, физики и собственно математических, таких как задачи о построении касательных, нахождения максимумов и минимумов и т. п.

Ферма Пьер (1601 — 1665) — известный французский математик. Юрист по профессии, он изучил математику и занимался ею в свободное время. Ферма — один из творцов аналитической геометрии, автор выдающихся работ по теории чисел. В частности им была сформулирована знаменитая последняя теорема Ферма, попытки доказательства которой способствовали развитию многих разделов математики. П. Ферма предложил метод определения наибольших и наименьших значений функций, а также метод нахождения касательных до введения понятия производной, к которому подошёл весьма близко. Получил существенные результаты в алгебре, теории вероятностей, оптике и др.

Ролль Мишель (1652 — 1719) — французский математик, теорему Ролля он доказал для многочленов, как и свои результаты Ферма, чисто алгебраическими методами.

Лагранж Жозеф Луи (1736 — 1813) — выдающийся французский математик, автор основополагающих работ по математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, вариационному исчислению, теоретической механике, алгебре и теории чисел. Лагранж участвовал в работе комиссии по разработке метрической системы мер, которой ныне пользуется весь мир. Он был прекрасным преподавателем, членом нескольких академий наук.

В разработке методов дифференциального и интегрального исчисления принимали участие почти все выдающиеся математики — предшественники И. Ньютона и Г. В. Лейбница, которые по праву считаются теперь творцами дифференциального и интегрального исчисления.

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646 — 1716) — великий немецкий математик и философ. К основным понятиям дифференциального исчисления Лейбниц пришёл в связи с задачей отыскания касательной к кривой. Опубликованная в 1684 г. его краткая работа содержала интуитивную формулировку понятия производной с помощью бесконечно малых, правила дифференцирования функций, применение производных к отысканию наибольших и наименьших значений функций и к исследованию выпуклости функций. Формулу Лейбница он доказал в 1685 г. Понятие интеграла было им введено в 1686 г. Лейбниц получил много других основополагающих результатов в математическом анализе, его логические идеи стали исходным пунктом развития математической логики. Лейбниц сконструировал одну из первых счётных машин. Ему принадлежит также значительная часть современной математической символики, оказавшейся очень удобной (в том числе обозначения производной и интеграла, термины "функция", "координата"и др.). Существенный вклад в распространение и развитие революционных математических идей Лейбница внесли братья *Бернулли* и *Лопиталь*.

Ньютон Исаак (1643 — 1727) — великий английский физик и математик. Ньютон в связи с исследованием фундаментальных задач механики и физики разработал основы дифференциального и интегрального исчисления, привёл важные примеры решения дифференциальных уравнений. Для Ньютона производная — это фактически скорость. Дифференциальному исчислению он посвятил только три работы, опубликованные в 1704, 1707 и 1736 гг., позже публикаций Лейбница.

Современная формулировка понятия производной появилась у Б. Больцано и О. Л. Коши, хотя связь между понятиями производной и непрерывностью ещё не была установлена в работах Коши.

4.5 Приложения производной

4.5.1 Формула Тейлора

1. Формула Тейлора для многочлена.

Пусть $n \in N$ и числа $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset R$. Для произвольной точки $x_0 \in R$ многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $x \in R$ можно представить в виде

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n, \ x \in R \qquad (1)$$

с некоторыми числами $\{b_0, b_1, \ldots, b_n\} \subset R$. Эти числа можно определить следующим образом. Положим в равенстве (1) $x = x_0$, получим $b_0 = P(x_0)$. Затем найдём производную от обеих частей (1)

$$P'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + \ldots + nb_n(x - x_0)^{n-1}, \ x \in R. \qquad (2)$$

Положив теперь $x = x_0$ в (2), получим равенство $b_1 = P'(x_0)$. Найдём теперь производную от обеих частей (2)

$$P''(x) = 2b_2 + \ldots + n(n-1)b_n(x - x_0)^{n-2}, \ x \in R. \qquad (3)$$

Положив в (3) $x = x_0$, приходим к равенству $b_2 = \dfrac{P''(x_0)}{2!}$. Продолжая аналогично, получим $b_m = \dfrac{P^{(m)}(x_0)}{m!}$, $m \geq 0$.

Таким образом, для каждого $x \in \boldsymbol{R}$ справедливо представление

$$P(x) = \tag{4}$$
$$= P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Формула (4) выявляет следующий интересный факт: многочлен P определяется на оси полностью заданием его значения и значений его производных в одной точке x_0. При этом точка x_0 может быть взята любой. Для функций, отличных от многочлена, формула (4) не верна. Однако, если ограничиться значениями x, близкими к x_0, то для достаточно широкого класса функций правая часть (4) оказывается близкой к значениям функции.

2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Теорема 16. *Пусть функция* $f : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ *и точка* $x_0 \in (a,b)$ *для числа* $n \in \boldsymbol{N}$ *удовлетворяют условиям: 1)* $\forall\, x \in (a,b)$ *существует* $f^{(n-1)}(x)$; *2) существует* $f^{(n)}(x_0)$.

Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \ x \to 0. \tag{5}$$

Слагаемое $o((x-x_0)^n)$ *называется* ***остаточным членом в форме Пеано.***

Γ Напомним, что $0! := 1$. Рассмотрим следующую функцию $r_n(x) := f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, $x \in (a,b)$. Согласно условиям 1) и 2) существуют $r_n^{(n-1)}(x)$, $x \in (a,b)$ и $r_n^{(n)}(x_0)$. Кроме того, легко видеть, что $r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$. Пусть $x > x_0$, применяя последовательно теорему Лагранжа, а затем определение производной, при $x \to x_0$ получим

$$\left|\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n}\right| = \left|\frac{r_n(x) - r_n(x_0)}{(x - x_0)^n}\right| = \left|\frac{r_n'(c_1)(x - x_0)}{(x - x_0)^n}\right| =$$
$$= \left|\frac{r_n'(c_1) - r_n'(x_0)}{(x - x_0)^{n-1}}\right| = \left|\frac{r_n''(c_2)(c_1 - x_0)}{(x - x_0)^{n-1}}\right| \leq \left|\frac{r_n''(c_2) - r_n''(x_0)}{(x - x_0)^{n-2}}\right| =$$
$$= \left|\frac{r_n'''(c_3)(c_2 - x_0)}{(x - x_0)^{n-2}}\right| \leq \ldots \leq \left|\frac{r_n^{(n-1)}(c_{n-1}) - r_n^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}\right| \to$$
$$\to |r_n^{(n)}(x_0)| = 0,$$

где $x_0 < c_{n-1} < c_{n-2} < \ldots < c_2 < c_1 < x$. При этом, $c_{n-1} \to x_0$, $x \to x_0$. Таким образом, $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$. ⌋

Замечание. Формула (5) является обобщением утверждения п. 4.1.3, 2, которое означает, что функцию, имеющую производную в точке x_0, можно приблизить такой линейной функцией $g_1(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, $x \in R$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o(x-x_0)$. По теореме 16 функцию, имеющую производную порядка n в точке x_0, можно приблизить многочленом $g_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, $x \in R$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^n)$.

3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 17. *Пусть* $n \in (N \cup \{0\})$ *и* $f:\ (a,b) \to R$. *Предположим, что для каждого* $x \in (a,b)$ *существует* $f^{(n+1)}(x)$. *Тогда*

$$\forall \{x, x_0\} \subset (a,b)\ \exists \theta \in (0,1):\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x), \quad (6)$$

где $r_n(x) := \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Слагаемое $r_n(x)$ *в* (6) ***называется остаточным членом в форме Лагранжа.***

⌈ Если $x = x_0$, то формула (6) справедлива. Пусть $x \neq x_0$. Введём функцию $g(z) := f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k - \frac{L}{(n+1)!}(x-z)^{n+1}$ для значений z из отрезка с концами x и x_0. Здесь L — пока произвольное число. Согласно условиям теоремы 17 функция g непрерывна и имеет производную $g'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + \frac{L}{n!}(x-z)^n$ в точках отрезка с концами x и x_0. При этом $g(x) = 0$. Возьмём теперь число L таким, чтобы выполнялось равенство $g(x_0) = 0$. К функции g на отрезке с концами x и x_0 применима теорема Ролля, по которой $\exists \theta \in (0,1)$: $g'(x_0 + \theta(x-x_0)) = 0$, или $-\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n(1-\theta)^n + \frac{L}{n!}(x-x_0)^n(1-\theta)^n = 0$. Таким образом, $L = f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))$. Формула (6) теперь совпадает с равенством $g(x_0) = 0$. ⌋

Замечания. 1. Формула (6) является обобщением теоремы Лагранжа, которая получается при $n = 0$.

2. Обе формулы Тейлора (5) и (6) в случае $x_0 = 0$ называются также *формулами Маклорена.*

4. Примеры.

В следующих примерах $x_0 = 0$.

1. $\forall n \in \boldsymbol{N}\ \forall x \in \boldsymbol{R}\ \exists\, \theta \in (0,1):$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

⌈ Это формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x) = e^x$, $x \in \boldsymbol{R}$, для которой $f^{(n)}(x) = e^x, x \in \boldsymbol{R}$; в частности $f^{(n)}(0) = 1$, $n \in \boldsymbol{N}$. ⌋

Замечание. Формула примера 1 позволяет получать приближённые значения e^x, вычисляя значения многочлена $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$. Ошибка при этом равна $\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\, x^{n+1}$. Например, для $x \in [0,3]$ и $n = 12$ имеем следующую оценку $\left|\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\, x^{n+1}\right| < \dfrac{e^3 3^{13}}{13!} < \dfrac{1}{1000}$.

2. $\forall k \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\})\quad \forall x \in \boldsymbol{R}\quad \exists\, \theta \in (0,1)\ :$

$$\sin x = $$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\sin\left(\theta x + \frac{2k+3}{2}\pi\right)}{(2k+3)!}\, x^{2k+3},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\cos(\theta x + (k+1)\pi)}{(2k+2)!}\, x^{2k+2}.$$

3. $\forall n \in \boldsymbol{N}\quad \forall x > -1\quad \exists\, \theta \in (0,1)\ :$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

4. Для $\alpha \in \boldsymbol{R}, n \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\}) : C_\alpha^n := \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$.
Справедливо утверждение: $\forall n \in \boldsymbol{N}\quad \forall x > -1\quad \exists\, \theta \in (0,1):$

$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + \ldots + C_\alpha^N x^n + C_\alpha^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n} x^{n+1}.$$

Упражнение 93. Если при условиях теоремы 16 для $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \boldsymbol{R}$ справедливо соотношение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{7}$$

то $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $0 \le k \le n$. Доказать это утверждение.

Указание. Рассмотреть разность между (5) и (7).

Упражнение 94. Применить теорему 17 или воспользоваться предыдущим упражнением, чтобы получить формулу Тейлора следующих функций в точке $x_0 = 0:$ a) $\sin^2$; b) $f(x) = x\ln(1+x)$, $x > -1$;
c) $f(x) = x\sin x$, d) $f(x) = e^{x^2}, x \in \boldsymbol{R}$; e) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0$, $f(0) = 1$;
f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$; g) $\operatorname{sh} x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 95. Пусть $(a,b) = \boldsymbol{R}$, $x_0 = 0$, f — чётная функция, удовлетворяющая условиям теоремы 16. Доказать, что основная часть формулы Тейлора (то есть правая часть (6) без остаточного члена) содержит только чётные степени x. Какова особенность формулы Тейлора для нечётной функции?

Упражнение 96. Пусть $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), x \neq 0$, $f(0) = 0$. Доказать, что $f \in C^{(\infty)}(\boldsymbol{R})$ и записать формулу Тейлора для функции f в точке $x_0 = 0$.

4.5.2 Правило Лопиталя

Правила вычисления пределов функции в точке, приведенные в гл. 3, применимы при определённых ограничениях. Однако, в ряде важных случаев эти ограничения не выполняются. Типичными являются следующие ситуации определения предела $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, где:

1) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, когда $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ при $x \to x_0$;
2) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, когда $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to x_0$;
3) $h(x) = f(x) - g(x)$, когда $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to x_0$;
4) $h(x) = f(x)^{g(x)}$, когда $f(x) \to 0+$, $g(x) \to 0+$ при $x \to x_0$;
5) $h(x) = f(x)^{g(x)}$, когда $f(x) \to 1$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to x_0$;
6) $h(x) = f(x)g(x)$, когда $f(x) \to 0$, $g(x) \to +\infty$ при $x \to x_0$.

Эффективным средством вычисления этих и подобных им пределов является производная, впервые использование производной для вычисления пределов было предложено Иоганном Бернулли и Лопиталем.

Теорема 18. *Пусть $b \in \boldsymbol{R}$ и функции $f, g:$ $(a,b) \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяют условиям: 1)* $\lim\limits_{x\to b, x<b} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to b, x<b} g(x) = 0$;
2) $\forall\, x \in (a,b)$ существуют $f'(x)$, $g'(x)$; 3) $\forall\, x \in (a,b):$ $g'(x) \neq 0$;
4) существует $\lim\limits_{x\to b, x<b} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \boldsymbol{R}$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to b, x<b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

⌈ Продолжим функции f и g на полуинтервал $(a,b]$, положив $f(b) = g(b) = 0$. С учётом условия 1) функции f и g будут непрерывными в точке b. Для любого $x \in (a,b)$ значение $g(x) \neq 0$, так как равенство $g(x) = 0$ с помощью теоремы Ролля приводит к существованию точки $c \in (x,b)$, для которой $g'(c) = 0$, что невозможно по условию 3).

Пусть теперь произвольное $\varepsilon > 0$ задано. Согласно условию 4) имеем $\exists\,\delta > 0\ \forall\, x \in (b-\delta, b) :\ \left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon$. Применим теперь к функциям f и g на отрезке $[x,b]$, $x \in (b-\delta, b)$ теорему Коши, получим

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} - L\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \varepsilon,\ c \in (x,b) \subset (b-\delta, b).⌋$$

Замечание. Утверждение, аналогичное теореме 18, справедливо и для предела справа в точке $a \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 97. Доказать: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1$;

c) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{(\ln x)^\alpha - \left(\dfrac{x}{e}\right)^\beta}{x-e} = \dfrac{\alpha-\beta}{e}$, $\{\alpha,\beta\} \subset \boldsymbol{R}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(\dfrac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^\alpha - 1}{\ln x} = \dfrac{2\alpha}{\pi}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^\alpha x}{\sin^2 x} = \dfrac{\alpha}{2}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$; g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x} = 1$;

f) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{1/x} = e^{-1/2}$.

Указание. Использовать тождество $f^g = e^{g\ln f}$ и непрерывность показательной функции.

Упражнение 98. Вычислить пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^n - \sin^n x}{x^{n+2}}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Упражнение 99. Пусть $b \in \boldsymbol{R}$ и функции $f, g :\ (a,b) \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяют условиям: 1) $\forall\, x \in (a,b)$ существуют $f^{(n)}(x)$ и $g^{(n)}(x)$, $n \in \boldsymbol{N}$; 2) $\forall\, x \in (a,b) : g^{(n)}(x) \neq 0$; 3) $\forall\, j \in \{0,1,2,\ldots,n-1\} : \lim\limits_{x\to b-} f^{(j)}(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to b-} g^{(j)}(x) = 0$; 4) существует $\lim\limits_{x\to b-} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = L \in \boldsymbol{R}$. Доказать, что

$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b-}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ldots=\lim_{x\to b-}\frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)}=L.$$

Упражнение 100. Вычислить пределы: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-1)}{x-1}$; d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

Теорема 19. *Утверждение теоремы 18 остается верным и для $b=+\infty$.*

⌈ Пусть $b=+\infty$ и функции f и g удовлетворяют условиям 1) — 4) теоремы 18. Можно считать, что $a>0$. Положим $z=1/x$, $x>a$. Заметим, что $z\in(0,1/a)$; $z\to 0+\iff x\to+\infty$. Определим функции F и G следующим образом $F(z):=f(1/z)$, $G(z):=g(1/z)$; $z\in(0,1/a)$. При этом $F'(z)=f'(1/z)(-1/z^2)$, $G'(z)=g'(1/z)(-1/z^2)$; $z\in(0,1/a)$ и, кроме того, в силу условий 1) и 4) имеем $F(z)\to 0$, $G(z)\to 0$, $\dfrac{F'(z)}{G'(z)}=$ $=\dfrac{f'(1/z)}{g'(1/z)}\to L$, $z\to 0+$. Поэтому к функциям F и G на интервале $(0,1/a)$ применима теорема 18, согласно которой $\dfrac{F(z)}{G(z)}\to L$, $z\to 0+$, что равносильно соотношению $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to L$, $x\to+\infty$. ⌋

Упражнение 101. Найти пределы: a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)\right)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{x}\right)\right)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

Указание. Для a) воспользоваться равенством $x(\pi/2-\operatorname{arctg}x)=\dfrac{\pi/2-\operatorname{arctg}x}{1/x}$, $x>0$.

Упражнение 102. Доказать, что утверждения теорем 18 и 19 верны и для $L=+\infty$.

Теорема 20. *Пусть функции $f,g:\ (a,b)\to\boldsymbol{R}$ удовлетворяют условиям: 1) $g(x)\to+\infty$, $x\to b-$; 2) $\forall\, x\in(a,b)$ существуют $f'(x)$ и $g'(x)$; 3) $\forall\, x\in(a,b):\ g'(x)\neq 0$; 4) существует предел $\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L\in\boldsymbol{R}$.*

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

⌈ Пусть произвольное $\varepsilon>0$ задано. По условию 4) и определению предела функции в точке для числа $\varepsilon/2$ имеем $\exists\, c_1\in(a,b)\ \forall\, x\in(c_1,b):$

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} \iff L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Аналогично из условия 1) следует $\exists\, c_2 \in (a,b)\ \forall\, x \in (c_2,b) : g(x) > 0$, $g(x) - g(c_1) > 0$. Пусть $x > \max(c_1,c_2)$. Применим к функциям f и g на отрезке $[c_1,x]$ теорему Коши. Получим следующее утверждение $\exists\, \theta \in (c_1,x) : \dfrac{f(x)-f(c_1)}{g(x)-g(c_1)} = \dfrac{f'(\theta)}{g'(\theta)}$, откуда с учётом неравенства (1) имеем

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x)-f(c_1)}{g(x)-g(c_1)} < L + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

После умножения (2) на $g(x) - g(c_1) > 0$ и деления на $g(x) > 0$ приходим к неравенству $u(x) < \dfrac{f(x)}{g(x)} < v(x)$, в котором $u(x) :=$ $= \left(L - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \dfrac{g(c_1)}{g(x)}\right) + \dfrac{f(c_1)}{g(x)}$, $v(x) := \left(L + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \dfrac{g(c_1)}{g(x)}\right) + \dfrac{f(c_1)}{g(x)}$.

По условию 1) $u(x) \to \left(L - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, $v(x) \to \left(L + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$; $x \to b-$, поэтому согласно теореме 4 гл. 3 $\exists\, c_3 \in (a,b)\ \forall\, x \in (c_3,b) : u(x) >$ $> L - \varepsilon$, $v(x) < L + \varepsilon$. Положим теперь $c := \max(c_1,c_2,c_3)$. Тогда $\forall\, x \in (c,b) : L - \varepsilon < u(x) < \dfrac{f(x)}{g(x)} < v(x) < L + \varepsilon$, откуда следует, что $\forall\, x \in (c,b) : \left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$. ⌋

Замечание. 2. Утверждение теоремы 20 остаётся верным для $L = +\infty$ и для правостороннего предела в точке a.

Упражнение 103. С помощью теоремы 20 доказать, что для $\varepsilon > 0$:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2^x} = 0$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2^x} = 0$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = 0$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$; f) $\lim\limits_{x\to0+} (x^\varepsilon \ln x) = 0$;

g) $\lim\limits_{x\to0+} x^x = 1$; h) $\lim\limits_{x\to0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$; i) $\lim\limits_{x\to0+} (\ln(1+x))^x = 1$.

Упражнение 104. Вычислить пределы: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\right)^x$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$;

d) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\dfrac{\pi x}{6x+1} + \cos\dfrac{\pi x}{3x+1}\right)^x$;

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin^2\dfrac{\pi x}{4x+\sqrt{x}} + \cos^2\dfrac{\pi x+\sqrt{x}}{4x}\right)^x$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(\cos\alpha)^{2x}+(\cos\beta)^{2x}+(\cos\gamma)^{2x}}{3}\right)^{1/x}$, $\{\alpha,\beta,\gamma\}\subset \boldsymbol{R}$.

Упражнение 105. Доказать, что для каждого $n\in \boldsymbol{N}$ существует число $a_n\in(0,1)$ такое, что $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+a_n}=e$, и найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

Упражнение 106. Для функций $f,g:\ (0,1)\to \boldsymbol{R}$ существуют f',g' на $(0,1)$, $g'\neq 0$ на $(0,1)$ и $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$, $x\to 0$. Доказать, что

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\le\varliminf_{n\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4.5.3 Выпуклые функции

1. Определения и примеры

Пусть $-\infty\le a<b\le+\infty$ и $f:\ (a,b)\to \boldsymbol{R}$.

*Определение 1. Функция f называется **выпуклой вниз на** (a,b), если* $\forall\{x_1,x_2\}\subset(a,b)\ \forall\alpha\in[0,1]:$

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2).$$

*Функция f называется **выпуклой вверх на** (a,b), если функция $-f$ выпукла вниз на (a,b).*

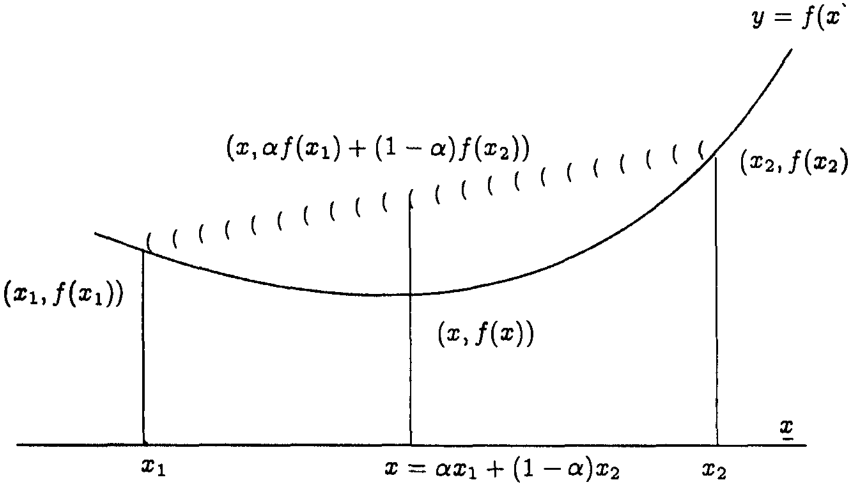
*Определение 2. Функция f называется **строго выпуклой вниз на** (a,b), если* $\forall\{x_1,x_2\}\subset(a,b), x_1\neq x_2\ \forall\alpha\in(0,1):$

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)<\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2).$$

*Функция f называется **строго выпуклой вверх на** (a,b), если функция $-f$ строго выпукла вниз на (a,b).*

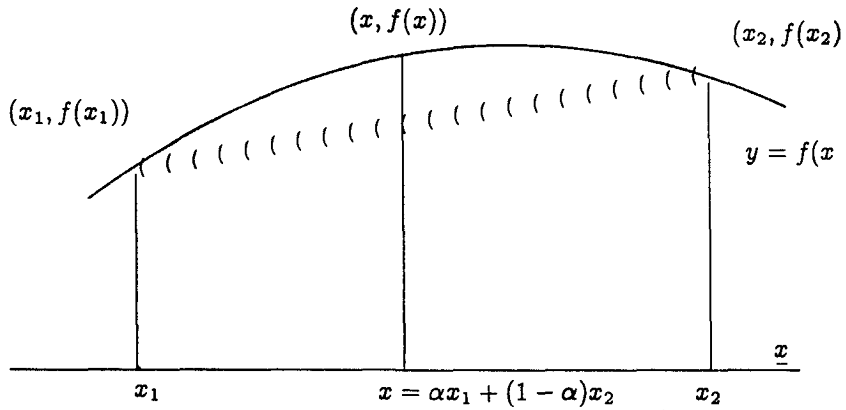
Замечание. Геометрическая интерпретация. Пусть f — строго выпуклая вниз функция на (a,b). Рассмотрим произвольные числа $a<x_1<x_2<b$, $\alpha\in(0,1)$. Тогда число $x:=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$ удовлетворяет неравенствам $\alpha x_1+(1-\alpha)x_1<\alpha x_1+(1-\alpha)x_2<\alpha x_2+(1-\alpha)x_2$, то есть $x_1<x<x_2$. Заметим теперь, что $y=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$, $x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$; $\alpha\in \boldsymbol{R}$ суть параметрические уравнения прямой, которая проходит через точки плоскости $(x_1,f(x_1))$ и $(x_2,f(x_2))$, а значениям $\alpha\in[0,1]$ соответствует хорда, соединяющая эти точки. Для точки $\alpha\in(0,1)$ точка $(x,f(x))$ лежит на графике функции f, а точка $(x,\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2))$ лежит на хорде. Согласно предположению о строгой выпуклости $f(x)<\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$. Таким образом, для любой хорды, соединяющей точки графика функции $(x_1,f(x_1))$ и

$(x_2, f(x_2))$ с $x_1 < x_2$, точки графика функции f с абсциссами $x \in (x_1, x_2)$ лежат под хордой, см. рис. 7.



$f(x) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$

a)



$f(x) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$

b)

Рис. 7.

На рис. 7, а) представлен график строго выпуклой вниз функции, b

представлен график строго выпуклой вверх функции.

Примеры. 1. Пусть $\{L, M\} \subset \boldsymbol{R}$. Функция $f(x) = Lx + M, \quad x \in \boldsymbol{R}$ выпукла вниз на $\boldsymbol{R}$ и выпукла вверх на $\boldsymbol{R}$, так как справедливы равенства $\forall\{x_1, x_2\} \subset \boldsymbol{R}\, \forall \alpha \in [0,1] : \ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = L(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + M =$ $= \alpha(Lx_1 + M) + (1-\alpha)(Lx_2 + M) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$.

2. Функция $f(x) = |x|, \quad x \in \boldsymbol{R}$ выпукла вниз на $\boldsymbol{R}$, так как имеем $\forall\{x_1, x_2\} \subset \boldsymbol{R}\ \forall \alpha \in [0,1] : \ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = |\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2| \leq$ $\leq \alpha|x_1| + (1-\alpha)|x_2| = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$.

Замечание. Следует проверить, что функция примера 2 не является строго выпуклой на $\boldsymbol{R}$. Кроме того, $f(x) = \max(-x, x), \ x \in \boldsymbol{R}$, это наблюдение приводит к интересным обобщениям. Например, функция $f(x) = \max\left(-x-2, \dfrac{1}{2}\,x, x-2\right), \ x \in \boldsymbol{R}$ выпукла вниз на $\boldsymbol{R}$. Если функции f, g выпуклы вниз на (a,b), то функция $h(x) := \max(f(x), g(x)), \ x \in \boldsymbol{R}$ выпукла вниз на (a,b). Если функции f, g выпуклы вверх на (a,b), то функция $k(x) := \min(f(x), g(x)), \ x \in \boldsymbol{R}$ выпукла вверх на (a,b). Например, функция $k(x) := \min\left(-x-2, \dfrac{1}{2}\,x, x-2\right)$ выпукла вверх на $\boldsymbol{R}$.

3. Функция $f(x) = x^2, \quad x \in \boldsymbol{R}$ строго выпукла вниз на $\boldsymbol{R}$, так как согласно элементарному неравенству $2x_1x_2 < x_1^2 + x_2^2, \ x_1 \neq x_2$, имеем следующее: $\forall\{x_1, x_2\} \subset \boldsymbol{R}, x_1 \neq x_2\ \forall \alpha \in (0,1) : \ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) =$ $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)^2 = \alpha^2x_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)x_1x_2 + (1-\alpha)^2x_2^2 < \alpha^2x_1^2 +$ $\alpha(1-\alpha)(x_1^2 + x_2^2) + (1-\alpha)^2x_2^2 = \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$.

4. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$ строго выпукла вниз на $(0, +\infty,)$ так как $\forall\{x_1, x_2\} \subset (0, +\infty), x_1 \neq x_2\ \forall \alpha \in (0,1) : \ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) =$ $= (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)^{-1} < \alpha x_1^{-1} + (1-\alpha)x_2^{-1} = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$ в силу того, что $x_1x_2 < \alpha x_2(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + (1-\alpha)x_1(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$, то есть $x_1x_2 < \alpha^2x_1x_2 + \alpha(1-\alpha)x_2^2 + \alpha(1-\alpha)x_1^2 + (1-\alpha)^2x_1x_2$. Последнее неравенство равносильно неравенству Коши $2\alpha(1-\alpha)x_1x_2 <$ $< \alpha(1-\alpha)(x_1^2 + x_2^2)$.

2. Условия выпуклости

Теорема 21. *Функция $f : \ (a,b) \to \boldsymbol{R}$ выпукла (строго выпукла) вниз на (a,b) тогда и только тогда, когда для любой точки $x_0 \in (a,b)$* ***функция наклона относительно точки*** *x_0 $g(x) := \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,* $\operatorname{tg}\alpha$ *$x \in ((a,b) \setminus \{x_0\})$ монотонно не убывает (строго возрастает) на $(a,b) \setminus \{x_0\}$.*

⌈ Рассмотрим случай строго выпуклой вниз функции. Пусть произвольная точка x_0 фиксирована и точки x_1, x_2 таковы, что $a < x_0 <$

$< x_1 < x_2 < b$. Положим $\alpha := \dfrac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}$, $1 - \alpha = \dfrac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}$, при этом $\alpha \in (0,1)$ и $x_1 = \alpha x_0 + (1-\alpha)x_2$. Следующие неравенства равносильны: $f(\alpha x_0 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_0) + (1-\alpha)f(x_2) \iff f(x_1) < \dfrac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0} f(x_0) + \dfrac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} f(x_2) \iff (x_2 - x_0)f(x_1) < (x_2 - x_0 + x_0 - x_1)f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_2) \iff (x_2 - x_0)(f(x_1) - f(x_0)) < (x_1 - x_0)(f(x_2) - f(x_0)) \iff g(x_1) < g(x_2)$. Для других случаев расположения точек x_1 и x_2 рассуждения аналогичны. ⌋

Упражнение 107. Дать геометрическую интерпретацию утверждения теоремы 21.

Упражнение 108. Сформулировать и доказать аналог теоремы 21 для выпуклой вверх функции.

Упражнение 109. Доказать, что функция $f(x) = x^3$, $x \geq 0$ строго выпукла вниз на $[0, +\infty)$.

Теорема 22. *Пусть для функции $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ для каждого $x \in (a,b)$ существует производная $f'(x)$. Функция f выпукла (строго выпукла) вниз на (a,b) тогда и только тогда, когда функция f' монотонно не убывает (строго возрастает) на (a,b).*

⌈ Рассмотрим только случай выпуклой вниз функции.

Необходимость. Пусть f выпукла вниз на (a,b) и $a < x_1 < x_2 < b$. По теореме 21 для точек $a < u < x_1 < x_2 < v < b$ имеем

$$\frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(v) - f(x_2)}{v - x_2}.$$

Отсюда при $u \to x_1-$ и $v \to x_2+$ имеем $f'_-(x_1) \leq \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_+(x_2)$, поэтому $f'(x_1) = f'_-(x_1) \leq f'_+(x_2) = f'(x_2)$.

Достаточность. Пусть f' монотонно не убывает на (a,b). Для произвольной точки $x_0 \in (a,b)$ рассмотрим функцию наклона $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $x \in ((a,b) \setminus \{x_0\})$, для которой с помощью теоремы Лагранжа получим $g'(x) = \dfrac{f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^2} = \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - x_0}$, где c лежит между числами x и x_0. Поэтому $g'(x) \geq 0$ для $x \in ((a,b) \setminus \{x_0\})$. Следовательно, функция g не убывает на каждом из интервалов (a, x_0) и (x_0, b). Кроме того, $g(x_0-) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) = g(x_0+)$. Таким образом, функция g не убывает на множестве $(a,b) \setminus \{x_0\}$ и по теореме 21 функция f выпукла вниз на (a,b). ⌋

Упражнение 110. Доказать теорему 22 для строго выпуклой функции.

Указание. При доказательстве необходимости дополнительно рассмотреть точку $w \in (x_1, x_2)$.

Теорема 23. *Пусть для функции $f: (a,b) \to \boldsymbol{R}$ для каждого $x \in (a,b)$ существует производная $f''(x)$. Функция f выпукла вниз на (a,b) тогда и только тогда, когда $\forall\, x \in (a,b): \ f''(x) \geq 0$. Функция f строго выпукла вниз на (a,b) тогда и только тогда, когда 1) $\forall\, x \in (a,b): \ f''(x) \geq 0$; и 2) не существует интервала $(\alpha, \beta) \subset (a,b)$ такого, что $\forall\, x \in (\alpha,\beta): \ f''(x) = 0$.*

⌈ Следствие теоремы 22 и критерия монотонности функции. ⌋

Упражнение 111. Сформулировать и доказать аналог теоремы 23 для выпуклой вверх функции.

Упражнение 112. Определить интервалы выпуклости функций:

a) e^x, $x \in \boldsymbol{R}$; b) $\ln x$, $x > 0$; c) sin; d) cos; e) tg; f) ctg;

g) arctg; h) arcsin; i) $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$;

j) $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, $x \in \boldsymbol{R}$, $\{\alpha, \beta\} \subset \boldsymbol{R}$.

Упражнение 113. Функция $f: \ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ – выпукла и ограничена на $\boldsymbol{R}$. Доказать, что f постоянна на $\boldsymbol{R}$.

Упражнение 114. Функция f выпукла вниз на $\boldsymbol{R}$. Доказать, что имеет место одна из следующих возможностей: 1) f возрастает на оси; 2) f убывает на оси; 3) существует точка $a \in \boldsymbol{R}$ такая, что f убывает на $(-\infty, a]$ и возрастает на $[a, +\infty)$.

Упражнение 115. Пусть $r \geq 1$ и $\{a, b\} \subset \boldsymbol{R}$. Доказать неравенство

$$|a+b|^r \leq 2^{r-1}(|a|^r + |b|^r).$$

(Упр. f - вып. и огр на $(a,b) \Rightarrow f \in C(a,b)$

3. Неравенство Иенсена

Теорема 24. *Пусть f — выпуклая вниз на (a,b) функция. Тогда $\forall\, n \geq 2 \ \forall \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset (a,b) \ \forall \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset [0,1]$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1: \ f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$.* (1)

Для строго выпуклой вниз функции неравенство (1) является строгим, если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не все одинаковы, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ положительны.

⌈ Для $n = 2$ неравенство (1) совпадает с неравенством из определения выпуклой функции.

Предположим, что неравенство (1) справедливо для любого набора из n точек. Рассмотрим для $n \geq 3$ произвольные наборы

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\} \subset (a, b)$; $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}\} \subset [0, 1]$, $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \alpha_k =$ 1. Среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ хотя бы одно отлично от 1. Пусть $\alpha_{n+1} <$ 1. Согласно предположению

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) = f\left(\alpha_{n+1} x_{n+1} + (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} x_k\right) \leq$$
$$\leq \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \alpha_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} x_k\right) \leq$$
$$\leq \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k).$$

Таким образом, согласно принципу математической индукции теорема 24 доказана. ⌋

Замечание. Неравенство Иенсена имеет следующий физический смысл. Разместим в точках $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ графика функции f соответственно массы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Координаты центра масс этой системы точек равны $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$. Для выпуклой вниз функции центр масс лежит над кривой и потому его ордината $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$ больше ординаты $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right)$ точки на графике с абсциссой $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Таким образом, имеем неравенство (1).

Примеры. 1. Пусть $f(x) = |x|$, $x \in \boldsymbol{R}$ выпукла вниз на $\boldsymbol{R}$, поэтому $\forall \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \boldsymbol{R}$: $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$. Это неравенство следует из (1) при значениях $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$.

2. Функция $f(x) = \ln x$, $x > 0$ строго выпукла вверх на $(0, +\infty)$, поскольку $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, $x > 0$. Поэтому из неравенства (1) для функции $-f$ и чисел $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$ имеем $\forall \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset$ $(0, +\infty)$: $\ln\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln x_k$ или $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \geq \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k}$. Это неравенство есть неравенство Коши между средними значениями.

3. Докажем, что $\forall n \geq 2$ $\forall \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset (0, +\infty)$

$$\forall \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset [0,1], \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1 : \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k}.$$

⌈ В решении примера 2 использовать произвольные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. ⌋

Упражнение 116. Пусть $p > 1$, $q > 1$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Доказать, что $\forall \{x, y\} \subset (0, +\infty) : \ xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

Указание. Использовать результат примера 3 для следующих чисел $n = 2$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{p}$, $\alpha_2 = \dfrac{1}{q}$ и $x_1 = x^p$, $x_2 = y^q$.

Упражнение 117. Функции f и g выпуклы вниз на (a, b). Доказать, что: a) для любых положительных чисел c_1, c_2 функция $c_1 f + c_2 g$ выпукла вниз на (a, b); b) функция $h := \max(f, g)$ выпукла вниз на (a, b).

Упражнение 118. Доказать , что для любых $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset [0, +\infty)$ и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \boldsymbol{R}$: $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k\right)^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k^2$.

Упражнение 119*. Пусть $n \in \boldsymbol{N}$ и $p \geq 1$ фиксированы. Для $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ положим $||\vec{x}||_p := \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$. Доказать ***неравенство Минковского*** $\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \boldsymbol{R}^n$: $||\vec{x} + \vec{y}||_p \leq ||\vec{x}||_p + ||\vec{y}||_p$.

Упражнение 120*. Пусть $n \in \boldsymbol{N}$ и $p \geq 1$, $q \geq 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ фиксированы. Доказать, что $\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \boldsymbol{R}^n$: $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq ||\vec{x}||_p ||\vec{y}||_q$ ***(неравенство Гёльдера).***

4.5.4 Условия локального экстремума

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$.

Определение 3. *Точка $x_0 \in A$ называется **точкой локального максимума функции** $f : A \to \boldsymbol{R}$, если*

$$\forall \delta > 0 : \quad 1)\ B(x_0, \delta) \subset A \quad \text{и} \quad 2)\ \forall x \in B(x_0, \delta) \quad f(x) \leq f(x_0).$$

*Точка $x_0 \in A$ называется **точкой строгого локального максимума функции** $f : A \to \boldsymbol{R}$, если*

$$\forall \delta > 0 : \quad 1)\ B(x_0, \delta) \subset A \quad \text{и} \quad 2)\ \forall x \in (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \ : \ f(x) < f(x_0).$$

*Аналогично определяются **точки локального минимума и строгого локального минимума.***

Точки локального минимума и локального максимума называются ***точками локального экстремума.***

Примеры. 1. Для функции $f(x) = x^2$, $x \in R$ точка $x_0 = 0$ есть точка строгого локального минимума и точка, в которой функция f принимает наименьшее на R значение.

2. Для функции $f(x) = x$, $x \in [0,1]$ точки $x_* = 0$ и $x^* = 1$ суть точки, в которых функция f принимает соответственно наименьшее и наибольшее на $[0,1]$ значения. Однако, точки 0 и 1 не являются точками локального экстремума.

Упражнение 121. Пусть для функции $f: [a,b] \to R\ \exists \{x_*, x^*\} \subset [a,b]\ :\ f(x_*) = \inf\limits_{[a,b]} f,\ \ f(x^*) = \sup\limits_{[a,b]} f$. Когда точки x_* и x^* — точки локального экстремума?

Упражнение 122. Пусть E – множество всех точек локального максимума функции $f : [a,b] \to R$. Доказать утверждение. Если $\exists\, x^* \in [a,b] :\ f(x^*) = \max\limits_{[a,b]} f$, то $x^* \in (E \cup \{a,b\})$ и $f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in (E \cup \{a,b\})\}$. Аналогичное утверждение справедливо и для точки, в которой принимается наименьшее значение.

Упражнение 123*. Доказать, что множество всех точек, в которых функция $f : R \to R$ имеет строгий локальный экстремум, не более чем счётно.

Необх. усл.

Теорема 25. *Если для функции $f\ A \to R$ точка $x_0 \in A$ есть точка локального экстремума и в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

⌈ Пусть x_0 — точка локального максимума. Тогда согласно определению $\exists\, \delta > 0 :\ B(x_0, \delta) \subset A$ и $\forall\, x \in B(x_0, \delta) :\ f(x) \leq f(x_0)$, при этом $f(x_0) = \max\limits_{x \in B(x_0,\delta)} f(x)$ и к функции f на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ применима теорема Ферма. Согласно теореме Ферма $f'(x_0) = 0$. ⌋

Замечания. 1. Теорема 25 даёт необходимое условие для точки локального экстремума. Если в некоторой точке x_0 производная $f'(x_0) = 0$, то точка x_0 не обязательно — точка локального экстремума. Например, для функции $f(x) = x^3$, $x \in R$ точка $x_0 = 0$ не есть точка локального экстремума, хотя $f'(0) = 0$.

2. Точки, в которых производная не существует, также могут быть точками локального экстремума. Так для функции $f(x) = |x|$, $x \in R$ точка $x_0 = 0$ есть точка строгого локального минимума, производная в этой точке не существует.

Определение 4. *Точки, в которых производная функции f равна 0, называются* ***критическими*** *или* ***стационарными*** *точками функции f.*

Замечание. 3. Таким образом, точки локального экстремума функции f лежат в объединении множества критических точек и множества точек, в которых производная не существует.

Определение 5. *Функция g* ***сохраняет знак левее точки*** *x_0, если либо $\exists\,\delta > 0 \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) : \quad g(x) > 0$ либо $\exists\,\delta > 0 \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) : \ g(x) < 0$.*

Определение того, что функция g ***сохраняет знак правее точки*** *x_0, аналогично.* Д. дост.

Теорема 26. *Предположим, что функция $f : \ A \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет одному из условий:*

1) (i) $\exists\,\delta > 0\ \forall\, x \in B(x_0, \delta)$ *существует* $f'(x)$;

(ii) *точка x_0 — критическая, то есть $f'(x_0) = 0$;*

(iii) *f' сохраняет знак левее и правее точки x_0;*

2) (i) $f \in C(A)$ *и* $\exists\,\delta > 0\ \forall\, x \in \check{B}(x_0, \delta)$ *существует* $f'(x)$;

(ii) *f' сохраняет знак левее и правее точки x_0.*

Если при переходе через точку x_0 производная f' меняет знак, то x_0 есть точка строгого локального экстремума. Если же при переходе через точку x_0 производная f' знака не меняет, то x_0 не есть точка локального экстремума.

⌈ Заметим, что выполнение условия 1) влечёт выполнение условия 2). Поэтому достаточно доказать теорему при условии 2).

I. Предположим, что для некоторого $\delta > 0\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) :$ $f'(x) > 0$; $\forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \ : \ f'(x) < 0$, то есть предположим, что производная f' меняет знак "+" на "$-$". Тогда функция f строго возрастает на $(x_0 - \delta, x_0]$ и строго убывает $[x_0, x_0 + \delta)$. Поэтому $\forall\, x \in (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) : \ f(x) < f(x_0)$ и, следовательно, x_0 есть точка строгого локального максимума.

В том случае, когда производная меняет знак "$-$" на "+", точка x_0 есть точка строгого локального минимума.

II. Предположим, что производная f' знака при переходе через точку x_0 не меняет. Пусть, например, $\exists\,\delta > 0 \quad \forall\, x \in (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) :$ $f'(x) > 0$. Тогда функция f строго возрастает на каждом из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$, и с учётом непрерывности функции f в точке x_0, строго возрастает на $B(x_0, \delta)$. Поэтому x_0 не есть точка локального экстремума. ⌋

Примеры. 1. Для функции $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in \boldsymbol{R}$ точки -1 и $+1$ критические, то есть нули производной $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, $x \in \boldsymbol{R}$. Поскольку

f' при переходе через точку -1 меняет знак с "+" на "−", то точка -1 есть точка локального максимума. А поскольку при переходе через точку 1 производная меняет знак с "−" на "+", то точка 1 локального минимума. Других точек локального экстремума у f нет, так как существующая на $\boldsymbol{R}$ производная f' не имеет иных корней, кроме -1 и 1.

2. Для функции $f(x) = x^2e^{-x}$, $x \in \boldsymbol{R}$ производная $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$ обращается в 0 для значений 0 и 2. Поскольку f' меняет знак с "−" на "+" при переходе через точку 0, то точка 0 есть точка строгого локального минимума. Производная f' меняет знак "+" на "−" при переходе через точку 2, следовательно, точка 2 есть точка строгого локального максимума.

Упражнение 124. Найти точки локального экстремума функции: a) $f(x) = x^3e^{-x}$, $x \in \boldsymbol{R}$; b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $x > 0$; c) $f(x) = x^x$, $x > 0$; d) $f(x) = |x|e^{-x^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 125*. Пусть $f(x) = x^4\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$. Доказать, что: a) 0 есть точка строгого локального минимума, b) производная f' не сохраняет знака ни левее, ни правее точки 0.

Д дост. ус-е.

Теорема 27. *Пусть функция f и точка $x_0 \in A$ удовлетворяют условиям: 1) $\exists\,\delta > 0\ \forall x \in B(x_0,\delta)$ существует $f'(x)$; 2) $f'(x_0) = 0$; 3) существует $f''(x_0)$ и $f''(x_0) \neq 0$.*

Тогда точка x_0 есть точка строгого локального максимума, если $f''(x_0) < 0$, и точка строгого локального минимума, если $f''(x_0) > 0$.

⌈ Рассмотрим для функции f и точки x_0 формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для $n = 2$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2),\quad x \to x_0,$$

откуда с учётом условий теоремы для $x \neq x_0$ имеем $f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^2\left(\dfrac{f''(x_0)}{2!} + \dfrac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}\right)$. Поскольку $\dfrac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} \to 0$ при $x \to x_0$, то $\exists\,\delta > 0\ \forall x \in (B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}) : \left|\dfrac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2}\right| < \dfrac{|f''(x_0)|}{2\cdot 2!}$.

Поскольку для любого $x \in (B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\})$ знак разности $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком $f''(x_0)$, то имеем утверждение теоремы 27. ⌋

Пример. 3. Для функции $f(x) = (x-1)e^{-x^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$ нулями производной $f'(x) = (1-2x^2+2x)e^{-x^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$ являются числа $\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}$ и $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$, в которых производная $f''(x) = -2x(1-2x^2+2x)e^{-x^2} + (-4x+2)e^{-x^2}$, $x \in R$ принимает значения $f''\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right) > 0$, $f''\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) < 0$. Поэтому точка $\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$ есть точка строгого локального минимума, а точка $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ — точка строгого локального максимума.

Здаг. у-е.

Теорема 28. *Пусть $f: A \to R$, $x_0 \in A$, $m \in N$, $m \geq 2$. Предположим, что выполнены следующие условия: 1) $\exists \delta > 0\ \forall x \in B(x_0, \delta) \subset A$ существует $f^{(m-1)}(x)$; 2) существует $f^{(m)}(x_0)$; 3) $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$, $f^{(m)}(x_0) \neq 0$.*

Тогда для $m = 2k$, $k \in N$ точка x_0 есть точка локального экстремума, а именно точка строгого локального максимума при $f^{(m)}(x_0) < 0$ и точка строгого локального минимума при $f^{(m)}(x_0) > 0$. Для значений $m = 2k+1$, $k \in N$ точка x_0 не является точкой локального экстремума.

⌈ Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции f и точки x_0 имеет такой вид $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + o((x-x_0)^m)$, $x \to x_0$, или, согласно условию 3), вид $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)$, $x \to x_0$, откуда при $x \neq x_0$ $f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^m \left(\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + \frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m}\right)$, $x \to x_0$. Согласно определению "о" для числа $\frac{1}{2m!}|f^{(m)}(x_0)| > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in (B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}) : \left|\frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m}\right| < \frac{1}{2m!}|f^{(m)}(x_0)|$. Заметим теперь, что для $x \in (B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\})$ величины $\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + \frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m}$, $\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$ имеют ненулевые значения одного знака. Учитывая формулу (1), можно утверждать, что знак разности $f(x) - f(x_0)$ для $x \in (B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\})$ совпадает со знаком произведения

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m. \tag{2}$$

Поскольку при $m = 2k$ разность $f(x) - f(x_0) > 0$, если $f^{(m)}(x_0) > 0$, и, следовательно, x_0 является точкой строгого локального минимума Разность $f(x) - f(x_0) < 0$, если $f^{(m)}(x_0) < 0$, и тогда x_0 является точкой строгого локального максимума. Если же $m = 2k+1$, то произведение (2) меняет знак при переходе через точку x_0 в $B(x_0,\delta')$ для любого $0 < \delta' < \delta$. Поэтому x_0 не является точкой локального экстремума. ⌋

Упражнение 126. Найти точки локального экстремума на $\boldsymbol{R}$ функции: a) $f(x) = x^4(1-x)^3$; b) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{9}{4(2x^2+1)}$; c) $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$.

4.5.5 Точки перегиба

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$ и $x_0 \in A$.

Определение 6. *Точка x_0 называется **точкой перегиба функции** f (точнее, точка $(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции f), если: 1) f непрерывна в точке x_0; 2) $\exists\, \delta > 0: \ B(x_0, \delta) \subset A$ и на каждом из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ функция f выпукла, причём направления выпуклости различны.*

Примеры. 1. Для функции $f(x) = x^3$, $x \in \boldsymbol{R}$ точка $x_0 = 0$ есть точка перегиба, поскольку $f''(x) = 6x < 0$ на $(-\infty, 0)$ и, следовательно, функция f выпукла вверх на этом интервале, и $f''(x) > 0$ на $(0, +\infty)$ и функция f выпукла вниз на $(0, +\infty)$.

2. Для функции $f(x) = \sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$ каждая точка множества $\pi\boldsymbol{Z}$ есть точка перегиба. Действительно, для точки вида $2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$ имеем $f''(x) = -\sin x > 0$, $x \in (2\pi k - \pi, 2\pi k)$; $f''(x) = -\sin x < 0$, $x \in (2\pi k, 2\pi k + \pi)$. Следовательно, при переходе через точку $2k\pi$ выпуклость вниз сменяется на выпуклость вверх. Аналогично проверяется, что при переходе через точку вида $(2k+1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$ выпуклость вверх сменяется на выпуклость вниз.

3. Для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \boldsymbol{R}$ точка 0 является точкой перегиба, поскольку $f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$, $x < 0$; $f''(x) < 0$, $x > 0$ и, следовательно, функция f выпукла вниз на $(-\infty, 0)$ и выпукла вверх на $(0, +\infty)$.

Упражнение 127. Пусть для функции $f: \ A \to \boldsymbol{R}$ и точки $x_0 \in A$ $\exists\, \delta > 0 \ \forall\, x \in B(x_0, \delta): $ существуют $f'(x)$, $f''(x)$, причём f'' сохраняет знак левее и правее точки x_0 Доказать что x_0 — точка перегиба f, тогда и только тогда, когда точка x_0 — точка локального экстремума f'.

Теорема 29. *Пусть функция $f: \ A \to \boldsymbol{R}$ и точка $x_0 \in A$ таковы, что: 1) $\exists\, \delta > 0 \ \forall\, x \in B(x_0, \delta) \subset A$ существует $f'(x)$; 2) x_0 — точка перегиба f. Если существует $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.*

⌈ Предположим, что при переходе через точку x_0 выпуклость вниз сменяется на выпуклость вверх, второй случай рассматривается аналогично. Согласно теореме 22 функция f' монотонно не убывает на

$(x_0-\delta, x_0)$ и монотонно не возрастает на $(x_0, x_0+\delta)$. Следовательно, $f'(x_0) = \max\limits_{x\in B(x_0,\delta)} f'(x)$ и в силу теоремы Ферма $f''(x_0) = 0$. ⌋

Замечания. 1. Теорема 29 даёт лишь необходимое условие для того, чтобы точка x_0 была точкой перегиба. Для функции $f(x) = x^4$, $x \in \boldsymbol{R}$ точка $x_0 = 0$ не является точкой перегиба, хотя $f''(0) = 0$.

2. Согласно теореме 29 точки перегиба функции f лежат в объединении множества точек, в которых f'' равна 0, и множества точек, в которых f'' не существует.

Теорема 30. *Предположим, что функция $f: A \to \boldsymbol{R}$ и точка $x_0 \in A$ удовлетворяют условиям: 1) $\exists\delta > 0$ $\forall x \in B(x_0,\delta)$ существует $f''(x)$; 2) $f''(x_0) = 0$; 3) f'' сохраняет знак левее и правее точки x_0.*

Точка x_0 есть точка перегиба функции f, если производная f'' меняет знак при переходе через точку x_0. Точка x_0 не является точкой перегиба, если производная f'' не меняет знак при переходе через точку x_0.

⌈ Следствие теоремы 25. ⌋

Упражнение 128. Найти точки перегиба функций: cos, tg, ctg, arcsin, arccos, $x+\sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$.

4.5.6 Асимптоты

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$, $a \in (\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ — предельная точка множества A.

Определение 7. *Прямая $y = kx + l$, $x \in \boldsymbol{R}$ называется* ***асимптотой*** *графика функции f при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx - l) = 0$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx - l) = 0\right)$.*

Прямая $x = a \in \boldsymbol{R}$ называется ***асимптотой*** *графика функции f, если выполняется хотя бы одно из соотношений: $\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x) = -\infty$.*

Примеры. 1. Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ прямые $x = 0$ и $y = 0$ являются асимптотами.

2. Для функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$ прямая $y = 0$ является асимптотой при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

3. Для функции $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, $x \neq 0$ прямая $y = x$ является асимптотой при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

Замечание. Согласно определению параметры k и l наклонной асимптоты $y = kx + l$ при $x \to +\infty$ определяются следующим образом $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $l = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$.

Упражнение 129. Найти асимптоты следующих функций: a) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{2x^2}$, $x \neq 0$; b) $f(x) = |x-1| + \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

4.5.7 Построение графика функции

Производная может быть использована при построении графика функции. При этом удобно выделить следующие этапы:

1) определение поведения функции при приближении к предельным точкам, определение асимптот;

2) определение интервалов монотонности, критических точек и точек локального экстремума;

3) определение интервалов выпуклости и точек перегиба.

Упражнение 130. Построить графики функций:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$, $x \in \boldsymbol{R}$; b) $f(x) = x^3 e^{-x}$, $x \in \boldsymbol{R}$;

c) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{1-x}$, $x \notin \{0, 1\}$; d) $f(x) = 2^{1/(1-x)}$, $x \neq 1$;

e) $f(x) = x + \sqrt{|1-x^2|}$, $x \in \boldsymbol{R}$; f) $f(x) = x2^{1/x}$, $x \neq 0$;

g) $f(x) = x \ln|x|$, $x \neq 0$; h) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

Упражнение 131. Для каждого $a \in \boldsymbol{R}$ определить число действительных корней уравнения: a) $ax = \ln x$; b) $x^3 + 3x^2 - ax + 5 = 0$; c) $x^3 \ln x - x + a = 0$; d) $1 + x + \dfrac{x^2}{2} = ae^x$.

4.5.8 Историческая справка

Тейлор Брук (1685 — 1731) — английский математик. В 1715 г. опубликовал общую формулу разложения функции в степенной ряд, которая носит его имя. Этот ряд был известен ранее ***Дж. Грегори*** (1638 - 1675) и И. Ньютону.

Пеано Джузеппе (1858 — 1932) - итальянский математик. Построил непрерывную кривую, заполняющую квадрат. Ему принадлежит общая теорема о существовании решения дифференциального уравнения, результаты по обоснованию геометрии. Дж. Пеано в 1889 г. предложил аксиоматическое построение множества натуральных чисел, чем было завершено построение теории действительных чисел, основанной на теории целых и рациональных чисел.

Маклорен Колин (1698 — 1746) — шотландский математик, ученик и последователь И. Ньютона. Получил частный случай ряда Тейлора, носящий его имя. Этот случай был известен И. Ньютону и Б. Тейлору ранее. Ему принадлежат новые известные результаты в математическом анализе и геометрии. В 1740 г. К. Маклорен, Д. Бернулли и Л. Эйлер получили премию Парижской АН за работы о приливах и отливах.

Маркиз *Гийом Франсуа де-Лопиталь* (1661 — 1704) — французский математик. Овладел дифференциальным исчислением с помощью Иоганна Бернулли. Лопиталь задумал написать книгу, которая бы позволила легче усвоить воззрения Лейбница по дифференциальному исчислению. В результате в 1696 г. появился первый и на долгое время единственный учебник по дифференциальному исчислению "Анализ бесконечно малых для изучения кривых", неоднократно переиздававшийся. В нём содержалось "правило Лопиталя", которое было сообщено ему Иоганном Бернулли.

Иенсен Иоганн Людвиг (1859 — 1925) — датский математик. Автор известных результатов в теории аналитических функций, геометрии и др.

Минковский Герман (1864 — 1909) — немецкий математик, автор работ по теории чисел, геометрии, топологии, теории относительности и др.

Гёльдер Отто Людвиг (1859 — 1937) — немецкий математик, автор работ по алгебре, математическому анализу, теории рядов, теории потенциала, теории чисел и др.

4.6 Дополнительные задачи к главам 1 — 4

1. Пусть $f: \ X \to X$ и для $n \in N$ $f^1(x) := f(x)$, $f^{n+1}(x) := f(f^n(x))$. Если $\exists m \in N \quad \forall x \in X \quad : \quad f^m(x) = x$, то f биекция Доказать это утверждение.

2. Является ли функция $f: \ N^2 \to N$, определяемая соотношением $N^2 \ni (m,n) \mapsto \min(m,n) \in N$, сюръекцией? Инъекцией? Определить $f(A)$ для $A = \{(2k,n) \mid k \in N, \ n \in N\}$ и $f^{-1}(\{k\})$ для $k \in N$.

3 Доказать, что функция $f: \ Z \to Z$, определяемая соотношением $f(n) = n + (-1)^n$, $n \in Z$ есть биекция.

4. Определить мощность следующих множеств:

a) $\{x \in N \mid \exists y \in R: \ 10\sin y = x\}$; b) $\{x \in R \mid \exists y \in N: \ y = \log_2 x\}$;

d) $\{x \in R \mid \exists n \in N \quad \exists \{a_1, \ldots, a_n\} \subset Z^n: \ x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0\}$.

*5**. Доказать, что следующие множества имеют мощность континуум: a) множество иррациональных чисел; b) объединение счётного семейства множеств мощности континуум; c) декартово произведение счётного семейства множеств мощности континуум; d) множество всех бесконечных последовательностей натуральных чисел; e) множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел; f) множество 2^{N}; g) множество всех функций из N в N; i) множество всех сходящихся последовательностей действительных чисел; j) $C([a,b])$.

6. Пусть A, $A \neq \varnothing$ — ограниченное подмножество R и J — пересечение всех отрезков, содержащих множество A, то есть $J = \bigcap\limits_{I:\, I=[a,b]\supset A} I$. Доказать, что $J = [\inf A, \sup A]$.

7. Пусть $f: X \times Y \to R$, где X и Y — некоторые непустые множества. Доказать, что $\inf\limits_{y\in Y} \sup\limits_{x\in X} f(x,y) \geq \sup\limits_{x\in X} \inf\limits_{y\in Y} f(x,y)$.

*8**. Пусть A, $A \neq \varnothing$ — произвольное подмножество R и $f: A \to R$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица с постоянной $L > 0$: $\forall \{x,y\} \subset A: |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Доказать существование продолжения f, удовлетворяющего условию Липшица на R с постоянной L.

Указание. Рассмотреть функцию $g(x) := \inf\limits_{y\in A}(f(y) + L|x-y|)$, $x \in R$.

9. Из двух последовательностей $\left\{\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \;\middle|\; n \geq 1\right\}$, $\left\{\dfrac{(\sqrt[n]{n!})^2}{n} \;\middle|\; n \geq 2\right\}$ первая строго убывает, а вторая строго возрастает. Доказать это утверждение.

10. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ сходится, а последовательность $\{b_n \mid n \geq 1\}$ ограничена и удовлетворяет условию $\forall n \geq 1 \;:\; b_{n+1} \geq b_n + a_{n+1} - a_n$. Доказать, что последовательность $\{b_n \mid n \geq 1\}$ сходится.

*11**. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 1\}$ сходится, а последовательность $\{b_n \mid n \geq 1\}$ ограничена и удовлетворяет условию

$$\forall n \geq 1 \;:\quad b_{n+2} - \frac{3}{2} b_{n+1} + \frac{1}{2} b_n \geq a_{n+2} - \frac{3}{2} a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n.$$

Доказать, что последовательность $\{b_n \mid n \geq 1\}$ сходится.

12. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\ln\ln n} \sum\limits_{j=2}^{n} \dfrac{a_j}{j \ln j}\right)$, если $a_n \to a$, $n \to \infty$.

Ответ: a.

13. Определить функцию $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{1 + j^n x^n}$, $x \in (0,1]$, и построить её график.

Ответ: $\left[\frac{1}{x}\right]-\frac{1}{2}1_{\{\frac{1}{j}\ \mid\ j\geq 1\}}(x),\quad x\in(0,1],\quad 1_A(x):=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\notin A\end{cases}.$

14. Предположим, что для каждого $n\in N$ выполняются условия

$$a_n>0,\ s_n:=a_1+a_2+\ldots+a_n;\quad a_{n+1}\leq\frac{(s_n-1)a_n+a_{n-1}}{s_{n+1}},\ n\geq 2.$$

Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Ответ: 0.

15. Для числа $x\geq 0$ вычислить сумму $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2\left\{\frac{[x2^n]}{2}\right\}+1\right)2^{-n-1}$.

Ответ: $\frac{1}{2}(\{x\}+1)$.

16. Пусть $\forall n\in N$: $a_n\in(0,1)$; $a_n\to 0$, $n\to\infty$. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+a_{n-1}^2+a_{n-3}^3+\ldots+a_1^n)$.

Ответ: 0.

17. Определить действительные числа a,b,c так, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n(an+\sqrt{2+bn+cn^2})\right)$.

18. Положим для $x>0$: $a_1:=\sqrt{x}$, $a_2:=\sqrt{x+a_1}$, $\ldots$, $a_{n+1}:=\sqrt{x+a_n}$, $\ldots$. Доказать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=:f(x)$ и определить функцию f.

Ответ: $f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x}$, $x>0$.

19. Функция $f:\ R\to R$ имеет производную в точке a. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{k}{n^2}\right)-nf(a)\right)$.

Ответ: $\frac{1}{2}f'(a)$.

20.* Доказать, что не существует непрерывной биекции R на отрезок $[-1,1]$.

21.* Доказать, что не существует непрерывной биекции R на окружность в плоскости.

22.* Доказать, что не существует функции $f\in C(R)$, которая принимает каждое своё значение дважды.

23. Привести пример функции из $C(R)$, которая принимает каждое своё значение трижды.

24. Доказать, что многочлен чётной степени со старшим коэффициентом 1, как функция из R в R, не есть инъекция и не есть сюръекция.

25. Построить график функции $f(x):=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}\sin\frac{\pi x}{2}+x^2}{x^{2n}+1}$, $x\in R$. Верно ли, что $f\in C(R)$? Является ли f дифференцируемой?

26. Доказать, что для $n \in N$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x + e^{2x} + \ldots + e^{nx}}{n}\right)^{1/x} = e^{n(n+1)/2}$.

27.* Пусть $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$, $n \geq 1$. Доказать, что $nx_n \to 2$, $n \to \infty$.

Указание. Сначала проверить, что $x_n > 0$, $n \geq 1$, и что $x_n \to 0$, $n \to \infty$. Далее

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - \ln(1+x_n)}{x_n\ln(1+x_n)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{x_{k+1}} - \dfrac{1}{x_k}\right)\right) = \dfrac{1}{2}$, откуда $\dfrac{1}{nx_n} - \dfrac{1}{nx_1} \to \dfrac{1}{2}$, $n \to \infty$. Следовательно, $nx_n \to 2$, $n \to \infty$.

Другой подход см. в книге *Г. Полиа, Г. Сеге* Задачи и теоремы из анализа. В 2-х т. Москва. Наука. 1978. Т. 1. 392 с.

28.* Пусть $x_1 > 0$ и $x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n$, $n \geq 1$. Доказать что $x_n\sqrt{n} \to \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $n \to \infty$.

Указание. Аналогично решению задачи 27 вычислить следующий предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2}\right)$.

29. Пусть $n \in N$ и $\{a_1, \ldots, a_n;\ x_1, \ldots, x_n\} \subset (0, +\infty)$. Вычислить предел $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k^p\right)^{1/p}$.

Ответ: $\max(x_1, \ldots, x_n)$.

30.* Пусть $x = 0, x_1x_2\ldots x_n\ldots$ — запись числа $x \in [0,1]$ в системе счисления с осноаанием 3, а f — функция $[0,1] \ni x \mapsto f(x) = 0, y_1y_2\ldots y_n\ldots$, где $f(x)$ записано в системе счисления с основанием 2, причём $y_1 = 1 \iff x_1 = 1$; $y_{n+1} = y_n \iff x_{n+1} = x_n$, $n > 1$. Доказать, что $f \in C([0,1])$, и что f не является дифференцируемой в каждой точке отрезка $x \in [0,1]$.

31. Функции f и g равномерно непрерывны на множестве A. Являются ли равномерно непрерывными на A функции: a) cf, $c \in R$; b) $f+g$; c) fg в случае $A = [a,b]$? $A = [a, +\infty)$?

Ответ: a) и b) "да" для $[a,b]$ и для $[a,+\infty)$.

32. Пусть P — многочлен степени $n \geq 2$ с различными действительными корнями $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{P'(x_k)}$.

Ответ: 0.

33. Пусть $f(x) = x^2 - 2x$, $x \leq 0$ и $f(x) = ax^2 - 2x$, $x > 0$. Определить все значения $a \in R$, при которых функция f имеет обратную функцию g. Найти g.

Ответ: $a \le 0$.

34. Доказать, что функция $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$, $x > -1$, имеет обратную g. Найти g'.

35. Определить главную часть функции:

a) $f(x) = 1 - \cos(1 - \cos x)$, $x \in \boldsymbol{R}$; b) $f(x) = x\sin(\sin x) - \sin^2 x$, $x \in \boldsymbol{R}$, при $x \to 0$ относительно шкалы $\{x^n\}$.

Ответ: a) $\dfrac{x^4}{8}$; b) $\dfrac{x^6}{18}$.

36. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+} x^{x^{x^x}}$.

Ответ: 1.

37. Функция $f: A \to \boldsymbol{R}$ называется ***алгебраической на множестве*** A, если для некоторых $n \in \boldsymbol{N}$ и многочленов $P_0, P_1, \ldots, P_n$, $P_n \not\equiv 0$, справедливо равенство $P_n(x)(f(x))^n + P_{n-1}(x)(f(x))^{n-1} + \ldots + P_0(x) = 0$, $x \in A$. Доказать, что функции $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^x$, $x \in \boldsymbol{R}$, не являются алгебраическими на множестве вида $[a, +\infty)$, $a \in \boldsymbol{R}$.

38. Пусть $f: [0,1] \to [0,1]$, $f \in C([0,1])$. Доказать, что $\exists\, x \in [0,1]:$ $f(x) = x$.

39. Для функции $f: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ существует f' на $[a,b]$, причём $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) = f'_+(a) > 0$, $f'(b) = f'_-(b) > 0$. Доказать, что $\exists\, c \in (a,b):$ $f(c) = 0$, $f'(c) \le 0$.

40. Для функции $f: (a,b) \to \boldsymbol{R}$ существует f'' на (a,b) и для трёх различных точек x_1, x_2, x_3 из (a,b) $f(x_k) = 0$, $k = 1,2,3$. Доказать, что $\exists\, c \in (a,b)$: $f''(c) = 0$.

41. Пусть функции $f: (a,b) \to (-1, +\infty)$, $g: (a,b) \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяют условиям: 1) $\forall\, x \in (a,b):$ $f(x) \ne 0$; 2) существует $\lim\limits_{x\to b-} (f(x)g(x)) = L \in \boldsymbol{R}$, $L \ne 0$; 3) существует $\lim\limits_{x\to b-} (1 + f(x))^{g(x)} = e^L$. Доказать, что $f(x) \to 0$, $x \to b-$.

42. Пусть $f \in C([a,b])$ и $f(a) = f(b)$. Доказать существование отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ такого, что $\beta - \alpha = \dfrac{1}{2}(b-a)$, $f(\alpha) = f(\beta)$.

43. Пусть $\{f, g\} \subset C^2([0,1])$, причём $\forall\, x \in (0,1)$; $g'(x) \ne 0$ и $f'(0)g''(0) \ne f''(0)g'(0)$. Пусть $\theta(x)$ для $x \in (0,1]$ какое-либо из чисел в теореме Коши $\dfrac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \dfrac{f'(\theta(x))}{g'(\theta(x))}$. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\theta(x)}{x}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

44. Функция $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ строго выпукла и $\exists\, x_* \in \boldsymbol{R}:$ $f(x_*) = \min\limits_{\boldsymbol{R}} f$. Доказать, что $f(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$.

Указание. Показать, что f выпукла вниз, затем сравнить величины $\frac{f(x_*+1)-f(x_*)}{1}$, $\frac{f(x)-f(x_*)}{x-x_*}$ для $x > x_*+1$.

45. Доказать, что для любых $n \in N$, $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset (0,\pi/2)$ справедливо неравенство $\sqrt[n]{\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n} \le \sin \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

Указание. Рассмотреть функцию $f(x) = \ln \sin x$, $x \in (0,\pi/2)$.

46. Для каждого $a \in R$ определить число корней уравнения $x^3+3x^2-ax+5=0$.

47. Доказать, что функция $f: R \to R$, $f(x) = 3x^5+7x^3+2x+1$ есть биекция.

48. Является ли функция $f: R \to R$, $f(x) = x^3-3x^2+2$ инъекцией? Сюръекцией?

49. Функция $f \in C([-1,1])$ и чётна (нечётна). Доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует многочлен P, включающий только чётные (нечётные) степени x и такой, что $\max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)-P(x)| < \varepsilon$.

50. Функция $f: (0,+\infty) \to R$ такова, что существует f' на $(0,+\infty)$ и $f(x)+f'(x) \to 0$, $x \to +\infty$. Доказать, что $f(x) \to 0$, $x \to +\infty$.

51. Функция $f \in C^2([0,+\infty))$ и для некоторого $k \in N$ $x^k f(x) \to 0$, $x^k f''(x) \to 0$, $x \to +\infty$. Доказать, что $x^k f'(x) \to 0$, $x \to +\infty$.

52. Функция $f: [a,b] \to [a,b]$ удовлетворяет условию $\forall \{x',x''\} \subset [a,b]: |f(x')-f(x'')| \le |x'-x''|$. Для $x_1 \in [a,b]$ положим $x_{n+1} = \frac{x_n+f(x_n)}{2}$, $n \ge 1$. Доказать, что $x_n \to z \in [a,b], n \to \infty$, и что справедливо равенство $f(z) = z$.

Указание. Показать, что для $z = f(z)$ справедливы утверждения: 1) $|x_{n+1}-z| \le |x_n-z|$, $n \ge 1$; 2) $x_n < z \implies x_{n+1} < z$, $n \ge 1$. Обратить внимание на то, что множество $\{z \mid f(z) = z\}$ есть отрезок или точка.

53.* Функция $f: (a,b) \to R$ имеет f' на (a,b) и удовлетворяет условиям $f(x) \to -\infty$, $x \to a+$; $f(x) \to +\infty$, $x \to b-$; $\forall x \in (a,b): f'(x)-f^2(x) \le 1$. Доказать, что $b-a \ge \pi$.

54.* Функция $f: [a,b] \to R$ удовлетворяет условию $\forall x \in [a,b]\ \exists \delta > 0\ \exists L \in R\ \forall \{x',x''\} \subset [a,b] \cap B(x,\delta): |f(x')-f(x'')| \le L|x'-x''|$. Доказать, что f удовлетворяет условию Липшица на $[a,b]$.

55.* Функция $f: R \to R$ имеет f'' на R и ограничена на R. Доказать, что $\exists \theta \in R: f''(\theta) = 0$.

56. Функция $f: R \to R$ выпукла вниз на R, дифференцируема в точке x_* и $f'(x_*) = 0$. Доказать, что функция f принимает наименьшее на R значение в точке x_*.

Глава 5

Примитивная и неопределённый интеграл

5.1 Определения и элементарные свойства

5.1.1 Определение и свойства примитивной

Пусть $f: A \to \boldsymbol{R}$ — функция, имеющая для каждого $x \in A$ производную $f'(x)$. При этом операция дифференцирования ставит в соответствие функции f новую функцию $f': A \to \boldsymbol{R}$. Физическая интерпретация этой операции — определение скорости движения по функции, задающей пройденное расстояние, как функция времени. С точки зрения приложений не менее естественной является обратная операция — определение пройденного пути по известной скорости движения, как функции времени. Формально последняя операция есть операция определения функции по ее производной.

Далее в настоящей главе буква J обозначает одно из следующих подмножеств $\boldsymbol{R}$: $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $(-\infty,a]$, $(-\infty,a)$, $[b,+\infty)$, $(b,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)=\boldsymbol{R}$, где $a<b$.

Кроме того, для функции $\varphi: [a,b] \to \boldsymbol{R}$ положим $\varphi'(a) := \varphi'_+(a)$, $\varphi'(b) := \varphi'_-(b)$.

*Определение 1. Для функции $f: J \to \boldsymbol{R}$ функция $F: J \to \boldsymbol{R}$ называется **примитивной или первообразной** функции f на J, если $\forall x \in J$ существует $F'(x)$ и $F'(x)=f(x)$.*

Замечание 1. Поскольку функция, имеющая производную в некоторой точке, непрерывна в этой точке, то ***примитивная функции*** f на J ***непрерывна на*** J.

Примеры. 1. Для функции $f(x) = x$, $x \in \boldsymbol{R}$ примитивной на $\boldsymbol{R}$ является функция $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$, поскольку $\forall x \in \boldsymbol{R}:\ \left(\dfrac{1}{2}x^2\right)' = x$. Функция $G(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$, $x \in \boldsymbol{R}$ также является примитивной функции f на $\boldsymbol{R}$, так как $\forall x \in \boldsymbol{R}:\ \left(\dfrac{1}{2}x^2 + 1\right)' = x$.

2. Для функции $f(x) = e^x$, $x \in \boldsymbol{R}$ функция $F(x) = e^x$, $x \in \boldsymbol{R}$ есть примитивная функции f на $\boldsymbol{R}$, так как $\forall x \in \boldsymbol{R}:\ (e^x)' = e^x$.

3. Для функции $f(x) = 0,\ x < 0,\ f(x) = x,\ x \geq 0$ примитивной на $\boldsymbol{R}$ является функция $F(x) = 0,\ x > 0,\ F(x) = \dfrac{1}{2}x^2,\ x \geq 0$, поскольку $F'(x) = 0,\ \ x < 0;\quad F'(x) = \left(\dfrac{1}{2}x^2\right)' = x,\ \ x > 0$ и кроме того, $F'_-(0) = 0,\ \ F'_+(0) = 0$, а потому и $F'(0) = 0$.

Всякая ли функция имеет примитивную? Следующий пример показывает, что ответ на этот вопрос отрицателен.

Пример. 4. На $J = (-1, 1)$ функция $f(x) = -1,\ x < 0,\ f(0) = 0,\ f(x) = 1,\ x > 0$ не имеет примитивной.

⌈ Предположим, что это утверждение не верно. Тогда существует функция $F:\ (-1,1) \to \boldsymbol{R}$ такая, что $F'(x) = -1, x < 0,\ F'(0) = 0,\ F'(x) = 1,\ x > 0$. К функции F на отрезке $[0, x]$ с $x > 0$ применим теорему Лагранжа, получим $\exists\,\theta \in (0, x):\ \ F(x) - F(0) = F'(\theta)x = f(\theta)x = x$. Отсюда следует, что $F'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = 1$. Однако, по предположению $F'_+(0) = F'(0) = 0$. ⌋

Замечание 2. Справедливо более общее утверждение — ***теорема Дарбу***: если для каждого $x \in [a, b]$ существует $f'(x)$, то функция f' принимает в качестве значения каждое промежуточное число, лежащее между $f'(a)$ и $f'(b)$. Это утверждение здесь доказываться не будет.

Пример 4 показывает, что простые функции могут не иметь примитивной. Поэтому нужно иметь условия, гарантирующие существование примитивной, эти условия будут приведены в главе 6.

Для того, чтобы рассматривать и такие функции, как в примере 4, иногда используется следующее определение, более общее, чем определение 1.

Определение 2. *Пусть $f:J \to \boldsymbol{R}$. Функция $F:J \to \boldsymbol{R}$ называется* ***примитивной функции*** *f на J, если: 1) $F \in C(J)$; 2) $\forall x \in (J \setminus A)$ существует $F'(x)$ и $F'(x) = f(x)$; 3) множество A не более чем счетно, причём $\forall n \in \boldsymbol{N}:\ |A \cap [-n, n]| < +\infty$.*

Далее, если не оговорено специально, ***используется определение 1.***

Если примитивная для функции f ***существует, то она определяется не единственным образом.*** Действительно, если F — примитивная функции f на J, то для любого числа $C \in \boldsymbol{R}$ функция $F+C$ также есть примитивная для функции f на J, поскольку $\forall\, x \in J: \ (F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x)$. Кроме того, если функции F и G — примитивные функции f на J, то $\forall\, x \in J: \ (F(x)-G(x))' = = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Отсюда по следствию из теоремы Лагранжа $\exists\, C \in \boldsymbol{R}\, \forall\, x \in J: \ F(x) - G(x) = C \iff F(x) = G(x) + C$.

Таким образом, ***для функции, имеющей примитивную, набор всех возможных её примитивных получается из какой-либо одной из них с помощью всевозможных её сдвигов вдоль оси ординат.*** Одну из примитивных F можно выделить, задав её значение $F(x_0)$ в какой-нибудь точке $x_0 \in J$.

Определение 3. Неопределённым интегралом от функции f на J называется выражение $F(x)+C$, $x \in J$, в котором F — примитивная функции f на J, а C — символ, обозначающий произвольную постоянную.

Неопределенный интеграл от функции f по J обозначается следующим символом

$$\int f(x)\, dx, \quad x \in J.$$

Таким образом, неопределенный интеграл от функции f по J представляет собой ***общий вид функции с производной*** f на J.

Процедура определения примитивной или неопределенного интеграла для функции f называется ***интегрированием*** функции f.

Упражнение 1. Найти примитивные на $\boldsymbol{R}$ для функций: a) $f(x) = |x|$; b) $f(x) = \max(1, x^2)$; c) $f(x) = |\sin x|$; d) $F(x) = \sin x + |\sin x|$.

Упражнение 2. Функция f имеет примитивную на $\boldsymbol{R}$. Доказать, что:
a) для чётной на $\boldsymbol{R}$ функции f существует нечётная примитивная;

b) для нечётной на $\boldsymbol{R}$ функции f существует чётная примитивная;

c) для периодической с периодом T функции f существует периодическая с периодом T примитивная.

Упражнение 3. Функция $f: \ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ имеет примитивную F на $\boldsymbol{R}$ и $\forall\, x \in \boldsymbol{R}: \ F(x) = f(x)$. Найти функцию f.

Указание. Поскольку $\forall\, x \in \boldsymbol{R}: F(x) = F'(x)$, то после умножения на e^x имеем $\forall\, x \in \boldsymbol{R}: F(x)e^{-x} - F'(x)e^{-x} = 0$, то есть $\forall\, x \in \boldsymbol{R}: (F(x)e^{-x})' = 0$, откуда согласно следствию из теоремы Лагранжа $\exists\, C \in$

R $\forall x \in R:$ $F(x)e^{-x} = C$. Таким образом, $F(x) = Ce^x$, $x \in R$ и $f(x) = Ce^x$, $x \in R$.

Упражнение 4. Функция $f: R \to R$ имеет примитивную F на R. Найти f, если: a) $F(x) = \frac{1}{2}f(x)$; b) $F(x) = f(x)+1$; c) $2xF(x) = f(x)$; d) $F(x) = f(x) + \cos x$.

Упражнение 5. Найти ошибку в следующем рассуждении. Поскольку $\forall x \in R:$ $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x$, $(\cos^2 x)' = 2\cos x(-\sin x)$, то на R имеем $\int 2\sin x \cos x\, dx = \sin^2 x + C$; $\int 2\sin x \cos x\, dx = -\cos^2 x + C$. Следовательно, $\sin^2 x = -\cos^2 x$, $x \in R$, откуда $1 = 0$!

5.1.2 Свойства неопределённого интеграла

Следующие утверждения являются непосредственными следствиями определений 1 и.3 при условии существования примитивных.

1. $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$, $x \in J$;
2. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$, $x \in J$;
3. $\forall a \in R, a \neq 0$: $\int (af(x))\,dx = a\int f(x)\,dx$, $x \in J$;
4. $\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$, $x \in J$;
5. Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $x \in J$, и $\{a,b\} \subset R, a \neq 0$, тогда $\int f(at+b)\,dt = \frac{1}{a}F(at+b) + C$, $t \in \tilde{J}$, где $\tilde{J} := \{t \mid (at+b) \in J\}$.

Упражнение 6. Найти ошибку в следующем рассуждении $\int \frac{dx}{x-1}$ $= \ln|x-1| + C = \ln|1-x| + C = \int \frac{dx}{1-x} = -\int \frac{dx}{x-1}$, следовательно, $\int \frac{dx}{x-1} = C$!

Упражнение 7. Для функции $f:$ $J \to (0. +\infty)$ существует производная f' на J. Найти $\int \frac{f(x)+f'(x)}{f(x)}\,dx$, $x \in J$.

5.1.3 Таблица основных интегралов

На первый взгляд с фактическим вычислением интеграла дело обстоит просто. Именно, из определений 1 и 3 имеем утверждение

$$F'(x) = f(x),\ x \in J \iff \int f(x)\,dx = F(x) + C,\ x \in J. \quad (1)$$

С помощью этого утверждения и набора основных производных из гл. 4 получаем следующие важные формулы.

1. $\forall\,\alpha \in (\boldsymbol{R}\setminus\{-1\}):\quad \int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\quad x\in(0,+\infty).$

$\forall\, n\in(\boldsymbol{N}\cup\{0\}): \int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\quad x\in\boldsymbol{R}.$

$\forall\, n \in (\boldsymbol{Z}\setminus\{-1\}):\ \int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ на каждом из интервалов $(-\infty,0),\ (0,+\infty)$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ на каждом из интервалов $(-\infty,0),\ (0,+\infty)$.

3. $\forall\, a>0,\ a\ne 1:\ \int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\quad x\in\boldsymbol{R}$. В частности при $a=e$ получаем $\int e^x dx = e^x + C,\quad x\in\boldsymbol{R}$.

4. $\int \cos x\,dx = \sin x + C,\quad x\in\boldsymbol{R}.$ 5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\quad x\in\boldsymbol{R}.$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, на каждом из следующих интервалов $(-\pi/2+n\pi, \pi/2+n\pi),\ n\in\boldsymbol{Z}$.

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, на каждом из интервалов $(n\pi, n\pi+\pi), n\in\boldsymbol{Z}$.

8. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,\quad x\in\boldsymbol{R}.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,\quad x\in(-1,1).$

Утверждение (1) позволяет продолжать эту таблицу неограниченно. Однако, положение существенно меняется, если для заданной функции f требуется найти примитивную на J. Можно вычислить производные большого числа функций и не встретить функции F, для которой $F'(x) = f(x),\quad x\in J$. Более того, такой поиск может оказаться напрасным. Приведем без доказательства следующий известный факт, напомнив сначала определение элементарных функций. ***Элементарными функциями*** являются: многочлены, рациональные функции, степенная, показательная и логарифмическая функции, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, их суммы, произведения и частные, а также всевозможные суперпозиции этих функций в конечном числе. Согласно цепному правилу производные элементарных функций также являются элементарными функциями. Упомянутый выше факт состоит в том, что примитивные элементарных функций могут не быть элементарными функциями. Например, не являются элементарными функциями примитивные следующих простых функций $f_1(x) = e^{x^2},\quad f_2(x) = \sin x^2,\ f_3(x) = \cos x^2,\ x\in\boldsymbol{R};\quad f_4(x) = \dfrac{e^x}{x},\ f_5(x) = \dfrac{\sin x}{x},\ x>0.$

Доказательство существования примитивных этих функций будет получено в следующей главе.

В следующих разделах настоящей главы приводятся некоторые наиболее общеупотребительные приёмы, которые позволяют эффективно находить в явном виде примитивные функций из некоторых определённых классов элементарных функций.

Упражнение 8. Найти $\int P(x)\,dx$, $x \in \boldsymbol{R}$ для многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $x \in \boldsymbol{R}$; $n \in \boldsymbol{N}$, $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset \boldsymbol{R}$.

Упражнение 9. Найти интегралы:

a) $\int \sin^2 x\,dx$, $x \in \boldsymbol{R}$; b) $\int \cos^2 x\,dx$, $x \in \boldsymbol{R}$;

c) $\int \sin ax \sin bx\,dx$, $x \in \boldsymbol{R}$; d) $\int \sin ax \cos bx\,dx$, $x \in \boldsymbol{R}$; где $\{a, b\} \subset \boldsymbol{R}$;

e) $\int \sin^3 x\,dx$, $x \in \boldsymbol{R}$; f) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$, $x \in (0, \pi/2)$.

Упражнение 10. Для $n \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\})$ пусть $(x)_+^n := \begin{cases} x^n, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.

Доказать, что $\int (ax+b)_+^n dx = \dfrac{(ax+b)_+^{n+1}}{a(n+1)} + C$, $x \in \boldsymbol{R}$, где $a > 0$, $b \in \boldsymbol{R}$.

5.1.4 Интегрирование с помощью подстановки

Теорема 1. *Пусть функции $f : J_1 \to \boldsymbol{R}$, $f \in C(J_1)$, $g : J \to J_1$, $g \in C^1(J)$ и F — примитивная функции f, то есть $\int f(t)\,dt = F(t) + C$, $t \in J_1$. Тогда $\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$, $x \in J$; $C \in \boldsymbol{R}$.*

⌈ Действительно, согласно цепному правилу

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x), \quad x \in J. \qquad \rfloor$$

Замечание. При практическом вычислении интеграла удобно использовать следующую формализованную запись $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \left| \begin{array}{c} g(x) = t \\ g'(x)\,dx = dt \end{array} \right| = \int f(t)\,dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$. При этом говорят, что переход от переменной x к переменной t осуществляется с помощью *подстановки или замены переменной* $g(x) = t$.

Примеры. 1. Вычислить $\int 2xe^{x^2} dx$, $x \in \boldsymbol{R}$.

⌈ Согласно теореме 1 имеем

$$\int 2xe^{x^2} dx = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{array} \right| = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{x^2} + C, \quad x \in \boldsymbol{R}. \quad \rfloor$$

2. Вычислить интеграл $\int \frac{f(x)f'(x)}{1+f(x)}\,dx$, где f — функция, имеющая производную f' и такая, что $1+f>0$ на J.

⌈ Согласно теореме 1 имеем

$$\int \frac{f(x)f'(x)}{1+f(x)}\,dx = \left| \begin{array}{c} f(x)=t \\ f'(x)\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{1+t}\,dt = \int \frac{t-1+1}{1+t}\,dx =$$

$$= \int dt - \int \frac{dt}{1+t} = t - \ln(1+t) + C = f(x) - \ln(1+f(x)) + C, \quad x \in J. \rfloor$$

Теорема 2. *Пусть функции* $f: J \to \mathbf{R}$, $f \in C(J)$; $\varphi: J_0 \to J$, $\varphi \in C^1(J_0)$, *причём для* φ *существует обратная функция* φ^{-1}. *Предположим также, что* G — *примитивная для функции* $g(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t \in J_0$. *Тогда*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = G(t) + C = G(\varphi^{-1}(x)) + C, x \in J;\ C \in \mathbf{R}.$$

⌈ Действительно, пусть F — примитивная для функции f на J. Тогда согласно цепному правилу $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, следовательно, с некоторым числом C имеем $G(t) = F(\varphi(t)) + C$, $t \in J_0$ или $G(\varphi^{-1}(x)) = F(x) + C$, $x \in J$ и $\int f(x) = G(\varphi^{-1}(x)) + C$. ⌋

Примеры. *3.* Вычислить интеграл $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $x \in [-1,1]$.

⌈По теореме 2 имеем $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{array} \right| = \int \cos^2 t\,dt =$

$$= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C. \quad \rfloor$$

4. Вычислить интеграл $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$, $x \in \mathbf{R}$.

⌈ Введем функции $\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbf{R}$, для которых для $x \in \mathbf{R}$ справедливы равенства $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$, $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$. По теореме 2 имеем

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = \operatorname{sh} t \\ dx = \operatorname{ch} t\,du \end{array} \right| = \int \operatorname{ch}^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int (e^{2t} + 2 + e^{-2t})\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})) + C$$

для $x \in \mathbf{R}$ поскольку $\operatorname{sh} 2u = 2\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u = 2\operatorname{sh} u\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = 2x\sqrt{1+x^2}$, $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, последнее следует из уравнения для величины e^u $\frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = x$. ⌋

Упражнение 11. Найти интегралы:

a) $\int u\cos u^2\,du,\quad u\in R$;

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x},\quad x\in(0,\pi)$;

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x},\quad x\in(-\pi/2,\pi/2)$;

d) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},\quad x\in R$;

e) $\displaystyle\int\frac{e^{1/x}dx}{x^2},\quad x>0$;

f) $\displaystyle\int\frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt[3]{1+x+x^2}},\quad x\in R$;

g) $\int\sqrt{1-3x}\,dx,\quad x<\dfrac{1}{3}$;

h) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx,\quad x\in(0,\pi/2)$;

i) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x},\quad x>0$;

j) $\int\sin^5 x\cos^3 x\,dx,\quad x\in R$;

k) $\displaystyle\int\frac{(x+2)^2}{x^7}\,dx,\quad x>0$;

l) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)^7},\quad x>-1$;

m) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{1+x^3},\quad x\in R$;

n) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x+1},\quad x\in R$.

5.1.5 Интегрирование по частям

Теорема 3. *Пусть функции $u,v:\ J\to R$ таковы, что для каждого $x\in J$ существуют $u'(x)$ и $v'(x)$. Предположим, что функция uv' имеет примитивную на J. Тогда функция $u'v$ также имеет примитивную на J и справедливо равенство $\int u'(x)v(x)\,dx=u(x)v(x)-\int u(x)v'(x)\,dx,\quad x\in J$.*

⌈ При предположениях теоремы 3 функция uv является примитивной функции $u'v+uv'$ на J, следовательно $\int(u'(x)v(x)+u(x)v'(x))\,dx=$ $=u(x)v(x)+C,\ x\in J$. Добавляя на основании свойств 3 и 4 п. 5.1.2 к обеим частям последнего равенства интеграл $\int(-u(x)v'(x))\,dx=$ $-\int u(x)v'(x)\,dx$, получим нужную формулу. ⌋

Примеры. *1.* Вычислить интеграл $\int xe^x dx,\quad x\in R$.

⌈ По теореме 3 имеем $\int xe^x\,dx=\begin{vmatrix} v(x)=x, & v'(x)=1\\ u'(x)=e^x, & u(x)=e^x\end{vmatrix}=xe^x-$ $-\int e^x dx=xe^x-e^x+C,\ x\in R$. ⌋

2. Вычислить интеграл $\int\ln x\,dx,\quad x>0$.

⌈ По теореме 3 для $x>0$ имеем $\int\ln x\,dx=\begin{vmatrix} v(x)=\ln x, & v'(x)=\dfrac{1}{x}\\ u'(x)=1, & u(x)=x\end{vmatrix}$ $=x\ln x-\int x\cdot\dfrac{1}{x}\,dx=x\ln x-x+C$. ⌋

Упражнение 12. Вычислить интегралы:

a) $\int x\sin x\,dx, \quad x \in \boldsymbol{R}$; b) $\int x^2\sin x\,dx, \quad x \in \boldsymbol{R}$;

c) $\int (\ln x)^2\,dx, \quad x > 0$; d) $\int \ln(x^2+x+1)\,dx, \quad x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 13. Найти ошибку в следующем рассуждении. На основе теоремы 3 $\int \frac{dx}{x} = \left| \begin{matrix} v(x) = \frac{1}{x}, & v'(x) = -\frac{1}{x^2} \\ u'(x) = 1, & u(x) = x \end{matrix} \right| = x\cdot\frac{1}{x} - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = 1 + \int\frac{dx}{x}$. Следовательно, $0 = 1$.

5.2 Интегрирование функций из некоторых классов функций

5.2.1 Рациональные функции

Рациональной функцией называется отношение двух многочленов. Эта функция определена на всей оси, исключая нули знаменателя. Рациональную функцию $\frac{P}{Q}$, где P и Q — многочлены, всегда можно представить с помощью деления в виде $\frac{P}{Q} = S + \frac{P_1}{Q}$, где S и P_1 — многочлены, причём степень P_1 меньше степени Q. Поэтому далее рассматриваются только рациональные функции, у которых степень числителя P меньше степени знаменателя Q, такую рациональную функцию называют также ***правильной*** дробью.

Непосредственным следствием основной теоремы алгебры является следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad x \in \boldsymbol{R}$, *— многочлен с действительными коэффициентами* a_0, $a_1, \ldots, a_n$, *причём* $a_0 \neq 0$. *Существует единственный с точностью до перестановки набор комплексных чисел* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *такой, что*

$$\forall x \in \boldsymbol{R} \; : \quad Q(x) = a_0(x - z_1)(x - z_2,)\ldots(x - z_n). \tag{1}$$

Преобразуем разложение (1), учтя кратность корней и то, что каждый комплексный корень $z = \alpha + i\beta$, $\{\alpha, \beta\} \subset \boldsymbol{R}$, $\beta \neq 0$ входит в произведение (1) вместе с ему сопряжённым $\overline{z} = \alpha - i\beta$. Пара комплексно сопряженных корней z и $\overline{z}$ приводит к множителю $(x - z)(x - \overline{z}) = (x-\alpha)^2 + \beta^2 = x^2 + px + q$, где $p = -2\alpha \in \boldsymbol{R}$, $q = \alpha^2 + \beta^2 \in \boldsymbol{R}$, $p^2 - 4q = -4\beta^2 < 0$. Поэтому из представления (1) имеем

$$Q(x) = a_0 \prod_{\nu=1}^{r} (x - x_\nu)^{u_\nu} \prod_{\mu=1}^{s} (x^2 + p_\mu x + q_\mu)^{v_\mu}, \ x \in \boldsymbol{R}, \tag{2}$$

где $\{a_0; x_1, x_2, \dots, x_r; p_1, q_1, \dots, p_s, q_s\} \subset \boldsymbol{R}$; $p_\mu^2 - 4q_\mu < 0$, $\mu \in \{1, 2, \dots, s\}$; $\{u_1, \dots, u_r;\ v_1, \dots, v_s\} \subset \boldsymbol{N}$. При этом, если $r = 0$ или $s = 0$, то в (2) отсутствует второй или третий соответственно множитель.

Обратим внимание на то, что в отличие от представления (1), *в представлении (2) все числа действительны.*

Общее утверждение — лемма 1 опирается на основную теорему алгебры, однако, в конкретных случаях нужное для проведения интегрирования рациональной функции представление (2) обычно получается без труда.

В следующих двух леммах P и Q — многочлены с действительными коэффициентами.

Лемма 2. *Пусть степень многочлена P меньше степени многочлена Q, многочлен Q имеет вид $Q(x) = (x-a)^m Q_1(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$ с некоторыми числами $a \in \boldsymbol{R}$ и $m \in \boldsymbol{N}$, причём $Q_1(a) \neq 0$. Тогда правильная дробь P/Q единственным образом представляется в виде*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1} Q_1(x)}, \quad x \in \{u \in \boldsymbol{R} \mid Q(u) \neq 0\}; \tag{3}$$

где $A \in \boldsymbol{R}$ и P_1 — многочлен с действительными коэффициентами такой, что вторая дробь в правой части (3) правильная.

⌈ Для произвольного $A \in \boldsymbol{R}$ рассмотрим разность

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^m} = \frac{P(x) - AQ_1(x)}{(x-a)^m Q_1(x)}. \tag{4}$$

Выберем теперь число A так, чтобы многочлен $P(x) - AQ_1(x)$ делится на $x - a$, то есть так, чтобы $P(a) - AQ_1(a) = 0 \iff A = \dfrac{P(a)}{Q_1(a)}$.

Положим теперь $P_1(x) := \dfrac{P(x) - AQ_1(x)}{x - a}$. ⌋

Лемма 3. *Пусть степень многочлена P меньше степени многочлена Q, многочлен Q имеет следующий вид $Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$ с некоторыми числами $p, q \subset \boldsymbol{R}$, $m \in \boldsymbol{N}$, $p^2 - 4q < 0$, причём многочлен Q_1 не делится на $x^2 + px + q$. Тогда правильная дробь P/Q единственным образом представима в виде*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)}, \tag{5}$$

где $x \in \{u \in \boldsymbol{R} \mid Q(u) \neq 0\}$, $\{A, B\} \subset \boldsymbol{R}$ и P_1 — многочлен с действительными коэффициентами такой, что вторая дробь в правой части равенства (5) правильная.

⌈ Рассмотрим разность

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m} = \frac{P(x)-(Ax+B)Q_1(x)}{Q(x)}. \tag{6}$$

Подберем теперь числа A и B так, чтобы многочлен $P(x) - (Ax + B)Q_1(x)$ делился на $x^2+px+q = (x-z)(x-\overline{z})$, где $z = \alpha + i\beta$, $\{\alpha, \beta\} \subset \boldsymbol{R}$, $\beta \neq 0$; $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$. Тогда должны выполняться равенства $\dfrac{P(z)}{Q_1(z)} = A\alpha + B + i\beta A$, $\dfrac{P(\overline{z})}{Q_1(\overline{z})} = A\alpha + B - i\beta A$, из которых имеем $A = \dfrac{1}{\beta}\operatorname{Im}\dfrac{P(z)}{Q_1(z)}$, $B = \operatorname{Re}\dfrac{P(z)}{Q_1(z)} - \dfrac{\alpha}{\beta}\operatorname{Im}\dfrac{P(z)}{Q_1(z)}$. Положим теперь $P_1(x) = \dfrac{P(x)-(Ax+B)Q_1(x)}{x^2+px+q}$. ⌋

5.2.2 Разложение на элементарные дроби. Метод неопределенных коэффициентов

Использование представления (2) п. 5.2.1, а также последовательное применение утверждений лемм 2 и 3 позволяет представить любую правильную дробь единственным образом в виде суммы слагаемых вида

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \text{ где } a \in \boldsymbol{R}, \quad A \in \boldsymbol{R}, \quad m \in \boldsymbol{N}, \tag{1}$$

и вида

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}, \text{ где } \{A, B, p, q\} \subset \boldsymbol{R}, \quad m \in \boldsymbol{N} \text{ и } p^2 - 4q < 0. \tag{2}$$

Дроби вида (1) и (2) называются *элементарными.*

При этом для правильной дроби P/Q со знаменателем Q из формулы (2) п. 5.2.1 с $a_0 = 1$ получим следующее представление

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^{u_1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{u_1-1}} + \ldots + \frac{A_{u_1}}{x-x_1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{E_1}{(x-x_r)^{u_r}} + \frac{E_2}{(x-x_r)^{u_r-1}} + \ldots + \frac{E_{u_r}}{x-x_r} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{v_1}} + \ldots + \frac{C_{v_1}x+D_{v_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_s+q_s)^{v_s}} + \ldots + \frac{M_{v_s}x+N_{v_s}}{x^2+p_sx+q_s}.$$

Для фактического получения разложения правильной дроби на элементарные обычно используется не последовательное применение лемм 2 и 3, а так называемый ***метод неопределенных коэффициентов***. Этот метод состоит в следующем. Сначала записывают знаменатель Q в виде (2), п. 5.2.1, а затем представляют правильную дробь $\frac{P}{Q}$ в виде суммы дробей (1) и (2) с неизвестными коэффициентами. После приведения полученного равенства к общему знаменателю и его отбрасывания, получается равенство двух многочленов. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получают систему линейных уравнений для неизвестных коэффициентов.

Пример. 1. Представим в виде суммы элементарных дробей дробь $f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^4-1}$, $x \in (\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$. Согласно леммам 2 и 3 имеем с некоторыми, пока неизвестными, числами A, B, C, D

$$\frac{x^3+x+1}{x^4-1} = \frac{x^3+x+1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

после приведения к общему знаменателю и его отбрасывания получим тождество $x^3+x+1 = A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$, откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{array}{r|l} x^3 & 1 = A+B+C \\ x^2 & 0 = A-B+D \\ x^1 & 1 = A+B-C \\ x^0 & 1 = A-B-D. \end{array}$$

Решая полученную систему, получаем следующие значения для коэффициентов $A = \frac{3}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{2}$. ⌋

Замечание. Таким образом, ***интегрирование произвольной рациональной функции сводится к интегрированию многочлена и элементарных дробей вида (1) и (2).***

Упражнение 14. Разложить на элементарные дроби следующую рациональную функцию $\frac{x^2+3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$, $x \neq -1$.

5.2.3 Интегрирование элементарных дробей

Элементарные дроби вида (1) п. 5.2.2 легко интегрируются. При $m = 1$ имеем $\int \frac{A}{x-a}\, dx = A \ln|x-a| + C$ на каждом из интервалов $(-\infty, a)$,

$(a, +\infty)$. Если $m \in N$ и $m > 1$, то $\int \frac{A}{(x-a)^m}\, dx = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}}$ $+ C$ на каждом из интервалов $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$.

Переходя к интегрированию дробей вида (2) п. 5.2.2, сначала заметим, что

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}\, dx = \left| \begin{matrix} x + \frac{p}{2} = t \\ dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2t\, dt}{(t^2+a^2)^m} + \left(B - \frac{pA}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}, \tag{1}$$

где $a^2 := q - \frac{p^2}{4} > 0$. Для первого интеграла правой части (1) для числа $m = 1$ имеем $\int \frac{2t\, dt}{t^2+a^2} = \ln(t^2+a^2) + C$, $t \in R$ и для числа $m > 1$ получим $\int \frac{2t\, dt}{(t^2+a^2)^m} = -\frac{1}{(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}} + C$, $t \in R$.

Интегрирование второго слагаемого в правой части (1) сложнее, приведём простую рекуррентную формулу для его вычисления. Пусть $K_m := \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$, $t \in R$; $m \in N$. С помощью формулы интегрирования по частям для $m \geq 1$ получаем

$$K_m = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \left| \begin{matrix} u' = 1, & u = t \\ v = \frac{1}{(t^2+a^2)^m}, & v' = \frac{-m2t}{(t^2+a^2)^{m+1}} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2m \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^{m+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^m} + 2mK_m - 2ma^2 K_{m+1}.$$

Отсюда находим

$$K_{m+1} = \frac{t}{2ma^2(t^2+a^2)^m} + \frac{2m-1}{2ma^2} K_m, \quad m \geq 1. \tag{2}$$

Кроме того, $K_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$, $t \in R$. Таким образом, зная K_1 из (2) при $m = 1$ находим K_2, по K_2 из той же формулы при $m = 2$ найдем K_3 и т. д.

Замечание. Таким образом, интегралы от рациональных функций вычисляются эффективно и результатом является сумма рациональной функции, логарифмической функции и арктангенса.

Упражнение 15. Вычислить интегралы:

a) $\int \frac{x^3 dx}{(x+1)^2}$; b) $\int \frac{x\, dx}{(x^2+1)^2}$; c) $\int \frac{x\, dx}{(x^2-1)^2}$; d) $\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^{13}}\, dx$.

Упражнение 16. Указать метод вычисления интеграла $\int R(e^x)\,dx$, где R — рациональная функция.

Упражнение 17. Найти интеграл $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

5.2.4 Интегрирование рациональной функции от sin и cos

Определение 1. Многочленом от двух переменных x и y называется функция $P:\ R^2 \to R$ следующего вида

$$P(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + a_{0n}y^n; \qquad (x,y) \in R^2,$$

где $\{a_{00}, a_{10}, \ldots, a_{0n}\} \subset R$.

Определение 2. Рациональной функцией от двух переменных называется отношение двух многочленов от двух переменных; это отношение определено в тех точках точках R^2, в которых знаменатель отличен от 0.

Упражнение 18. Пусть R — рациональная функция от двух переменных, а R_1 и R_2 — рациональные функции от одной переменной. Доказать, что функция $R(R_1, R_2)(x) := R(R_1(x), R_2(x))$ есть рациональная функция от x на R.

Пусть R — рациональная функция от двух переменных. Интеграл вида $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ эффективно вычисляется путем сведения к интегралу от рациональной функции с помощью следующей замены переменной

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \left|\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}\ \right| =$$
$$= \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Замечание. Следует иметь в виду, что общая замена переменной п. 5.2.4, как и следующего, при фактическом вычислении часто приводит к громоздким вычислениям, и что структура функции R во многих случаях позволяет использовать более простые замены переменной.

Упражнение 19. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 1}$.

Упражнение 20. Вычислить интеграл $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx$.

Упражнение 21. Пусть R — рациональная функция от двух переменных. Указать метод интегрирования интеграла $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$.

5.2.5 Интегрирование функций, включающих иррациональности

Пусть R — рациональная функция от двух переменных.

1. Интегрирование иррациональностей

Пусть $\{a, b, c, d\} \subset \boldsymbol{R}$ и $n \in \boldsymbol{N}$. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ сводится следующим образом к интегралу от рациональной функции

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t, \quad x = \dfrac{b-t^n d}{ct^n - a} \\ dx = \left(\dfrac{b-t^n d}{ct^n - a}\right)' dt \end{array} \right|$$

$$= \int R\left(\frac{b-t^n d}{ct^n - a}, t\right) \left(\frac{b-t^n d}{ct^n - a}\right)' dt.$$

2. Интегрирование иррациональностей. Продолжение

Пусть $\{a, b, c, d\} \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$. Интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$ с помощью замены $x + \dfrac{b}{2a} = zd$ сводится к одному из следующих интегралов (1) $\int \tilde{R}(t, \sqrt{t^2-1})\, dt$, (2) $\int \tilde{R}(t, \sqrt{t^2+1})\, dt$, (3) $\int \tilde{R}(t, \sqrt{1-t^2})\, dt$, с рациональной функцией от двух переменных $\tilde{R}$. Интеграл (1) — это интеграл п. 5.2.5, 1 с учётом того, что $\sqrt{t^2-1} = (t-1)\sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$. Для вычисления интеграла (2) можно использовать подстановку $t = \operatorname{sh} u$, см. пример 4 п. 5.1.4. Для интеграла (3) можно использовать либо подстановку п. 5.2.5, 1, либо подстановку $t = \sin u$.

5.2.6 Историческая справка

Первые таблицы примитивных были составлены *И. Ньютоном.* Затем были разработаны разнообразные методы вычисления примитивных. Более существенным оказалось введение и изучение новых, так называемых *трансцендентных* функций, как примитивных. В этой работе принимали участие многие выдающиеся математики, например, *Л. Эйлер* (1707-1783), *К. Ф. Гаусс* (1777-1855), *А. М. Лежандр* (1752-1833). Процедура интегрирования рациональных функций была известна уже *Ж. Лиувиллю* (1809-1882) и *Ш. Эрмиту* (1822-1901).

Глава 6

Интеграл Римана

6.1 Введение

Рассмотрим сначала две задачи, приводящие к понятию интеграла.

6.1.1 Задача о вычислении площади криволинейной трапеции

Определение 1. Пусть f—непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a,b]$ функция. Множество F точек плоскости, ограниченное осью абсцисс, проходящими через точки a и b вертикальными прямыми, и графиком функции f, называется ***криволинейной трапецией.***

Таким образом, $F := \{(x,y) \in R^2 \mid a \le x \le b, \quad 0 \le y \le f(x)\}$. Предполагая известной площадь прямоугольника, к вычислению площади криволинейной трапеции можно подойти следующим образом. Разобъём отрезок $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на n частей и проведем через эти точки вертикальные отрезки. При этом криволинейная трапеция будет разбита на n меньших криволинейных трапеций. В каждую из этих меньших криволинейных трапеций впишем прямоугольник и около каждой из них опишем прямоугольник. Высоты вписанного и описанного прямоугольников соответственно равны $m_k := \min\limits_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x)$, $M_k := \max\limits_{x_k \le x \le x_{k+1}} f(x)$ для криволинейной трапеции с основанием $[x_k, x_{k+1}]$; $0 \le k \le n-1$, см. рис. 8 на следующей странице, на котором для $n = 6$ заполнены точками вписанные прямоугольники. Тогда суммы площадей вписанных и площадей описанных прямоугольников соответственно равны

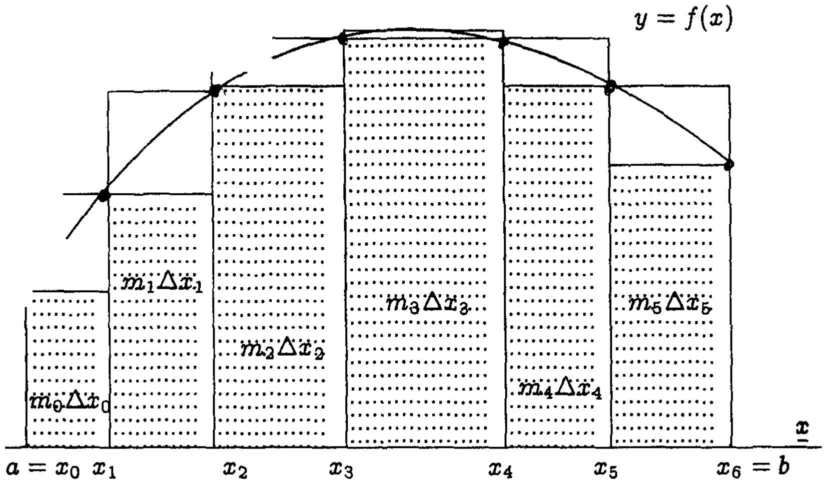


Рис. 8.

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k; \quad \Delta x_k := x_{k+1} - x_k. \tag{1}$$

Эти суммы можно рассматривать как приближенные с недостатком и с избытком соответственно значения для площади криволинейной трапеции F.

Поскольку функция f на отрезке $[a, b]$ непрерывна, то для меньшего отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ ее ординаты будут меняться мало, то есть малой будет разность $M_k - m_k$. Поэтому суммы (1) будут тем точнее давать значение площади, чем меньше длина каждого из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$. Таким образом, можно ожидать, что точное значение площади получается как предел

$$\lim \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \lim \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \tag{2}$$

при условии, что $\max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k \to 0$.

6.1.2 Задача о вычислении величины пройденного пути

Предположим, что точка P движется по прямой с известной в каждый момент времени t мгновенной скоростью $v(t)$. Определим величину пути, пройденного точкой P за время $[t_1, t_2]$, предполагая функцию v непрерывной. Разобьем отрезок $[t_1, t_2]$ точками $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = t_2$ на n частей. В каждом из отрезков $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ выберем произвольно точку ξ_k. Приближенно скорость точки P на малом отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ постоянна и равна $v(\xi_k)$, а пройденный за время

$[\tau_k, \tau_{k+1}]$ путь приближенно равен $v(\xi_k)\Delta\tau_k$, $\Delta\tau_k := \tau_{k+1} - \tau_k$. При этом приближённое значение пути, пройденного точкой P за время $[t_1, t_2]$, равно

$$\sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\Delta\tau_k. \tag{3}$$

Точность приближения (3) будет тем большей, чем ближе значение $v(\xi_k)$ к значениям $v(t)$ для $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$. Для непрерывной функции v эта близость достигается малостью отрезка $[\tau_k, \tau_{k+1}]$.

Таким образом, можно ожидать, что точное значение проходимого за время $[t_1, t_2]$ пути получается, как

$$\lim \sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\Delta\tau_k \tag{4}$$

при условии, что

$$\max_{0\le k\le n-1} \Delta\tau_k \to 0. \tag{5}$$

Пределы типа (2) и (4) при условии (5) действительно существуют, эти пределы изучаются в настоящей главе.

6.2 Определение интеграла Римана

6.2.1 Вспомогательные определения

*Определение 1. Пусть $[a,b]$ — отрезок и $n \in \boldsymbol{N}$. Набор точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ таких, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ называется **разбиением** отрезка $[a,b]$ и обозначается одним из символов $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\lambda([a,b])$, λ. **Диаметром** или **мелкостью разбиения** λ называется число $|\lambda| := \max\{\Delta x_k \mid 0 \le k \le n-1\}$, где $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$ для $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.*

Отметим, что для каждого $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ $\Delta x_k > 0$ и что $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a$. Пусть $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ — ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция. Тогда $\forall\, x \in [a,b] :\ m \le f(x) \le M$, где $m := \inf_{[a,b]} f$, $M := \sup_{[a,b]} f$, при этом $m \in \boldsymbol{R}$, $M \in \boldsymbol{R}$.

Пусть $\lambda = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Для каждого $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ определим следующие числа $m_k := m_k(f) := \inf\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \inf_{[x_k, x_{k+1}]} f$, $M_k := M_k(f) := \sup\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \sup_{[x_k, x_{k+1}]} f$.

Отметим, что все введенные точные грани определены в силу теоремы о существовании точных граней. Кроме того,

$$\forall\, k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\} \ : \quad m \le m_k \le M_k \le M. \qquad (1)$$

Определение 2. Нижней суммой Дарбу *для ограниченной на отрезке* $[a,b]$ *функции* f *и разбиения* λ *называется число* $L(f;\lambda) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$.

Верхней суммой Дарбу *для ограниченной на отрезке* $[a,b]$ *функции* f *и разбиения* λ *называется следующее число* $U(f;\lambda) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$.

Определение 3. *Пусть* $\lambda = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*–некоторое разбиение. Произвольный набор точек* $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ *таких, что* $\forall\, k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\} : \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, *называется* ***набором, отвечающим разбиению*** λ, *и обозначается символом* $\{\xi_i|\lambda\} = \{\xi_i\}$.

Для любого набора $\{\xi_i|\lambda\}$ с учетом неравенств (1) имеем

$$m \le m_k \le f(\xi_k) \le M_k \le M, \quad 0 \le k \le n-1. \qquad (2)$$

Определение 4. Интегральной суммой *для функции* $f : \ [a,b] \to \boldsymbol{R}$, *разбиения* $\lambda = \lambda([a,b])$ *и набора точек* $\{\xi_i|\lambda\}$ *называется число* $S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) := S(f;\lambda) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Упражнение 1. Пусть $a=-1,\ b=1;\ f(x)=|x|,\ x\in[-1,1]$;

$$\lambda = \{-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}, \quad \xi_i = x_i, \quad i = 0,1,2,\ldots,8.$$

Вычислить $L(f;\lambda),\ U(f;\lambda),\ S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\})$.

Введенные суммы Дарбу и интегральные суммы обладают следующим свойством

$$m(b-a) \le L(f;\lambda) \le S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) \le U(f;\lambda) \le M(b-a). \qquad (3)$$

Для доказательства неравенств (3) нужно помножить на положительное число Δx_k k–ое неравенство из (2), а затем сложить все полученные неравенства.

Упражнение 2. Дать геометрическую интерпретацию для неравенств из (3).

Упражнение 3. Пусть $[a,b]=[0,1];\ f(x)=x^2,\ \ x\in[0,1]$. Для произвольного разбиения λ записать суммы $L(f;\lambda),\ U(f;\lambda)$, а также сумму $S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\})$ для набора $\xi_k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x_{k+1}^2 + x_{k+1}x_k + x_k^2},\ 0 \le k \le n-1$.

6.2.2 Определение интеграла и интегрируемой функции

Пусть $f: [a,b] \to R$ — ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция.

Согласно неравенствам (3) ***множества действительных чисел*** $\{L(f;\lambda) \mid \lambda\}$, $\{U(f;\lambda) \mid \lambda\}$, то есть множества всех нижних и всех верхних сумм Дарбу, отвечающих всевозможным разбиениям λ отрезка $[a,b]$, ***ограничены.***

Определение 5. ***Нижним интегралом*** *от функции f по отрезку $[a,b]$ называется число $\underline{\int} f(x)\,dx := \sup\limits_{\lambda} L(f;\lambda)$.*

Верхним интегралом *от функции f по отрезку $[a,b]$ называется число $\overline{\int} f(x)\,dx := \inf\limits_{\lambda} U(f;\lambda)$.*

При этом точные верхние и нижние грани берутся по всем возможным разбиениям λ отрезка $[a,b]$.

Упражнение 4. Найти нижний и верхний интегралы для постоянной на $[a,b]$ функции.

Упражнение 5. Найти нижний интеграл от $f(x) = x$, $x \in [0,1]$.

Указание. Использовать неравенство $x_k < \dfrac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$.

Пример. 1. Пусть $f(x) = 1$, $x \in Q$ и $f(x) = 0$, $x \in (R \setminus Q)$ — функция ***Дирихле.*** Для функции f, рассматриваемой на отрезке $[0,1]$, и любого разбиения $\lambda = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ этого отрезка для любого $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$ имеем $m_k = 0$, $M_k = 1$, поскольку любой отрезок $[x_k, x_{k+1}]$ содержит как рациональные так и иррациональные числа. Таким образом, $L(f;\lambda) = 0$, $U(f;\lambda) = 1$ для любого разбиения λ. Следовательно, $\underline{\int} f(x)\,dx = 0$, $\overline{\int} f(x)\,dx = 1$.

Определение 6. Если для функции $f: [a,b] \to R$ выполняется равенство $\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx$, то функция f называется ***интегрируемой по Риману*** *по отрезку $[a,b]$, а общее значение верхнего и нижнего интегралов называется* ***интегралом Римана*** *от функции f по отрезку $[a,b]$ и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.*

Замечания. 1. Далее рассматриваются только интегрируемые по Риману функции и интеграл Римана, поэтому будем говорить об интегрируемых функциях и интеграле.

2. Согласно определению 2 интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ есть число, определяемое функцией f и отрезком $[a,b]$. В частности, это число не зависит от x и можно писать $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(u)\,du$ и т. п. Более логичным является обозначение $\int\limits_a^b f$. Однако, общеупотребительное обозначение связано с логикой преобразований интеграла и потому полезно.

3. Числа a и b в обозначении интеграла называются ***нижним*** и ***верхним пределами*** интеграла соответственно.

Обозначение: $f \in \boldsymbol{R}([a,b]) \iff$ функция f интегрируема по $[a,b]$.

Примеры. *2.* Пусть $f(x) = C, \quad x \in [a,b]$, где $C \in \boldsymbol{R}$. Тогда для любого $\lambda = \lambda([a,b])$ имеем $L(f;\lambda) = U(f;\lambda) = C(b-a)$. Следовательно, $f \in \boldsymbol{R}([a,b])$ и $\int\limits_a^b C\,dx = C(b-a)$.

3. Для функции Дирихле f на отрезке $[0,1]$ $0 = \underline{\int} f\,dx \neq \overline{\int} f\,dx = 1$, следовательно, функция Дирихле не является интегрируемой.

Упражнение 6. Для функции $f \in C([0,1])$ $\exists\, C \in \boldsymbol{R}$ $\forall\,\lambda = \lambda([0,1])$: $L(f;\lambda) = C$. Доказать, что $f(x) = C, \quad x \in [0,1]$.

Упражнение 7. Пусть $f(x) = 1, \ x \in [0,1]$ и $f(x) = 2, \ x \in (1,2]$. Доказать, что $f \in \boldsymbol{R}([0,2])$ и найти $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$.

6.2.3 Свойства сумм Дарбу

Согласно неравенству (3) п. 6.2.1. имеем

1°. Для любого разбиения $\lambda = \lambda([a,b])$ справедливы следующие неравенства: $m(b-a) \le L(f;\lambda) \le U(f;\lambda) \le M(b-a)$.

Определение 7. *Пусть λ и λ' — разбиения отрезка $[a,b]$. Разбиение λ' называется **подразбиением** разбиения λ, если $\lambda \subset \lambda'$, то есть если разбиение λ' можно получить из разбиения λ добавлением новых точек.*

2°. Для произвольного разбиения λ и произвольного его подразбиения λ' справедливы неравенства: $L(f;\lambda) \le L(f;\lambda'), \quad U(f;\lambda) \ge U(f;\lambda')$.

⌈ Достаточно рассмотреть случай, когда разбиение λ' отличается от разбиения $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ добавлением одной точки x'. Пусть точка x' принадлежит отрезку $[x_k, x_{k+1}]$, точнее $x_k < x' < x_{k+1}$. Тогда

$$L(f;\lambda)=m_0\Delta x_0+\ldots+m_{k-1}\Delta x_{k-1}+m_k\Delta x_k+m_{k+1}\Delta x_{k+1}+$$
$$\ldots+m_{n-1}\Delta x_{n-1};$$
$$L(f;\lambda')=m_0\Delta x_0+\ldots+m_{k-1}\Delta x_{k-1}+m'_k(x'-x_k)+m''_k(x_{k+1}-x')$$
$$+m_{k+1}\Delta x_{k+1}+\ldots+m_{n-1}\Delta x_{n-1},$$

где $m'_k:=\inf\limits_{[x_k,x']}f\geq m_k$, $m''_k:=\inf\limits_{[x',x_{k+1}]}f\geq m_k$. Отсюда имеем неравенства $L(f;\lambda')-L(f;\lambda)=m'_k(x'-x_k)+m''_k(x_{k+1}-x')-m_k\Delta x_k\geq$ $\geq m_k(x'-x_k)+m_k(x_{k+1}-x')-m_k\Delta x_k=0$. Доказательство для верхних сумм Дарбу аналогично. ⌋

3^0. Для произвольных разбиений λ_1 и λ_2 отрезка $[a,b]$ справедливо неравенство $L(f;\lambda_1)\leq U(f;\lambda_2)$.

⌈ Положим $\lambda':=\lambda_1\cup\lambda_2$. Тогда λ' есть подразбиение каждого из разбиений λ_1 и λ_2. Поэтому на основании 1^0 и 2^0 имеем

$$L(f;\lambda_1)\leq L(f;\lambda')\leq U(f;\lambda')\leq U(f;\lambda_2).$$ ⌋

Следствие 1. Для любой ограниченной на отрезке $[a,b]$ *функции* f $\underline{\int} f(x)\,dx\leq\overline{\int} f(x)\,dx$.

⌈ Согласно определению верхнего интеграла из 3^0 для любого фиксированного λ_1 имеем $L(f;\lambda_1)\leq\inf\limits_{\lambda_2}U(f;\lambda_2)=\overline{\int} f(x)\,dx$, отсюда

$\underline{\int} f(x)\,dx=\sup\limits_{\lambda_1}L(f;\lambda_1)\leq\overline{\int} f(x)\,dx$. ⌋

Упражнение 8. Пусть $\alpha>0$ и $\beta\in\boldsymbol{R}$. Доказать следующие равенства $L(\alpha f+\beta;\lambda)=\alpha L(f;\lambda)+\beta(b-a)$; $U(\alpha f+\beta;\lambda)=\alpha U(f;\lambda)+\beta(b-a)$.

Упражнение 9. Пусть $f(x)\leq g(x)$, $x\in[a,b]$. Доказать, что для любого разбиения $\lambda=\lambda([a,b])$ выполняются следующие неравенства $L(f;\lambda)\leq L(g;\lambda)$; $U(f;\lambda)\leq U(g;\lambda)$.

Упражнение 10. Доказать, что для любого разбиения λ : $L(f+g;\lambda)\geq L(f;\lambda)+L(g;\lambda)$; $U(f+g;\lambda)\leq U(f;\lambda)+U(g;\lambda)$.

Упражнение 11. Пусть $f\in C([a,b])$. Доказать, что для каждого разбиения нижняя и верхняя суммы Дарбу для f являются интегральными суммами. Доказать также, что аналогичным свойством обладают суммы Дарбу для монотонной функции.

Упражнение 12. Пусть $f\in C([a,b])$. Для $x\in(a,b]$ пусть $F(x)$ и $G(x)$ есть соответственно нижний и верхний интегралы от функции по отрезку $[a,x]$, положим также $F(a):=0$, $G(a):=0$. Доказать, что существуют производные F' и G' на $[a,b]$, причём $F'(x) = G'(x) = f(x), \quad x \in [a,b]$. Рассматривая функцию $G - F$ доказать, что $f \in \boldsymbol{R}([a,b])$.

Указание. По свойству 2^0 имеем для $\Delta x > 0$: $F(x+\Delta x) \le F(x) + \max\limits_{x \le u \le \Delta x} f(u)\Delta x$, $F(x+\Delta x) \ge F(x) + \min\limits_{x \le u \le x+\Delta x} f(u)\Delta x$. Аналогичные неравенства верны и для G.

6.3 Критерий интегрируемости

6.3.1 Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции

Теорема 1. $f \in \boldsymbol{R}([a,b]) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda = \lambda([a,b]) :$
$$U(f;\lambda) - L(f;\lambda) < \varepsilon.$$

$\lceil$ Необходимость. Пусть $f \in \boldsymbol{R}([a,b]$, то есть $\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Предположим, что произвольное $\varepsilon > 0$ задано. Согласно определению нижнего интеграла $\exists\, \lambda_1 = \lambda_1([a,b]) : \quad \underline{\int} f(x)\,dx - \varepsilon/2 < L(f;\lambda_1)$. Аналогично по определению верхнего интеграла получим $\exists\, \lambda_2 = \lambda_2([a,b]) \ : \quad U(f;\lambda_2) < \overline{\int} f(x)\,dx + \varepsilon/2$.

Пусть $\lambda := \lambda_1 \cup \lambda_2$, λ есть подразбиение каждого из разбиений λ_1 и λ_2. С учетом свойств 1^0 и 2^0 сумм Дарбу для разбиения λ имеем
$$\underline{\int} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(f;\lambda_1) \le L(f;\lambda) \le U(f;\lambda) \le U(f;\lambda_2) < \overline{\int} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \lambda := \lambda_1 \cup \lambda_2 : \quad U(f;\lambda) - L(f;\lambda) < \varepsilon$.

Достаточность. По определению нижнего и верхнего интегралов и следствию 1 $\forall \lambda : \quad L(f;\lambda) \le \underline{\int} f(x)\,dx \le \overline{\int} f(x)\,dx \le U(f;\lambda)$, следовательно $\forall \lambda : \quad 0 \le \overline{\int} f(x)\,dx - \underline{\int} f(x)\,dx \le U(f;\lambda) - L(f;\lambda)$. По условию теоремы 1 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \lambda : \quad U(f;\lambda) - L(f;\lambda) < \varepsilon$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 : \quad 0 \le \overline{\int} f(x)\,dx - \underline{\int} f(x)\,dx \le \varepsilon$. Следовательно, $\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx$ и функция $f \in \boldsymbol{R}([a,b])$. $\rfloor$

Замечание 1. Следует обратить внимание на то, что существенная для дальнейшего теорема 1 есть следствие определения интеграла и свойств сумм Дарбу.

6.3.2 Другая формулировка критерия интегрируемости

Определение 1. Колебанием функции f на отрезке $[\alpha,\beta]$ называется число $\omega(f,[\alpha,\beta]) := \sup\limits_{[\alpha,\beta]} f - \inf\limits_{[\alpha,\beta]} f \geq 0$.

Упражнение 13. Доказать следующее равенство $\omega(f,[\alpha,\beta]) = \sup\{f(x') - f(x'') \mid x' \in [\alpha,\beta], x'' \in [\alpha,\beta]\}$.

Для функции $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ и разбиения $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ положим $\omega_k(f) := \omega(f,[x_k,x_{k+1}])$, $k = 0,1,\ldots,n-1$.

Теорема 2. *Справедливо утверждение* $f \in \boldsymbol{R}([a,b]) \iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \lambda = \lambda([a,b]) : \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k < \varepsilon.$$

⌈ Поскольку для любого разбиения λ имеем следующее равенство $U(f;\lambda) - L(f;\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(M_k(f) - m_k(f))\Delta x_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k(f)\Delta x_k$, то теорема 2 есть переформулировка теоремы 1. ⌋

Замечание 2. Сумма $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k(f)\Delta x_k$ в теореме 2 имеет простой геометрический смысл. Это есть суммарная площадь прямоугольников с основаниями над $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ и высотами $\omega_k(f)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, которые накрывают график функции f, см. рис. 9 на следующей странице, на котором накрывающие график прямоугольники заполнены точками. Для интегрируемой функции график можно накрыть прямоугольниками упомянутого вида со сколь угодно малой суммарной площадью.

Упражнение 14. Пусть $f \in \boldsymbol{R}([a,b])$. Доказать, что: a) $|f| \in \boldsymbol{R}([a,b])$; b) $\sin f \in \boldsymbol{R}([a,b])$; c) $f^2 \in \boldsymbol{R}([a,b])$; d) $f_+ := \max(0,f) \in \boldsymbol{R}([a,b])$;
e) привести пример функции f такой, что $|f| \in \boldsymbol{R}([a,b])$ и $f \notin \boldsymbol{R}([a,b])$.
f) $f(x^2) \in \boldsymbol{R}([0,1])$ для $f \in \boldsymbol{R}([0,1])$.

Упражнение 15. Пусть функции $f, g \subset \boldsymbol{R}([a,b])$. Доказать, что функция $(fg) \in \boldsymbol{R}([a,b])$.

Упражнение 16.* Функция $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет условию

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, g \in \boldsymbol{R}([a,b]) \quad \forall\, x \in [a,b] : \ |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Доказать, что $f \in \boldsymbol{R}([a,b])$.

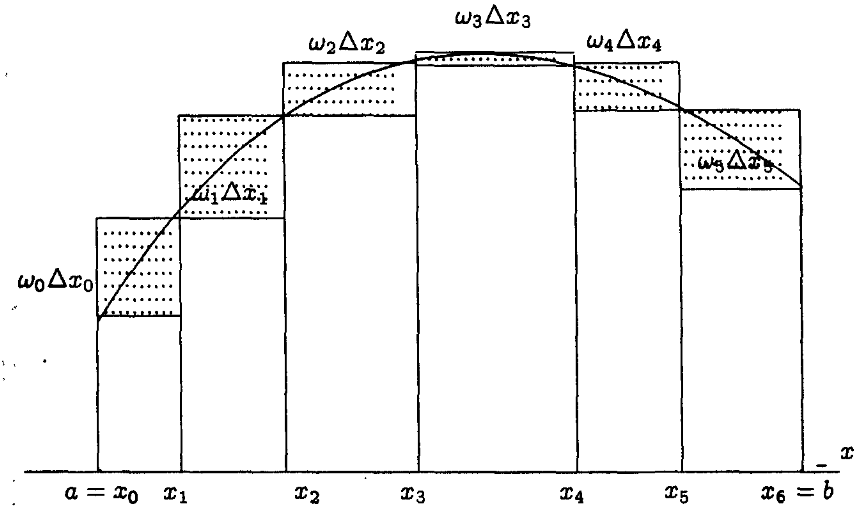


Рис. 9.

*Упражнение 17**. Функция $f \in R([a,b])$ и равна 0 во всех точках непрерывности на $[a,b]$. Доказать, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$.

6.4 Классы интегрируемых функций

6.4.1 Интегрируемость монотонной функции

Теорема 3. *Пусть $f: [a,b] \to R$ — монотонная на отрезке $[a,b]$ функция. Тогда $f \in R([a,b])$.*

⌈ Предположим, что f монотонно не убывает на $[a,b]$ и что $f(a) < f(b)$. Используем критерий интегрируемости. Для произвольного заданного числа $\varepsilon > 0$ рассмотрим произвольное разбиение λ отрезка $[a,b]$ с размером $|\lambda| < \varepsilon/(f(b) - f(a))$. Для такого разбиения имеем

$$U(f;\lambda) - L(f;\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k))\Delta x_k \le$$

$$\le |\lambda| \sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) = |\lambda|(f(x_n) - f(x_0)) = |\lambda|(f(b) - f(a)) < \varepsilon. \rfloor$$

Упражнение 18. Дать геометрическую интерпретацию доказательства теоремы 3 на основе теоремы 2.

14 — 4-1168

Упражнение 19. Для произвольной ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции f положим $g(x) := \sup\limits_{a\le u\le x} f(u)$, $h(x) := \inf\limits_{a\le u\le x} f(u)$; $x \in [a,b]$. Доказать, что $\{g,h\} \subset \boldsymbol{R}([a,b])$.

6.4.2 Интегрируемость непрерывной функции

Теорема 4. $C([a,b]) \subset \boldsymbol{R}([a,b])$.

⌈ Используем критерий интегрируемости. Пусть произвольное число $\varepsilon > 0$ задано. Функция $f \in C([a,b])$ по теореме Кантора равномерно непрерывна на $[a,b]$. Поэтому для числа $(\varepsilon/(b-a)) > 0$ имеем

$$\exists\,\delta > 0 \quad \forall\,\{x', x''\} \subset [a,b],\ |x'-x''| < \delta \ : \quad |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Для произвольного разбиения $\lambda = \lambda([a,b])$ с $|\lambda| < \delta$ имеем для каждого $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ $M_k - m_k = \sup\limits_{[x_k,x_{k+1}]} f - \inf\limits_{[x_k,x_{k+1}]} f = f(x^*) - f(x_*) < \varepsilon$ в силу второй теоремы Вейерштрасса. При этом $\{x_*, x^*\} \subset [x_k, x_{k+1}]$, $|x^* - x_*| \le |\lambda| < \delta$. Таким образом, $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,\lambda,\ |\lambda| < \delta$:

$$U(f;\lambda) - L(f;\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k = \varepsilon. \qquad ⌋$$

Упражнение 20. Пусть $f \in C([a,b])$. Доказать, что:

a) $f^2 \in \boldsymbol{R}([a,b])$; b) $\operatorname{arctg} f \in \boldsymbol{R}([a,b])$.

6.4.3 Интегрируемость некоторых разрывных функций

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть функция $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ и точки $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ из $[a,b]$ удовлетворяют условиям: 1) f ограничена на $[a,b]$; 2) $f \in C([a,b]\setminus\{z_1,z_2,\ldots,z_m\})$. Тогда функция $f \in \boldsymbol{R}([a,b])$.*

⌈ Условие 1) означает, что $\exists\, C > 0\ \ \forall\, x \in [a,b]$: $|f(x)| \le C$. Воспользуемся критерием интегрируемости. Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. Положим $\delta := \varepsilon/(16mC) > 0$. Множество $[a,b]\setminus G$, где $G := \bigcup\limits_{k=1}^{m}(z_k - \delta, z_k + \delta)$, либо пусто, либо состоит из конечного числа отрезков. Ниже рассматривается второй случай. По условию 2) функция $f \in C([a,b]\setminus G)$. По теореме Кантора для числа $\varepsilon/(2(b-a)) > 0$ существует число $\gamma > 0$ такое, что для любых точек x' и x'', принадлежащих одному из составляющих множество $[a,b]\setminus G$ отрезков и таких, что $|x'-x''| < \gamma$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(2(b-a))$.

Пусть теперь λ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, размер которого $|\lambda| < \min(\delta,\gamma)$. Для этого разбиения имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k(f)\Delta x_k = \sum_{k:[x_k,x_{k+1}]\cap G=\emptyset}\omega_k(f)\Delta x_k + \sum_{k:[x_k,x_{k+1}]\cap G\neq\emptyset}\omega_k(f)\Delta x_k \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{k:[x_k,x_{k+1}]\cap G=\emptyset}\Delta x_k + 2C\sum_{k:[x_k,x_{k+1}]\cap G\neq\emptyset}\Delta x_k \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + 2C4m\delta = \varepsilon.$$
⌋

Упражнение 21. Доказать, что $f \in R([0,1])$ для следующих функций: a) $f(x) = [5x]$, $x\in[0,1]$; b) $f(x) = \{5x\}$, $x \in [0,1]$; c) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$, $f(0) = 0$; d) $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$, $x\in(0,1]$, $f(0) = 0$.

Упражнение 22. Пусть функция $f \in R([a,b])$, а функция g получается из f произвольным изменением значений функции f в произвольном конечном числе произвольных точек на отрезке $[a,b]$. Доказать, что $g \in R([a,b])$.

6.5 Интеграл как предел интегральных сумм

6.5.1 Предел интегральных сумм

Интегральная сумма $S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ для функции $f: [a,b]\to R$, разбиения $\lambda = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ и соответствующего этому разбиению набора $\{\xi_i|\lambda\}$ была определена в п. 6.2.1, см. также п. 6.1.2. Для определения интегральной суммы ограниченность на $[a,b]$ функции f не нужна.

Определение 1. *Число $J \in R$ называется пределом интегральных сумм при $|\lambda|\to 0$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\lambda$,* $|\lambda|<\delta\ \forall\{\xi_i|\lambda\}:\ |S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) - J| = |\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k - J| < \varepsilon$.

Обозначение: $J = \lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\})$.

Замечание. Предел интегральных сумм определяется единственным образом. Прямое доказательство получается из определения подобно доказательству единственности предела последовательности. Ниже доказательство единственности следует из теоремы Дарбу.

Далее используются такие свойства предела интегральных сумм.

1⁰. Если существует $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\})$, то для любого $c \in \boldsymbol{R}$ существует $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(cf;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) = c\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\})$,

2⁰. Если существуют $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\})$, $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(g;\lambda,\{\xi_i|\lambda\})$, то существует предел

$$\lim_{|\lambda|\to 0} S(f+g;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) = \lim_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) + \lim_{|\lambda|\to 0} S(g;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}).$$

Упражнение 23. Проверить, что $S(cf;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) = cS(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\})$, $S(f+g;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) = S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) + S(g;\lambda,\{\xi_i|\lambda\})$ и доказать свойства 1^0 и $2.^0$

3⁰. Для функции $f:\ [a,b] \to \boldsymbol{R}$ существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) = J \in \boldsymbol{R}$. Тогда функция f ограничена на $[a,b]$.

⌈ Согласно определению предела интегральных сумм для числа $\varepsilon = 1$ $\exists\,\delta > 0\ \forall\,\lambda, |\lambda| < \delta\ \forall\,\{\xi_i|\lambda\}:\ |S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) - J| < 1$. Зафиксируем произвольное разбиение $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ с размером $|\lambda| < \delta$. Для двух отвечающих разбиению λ наборов $\{\xi_i|\lambda\}$ и $\{\xi_i'|\lambda\}$, равных соответственно $\{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_k,\ldots,\xi_{n-1}\}$, $\{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_k',\ldots,\xi_{n-1}\}$ с фиксированным $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ и различающихся только точками $\{\xi_k,\xi_k'\} \subset [x_k, x_{k+1}]$, имеем $|S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) - S(f;\lambda,\{\xi_i'|\lambda\})| \le |S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) - J| + {}$ $+|S(f;\lambda,\{\xi_i'|\lambda\}) - J| < 2$, откуда $|(f(\xi_k) - f(\xi_k'))\Delta x_k| < 2$, и следовательно $|f(\xi_k')| = |f(\xi_k) - f(\xi_k') - f(\xi_k)| \le |f(\xi_k)| + 2/\Delta x_k$. Фиксируя значение ξ_k, получаем $\sup\limits_{\xi_k' \in [x_k, x_{k+1}]} |f(\xi_k')| \le |f(\xi_k)| + 2/\Delta x_k$. Таким образом, для каждого $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ функция f ограничена на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, следовательно, функция f ограничена и на $[a,b]$. ⌋

4⁰. Если существует предел интегральных сумм $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) = J$, то значение интеграла J можно получить, как предел числовой последовательности.

⌈ Для каждого $n \in \boldsymbol{N}$ фиксируем некоторое разбиение отрезка $[a,b]$ $\lambda^n = \{x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{m(n)}^n\}$, эти разбиения фиксируются произвольно, исключая условие $|\lambda^n| \to 0$, $n \to \infty$. Для разбиения λ^n фиксируем произвольно соответствующий ему набор $\{\xi_i^n|\lambda^n\}$; $n \in \boldsymbol{N}$. Получим числовую последовательность

$$S(f;\lambda^n,\{\xi_i^n|\lambda^n\}) = \sum_{k=0}^{m(n)-1} f(\xi_k^n)\Delta x_k^n,\ n \in \boldsymbol{N}, \tag{1}$$

сходящуюся к J при $n \to \infty$. ⌋

Упражнение 24. Доказать, что последовательность (1) сходится к числу J.

6.5.2 Теорема Дарбу

Теорема 6. *Справедливо следующее утверждение:* $f \in R([a,b]) \iff$ *существует* $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\})$. *При этом*

$$\lim_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$\lceil$ Необходимость. Пусть $f \in R([a,b])$ и произвольное $\varepsilon > 0$ задано. Согласно критерию интегрируемости для числа $\varepsilon/2$ имеем $\exists\, \lambda_0 = \lambda_0([a,b]):\ U(f;\lambda_0) - L(f;\lambda_0) < \varepsilon/2$. Зафиксируем разбиение λ_0, пусть m – число точек разбиения λ_0, а число $C > 0$ таково, что $\forall\, x \in [a,b]:$ $|f(x)| \le C$.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение λ с размером $|\lambda| < \delta := \varepsilon/(8Cm)$, пусть также $\lambda' := \lambda \cup \lambda_0$. С учетом свойств сумм Дарбу имеем $U(f;\lambda) = U(f;\lambda') + (U(f;\lambda) - U(f;\lambda')) \le U(f;\lambda_0) + (U(f;\lambda) - -U(f;\lambda')) \le U(f;\lambda_0) + 2Cm|\lambda| < U(f;\lambda_0) + \varepsilon/4$. Следовательно

$$U(f;\lambda) < U(f;\lambda_0) + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1}$$

Аналогично доказывается, что

$$L(f;\lambda) > L(f;\lambda_0) - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) имеем $\forall\, \lambda, |\lambda| < \delta\ \forall\, \{\xi_i|\lambda\}:\ L(f;\lambda_0) - \varepsilon/4 < L(f;\lambda) \le \le S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) \le U(f;\lambda) < U(f;\lambda_0) + \varepsilon/4$. Кроме того, согласно определению интеграла для любого λ $L(f;\lambda) \le \int_a^b f(x)\,dx \le U(f;\lambda)$.

Таким образом, $\forall\, \lambda, |\lambda| < \delta\ \forall\, \{\xi_i|\lambda\}:\ \left|S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < < U(f;\lambda_0) - L(f;\lambda_0) + \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Достаточность. Предположим теперь, что существует предел $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) = J$. Согласно свойству 3^0 п. 6.5.1 функция f ограничена на отрезке $[a,b]$. Для доказательства того, что $f \in R([a,b])$ используем критерий интегрируемости. Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. По определению предела интегральных сумм для числа $\varepsilon/4$ имеем $\exists\, \delta > 0\ \forall\, \lambda, |\lambda| < \delta\ \forall\, \{\xi_i|\lambda\}:\ |S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) - J| < \varepsilon/4$. Пусть $\lambda = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. По теореме о характеризации точных граней $\exists\, x'_k \in [x_k, x_{k+1}]:\ f(x'_k) > M_k - \varepsilon/(4(b-a));\ \ \exists\, x''_k \in [x_k, x_{k+1}]:\ f(x''_k) < < m_k + \varepsilon/(4(b-a))$. Тогда

$$U(f,\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k < \sum_{k=0}^{n-1} f(x'_k)\Delta x_k + \frac{\varepsilon}{4} < J + \frac{\varepsilon}{2};$$

$$L(f,\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k > \sum_{k=0}^{n-1} f(x''_k)\Delta x_k - \frac{\varepsilon}{4} > J - \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда имеем $U(f;\lambda) - L(f;\lambda) < \varepsilon$. ⌋

Замечание 1. Согласно теореме Дарбу для функции $f \in R([a,b])$ интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ является пределом интегральных сумм. Поэтому свойство 4^0 п. 6.5.1 указывает путь вычисления интеграла, как показывают простейшие примеры, этот путь является технически сложным и редко осуществим эффективно. Эффективным средством вычисления интеграла является формула Ньютона-Лейбница, приводимая ниже.

Рассмотрим примеры вычисления интегралов на основе свойства 4^0 п. 6.5.1.

Примеры. 1. Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 x\,dx$.

⌈ Функция $f(x) = x$, $x \in [0,1]$ непрерывна на $[0,1]$ и, следовательно, $f \in R([0,1])$. По теореме Дарбу искомый интеграл есть предел интегральных сумм и можно воспользоваться свойством 4^0 п. 6.5.1.

Для $n \in N$ пусть $\lambda^n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$ и $\xi_k^n = \frac{k}{n}$ для $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$. Тогда $|\lambda^n| \to 0$, $n \to \infty$ и

$$S(f;\lambda^n,\{\xi_i^n|\lambda^n\}) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \to \frac{1}{2}$$

при $n \to \infty$. Следовательно, $\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$. ⌋

2. Вычислим $\int\limits_0^1 x^2 dx$.

⌈ Функция $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, следовательно $f \in R([0,1])$, и по теореме Дарбу искомый интеграл есть предел интегральных сумм. Воспользуемся свойством 4^0 п. 6.5.1.

Для $n \in N$ пусть $\lambda^n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$ и для $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ пусть $\xi_k^n = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{k}{n}\cdot\frac{k+1}{n} + \left(\frac{k+1}{n}\right)^2\right)}$. Заметим, что

$$\frac{k}{n} = \sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2} < \xi_k^n < \sqrt{\left(\frac{k+1}{n}\right)^2} = \frac{k+1}{n}, \quad k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}.$$

Тогда $|\lambda^n| \to 0$, $n \to \infty$ и

$$S(f;\lambda^n,\{\xi_i^n|\lambda^n\}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k^n)\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{k}{n}\cdot\frac{k+1}{n} + \left(\frac{k+1}{n}\right)^2\right)\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{k+1}{n} \right)^3 - \left(\frac{k}{n} \right)^3 \right) = \frac{1}{3}.$$

Этот интеграл, точнее соответствующую площадь криволинейной трапеции, впервые вычислил ***Архимед.*** ⌋

3. Представим предел следующей последовательности чисел $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \ : \ n \geq 1 \right\}$ в виде интеграла.

⌈ Функция $f(x) = 1/(1+x)$, $x \in [0,1]$ непрерывна на $[0,1]$, а потому $f \in R([0,1])$. По теореме Дарбу интеграл $J := \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ есть предел интегральных сумм. Воспользуемся свойством 4^0 п. 6.5.1. Для $n \in N$ пусть $\lambda^n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} \right\}$ и $\xi_k^n = \frac{k}{n}$ для $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Тогда $|\lambda^n| \to 0$, $n \to \infty$ и $S(f; \lambda^n, \{\xi_i^n | \lambda^n\}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \frac{1}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \to J$ при $n \to \infty$. Потому $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} \right) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$. ⌋

Замечание 2. Аналогично определению предела интегральных сумм определяются пределы $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sin \Delta x_k$, $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} L(f; \lambda)$ и т. п. Например,

$$\lim_{|\lambda|\to 0} L(f;\lambda) = J \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall \lambda, |\lambda| < \delta : \ |L(f;\lambda) - J| < \varepsilon.$$

Упражнение 25. Доказать неравенство (2) в теореме Дарбу.

Упражнение 26. Функция $f : [a,b] \to R$ ограничена на $[a,b]$ и число $\alpha > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k^{1+\alpha} = 0$.

Упражнение 27. Для функции $f \in R([a,b])$ найти пределы:

a) $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sin \Delta x_k$; b) $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \ln(1 + f(\xi_k)\Delta x_k)$.

Упражнение 28. Пусть $f \in C([a,b])$ и $f(x) > 0$, $x \in [a,b]$. Найти предел $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \prod\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)^{\Delta x_k}$.

Упражнение 29. Для функций $\{f, g\} \subset R([a,b])$ вычислить предел $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) g(\eta_k) \Delta x_k$, где $\{\xi_k\}$ и $\{\eta_k\}$ — наборы точек, отвечающие разбиению λ.

Упражнение 30. Пусть f и g — функции из упражнения 22. Доказать, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$. Таким образом, интеграл не зависит от значений функции в любом конечном наборе точек.

Упражнение 31. Доказать для ограниченной на $[a,b]$ функции f равенства: a) $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} L(f;\lambda) = \underline{\int} f(x)\,dx$; b) $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} U(f;\lambda) = \overline{\int} f(x)\,dx$.

Упражнение 32. ***Неравенство Эрмита – Адамара.*** Пусть f — выпуклая вниз на (α,β) функция и $[a,b]\subset(\alpha,\beta)$. Тогда

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

6.6 Свойства интеграла Римана

6.6.1 Линейность и аддитивность интеграла

С помощью теоремы Дарбу простые свойства интегральных сумм переносятся на интеграл.

1⁰. Если $f\in R([a,b])$ и $c\in R$, то $(cf)\in R([a,b])$ и

$$\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

⌈ Заметить, что всегда $S(cf;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) = cS(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\})$ и дважды воспользоваться теоремой Дарбу. ⌋

2⁰. Если $\{f,g\}\subset R([a,b])$, то $(f+g)\in R([a,b])$ и

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

⌈ Заметить, что $S(f+g;\lambda,\{(\xi_i|\lambda\}) = S(f;\lambda,\{(\xi_i|\lambda\}) + S(g;\lambda,\{\xi_i|\lambda\})$, и трижды использовать теорему Дарбу. ⌋

Упражнение 33. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 (x^2+3x+2)\,dx$.

3⁰. Если $f\in R([a,b])$ и $c\in(a,b)$, то $f\in R([a,c])$ и $f\in R([c,b])$, причём

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

⌈ I. Докажем сначала более общее утверждение, представляющее самостоятельный интерес:

для любой ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции f справедливы следующие равенства для нижних и верхних интегралов

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)\,dx = \int_{\bar{a}}^{c} f(x)\,dx + \int_{\bar{c}}^{b} f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,dx = \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\,dx + \int_{c}^{\underline{b}} f(x)\,dx, \tag{2}$$

Доказательства этих равенств аналогичны, поэтому докажем только равенство (2). Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. По определению верхнего интеграла имеем $\exists\,\lambda_1 = \lambda_1([a,c]) \;:\; U(f;\lambda_1) < \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\,dx + \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\exists\,\lambda_2 = \lambda_2([c,b]) : \; U(f;\lambda_2) < \int_{c}^{\underline{b}} f(x)\,dx + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Поэтому для разбиения $\lambda = \lambda([a,b]) := \lambda_1 \cup \lambda_2$ получаем $\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,dx \le U(f;\lambda) = U(f;\lambda_1) + U(f;\lambda_2) < < \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\,dx + \int_{c}^{\underline{b}} f(x)\,dx + \varepsilon$. Таким образом, $\forall\varepsilon > 0 : \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,dx \le \le \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\,dx + \int_{c}^{\underline{b}} f(x)\,dx + \varepsilon$, откуда

$$\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,dx \le \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\,dx + \int_{c}^{\underline{b}} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Аналогично, для произвольного $\varepsilon > 0$ $\exists\,\lambda = \lambda([a,b]) \;:\; U(f;\lambda) < \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,dx + \varepsilon$. Пусть теперь $\lambda' := \lambda \cup \{c\}$, $\lambda_1 = \lambda' \cap [a,c]$, $\lambda_2 = \lambda' \cap [c,b]$. Тогда $\int_{a}^{\underline{c}} f(x)\,dx + \int_{c}^{\underline{b}} f(x)\,dx \le U(f;\lambda_1) + U(f;\lambda_2) = U(f;\lambda') \le U(f;\lambda) < < \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,dx + \varepsilon$. Отсюда

$$\int_{a}^{\underline{c}} f(x)\,dx + \int_{c}^{\underline{b}} f(x)\,dx \le \int_{a}^{\underline{b}} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Теперь из неравенств (3) и (4) имеем равенство (2).

II. Пусть равенства (1) и (2) имеют место. Согласно условию $f \in \mathcal{R}([a,b])$ левые части равенств (1) и (2) равны, кроме того, всегда имеем $\int_{\bar{a}}^{c} f(x)\,dx \le \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\,dx$, $\int_{\bar{c}}^{b} f(x)\,dx \le \int_{c}^{\underline{b}} f(x)\,dx$. Поэтому $\int_{\bar{a}}^{c} f(x)\,dx = = \int_{a}^{\underline{c}} f(x)\,dx$, $\int_{\bar{c}}^{b} f(x)\,dx = \int_{c}^{\underline{b}} f(x)\,dx$ и все утверждения 3^0 доказаны. $\rfloor$

Упражнение 34. Доказать равенство (1).

Упражнение 35. Доказать, что $f \in R([a,b])$, если $f \in R([a,c])$ и $f \in R[c,b])$.

Упражнение 36. Доказать, что функция $f(x) = [x]$, $x \in [0,5/2]$ интегрируема по отрезку $[0,5/2]$ и вычислить интеграл $\int\limits_0^{5/2} [x]\,dx$.

6.6.2 Неравенства и теорема о среднем значении

Следующие факты постоянно используются в математических рассуждениях, связанных с интегралами.

1⁰. Пусть $\{f,g\} \subset R([a,b])$ и $f(x) \le g(x)$, $x \in [a,b]$. Тогда справедливо неравенство $\int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

⌈ Для произвольного разбиения λ имеем $L(f;\lambda) \le L(g;\lambda) \le \underline{\int\limits_a^b} g(x)\,dx = = \int\limits_a^b g(x)\,dx$, откуда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \underline{\int\limits_a^b} f(x)\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx$ по определению нижнего и верхнего интегралов, интегрируемости функций f и g. ⌋

2⁰. Пусть $f \in R([a,b])$ и $m := \inf\limits_{[a,b]} f$, $M := \sup\limits_{[a,b]} f$. Тогда справедливы неравенства $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

⌈ Воспользоваться неравенствами $m \le f(x) \le M$, $x \in [a,b]$, свойством 1^0 и примером 2 п. 6.2.2. ⌋

Упражнение 37. Если $f \in R([a,b])$ и $\forall\, x \in [a,b] \;:\; f(x) \ge 0$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$. Доказать это утверждение.

Упражнение 38. Пусть $f \in R([0,1])$ и $\forall\, x \in [0,1] \;:\; f(x) - x \ge 0$. Доказать, что $\int\limits_0^1 f(x)\,dx \ge \dfrac{1}{2}$.

3⁰. Теорема о среднем значении. Для функции $f \in C([a,b])$ $\exists\, \theta \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\theta)(b-a)$.

⌈ Согласно свойству 2^0 $m \le L := \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \le M$. Из условия $f \in C([a,b])$ следует согласно второй теореме Вейерштрасса $\exists\,\{x_*, x^*\} \subset$

$[a,b]: \quad m = f(x_*), \quad M = f(x^*)$. Следовательно, $f(x_*) \le L \le f(x^*)$ и по теореме Коши о промежуточном значении существует число θ, лежащее на отрезке с концами x_* и x^*, для которого $f(\theta) = L$. ⌋

Упражнение 39. Пусть функция f удовлетворяет таким условиям: 1) $f \in C([a,b])$; 2) $\forall\, x \in [a,b]: \ f(x) \ge 0$; 3) $\exists\, x_0 \in [a,b]: \ f(x_0) > 0$. Доказать, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

Упражнение 40. Пусть $\{f,g\} \subset R([a,b])$ и $m := \inf\limits_{[a,b]} f$, $M := \sup\limits_{[a,b]} f$; $g(x) \ge 0, \ x \in [a,b]$. Доказать, что $(fg) \in R([a,b])$ и имеют место неравенства $m\int\limits_a^b g(x)\,dx \le \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Упражнение 41. Пусть $f \in C([a,b])$, $g \in R([a,b])$ и $g(x) \ge 0$, $x \in [a,b]$. Доказать, что $\exists\, \theta \in [a,b]: \ \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\theta)\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Упражнение 42. Для функций $\{f,g\} \subset R([a,b])$ вычислить предел

$$\lim_{|\lambda|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,dx.$$

4^0. Неравенство для модуля интеграла. Для функции $f \in R([a,b])$ имеем $|f| \in R([a,b])$ и $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

⌈ Интегрируемость $|f|$ есть следствие интегрируемости f, критерия интегрируемости и оценки $\omega_k(|f|) = \sup\{|f(x')| - |f(x'')| \mid \{x',x''\} \subset [x_k, x_{k+1}]\} \le \sup\{|f(x') - f(x'')| \mid \{x',x''\} \subset [x_k, x_{k+1}]\} = \omega_k(f)$. Неравенство для модуля интеграла является следствием неравенств $\forall\, x \in [a,b]$: $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. и свойства 1^0. ⌋

Упражнение 43. Для функции $f \in R([0,1])$ доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{1/n}^{1} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

Упражнение 44. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi} \sin^n x\,dx = 0$.

Упражнение 45. Для функции $f \in C([0,1])$ вычислить предел:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(x^n)\,dx$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(x^n(1-x)^n)\,dx$.

Упражнение 46. Вычислить предел:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^4\int\limits_n^{n+1}\frac{x\,dx}{1+x^5}\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3\int\limits_n^{2n}\frac{x\,dx}{1+x^5}\right)$.

Упражнение 47. Неравенство Коши. Для $\{f,g\}\subset R([a,b])$ справедливо неравенство $\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\le\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\int\limits_a^b g^2(x)\,dx$.

Упражнение 48. Функция $f\in C([a,b])$ и $\forall\, g\in C([a,b])$: $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx=0$. Доказать, что $f(x)=0,\ x\in[a,b]$.

Упражнение 49. Функция $f\in C([a,b])$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx=0$. Доказать

√

неравенство $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\le -mM(b-a)$, $m=\min\limits_{[a,b]}f$, $M=\max\limits_{[a,b]}f$.

Упражнение 50. Для $\{f,g\}\subset R([a,b])$ положим для каждого $x\in[a,b]$ $h(x):=\min(f(x),g(x))$; $H(x):=\max(f(x),g(x))$. Доказать, что $\{h,H\}\subset R([a,b])$.

Упражнение 51*. Для $f\in C([a,b])$ доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_a^b f^{2n}(x)\,dx\right)^{1/2n}=\max_{[a,b]}|f|.$$

6.6.3 Интеграл как функция верхнего предела

Определение 1. *Положим* $\forall f$: $\int\limits_a^a f(x)\,dx:=0$. *Для функции* $f\in R([a,b])$, *где* $a<b$, *положим*

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx:=-\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Пусть $f\in R([a,b])$. Согласно свойству 3^0 п. 6.6.1 $f\in R([a,x])$ для любого $x\in(a,b]$. Определим функцию φ, положив $\varphi(x):=\int\limits_a^x f(u)\,du$, $x\in[a,b]$. Заметим, что $\varphi(a)=0$.

Теорема 7. *Если* $f\in R([a,b])$, *то* $\varphi\in C([a,b])$.

⌈ Для любых $\{x',x''\}\subset[a,b]$ имеем такое неравенство $|\varphi(x')-\varphi(x'')|=$ $=\left|\int\limits_a^{x'} f(u)\,du-\int\limits_a^{x''} f(u)\,du\right|=\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(u)\,du\right|\le\sup\limits_{[a,b]}|f|\cdot|x'-x''|$. Следовательно, функция f равномерно непрерывна на $[a,b]$. ⌋

Упражнение 52. Построить график функции $\varphi(x) = \int\limits_{-1}^{x} \operatorname{sign} u\, du$, $x \in [-1, 1]$ и проверить, что $\varphi'_-(0) = -1$, $\varphi'_+(0) = 1$. Таким образом, производная $\varphi'(0)$ не существует.

Теорема 8. *Если* $f \in C([a,b])$, *то* $\varphi \in C^1([a,b])$, *причём* $\forall x \in [a,b]:\quad \varphi'(x) = f(x)$.

⌈ Пусть произвольное $x \in [a,b]$ фиксировано и Δx таково, что $(x+\Delta x) \in [a,b]$, $\Delta x \neq 0$. Поскольку $\dfrac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(u)\, du$, то согласно теореме о среднем значении $\dfrac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = f(\theta(x;\Delta x))$, где значение $\theta(x, \Delta x)$ лежит между x и $x + \Delta x$. Поскольку f непрерывна в точке x, то существует предел $f(\theta(x,\Delta x)) \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$ и, следовательно, существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = f(x)$. Таким образом, $\varphi'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$. ⌋

Упражнение 53. Найти предел:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} \int\limits_0^x \dfrac{u \operatorname{arctg} u}{1+u}\, du \right)$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^3} \int\limits_0^x (e^{u^2} - 1)\, du \right)$.

Указание. Использовать правило Лопиталя.

Теорема 9. *(О существовании примитивной). Функция* $f \in C([a,b])$ *имеет примитивную на* $[a,b]$.

⌈ Согласно теореме 2 примитивной для f на $[a,b]$ является функция φ. ⌋

Упражнение 54. Доказать, что функция $f \in C([0,+\infty)$ имеет примитивную на $[0,+\infty)$.

6.7 Формула Ньютона–Лейбница и следствия из неё

6.7.1 Основная формула интегрального исчисления

Теорема 10. *(Формула Ньютона-Лейбница). Предположим, что функция* f *удовлетворяет условиям: 1)* $f \in R([a,b])$; *2)* f *имеет примитивную на* $[a,b]$. *Пусть* G *— произвольная примитивная функции* f *на отрезке* $[a,b]$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a)$.

⌈ Первое доказательство для $f \in C([a,b])$. Функция

$$\varphi(x) = \int\limits_a^x f(u)\,du, \ x \in [a,b] \tag{1}$$

согласно теореме 9 п. 6.6.3 есть примитивная функции f на $[a,b]$. При этом с учётом результатов п. 5.1.1 гл. 5

$$\exists\, C \in \boldsymbol{R}\ \forall\, x \in [a,b]:\ G(x) = \varphi(x) + C. \tag{2}$$

Поскольку $\varphi(a) = 0$, то $G(a) = C$. Положив в (2) $x = b$ получим $G(b) = \varphi(b) + G(a)$, откуда $\varphi(b) = G(b) - G(a)$, и с учётом (1) получаем $\int\limits_a^b f(u)\,du = G(b) - G(a)$.

Второе доказательство в общем случае. Пусть $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Сначала заметим, что

$$G(b) - G(a) = \tag{3}$$
$$= (G(x_1) - G(x_0)) + (G(x_2) - G(x_1)) + \ldots + (G(x_n) - G(x_{n-1})),$$

затем к каждой разности в правой части (3) применим теорему Лагранжа. Тогда $G(b) - G(a) = G'(\xi_0)\Delta x_0 + G'(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + G'(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}$, где $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Таким образом,

$$G(b) - G(a) = S(f; \lambda, \{\xi_i|\lambda\}), \tag{4}$$

и согласно теореме Дарбу из (4) при $|\lambda| \to 0$ получим следующее равенство $G(b) - G(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. ⌋

Замечание. Часто обозначают $G(x)\Big|_{x=a}^{x=b} := G(b) - G(a)$.

Упражнение 55. Пусть $f \in C^1([1, +\infty))$. Доказать следующее равенство $\int\limits_1^x [u] f'(u)\,du = [x]f(x) - \sum\limits_{k:1 \le k \le x} f(k)$, $x \ge 1$, где $[a]$ — целая часть числа a.

Упражнение 56. Пусть $f:\ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ — периодическая с периодом T функция, которая имеет примитивную на $\boldsymbol{R}$. Тогда для любой примитивной G функции f на $\boldsymbol{R}$ $\exists\, C \in \boldsymbol{R}$ $\forall\, x \in \boldsymbol{R}$: $G(x+T) = G(x) + C$. В частности, $\forall\, x \in \boldsymbol{R}$: $G(x+T) - G(x) = G(T) - G(0)$.

Указание. Заметить, что функции $G(\cdot)$ и $G(\cdot + T)$ являются примитивными функции f на $\boldsymbol{R}$.

Упражнение 57. Функция $f \in C(\boldsymbol{R})$ и периодична с периодом T. Доказать, что $\forall\, a \in \boldsymbol{R}$: $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx$.

Пример. Формула Лейбница. Пусть функция $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ имеет примитивную на $\boldsymbol{R}$ и интегрируема по Риману на каждом конечном отрезке, а функции $a, b: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ дифференцируемы на $\boldsymbol{R}$. Тогда

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(u)\,du = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x),\ x \in \boldsymbol{R}.$$

⌈ Пусть G — некоторая примитивная функции f на $\boldsymbol{R}$. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(u)\,du = G(b(x)) - G(a(x)),\ x \in \boldsymbol{R}, \tag{5}$$

причём правая часть (5) имеет производную, которая равна по цепному правилу $\frac{d}{dx}(G(b(x)) - G(a(x))) = G'(b(x))b'(x) - G'(a(x))a'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x),\quad x \in \boldsymbol{R}$. ⌋

6.7.2 Формулы замены переменной и интегрирования по частям

Теорема 11. *Предположим, что : 1) $f \in C((A,B))$; 2) $u \in C^1([\alpha,\beta])$; 3) $u([\alpha,\beta]) \subset (A,B)$.*

Тогда справедлива формула $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)\,dt = \int\limits_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx.$

⌈ Функция f непрерывна на отрезке с концами $u(\alpha)$ и $u(\beta)$, поэтому f имеет примитивную на этом отрезке. Пусть G — некоторая примитивная для f, тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx = G(u(\beta)) - G(u(\alpha)). \tag{1}$$

Кроме того, функция $G(u)$ есть примитивная функции $f(u)u'$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $(f(u)u') \in C([\alpha,\beta])$. Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)\,dt = G(u(\beta)) - G(u(\alpha)). \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует утверждение теоремы 11. ⌋

Упражнение 58. Пусть $a > 0$, $g: [0,a] \to [0,+\infty)$ и $g \in C([0,a])$, $p \geq 1$. Доказать равенства: а) $p\int\limits_0^a g(t)\left(\int\limits_0^t g(s)\,ds\right)^{p-1} dt = \left(\int\limits_0^a g(s)\,ds\right)^p$;

b) $\int\limits_0^a \dfrac{g(t)}{1+\int\limits_0^t g(s)\,ds}\,dt = \ln\left(1+\int\limits_0^a g(s)\,ds\right)$; c) $\int\limits_0^1 \cos\left(\int\limits_0^t f(s)\,ds\right) f(t)\,dt =$
$= \sin\left(\int\limits_0^1 f(s)\,ds\right)$; d) $\int\limits_0^1 \exp\left(\int\limits_0^t f(s)\,ds\right) f(t)\,dt = \exp\left(\int\limits_0^1 f(s)\,ds\right) - 1.$

Упражнение 59. Пусть $a > 0$. Доказать, что $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{x^4 dx}{a^x+1} = \dfrac{1}{5}$.

Пример. 1. Решение функционального уравнения Коши в классе локально интегрируемых по Риману функций. Определим функцию $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, которая интегрируема по каждому конечному отрезку и такую, что

$$\forall \{x,y\} \subset \boldsymbol{R} : \quad f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{3}$$

⌈ Зафиксируем в равенстве (3) произвольное значение x и полученное равенство проинтегрируем по y по отрезку $[0,1]$, получим равенство $\int\limits_0^1 f(x+y)\,dy = f(x) + C, \quad C := \int\limits_0^1 f(y)\,dy$, которое после замены переменной в интеграле примет вид

$$\int\limits_x^{x+1} f(t)\,dt = f(x) + C, \tag{4}$$

здесь $x \in \boldsymbol{R}$. По теореме 7 п. 6.6.3 интеграл в (4) есть непрерывная функция от $x \in \boldsymbol{R}$, поэтому в силу равенства (4) функция $f \in C(\boldsymbol{R})$. Тогда по теореме 8 п. 6.6.3 интеграл в (4) есть функция, имеющая производную для $x \in \boldsymbol{R}$, следовательно функция f имеет производную f' на $\boldsymbol{R}$. По формуле Лейбница из (4) имеем $f(x+1) - f(x) = f'(x), \quad x \in \boldsymbol{R}$, откуда с учетом (3) следует, что $f(1) = f'(x), \quad x \in \boldsymbol{R}$. Следовательно, $f(x) = f(1)x + L$, $x \in \boldsymbol{R}$ с некоторым числом $L \in \boldsymbol{R}$. Число $L = 0$, так как при $x = 1$ имеем $f(1) = f(1) + L$. Окончательно, $f(x) = f(1)x$, $x \in \boldsymbol{R}$. ⌋

Теорема 12. *Пусть* $\{u,v\} \in C^1([a,b])$.

Тогда $\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx.$

⌈ Поскольку функция uv есть примитивная для суммы $uv' + u'v$ на $[a,b]$, то по формуле Ньютона-Лейбница имеем $\int\limits_a^b (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))\,dx =$ $= u(b)v(b) - u(a)v(a)$, откуда с учетом свойства 2^0 п. 6.6.1 получим нужную формулу. ⌋

Пример. 2. Вычислим интеграл $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ для $n \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\})$.

⌈ При $n \geq 2$ применим теорему 12 к интегралу I_n

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \left| \begin{array}{cc} \sin^{n-1} x = u(x); & \sin x = v'(x) \\ (n-1)\sin^{n-2} x\cos x = u'(x); & -\cos x = v(x) \end{array} \right| =$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Поэтому $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \geq 2$. Поскольку интегралы $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ и $I_1 = -\cos x\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = 1$, то

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}; \quad k \geq 0. \tag{5}$$

Здесь для $k \geq 1$ использованы обозначения $(2k)!! := 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k)$; $(2k+1)!! := 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k+1)$. ⌋

Замечание. Формула Валлиса. Поскольку имеют место неравенства $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$, $n \geq 1$, то из формул (5) имеем

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

откуда получаем такие неравенства для числа $\pi/2$

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n}, \tag{6}$$

причём разность между правой и левой частями неравенств (6) равна

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n(2n+1)} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n}, \qquad n \geq 1.$$

Поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Равенство (7) известно как формула Валлиса.

Упражнение 60. Пусть $f \in R([a,b])$. Доказать, что:

a) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$; b) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(c+x)\,dx$, $c \in R$.

Упражнение 61. Функция $F \in C([a,b])$ и для некоторого разбиения $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a,b]$ для каждого $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ удовлетворяет условиям: 1) $F \in C^1((x_k, x_{k+1}))$; 2) существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_k, x>x_k} F'(x)$, $\lim\limits_{x\to x_{k+1}, x<x_{k+1}} F'(x)$. Доказать ***обобщённую формулу Ньютона-Лейбница*** $\int\limits_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Указание. См. упр. 22 и 30.

Упражнение 62. Для функций u и v, удовлетворяющих условиям предыдущего упражнения на функцию F, доказать правило интегрирования по частям.

Упражнение 63. Вычислить предел : a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 e^x x^n dx$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \int\limits_0^1 e^x x^n dx\right)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\int\limits_0^1 e^x x^{n+1} dx}{\int\limits_0^1 e^x x^n\,dx}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \dfrac{ne^x}{n+x}\,dx$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(x^n)\,dx$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \int\limits_0^1 x^n f(x)\,dx\right)$, $f \in C([0,1])$.

6.7.3 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема 13. *Для $n \in (N \cup \{0\})$ пусть $f \in C^{(n+1)}((\alpha,\beta))$. Тогда для любых $a \in (\alpha,\beta)$ и $x \in (\alpha,\beta)$ справедливо равенство*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Γ Для фиксированного $x \in (\alpha,\beta)$ рассмотрим функцию

$$g(s) := f(s) + \frac{f'(s)}{1!}(x-s) + \frac{f''(s)}{2!}(x-s)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(s)}{n!}(x-s)^n$$

для $s \in (\alpha,\beta)$. Для функции g имеем $g(x) = f(x)$ и

$$g'(s) = f'(s) + \frac{f''(s)}{1!}(x-s) - f'(s) + \frac{f'''(s)}{2!}(x-s)^2 - \frac{f''(s)}{1!}(x-s)+$$
$$+\frac{f^{(iv)}(s)}{3!}(x-s)^3 - \frac{f'''(s)}{2!}(x-s)^2 + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}(x-s)^n -$$
$$-\frac{f^{(n)}(s)}{(n-1)!}(x-s)^{n-1} = \frac{f^{(n+1)}(s)}{n!}(x-s)^n, \quad s \in (\alpha,\beta).$$

Из формулы Ньютона-Лейбница имеем равенство $g(x) - g(a) = \int\limits_a^x g'(s)\,ds$, которое совпадает с равенством теоремы. ⌋

Упражнение 64. С помощью теоремы 13 доказать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Упражнение 65. Доказать, что при условиях теоремы 13 для любых $\{a,b,x\} \subset (\alpha,\beta)$ справедливо равенство

$$\frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(b)(x-b)^k - f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}.$$

Упражнение 66. Функции u и v имеют примитивные U и V на $[a,b]$ соответственно, причём $(uV + Uv) \in R([a,b])$. Доказать, что $(uV) \in R[a,b])$ тогда и только тогда, когда $(Uv) \in R[a,b])$, при этом справедливо равенство $\int\limits_a^b U(x)v(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int\limits_a^b u(x)V(x)\,dx$.

6.8 Предельный переход под знаком интеграла

6.8.1 Поточечная и равномерная сходимость последовательности функций

Пусть $A \subset R$, $f:\ A \to R$ и $f_n:\ A \to R$, $n \in N$.

Определение 1. *Последовательность функций $\{f_n\}$ сходится поточечно на множестве A к функции f, если*

$$\forall x \in A \ : \quad f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty.$$

Примеры. 1. Пусть $A = [0,1]$; $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, $n \geq 1$; $f(x) = 0$, $x \in [0,1)$, $f(1) = 1$. Последовательность $\{f_n \mid n \geq 1\}$ сходится к f поточечно на $[0,1]$.

2. Пусть $A = R$; $f(x) = 0$, $x \in R$; $f_n(x) = 0$, $x \leq n$, $f(x) = 1$, $x > n$; $n \geq 1$. Тогда $\{f_n \mid n \geq 1\}$ сходится к f поточечно на R.

3. Пусть $A = [0,1]$; $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Рассмотрим последовательность $f_n(x) = 0$, $x \in ([0,1] \setminus [1/n, 2/n])$, $f(x) = n^2$, $x \in [1/n, 2/n]$; $n \geq 1$. Последовательность $\{f_n \mid n \geq 1\}$ сходится к f поточечно на $[0,1]$.

Определение 2. *Последовательность функций $\{f_n\}$ сходится равномерно на множестве A к функции f, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in A: \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Замечания. 1. Условие определения 2 может быть записано в следующей равносильной форме $d_n := \sup\limits_A |f_n(x) - f(x)| \to 0$, $n \to \infty$, удобной для практического исследования равномерной сходимости.

2. Из равномерной на множестве сходимости следует поточечная на множестве сходимость. Обратное утверждение неверно. Так, в примерах 1 — 3 равномерной сходимости нет. Действительно, в примерах 1 и 2 $d_n = 1$, $n \geq 1$, а в примере 3 $d_n = n^2$, $n \geq 1$.

6.8.2 Теорема о предельном переходе

Сначала докажем лемму о том, что равномерный на отрезке предел интегрируемых функций есть интегрируемая функция.

Лемма 1. *Предположим, что выполнены условия: 1) $\forall n \in \mathbf{N}: \ f_n \in \mathbf{R}([a,b])$; 2) последовательность $\{f_n \mid n \geq 1\}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к некоторой функции $f: [a,b] \to \mathbf{R}$. Тогда $f \in \mathbf{R}([a,b])$.*

⌈ Используем критерий интегрируемости. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Согласно условию 2) леммы

$$\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall x \in [a,b]: \quad |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \iff$$

$$\iff f_N(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{1}$$

Теперь зафиксируем N в соотношении (1). Так как $f_N \in \mathbf{R}([a,b])$, то

$$\exists \lambda: \quad U(f_N;\lambda) - L(f_N;\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k(f_N) - m_k(f_N))\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из равенства (1) для каждого k, $0 \leq k \leq n-1$, имеем неравенства $m_k(f) \geq m_k(f_N) - \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$, $M_k(f) \leq M_k(f_N) + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Поэтому

$$U(f;\lambda) - L(f;\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(M_k(f_N) - m_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right)\Delta x_k < \varepsilon. \qquad \rfloor$$

Теорема 14. *Предположим, что выполнены условия: 1) $\forall n \in \mathbf{N}: \ f_n \in \mathbf{R}([a,b])$; 2) последовательность $\{f_n \mid n \geq 1\}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к функции f.*

Тогда $f \in R([a,b])$ и справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

⌈ Интегрируемость функции f содержится в лемме 1. Для доказательства равенства заметим, что

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$
$$\le \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|(b-a) \to 0, \quad n \to \infty. \qquad \rfloor$$

Замечание. Теорема 14 даёт простое достаточное условие для предельного перехода под знаком интеграла Римана, Более полезным является такое утверждение, которое приводим без доказательства.

Предположим, что: 1) $\forall n \in N:\ f_n \in R([a,b])$; 2) $f \in R([a,b])$ и $f_n \to f$, $n \to \infty$, поточечно на $[a.b]$; 3) $\exists C > 0\ \forall n \ge 1\ \forall x \in [a,b]:\ |f_n(x)| \le C$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Упражнение 67. Доказать, что при условиях теоремы 14 для любой функции $g \in R([a,b])$ справедливо также следующее равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Упражнение 68. С помощью теоремы Вейерштрасса доказать, что для каждой функции $f \in C([a,b])$ существует последовательность многочленов, равномерно на $[a,b]$ сходящаяся к функции f.

Упражнение 69*. Пусть $f \in C([a,b])$ и $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0$ для каждого $n \in (N \cup \{0\})$. Доказать, что $f(x) = 0$, $x \in [a,b]$.

Упражнение 70. Пусть $f \in C([-1,1])$ и $\int_{-1}^{1} x^{2n} f(x)\,dx = 0$ для каждого $n \in (N \cup \{0\})$. Доказать, что f — нечётная функция на $[-1,1]$.

Указание. Принять во внимание, что условие задачи выполнено также для функции $f(-x)$, $x \in [-1,1]$, следовательно, и для чётной функции $f(x) + f(-x), x \in [-1,1]$. Поэтому $\int_{-1}^{1} x^m (f(x) + f(-x))\,dx = 0$ для всех $m \in (N \cup \{0\})$.

Упражнение 71. Пусть $f \in C([-1,1])$ и $\int_{-1}^{1} x^{2n+1} f(x)\,dx = 0$ для каждого $n \in (N \cup \{0\})$. Доказать, что f — чётная функция на $[-1,1]$.

Упражнение 72. Пусть $f \in C([a,b])$ и $\int\limits_a^b e^{nx} f(x)\,dx = 0$ для каждого $n \in (N \cup \{0\})$. Доказать, что $f(x) = 0,\ x \in [a,b]$.

Упражнение 73. Пусть $f \in C([a,b])$ и для фиксированного $m \in N$ выполняется условие $\forall n \in N, n \geq m\ :\ \int\limits_a^b x^n f(x)\,dx = 0$. Доказать, что $f(x) = 0,\ x \in [a,b]$.

Упражнение 74. Пусть $f \in C([0,1])$ и $\int\limits_a^b x^{3n} f(x)\,dx = 0$ для каждого $n \in (N \cup \{0\})$. Доказать, что $f(x) = 0,\ x \in [a,b]$.

6.9 Примеры применения определённого интеграла

6.9.1 Площадь криволинейной трапеции

1. Определение криволинейной трапеции

Пусть $f:\ [a,b] \to R$ — неотрицательная и ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция.

Определение 1. Множество точек плоскости

$$F := \{(x,y) \in R^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

называется ***криволинейной трапецией.***

Упражнение 75. Изобразить на плоскости криволинейные трапеции над отрезком $[0,1]$, соответствующие функциям:

a) $f(x) = x$; b) $f(x) = \sqrt{x}$; c) $f(x) = x^2$.

2. Определение площади криволинейной трапеции

Пусть $\lambda = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Проведенные через точки с абсциссами, равными $x_0, x_1, \ldots, x_n$, вертикальные прямые разбивают криволинейную трапецию F на n криволинейных трапеций $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$, основаниями которых являются соответственно отрезки $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Для каждого $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ в криволинейную трапецию F_k впишем прямоугольник P'_k и около F_k опишем прямоугольник P''_k.

Далее предполагаем известной *площадь прямоугольника.*

При этом для прямоугольников P_k' и P_k'', имеющих общее основание $[x_k, x_{k+1}]$, их высоты соответственно равны $m_k = m_k(f) := \inf\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f$, $M_k = M_k(f) := \sup\limits_{[x_k, x_{k+1}]} f$, здесь $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Поэтому площади прямоугольников P_k' и P_k'' соответственно равны $m_k \Delta x_k$ и $M_k \Delta x_k$, а суммарные площади всех вписанных и всех описанных прямоугольников соответственно равны $\sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = L(f; \lambda)$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = U(f; \lambda)$.

Определение 2. ***Внутренней площадью*** *криволинейной трапеции F называется число $s_*(F) := \sup\limits_{\lambda} L(f; \lambda)$,* ***внешней площадью*** *криволинейной трапеции F называется число $s^*(F) := \inf\limits_{\lambda} U(f; \lambda)$, где точные верхняя и нижняя грани берутся по всем разбиениям λ отрезка $[a, b]$. Если $s_*(F) = s^*(F)$, то криволинейная трапеция F называется* ***квадрируемой****, а число $s(F) := s_*(F) = s^*(F)$ называется* ***площадью*** *криволинейной трапеции F.*

Упражнение 76. Привести пример криволинейной трапеции, не имеющей площади.

3. Формула для вычисления площади криволинейной трапеции.

Теорема 15. *Если $f \in C([a, b])$, $f \geq 0$ на $[a, b]$, то криволинейная трапеция F квадрируема и ее площадь равна*

$$s(F) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

⌈ Согласно определению $s_*(F) = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$, $\quad s^*(F) = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$, а по условию $f \in C([a, b])$, а потому $f \in R([a, b])$ и, следовательно,

$$s_*(F) = s^*(F) = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad \rfloor$$

Примеры. 1. Площадь криволинейной трапеции F из упр. 75 с) равна $\int\limits_0^1 x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \dfrac{1}{3}$. Площадь этой криволинейной трапеции впервые вычислил Архимед.

2. Пусть G — фигура, ограниченная эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\quad a > 0$, $b > 0$. Из геометрических соображений ясно, что для вычисления площади G достаточно вычислить площадь следующей криволинейной трапеции $F = \left\{(x,y) \;\middle|\; 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\ \right\}$. По теореме 15 имеем для площади $s(G)$ фигуры G

$$s(G) = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \left|\begin{array}{l} x = a\sin t, \\ dx = a\cos t\,dt \end{array}\right| = 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \pi ab.$$

Упражнение 77. Пусть $\{f,g\} \subset C([a,b])$, $f(x) \le g(x)$, $x \in [a,b]$ и $G := \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$. Доказать, что фигура G квадрируема и ее площадь равна $s(G) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$.

Упражнение 78. Предположив известной площадь кругового сектора, доказать, что криволинейный сектор F, определяемый в полярных координатах формулой $F = \{(\theta, r) \mid \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\ 0 \le r \le \rho(\theta)\}$, $\rho \in C([\theta_1,\theta_2])$, является квадрируемым с площадью $s(F) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2(\theta)\,d\theta$.

6.9.2 Приближенное вычисление интегралов

Для использования формулы Ньютона-Лейбница при вычислении интеграла нужно знать примитивную. Если эта примитивная через элементарные функции не выражается, то для вычисления интеграла используются приближенные формулы, основанные на идеях, аналогичных использованным в п. 6.9.1.

1. Формула прямоугольников.

Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, представляющего при условиях п. 6.9.1 площадь криволинейной трапеции, используют суммарную площадь прямоугольников $J_n := \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$, полученных следующим образом. Пусть разбиение λ имеет вид $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k = 0,1,\ldots,n$, при этом $|\lambda| \to 0$, $n \to \infty$. Над основанием $[x_k, x_{k+1}]$ рассмотрим прямоугольник с высотой $f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1$, при этом суммарная площадь полученных прямоугольников равна J_n. Число J_n есть интегральная сумма для функции $f \in \boldsymbol{R}([a,b])$ и потому $J_n \to J$, $n \to \infty$ в силу теоремы Дарбу.

2. Формула трапеций

Используем обозначения п. 6.9.1, 1. Рассмотрим в качестве приближения для площади криволинейной трапеции с основанием $[x_k, x_{k+1}]$ площадь трапеции с вершинами в следующих точках плоскости $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k)), (x_{k+1}, f(x_{k+1})), (x_{k+1}, 0)$, площадь этой трапеции равна $\frac{1}{2}(f(x_k)+f(x_{k+1}))\frac{b-a}{n}$. Так получаем формулу трапеций

$$K_n := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\,\frac{b-a}{n} =$$
$$= \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right).$$

Поскольку $K_n = \frac{1}{2}\left(S(f;\lambda,\{x_k|\lambda\})+S(f;\lambda,\{x_{k+1}|\lambda\})\right)$, то по теореме Дарбу для функции $f\in \boldsymbol{R}([a,b])$ $K_n \to \int\limits_a^b f(x)\,dx$, $n\to\infty$.

Упражнение 79. Для $f\in C^{(2)}([a,b])$ доказать неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx - J_n\right| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2}\max_{[a,b]}|f''|,\quad n\ge 1.$$

Указание. Для каждого $k = 0,1,\ldots,n-1$ оценить с помощью формулы Тейлора разность $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) =$

$$= \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\left(f(x)-f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right)dx = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f''(c_k)\left(x-\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)^2 dx.$$

6.9.3 Длина дуги кривой

1. Определение непрерывной кривой.

Определение 3. *Пусть $\{\varphi,\psi\}\subset C([a,b])$. Множество точек плоскости $\Gamma := \{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x=\varphi(t),\ y=\psi(t), a\le t\le b\}$ называется **непрерывной кривой** в плоскости.*

Упражнение 80. Изобразить на плоскости следующие кривые:

a) $\Gamma = \{(x,y)\mid x=\alpha t+\beta,\ y=\gamma t+\delta;\ \ t\in \boldsymbol{R}\}$,

b) $\Gamma = \{(x,y)\mid x=t,\ y=2t,\ \ t\in[0,1]\}$,

c) $\Gamma = \{(x,y)\mid x=t,\ y=t^2,\ \ t\in \boldsymbol{R}\}$,

d) $\Gamma = \{(x,y)\mid x=\cos t,\ y=\sin t,\ \ t\in[0,2\pi]\}$,

e) $\Gamma = \{(x,y)\mid x=\cos t,\ y=\sin t,\ \ t\in[0,\pi]\}$,

f) $\Gamma = \{(x,y)\mid x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t\in[0,2\pi]\}$, $a>0$, $b>0$.

2. Определение спрямляемой кривой и длины кривой

Пусть $\lambda = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, а Γ_λ — ломаная, которая получается соединением каждой пары соседних точек $((\varphi(t_k), \psi(t_k))$ и $(\varphi(t_{k+1}), \psi(t_{k+1}))$ на кривой Γ отрезком прямой, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Длина $l(\Gamma_\lambda)$ ломаной Γ_λ равна

$$l(\Gamma_\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k))^2 + (\psi(t_{k+1} - \psi(t_k))^2}.$$

Определение 4. Если существует конечный предел $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} l(\Gamma_\lambda) =: l(\Gamma)$, *то есть, если*

$$\exists\, l(\Gamma) \in \boldsymbol{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \lambda, \ |\lambda| < \delta: \qquad |l(\Gamma_\lambda) - l(\Gamma)| < \varepsilon,$$

то кривая Γ *называется* ***спрямляемой***, *а предел* $l(\Gamma)$ *называется* ***длиной кривой*** Γ.

Упражнение 81.* Построить пример непрерывной кривой Γ, для которой предел в определении 2 равен $+\infty$.

Упражнение 82. Доказать, что $l(\Gamma) = \sup\limits_{\lambda} l(\Gamma_\lambda)$.

3. Формула для вычисления длины кривой

Теорема 16. *Пусть* $\{\varphi, \psi\} \subset C^1([a,b])$. *Тогда кривая* Γ *спрямляема и её длина* $l(\Gamma)$ *равна*

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt.$$

⌈ С помощью теоремы Лагранжа для $l(\Gamma_\lambda)$ имеем

$$l(\Gamma_\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\eta_k)^2}\Delta t_k = S(\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}; \lambda, \{\xi_k|\lambda\}) + r_\lambda,$$

где $\{\xi_k, \eta_k\} \subset [t_k, t_{k+1}]$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $0 \le k \le n-1$; и

$$r_\lambda := \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\eta_k)^2} - \sqrt{\varphi'(\xi_k)^2 + \psi'(\xi_k)^2} \right) \Delta t_k.$$

Поскольку $\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2} \in C([a,b])$, то по теореме Дарбу

$$\lim_{|\lambda|\to 0} S(\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}; \lambda; \{\xi_k|\lambda\}) = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt.$$

Кроме того, согласно неравенству

$$|\sqrt{u^2 + v^2} - \sqrt{u^2 + w^2}| \le |v - w| \qquad (1)$$

для любых $\{u, v, w\} \subset \boldsymbol{R}$ имеем для r_λ

$$|r_\lambda| \le \sum_{k=0}^{n-1} |\psi'(\eta_k) - \psi'(\xi_k)|\Delta t_k \le \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(\psi')\Delta t_k.$$

В силу критерия интегрируемости для ψ' имеем $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} r_\lambda = 0$. ⌋

Упражнение 83. Доказать неравенство (1).

Упражнение 84. Пусть $f \in C^1([a,b])$ и $\Gamma = G(f) = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ \ y = f(x)\}$. Доказать, что Γ есть спрямляемая кривая и что справедливо равенство $l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

Упражнение 85. Для $\rho \in C^1([\theta_1,\theta_2])$ пусть $\Gamma := \{(\theta,r) \mid \theta \in [\theta_1,\theta_2],\ \ r = \rho(\theta)\}$ — кривая, заданная в полярных координатах. Доказать, что Γ есть спрямляемая кривая и $l(\Gamma) = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'(\theta)^2}\,d\theta$.

6.9.4 Объём тела вращения

1. Тело вращения

Пусть F—криволинейная трапеция из п. 6.9.1. Ниже рассматривается тело G, которое получается при вращении трапеции F относительно оси абсцисс.

Упражнение 86. Какое тело G получается при вращении следующей криволинейной трапеции F :

a) $F = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \ 0 \le y \le r\}$;

b) $F = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \ 0 \le y \le x - a\}$;

c) $F = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \ 0 \le y \le x + c\},\ \ c > 0$;

d) $F = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid -a \le x \le a,\ \ 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}\},\ a > 0$;

e) $F = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}\},\ a > 0$?

2. Определение объёма тела вращения

Воспользуемся обозначениями из п. 6.9.1. При вращении относительно оси абсцисс прямоугольников $P_0', P_1', \ldots, P_{n-1}'$ возникает тело $G'(\lambda)$, состоящее из прямых круговых цилиндров, которое содержится в G. Аналогично, при вращении прямоугольников $P_0'', P_1'', \ldots, P_{n-1}''$ возникает тело $G''(\lambda)$, состоящее из прямых круговых цилиндров, которое содержит тело G.

Предположим известным ***объём прямого кругового цилиндра.*** Тогда для объемов $V(G'(\lambda))$ и $V(G''(\lambda))$ тел $G'(\lambda)$ и $G''(\lambda)$ имеем значения $V(G'(\lambda)) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \pi m_k^2(f)\Delta x_k$, $\ V(G''(\lambda)) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \pi M_k^2(f)\Delta x_k$ соответственно.

Определение 5. *Числа* $V_*(G) := \sup\limits_{\lambda} V(G'(\lambda))$ *и* $V^*(G) := \inf\limits_{\lambda} V(G''(\lambda))$, *где точные грани берутся по всем возможным разбиениям* λ, *называются соответственно* ***внутренним и внешним объёмами*** *тела* G.

Если для тела G *выполняется равенство* $V_*(G) = V^*(G)$, *то тело* G *называется* ***кубируемым***, *а число* $V(G) := V_*(G) = V^*(G)$ *называется* ***объёмом*** *тела* G.

3. Формула для вычисления объёма

Теорема 17. *Пусть* $f \in C([a,b])$, $f \geq 0$ *на* $[a,b]$. *Тогда тело* G *является кубируемым и объём* G *вычисляется по формуле* $V(G) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$.

⌈ Заметим, что при условии теоремы $m_k^2(f) = m_k(f^2)$, $M_k^2(f) = M_k(f^2)$; $0 \leq k \leq n-1$. Поэтому $V(G'(\lambda)) = \pi L(f^2;\lambda)$, $V(G''(\lambda)) = \pi U(f^2;\lambda)$, кроме того $V_*(G) = \pi \underline{\int\limits_a^b} f^2(x)\,dx$, $V^*(G) = \pi \overline{\int\limits_a^b} f^2(x)\,dx$. Согласно предположению теоремы $f^2 \in C([a,b])$, а следовательно $f^2 \in R([a,b])$. Таким образом, $V_*(G) = V^*(G) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$. ⌋

Упражнение 87. С помощью последней теоремы вычислить: объём конуса, объём усечённого конуса, объём шара, объём шаровых сегмента и слоя, объём эллипсоида вращения.

Упражнение 88. ***Тором*** называется тело, получающееся при вращении относительно оси абсцисс круга $\{(x,y) \mid x^2 + (y-R)^2 \leq r^2\}$, где $0 < r < R$. Вычислить объём тора.

6.9.5 Площадь поверхности тела вращения

1. Определение площади поверхности тела вращения

Пусть P есть поверхность, полученная при вращении относительно оси абсцисс кривой $\Gamma = \{(x,y) \mid x \in [a,b] \quad y = f(x)\}$, где функция $f \in C([a,b])$, $f > 0$ на $[a,b]$. $\Gamma = G(f)$ есть непрерывная кривая. Пусть $\lambda = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Для каждого $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ соединим точки Γ $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ отрезком прямой. При вращении этих отрезков вместе с Γ получается поверхность $P(\lambda)$, составленная из боковых поверхностей усечённых конусов.

Предположим известной *площадь боковой поверхности усечённого кругового конуса.*

Площадь $s(P(\lambda))$ поверхности $P(\lambda)$ равна

$$s(P(\lambda)) = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \sqrt{(f(x_{k+1}) - f(x_k))^2 + \Delta x_k^2}.$$

Определение 6. *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} s(P(\lambda))$, *то этот предел называется площадью поверхности* P *и обозначается* $s(P)$.

2. Условие существования площади и формула для её вычисления

Теорема 18. *Пусть* $f \in C^1([a,b])$. *Тогда поверхность* P *имеет площадь, которая равна* $s(P) = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

⌈ Функция $f \in C([a,b])$ и для каждого $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ значение $(f(x_k) + f(x_{k+1}))/2$ лежит между $f(x_k)$ и $f(x_{k+1})$. По теореме Коши о промежуточном значении $\exists\, \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]: \quad (f(x_k) + f(x_{k+1}))/2 = f(\xi_k)$. По теореме Лагранжа $\exists\, \eta_k \in [x_k, x_{k+1}]: \quad f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\eta_k)\Delta x_k$. Таким образом, для любого разбиения λ

$$\begin{aligned} s(P(\lambda)) &= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\sqrt{1+f'(\eta_k)^2}\Delta x_k \\ &= 2\pi S(f\sqrt{1+(f')^2}; \lambda, \{\eta_k|\lambda\}) + r_\lambda, \end{aligned} \tag{1}$$

где $r_\lambda := 2\pi \sum\limits_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k) - f(\eta_k))\sqrt{1+f'(\eta_k)^2}\Delta x_k$. В силу оценки

$$|r_\lambda| \le 2\pi \sup_{[a,b]} \sqrt{1+(f')^2} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f)\Delta x_k,$$

критерия интегрируемости для f и теоремы Дарбу имеем

$$\lim_{|\lambda|\to 0} s(P(\lambda)) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \quad ⌋$$

6.9.6 Координаты центра масс и теоремы Гюльдена

1. Физические предположения

Если в точках плоскости $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_n,y_n)$ размещены массы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно, то координаты x_c, y_c центра масс этой системы точек определяются равенствами

$$x_c = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} p_k x_k, \qquad y_c = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} p_k y_k.$$

Если F — фигура в плоскости, которая имеет однородное распределением масс и имеет ось симметрии, то центр масс фигуры F лежит на оси симметрии. Если F имеет центр симметрии, то центр масс совпадает с центром симметрии. Если фигура F имеет однородное распределением масс и состоит из двух частей F_1 и F_2 , которые имеют соответственно массы p_1 и p_2 и центры масс (x_1, y_1), (x_2, y_2), то центр масс фигуры F имеет координаты $\dfrac{x_1p_1 + x_2p_2}{p_1+p_2}$, $\dfrac{y_1p_1 + y_2p_2}{p_1+p_2}$.

2. Координаты центра масс однородной криволинейной трапеции

Пусть F — криволинейная трапеция $F = \{(x,y) \mid x \in [a,b], \quad 0 \le y \le f(x)\}$; $\quad f \in C([a,b])$, по которой однородно распределена масса, по величине равная площади F.

Для определения координат центра масс фигуры F можно рассуждать следующим образом. Воспользуемся обозначениями из п. 6.9.1. Пусть λ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Для каждой из криволинейных трапеций F_k, $\quad 0 \le k \le n-1$, как и для фигуры F, координаты центра масс неизвестны. Однако, для фигуры, составленной из вписанных прямоугольников $P'_0, P'_1, \ldots, P'_{n-1}$ центр масс определяется легко. Именно, прямоугольник P'_k имеет массу $m_k(f)\Delta x_k$ и центр масс прямоугольника P'_k совпадает с центром симметрии прямоугольника, который имеет координаты $(x_k + x_{k+1})/2$, $\quad m_k(f)/2$; $\quad 0 \le k \le n-1$. Поэтому центр масс системы прямоугольников $P'_0, P'_1, \ldots, P'_{n-1}$ имеет координаты

$$x_c(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} m_k(f)\Delta x_k\right)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} m_k(f)\Delta x_k \frac{x_k + x_{k+1}}{2},$$

$$y_c(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} m_k(f)\Delta x_k\right)^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} m_k(f)\Delta x_k \frac{m_k(f)}{2}.$$

Естественно предполагать, что при $\lambda \to 0$, фигура, составленная из вписанных прямоугольников, будет приближаться к фигуре F, а координаты $x_c(\lambda), y_c(\lambda)$, будут приближаться к координатам центра масс фигуры F.

Таким образом, координаты x_c, y_c центра масс однородной фигуры F определяются формулами

$$x_c = \frac{1}{s(F)} \int_a^b x f(x)\,dx, \; y_c = \frac{1}{2s(F)} \int_a^b f^2(x)\,dx; \; s(F) = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

3. Вторая теорема Гюльдена

Теорема 19. *Объём тела, описываемого плоской фигурой при вращении её около оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей её, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описываемой при вращении центром масс этой фигуры.*

⌈ Доказательство рассмотрим для случая, когда фигура F есть криволинейная трапеция. Тогда утверждение теоремы получается из равенства для y_c в (1) после его умножения на $2\pi s(F)$. При этом получим равенство $s(F)\cdot(2\pi y_c) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$. ⌋

Упражнение 89. Определить координаты центра масс полукруга, а затем с помощью теоремы Гюльдена найти объём шара. Аналогичным образом вычислить объём конуса, усечённого конуса, шаровых сегмента и слоя, эллипсоида вращения.

Упражнение 90. Найти объём тора.

4. Координаты центра масс однородной кривой

Пусть $\Gamma = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ \ y = f(x)\}$, $f \in C([a,b])$ — непрерывная кривая. Используем обозначения п. 6.9.3. Если $f \in C^1([a,b])$, то согласно п. 6.9.3 кривая Γ спрямляема и её длина $l(\Gamma)$ равна $l(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. Предположим, что вдоль Γ однородным образом распределена масса, равная по величине длине дуги Γ. Пусть Γ_λ — ломаная, вписанная в Γ для разбиения λ отрезка $[a,b]$. При этом центр масс отрезка с концами $(x_k, f(x_k))$, $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ имеет координаты $(x_k + x_{k+1})/2$, $(f(x_k) + f(x_{k+1}))/2$, а масса этого отрезка равна его длине $\sqrt{\Delta x_k^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$, здесь $0 \le k \le n-1$. Поэтому координаты $x_c(\lambda)$, $y_c(\lambda)$ центра масс Γ_λ равны

$$x_c(\lambda) = \frac{1}{l(\Gamma_\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \sqrt{\Delta x_k^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2},$$

$$y_c(\lambda) = \frac{1}{l(\Gamma_\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \sqrt{\Delta x_k^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}.$$

Таким образом, если $f \in C^1([a,b])$, то координаты x_c, y_c центра масс кривой Γ определяются формулами

$$x_c = \lim_{|\lambda|\to 0} x_c(\lambda) = \frac{1}{l(\Gamma)} \int\limits_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx,$$

$$y_c = \lim_{|\lambda|\to 0} y_c(\lambda) = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \tag{1}$$

5. Первая теорема Гюльдена

Теорема 20. *Поверхность тела, описываемая плоской кривой при вращении её около оси, лежащей в плоскости этой кривой и не пересекающей её, равна произведению длины кривой на длину окружности, описываемой при этом вращении центром масс кривой.*

⌈ Доказательство проведем для кривой Γ из п. 6.9.3 и поверхности P, полученной при вращении Γ около оси абсцисс. В п. 6.9.3 было доказано, что поверхность P имеет площадь $s(P) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. Умножив равенство (1) на $2\pi l(\Gamma)$, получим $l(\Gamma)\cdot(2\pi y_c) = s(P)$. ⌋

Упражнение 91. Определить координаты центра масс полуокружности.

Упражнение 92. Найти площади поверхности шара и тора.

6.10 Историческая справка

Первыми примерами использования методов, которые сейчас относят к интегральному исчислению, были методы решения геометрических задач, предложенные Евдоксом и Архимедом.

Евдокс Книдский ($\sim$ 408 — $\sim$ 355 до н.э.) — древнегреческий математик и астроном, автор "метода исчерпывания", вычислил объёмы конуса и пирамиды. Его не дошедшие до нас сочинения Евклид использовал при создании ряда своих книг "Начал".

Архимед ($\sim$ 287 — 212 до н.э.) — древнегреческий математик, механик, физик, астроном, изобретатель. Многие его работы посвящены вычислению площадей, объёмов, центров тяжести. Архимед, например, вычислил площадь параболического сегмента, поверхности и объёмы шара, шарового сегмента и цилиндра. Хорошо известны: аксиома Архимеда, спираль Архимеда, архимедов винт, закон Архимеда в гидростатике, полиспаст.

Дифференциальное и интегральное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем. Они также первыми эффективно применили новые методы в механике, физике, геометрии.

Ньютон Исаак (1643 — 1727) — английский физик, математик, астроном. Открыл законы механики и закон всемирного тяготения, изобрел первый зеркальный телескоп.

Современное интегральное исчисление базируется на взаимодействии двух концепций: определении интеграла как предела интегральных сумм и определении функции по ее производной. Ньютон использовал в основном неопределенный интеграл, для него интегрирование есть операция, обратная к дифференцированию. Лейбниц развивал и первую концепцию, интересную с теоретической точки зрения и эффективную в приложениях.

Первое определение интеграла, которое можно считать точным, дал в 1823 г. Коши. Для функции f, непрерывной на отрезке $[a,b]$, и разбиения $\lambda = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ этого отрезка Коши вводит сумму

$$S = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}),$$

т. е. интегральную сумму специального вида, и доказывает существование предела S при $|\lambda| \to 0$. Этот предел и называется определённым интегралом и обозначается по словам Коши "придуманным г-ом Фурье" символом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Отметим также, что символ интеграла $\int$ использовал еще в 1690 Як. Бернулли, который впервые ввёл термин "интеграл". Доказательство Коши существования интеграла, т. е. предела интегральных сумм S при $|\lambda| \to 0$, содержало пробел, оно становится корректным после применения теоремы о равномерной непрерывности непрерывной на отрезке функции, которая была доказана позже. Коши распространил свое определение на некоторые разрывные функции, однако, изучением разрывных интегрируемых функций он не занимался. Отметим, что суммы S использовал также Эйлер, как приближенные значения соответствующих интегралов, однако, вопрос о пределе интегральных сумм S при $|\lambda| \to 0$ Эйлер не рассматривал.

Определение интеграла у Римана то же, что и у Коши, с той разницей, что вместо сумм S рассматриваются интегральные суммы общего вида

$$f(\xi_0)(x_1-x_0)+f(\xi_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_{n-1})(x_n-x_{n-1}) = S(f;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}),$$

где $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Однако, Риман исследует все функции, для которых существует предел интегральных сумм, и получает критерий интегрируемости.

Риман Георг Фридрих Бернхард (1826 — 1866) — немецкий математик, автор широкого круга выдающихся результатов в различных областях математики. Его именем названы: римановы поверхности и многообразия, гипотеза Римана о нулях дзета-функции, матрица Римана, функция Римана, геометрия Римана.

16 — 4-1168

В 1875 г. появилась новая форма условия интегрируемости функции. Почти одновременно математики *Дарбу, Томе, Г. Смит, Асколи* и *Дюбуа-Реймон* ввели суммы Дарбу $L(f;\lambda)$ и $U(f;\lambda)$ для ограниченной функции, нижний и верхний интегралы, определение интегрируемости и получили критерий интегрируемости, доказана была и теорема Дарбу.

Дарбу Жан Гастон (1842 –1917) — французский математик, автор известных результатов в дифференциальной геометрии и теории дифференциальных уравнений. Отметим, что первым суммы Дарбу $L(f;\lambda)$ и $U(f;\lambda)$ для ряда простых функций использовал Архимед.

И Ньютон и Лейбниц вводили определенный интеграл как разность значений примитивной, т. е. функция $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ имеет интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если она имеет примитивную F на $[a,b]$, и тогда по определению $\int\limits_a^b f(x)\,dx := F(b)-F(a)$. Остается, однако, неясным, какие функции имеют примитивную. Если же принять определение интеграла, как предела интегральных сумм, то доказательство существования примитивной проводится просто. При таком подходе формула Ньютона-Лейбница была впервые доказана Коши. С другой стороны, существование примитивной у непрерывной функции, которое не использовало бы понятия интеграла, впервые было получено А. Лебегом только в 1905 г.

Естественным развитием идей и методов дифференциального и интегрального исчисления можно считать почти всю современную математику: дифференциальная геометрия, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, теория кратных интегралов, тригонометрические ряды, уравнения с частными производными и другие разделы.

Дальнейшее развитие понятия интеграла связано с именами Стилтьеса и Лебега.

Стилтьес Томас Иоганнес (1856 — 1894) — нидерландский математик.

Лебег Анри Луи (1875 — 1941) — французский математик.

Методы и идеи интегрального исчисления оказались исключительно плодотворными как в самой математике, так и в ее приложениях. Для решения ряда типичных задач было создано много различных вариаций понятия интеграла, причём этот процесс введения в математику новых интегралов продолжается и в настоящее время.

К вопросу о геометрических применениях понятия определенного интеграла нужно отметить следующее. Задачи о вычислении площади, объёмов тел, длин дуг и площадей поверхности, а также координат центров тяжести, на протяжении более 2000 лет до создания интегрального исчисления Ньютоном и Лейбницем, были трудными математическими проблемами и привлекали внимание всех математиков. Например, Архимед считал одним из наиболее важных своих результатов доказательство того, что объём шара относится к объёму описанного цилиндра как 2:3, и попросил своих друзей изобразить соответствующий рисунок на могильной плите. По этому рисунку спустя 100 лет Цицерон нашел могилу Архимеда. К началу XVII в. математиками было решено огромное количество задач, которые можно отнести к интегральному исчислению. Однако, ни Архимед, ни его последователи, вплоть до работ Ньютона и Лейбница, не видели в решениях отдельных задач, которые обычно остроумно использовали специальные свойства объектов, зародыша единого метода. Одним из важнейших достижений дифференциального и интегрального исчисления было то, что с его помощью исключительно просто вычисляются длины дуг, площади, объёмы и т. п. Сейчас эти вычисления посильны школьнику. Для самой математики оказалось важным следующее. До последней четверти XIX в. математиков интересовал только вопрос о вычислении площади, длины, объёма и т. д., предполагалось,что, например, фигура имеет площадь и т. п. Однако, с развитием понятий функции и интеграла оказалось, что формально определённые объекты включают в себя нечто такое, что интуицией не предвиделось и сознательно в определение не закладывалось. Например, развитие понятия функция привело Жордана к следующему определению непрерывной кривой:

линией называется совокупность точек плоскости, координаты которых суть непрерывные функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ *параметра* t, *заданные на отрезке* $0 \le t \le 1$.

Те линии, длину которых определяли математики, оказались линиями и по определению Жордана. Однако, в 1890 г. итальянский математик ***Пеано*** показал, что среди непрерывных кривых Жордана есть кривые, заполняющие квадрат, в частности они имеют бесконечную длину. Те линии Жордана, для которых можно определить длину, были названы спрямляемыми. Аналогичная история произошла с понятиями : площадь фигуры, площадь поверхности и т. п.

Жордан Камил (1838 — 1922) — французский математик, автор меры Жордана — понятия, которое на плоскости обобщает понятие площади на весьма широкий класс плоских фигур.

Гюльден Пауль (1577 — 1643) — швейцарский математик. Теоремы, носящие имя Гюльдена, были известны без доказательств еще древнегреческому математику ***Паппу***.

Глава 7

Ряды

7.1 Элементарные свойства сходящихся рядов

7.1.1 Основные определения

Пусть $\{a_n \mid n \geq 1\}$ — последовательность действительных чисел. ***Рядом*** называют выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (1)$$

Это выражение пока точного смысла не имеет, поскольку бесконечное число сложений осуществить нельзя.

Для каждого $n \in N$ положим $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Число a_n называется ***n-м членом,*** а число s_n — ***n-ой частичной суммой*** ряда (1). Заметим, что $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$, $n \geq 1$.

*Определение 1. Две последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ и $\{s_n \mid n \geq 1\}$ называются **числовым рядом** и обозначаются символом (1). Если последовательность частичных сумм $\{s_n \mid n \geq 1\}$ сходится к действительному числу s, то ряд (1) называется **сходящимся**, а число s называется **суммой ряда (1)** и обозначается символом $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Если последовательность $\{s_n \mid n \geq 1\}$ конечного предела не имеет, то ряд (1) называется **расходящимся**.*

Теорема 1. *Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \to 0, n \to \infty$.*

⌈ Действительно, поскольку $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n \geq 2$, и $s_n \to s \in \boldsymbol{R}$, $n \to \infty$, то $a_n \to s - s = 0$, $n \to \infty$. ⌋

Теорема 1 даёт простое необходимое условие сходимости ряда, Аналогично можно получить другие условия такого типа, Привдём ещё один полезный факт.

Теорема 2. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то*

$$a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{2n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Упражнение 1. Провести доказательство теоремы 2.

Пример. 1. Ряды

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots \tag{2}$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots \tag{3}$$

расходятся, поскольку последовательности частичных сумм $s_n = n$, $n \geq 1$, для ряда (2), и $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0$, $\ldots$ для ряда (3) предела не имеют. Можно также воспользоваться теоремой 1.

Упражнение 2*. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ расходится.

Примеры. 2. ***Геометрический ряд.*** Так для $x \in \boldsymbol{R}$ называется следующий ряд

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \quad , \tag{4}$$

частичная сумма которого равна $s_n(1) = n$, $s_n(x) = (1-x^n)/(1-x), x \neq 1$; $n \geq 1$. Ряд (4) сходится к сумме $1/(1-x)$ для $|x| < 1$, и расходится для $|x| \geq 1$.

⌈ Если $|x| < 1$, то $x^n \to 0$, $n \to \infty$. Следовательно, при $|x| < 1$ ряд (4) сходится к сумме $1/(1-x)$: $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots = \dfrac{1}{1-x}$, $|x| < 1$.

При $|x| \geq 1$ последовательность $\{s_n(x) \mid n \geq 1\}$ конечного предела не имеет, следовательно, при $|x| \geq 1$ ряд (4) расходится. Заметим, что сумму геометрического ряда впервые нашёл Архимед. ⌋

3. Докажем, что $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots = 1.$

⌈ Действительно, для $n \geq 1$ имеем

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, $s_n \to 1$, $n \to \infty$. ⌋

4. ***Гармонический ряд.*** Так называется следующий ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots .$$

⌈ Докажем, что этот ряд расходится. Используем теорему 2. Заметим, что для $n \geq 1$ справедливо неравенство

$$s_{2n}-s_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \quad s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Следовательно, $s_{2n} - s_n \not\to 0$, $n \to \infty$. Поскольку последовательность $\{s_n \mid n \geq 1\}$ возрастает и не имеет предела, то $s_n \to +\infty$, $n \to \infty$. Однако, возрастание частичных сумм s_n с ростом n происходит очень медленно. ***Л. Эйлер*** подсчитал, что $s_{1\,000\,000} \approx 14$. Обратим внимание на то, что члены гармонического ряда, убывая, сходятся к 0. ⌋

Упражнение 3. Доказать, что частичные суммы гармонического ряда удовлетворяют неравенствам $0 < s_n - \ln(n+1) < 1$, $n \geq 2$.

Указание. Использовать неравенства для членов последовательности, определяющей число e.

Пример. 5. ***Обобщённый гармонический ряд.*** Так называется следующий ряд

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots\ , \tag{5}$$

где $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Докажем, что ряд (5) сходится при $\alpha > 1$.

⌈ Пусть $s_n(\alpha) := 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}$, $n \geq 1$. При $\alpha = 1$ ряд (5) является гармоническим и $s_n(1) \to +\infty$, $n \to \infty$. При $\alpha < 1$ имеем $s_n(\alpha) \geq s_n(1)$, $n \geq 1$, следовательно, ряд (5) расходится и при $\alpha < 1$. При $\alpha > 1$ ряд (5) сходится. Действительно, сначала имеем

$$s_{2n}(\alpha) = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n)^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^\alpha} \leq$$

$$\leq 1+\frac{1}{2^\alpha}s_n(\alpha)+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\ldots+\frac{1}{(2n-2)^\alpha} <$$

$$< 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}s_n(\alpha) \leq 1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}s_{2n}(\alpha), \quad n \geq 1,$$

откуда следует неравенство $s_{2n}(\alpha) \leq \dfrac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}$, $n \geq 1$. Поэтому

$$s_{2n}(\alpha) \to \zeta(\alpha) \in \boldsymbol{R}, \quad n \to \infty; \quad s_{2n+1}(\alpha) = s_{2n}(\alpha)+\frac{1}{(2n+1)^\alpha} \to \zeta(\alpha),$$

при $n \to \infty$. ⌋

Замечание. Пусть $\zeta(\alpha)$ — сумма ряда (5) для $\alpha > 1$. Функция ζ — знаменитая ***дзета-функция Римана,*** которая часто встречается в различных разделах математики. Ряд предположений о поведении этой функции не доказаны и не опровергнуты до настоящего времени.

Упражнение 4. Найти суммы рядов ($k \in \boldsymbol{N}$ фиксировано):

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2-1}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+k)}$.

7.1.2 Свойства сходящихся рядов

1°. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму s. Тогда для любого $c \in \boldsymbol{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ также сходится и имеет сумму cs, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (ca_n) = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

⌈ Доказательство следует из определений. ⌋

2°. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a''_n$ сходятся к суммам s' и s'' соответственно. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a'_n + a''_n)$ также сходится к сумме $s' + s''$, таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a'_n + a''_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a''_n$.

Определение 2. Для ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

и числа $m \in \boldsymbol{N}$ ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_n + \ldots \tag{2}$$

называется ***остатком исходного ряда.***

Если ряд (2) сходится, то пусть r_m — его сумма.

3°. Если ряд (1) сходится к сумме s, то сходится любой его остаток, причём $\forall\, m \in \boldsymbol{N}: \quad s = s_m + r_m$. Если для некоторого $m \in \boldsymbol{N}$ сходится остаток (2), то ряд (1) сходится.

Упражнение 5. Доказать, что для сходящегося ряда его остаток $r_m \to 0, \quad m \to \infty$.

4°. ***Критерий Коши сходимости числового ряда.*** Для того, чтобы ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \in \boldsymbol{N} \quad \forall\, n \geq N \quad \forall\, p \in \boldsymbol{N}: \ |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

⌈ Этот критерий представляет собой перефразировку критерия Коши сходимости последовательности частичных сумм ряда. ⌋

Упражнение 6. Доказать, что ряды

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \quad ,$$

$$a_1 + 0 + a_2 + 0 + a_3 + 0 + \ldots + 0 + a_n + 0 + \ldots$$

сходятся или расходятся одновременно.

Упражнение 7. Доказать сходимость ряда

$$\frac{\sin 1^2}{1^2} + \frac{\sin 2^2}{2^2} + \frac{\sin 3^2}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n^2}{n^2} + \ldots \ .$$

7.2 Ряды с неотрицательными членами

7.2.1 Критерий сходимости и следствие

Теорема 3. *Пусть члены ряда*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

удовлетворяют условию: $a_n \geq 0,\ n \geq 1$.

Ряд (1) *сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм* $\{s_n \mid n \geq 1\}$ *ограничена*

⌈ Заметим, что для ряда с неотрицательными членами последовательность его частичных сумм не убывает $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n,\quad n \geq 1$.

Необходимость. Если ряд (1) сходится, то последовательность его частичных сумм ограничена, как сходящаяся последовательность. При этом условие неотрицательности членов не обязательно.

Достаточность. Последовательность $\{s_n \mid n \geq 1\}$ монотонно не убывает и ограничена, следовательно, сходится. ⌋

Замечание. Обратим внимание на следующие факты, относящиеся к теореме 3. Если $s_n \to s,\ n \to \infty$, то $\forall\, n \geq 1 : \quad s_n \leq s$; если, кроме того, $\forall\, n \geq 1 : \quad a_n > 0$, то $\forall\, n \geq 1 : \quad s_n < s$.

Вместо теоремы 3 часто используется следующее утверждение, содержащее простое достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами.

Лемма 1. *Пусть ряд* (1) *с неотрицательными членами сходится, а последовательность чисел* $\{d_n \mid n \geq 1\}$ *удовлетворяет условию* $\exists\, L > 0 \quad \forall\, n \geq 1 : \quad 0 \leq d_n \leq L$. *Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n a_n \tag{2}$$

сходится.

⌈ Доказательство основано на применении теоремы 3. Введём частичные суммы $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\quad \tilde{s}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k a_k,\quad n \geq 1$. Согласно теореме 3, $\forall\, n \geq 1 : \quad s_n \leq s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Учитывая условие леммы, получим $\forall\, n \geq 1 : \ \tilde{s}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k a_k \leq L s_n \leq L s$. ⌋

Замечание. Заметим, что при условиях леммы выполняется неравенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n a_n \leq L \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Упражнение 8. Пусть ряд (1) с неотрицательными членами сходится, а последовательность чисел $\{d_n \mid n \geq 1\}$ ограничена. Доказать сходимость ряда (2).

Указание. Использовать критерий Коши сходимости ряда.

Упражнение 9. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

Указание. Использовать неравенства

$$\frac{1}{2^{\sqrt{k^2}}} + \frac{1}{2^{\sqrt{k^2+1}}} + \frac{1}{2^{\sqrt{k^2+2}}} + \ldots + \frac{1}{2^{\sqrt{(k+1)^2-1}}} < \frac{2k+1}{2^k}, \ k \geq 1.$$

Упражнение 10. Доказать сходимость следующих рядов:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right) \dfrac{1}{n^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$.

Упражнение 11. Доказать, что для любой последовательности положительных чисел $\{d_n \mid n \geq 1\}$ такой, что $d_n \to +\infty$, $n \to \infty$ существует сходящийся ряд с неотрицательными членами (1), для которого ряд (2) расходится. Это означает, что условие леммы 1 в определённом смысле необходимо.

7.2.2 Признаки сравнения

1⁰. Предположим, что члены рядов (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ удовлетворяют условию: $0 \leq a_n \leq b_n$, $n \geq 1$. Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1) (из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2)).

⌈ Пусть ряд (2) сходится. Положим $d_n := \dfrac{a_n}{b_n}$, если $b_n \neq 0$ и $d_n = 0$, если $b_n = 0$; $n \geq 1$. Тогда $0 \leq d_n \leq 1$, $d_n b_n = a_n$, $n \geq 1$. По лемме 1 ряд (1) сходится. ⌋

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \dfrac{1}{n^3}$ сходится, так как в силу неравенства $0 < \sin x < x$, $x \in (0, \pi/2)$ имеем $n \sin \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{n^2}$, $n \geq 1$, причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \dfrac{1}{n}$ расходится, так как в силу неравенства $\sin x > \dfrac{2}{\pi} x$, $x \in (0, \pi/2)$ имеем $\sin \dfrac{1}{n} > \dfrac{2}{\pi} \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится.

3. Утверждение 1^0 остаётся верным при следующем более слабом условии $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: \quad 0 \leq a_n \leq b_n$.

Докажем, например, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln^3 n}{n^2}$ сходится. Действительно, поскольку $\dfrac{\ln^3 n}{\sqrt{n}} \to 0,\ n \to \infty$, то $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ \dfrac{\ln^3 n}{\sqrt{n}} \leq 1$ $\Longrightarrow \dfrac{\ln^3 n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^{3/2}}$, причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится.

Упражнение 12. Доказать сходимость ряда: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Упражнение 13*. Определить все значения $a > 0$, для которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^{\nu(n)}}{n^2}$, где $\nu(n)$ — число нулей в десятичной записи числа n.

Ответ: $0 < a < 91$.

Упражнение 14. Пусть $a_n \geq 0,\ n \geq 1$ и существует $\alpha > 0$ такое, что $a_{n+1} \leq \alpha a_n,\ n \geq 1$. Предположим, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Доказать, что для любого $p \in \mathbb{N}$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n\cdot p} = +\infty$.

2°. Пусть члены рядов (1) и (2) удовлетворяют условию: $a_n > 0,\ b_n > 0,\ n \geq 1$ и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C, \quad 0 \leq C \leq +\infty.$$

Тогда при $C < +\infty$ из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1). При $C > 0$ из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1). Таким образом, при $0 < C < +\infty$ оба ряда одновременно сходятся или расходятся.

⌈ Пусть $C < +\infty$ и ряд (2) сходится. Положим $d_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, $n \geq 1$. Последовательность $\{d_n \mid n \geq 1\}$ ограничена, как сходящаяся, и по лемме 1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если $C > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{1}{C} < +\infty$ и по доказанному из сходимости ряда (1) следует сходимость ряда (2). ⌋

Примеры. 4. Пусть $\alpha > 0$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)^{\alpha}$ расходится при $\alpha \leq 1$, и сходится при $\alpha > 1$.

⌈ Действительно,

$$(\sqrt{n^2+1}-n)^\alpha \sim \frac{1}{2^\alpha}\frac{1}{n^\alpha},\ n\to\infty, \implies \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)^\alpha}{\frac{1}{n^\alpha}} \to \frac{1}{2^\alpha},\ n\to\infty,$$

причём обобщённый гармонический ряд расходится при $\alpha \le 1$, и сходится при $\alpha > 1$. ⌋

Пример. 5. Докажем, что $\gamma_n := 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n \to \gamma,\ n\to\infty$. Число $\gamma \approx 0{,}577215\ldots$ — ***постоянная Эйлера.*** Интересно отметить, что до сих пор неизвестно, является ли число γ рациональным.

⌈ Для доказательства заметим, что

$$\gamma_n = 1+\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\ln\frac{3}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}\right),\ n>1,$$

есть частичная сумма ряда $1+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}\right)$, для которого имеем $\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}\sim -\frac{1}{2n^2},\quad n\to\infty.$ ⌋

Упражнение 15. Пусть $\{\alpha,\beta\}\subset \boldsymbol{R}$. При каких α и β сходится следующий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\alpha \operatorname{arctg} n^\beta$.

Упражнение 16. Доказать сходимость последовательности

$$\left\{\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}-\ln\ln n \mid n\ge 2\right\}.$$

3°. Пусть члены рядов (1) и (2) удовлетворяют следующим условиям: $a_n>0,\ b_n>0;\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n},\ n\ge 1$. Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

⌈ Пусть ряд (2) сходится. Положим $d_n=\frac{a_n}{b_n}>0,\ n\ge 1$ и заметим, что $d_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\le\frac{a_n}{b_n}=d_n\le d_{n-1}\le\ldots\le d_1,\quad n\ge 1$. Таким образом, последовательность $\{d_n\mid n\ge 1\}$ ограничена и, согласно лемме 1, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. ⌋

Пример. 5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-2}}{e^n n!}$ сходится. Действительно,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n-1}e^n n!}{e^{n+1}(n+1)!n^{n-2}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}}{e}<$$

$$< \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad b_n := \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Упражнение 17. Доказать сходимость следующих рядов:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Упражнение 18. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{e^n n!}$ расходится.

Упражнение 19. Пусть ряд (1) с неотрицательными членами сходится. Доказать сходимость рядов: a) $\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \ldots + \sqrt{a_n a_{n+1}} + \ldots$;
b) $\dfrac{\sqrt{a_1}}{1} + \dfrac{\sqrt{a_2}}{2} + \ldots + \dfrac{\sqrt{a_n}}{n} + \ldots$; c) $\dfrac{a_1^{1/p}}{1^{2/q}} + \dfrac{a_2^{1/p}}{2^{2/q}} + \ldots + \dfrac{a_n^{1/p}}{n^{2/q}} + \ldots$;
$p > 1,\ q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

7.2.3 Признаки сходимости рядов

1⁰. Признак д'Аламбера. (Первая формулировка.) Если члены ряда (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ удовлетворяют условиям: 1) $\forall n \geq 1 : \ a_n > 0$; 2) $\exists\, \rho, 0 \leq \rho < 1\ \exists\, n_0 \in N\ \forall n \geq n_0 :\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho$, то ряд (1) сходится. Если при условии 1) $\exists\, n_0 \in N\ \forall n \geq n_0 :\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, то ряд (1) расходится.

2⁰. Признак д'Аламбера. (Вторая формулировка.) Пусть члены ряда (1) удовлетворяют условиям: 1) $\forall n \geq 1 :\ a_n > 0$; 2) существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r,\ 0 \leq r \leq +\infty$. Тогда при $r < 1$ ряд (1) сходится, а при $r > 1$ ряд (1) расходится.

⌈ Утверждение 2^0 есть следствие 1^0 и определения предела последовательности. Например, при $r < 1\ \ \forall \rho, r < \rho < 1\ \ \exists\, n_0\ \ \forall n \geq n_0 :\ \ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \rho$. Доказательство 1^0 следует из неравенств $\forall n \geq n_0 :$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \rho = \dfrac{\rho^{n+1}}{\rho^n}$; $a_{n+1} \geq a_n,\ n \geq n_0$, признака сравнения 3 и сходимости геометрического ряда, а также теоремы 1. ⌋

Пример. 1. Ряд $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$ сходится для любого $x \geq 0$, так как $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} = \dfrac{x}{n+1} \to 0,\ \ n \to \infty.$

Упражнение 20. Доказать сходимость рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n (n!)^2}{n^{2n}}$.

Упражнение 21. Если для ряда (1) с положительными членами $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд (1) сходится. Если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд (1) расходится. Доказать эти утверждения.

Упражнение 22. Доказать следующее утверждение. Если для последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ положительных чисел существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$, то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение не имеет места.

3^0. ***Признак Коши.*** (Первая формулировка.) Если члены ряда (1) удовлетворяют следующим условиям: 1) $\forall n \geq 1 : \ a_n \geq 0$; 2) $\exists \rho, 0 \leq \rho < 1 \ \exists n_0 \in N \ \forall n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} \leq \rho$, то ряд (1) сходится. Если при условии 1) неравенство $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ справедливо для бесконечного числа номеров n, то ряд (1) расходится.

4^0. ***Признак Коши.*** (Вторая формулировка.) Пусть члены ряда (1) удовлетворяют условиям: 1) $\forall n \geq 1 : \ a_n \geq 0$; 2) существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r, \ \ 0 \leq r \leq +\infty$. Тогда при $r < 1$ ряд (1) сходится, а при $r > 1$ ряд (1) расходится.

⌈ Утверждение 4^0 есть следствие 3^0 и определения предела последовательности. Доказательство утверждения 3^0 следует из неравенств $\forall n \geq n_0 : \ a_n \leq \rho^n$; $a_n \geq 1$ для бесконечного числа номеров n, признака 1^0, сходимости геометрического ряда и теоремы 1. ⌋

Пример. 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n^2} 2^n}{(n+1)^{n^2}}$ сходится, так как справедливо такое утверждение $\sqrt[n]{a_n} = 2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to \dfrac{2}{e} < 1, \ \ n \to \infty$.

Упражнение 23. Доказать сходимость рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{2^n}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{3^n}{(\ln n)^n}$.

Упражнение 24. Пусть для ряда (1) с неотрицательными членами $r := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$. Доказать, что при $r < 1$ ряд (1) сходится, а при $r > 1$ ряд (1) расходится.

5^0. ***Логарифмический признак.*** Пусть члены ряда (1) удовлетворяют следующим условиям: 1) $\forall n \geq 1 : \ a_n > 0$; 2) существует

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)=r,\ -\infty\le r\le+\infty$. Тогда при $r>1$ ряд (1) сходится, а при $r<1$ ряд (1) расходится.

⌈ Используем неравенства $\forall\, n\ge 1:\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, из которых следует, что $\forall\, n\ge 1:\ \dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$. Пусть $r>1$ и $1<\rho<r$ фиксировано. По определению предела последовательности имеем $\exists\, n_0\ \ \forall\, n\ge n_0:\ n\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\ge\rho$, откуда $\forall\, n\ge n_0:\ n\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\ge$ $\ge\rho n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, или $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\rho \iff \dfrac{a_{n+1}}{a_n}<\dfrac{\frac{1}{(n+1)^\rho}}{\frac{1}{n^\rho}}$.

Теперь утверждение о сходимости получается из признака сравнения 3^0 и сходимости обобщённого гармонического ряда с $\alpha=\rho>1$.

Пусть $r<1$. Тогда $\exists\, n_0\ \forall\, n\ge n_0:\ \ n\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\le 1<n\ln\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)$, откуда $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{n}{n-1}\iff\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}$. Для доказательства расходимости можно использовать признак 3^0 и расходимость гармонического ряда. ⌋

Пример. 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-1}}{e^n n!}$ сходится, поскольку $n\ln\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=$

$$=n\ln\frac{n^{n-1}e^{n+1}(n+1)!}{e^n n!(n+1)^n}=n\left(1-(n-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\to\frac{3}{2}>1$$

при $n\to\infty$.

Упражнение 25. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

Упражнение 26. Признак Раабе. Пусть члены ряда (1) удовлетворяют следующим условиям: 1) $\forall\, n\ge 1:\ \ a_n>0$; 2) существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right)=r,\ \ -\infty\le r\le+\infty$. Доказать, что при $r>1$ ряд (1) сходится, а при $r<1$ ряд (1) расходится.

Указание. Использовать логарифмический признак.

6^0. Интегральный признак Маклорена-Коши. Предположим, что функция $f:\ [1,+\infty)\to\boldsymbol{R}$ удовлетворяет таким условиям: 1) $\forall\, x\ge 1:\ f(x)\ge 0$; 2) $\forall\,\{x',x''\}\subset[1,+\infty), x'<x'':\ f(x')\ge f(x'')$.

Пусть $a_n := f(n), n \geq 1$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится или расходится в зависимости от того, конечен или бесконечен предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_1^x f(u)\, du$.

⌈ Положим $F(x) := \int\limits_1^x f(u)\, du$, $x \geq 1$. Функция F не убывает на $[1, +\infty)$, поскольку по условию 1) $F(x'') = \int\limits_1^{x''} f(u)\, du = F(x') + \int\limits_{x'}^{x''} f(u)\, du \geq$ $\geq F(x'), 1 \leq x' < x''$. Поэтому существование предела $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) \iff$

$\Rightarrow$ из опр-я по Гейне

$$\text{существование } \lim_{n \to \infty} F(n) \iff \sup_{n \geq 1} F(n) < +\infty. \qquad (2)$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n := F(n+1) - F(n) = \int\limits_n^{n+1} f(u)\, du$, $n \geq 1$, имеет частичные суммы $\tilde{s}_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = F(n+1) - F(1) = F(n+1)$, $n \geq 1$, и поэтому сходится тогда и только тогда, когда предел (2) конечен. Кроме того, поскольку

$$f(n+1) \leq F(n+1) - F(n) = \int\limits_n^{n+1} f(u)\, du \leq f(n), \quad n \geq 1, \qquad (3)$$

то для $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \geq 1$, имеем неравенства $s_{n+1} - f(1) \leq \tilde{s}_n \leq$ $\leq s_n$, $n \geq 1$. Отсюда получаем следующие утверждения

$$\sup_{n \geq 1} s_n < +\infty \iff \sup_{n \geq 1} \tilde{s}_n < +\infty \iff \sup_{n \geq 1} F(n) < +\infty. \quad ⌋$$

Замечание. Пусть $r_m := \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} f(n)$, $m \geq 1$. Из (3) следует также такая оценка $r_m \leq \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) - F(m) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_m^x f(u)\, du$.

Примеры. 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ сходится, поскольку $\lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_1^x \frac{du}{u^\alpha} =$ $= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_{u=1}^{u=x} = \frac{1}{\alpha - 1}$. Кроме того, для остатка имеем оценку $r_m = \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}$, $m \geq 1$.

5. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Действительно, $\int\limits_2^x \frac{du}{u(\ln u)^\alpha} = \int\limits_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dz}{z^\alpha} = \frac{(\ln x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{(\ln 2)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ при $\alpha \neq 1$ и $\int\limits_2^x \frac{du}{u \ln u} = \ln\ln x - \ln\ln 2$.

Упражнение 27. Для ряда из примера 4 найти $\lim\limits_{m\to\infty}(m^{\alpha-1}r_m)$.

Упражнение 28. Пусть $a_n > 0$, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \geq 1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Доказать, что первый из двух следующих рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{s_n \ln s_n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n}$ расходится, а второй сходится.

Упражнение 29. Найти α, при которых сходится ряд:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^{\alpha}$, $a > 0$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right)^{\alpha}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

Упражнение 30. Признак Коши. Предположим, что $\forall n \geq 2$: $a_{n-1} \geq a_n \geq 0$. Доказать, что ряды

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots \quad ,$$

$$2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^n a_{2^n} + \ldots$$

сходятся или расходятся одновременно. Использовать этот результат для исследования сходимости гармонического ряда.

Упражнение 31*. Пусть $a_n \geq 0$, $n \geq 1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Упражнение 32. Доказать, что при условиях упражнения 28 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^{\alpha}}$ сходится для $\alpha > 1$ и расходится для $\alpha \leq 1$.

Упражнение 33. Пусть $a_n > 0$, $n \geq 1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Пусть $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, $n \geq 1$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Упражнение 34. Пусть $a_n \geq 0$, $n \geq 1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Исследовать сходимость ряда:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n^2}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n a_n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$.

Упражнение 35. Пусть $a_n > 0$, $n \geq 1$, и для $m \in N$ фиксированного существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+m}}{a_n} = \alpha$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

Упражнение 36. Пусть $a_n \geq 0$, $n \geq 1$, и $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}^{\,\ln} < \dfrac{1}{e}$. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Упражнение 37. Пусть $a_n \geq 0$, $n \geq 1$, и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{na_n}^{\,\ln\ln} < \dfrac{1}{e}$. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

7.3 Сходимость рядов с произвольными членами

7.3.1 Ряд Лейбница

Рассмотрим следующий ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \quad , \tag{1}$$

называемый рядом Лейбница. Докажем, что ряд (1) сходится и найдём его сумму. Положим $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n}$, $\quad \gamma_n = s_n - \ln n$; $\tilde{s}_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$; $n \geq 1$. Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_{2k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k}\right) = \\
&= s_{2k} - s_k = \ln(2k) + \gamma_{2k} - \ln k - \gamma_k, \quad k \geq 1,
\end{aligned}$$

$$\tilde{s}_{2k+1} = \tilde{s}_{2k} + \frac{1}{2k+1}, \quad k \geq 1.$$

Следовательно, поскольку $\gamma_n \to \gamma$, $n \to \infty$, то $\tilde{s}_n \to \ln 2$, $n \to \infty$.

Таким образом, ряд (1) сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2. \tag{2}$$

Оказывается, что сходимость ряда Лейбница, и, в частности, его сумма, зависят от порядка следования его членов. Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots \quad , \tag{3}$$

который отличается от ряда (1) только порядком следования членов. Для частичной суммы ряда (3) с номером $3k$ имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{s}}_{3k} &:= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} = \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k} - \\
&- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4k}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k}\right) = \\
&= s_{4k} - \frac{1}{2} s_{2k} - \frac{1}{2} s_k = \\
&= \gamma_{4k} + \ln(4k) - \frac{1}{2}\gamma_{2k} - \frac{1}{2}\ln(2k) - \frac{1}{2}\gamma_k - \frac{1}{2}\ln k, \quad k \geq 1.
\end{aligned}$$

Поэтому получим $\tilde{\tilde{s}}_{3k} \to \frac{3}{2}\ln 2$, $k \to \infty$; $\tilde{\tilde{s}}_{3k+1} = \tilde{\tilde{s}}_{3k} + \frac{1}{4k+1} \to \frac{3}{2}\ln 2$, $k \to \infty$; $\tilde{\tilde{s}}_{3k+2} = \tilde{\tilde{s}}_{3k} + \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} \to \frac{3}{2}\ln 2$, $k \to \infty$;

а, значит, и $\tilde{\tilde{s}}_n \to \frac{3}{2}\ln 2$, $n \to \infty$. Таким образом,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots = \frac{3}{2}\ln 2.$$

Ряд Лейбница обладает новым свойством, присущим рядам: в отличие от конечной суммы ***сумма ряда зависит от порядка следования слагаемых.***

Упражнение 38. Доказать, что

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2}\ln 6.$$

Упражнение 39. Доказать, что

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Упражнение 40.* Доказать, что

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Замечание. Если "привести подобные члены", как в конечной сумме, то в левой части получим 0.

7.3.2 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Определение 1. Ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

называется абсолютно сходящимся, если ряд

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \tag{2}$$

сходится.

Определение 2. *Сходящийся ряд (1) называется условно сходящимся, если ряд (2) расходится.*

Примером условно сходящегося ряда является ряд Лейбница.

Теорема 4. *Если ряд (1) абсолютно сходится, то он сходится, причём* $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

⌈ Члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) \tag{3}$$

удовлетворяют неравенствам $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$, $n \ge 1$. Следовательно, ряд (3) сходится. Прибавим к сходящемуся ряду (3) сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-|a_n|)$, получим сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Неравенство для сумм рядов получается с помощью предельного перехода в неравенствах $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$, $n \ge 1$ с учётом сходимости рядов (1) и (2). ⌋

Положим $u_n := a_n$, $a_n \ge 0$, $u_n := 0$, $a_n < 0$; $v_n := -a_n$, $a_n < 0$, $v_n := 0$, $a_n \ge 0$. Отметим, что для каждого $n \ge 1$:

$$1)\ u_n \ge 0,\ v_n \ge 0,\ \ 2)\ a_n = u_n - v_n,\ \ 3)\ |a_n| = u_n + v_n.$$

Теорема 5. *Ряд (1) сходится абсолютно тогда и только тогда, когда ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{4}$$

сходятся, при этом справедливы следующие равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{5}$$

⌈ Если ряд (1) сходится абсолютно, то сходимость рядов (4) следует из неравенств $u_n \le |a_n|$, $v_n \le |a_n|$, $n \ge 1$, и признака сравнения 1^0. Из (4) равенства (5) получаются из свойств сходящихся рядов.

Если же ряды (4) сходятся, то сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. ⌋

Теорема 6. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно. Тогда оба ряда из (4) расходятся.*

⌈ Допустим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится. Тогда по свойствам сходящихся рядов ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - a_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ также сходится. Однако, сходимость обоих рядов (4) по теореме 5 влечёт абсолютную сходимость исходного ряда. Аналогично, к противоречию приводит и предположение о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$. ⌋

7.3.3 Признаки сходимости рядов

1⁰. Признак Лейбница. Пусть числа a_n, $n \geq 1$, удовлетворяют условиям: 1) $\forall\, n \geq 1: \ a_n \geq a_{n+1} \geq 0$; 2) $a_n \to 0, \ n \to \infty$. Тогда ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \tag{6}$$

сходится к сумме s, причём $0 \leq s \leq a_1$.

⌈ Для частичных сумм с чётным индексом из 1) имеем

$$s_{2k} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2k-1} - a_{2k} =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \geq s_{2k-2}, \quad k \geq 2.$$

Аналогично,

$$s_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}, \quad k \geq 1$$

Таким образом, последовательность $\{s_{2k} \mid k \geq 1\}$ монотонно не убывает и ограничена: $0 \leq s_{2k} \leq a_1, \ k \geq 1$. Пусть $s := \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k}, \quad s \in \boldsymbol{R}$. Тогда на основании 2) $s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1} \to s, \quad k \to \infty$. ⌋

Замечание. Пусть $r_m = (-1)^m a_{m+1} + (-1)^{m+1} a_{m+2} + \ldots$ — остаток ряда (6). Тогда $|r_m| \leq a_{m+1}, \quad m \geq 1$.

Упражнение 41. Привести пример рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, первый из которых "сходится" к $+\infty$, второй сходится условно, и таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

Упражнение 42. Исследовать сходимость рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \dfrac{n+1}{n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[n/3]}}{n}$,

$[a]$ — целя часть числа a.

Упражнение 43. Доказать, что ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots$$

сходится, а ряд, полученный перестановкой слагаемых,

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots$$

расходится.

Упражнение 44*. Пусть числа a_n, $n \geq 1$, удовлетворяют условиям признака Лейбница. Доказать сходимость ряда

$$a_1-\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}-\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}+\dots .$$

Упражнение 45. Привести пример сходящегося ряда, для которого:

a) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ расходится; b) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится.

Пусть $\{n,p\} \subset \boldsymbol{N}$ и $\{a_{n+1},a_{n+2},\dots,a_{n+p}\,;\ b_{n+1},b_{n+2},\dots,b_{n+p}\} \subset \boldsymbol{R}$, положим $\sigma(n+1,k) := \sum\limits_{j=n+1}^{k} b_j$, $k \geq n+1$; $\sigma(n+1,n) := 0$.

$\sum a_i b_i = \sum (a_i - a_{i+1}) B_i$ таким

Лемма 2. ***(Тождество Абеля).*** *Справедливо равенство*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \sigma(n+1,k)(a_k-a_{k+1}) + \sigma(n+1,n+p)a_{n+p}, \quad p \geq 2.$$

⌈ Для доказательства используем такое равенство $b_k = \sigma(n+1,k) - \sigma(n+1,k-1)$, $k \geq n+1$, и перегруппировку слагаемых. ⌋

2°. *Признак Дирихле.* Пусть последовательности чисел $\{a_n \mid n \geq 1\}$ и $\{b_n \mid n \geq 1\}$ удовлетворяют условиям: 1) $\{a_n \mid n \geq 1\}$ монотонна; 2) $a_n \to 0$, $n \to \infty$; 3) $\exists\, C > 0\ \forall\, n \geq 1 : \left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \leq C$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{7}$$

сходится.

⌈ Для доказательства сходимости ряда (7) применим критерий Коши. Из условия 3) имеем оценку $|\sigma(n+1,k)| \leq 2C$, $k \geq n+1$, с помощью которой из тождества Абеля получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leq 2C \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| + 2C|a_{n+p}|, \quad p \geq 2.$$

В силу условия 1) справедливо равенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_k - a_{k+1}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1})\right| = |a_{n+1} - a_{n+p}| \leq$$

$\leq |a_{n+1}| + |a_{n+p}|$

Поэтому $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leq 2C(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|)$. Отсюда с помощью условия 2) получаем условие критерия Коши сходимости ряда. ⌋

$\leq \varepsilon$ ню(2)

$|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{6 \cdot C}$

Пример. Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ сходится для любого $x \in R$.

⌈ Если $x = k\pi$, $k \in Z$, то утверждение верно. Пусть $x \neq k\pi$, где $k \in Z$. Положим в признаке Дирихле $a_n = \dfrac{1}{n}$; $b_n = \sin nx$; $n \geq 1$. Тогда условия 1) и 2) выполнены. Кроме того,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \frac{1}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \left|\sum_{k=1}^{n} 2\sin \frac{x}{2} \cdot \sin kx\right| =$$

$$= \frac{1}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \left|\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}, \quad n \geq 1,$$

поэтому условие 3) также выполнено. ⌋

Замечание. Признак Лейбница следует из признака Дирихле.

Упражнение 46. Доказать сходимость на R следующих рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n^2x \cdot \sin nx}{n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n^2x \cdot \sin nx}{n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n \cdot \sin nx}{n}$.

Упражнение 47. Доказать что для $x \neq k\pi$, $k \in Z$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ сходится условно.

Указание. Использовать неравенство $|\sin a| \geq \sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$, признак Дирихле и расходимость гармонического ряда.

Упражнение 48*. Определить, при каких $x \in R$ сходится следующий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n^2x \cdot \cos nx}{n}$.

3^0. ***Признак Абеля.*** Пусть последовательности чисел $\{a_n \mid n \geq 1\}$ и $\{b_n \mid n \geq 1\}$ удовлетворяют условиям: 1) $\{a_n \mid n \geq 1\}$ монотонна; 2) $\{a_n \mid n \geq 1\}$ ограничена; 3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Тогда ряд (7) сходится.

⌈ Признак Абеля следует из признака Дирихле, который нужно применить к последовательностям $\{a_n - a \mid n \geq 1\}$, $\{b_n \mid n \geq 1\}$, где a — предел последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n$ и условия 3) следует равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n + a\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$. ⌋

Упражнение 49. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}$.

7.4 Другие свойства сходящихся рядов. Произведение рядов

7.4.1 Группировка членов ряда

Значение конечной суммы чисел не изменяется при выполнении следующих операций: группировки слагаемых, перестановки слагаемых, раскрытия скобок. Для бесконечных рядов положение несколько иное. Некоторые операции в общем случае недопустимы, например, в бесконечном ряду нельзя раскрывать скобки. Точнее, если члены ряда являются конечными суммами, то ряд, членами которого есть слагаемые этих сумм, ведёт себя иначе чем, исходный. Например, следующий ряд $(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots$ сходится, однако, ряд $1-1+1-1+\ldots$ расходится. Для ряда Лейбница было доказано, что его сумма зависит от порядка слагаемых.

Определение 1. Пусть $\{m(k) \mid k \geq 1\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел и

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

— некоторый ряд. Положим $b_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m(1)}$, $b_2 = a_{m(1)+1} + a_{m(1)+2} + \ldots + a_{m(2)}$, $b_3 = a_{m(2)+1} + a_{m(2)+2} + \ldots + a_{m(3)}$, $b_j = a_{m(j-1)+1} + a_{m(j-1)+2} + \ldots + a_{m(j)}$, $j \geq 1$ *Говорят, что ряд*

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \tag{2}$$

*получается из исходного ряда (1) **группировкой членов** (без изменения их порядка) или **расстановкой скобок**, а ряд (1) получается из ряда (2) **раскрытием скобок**.*

Теорема 7. *В сходящемся ряду допустима произвольная расстановка скобок (т. е. группировка членов без изменения их порядка). Полученный ряд сходится и имеет ту же сумму, что и исходный.*

⌈ Пусть $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $n \geq 1$, — частичные суммы сходящегося ряда (1). Для ряда (2), полученного с помощью группировки членов ряда (1), n-я частичная сумма есть $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = s_{m(n)}$. Следовательно, частичные суммы ряда (2) представляют собой подпоследовательность последовательности $\{s_n \mid n \geq 1\}$ и потому сходятся к тому же пределу, что и последовательность $\{s_n \mid n \geq 1\}$. ⌋

Упражнение 50. Доказать, что скобки раскрывать можно, если полученный в результате ряд сходится.

Упражнение 51. Доказать, что для произвольного ряда допустима группировка членов с ***одинаковыми*** знаками. Например, ряды

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots \text{ и } \left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{4}+\ldots\ .$$

сходятся к одной сумме.

7.4.2 Перестановка членов ряда

Определение 2. Пусть $m: N \to N$ — некоторая биекция (говорят также, что $m(1), m(2), \ldots, m(k), \ldots$ есть перестановка чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$) и

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{3}$$

— некоторый ряд. Говорят, что ряд

$$a_{m(1)} + a_{m(2)} + \ldots + a_{m(k)} + \ldots \tag{4}$$

получен из ряда (3) с помощью ***перестановки членов.***

Теорема 8. *(Дирихле). В ряду с неотрицательными членами допустима произвольная перестановка членов ряда. Точнее, ряд, полученный после перестановки слагаемых, сходится к той же сумме (расходится), если исходный ряд сходится (расходится).*

⌈ Пусть $m(1), m(2), \ldots, m(k), \ldots$ — некоторая перестановка чисел N, т. е. $\forall k \in N: \quad m(k) \in N$; $\forall n \in N \quad \exists! k \in N: \quad m(k) = n$. Пусть $a_n \geq 0$, $n \geq 1$. Ряды (3) и (4) имеют частичные суммы

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad n \geq 1; \; \tilde{s}_k = a_{m(1)} + a_{m(2)} + \ldots + a_{m(k)}, \; k \geq 1$$

соответственно. Если ряд (3) сходится, то $\forall n \geq 1: \quad s_n \leq s := \lim\limits_{j\to\infty} s_j$, а потому $\forall k \geq 1: \quad \tilde{s}_k \leq s_N \leq s$ для $N := \max(m(1), m(2), \ldots, m(k))$. Следовательно, ряд (4) также сходится к некоторому числу $\tilde{s}$ и $\tilde{s} \leq s$.

Однако, можно считать, что ряд (3) получен из ряда (4) с помощью перестановки его членов (с помощью биекции m^{-1}). Тогда, согласно доказанному, $s \leq \tilde{s}$.

Таким образом, ряды (3) и (4) сходятся одновременно и $s = \tilde{s}$. ⌋

Теорема 9. *В абсолютно сходящемся ряду допустима произвольная перестановка членов ряда.*

⌈ Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится. Используем обозначения п. 7.3.2 и теорему 5. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$, $n \geq 1$. Согласно теореме Дирихле, для любой перестановки m имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{m(k)}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_{m(k)}$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{m(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} v_{m(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m(k)}. \quad \rfloor$$

Таким образом, обычные свойства конечных сумм переносятся только на абсолютно сходящиеся ряды

Упражнение 52*. Теорема Римана. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно и $s \in (\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$. Доказать существование перестановки m множества $\boldsymbol{N}$ такой, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m(k)}$ сходится к s. Доказать также существование перестановки m множества $\boldsymbol{N}$ такой, что частичные суммы переставленного ряда ограничены, но не имеют предела.

Упражнение 53. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходящийся ряд с положительными членами, причём $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Доказать, что для любого числа $s \in \boldsymbol{R}$ существует последовательность $\{\varepsilon_n \mid n \geq 1\}$ чисел таких, что каждое $\varepsilon_n = -1$ или $\varepsilon_n = 1$, и таких, что ряд $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots = s$ сходится к сумме s.

Упражнение 54. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ обладает свойством: для любой перестановки m множества $\boldsymbol{N}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{m(k)}$ сходится. Доказать, что исходный ряд сходится абсолютно.

7.4.3 Умножение рядов

Произведение двух сумм $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ есть сумма всех произведений вида $a_j \cdot b_k$, $1 \leq j, k \leq n$, которые можно расположить в виде таблицы

$$\begin{array}{ccccc}
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & \ldots & a_0b_n \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & \ldots & a_2b_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_nb_0 & a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & a_nb_n
\end{array} \qquad (1)$$

Порядок сложения этих произведений при этом не существенен. При переходе к рядам аналог таблицы (1) содержит бесконечно много строк и столбцов. Естественно и для рядов определить произведение двух рядов, как ряд составленный из всех произведений вида $a_j \cdot b_k$, $j, k \geq 1$, при этом, однако, порядок суммирования оквзывается существенным.

Определение 3. ***Произведением в смысле Коши*** *рядов*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_n \tag{2}$$

называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right). \tag{3}$$

Упражнение 55. Если ряды (2) сходятся, то ряд (3) не обязательно сходится. Привести пример рядов с таким поведением.

Упражнение 56. Доказать, что если для сходящихся рядов (2) ряд (3) сходится, то сумма ряда (3) равна произведению сумм рядов (2).

Теорема 10. *(Коши). Пусть ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_n = b$ сходятся абсолютно. Тогда ряд, составленный из всех произведений $a_j \cdot b_k$, $j, k \geq 1$, занумерованных в произвольном порядке, в частности, ряд-произведение по Коши, сходится абсолютно и его сумма равна ab.*

⌈ По условию теоремы $\exists C \in \boldsymbol{R} \quad \forall N \geq 1: \quad \sum\limits_{n=0}^{N} |a_n| \leq C, \quad \sum\limits_{n=0}^{N} |b_n| \leq C$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{j(n)} b_{k(n)}, \tag{4}$$

составленный из занумерованных в каком-либо порядке всех произведений $a_j \cdot b_k$, $j, k \geq 1$. Докажем, что ряд (4) сходится абсолютно. Действительно, $\forall m \geq 1: \quad \sum\limits_{n=0}^{m} |a_{j(n)} b_{k(n)}| \leq \sum\limits_{j,k=0}^{N} |a_j| \cdot |b_k| = \sum\limits_{j=0}^{N} |a_j| \sum\limits_{k=0}^{N} |b_k| \leq C^2$, где $N := \max(j(n), k(n) \mid 0 \leq n \leq m)$.

Таким образом ряд (4) сходится абсолютно, и его сумма s не зависит от порядка слагаемых. В частности, по теореме 9

$$s = a_0 b_0 + (a_1 b_1 + a_1 b_1 + a_0 b_1) + (a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_0 b_2) + \ldots\ .$$

Частичная сумма s_n с номером n последнего ряда имеет вид $s_n = \sum\limits_{j,k=0}^{n-1} a_j b_k = \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k$, $n \geq 1$. Поэтому $s_n \to ab$, $n \to \infty$. ⌋

Упражнение 57. Для любого $x \in \boldsymbol{R}$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} =: a(x)$ сходится абсолютно. Доказать, что $\forall \{x, y\} \subset \boldsymbol{R}: \quad a(x+y) = a(x)a(y)$.

Упражнение 58. Доказать, что при условиях теоремы Коши

$$\lim_{n\to\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0) = 0.$$

7.5 Бесконечные произведения

7.5.1 Определения. Сведение к ряду

Пусть $\{a_n \mid n \geq 1\}$ — последовательность действительных чисел. Произведение $p_n := a_1 a_2 \dots a_n$ называется n-м ***частичным произведением***, $n \geq 1$. Заметим, что $p_{n+1} = p_n a_{n+1}$, $n \geq 1$.

*Определение 1. Две последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ и $\{p_n \mid n \geq 1\}$ называются **бесконечным произведением** и обозначаются символом*

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

*Если последовательность $\{p_n \mid n \geq 1\}$ сходится к числу $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, то произведение (1) называется **сходящимся**, а число a — его **значением** и обозначается символом $a = \prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В остальных случаях произведение (1) называется **расходящимся**.*

Замечания. 1. Если произведение (1) сходится, то $\exists\, N \quad \forall n \geq N: \quad p_n \neq 0$, следовательно, $\forall\, k \geq 1: \quad a_k \neq 0$.

2. Если произведение (1) сходится, то $a_n \to 1$, $n \to \infty$. Действительно, если $p_n \to a \neq 0$, то $a_n = \dfrac{p_n}{p_{n-1}} \to \dfrac{a}{a} = 1$, $n \to \infty$.

Далее ***произведение (1) рассматривается только при условии, что*** $a_n > 0$, $n \geq 1$.

Теорема 11. *Для того, чтобы произведение* (1) *сходилось к значению a, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n = s$, при этом $a = e^s$.*

⌈ Положим $s_n = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n = \ln p_n$, $n \geq 1$. Тогда $p_n = e^{s_n}$, $n \geq 1$. Если $p_n \to a$, $n \to \infty$, то $\ln p_n = s_n \to \ln a$, $n \to \infty$, в силу непрерывности логарифмической функции на $(0, +\infty)$. Если же $s_n \to s \in \boldsymbol{R}$, $n \to \infty$, то $e^{s_n} = p_n \to e^s$, $n \to \infty$, в силу непрерывности показательной функции. ⌋

Упражнение 59. Доказать, что для $x, |x| < 1$, следующее произведение $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots$ сходится и найти его значение.

Упражнение 60. Доказать, что произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ расходится.

Упражнение 61. Найти значение произведения $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)$.

7.5.2 Достаточные условия сходимости

Теорема 12. *Пусть $u_n \geq 0$, $n \geq 1$. Произведение*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) \tag{1}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{2}$$

⌈ По теореме 11 произведение (1) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+u_n). \tag{3}$$

Пусть ряд (3) сходится, тогда $\ln(1+u_n) \to 0$, $n \to \infty$, откуда имеем $u_n = e^{\ln(1+u_n)} - 1 \to 0$, $n \to \infty$. Следовательно,

$$\ln(1+u_n) \sim u_n, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

и ряд (2) сходится в силу признака сравнения 2^0.

Если же сходится ряд (2), то $u_n \to 0$, $n \to \infty$, и снова справедливо соотношение (4), из которого следует сходимость ряда (3). ⌋

Замечание. Теорема остаётся верной и тогда, когда выполняются такие неравенства $-1 < u_n \leq 0$, $n \geq 1$.

Упражнение 62. Доказать сходимость $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

Упражнение 63. Определить значения $x \geq 0$, для которых сходится произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+x^n)$.

Теорема 13. *Пусть числа $u_n > -1$, $n \geq 1$, удовлетворяют условиям: 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится; 2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ сходится. Тогда произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ сходится.*

⌈ Докажем сходимость ряда (3). Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - \ln(1+u_n)) \tag{5}$$

сходится, поскольку согласно условию 1) $u_n \to 0$, $n \to \infty$, и потому $u_n - \ln(1+u_n) \sim \frac{1}{2}u_n^2$, $n \to \infty$. Учитывая условие 2), для доказательства сходимости ряда (5) применим признак сравнения 2^0. Сходимость ряда (3) теперь следует из условия 1) и сходимости ряда (5). ⌋

Упражнение 64. Определить значения $x \in R$, при которых сходится произведение из упражнения 63.

Упражнение 65. Исследовать сходимость произведения:

a) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos\dfrac{1}{n}$; b) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)$; c) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$;

d) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$; e) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \dfrac{x^2dx}{1+x^2}$.

Произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***абсолютно сходящимся,*** если абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$. Для абсолютно сходящегося произведения допустима произвольная перестановка сомножителей без изменения его значения.

Глава 8

Функциональные ряды

8.1 Равномерная сходимость последовательности функций

8.1.1 Определения

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$ и $f_n : A \to \boldsymbol{R}$, $n \geq 1$; $f : A \to \boldsymbol{R}$.

Определение 1. *Последовательность функций* $\{f_n(x), x \in A \mid n \geq 1\}$ ***сходится поточечно на множестве*** A *к функции* f, *если* $\forall\, x \in A : \quad f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty.$

Пусть множество $B \subset A$.

Определение 2. *Последовательность функций* $\{f_n(x), x \in A \mid n \geq 1\}$ ***сходится равномерно на множестве*** B *к* f, *если* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \boldsymbol{N}\ \forall\, n \geq N\ \forall\, x \in B : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

Определение 2 равносильно следующему.

Определение 3. *Последовательность функций* $\{f_n(x), x \in A \mid n \geq 1\}$ ***сходится равномерно на множестве*** B *к функции* f, *если* $d_n := \sup\limits_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$

Замечание. Отметим, что $d_n \leq +\infty$, $n \geq 1$. Из равномерной на множестве B сходимости последовательности следует её поточечная сходимость на B.

Примеры. 1. Пусть $A = [0,1]$; $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, $n \geq 1$; $f(x) = 0$, $x \in [0,1)$, $f(1) = 1$. Последовательность $\{x^n, x \in [0,1] \mid n \geq 1\}$ сходится поточечно на $[0,1]$ к f. Эта сходимость на $[0,1]$ не является равномерной, так как $d_n = \sup\limits_{x \in [0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x \in [0,1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0$, при $n \to \infty$.

На множестве $B_\alpha = [0,\alpha]$, $0 < \alpha < 1$, последовательность функций $\{x^n,\ x \in [0,1] \mid n \geq 1\}$ сходится равномерно на $[0,\alpha]$ к f, так как $d_n = \sup\limits_{x\in[0,\alpha]} |x^n - 0| = \alpha^n \to 0,\ n \to \infty$.

Замечание. Обратим внимание на то, что в примере 1 поточечный предел последовательности непрерывных на $[0,1]$ функций на является непрерывной на $[0,1]$ функцией.

2. Последовательность $\left\{\dfrac{1}{n^2+x^2},\ x \in \boldsymbol{R} \mid n \geq 1\right\}$ сходится поточечно на $\boldsymbol{R}$ к $f(x) = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$. Эта сходимость равномерна на $\boldsymbol{R}$, так как $d_n = \sup\limits_{x\in\boldsymbol{R}}\left|\dfrac{1}{n^2+x^2} - 0\right| = \sup\limits_{x\in\boldsymbol{R}} \dfrac{1}{n^2+x^2} = \dfrac{1}{n^2} \to 0,\quad n \to \infty$.

3. Последовательность $\left\{\dfrac{2nx}{1+n^2x^2},\ x \in [0,1] \mid n \geq 1\right\}$ сходится поточечно на $[0,1]$ к $f(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Эта сходимость не является равномерной на $[0,1]$, так как $d_n = \sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{2nx}{1+n^2x^2} - 0\right| = \max\limits_{x\in[0,1]} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = 1 \not\to 0$, $n \to \infty$. Сходимость равномерна на множестве $B_\alpha = [\alpha, 1]$, $0 < \alpha < 1$, поскольку в этом случае $d_n = \max\limits_{x\in[\alpha,1]} \dfrac{2nx}{1+n^2x^2} = \dfrac{2n\alpha}{1+n^2\alpha^2}$, $n > \dfrac{1}{\alpha}$, и поэтому $d_n \to 0$, $n \to \infty$.

Упражнение 1. Доказать, что последовательность функций $f_n(x) = 0$, $x \leq n$, $f(x) = 1$, $x > n$, $n \geq 1$, сходится равномерно на любом ограниченном множестве B и не сходится равномерно на $\boldsymbol{R}$.

Упражнение 2. Пусть $f_n(x) = n\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$, $x \geq 0$, $n \geq 1$. Найти поточечный на $[0,+\infty)$ предел этой последовательности и доказать, что сходимость равномерна на любом множестве $B = [0,c]$, где $c > 0$, и не является равномерной на $[0,+\infty)$.

8.1.2 Свойства равномерно сходящихся последовательностей

Теорема 1. *(Критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций). Для того, чтобы последовательность функций $\{f_n(x),\ x \in A \mid n \geq 1\}$ сходилась равномерно на множестве A, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \boldsymbol{N}\ \forall m \geq N\ \forall n \geq N\ \forall x \in A\ :\ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Γ Необходимость. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. По определению 2 $\exists N \in$

$N\ \forall n \geq N\ \forall x \in A: \ |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall m \geq N\ \forall n \geq N$ $\forall x \in B: \ |f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Достаточность. Пусть $x \in A$ фиксировано. Выполнение условия теоремы для каждого значения x означает фундаментальность последовательности чисел $\{f_n(x) \mid n \geq 1\}$. Согласно критерию Коши сходимости числовой последовательности $\exists f(x) \in \boldsymbol{R}: \quad f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty$. Пусть теперь $\varepsilon > 0$ задано. Перейдя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (1), получим $\forall n \geq N \ \ \forall x \in A: \ \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. ⌋

Упражнение 3. Доказать, что равномерный на оси предел последовательности многочленов есть многочлен.

Лемма 1. *Пусть* $\{f_n(x), \ x \in A \mid n \geq 1\}$, $f: \ A \to \boldsymbol{R}$, $x_0 \in A$. *Предположим, что выполнены следующие условия:*
1) $\{f_n(x), \ x \in A \mid n \geq 1\}$ *сходится равномерно на* A *к* f;
2) $\forall n \geq 1$: *функция* f_n *непрерывна в точке* x_0.
Тогда f *непрерывна в точке* x_0.

⌈ Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Согласно условию 1) имеем $\exists N \in \boldsymbol{N}$ $\forall n \geq N\ \forall x \in A: \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. По условию 2) $\exists \delta > 0\ \forall x \in A, |x - x_0| < \delta: \ |f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$. Тогда $\forall x \in A, |x - x_0| < \delta$: $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. ⌋

Лемма 2. *Пусть* $\{f_n(x), \ x \in [a,b] \mid n \geq 1\}$, $f: \ [a,b] \to \boldsymbol{R}$. *Предположим, что выполнены следующие условия:*
1) $\{f_n(x), \ x \in [a,b] \mid n \geq 1\}$ *сходится равномерно на* $[a,b]$ *к* f;
2) $\forall n \geq 1: \ f_n \in \boldsymbol{R}([a,b])$. *Тогда* $f \in \boldsymbol{R}([a,b])$.

⌈ Лемма 2 была доказана в п. 6.8.1 гл. 6. ⌋

8.2 Равномерная сходимость функционального ряда

8.2.1 Определения

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}$; $a_n: \ A \to \boldsymbol{R}$, $n \geq 1$. Для $x \in A$ рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in A. \tag{1}$$

Пусть $s_n(x) := a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x)$, $x \in A$, $n \geq 1$.

Определение 1. *Множество всех тех точек* $x \in A$, *для которых ряд (1) сходится, называется множеством сходимости ряда (1).*

Замечание. Множество сходимости ряда (1) есть множество, на котором последовательность частичных сумм сходится поточечно.

Упражнение 4. Определить множества сходимости и абсолютной сходимости ряда: a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{3^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{n^x}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$; e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3^{-n(1+x)} + 2^{nx})$.

Определение 2. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $x \in A$, *называется* ***равномерно сходящимся на множестве*** $B \subset A$, *если последовательность* $\{s_n(x),\ x \in A \mid n \geq 1\}$ *сходится равномерно на множестве* B.

Замечание. Равномерно сходящийся на некотором множестве ряд сходится на этом множестве. Поэтому при исследовании равномерной сходимости можно ограничиться рассмотрением рядов, сходящихся на этом множестве.

Положим $a(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $r_m(x) := \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n(x)$, $x \in A$.

Следующее определение равносильно определению 2, однако, более удобно при использовании.

Определение 3. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a(x)$, $x \in A$, *называется* ***равномерно сходящимся на множестве*** $B \subset A$, *если* $d_n = \sup\limits_{x\in B} |a(x) - s_n(x)| = \sup\limits_{x\in B} |r_n(x)| \to 0$, $n \to \infty$.

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1,1)$, сходится равномерно на множестве $B_\alpha = [-\alpha, \alpha]$, где $0 < \alpha < 1$, поскольку $d_n = \sup\limits_{x\in[-\alpha,\alpha]} \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k\right| = \sup\limits_{x\in[-\alpha,\alpha]} \dfrac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq \dfrac{|\alpha|^{n+1}}{1-\alpha} \to 0$, $n \to \infty$. На множестве $(-1,1)$ равномерной сходимости нет, так как при этом $d_n = +\infty$, $n \geq 1$.

Непосредственным следствием теоремы 1 является следующее утверждение.

Теорема 2. *(**Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда**). Для того, чтобы ряд (1) сходился равномерно на множестве* $B \subset A$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N\ \forall\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in B$: $|a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \ldots + a_{n+p}(x)| < \varepsilon$.

Упражнение 5. Доказать утверждение: если ряд (1) сходится равномерно на множестве A, то последовательность функций $\{a_n(x),\ x \in A \mid n \geq 1\}$ сходится равномерно на A к 0.

Упражнение 6. Доказать утверждения: 1. если ряд (1) сходится равномерно на множестве A, а функция $b:\ A \to \boldsymbol{R}$ ограничена на A, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b(x)a_n(x)), \quad x \in A, \tag{2}$$

сходился равномерно на множестве A; 2. если ряд (2) сходится равномерно на множестве A, а функция $1/b$ ограничена на A, то ряд (1) сходился равномерно на множестве A

Упражнение 7. Доказать что из равномерной на множестве A сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$, $x \in A$ следует равномерная на множестве A сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n(x) + b_n(x))$, $x \in A$.

Упражнение 8. Доказать утверждение: если ряд (1) сходится равномерно на каждом из множеств A и B, то он сходится равномерно на множестве $A \cup B$.

8.2.2 Признаки равномерной сходимости

1^0. ***Признак Вейерштрасса.*** Пусть функции $a_n:\ A \to \boldsymbol{R},\ \ n \geq 1$, и числа $c_n \in \boldsymbol{R},\ n \geq 1$, удовлетворяют условиям: 1) $\forall n \geq 1\ \forall x \in A:$ $|a_n(x)| \leq c_n$; 2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x), \quad x \in A, \tag{1}$$

сходится равномерно на множестве A.

⌈ Из условий 1), 2) и первого признака сравнения для числовых рядов следует сходимость ряда (1) для всех $x \in A$. Кроме того,

$$d_n = \sup_{x \in A} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x) \right| \leq \sup_{x \in A} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \to 0, n \to \infty. \ ⌋$$

Пример. 1. Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $x \in \boldsymbol{R}$, сходится равномерно на оси.

Упражнение 9. Доказать равномерную на оси сходимость ряда:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2x^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(1+nx^2)}{1+n^3x^2}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n|x|}\sin(x^2\sqrt{n})$.

Указание к d). При каждом $x \in \boldsymbol{R}$ предложенный ряд есть ряд Лейбница и допускает потому простую оценку остатка. Обратить внимание на то, что ряд сходится условно при каждом $x \in \boldsymbol{R}$, и, следовательно, к нему признак Вейерштрасса не применим, поскольку признак Вейерштрасса обеспечивает равномерную и абсолютную сходимость ряда.

Упражнение 10. Доказать что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} e^{-n(x-n)^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$, сходится равномерно на оси.

2^0. ***Признак Дирихле.*** Пусть функции $a_n : A \to \boldsymbol{R}$, $b_n : A \to \boldsymbol{R}$, $n \geq 1$, удовлетворяют таким условиям: 1) $\forall\, x \in A$ последовательность $\{a_n(x) \mid n \geq 1\}$ монотонна; 2) последовательность $\{a_n(x),\ x \in A \mid n \geq 1\}$ сходится равномерно на A к 0, т. е. $d_n = \sup\limits_{x\in A}|a_n(x)| \to 0$, $n \to \infty$;

3) $\exists\, C \in \boldsymbol{R}\ \forall\, n \geq 1\ \forall\, x \in A : \left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leq C.$

Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$, $x \in A$, сходится равномерно на множестве A.

⌈ Из тождества Абеля следует неравенство

$$\forall\, n \geq 1\ \forall\, p \in \boldsymbol{N}\ \forall\, x \in A : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \leq 2C(d_{n+1} + 2d_{n+p}).$$

Согласно условию 2) и критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда, получаем утверждение признака Дирихле. ⌋

Замечание. Направление монотонности в условии 1) признака Дирихле при разных x может быть разным.

Пример. 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$, $x \in \boldsymbol{R}$, сходится равномерно на любом множестве вида $B = [2\pi k + \delta, 2\pi(k+1) - \delta]$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, $0 < \delta < \pi$.

⌈ Все условия признака Дирихле для функций $a_n(x) = 1/n$, $b_n(x) = \sin nx$, $x \in \boldsymbol{R}$, $n \geq 1$, и множества B выполнены, в частности имеем $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \left|\sin\dfrac{x}{2}\right|^{-1}$, $x \in B$, $n \geq 1$.

Упражнение 11. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n^2x \cdot \sin nx}{n+x^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$, сходится равномерно на оси.

Упражнение 12. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}}$, $x \in \boldsymbol{R}$, сходится равномерно на $[\delta, 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$.

Упражнение 13. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx \cdot \operatorname{arctg} nx}{n}$, $x \in \boldsymbol{R}$, сходится равномерно на $[\delta, 2\pi - \delta]$, $0 < \delta < \pi$.

*3°. **Признак Абеля.*** Пусть функции $a_n : A \to \boldsymbol{R}$, $b_n : A \to \boldsymbol{R}$, $n \geq 1$, удовлетворяют условиям: 1) $\forall\, x \in A$ последовательность $\{a_n(x) \mid n \geq 1\}$ монотонна; 2) $\exists\, C \in \boldsymbol{R}\ \forall n \geq 1\ \forall x \in A: \ |a_n(x)| \leq C$; 3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на A. Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$, $x \in A$, сходится равномерно на множестве A.

⌈ Доказательство основано на тождестве Абеля и аналогично доказательству признака Дирихле. ⌋

Упражнение 14. Провести доказательство признака Абеля.

Примеры. 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, $x \in (-1, 1]$, сходится равномерно на $[0, 1]$.

⌈ Для доказательства в признаке Абеля положим $A = [0,1]$; $a_n(x) = x^n$, $b_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, $x \in [0,1]$, $n \geq 1$. Тогда все условия признака Абеля выполнены. ⌋

4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, $x > 0$, сходится равномерно на $[\alpha, +\infty)$, $\alpha > 0$.

⌈ Для доказательства в признаке Абеля положим $A = [\alpha, +\infty)$; $a_n(x) = \dfrac{1}{n^{x-\alpha/2}}$, $b_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha/2}}$, $x \geq \alpha$, $n \geq 1$. Тогда все условия признака Абеля выполнены. ⌋

Упражнение 15. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n + x^2} \operatorname{arctg} nx$, $x \in \boldsymbol{R}$, сходится равномерно на оси.

Упражнение 16. Пусть функции $a_n : A \to \boldsymbol{R}$, $n \geq 1$, удовлетворяют условиям: 1) $\forall\, n \geq 1\ \forall\, x \in A: \ a_n(x) \geq a_{n+1}(x) \geq 0$; 2) $\sup\limits_{x \in A} a_1(x) < +\infty$; 3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на A. Доказать, что для любого $\alpha > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\alpha}(x)$, $x \in A$, сходится равномерно на множестве A.

8.3 Свойства равномерно сходящихся рядов

8.3.1 Основные теоремы

Теорема 3. *(О непрерывности суммы функционального ряда). Пусть функции $a_n : A \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, удовлетворяют условиям: 1) $\forall\, n \geq 1 : a_n \in C(A)$; 2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a(x)$ сходится равномерно на A. Тогда $a \in C(A)$.*

⌈ Достаточно доказать непрерывность функции в каждой точке. Эта непрерывность есть следствие леммы 1 п. 8.1.2. ⌋

Замечание. При условиях теоремы 3 для каждой точки $x_0 \in A$ имеем $a(x) \to a(x_0)$, $x \to x_0$, или

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0).$$

Упражнение 17. Доказать равенства: a) $\lim\limits_{x \to -1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; b) $\lim\limits_{x \to -1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Упражнение 18.* Пусть функции $a_n : [a,b] \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, удовлетворяют условиям: 1) $\forall\, n \geq 1\ \forall\, x \in [a,b] : a_n(x) \geq 0$; 2) $\forall\, n \geq 1 :\ a_n \in C([a,b])$. Доказать, что равномерная на $[a,b]$ сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ есть необходимое и достаточное условие непрерывности на $[a,b]$ его суммы.

Упражнение 19. Пусть $a_1(x) = x$, $a_n(x) = x^{1/(2n-1)} - x^{1/(2n-3)}$, $x \in [-1,1]$, $n \geq 2$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ не сходится равномерно на отрезке $[-1,1]$.

Указание. Показать, что сумма ряда равна $\operatorname{sign} x$, $x \in [-1,1]$.

Теорема 4. *(О почленном интегрировании функционального ряда). Пусть функции $a_n :\ [\alpha,\beta] \to \mathbf{R}$, $n \geq 1$, удовлетворяют условиям: 1) $\forall\, n \geq 1 :\ a_n \in \mathbf{R}([\alpha,\beta])$; 2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$, сходится равномерно на отрезке $[\alpha,\beta]$. Тогда $a \in \mathbf{R}([\alpha,\beta])$ и $\int\limits_{\alpha}^{\beta} a(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} a_n(x)\,dx$, т. е.*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\alpha}^{\beta} a_n(x)\,dx.$$

⌈ Для доказательства заметим, что $s_n := (a_1+\ldots+a_n) \in \boldsymbol{R}([\alpha,\beta])$, $n \geq 1$. Теперь используем лемму 2 п. 8.1.2 и теорему о предельном переходе под знаком интеграла. ⌋

Пример. 1. Докажем, что $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, \quad x \in (-1,1]$.

Этот ряд был открыт в 1668 г. ***Меркатором.***

⌈ Если $|u| < 1$, то

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n, \tag{1}$$

причём ряд (1) сходится равномерно на $[-\alpha,\alpha]$ для любого α, $0 < \alpha < 1$. Пусть $x \in (-1,1)$ фиксировано, для определённости положим $x > 0$. К ряду (1) на отрезке $[0,x]$ применима теорема 4, согласно которой $\int\limits_0^x \dfrac{du}{1+u} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x(-1)^n u^n du$. Таким образом, справедливо равенство

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n,\ x \in (-1,1). \tag{2}$$

Кроме того, в силу непрерывности логарифмической функции

$$\lim_{x\to 1}\ln(1+x) = \ln 2, \tag{3}$$

а в силу равномерной на $[0,1]$ сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ и теоремы 3 имеем также

$$\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}. \tag{4}$$

Из равенств (3), (4) и (2) следует, что формула (2) верна и при $x = 1$. ⌋

Упражнение 20. Найти сумму следующих рядов: a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $|x| < 1$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$, $|x| < 1$.

Ответ: a) $(1-x)^{-2}$; b) $x(1-x)^{-2}$.

Теорема 5. *(О почленном дифференцировании функционального ряда). Пусть функции $a_n : [\alpha,\beta] \to \boldsymbol{R}$, $n \geq 1$, удовлетворяют условиям: 1) $\exists\, x_0 \in [\alpha,\beta]$, для которого ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ сходится; 2) $\forall\, n \geq 1 : a_n \in C^1([\alpha,\beta])$; 3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$, сходится равномерно на $[\alpha,\beta]$. Тогда ряд*

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a(x)$ *сходится на* $[\alpha,\beta]$, *причём его сумма* $a \in C^1([\alpha,\beta])$ *и справедливо равенство* $a'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$, *т. е.* $\frac{d}{dx}\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$.

⌈ Пусть

$$b(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(x), \ x \in [\alpha,\beta]. \tag{5}$$

Из условий 2) и 3) и теоремы 3 следует, что $b \in C([\alpha,\beta])$.

Пусть $z \in [\alpha,\beta]$ фиксировано, для определённости предположим,что $z > x_0$. К ряду (5) на отрезке $[x_0, z]$ применима теорема 4, из которой следует равенство $\int\limits_{x_0}^{z} b(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{z} a'_n(x)\,dx$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница и условие 1), получим $\int\limits_{x_0}^{z} b(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z)+c$, $c := = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$. Из этой формулы следуют оба утверждения теоремы.⌋

Упражнение 21. Доказать, что при условиях теоремы 5 исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$ также сходится равномерно на $[\alpha,\beta]$.

Упражнение 22. Пусть произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ сходится. Найти $\lim\limits_{x\to 1-} \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n x^n)$.

Упражнение 23. Пусть $a(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$. Доказать, что a' можно получить с помощью почленного дифференцирования.

8.4 Степенные ряды

8.4.1 Множество сходимости

Пусть $\{a_n \mid n \geq 0\} \subset \boldsymbol{R}$ и $x_0 \in \boldsymbol{R}$. ***Степенным рядом*** называется функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $x \in \boldsymbol{R}$. Далее вместо этого ряда рассматривается ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ x \in \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

который получается из предыдущего линейной заменой переменной. Частичные суммы ряда (1) являются многочленами. Ряд (1) всегда сходится для $x = 0$.

Упражнение 24. Лемма Абеля. Пусть $\{a_n \mid n \geq 0\}$, $x_0 \neq 0$ таковы, что последовательность $\{a_n x_0^n \mid n \geq 0\}$ ограничена. Тогда ряд (1) сходится абсолютно для $x \in (-|x_0|, |x_0|)$. Доказать это утверждение.

Положим:

$$\rho := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}, \ 0 \leq \rho \leq +\infty; \tag{2}$$

$$r := 0, \ \rho = +\infty; \quad r := \frac{1}{\rho}, \ 0 < \rho < +\infty; \quad r = +\infty, \ \rho = 0. \tag{3}$$

Теорема 6. *(Коши-Адамара). Пусть $\{a_n \mid n \geq 0\}$ — последовательность действительных чисел, ρ и r — величины, определённые по этой последовательности формулами (2) и (3). Тогда:*

a) при $r = 0$ ряд (1) расходится для любого $x \neq 0$;

b) при $r = +\infty$ ряд (1) сходится абсолютно для любого $x \in \boldsymbol{R}$;

c) при $0 < r < +\infty$ ряд (1) сходится абсолютно для x, $|x| < r$ и расходится для x, $|x| > r$.

⌈ a) $r = 0 \iff \rho = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$. Следовательно, существует подпоследовательность, для которой $\sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} \to +\infty, \ k \to \infty$. Пусть произвольное $x \neq 0$ фиксировано. Тогда

$$\exists\, k_0 \quad \forall\, k \geq k_0 : \ \sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} > \frac{1}{|x|} \quad \iff \quad |a_{n(k)} x^{n(k)}| > 1,$$

поэтому $a_n x^n \not\to 0, \ n \to \infty$.

b) $r = +\infty \iff \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Пусть произвольное $x \neq 0$ фиксировано. Тогда

$$\exists\, n_0 \quad \forall\, n \geq n_0 : \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|} \quad \iff \quad |a_n x^n| < \frac{1}{2^n}.$$

Из первого признака сравнения следует абсолютная сходимость ряда (4) для числа x.

c) $0 < r < +\infty \iff 0 < \rho = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$. Пусть произвольное x, $|x| > r$ фиксировано. Тогда $\rho > \dfrac{1}{|x|}$ и существует такая подпоследовательность, что

$$\forall\, k \geq 1 : \ \sqrt[n(k)]{|a_{n(k)}|} > \frac{1}{|x|} \quad \iff \quad |a_{n(k)} x^{n(k)}| > 1.$$

Таким образом, $a_n x^n \not\to 0$, $n \to \infty$, и ряд (1) в точке x расходится. Пусть теперь произвольное $x \neq 0$ таково, что $|x| < r$, т. е. $|x|\rho < 1$. Рассмотрим какое-либо α такое, что $|x|\rho < \alpha < 1$. Поскольку $\rho < \dfrac{\alpha}{|x|}$, то $\exists\, n_0\ \forall n \geq n_0:\ \sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{\alpha}{|x|} \iff |a_n x^n| < \alpha^n$. Отсюда, как и выше, получаем абсолютную сходимость ряда (1) для числа x. ⌋

Определение 1. Величина r, определённая формулами (2) и (3), называется ***радиусом сходимости ряда (1)***.

Упражнение 25. Доказать, что каждый из следующих рядов: a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n x^n$; c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^n$ имеет равный 0 радиус сходимости.

Упражнение 26. Доказать, что каждый из следующих рядов: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ имеет равный $+\infty$ радиус сходимости. Таким образом, эти ряды сходятся абсолютно для каждого $x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 27. Доказать, что каждый из следующих рядов: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ имеет равный 1 радиус сходимости, а множества сходимости соответственно равны $(-1,1)$, $[-1,1)$, $[-1,1]$.

Упражнение 28. Определить радиус сходимости ряда:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} x^n$; c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n x^n$.

Упражнение 29. Последовательность $\{a_n \mid n \geq 0\}$ такова, что $a_n \neq 0$, $n \geq 0$, и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Тогда $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Упражнение 30. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости $r > 0$. Показать, что радиус сходимости каждого из следующих рядов: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n^2+1) a_n x^n$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+3} x^n$ также равен r. Определить радиус сходимости каждого из рядов: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_n x^n$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{2^n} x^n$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

Упражнение 31. Определить множество сходимости ряда:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{\sqrt{n}} x^n$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$; c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n (x+1)^{n^2}$.

Упражнение 32. Пусть r_1 и r_2 — радиусы сходимости двух рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Каким может быть радиус сходимости ряда:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)x^n$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$?

Упражнение 33. Пусть $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$, $p_n \to q$, $n \to \infty$. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n}$.

8.4.2 Равномерная сходимость степенного ряда

Далее рассматриваются степенные ряды с *положительным радиусом сходимости.*

Теорема 7. *Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке вида $[\alpha, \beta]$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\beta \in \boldsymbol{R}$, содержащемся в множестве сходимости.*

⌈ Пусть r — радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{1}$$

Если $\alpha \in (0, r)$, то ряд (1) сходится равномерно на отрезке $[-\alpha, \alpha]$ в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости, поскольку $\forall\, n \geq 1\, \forall\, x \in [-\alpha, \alpha]: \ |a_n x^n| \leq |a_n \alpha^n|$ и для $x = \alpha$ ряд (1) сходится абсолютно.

Если ряд (1) сходится при $x = r$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n \left|\dfrac{x}{r}\right|^n$. Равномерную на $[0, r]$ сходимость ряда (1) получаем с помощью признака Абеля равномерной сходимости.

Из доказанного легко следует утверждение теоремы. ⌋

Упражнение 34. Найти все степенные ряды, сходящиеся равномерно на оси.

8.4.3 Свойства суммы степенного ряда

Теорема 8. *Сумма степенного ряда непрерывна на множестве сходимости.*

⌈ Теорема 8 есть следствие непрерывности членов ряда, теоремы 7 и теоремы о непрерывности суммы функционального ряда. ⌋

Теорема 9. *Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x)$, $x \in A$ — степенной ряд с радиусом сходимости r и множеством сходимости A. Тогда*

$$\forall\, x \in A: \int\limits_0^x a(u)\,du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}, \tag{1}$$

причём радиус сходимости ряда в (1) равен r.

⌈ Доказательство следует из теоремы 7 и теоремы о почленном интегрировании функционального ряда. Утверждение о радиусе сходимости следует из теоремы Коши-Адамара $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{n+1}} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. ⌋

Упражнение 35. Доказать, что $-\int\limits_0^1 \dfrac{\ln(1-x)}{x}\, dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Следствие 1. На множестве сходимости степенной ряд можно интегрировать почленно произвольное число раз, полученные при этом степенные ряды будут иметь тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Теорема 10. *Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x)$, $x \in A$ — степенной ряд с радиусом сходимости r. Тогда $a \in C^1((-r,r))$ и*

$$\forall\, x \in (-r,r): \; a'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{2}$$

причём степенной ряд в формуле (2) имеет радиус сходимости r.

⌈ Степенной ряд в формуле (2) имеет радиус сходимости r в силу теоремы Коши-Адамара $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 7 и теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда, применённым к отрезку $[-\alpha,\alpha]$, где $0<\alpha<r$. ⌋

Следствие 2. Сумма a степенного ряда с радиусом сходимости r принадлежит классу $C^{\infty}((-r,r))$. Производные функции a можно получать с помощью почленного дифференцирования исходного ряда.

Напомним, что для многочлена P степени n для любого $x_0 \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство

$$\forall\, x \in \boldsymbol{R}: \; P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Теорема 11. *Пусть*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x), \; x \in A \tag{3}$$

— степенной ряд с радиусом сходимости r. Тогда

$$\forall n \geq 0 \ : \quad a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}. \tag{4}$$

⌈ При $x = 0$ в формуле (3) имеем $a_0 = a(0)$. После почленного дифференцирования (3) получим формулу (2), из которой при $x = 0$ найдём $a_1 = a'(0)$ и т. д. ⌋

Замечание. Таким образом, сумма степенного ряда есть функция класса C^∞, обладающая тем свойством, что её значения на $(-r, r)$ восстанавливаются с помощью формул (4) по значениям функции и её производных в одной точке.

Теорема 12. *Предположим, что для степенных рядов* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b(x)$ *существует последовательность чисел* $\{t_k \mid k \geq 1\}$, *принадлежащих множествам сходимости обоих рядов и таких, что* $\forall k \geq 1$: $t_k \neq 0$; $t_k \to 0$, $k \to \infty$; $a(t_k) = b(t_k)$, $k \geq 1$. *Тогда* $\forall n \geq 0$: $a_n = b_n$.

⌈ Равенство $a_0 = b_0$ получим, перейдя к пределу при $k \to \infty$ в условии $a(t_k) = b(t_k)$, $k \geq 1$, на основании теоремы 7. Учитывая полученное равенство, имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n t_k^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n t_k^{n-1}$, $k \geq 1$. Далее как и выше находим $a_1 = b_1$, и т. д. ⌋

Упражнение 36. Пусть $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$. Доказать, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: s(x)$ имеет положительный радиус сходимости и найти s.

Упражнение 37. Пусть $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$, $n \geq 2$. Доказать, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n =: s(x)$ имеет положительный радиус сходимости и найти s.

Упражнение 38. В множестве последовательностей $\{a_n \mid n \geq 0\}$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $a_0 = 1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$, найти последовательности, для которых: a) $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 2^n$, $n \geq 0$; b) $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = (n+1)a_{n+1}$, $n \geq 0$.

8.4.4 Ряд Тейлора

Согласно следствию 2 и теореме 11, сумма степенного ряда есть функция класса C^∞, а частичная сумма ряда является основной частью формулы Тейлора для суммы ряда. Вследствие того, что степенные ряды являются простейшими функциональными рядами, а свойства их сумм особенно просты и потому легко могут быть использованы, возникает вопрос: какие функции являются суммами степенных рядов? Или иначе: какие функции можно представить степенным рядом? Принадлежность классу C^∞ не является достаточной, как показывает следующий пример.

Пример. 1. Пусть $f(x) = \exp(-1/x^2)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Доказать, что $f \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ и что $f^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 0$.

Определение 2. *Пусть $x_0 \in \boldsymbol{R}$, $0 < r \leq +\infty$, и $f \in C^\infty((x_0 - r, x_0 + r))$. Степенной ряд*

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

*называется **рядом Тейлора** (при $x_0 = 0$ — **рядом Маклорена**) функции f в окрестности точки x_0.*

Замечание. Ряд Тейлора многочлена в окрестности точки x_0 совпадает с разложением этого многочлена по степеням $x - x_0$. Ряд Тейлора функции примера 1 в окрестности точки 0 равен 0. Степенной ряд является рядом Тейлора для своей суммы, согласно теореме 11.

Теорема 13. *Пусть $x_0 \in \boldsymbol{R}$, $0 < r \leq +\infty$. Предположим, что функция f удовлетворяет следующим условиям: 1) $f \in C^\infty((x_0 - r, x_0 + r))$; 2) $\exists\, C \in \boldsymbol{R}\ \forall n \geq 1\ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$: $|f^{(n)}(x)| \leq C^n$. Тогда*

$$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r): \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{1}$$

причём для $r < +\infty$ сходимость ряда равномерна на $(x_0 - r, x_0 + r)$, а для $r = +\infty$ сходимость равномерна на любом отрезке вида $[x_0 - \tilde{r}, x_0 + \tilde{r}]$, $0 < \tilde{r} < +\infty$.

⌈ По формуле Тейлора для любого $n \in N$ имеем представление

$$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r): \ f(x) = s_n(x) + \rho_n(x), \tag{2}$$

в котором $s_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$; $\rho_n(x) := \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}$ $\cdot (x - x_0)^{n+1}$, $\theta \in (0, 1)$.

Для $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, учитывая условие 2), имеем неравенство $|\rho_n(x)| \leq \dfrac{C^{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \to 0$, $n \to \infty$. Поэтому формула (1) следует из (2) при $n \to \infty$. Утверждения относительно равномерной сходимости получаются аналогично. ⌋

Примеры. 2. Пусть $f(x) = \cos x$, $x \in \boldsymbol{R}$; $x_0 = 0$, $r = +\infty$. Поскольку $\forall\, x \in \boldsymbol{R}\ \ \forall\, n \in \boldsymbol{N}:\ \ |f^{(n)}(x)| = \left|\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq 1$, то условия теоремы 13 выполнены и $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots\ ,\ x \in \boldsymbol{R}$.

3. Аналогично $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots\ ,\ x \in \boldsymbol{R}$.

4. Пусть $f(x) = e^x$, $x \in \boldsymbol{R}$; $x_0 = 0$. Докажем, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ ,\ x \in \boldsymbol{R}.$$

⌈ Для произвольного $x \in \boldsymbol{R}$ заданного пусть r таково, что $|x| < r$. Тогда $\forall\, n \geq 1\ \forall\, x \in [-r, r]:\ |f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^r$ и применима теорема 13. ⌋

Упражнение 39. Пусть функция f представима рядом Тейлора на $(-r, r)$. Каким свойством обладает ряд Тейлора, если: a) f — чётная функция на $(-r, r)$? b) f — нечётная функция на $(-r, r)$?

Упражнение 40*. Доказать, что число e иррационально.

Теорема 13 даёт метод разложения функций в ряд Тейлора. Однако, условия этой теоремы не всегда выполняются или не могут быть просто проверены.Тогда эффективным методом получения разложения является использование свойств степенных рядов и их сумм. Этот метод иллюстрируется на примерах 5 — 7.

Примеры. 5. Справедливо представление

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots\ , x \in (-1, 1].$$

Упомянутым выше методом это представление получено в п. 8.3.1, пример 1.

6. Докажем, что

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots\ ,\ x \in [-1, 1].$$

⌈ Поскольку $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$, то

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^k x^{2k} + \ldots\ ,\ x \in (-1, 1).$$

На основании теоремы о почленном интегрировании функционального ряда имеем $\int\limits_0^x \operatorname{arctg}' u\, du = \int\limits_0^x du + \int\limits_0^x u^2\, du + \ldots + (-1)^k \int\limits_0^x u^{2k}\, du + \ldots$ для $x \in (-1, 1)$, или

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots\ ,\ x \in (-1, 1). \qquad (3)$$

Степенной ряд в (3) сходится на $[-1,1]$. Следовательно, по теореме 8 его сумма непрерывна на $[-1,1]$ Из этого, учитывая непрерывность функции arctg и равенство (3), получим верность равенства (3) и для значений $x=-1$, $x=1$.]

Замечание. Из равенства (3) при $x = 1$ получаем

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \ldots \ .$$

Упражнение 41. Доказать, что

$$\int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

Упражнение 42. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ функции: a) $\operatorname{sh} x$, $x \in \boldsymbol{R}$; b) $\operatorname{ch} x$, $x \in \boldsymbol{R}$; c) $\sin x^3$, $x \in \boldsymbol{R}$; d) $\sin^3 x$, $x \in \boldsymbol{R}$; e) $\frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$, $x \in (-1,1)$; f) $\ln(1-x^2)$, $x \in (-1,1)$; g) $\ln(1+x+x^2)$, $x \in (-1,1)$; h) $(1+x)\sin x^2$, $x \in \boldsymbol{R}$; i) $\frac{1}{1+x+x^2}$, $x \in (-1,1)$; k) $(1-5x+6x^2)^{-1}$, $|x| < \frac{1}{3}$.

Упражнение 43. С помощью разложений в ряд Тейлора функций sin и cos на оси доказать, что $\sup\limits_{x \in \boldsymbol{R}} |\sin x| < +\infty$, $\sup\limits_{x \in \boldsymbol{R}} |\cos x| < +\infty$.

Указание. Подсчитать сумму $\sin^2 x + \cos^2 x$.

Упражнение 44.* Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 45. Найти сумму рекуррентного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $a_0 = a_1 = 1$; $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$.

Упражнение 46. Найти сумму рекуррентного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, где $a_0 = 1$, $a_1 = 2$; $a_n - \frac{1}{2} a_{n-1} - \frac{1}{2} a_{n-2} = 0$, $n \geq 2$.

Пример. 7. Биномиальный ряд. Пусть $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Докажем, что

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, \quad x \in (-1,1), \tag{4}$$

где $C_\alpha^0 := 1$; $C_\alpha^n := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n \geq 1$.

Замечание. Частичные суммы ряда (4) фигурируют в формуле Тейлора для функции $(1+x)^\alpha$, $x > -1$. Если $\alpha \in \boldsymbol{N}$, то $\forall n > \alpha$:

$C_\alpha^n = 0$ и тогда равенство (4) превращается в формулу бинома Ньютона. Ньютон первым получил формулу (4) для целых отрицательных α.

⌈ Пусть $\alpha \notin (N \cup \{0\})$. Радиус сходимости ряда (4) равен 1, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{C_\alpha^n}{C_\alpha^{n+1}} \right| = 1$. Пусть $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, \quad x \in (-1,1)$.

Покажем, что функция f удовлетворяет уравнению

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x), \quad x \in (-1,1). \tag{5}$$

Согласно теореме о почленном дифференцировании степенного ряда

$$(1+x)f'(x) = (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} nC_\alpha^n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nC_\alpha^n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nC_\alpha^n x^n =$$

$$= C_\alpha^1 + \sum_{n=1}^{\infty} (nC_\alpha^n + (n+1)C_\alpha^{n+1})x^n = C_\alpha^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha C_\alpha^n x^n = \alpha f(x)$$

для $x \in (-1,1)$ в силу того, что $nC_\alpha^n + (n+1)C_\alpha^{n+1} = \alpha C_\alpha^n, \quad n \ge 1$.

После умножения равенства (5) на $(1+x)^{-\alpha-1}$, получим

$$(1+x)^{-\alpha} f'(x) = \alpha(1+x)^{-\alpha-1} f(x), \quad x \in (-1,1).$$

Отсюда находим $((1+x)^{-\alpha} f(x))' = 0, \quad x \in (-1,1)$. Следовательно, $\exists c \in R \ \ \forall x \in (-1,1): \quad (1+x)^{-\alpha} f(x) = c$. Число $c = 1$, так как $f(0) = 1$. Таким образом, $f(x) = (1+x)^\alpha, \quad x \in (-1,1)$. ⌋

Упражнение 47. С помощью рассуждений, аналогичных использованным в примере 7, получить разложение в степенной ряд для функции $f(x) = e^x$, $x \in R$.

Упражнение 48. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки 0 функции: a) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$; b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $|x| < 1$; c) $f(x) = \dfrac{3-4x+2x^2}{1-3x+4x^3}$, $|x| < \dfrac{1}{2}$.

Упражнение 49. Доказать, что $\arcsin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^{2n+1}$, $|x| < 1$. Получить аналогичную формулу для $\arccos$.

Указание. Рассмотреть производные и использовать биномиальный ряд.

Упражнение 50.* Функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n}\cos(n^2 x)$, $x \in R$, принадлежит классу C^∞ и обладает тем свойством что её ряд Тейлора в точке 0 сходится только в одной точке. Доказать это утверждение.

8.5 Степенные ряды с комплексными членами

8.5.1 Определения

Пусть C — множество комплексных чисел. Число $z \in C$ имеет вид

$$z = a+bi,\ \{a,b\} \subset R;\ i = \sqrt{-1};\quad a = \operatorname{Re} z,\ b = \operatorname{Im} z;\ |z| := \sqrt{a^2+b^2}.$$

Справедливы неравенства

$$\max(|a|,|b|) \le |z| \le |a| + |b|;\quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|. \tag{1}$$

Определение 1. *Пусть $\{z_n \mid n \ge 1\} \subset C,\ z \in C$. Число z называется* ***пределом последовательности*** *$\{z_n \mid n \ge 1\}$ комплексных чисел (при этом также говорят, что последовательность $\{z_n \mid n \ge 1\}$ сходится к числу z), если $|z_n - z| \to 0,\ n \to \infty$.*

Обозначения: $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n,\quad z_n \to z,\ n \to \infty$.

Пусть $z_n = a_n + b_n i,\ n \ge 1;\ z + a + bi$. Из неравенств (1) следует утверждение:

1°. $z_n \to z,\ n \to \infty \iff a_n \to a,\ b_n \to b,\ n \to \infty$.

Определение 2. *Ряд с комплексными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{3}$$

называется ***сходящимся****, если* $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} z_k \to z \in C,\quad n \to \infty$.

Число z — ***сумма ряда*** *(3). В остальных случаях ряд (3) называется* ***расходящимся****.*

2°. Ряд (3) сходится тогда и только тогда, когда сходятся следующие два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n;\quad z_n = a_n + b_n i,\quad n \ge 1$, причём имеет место равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Определение 3. *Ряд (3)* ***сходится абсолютно****, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

3°. Ряд (3) с $z_n = a_n + b_n i,\ n \ge 1$, сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|,\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$.

4°. В абсолютно сходящемся ряду допустима произвольная перестановка членов ряда.

Пусть $G \subset C;\ a_n :\ G \to C,\ n \ge 1$.

Определение 4. *Функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z), \quad z \in G, \tag{4}$$

сходится равномерно на G, *если* $\sup\limits_{z\in G}\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k(z)\right| \to 0, n \to \infty.$

5^0. ***Признак Вейерштрасса.*** Если $\forall n \geq 1 \quad \forall z \in G: \quad |a_n(z)| \leq c_n \in \boldsymbol{R}$, причём ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд (4) сходится равномерно на множестве G.

Упражнение 51. Если ряд (3) сходится, то $z_n \to 0, \ n \to \infty$,

Определение 5. *Ряд вида* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *где* $a_n \in \boldsymbol{C}, \ n \geq 0, \ z \in \boldsymbol{C}$, *называется степенным.*

Из определения 3 и теоремы 6 следует такое утверждение.

6^0. ***Теорема Коши-Адамара.*** Пусть r и ρ определены формулами (2) и (3) п. 8.4.1. Тогда:

a) при $r = 0$ ряд (5) расходится для любого $z \in \boldsymbol{C}, \ z \neq 0 + 0i$;

b) при $r = +\infty$ ряд (5) сходится абсолютно для любого $z \in \boldsymbol{C}$;

c) при $0 < r < +\infty$ ряд (5) сходится абсолютно для $z, \ |z| < r$ и расходится для $z, \ |z| > r$.

Величина r, определённая формулами (2) и (3) п. 8.4.1, называется ***радиусом сходимости ряда*** (5).

Упражнение 52. Лемма Абеля. Пусть $\{a_n \mid n \geq 0\} \subset \boldsymbol{C}, \ z_0 \in \boldsymbol{C}, \ |z_0| \neq 0$ таковы, что последовательность $\{|a_n z_0^n| \mid n \geq 0\}$ ограничена. Тогда ряд (5) сходится абсолютно для $z \in \boldsymbol{C}, \ |z| < |z_0|$. Доказать зто утверждение.

Упражнение 53. Определить множество сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+i)^n (z-i)^n, \ z \in \boldsymbol{C}$.

8.5.2 Показательная функция в комплексной плоскости

Показательная функция $f(x) = e^x, \ x \in \boldsymbol{R}$, обладает следующими свойствами:

1) $e^0 = 1; \quad \forall \{x, y\} \subset \boldsymbol{R}: \quad e^{x+y} = e^x e^y$;

2) показательная функция непрерывна на $\boldsymbol{R}$;

3) $\forall x \in \boldsymbol{R}: \quad e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$.

Легко проверить, что свойства 1) и 2) определяют показательную функцию с точностью до основания.

Определение 6. Показательной функцией на C называется сумма следующего ряда

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad , \; z \in C. \tag{1}$$

Ряд в формуле (1) сходится абсолютно для любого $z \in C$.

Отметим следующие свойства показательной функции.

1^0. Для $z = x + 0i = x \in R$ определённая формулой (1) показательная функция совпадает с показательной функцией e^x, $x \in R$.

2^0. $\forall \{z_1, z_2\} \subset C \;:\quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

⌈ По теореме об умножении абсолютно сходящихся рядов имеем

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=o}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} =$$

$$= 1 + (z_1 + z_2) + \left(\frac{z_1^2}{2!} + z_1 z_2 + \frac{z_2^2}{2!} \right) + \ldots = e^{z_1+z_2}. \qquad ⌋$$

3^0. ***Формулы Эйлера.*** Для любого $x \in R$ справедливы равенства:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x;$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

⌈ Пусть $s_n(z)$ — частичная сумма ряда (1) с номером n. Имеем

$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty} s_{4n}(ix) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!} \right) + i \lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots - \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!} \right) =$$

$$= \cos x + i \sin x. \qquad ⌋$$

В качестве следствия отметим, что $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy$, $\{x, y\} \subset R$.

Упражнение 54. Доказать, что ряд $\zeta(z) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ сходится абсолютно для значений $z \in C$, $\operatorname{Re} z > 1$.

8.5.3 Историческая справка

Первым рядом, с которым имели дело ещё древнегреческие математики, была сумма членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Этот ряд встречается уже у *Архимеда*. Сколько-нибудь точное понимание вопросов сходимости отсутствовало у математиков ещё в течение всего XVIII века. Например, для ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

на основании расстановок скобок следующими двумя способами

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots\quad,\qquad 1-(1-1)-(1-1)-\ldots\quad,$$

суммой считали и 0 и 1. *Гранди* делал из "доказанного" таким образом равенства $0 = 1$ вывод, что мир мог быть создан из ничего. Позже *Гранди*, полагая в известном равенстве

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\quad,$$

$x = 1$ получил ещё одну сумму $\frac{1}{2}$. С этим выводом *Гранди* согласился *Лейбниц*, приведя при этом свои соображения. Затем к ним присоединились *Якоб*, *Иоганн* и *Даниил Бернулли*, а также *Лагранж*.

Важным для математики событием стало разложение *Меркатором* в 1668 г. функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд. После этого, к изучению и использованию степенных рядов приступили *Ньютон* и *Лейбниц*. В частности, именно они впервые использовали степенные ряды для решения дифференциальных уравнений. Формальная теория рядов интенсивно разрабатывалась также в работах *Я. и И. Бернулли*, *Б. Тейлора*, *К. Маклорена*, *Л. Эйлера*, *Ж. Даламбера*, *Ж. Лагранжа* и др.

Современная теория рядов, основанная на понятии предела, была разработана, в первую очередь, *К. Гауссом*, *Б. Больцано*, *О. Коши*, *П. Дирихле*, *Н. Абелем*, *К. Вейерштрассом и Б. Риманом*. Создание важной для приложений теории тригонометрических рядов связано с именем *Ж. Фурье*.

Гвидо Гранди (1671 — 1742) — итальянский математик, автор работ по геометрии.

Николаус Меркатор (1620 — 1687) — немецкий математик, астроном и инженер.

Леонард Эйлер (1707 — 1783) — один из наиболее выдающихся математиков всех времён. Был также физиком, механиком и астрономом. Значительную часть жизни провёл в России, был членом Петербургской АН.

Жан Лерон Д'Аламбер (1717 — 1783) — один из самых разносторонних и влиятельных учёных XVIII в. Математик, физик, механик (принцип Д'Аламбера), автор физико-математической части "Энциклопедии" ***Д. Дидро***, а также ряда трудов по музыке и эстетике.

Жозеф Людвиг Раабе (1801 — 1859) — швейцарский математик и физик, основоположник сферической тригонометрии.

Колин Маклорен (1698 — 1746) — шотландский математик, ученик ***И. Ньютона.*** Вместе с ***Д. Бернулли и Л. Эйлером*** получил премию Парижской АН за теорию приливов и отливов. Первым опубликовал работу о разложении функции в ряд.

Нильс Генрик Абель (1802 — 1829) — норвежский математик. Доказал невозможность решения общего алгебраического уравнения выше четвёртой степени с помощью явных формул, аналогичных формулам решения квадратного уравнения.

Жак Адамар (1865 — 1963) — французский математик и педагог. Ему принадлежит ряд выдающихся результатов во многих разделах современной математики.

Глава 9

Функции ограниченной вариации. Интеграл Стилтьеса

9.1 Монотонные функции

9.1.1 Элементарные свойства

Определение 1. Функция $f : [a,b] \to R$ *называется* ***монотонно неубывающей*** *на* $[a,b]$, *если* $\forall \{x', x''\} \subset [a,b] : x' \le x'' \implies f(x') \le f(x'')$.

Положим по определению $f(a-) := f(a)$, $f(b+) = f(b)$.

Если для точки $x_0 \in [a,b] : f(x_0+) - f(x_0-) > 0$, то величина $f(x_0+) - f(x_0-)$ называется ***скачком функции*** в точке x_0.

В настоящем разделе рассматриваются ***монотонно неубывающие функции,*** заданные на отрезке.

Лемма 1. *Пусть* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *— различные точки отрезка* $[a,b]$, $n \in N$. *Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{n} (f(x_k+) - f(x_k-)) \le (b-a)$.

⌈ Предположим, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Требуемое неравенство — следствие следующих неравенств: $f(a) \le f(x_1-)$, $f(x_n+) \le f(b)$; $f\left(\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) \le f(x_k-) \le f\left(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$, $2 \le k \le n-1$. Действительно, $\sum\limits_{k=1}^{n} (f(x_k+) - f(x_k-)) \le$

$$\leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1-)+\sum_{k=2}^{n-1}\left(f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)-f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\right)+$$
$$+f(x_n+)-f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)=f(x_n+)-f(x_1-)\leq f(b)-f(a). \quad \rfloor$$

Лемма 2. *Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счётно.*

⌈ Монотонная функция в качестве точек разрыва может иметь только точки скачка. Пусть для заданного $\varepsilon > 0$ имеется n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, скачёк в каждой из которых не менее ε. Учитывая лемму 1, имеем $f(b)-f(a) \geq \sum\limits_{k=1}^{n}(f(x_k+)-f(x_k-)) \geq n\varepsilon$. Отсюда следует, что число точек со скачком, не меньшим ε, конечно. Для $k \in N$ пусть A_k — множество точек разрыва со скачком, не меньшем, чем $1/k$. Тогда $A = \bigcup\limits_{k\in N} A_k$ — множество всех точек разрыва функции f на $[a,b]$, причём множество A не более чем счётно. ⌋

Следствие 1. *Пусть $\{x_n \mid n \geq 1\}$ — множество всех точек скачка функции f на $[a,b]$. Тогда*

$$\sum_{k\geq 1}(f(x_k+)-f(x_k-)) \leq f(b)-f(a). \tag{1}$$

Замечание. Функция f может быть непрерывной на $[a,b]$. Тогда множество точек скачка пусто и в этом случае считаем, что левая часть неравенства (1) равна 0. Левая часть неравенства (1), вообще говоря, есть ряд с положительными членами.

Определение 2. *Пусть $\{x_n \mid n \geq 1\}$ — множество всех точек скачка функции f на $[a,b]$. Если $\sum\limits_{k\geq 1}(f(x_k+)-f(x_k-)) = f(b)-f(a)$, то функция f называется* ***функцией скачков.***

Упражнение 1. Пусть $c \in (a,b)$. Найти $\lim\limits_{x\to c-} f(x+)$, $\lim\limits_{x\to c+} f(x-)$.

Упражнение 2. Пусть $\{r_n \mid n \geq 1\}$ — последовательность всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$. Положим $f(0) := 0$; $f(x) := \sum\limits_{n\,:\,r_n<x} 2^{-n}$, $0 < x \leq 1$. Доказать, что: 1) функция f строго возрастает на $[0,1]$; 2) f разрывна в рациональных точках, именно $f(r_n+)-f(r_n-) = 2^{-n}$, $n \geq 1$; 3) f есть функция скачков на $[0,1]$.

9.1.2 Теорема о разложении

Теорема 1. *Пусть f — монотонно неубывающая на $[a,b]$ функция. Справедливо следующее представление*

$f(x) = g(x) + h(x)$, $x \in [a, b]$, в котором g — функция скачков, имеющая скачки в тех же точках и той же величины, что и функция f, а h — монотонно неубывающая непрерывная на $[a, b]$ функция.

⌈ Пусть $\{x_n \mid n \geq 1\}$ — множество всех точек скачка функции f на $[a, b]$. Положим: $g(a) := 0$, $g(x) := \sum\limits_{n:\, x_n < x} (f(x_n+) - f(x_n-)) + f(x) - f(x-)$, $a < x \leq b$; $h(x) := f(x) - g(x)$, $x \in [a, b]$. Если $a \leq x' < x'' \leq b$, то

$$g(x'') - g(x') = f(x'+) - f(x')+ + \sum_{n:\, x' < x_n < x''} (f(x_n+) - f(x_n-)) + f(x'') - f(x''-). \tag{2}$$

Отсюда в силу леммы 1, имеем

$$0 \leq g(x'') - g(x') \leq f(x'') - f(x') \tag{3}$$

и $f(x') - g(x') \leq f(x'') - g(x'')$. Поэтому g и h монотонно не убывают на $[a, b]$. Следствием равенства (2) является также неравенство

$$g(x'') - g(x') \geq f(x'+) - f(x'). \tag{4}$$

Из неравенств (3) и (4) при $x'' \to x'+$ получим:

$$g(x'+) - g(x') \leq f(x'+) - f(x'), \quad g(x'+) - g(x') \geq f(x'+) - f(x').$$

Следовательно, $g(x'+) - g(x') = f(x'+) - f(x')$ и $h(x') = h(x'+)$. Аналогично доказывается, что $h(x') = h(x'-)$. Непрерывность в точке b доказывается аналогично. Поэтому $h \in C([a, b])$. ⌋

9.2 Функции ограниченной вариации

9.2.1 Определение и примеры

Определение 1. *Функция $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ называется* ***функцией ограниченной вариации*** *(или* ***ограниченного изменения****) на отрезке $[a, b]$, если*

$$\exists\, L \in \boldsymbol{R} \quad \forall\, \lambda([a, b]) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \ : \quad \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq L.$$

Обозначение: $f \in \boldsymbol{BV}([a, b]) \iff f$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$.

Для $f \in \boldsymbol{BV}([a, b])$ ***вариация*** функции f на $[a, b]$ есть величина $V(f, [a, b]) := \sup\limits_{\lambda} \sum\limits_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$, где верхняя грань берётся по всем возможным разбиениям $\lambda = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a, b]$.

$V(f, [a, b]) := +\infty$, если f не имеет ограниченной вариации на $[a, b]$.

Примеры. 1. Пусть f монотонная на $[a, b]$ функция. Тогда функция $f \in \boldsymbol{BV}([a, b])$ и $V(f, [a, b]) = |f(b) - f(a)|$.

⌈ Пусть f монотонно не убывает на $[a,b]$. Тогда для любого разбиения $\lambda = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a,b]$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = f(x_n) - f(x_0) =$$
$$= f(b) - f(a). \quad \rfloor$$

2. Функция f определена на $[0,1]$ следующим образом: $f(0) = 0$, $f(1/(2k-1)) = 0$, $f(1/(2k)) = 1/(2k)$, $k \in N$, и линейна на каждом из отрезков $[1/(2k+1), 1/(2k)]$, $[1/(2k), 1/(2k-1)]$, $k \in N$. Докажем, что $V(f,[a,b]) = +\infty$.

⌈ Действительно, для любого $n \in N$ рассмотрим разбиение

$$\lambda = \left\{0, \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\},$$

для которого имеем равенство

$$\left|f\left(\frac{1}{2n+1}\right) - f(0)\right| + \left|f\left(\frac{1}{2n}\right) - f\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right| +$$
$$+ \left|f\left(\frac{1}{2n-1}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| + \ldots + \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right| +$$
$$+ \left|f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1.$$

Заметим, что $f \in C([a,b])$. ⌋

Упражнение 3. Доказать, что $V(f,[a,b]) = 0 \iff \forall x \in [a,b] : f(x) = f(a)$.

Упражнение 4. Найти вариацию функции: a) $f(x) = \sin x$, $x \in [0,\pi]$; b) $f(x) = x^2$, $x \in [-1,1]$; c) $f(x) = x^3 - x$, $x \in [-1,1]$.

Упражнение 5. Доказать, что $V(f,[a,b]) = f(b) - f(a) \iff f$ монотонно не убывает на $[a,b]$.

Упражнение 6. Пусть $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Доказать, что $V(f,[0,1]) = +\infty$.

Упражнение 7. Пусть $f \in BV([a,b])$. Для $\{\alpha, \beta\} \subset R$ определить вариацию функции $g(x) = \alpha f(x) + \beta$ через $V(f,[a,b])$.

Упражнение 8. Доказать, что $f \in BV([a,b]) \Longrightarrow |f| \in BV([a,b])$.

Упражнение 9*. Доказать, что для $f \in C([a,b])$ имеем $|f| \in BV([a,b]) \Longrightarrow f \in BV([a,b])$. Привести пример, показывающий, что условие непрерывности нельзя опустить.

9.2.2 Свойства функций ограниченной вариации и вариации

1^0. $V(f,[a,b]) \geq 0$.

2^0. $|f(b) - f(a)| \leq V(f,[a,b])$.

⌈ Следует из определения для разбиения $\lambda = \{a, b\}$. ⌋

3^0. Функция $f \in \boldsymbol{BV}([a,b])$ ограничена на $[a,b]$.

⌈ Пусть $x \in [a,b]$. Тогда имеем $|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + +|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq |f(a)| + V(f,[a,b])$. Таким образом, $\forall\, x \in [a,b]: \quad |f(x) \leq |f(a)| + V(f,[a,b])$. ⌋

4^0. Если $\{f, g\} \subset \boldsymbol{BV}([a,b])$, то: a) $\forall\, c \in \boldsymbol{R}: \quad (cf) \in \boldsymbol{BV}([a,b])$; b) $(f \pm g) \in \boldsymbol{BV}([a,b])$, $(fg) \in \boldsymbol{BV}([a,b])$; c) если дополнительно $\exists\, \alpha > 0\ \forall\, x \in [a,b]: \ |g(x) \geq \alpha$, то $(f/g) \in \boldsymbol{BV}([a,b])$.

⌈ Доказательства утверждений a) — c) элементарны и одинаковы. Например, доказательство утверждения c) основано на оценке

$$\left|\frac{f(x'')}{g(x'')} - \frac{f(x')}{g(x')}\right| \leq \frac{1}{\alpha^2}\,|f(x'')g(x') - f(x')g(x'')| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^2}\,(|f(x'')g(x') - f(x')g(x')| + |f(x')g(x') - f(x')g(x'')| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^2}\left(\sup_{[a,b]}|g| \cdot |f(x'') - f(x')| + \sup_{[a,b]}|f| \cdot |g(x'') - g(x')|\right)$$

и использовании свойства 3^0. ⌋

Упражнение 10. Доказать, что $f \in \boldsymbol{Lip}_1([a,b]) \implies f \in \boldsymbol{BV}([a,b])$.

Упражнение 11. Пусть функция f имеет производную f' на $[a,b]$, причём $f' \in \boldsymbol{R}([a,b])$. Доказать, что $f \in \boldsymbol{BV}([a,b])$ и следующую формулу $V(f,[a,b]) = \int\limits_a^b |f'(x)|\,dx$.

Указание. Использовать для значений $x' < x''$ следующее неравенство $|f(x'') - f(x')| = \left|\int\limits_{x'}^{x''} f'(u)\,du\right| \leq \int\limits_{x'}^{x''} |f'(u)|\,du$ и теорему Лагранжа $|f(x'') - f(x')| = |f'(\xi)|(x'' - x'), \quad \xi \in [x', x'']$.

Упражнение 12. Пусть $\varphi \in \boldsymbol{R}([a,b])$ и $f(x) = \int\limits_a^x \varphi(u)\,du, \ x \in [a,b]$.

Доказать, что $V(f,[a,b]) = \int\limits_a^b |\varphi(u)|\,du$.

5^0. ***Аддитивность вариации*** Пусть $f \in \boldsymbol{BV}([a,b])$ и $c \in (a,b)$. Тогда $f \in \boldsymbol{BV}([a,c])$, $f \in \boldsymbol{BV}([c,b])$; $V(f,[a,b]) = V(f,[a,c]) + V(f,[c,b])$.

⌈ Пусть $\lambda_1 = \lambda_1([a,c]) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n(1)}\}$, $\lambda_2 = \lambda_2([c,b]) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n(2)}\}$ и $\lambda := \lambda_1 \cup \lambda_2$ — разбиение отрезка $[a,b]$. Из неравенства

$$\sum_{k=0}^{n(1)-1} |f(u_{k+1}) - f(u_k)| + \sum_{k=0}^{n(2)-1} |f(v_{k+1}) - f(v_k)| \leq V(f,[a,b]) \qquad (1)$$

следует, что

$$\sum_{k=0}^{n(1)-1} |f(u_{k+1}) - f(u_k)| \leq V(f,[a,b]), \quad \sum_{k=0}^{n(2)-1} |f(v_{k+1}) - f(v_k)| \leq V(f,[a,b])$$

и тем самым первые два утверждения доказаны. Кроме того, согласно неравенству (1), имеем также

$$V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]) \leq V(f,[a,b]). \qquad (2)$$

Пусть теперь $\lambda = \lambda([a,b]) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, причём $c \in (x_\nu, x_{\nu+1}]$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{\nu-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| +$$

$$+ |f(x_{\nu+1}) - f(c) + f(c) - f(x_\nu)| + \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\nu-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_{\nu+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_\nu)| +$$

$$+ \sum_{k=\nu+1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]).$$

Отсюда

$$V(f,[a,b]) \leq V(f,[a,c]) + V(f,[c,b]). \qquad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) следует третье утверждение свойства 5^0. ⌋

Замечание. Вторая часть доказательства свойства 5^0 показывает, что $f \in \boldsymbol{BV}([a,c])$ и $f \in \boldsymbol{BV}([c,b]) \implies f \in \boldsymbol{BV}([a,b])$.

Упражнение 13. Вычислить вариацию функции:

a) $f(x) = \sin 2x$, $x \in [0, 2\pi]$; b) $f(x) = |\sin x|$, $x \in [0, 10\pi]$.

Упражнение 14. Пусть $f(x) = x^\alpha \sin \dfrac{1}{x^\beta}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0; \{\alpha, \beta\} \subset \boldsymbol{R}$, $\beta > 0$. Доказать, что $V(f,[0,1]) < +\infty$, если $\alpha > \beta$, и $V(f,[0,1]) = \infty$, если $\alpha \leq \beta$.

Упражнение 15. Пусть $f : [a, +\infty) \to \boldsymbol{R}$ и $\forall b > a \ : \ f \in \boldsymbol{BV}([a,b])$. Определим $V(f,[a,+\infty)) := \lim\limits_{b \to +\infty} V(f,[a,b]) \leq +\infty$. Доказать, что из неравенства $V(f,[a,+\infty)) < +\infty$ следует существование конечного предела $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

6^0. Теорема Жордана. Функция $f \in BV([a,b])$ тогда и только тогда, когда f можно представить в виде разности монотонно неубывающих на $[a,b]$ функций.

⌈ Достаточность. Следует из свойства 4^0 и результата примера 1 п. 9.2.1.

Необходимость. Пусть $f \in BV([a,b])$. Определим функции

$$g(a) := 0,\ g(x) := V(f,[a,x]),\ x \in [a,b];\ h(x) = g(x) - f(x),\ x \in [a,b].$$

Функция g монотонно не убывает на $[a,b]$, поскольку для $a \leq x' < x'' \leq b$ имеем, согласно свойству 5^0, $g(x'') = V(f,[a,x'']) = V(f,[a,x']) + +V(f,[x',x'']) \geq V(f,[a,x']) = g(x')$. Функция h монотонно не убывает на $[a,b]$, так как для в силу свойств 5^0 и 2^0 $h(x'')-h(x') = g(x'')-f(x'')- -g(x')+f(x') = V(f,[x',x'']) - (f(x'') - f(x")) \geq 0$. ⌋

Упражнение 16.* Доказать, что множества точек разрыва функций f и g в теореме Жордана совпадают. Доказать также, что функция $f \in BV([a,b])$ может иметь не более чем счётное множество точек разрыва первого рода.

Упражнение 17. Пусть $f \in C^1([a,b])$. Доказать справедливость равенства $\frac{d}{dx}V(f,[a,x]) = |f'(x)|,\quad x \in [a,b]$.

Упражнение 18. Представить в виде разности монотонно неубывающих функций следующую функцию: a) $f(x) = \sin x,\ x \in [0,2\pi]$; b) $f(x) = \sin^2 x,\ x \in [0,2\pi]$; c) $f(x) = x - [x],\ x \in [0,3]$; d) $f(x) = \sin x - x\cos x,\ x \in [0,4\pi]$.

Упражнение 19. Пусть $f \in BV([a,b])$ и положим $g(a) := f(a)$, $g(x) := \frac{1}{x-a}\int\limits_a^x f(u)\,du,\ x \in (a,b]$. Доказать, что $g \in BV([a,b])$

Упражнение 20. Пусть $f \in (BV([a,b]) \cap C([a,b]))$. Доказать, что f можно представить в виде разности непрерывных монотонно неубывающих на $[a,b]$ функций.

9.2.3 Спрямляемые кривые

Определение 2. Множество точек в пространстве R^3 $\Gamma = \{(x,y,z) \mid x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ z = \varphi_3(t);\ t \in [\alpha,\beta]\}$, где $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\} \subset C([\alpha,\beta])$, ***называется непрерывной кривой.***

Пусть $\lambda = \lambda([\alpha,\beta]) = \{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ — разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$ и $(\varphi_1(t_j),\varphi_2(t_j),\varphi_3(t_j))$, $0 \leq j \leq n$ — точки на Γ. Для каждого j, $0 \leq j \leq n-1$, соединим точки $(\varphi_1(t_j),\varphi_2(t_j),\varphi_3(t_j))$, $(\varphi_1(t_{j+1}),\varphi_2(t_{j+1}),\varphi_3(t_{j+1}))$

отрезком прямой. Пусть $\Gamma(\lambda)$ — полученная ломаная, её длина $l(\Gamma(\lambda))$, в силу теоремы Пифагора, равна

$$l(\Gamma(\lambda)) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k))^2}\ .$$

*Определение 3. Непрерывная кривая Γ называется **спрямляемой**, если $l(\Gamma) := \sup\limits_{\lambda} l(\Gamma(\lambda)) < +\infty$, где верхняя грань берётся по всем возможным разбиениям λ отрезка $[\alpha,\beta]$. Число $l(\Gamma)$ называется **длиной кривой** Γ.*

Упражнение 21. Доказать, что $\sup\limits_{\lambda} l(\Gamma(\lambda)) = \lim\limits_{|\lambda|\to 0} l(\Gamma(\lambda))$.

Теорема 2. *(Жордана). Кривая Γ спрямляема тогда и только тогда, когда $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subset BV([\alpha,\beta])$.*

⌈ Доказательство следует из определения функции ограниченной вариации и неравенств

$$\max_{i=1,2,3} \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)| \le l(\Gamma(\lambda)) \le \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)|.\ ⌋$$

9.3 Интеграл Стилтьеса

9.3.1 Определения

Пусть $[a,b]$ — отрезок на R, $f:\ [a,b] \to R$ — ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция и $\alpha:\ [a,b] \to R$ — монотонно неубывающая на $[a,b]$ функция.

Для разбиения $\lambda = \lambda([a,b]) = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ и функции f для $0 \le k \le n-1$ положим $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$; $m_k := m_k(f) := \inf\limits_{[x_k,x_{k+1}]} f$, $M_k := M_k(f) := \sup\limits_{[x_k,x_{k+1}]} f$. Пусть $|\lambda| := \max\{\Delta x_k \mid 0 \le k \le n-1\}$.

*Определение 1. **Нижней суммой Дарбу-Стилтьеса** для ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции f и разбиения λ называется число $L(f,\alpha;\lambda) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k))$.*

***Верхней суммой Дарбу-Стилтьеса** для ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции f и разбиения λ называется число $U(f,\alpha;\lambda) := \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k))$.*

Для набора точек $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $0 \le k \le n-1$, сумма

$$S(f,\alpha;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) := S(f,\alpha;\lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k))$$

называется интегральной суммой.

Замечание. Для $\alpha(x) = x$, $x \in [a,b]$, определение 1 содержит, как частный случай, суммы Дарбу и интегральные суммы, введенные при определении интеграла Римана.

Если неравенства $\inf\limits_{[a,b]} f \le m_k \le f(\xi_k) \le M_k \le \sup\limits_{[a,b]} f$ умножить на $\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k) \ge 0$ и просуммировать по k, $0 \le k \le n-1$, то получим следующее свойство введенных сумм.

1^0. $\forall\lambda = \lambda([a,b])$ $\forall\{\xi_i|\lambda\}$: $\inf\limits_{[a,b]} f \cdot (\alpha(b) - \alpha(a)) \le L(f,\alpha;\lambda) \le$
$\le S(f,\alpha;\lambda) \le U(f,\alpha;\lambda) \le \sup\limits_{[a,b]} f \cdot (\alpha(b) - \alpha(a))$.

Из свойства 1^0 следует, что ***множества*** чисел $\{L(f,\alpha;\lambda) \mid \lambda\}$, $\{U(f,\alpha;\lambda) \mid \lambda\}$ ***ограничены.***

Определение 2. Нижним интегралом Римана-Стилтьеса *от функции f по отрезку $[a,b]$ называется число* $\underline{\int} f(x)\,d\alpha(x) := \sup\limits_{\lambda} L(f,\alpha;\lambda)$. ***Верхним интегралом Римана-Стилтьеса*** *от функции f по отрезку $[a,b]$ называется число* $\overline{\int} f(x)\,d\alpha(x) := \inf\limits_{\lambda} U(f,\alpha;\lambda)$. *При этом точные верхние и нижние грани берутся по всем возможным разбиениям λ отрезка $[a,b]$.*

Если для функции f $\underline{\int} f(x)\,d\alpha(x) = \overline{\int} f(x)\,d\alpha(x)$, *то функция f* ***называется интегрируемой*** *относительно функции α по отрезку $[a,b]$, а общее значение верхнего и нижнего интегралов* ***называется интегралом Римана-Стилтьеса*** *от функции f по отрезку $[a,b]$ и обозначается символом* $\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x)$.

Обозначение: $f \in RS(\alpha,[a,b]) \iff f$ интегрируема относительно α по $[a,b]$.

Упражнение 22. Для функции Дирихле на $[0,1]$ и функции α, для которой $\alpha(1) - \alpha(0) > 0$, для любого разбиения определить суммы Дарбу-Стилтьеса, а также нижний и верхний интегралы.

Упражнение 23. Функции f и α определены на $[-1,1]$ следующим образом $f(x) = -1$, $x \le 0$, $f(x) = 1$, $x > 0$, $\alpha(x) = 0$, $x \le 0$, $\alpha(x) = 1$, $x > 0$. Доказать, что $\underline{\int} f(x)\,d\alpha(x) = -1$, $\overline{\int} f(x)\,d\alpha(x) = 1$.

9.3.2 Свойства нижних и верхних сумм

1^0. Для произвольного разбиения λ и произвольного его подразбиения λ' справедливы неравенства

$$L(f,\alpha;\lambda) \le L(f,\alpha;\lambda'); \quad U(f,\alpha;\lambda') \le U(f,\alpha;\lambda).$$

⌈ Доказательство этого утверждения использует монотонность функции α и в точности совпадает с доказательством аналогичного утверждения для сумм Дарбу. ⌋

2^0. Для произвольных разбиений λ_1 и λ_2 отрезка $[a,b]$ справедливо неравенство $L(f,\alpha;\lambda_1) \le U(f,\alpha;\lambda_2)$.

3^0. Для любой ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции f

$$\underline{\int} f(x)\,d\alpha(x) \le \overline{\int} f(x)\,d\alpha(x).$$

4^0. ***Критерий интегрируемости.*** Функция $f \in \boldsymbol{RS}(\alpha,[a,b])$ тогда и только тогда, когда $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\lambda: \quad U(f,\alpha;\lambda) - L(f,\alpha;\lambda) < \varepsilon$.

⌈ Доказательство то же, что и для интеграла Римана. ⌋

Упражнение 24. Доказать для любого $c \in \boldsymbol{R}$ равенство $\int\limits_a^b c\,d\alpha(x) = c(\alpha(b) - \alpha(a))$.

Упражнение 25. Доказать утверждение: если $\alpha(a) = \alpha(b)$, то $\forall\, f$: $\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) = 0$.

Упражнение 26. Пусть $\{f,g\} \subset \boldsymbol{RS}([a,b])$. Доказать, что:
a) $\forall\, c \in \boldsymbol{R}$: $(cf) \in \boldsymbol{RS}([a,b])$; b) $|f| \in \boldsymbol{RS}([a,b])$;
c) $(f \pm g) \in \boldsymbol{RS}([a,b])$; d) $(fg) \in \boldsymbol{RS}([a,b])$.

9.3.3 Классы интегрируемых функций

1^0. $C([a,b]) \subset \boldsymbol{RS}(\alpha,[a,b])$. Кроме того, имеем также $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0$ $\forall\,\lambda,\ |\lambda| < \delta \quad \forall\,\{\xi_i|\lambda\}$: $|S(f,\alpha;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) - \int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x)| < \varepsilon$, т. е.

$$\lim_{|\alpha|\to 0} S(f,\alpha;\lambda) = \int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

⌈ Пусть $f \in C([a,b])$ и $\alpha(b) - \alpha(a) > 0$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Функция $f \in C([a,b])$ по теореме Кантора равномерно непрерывна на $[a,b]$. Поэтому для числа $(\varepsilon/(\alpha(b) - \alpha(a))) > 0$ имеем

$\exists\,\delta > 0\ \forall\,\{x',x''\} \subset [a,b],\ |x' - x''| < \delta:\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(\alpha(b) - \alpha(a))$.

Для произвольного разбиения $\lambda = \lambda([a,b])$ с $|\lambda| < \delta$ имеем:

$$U(f,\alpha;\lambda) - L(f,\alpha;\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) = \varepsilon.$$

Согласно критерию интегрируемости, $f \in \boldsymbol{RS}(\alpha, [a,b])$. Поскольку всегда имеют место неравенства $L(f,\alpha;\lambda) \le \int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) \le U(f,\alpha;\lambda)$; $L(f,\alpha;\lambda) \le S(f,\alpha;\lambda) \le U(f,\alpha;\lambda)$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) - S(f,\alpha;\lambda)\right| < \varepsilon$. ⌋

Упражнение 27. С помощью утверждения 1^0 вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^2\,d\alpha(x)$, $\alpha(0) = 1$, $\alpha(x) = 2$, $0 < x < 1$, $\alpha(1) = 3$.

2^0. Пусть функция f монотонна на $[a,b]$, а функция α монотонно не убывает на $[a,b]$ и $\alpha \in C([a,b])$. Тогда функция $f \in \boldsymbol{RS}(\alpha,[a,b])$ и $\lim\limits_{|\alpha|\to 0} S(f,\alpha;\lambda) = \int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x)$

⌈ Предположим, что f монотонно не убывает и $f(b) - f(a) > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. По теореме Кантора $\exists\,\delta > 0\ \forall\,\{x', x''\} \subset [a,b], |x' - x''| < \delta:\ |\alpha(x') - \alpha(x'')| < \varepsilon/(f(b) - f(a))$. Для любого λ, $|\lambda| < \delta$, имеем

$$U(f,\alpha;\lambda) - L(f,\alpha;\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1} - f(x_k))(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \varepsilon.$$ ⌋

Упражнение 28. Пусть f и α удовлетворяют условиям утверждения 2^0 и $\alpha(a) \ge 0$. Доказать, что для $p > 1$ справедливо равенство $\int\limits_a^b f\,d(\alpha^p) = p\int\limits_a^b f\alpha^{p-1}\,d\alpha$.

9.3.4 Свойства интеграла Стилтьеса

Доказательства следующих утверждений аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для интеграла Римана и потому не приводятся.

1^0. Если $f \in \boldsymbol{RS}(\alpha,[a,b])$ и $c \in \boldsymbol{R}$, то $(cf) \in \boldsymbol{RS}(\alpha,[a,b])$ и

$$\int\limits_a^b cf(x)\,d\alpha(x) = c\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x).$$

2⁰. Если f, g и α удовлетворяют условиям 1^0 п. 9.3.3 или 2^0 п. 9.3.3, то

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) + \int_a^b g(x)\,d\alpha(x).$$

3⁰. Если $f \in \boldsymbol{RS}(\alpha, [a,b])$ и $c \in (a,b)$, то справедливы следующие включения $f \in \boldsymbol{RS}(\alpha, [a,c])$ и $f \in \boldsymbol{RS}(\alpha, [c,b])$, причём

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^c f(x)\,d\alpha(x) + \int_c^b f(x)\,d\alpha(x).$$

4⁰. Пусть $\{f, g\} \subset \boldsymbol{RS}(\alpha, [a,b])$ и $f(x) \le g(x),\ x \in [a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \le \int_a^b g(x)\,d\alpha(x).$$

5⁰. Пусть $f \in \boldsymbol{RS}(\alpha, [a,b])$. Тогда

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (\alpha(b)-\alpha(a)) \le \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \le \sup_{[a,b]} f \cdot (\alpha(b)-\alpha(a)),$$

и $|f| \in \boldsymbol{RS}(\alpha, [a,b])$, кроме того, $\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \le \int_a^b |f(x)|\,d\alpha(x)$.

6⁰. Пусть α_j — монотонно неубывающая на $[a,b]$ функция и $f \in \boldsymbol{RS}(\alpha_j, [a,b]),\ j = 1, 2$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,d(\alpha_1(x)+\alpha_2(x)) = \int_a^b f(x)\,d\alpha_1(x) + \int_a^b f(x)\,d\alpha_2(x).$$

Упражнение 29. Если $f \in C([a,b])$ и $\forall\, x \in [a,b]\ :\ f(x) > 0$, а $\alpha(b)-\alpha(a) > 0$, то $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) > 0$.

Упражнение 30. Если $f \in C([a,b])$, то $\exists\, \theta \in [a,b]\ :\ \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) =$ $= f(\theta)(\alpha(b)-\alpha(a))$.

Упражнение 31. Пусть $\int_0^\pi \sin x\,d\alpha(x) = \alpha(\pi)-\alpha(0)$. Доказать, что функция α постоянна, исключая точку $\pi/2$, в которой справедливо равенство $\alpha(\pi/2+) - \alpha(\pi/2-)) = \alpha(\pi)-\alpha(0)$.

Упражнение 32. Пусть $\forall\, f \in C([0,1])\ :\ \int_0^1 f(x)\,d\alpha(x) = f(1/2)$. Доказать, что функция α постоянна, исключая точку $1/2$, в которой $\alpha(1/2+) - \alpha(1/2-)) = 1$.

Упражнение 33. Для функции $f \in C([a,b])$ и любой монотонно неубывающей на $[a,b]$ функции α справедливо равенство $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) =$

$= \alpha(b) - \alpha(a)$. Доказать, что $\forall x \in [a, b] \ : \ f(x) = 1$.

Упражнение 34. Пусть $f \in C([a, b])$, функция α монотонно не убывает и непрерывна на $[a, b]$, а $F(x) := \int\limits_a^x f(u)\, d\alpha(u), \quad x \in [a, b]$. Доказать, что $F \in (C([a, b]) \cap BV([a, b]))$. Остаётся ли верным это утверждение для $\alpha \notin C([a, b])$?

Упражнение 35. Если в точке $c \in (a, b)$ хотя бы одна из функций f, α непрерывна, то из существования интегралов $\int\limits_a^c f(x)\, d\alpha(x), \int\limits_c^b f(x)\, d\alpha(x)$ следует существование интеграла $\int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x)$.

Упражнение 36. Если последовательность $\{f_n \mid n \geq 1\} \subset C([a, b])$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции f, то имеет место равенство $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, d\alpha(x) = \int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x)$.

Упражнение 37. Предположим, что выполняются следующие равенства $\int\limits_0^1 x(1 - x)\, d\alpha(x) = 0, \quad \int\limits_0^1 x\, d\alpha(x) = (\alpha(1) - \alpha(0))/3$. Определить функцию α.

9.3.5 Интеграл Стилтьеса относительно функции ограниченной вариации

Если $\alpha \in BV([a, b])$, то, согласно теореме Жордана, $\alpha = \beta - \gamma$, где β и γ монотонно неубывающие на $[a, b]$ функции. Поэтому интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ естественно определить как разность

$$\int\limits_a^b f(x)\, d\alpha(x) := \int\limits_a^b f(x)\, d\beta(x) - \int\limits_a^b f(x)\, d\gamma(x). \tag{1}$$

Однако, определение (1) нуждается в разъяснении. Во-первых, разложение Жордана $\alpha = \beta - \gamma$ не является единственным; во-вторых, следует требовать интегрируемость f относительно всевозможных компонент разложения Жордана. С помощью утверждений 1^0 и 2^0 п. 9.3.3 существование интеграла можно гарантировать в следующих двух случаях:

1) $f \in C([a, b]), \quad \alpha \in BV([a, b])$;

2) $f \in BV([a, b]), \quad \alpha \in (BV([a, b]) \cap C([a, b])$,

когда имеет место интегрируемость f относительно компонент разложения. В этих случаях разность (1) не зависит от различных представлений α. Действительно, пусть также $\alpha = \tilde{\beta} - \tilde{\gamma}$. Тогда $\beta + \tilde{\gamma} = \tilde{\beta} + \gamma$ и, следовательно, $\int\limits_a^b f(x)\,d(\beta(x) + \tilde{\gamma}(x)) = \int\limits_a^b f(x)\,d(\tilde{\beta}(x) + \gamma(x))$. Теперь, учитывая свойство 6 п. 9.3.4, получим $\int\limits_a^b f(x)\,d\beta(x) - \int\limits_a^b f(x)\,d\gamma(x) = \int\limits_a^b f(x)\,d\tilde{\beta}(x) - \int\limits_a^b f(x)\,d\tilde{\gamma}(x)$. Заметим также, что в обоих рассматриваемых случаях интеграл (1) есть предел интегральных сумм.

Упражнение 38*. Доказать, что $\left|\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,dv(x) \leq \sup\limits_{[a,b]} |f|\,V(\alpha,[a,b])$, где $v(x) := V(\alpha,[a,x])$, $x \in [a,b]$.

Упражнение 39. Правило интегрирования по частям. Пусть $f \in (\boldsymbol{BV}([a,b]) \cap \boldsymbol{C}([a,b]))$, $\alpha \in \boldsymbol{BV}([a,b])$. Доказать, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int\limits_a^b \alpha(x)\,df(x).$$

$-\sum\limits_{1}^{n} f(\xi_{k-1})\alpha(x_k) - \sum\limits^{n-1} f(\xi_k)\alpha(x_k)$

Указание: $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)\big) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \lim\limits_{|\lambda|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha(\xi_k)(f(\xi_k) - f(\xi_{k-1}))$, $a = \xi_0$, $b = \xi_n$.

9.3.6 Вычисление интеграла Стилтьеса

Теорема 3. *Пусть $f \in \boldsymbol{R}([a,b])$, $\alpha \in \boldsymbol{C}([a,b])$ и, исключая конечное число точек отрезка $[a,b]$, существует α' и $\alpha' \in \boldsymbol{R}([a,b])$. Тогда существует предел интегральных сумм*

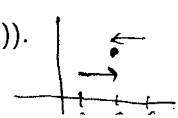
$$\lim_{|\lambda|\to 0} S(f,\alpha;\lambda) = \int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int\limits_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx.$$

⌈ Для разбиения $\lambda = \lambda([a,b]) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, включающего точки, в которых α' не существует, имеем с помощью теоремы Лагранжа

$$S(f,\alpha;\lambda,\{\xi_i|\lambda\}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\alpha'(\eta_k)\Delta x_k,$$

где $\eta_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$. Отсюда получаем утверждение теоремы, принимая во внимание, что $(f\alpha') \in \boldsymbol{R}([a,b])$. ⌋

Лемма 3. *Пусть функция $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ непрерывна в точке $c \in [a,b]$, и $\alpha(x) = \alpha(c-)$, $x < c$, $\alpha(x) = \alpha(c+)$, $x > c$, $\alpha(c-) \leq \alpha(c) \leq \alpha(c+)$. Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) = f(c)(\alpha(c+) - \alpha(c-))$.



$|\lambda| \to 0$ $x_{k,k+1} \to c$

[Действительно, сумма $S(f, \alpha; \lambda, \{\xi_i|\lambda\})$ равна либо одному слагаемому $f(\xi_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k))$, если $c \in (x_k, x_{k+1})$, либо сумме двух $f(\xi_{k-1})(\alpha(c) - \alpha(x_{k-1})) + f(\xi_k)(\alpha(x_{k+1}) - \alpha(c))$, если $c = x_k$.]

Лемма 4. *Пусть $f \in C([a,b])$, $a = z_1 < z_2 < \ldots < z_m = b$ и функция $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ постоянна на каждом из интервалов (z_k, z_{k+1}), $1 \le k \le m-1$.*

Следствие леммы 3 имеем m точек c на каждом ~~[illegible]~~ прим. следствие

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} f(z_k)(\alpha(z_k+) - \alpha(z_k-))$.

[Лемма есть следствие леммы 3 и свойства 3^0 п. 9.3.4.]

Теорема 4. *Пусть $f \in C([a,b])$, α непрерывна на $[a,b]$, кроме конечного числа точек $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — точек разрыва первого рода, за исключением конечного числа точек существует α', причём $\alpha' \in R([a,b])$.*

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int\limits_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx + \sum\limits_{k=1}^{m} f(z_k)(\alpha(z_k+) - \alpha(z_k-))$.

Указание. Представить α в виде суммы функций из теоремы 1 и воспользоваться леммой 4. Заметим также, что в леммах 3, 4 и теореме 4 монотонность функции α не требуется.

Упражнение 40. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 2^x\, d(x\,\mathrm{sign}\cos\pi x)$.

9.3.7 Теорема Хелли о предельном переходе

Теорема 5. *(Хелли). Пусть $f \in C([a,b])$, а α и α_n, $n \ge 1$, — монотонно неубывающие на $[a,b]$ функции. Предположим, что $\alpha_n(x) \to \alpha(x)$, $n \to \infty$, для всех тех точек $x \in [a,b]$, в которых функция α непрерывна, и что $\alpha_n(a) \to \alpha(a)$, $\alpha_n(b) \to \alpha(b)$, $n \to \infty$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,d\alpha_n(x) = \int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x). \qquad (1)$$

[Заметим, что все интегралы в (1) определены. Для разбиения $\lambda = \lambda([a,b]) = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, в котором $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ — точки непрерывности функции α, рассмотрим следующее вспомогательное неравенство:

$$\Delta_n := \left| \int\limits_a^b f(x)\,d\alpha_n(x) - \int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{m-1} \left(\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,d\alpha_n(x) - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,d\alpha(x) \right) \right| =$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{m-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))\, d\alpha_n(x) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\, d\alpha_n(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\, d\alpha(x) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))\, d\alpha(x) \right)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)|\, d\alpha_n(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_k)|(|\alpha_n(x_{k+1}) - \alpha(x_{k+1})| + |\alpha_n(x_k) - \alpha(x_k)|) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)|\, d\alpha(x). \tag{2}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Поскольку $f \in C([a,b])$, то по теореме Кантора $\exists\, \delta > 0\ \forall \{x', x''\} \subset [a,b],\ |x' - x''| < \delta :\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(3(1 + \alpha(b) - \alpha(a)))$. Предположим теперь дополнительно, что разбиение λ в неравенстве (2) имеет размер $|\lambda| < \delta$ и фиксировано. Тогда

$$\Delta_n \le \frac{\varepsilon}{3(1 + \alpha(b) - \alpha(a))} (\alpha_n(b) - \alpha_n(a)) +$$

$$+ \sup_{[a,b]} f \sum_{k=0}^{m-1} (|\alpha_n(x_{k+1}) - \alpha(x_{k+1})| + |\alpha_n(x_k) - \alpha(x_k)|) +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{3(1 + \alpha(b) - \alpha(a))} (\alpha(b) - \alpha(a)).$$

Выберем теперь число N таким, чтобы: 1) $\forall\, n \ge N :\ \alpha_n(b) - \alpha_n(a) < < \alpha(b) - \alpha(a) + 1$; 2) $\forall\, n \ge N :\ \sup\limits_{[a,b]} f \sum\limits_{k=0}^{m-1} (|\alpha_n(x_{k+1}) - \alpha(x_{k+1})| + |\alpha_n(x_k) - -\alpha(x_k)|) < \varepsilon/3$. Тогда $\forall\, n \ge N :\ \Delta_n < \varepsilon$. ⌋

Пример. Пусть α — монотонно неубывающая на $[a,b]$ функция скачков, $x_n,\ n \ge 1$ — все точки скачка функции α, причём $\alpha(a) = 0,\ \alpha(b-) = \alpha(b)$. Тогда $\alpha(x) = \sum\limits_{k\,:\,x_k < x} (\alpha(x_k+) - \alpha(x_k-)) + \alpha(x) - \alpha(x-),\ \ x \in [a,b]$. Для $n \in N$ введём функцию $\alpha_n(x) = \sum\limits_{k \le n\,:\,x_k < x} (\alpha(x_k+) - \alpha(x_k-)),\ \ x \in [a,b]$.

Заметим теперь, что для любого $x \in [a,b]$ — точки непрерывности функции α имеем $\alpha_n(x) \to \alpha(x),\ \ n \to \infty$, поскольку

$$|\alpha(x) - \alpha_n(x)| = \left| \sum_{k > n\,:\,x_k < x} (\alpha(x_k+) - \alpha(x_k-)) \right| \le$$

$$\le \sum_{k > n} (\alpha(x_k+) - \alpha(x_k-)) \to 0, \quad n \to \infty$$

Здесь использовано то, что ряд из положительных скачков сходится. Согласно лемме 4 и теореме Хелли, имеем для $f \in C([a,b])$ следующую формулу $\int\limits_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x_k)(\alpha(x_k+) - \alpha(x_k-))$, причём ряд в правой части абсолютно сходится.

Замечание. Пример показывает, что сумма любого абсолютно сходящегося ряда может быть представлена в виде интеграла Стилтьеса.

9.3.8 Историческая справка

Камиль Мари Эдмон Жордан (1838 — 1922) — французский математик. Ему принадлежит ряд основных понятий и идей современной математики (жорданова форма матрицы, кривая Жордана, теорема Жордана о простой замкнутой кривой в плоскости, признак Жордана сходимости ряда Фурье, функция ограниченной вариации, разложение Жордана, мера Жордана и др.). Автор точных и сжатых курсов по теории групп, теории Галуа, "Трактата о подстановках", трёхтомного "Курса анализа", широко известных в своё время и оказавших существенное влияние на развитие математики.

Томас Иоанес Стилтьес (1856 — 1894) — нидерландский математик. К обобщению понятия интеграла Римана Т. Стилтьеса привела задача, связанная с неоднородным распределением масс на отрезке прямой, в некоторых точках которого сосредоточены положительные массы. Полученные им результаты относятся к теории непрерывных дробей, проблеме моментов, теории ортогональных многочленов и другим разделам анализа.

Эдуард Хелли (1884 — 1943) — австрийский математик, автор работ по топологии и функциональному анализу.

9.4 Дополнительные задачи к главам 5 — 9

1. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$; $g(x) = \sin^2\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $g(0) = 1/2$; $h(x) = \sin^2\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $h(0) = 0$. Доказать, что функции f и g имеют примитивные на $\boldsymbol{R}$, а примитивная на $\boldsymbol{R}$ для функции h не существует.

2. Пусть $\{f, g\} \subset \boldsymbol{R}([a,b])$ и $h(x) := \inf\limits_{a\le t\le x} f(t)$, $H(x) := \sup\limits_{a\le t\le x} f(t)$. Доказать, что $\{h, H\} \subset \boldsymbol{R}([a,b])$

3. Функция $f \in \boldsymbol{R}([0,1])$ удовлетворяет условию

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f\left(\frac{x+2}{3}\right)\right), \quad x \in [0,1],$$

причём $f(1/2) = 1$. Определить f.

Ответ: $f(x) = 1$, $x \in [0,1]$.

4. Вычислить предел:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)\right)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)$.

Ответ: a) $1-\cos 1$; b) $1/2$.

5. Пусть $f\in \boldsymbol{Lip}_1([0,1],L)$, $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=0$. Доказать следующее неравенство $\forall\, n\geq 1:$ $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq L/2$.

6. Пусть $f\in C(\boldsymbol{R})$. Доказать, что f нечётна на $\boldsymbol{R}$ тогда и только тогда, когда $\exists\, c\in\boldsymbol{R}\quad\forall\, x\in\boldsymbol{R}:\quad \int\limits_{-x}^{x} f(u)\,du=c$.

7. Определить функцию $f\in C([0,1])$, удовлетворяющую равенству

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{3}+\int\limits_0^1 f^2(x^2)\,dx.$$

Ответ: $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,1]$.

8. Пусть функция $f\in C([a,b])$ выпукла вверх и неотрицательна на $[a,b]$. Доказать неравенство $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\geq\frac{1}{2}\max\limits_{[a,b]} f$.

9. Доказать, что для возрастающей на (a,b) функции f функция $F(x):=\int\limits_c^x f(u)\,du,\quad x\in(a,b),\quad c\in(a,b)$, выпукла вниз на (a,b).

10. Для функции $f\in \boldsymbol{BV}([a,b])$ определим функцию g следующим образом: $g(a):=f(a)$; $g(x):=\frac{1}{x-a}\int\limits_a^x f(u)\,du,\quad x\in(a,b]$. Доказать, что $g\in\boldsymbol{BV}([a,b])$.

Указание. Использовать теорему Жордана.

11. Функция $\in C^1([0,1])$ строго возрастает на отрезке $[0,1]$ и $f(0)=0$, пусть g — функция, обратная к f. Доказать, что

$$\int\limits_0^x f(u)\,du+\int\limits_0^{f(x)} g(u)\,du=xf(x),\quad x\in[0,1].$$

12. Для функции $f\in C([a,b])$ имеем равенство $\int\limits_a^b f(x)\,dx=0$. Доказать, что $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx\leq mM(b-a),\quad m:=-\min\limits_{[a,b]} f,\quad M:=\max\limits_{[a,b]} f$.

13. Пусть $f\in C([0,2])$. Доказать, что последовательность функций

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right),\ x\in[0,1]\ :\ n\geq 1\right\}$$

сходится равномерно на отрезке $[0,1]$, и найти предельную функцию.

Ответ: $\int\limits_0^1 f(x+u)\,du,\ x\in[0,1]$.

14. Пусть функция $f\in C^1([a,b])$ монотонна на отрезке $[a,b]$, а $g\in C([a,b])$. Доказать, что

$$\exists\,\theta\in(a,b)\ :\quad \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\theta g(x)\,dx + f(b)\int\limits_\theta^b g(x)\,dx.$$

Указание. Сначала в левой части проинтегрировать по частям, затем к полученному интегралу применить теорему о среднем значении.

15.* Доказать, что $\forall\,a>0\quad \forall\,x>0\ :\quad \left|\int\limits_x^{x+a}\sin u^3\,du\right| < \dfrac{4}{3x^2}$.

16.* Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k}{n}\right) = \displaystyle\int\limits_0^1 \ln x\,dx := \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_\varepsilon^1 \ln x\,dx$. С помощью этого равенства установить, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n!}\right) = \dfrac{1}{e}$.

17.* Пусть $D=\{f\in C^2([0,1])\mid f(0)=f(1)=0,\ f'(0)=a\}$, где число $a\in\boldsymbol{R}$ фиксировано. Найти значение $\min\limits_{f\in D}\int\limits_0^1 (f''(x))^2\,dx$ и функцию, доставляющую минимум.

Ответ: $3a^2,\quad f(x)=\dfrac{a}{2}(x^3-3x^2+2x),\ x\in[0,1]$.

18.* Для функции f, которая дифференцируема в некоторой окрестности точки x, и для которой f' непрерывна в точке x, доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(x+\frac{k}{k^2+n^2}\right)-f(x)\right) = \frac{\ln 2}{2}\,f'(x).$$

19.* Пусть $f\in C^1([0,1])$, причём $f'(0)\neq 0$. Для каждого $x\in(0,1]$ пусть $\theta(x)$ — какое-либо число из теоремы о среднем значении $\int\limits_0^x f(u)\,du = f(\theta(x))x$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\theta(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$.

20. Пусть $\{f,g\}\subset C([0,1])$. Доказать неравенство

$$\left(\int\limits_0^1 f(u)\,du\right)^2+\left(\int\limits_0^1 g(u)\,du\right)^2 \le \left(\int\limits_0^1\sqrt{f^2(u)+g^2(u)}\,du\right)^2.$$

Указание. Рассмотреть в плоскости кривую $x=F(t),\ y=G(t)$, $t\in[0,1]$, где F и G — примитивные функций f и g соответственно. Неравенство означает, что длина хорды, соединяющей точки $(F(0),G(0))$ и $(F(1),G(1))$, не больше длины кривой.

21. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x\dfrac{(1+u)^{1/13}-1}{u}\,du\right)$.

Ответ: $\dfrac{1}{13}$.

22. Функция $f \in \boldsymbol{R}([0,b])$ и имеет предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = p$. Для $0 < a < b$ вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{a/n}^{b/n} \frac{f(x)}{x}\,dx$.

Ответ: $p \ln \frac{b}{a}$.

23. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \int\limits_0^x f(u)\,du\right)$ для функций: a) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$; b) $f(x) = \sin^2\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Ответ: a) 0; b) 1/2.

24. Пусть функции $\{f, g\} \subset C([0,1])$; $g(x) > 0$, $x \in [0,1]$ и, кроме того,

$$\lim_{x\to 1-} \int\limits_0^x g(u)\,du = +\infty; \quad \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = a. \text{ Тогда } \lim_{x\to 1-} \frac{\int\limits_0^x f(u)\,du}{\int\limits_0^x g(u)\,du} = a.$$

25. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\int\limits_0^x e^{u^2}\,du\right)^{1/x^2}$.

Ответ: e.

26. Пусть $f \in C([0,+\infty))$ и $f(x) \to a$, $x \to +\infty$. Доказать, что $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{A} \int\limits_0^A f(x)\,dx\right) = a$. Привести пример функции f, для которой существует последний предел, и которая не имеет предела при $x \to +\infty$.

27. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.

Ответ: 0.

28. Пусть функция $f : \ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такова, что: $\forall\, x \in \boldsymbol{R} : \quad f(x+1) = f(x)$; $\quad f \in \boldsymbol{R}([0,1])$; $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$. Доказать, что для любых a, b, $a < b$, $\lambda > 0$ справедливо неравенство $\left|\int\limits_a^b f(\lambda x)\,dx\right| \leq \frac{2}{\lambda} \int\limits_0^1 |f(x)|\,dx$.

29. Для функции $f \in C^1([a,b])$ доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x) \cos nx\,dx = 0$.

Указание. Проинтегрировать по частям.

30. Пусть $f \in C^1([a,b])$. Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x) \sin^2 nx\,dx = \frac{1}{2} \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

31.* Для $f \in C([0,1])$ доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(x)(\sin \pi n x)_+\,dx =$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 f(x)\,dx, \quad (f(x))_+ := f(x),\ f(x) \geq 0,\ (f(x))_+ := 0,\ f(x) < 0.$$

32. Пусть $f \in C([0,1])$. Вычислить предел: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x^n f(x)\,dx$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\int\limits_0^1 x^n f(x)\,dx\right)$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\int\limits_0^1 e^{-nx} f(x)\,dx\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\int\limits_0^1 x^n f(x)\,dx}{\int\limits_0^1 x^n e^{x^2}\,dx}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\int\limits_0^1 f(x)\sin^{2n} 2\pi x\,dx}{\int\limits_0^1 e^{x^2}\sin^{2n} 2\pi x\,dx}$.

Ответы: a) 0; b) $f(1)$; c) $f(0)$; d) $f(1)/e$; e) $\dfrac{f(1/4)+f(3/4)}{e^{1/16}+e^{9/16}}$.

33. Пусть $f \in C([0,1])$. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} f(\sin^{2n} x)\,dx$.

Ответ: $2\pi f(0)$.

34. Для функции $f \in C([-1,1])$ доказать равенства:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\int\limits_0^n f(\sin x)\,dx\right) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sin x)\,dx$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\int\limits_0^n f(|\sin x|)\,dx\right) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}\int\limits_0^n x f(\sin x)\,dx\right) = \dfrac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sin x)\,dx$.

*35**. Для функции $f \in C([-1,1])$ вычислить пределы:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x f(\sin 2\pi n x)\,dx$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \cos x \cdot f(\sin 2\pi n x)\,dx$.

Ответы: a) $\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(\sin 2\pi x)\,dx$; b) $\sin 1 \cdot \int\limits_0^1 f(\sin 2\pi x)\,dx$.

Указание. a) Интеграл равен $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^1 \dfrac{k+u}{n} f(\sin 2\pi u)\,du$.

36. Пусть $f \in R([0,1])$ и $a_k = \int\limits_0^1 x^k f(x)\,dx$, $k \geq 1$. Вычислить следующий предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{k}$.

Ответ: $-\int\limits_0^1 f(x)\ln(1-x)\,dx := -\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_0^{1-\varepsilon} f(x)\ln(1-x)\,dx$.

37. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно. Доказать, что существует сходящаяся к 0 последовательность $\{b_n \mid n \geq 1\}$, для которой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ расходится. Существует ли такая последовательность положительных чисел?

*38**. Числа a_n, $n \geq 1$, отличны от и таковы, что $\dfrac{1}{a_{n+1}^2} - \dfrac{1}{a_n^2} \to 1$, $n \to \infty$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n}$ сходится.

39. Исследовать сходимость ряда:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{V(f,[0,\pi n])}{n^4}$, $f(x) = x\sin^2 x$, $x \geq 0$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (V(f,[n,n+1]))^3$, $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $x \geq 0$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{V(f,[0,n])}$, $f(x) = \sin x^2$, $x \geq 0$.

40. Пусть для $a_1 = 1$, $\alpha \in (0,1)$: $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n^\alpha}$, $n \geq 1$. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Указание. Проверить, что $\exists c \in \boldsymbol{R} \quad \forall n \geq 1 \,:\, a_n \leq \dfrac{c}{n^{1/\alpha}}$.

41. Исследовать на абсолютную сходимость ряд:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_n^{n^2} \dfrac{dx}{1+x^4}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_{n-1}^{n+1} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^3}\, dx$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_0^1 x^n \operatorname{arctg} \dfrac{x}{n}\, dx$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{V(\sin,[0,\pi n))}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int\limits_n^{2n} \dfrac{dx}{\sqrt{x^5+n}}$.

42. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k}{k}$ сходится. Доказать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)$.

Указание. Выразить члены последовательности через частичные суммы ряда.

43. Предположим, что: 1) $\forall n \geq 1$: $a_{Nn} \to a_n$, $N \to \infty$; 2) $\forall n \geq 1 \ \forall N \geq 1$: $|a_{Nn}| \leq b_n$; 3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Доказать, что тогда справедливо равенство $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{Nn} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

44. Исследовать на равномерную сходимость ряд:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{x/n}\ln(1+u^2)\,du,\ x\in[0,3]$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-x/\sqrt{n}}^{x/\sqrt{n}}\sin u^2\,du,\ x\in[-3,3]$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{nx}^{(n+1)x}\dfrac{du}{1+u^{3/2}}\cdot x\in[0,3]$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{nx^2}^{(n+1)x^2}e^{-u^2}\,du,\ x\geq 0$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_{x\sqrt{n}}^{x\sqrt{n+1}}\dfrac{\sin u^2}{1+u^2}\,du,\ x\in[0,3]$.

45. Доказать, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ln^n(x+1)$ принадлежит классу $C^{\infty}((e^{-1}-1,e-1))$.

46. Пусть $a(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$, $x\geq 0$. Доказать, что $a\in C([0,+\infty))$ и $a\in C^{\infty}((0,+\infty))$.

47. Доказать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}=\dfrac{1}{3}\left(e^x+2e^{-x/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$, $x\in\boldsymbol{R}$.

48. Доказать, что последовательность чисел $\{a_n \mid n\geq 0\}$ является последовательностью коэффициентов степенного ряда с радиусом сходимости $r=+\infty$ для некоторой функции тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$.

49. Функция f — сумма степенного ряда с радиусом сходимости $r>0$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=-\dfrac{1}{x^{n+1}}f\left(\dfrac{1}{x}\right), x>\dfrac{1}{r}$, для некоторого $n\in\boldsymbol{N}$ и условиям $f^{(k)}(0)=1,\ 0\leq k\leq n-1$. Найти f.

Ответ: $f(x)=e^x,\ x\in(-r,r)$.

*50**. Пусть числа $a_0>0,\ a_n\geq 0,\ n\geq 1$, таковы, что

$$A_n:=a_0+a_1+\ldots+a_n\to+\infty,\quad \frac{a_n}{A_n}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Доказать, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ имеет радиус сходимости 1.

Указание. Обратить внимание на следующее:

$$\frac{a_n}{A_n}\to 0,\ n\to\infty \Longrightarrow \frac{A_n}{A_{n-1}}\to 0,\ n\to\infty, \Longrightarrow \sqrt[n]{A_n}\to 1,\ n\to\infty.$$

*51**. Пусть $a_n\in\boldsymbol{C}$, $\lambda_n\in\boldsymbol{R}$, $n\geq 1$. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{z\lambda_n}$, $z\in\boldsymbol{C}$, сходится абсолютно в некоторых точках $z_1,z_2,\ldots,z_n$ плоскости $\boldsymbol{C}$. Доказать, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно на замкнутом выпуклом многоугольнике, натянутом на точки $z_1,z_2,\ldots,z_n$.

*52**. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\cos^n z+\cos^n(z+i)+\cos^n(z+3i)\right|^{1/n}$, $z=a+bi,\ a\in\boldsymbol{R},\ b>0$.

Ответ: $\sqrt{(\operatorname{ch} 2(b+3) + \cos 2a)/2}$.

53. Пусть $A \subset C$, $f : A \to C$. Функция f называется ***аналитической в точке*** $z_0 \in A$, если $\exists\, \delta > 0 : \quad B(z_0, \delta) := \{z \in C \mid |z - z_0| < \delta\} \subset A$ и f на $B(z_0, \delta)$ есть сумма степенного ряда по степеням $z - z_0$. Функция f ***аналитична на множестве*** A, если она аналитична в каждой точке множества A. Пусть f — сумма степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \in C, \ n \geq 0$, с положительным радиусом сходимости r. Доказать, что f есть аналитическая функция на множестве $B(0, r)$. В частности, функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, $z \in C$, аналитичны на C.

54. Проверить, что аналитическая в точке z_0 функция f непрерывна в этой точке. Доказать, что функция $f(z) = e^{-1/z^2}$, $z \neq 0$, $f(z) = 0$, определённая на C, не аналитична в точке 0. Доказать также, что сужение $\tilde{f}$ функции f на R есть функция класса $C^\infty(R)$, причём $\tilde{f}^{(n)}(0) = 0, \ n \geq 1$.

Замечание. Таким образом, $\tilde{f}$ не есть сумма ряда Тейлора (если $\tilde{f}$ есть сумма степенного ряда в некоторой окрестности $(-\delta, \delta)$, то этот же степенной ряд сходится для $z \in B(0, \delta)$).

Указание. Функция f разрывна в точке 0. Рассмотреть значения на мнимой оси.

55. Определить множество точек сходимости произведения:

a) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{x^2 + n^2}$; b) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + x^{\ln n})$.

56. Пусть $a_n \geq 0, \ n \geq 1$, и произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = p$ сходится. Найти предел $\lim\limits_{x \to 1-} \prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n x^n)$.

Ответ: p.

Указание. Доказать, что существует $\lim\limits_{x \to 1-} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n x^n)$.

57. Определить множество A точек сходимости произведения $\prod\limits_{n=0}^{\infty} (1 + e^{nx}) = p(x)$ и доказать, что $p \in C(A)$.

58. Определить множество A точек сходимости произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{n^2}{x^{2n}}\right) = p(x), \ \ x \in A$, и доказать существование $p'(x)$ для $x \in A$.

59. Для последовательности $\{a_n \mid n \geq 1\}$ положительных чисел выполняется соотношение $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} \to 1, \quad n \to \infty$. Доказать расходимость произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$.

60. Доказать существование функции $f \in (C([0,1]) \cap BV([0,1]))$, которая не удовлетворяет условию Липшица на $[0,1]$ ни при каком показателе $\alpha \in [0,1]$.

61. Пусть $\{f, g\} \subset BV([a,b])$ и $h(x) := \max(f(x), g(x))$, $x \in [a,b]$. Доказать, что $h \in BV([a,b])$.

62. Представить в виде разности монотонно неубывающих на отрезке $[-1,2]$ функций следующие функции: a) $f(x) = x^3 - x$; b) $g(x) = \sin 2\pi x$.

63 Вычислить интеграл Стилтьеса:

a) $\int\limits_0^1 x\, d(\mathrm{sign}\, \sin 4\pi x)$; b) $\int\limits_0^1 x\, d(x^2 \mathrm{sign}\, \sin 4\pi x)$.

64. Пусть $f \in C([0,+\infty))$ и $f(x) > 0$, $x \geq 0$. Доказать, что для любого $\alpha > 0$ функция $g(x) := f(x) \int\limits_0^x \frac{du}{f^\alpha(u)}$, $x \geq 0$, не ограничена на $[0,+\infty)$.

Указание. Рассмотреть предположение , что функция g^α ограничена на $[0,+\infty)$.

65. Пусть $f \in C^n([a,b])$. Доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует многочлен P такой, что $\max\limits_{0 \leq k \leq n} \max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x)| < \varepsilon$.

Указание. Пусть Q — многочлен, приближающий равномерно на $[a,b]$ функцию $f^{(n)}$. Рассмотреть многочлен

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (x-u)^{n-1} Q(u)\, du, \quad x \in [a,b].$$

Глава 10

Элементы анализа в метрическом пространстве

10.1 Метрическое пространство

10.1.1 Определения метрики и метрического пространства

Логический анализ понятий предела последовательности действительных чисел, предела функции в точке, непрерывности и ряда важнейших связанных с этими понятиями теорем показывает, что все эти понятия и факты основаны на использовании расстояния на прямой. Перечень необходимых свойств расстояния при этом оказывается очень коротким и содержит следующие свойства:

$1^0.\ \forall\,\{x,y\}\subset \boldsymbol{R}\ :\quad |x-y|\geq 0$, причём $|x-y|=0 \iff x=y$;

$2^0.\ \forall\,\{x,y\}\subset \boldsymbol{R}\ :\quad |x-y|=|y-x|$;

$3^0.\ \forall\,\{x,y,z\}\subset \boldsymbol{R}\ :\quad |x-y|\leq |x-z|+|z-y|$.

Здесь $|x-y|$ — расстояние между точками на прямой с координатами x и y. Свойствами 1^0 — 3^0 обладает также обычное расстояние в трёхмерном пространстве. Оказывается, что формальное введение расстояния со свойствами 1^0 — 3^0 на множестве элементов произвольной природы приводит к возможности построения ряда понятий и фактов анализа на этом множестве. При этом в качестве конкретных случаев охватывается широкий круг различных известных математических ситуаций.

Пусть X — некоторое множество, далее всегда предполагается, что $X\neq\varnothing$. Элементы множества X называются также *точками*, а само множество X — *пространством.*

Определение 1. Расстоянием или метрикой ρ ***на пространстве*** X ***называется функция*** $\rho: X \times X \to \boldsymbol{R}$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\forall \{x, y\} \subset X : \quad \rho(x, y) \geq 0$, *причём* $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

2) $\forall \{x, y\} \subset X : \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\forall \{x, y, z\} \subset X : \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Множество X *с метрикой* ρ *называется* ***метрическим пространством*** *и обозначается символом* (X, ρ).

Замечания. 1. Условия 1) — 3) называются также *аксиомами* расстояния. Условие 2) называется аксиомой *симметрии*, а условие 3) — ***неравенством треугольника.***

2. Пусть ρ_1 и ρ_2 метрики на X. Метрические пространства (X, ρ_1) и (X, ρ_2), вообще говоря, различны.

3. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $Y \subset X$. (Y, ρ) есть также метрическое пространство, вообще говоря, отличное от (X, ρ).

4. Условие 2) в определении расстояния есть следствие условия
4) $\forall \{x, y, z\} \subset X : \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$.

Таким образом, условия 1) — 3) равносильны двум условиям 1) и 4).

10.1.2 Примеры метрических пространств

1. ***Пространство*** $(\boldsymbol{R}, \rho)$. Пусть $X = \boldsymbol{R}$; $\rho(x, y) := |x - y|$, $\{x, y\} \subset \boldsymbol{R}$. Тогда $(\boldsymbol{R}, \rho)$ — метрическое пространство — числовая прямая с обычным расстоянием.

2. ***Пространство*** $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$. Пусть для $m \in \boldsymbol{N}$ фиксированного

$$X = \boldsymbol{R}^m := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_k \in \boldsymbol{R},\ 1 \leq k \leq m\};$$

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2}, \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)\},$$

где $\{x, y\} \subset \boldsymbol{R}^m$.

⌈ Покажем, что ρ есть метрика на $\boldsymbol{R}^m$. Условия 1) и 2), очевидно, выполнены. Согласно неравенству Коши для $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), y = (y_1, y_2, \ldots, y_m), z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)\} \subset \boldsymbol{R}^m$ имеем

$$\rho^2(x, y) = \sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{m} (x_k - z_k + z_k - y_k)^2 =$$

$$= \rho^2(x, z) + 2\sum_{k=1}^{m} (x_k - z_k)(z_k - y_k) + \rho^2(z, y) \leq$$

$$\leq \rho^2(x, z) + 2\rho(x, z)\rho(z, y) + \rho^2(z, y) = (\rho(x, z) + \rho(z, y))^2.$$

Отсюда, учитывая условие 1), получаем неравенство 3). Таким образом, ρ — метрика на $\boldsymbol{R}^m$, а $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ — метрическое пространство. Далее, чтобы не выписывать явно выражение для ρ будем называть расстояние ρ ***евклидовым или обычным.*** ⌋

3. ***Пространство*** (l_2, ρ). Пусть $X = l_2 := \Big\{x = \{x_n\} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \;\Big|\; x_n \in \boldsymbol{R},\ n \geq 1;\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\Big\}$; $\rho(x,y) := \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$, $\{x = \{x_n\}, y = \{y_n\}\} \subset l_2$.

⌈ Для проверки условий 1) — 3) сначала заметить, что

$$\{x = \{x_n\}, y = \{y_n\}\} \subset l_2 \implies x - y = \{x_n - y_n\} \subset l_2. \qquad ⌋$$

4. ***Пространство*** $(C([a,b]), \rho)$. Пусть $X = C([a,b])$; $\rho(x,y) := \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$, $\{x, y\} \subset C([a,b])$. Расстояние ρ между функциями x и y имеет простой геометрический смысл. Условия 1) — 3) для ρ легко проверяются.

Упражнение 1. Пусть $X = \boldsymbol{R}$; $d(x,y) := \min(1, |x-y|)$, $\{x,y\} \subset \boldsymbol{R}$. Доказать, что d — метрика на $\boldsymbol{R}$, а $(\boldsymbol{R}, d)$ — метрическое пространство.

Упражнение 2. Пусть $X = \boldsymbol{R}$; $d(x,y) := |x^3 - y^3|$, $\{x,y\} \subset \boldsymbol{R}$. Является функция d метрикой на $\boldsymbol{R}$?

Упражнение 3. Пусть $X = [0, +\infty)$; $d(x,y) := |x^2 - y^2|$, $\{x,y\} \subset \boldsymbol{R}$. Является функция d метрикой на $\boldsymbol{R}$?

Упражнение 4. Пусть $X = \{x = (\cos\theta, \sin\theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$;

$$d(x_1, x_2) := |\theta_1 - \theta_2|,\ x_k = (\cos\theta_k, \sin\theta_k) \subset X,\ k = 1, 2.$$

Является функция d метрикой на X?

Упражнение 5. Доказать, что каждая из функций

$$d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{m} |x_k - y_k|, \qquad d_2(x,y) = \max_{1 \leq k \leq m} |x_k - y_k|,$$

где $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)\} \subset \boldsymbol{R}^m$, — метрика на $\boldsymbol{R}^m$.

Упражнение 6. Доказать, что каждая из функций

$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(u) - y(u)|\, du, \quad d_2(x,y) = \left(\int_a^b (x(u) - y(u))^2\, du\right)^{1/2},$$

где $\{x,y\} \subset C([a,b])$, есть метрика на $C([a,b])$.

Упражнение 7. Пусть $X = \{x = \{x_n\} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mid x_n \in \boldsymbol{R},\ n \geq 1;\ \sup\limits_{n \geq 1} |x_n| < +\infty\}$, $d(x,y) := \sup\limits_{n \geq 1} |x_n - y_n|$, $\{x,y\} \subset X$. Доказать, что (X, d) — метрическое пространство.

Упражнение 8. Пусть X – произвольное множество, $d(x,y) = 1$, $x \neq y$, $d(x,y) = 0$, $x = y$, $\{x,y\} \subset X$. Доказать, что (X,d) — метрическое пространство. Метрика d называется ***дискретной.***

Упражнение 9. Пусть $d(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|x_n - y_n|}{n}$, $\{x = \{x_n\}, y = \{y_n\}\} \subset l_2$. Доказать, что (l_2, d) — метрическое пространство.

10.1.3 Свойства расстояния

Пусть (X,d) — метрическое пространство. Из аксиом расстояния легко получается ряд свойств расстояния, привычных для расстояния в трёхмерном пространстве. Рассмотрим те из них, которые часто используются.

Свойство 1⁰. (Неравенство треугольника).

$$\forall \{x,y,z\} \subset X \ : \quad |d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y).$$

⌈ Действительно, на основании аксиом 3) и 2) имеем

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = d(x,y) + d(z,y) \implies$$
$$\implies d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y). \tag{1}$$

Аналогично

$$d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y) = d(x,z) + d(x,y) \implies$$
$$\implies d(z,y) - d(x,z) \leq d(x,y). \tag{2}$$

Согласно определению модуля числа, неравенства (1) и (2) вместе равносильны требуемому $|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$. ⌋

Свойство 2⁰. (Длина отрезка прямой, соединяющего две точки, не больше длины любой ломаной, соединяющей эти же точки). Для любого конечного набора $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точек из X справедливо неравенство

$$d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + d(x_3,x_4) + \ldots + d(x_{n-1},x_n).$$

⌈ Последовательно применить аксиомы расстояния 3). ⌋

Свойство 3⁰. (Неравенство четырёхугольника). Для любых элементов x, y, u, v из X справедливо следующее полезное неравенство $|d(x,u) - d(y,v)| \leq d(x,y) + d(u,v)$.

⌈ Действительно, на основании аксиом 3) и 2) имеем

$$d(x,u) \leq d(x,y) + d(y,u) \leq d(x,y) + d(y,v) + d(v,u) = \tag{3}$$
$$= d(x,y) + d(y,v) + d(u,v) \implies d(x,u) - d(y,v) \leq d(x,y) + d(u,v).$$

Аналогично получаем

$$d(y,v) - d(x,y) \leq d(x,y) + d(u,v). \tag{4}$$

Неравенства (3) и (4) вместе равносильны требуемому. ⌋

Замечание. Свойство 1^0 есть частный случай свойства 3^0 (положить $u = v = z$).

10.1.4 Декартово произведение пространств

Пусть (X_k, d_k), $k = 1, 2$ — метрические пространства и $X = X_1 \times X_2$ — декартово произведение множеств X_1 и X_2. Положим для элементов $\{x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)\} \subset X$

$$d(x, y) = d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}.$$

Функция d есть расстояние на X, а (X, d) — метрическое пространство, называемое ***декартовым произведением*** пространств (X_k, d_k), $k = 1, 2$. (проверьте аксиомы расстояния!).

Метрика на X может быть определена и иным способом. Метрикой является, например, функция $\tilde{d}(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.

Аналогично определяется декартово произведение любого конечного числа метрических пространств.

Упражнение 10. Получить пространство примера 2, как декартово произведение пространств примера 1, см. п. 10.1.2.

10.1.5 Предел последовательности элементов метрического пространства

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $\{x_n \mid n \geq 1\}$ — последовательность элементов из X.

Определение 2. Последовательность элементов $\{x_n \mid n \geq 1\}$ пространства (X, d) ***сходится*** *в (X, d), если существует элемент $x \in X$, такой, что $d(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$. При этом элемент x называют* ***пределом последовательности*** *$\{x_n \mid n \geq 1\}$ в (X, d) и используются обозначения: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, или $x_n \to x$, $n \to \infty$.*

Упражнение 11. Если $x_n \to x$, $n \to \infty$ в (X, d), то для любой подпоследовательности $x_{n(k)} \to x$, $k \to \infty$ в (X, d). Доказать.

Упражнение 12. Последовательность элементов $\{x_n \mid n \geq 1\}$ пространства (X, d) удовлетворяет условию: любая её подпоследовательность содержит в себе подпоследовательность, сходящуюся в (X, d) к некоторому фиксированному элементу $x \in X$. Доказать, что $x_n \to x$, $n \to \infty$.

Теорема 1. *(О единственности предела последовательности). Если $x_n \to x$, $n \to \infty$ и $x_n \to y$, $n \to \infty$ в (X,d), то $x = y$.*

⌈ Согласно аксиомам расстояния, имеем $0 \le d(x,y) \le d(x,x_n)+d(x_n,y)$, $n \ge 1$. Поскольку $d(x,x_n) \to 0$, $d(x_n,y) \to 0$, $n \to \infty$, то $d(x,y) = 0$. По аксиоме 1) $x = y$. ⌋

Теорема 2. *Пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$, $n \to \infty$, в (X,d). Тогда*

$$d(x_n,y_n) \to d(x,y), \quad n \to \infty.$$

⌈ Использовать неравенство четырёхугольника для оценки разности $|d(x_n,y_n) - d(x,y)|$. ⌋

Следствие 1. Пусть $x_n \to x$, $n \to \infty$, в (X,d). Для любого $y \in X$ имеем $d(x_n,y) \to d(x,y)$, $n \to \infty$.

Упражнение 13. Какие последовательности метрического пространства из упр. 8 являются сходящимися?

10.1.6 Сходимость в некоторых конкретных пространствах

1. Сходимость в пространстве (R^m,ρ) равносильна покоординатной сходимости.

⌈ Пусть $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \to (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $n \to \infty$, в (R^m,ρ), т. е. $\rho(x^{(n)},x) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k^{(n)} - x_k)^2\right)^{1/2} \to 0$, $n \to \infty$. Поскольку $\rho(x^{(n)},x) \ge |x_k^{(n)} - x_k|$, $1 \le k \le m$, $n \ge 1$, то $x_k^{(n)} \to x_k$, $n \to \infty$ для каждого $1 \le k \le m$. Обратное утверждение следует из свойств сходящихся последовательностей. ⌋

2. Сходимость в пространстве $(C([a,b]),\rho)$ равносильна равномерной на $[a,b]$ сходимости.

Упражнение 14. Пусть (X,d) — декартово произведение метрических пространств из п. 10.1.4. Доказать, что $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \to (x_1,x_2) = x$, $n \to \infty$, в (X,d) $\iff$ $x_1^{(n)} \to x_1$, $n \to \infty$, в (X_1,d_1) и $x_2^{(n)} \to x_2$, $n \to \infty$, в (X_2,d_2).

10.1.7 Шары, ограниченное множество, предельная точка

Пусть (X,d) — метрическое пространство, x_0 — фиксированный элемент из X и $r > 0$.

Определение 3. *Замкнутым шаром* $\overline{B}(x_0,r)$ *с центром в точке* x_0 *и радиусом* r *называется множество*

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)\le r\}.$$

Определение 4. *Открытым шаром* $B(x_0,r)$ *с центром в точке* x_0 *и радиусом* r *называется множество*

$$B(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)< r\}.$$

Определение 5. *Множество* $A\subset X$, $A\ne\varnothing$ *называется* ***ограниченным,*** *если* $d(A):=\sup\limits_{x\in A,y\in A} d(x,y)<+\infty$. *Число* $d(A)$ *называется* ***диаметром*** *множества* A. *Множество* $\varnothing$ *также ограничено и* $d(\varnothing):=0$.

Замечания. 1. Легко проверить, что множество ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором шаре.

2. То, что $x_n\to x$, $n\to\infty$, в (X,d) можно сформулировать в следующей равносильной форме $\forall\, r>0\ \exists\, N\in \boldsymbol{N}:\ \{x_n,x_{n+1},\ldots\}\subset B(x,r)$.

Упражнение 15. В пространстве $(\boldsymbol{R},\rho)$ изобразить следующие шары: $\overline{B}(1,2)$, $B(2,\frac{1}{2})$.

Упражнение 16. В пространстве $(\boldsymbol{R}^2,\rho)$ изобразить следующие шары: $\overline{B}((1,1),2)$, $B((1,0),3)$. В каждом из пространств $(\boldsymbol{R}^2,d_k)$, $k=1,2$ где $d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2))=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$, $d_2((x_1,x_2),(y_1,y_2))= =\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$, изобразить шары $\overline{B}((1,1),2)$, $B((1,0),3)$.

Упражнение 17. Доказать, что $d(\overline{B}(x_0,r))\le 2r$. Возможен ли случай, когда $d(\overline{B}(x_0,r))<2r$?

Упражнение 18. Для пространства $(C([a,b]),\rho)$ и функции $x_0(t)= 0$, $t\in[a,b]$ описать шары $\overline{B}(x_0,1)$, $B(x_0,1)$.

Упражнение 19. Пусть $A\subset X$, $A\ne\varnothing$, $x\in X$ и $d(x,A):= =\inf\limits_{y\in A} d(x,y)$. Доказать, что $d(x_n,A)\to d(x,A)$, $n\to\infty$ для любой последовательности $x_n\to x$, $n\to\infty$, в (X,d).

Определение 6. *Пусть* $A\subset X$, $x_0\in X$. *Точка* x_0 *называется* ***предельной точкой*** *множества* A, *если выполняется условие* $\forall\, r>0\quad \exists\, x\in A,\ x\ne x_0,:\quad x\in B(x_0,r)$.

Примеры. 1. Для множества $A=[0,1)\cup\{2\}$ в $(\boldsymbol{R},\rho)$ множество всех его предельных точек есть множество $[0,1]$.

2. Пусть $A=\{(x_1,x_2)\mid x_k\in \boldsymbol{Q},\ k=1,2\}$ множество в $(\boldsymbol{R}^2,\rho)$. Множество всех предельных точек множества A есть $\boldsymbol{R}^2$.

3. Пусть A — множество всех многочленов, рассматриваемых на $[a,b]$ в пространстве $(C([a,b]),\rho)$. В силу теоремы Вейерштрасса множество всех предельных точек множества A есть $C([a,b])$.

Упражнение 20. Какие точки пространства упр. 8 являются предельными точками множества $A = X$?

Упражнение 21. Пусть $x_n \to x$, $n \to \infty$, в (X,d). При каком условии точка x является предельной точкой множества $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — множества значений последовательности $\{x_n \mid n \geq 1\}$?

Упражнение 22. Привести пример множества в $(\boldsymbol{R},\rho)$ имеющего ровно три предельные точки.

Теорема 3. *Точка x_0 является предельной точкой множества A тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n \mid n \geq 1\}$, удовлетворяющая условиям: 1) $\forall n \geq 1: \ x_n \in A, \ x_n \neq x_0$; 2) $x_n \to x$, $n \to \infty$, в пространстве (X,d).*

⌈ Необходимость. Пусть x_0 — предельная точка множества A. Согласно определению предельной точки для шара $B(x_0,1)$, имеем $\exists\, x_1 \in A, \ x_1 \neq x_0: \quad x_1 \in B(x_0,1) \iff d(x_0,x_1) < 1$. Положим $r = d(x_0,x_1)/2$ и для шара $B(x_0,r)$ снова используем определение предельной точки $\exists\, x_2 \in A, \ x_2 \neq x_0: \ x_2 \in B(x_0,r) \implies d(x_0,x_2) < 1/2$ и т. д. Продолжая аналогично, получим последовательность $\{x_n \mid n \geq 1\}$, удовлетворяющую условиям 1) и 2).

Достаточность. Пусть $\{x_n \mid n \geq 1\}$ последовательность, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Поскольку, $d(x_n,x_0) \to 0$, $n \to \infty$, то $\forall\, r > 0 \ \ \exists\, \overline{n} \ \ \forall\, n \geq \overline{n}: \ d(x_n,x_0) < r \iff x_n \in B(x_0,r)$. Согласно условию 1), $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, $n \geq 1$. ⌋

Упражнение 23. Пусть $\{A_n \mid n \geq 1\}$ — некоторая последовательность подмножеств метрического пространства (X,d). Определим

$\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n := \{x \in X \mid x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ для некоторой последовательности $x_n \in A_n, \ n \geq 1\}$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n := \{x \in X \mid$ существует некоторая подпоследовательность $n(k)$, $k \geq 1$ последовательности $\boldsymbol{N}$ и элементы $x_{n(k)} \in A_{n(k)}$, $k \geq 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n(k)} = x\}$. В пространстве $(\boldsymbol{R}^2,\rho)$ найти $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$ для последовательности: a) $A_n = B\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$; b) $A_n = B(0,n)$, $n \geq 1$; c) $B\left(0,\dfrac{1}{2}\right), B(0,2), B\left(0,\dfrac{1}{3}\right), B(0,3), \ldots$.

10.1.8 Открытые множества

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $A \subset X$.

*Определение 7. Точка $x_0 \in A$ называется **внутренней точкой** множества A, если* $\exists\, r > 0 : \ B(x_0, r) \subset A$.

Примеры. 1. Для множества $A = [0, 1)$ в пространстве $(\boldsymbol{R}, \rho)$ множество внутренних точек есть $(0, 1)$.

2. Множество $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$ в пространстве $(\boldsymbol{R}^2, \rho)$ внутренних точек не имеет.

*Определение 8. Множество $A \subset X$ называется **открытым** в (X, d), если каждая точка множества A есть внутренняя точка множества A.*

Согласно этому определению, множество X открыто (оно содержит все шары), множество $\varnothing$ также будем считать открытым (как не содержащее невнутренних точек).

Пример. 3. Множество $A = (0, 1)$ открыто в $(\boldsymbol{R}, \rho)$.

Упражнение 24. Доказать, что множество $[0, 1)$ открыто в пространстве $([0, +\infty), \rho)$, ρ — обычное расстояние.

Упражнение 25. Описать все открытые множества в пространстве упр. 8 п. 10.1.2.

Упражнение 26. Доказать, что для открытого множества A и любого конечного набора точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ из X следующее множество $A \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ также открыто.

Упражнение 27. Доказать, что множество $\{x \mid x(0) > 1\}$ в пространстве $(C([0, 1]), \rho)$ открыто.

Упражнение 28. Доказать, что классы открытых множеств пространства $(\boldsymbol{R}^2, \rho)$ и пространств $(\boldsymbol{R}^2, d_k)$, $k = 1, 2$, введенных в упр. 16 п. 10.1.7, совпадают.

Теорема 4. *Открытый шар есть открытое множество.*

⌈ Пусть $B(x_0, r)$ — некоторый открытый шар и точка $z \neq x_0$, $z \in B(x_0, r)$. Тогда $d(z, x_0) < r$. Положим $r_1 = r - d(z, x_0)$ и докажем, что

$$B(z, r_1) \subset B(x_0, r) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, y \ : \quad d(y, z) < r_1 \implies d(y, x_0) < r.$$

Действительно, на основании аксиомы 3) расстояния имеем

$$d(y, x_0) \le d(y, z) + d(z, x_0) < r_1 + d(z, x_0) = r. \qquad ⌋$$

Теорема 5. *Объединение произвольного семейства открытых множеств есть открытое множество.*

⌈ Пусть T — произвольное множество индексов и для каждого $\alpha \in T$ множество A_α открыто. Предположим, что $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha$. Далее имеем $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha \iff \exists\, \alpha_0 \in T: \ A_{\alpha_0} \ni x_0$, а так как A_{α_0} открыто, то получим $\exists\, r > 0: \ B(x_0, r) \subset A_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha$. ⌋

Теорема 6. *Пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.*

⌈ Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — открытые множества и точка $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Имеем $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \iff \forall\, k, 1 \le k \le n: \quad x_0 \in A_k$, а поскольку A_k — открытое множество, то $\exists\, r_k: \ B(x_0, r_k) \subset A_k$. Пусть $r = \min(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $r > 0$. Тогда $\forall\, k, 1 \le k \le n: \ B(x_0, r) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} B(x_0, r_k) \subset B(x_0, r_k) \subset A_k$. Следовательно, $B(x_0, r) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. ⌋

Упражнение 29. Пусть $A_n = (-1/n, 1 + 1/n)$ — открытое в $(\boldsymbol{R}, \rho)$ множество, $n \ge 1$. Доказать, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ не есть открытое множество в пространстве $(\boldsymbol{R}, \rho)$.

10.1.9 Структура открытых множеств на прямой $(\boldsymbol{R}, \rho)$ и в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$

Теорема 7. *Любое непустое открытое множество в $(\boldsymbol{R}, \rho)$ есть объединение не более чем счётного семейства открытых непересекающихся интервалов.*

⌈ Пусть A — открытое в $(\boldsymbol{R}, \rho)$ множество и $x_0 \in A$. Поскольку A открыто, существует интервал, который содержит точку x_0 и содержится в A. Пусть $J(x_0)$ — объединение всех таких интервалов. По теореме 5 $J(x_0)$ есть открытое множество, кроме того, $J(x_0) \subset A$ и $J(x_0)$ — интервал, как объединение интервалов с общей точкой x_0. Таким образом, $J(x_0)$ — открытый интервал.

Пусть теперь $J(x_1)$ и $J(x_2)$ — открытые интервалы, соответствующие точкам x_1 и x_2 из A. Докажем, что либо $J(x_1) \cap J(x_2) = \varnothing$, либо $J(x_1) = J(x_2)$. Действительно, если $J(x_1) \cap J(x_2) \ne \varnothing$, то $J(x_1) \cup J(x_2)$ — открытый интервал, содержащий обе точки x_1 и x_2. Поэтому, по построению, $J(x_1) = J(x_1) \cup J(x_2) = J(x_2)$. Таким образом, A состоит из объединения попарно непересекающихся интервалов, семейство которых на прямой не более чем счётно. ⌋

Теорема 8. *Любое непустое открытое множество в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ есть объединение счётного семейства открытых шаров.*

⌈ Пусть $P := \{B(z,r) \mid z = (z_1, z_2, \ldots, z_m),\ z_k \in \boldsymbol{Q},\ 1 \le k \le m;\ r \in \boldsymbol{Q}\}$, P — счётное семейство открытых шаров. Для любой точки x из открытого множества A существует шар $B(z_x, r_x) \in P$, такой, что справедливо включение $x \in B(z_x, r_x) \subset A$. ⌋

10.1.10 Замкнутые множества

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $A \subset X$.

Определение 9. *Множество называется замкнутым в (X, d), если оно содержит все свои предельные точки.*

Множество X замкнуто, $\varnothing$ замкнуто (не имеет предельных точёк). Множество, состоящее из конечного числа точек, замкнуто (не имеет предельных точек).

Упражнение 30. Описать все замкнутые множества в пространстве упр. 8 п. 10.1.2.

Упражнение 31. Доказать, что замкнутый шар есть замкнутое множество.

Теорема 9. *Множество A замкнуто в (X, d) тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus A$ открыто в пространстве (X, d).*

⌈ Необходимость. Пусть A замкнуто. Тогда $x \in (X \setminus A) \iff x \notin A$. Следовательно, x не есть предельная точка множества A и потому $\exists\, r > 0 :\ B(x,r) \cap A = \varnothing \Longrightarrow B(x,r) \subset (X \setminus A)$. Таким образом, любая точка дополнения является внутренней точкой этого множества.

Достаточность. Пусть $X \setminus A$ открыто. Тогда любая точка $x \in (X \setminus A)$ является внутренней точкой этого множества, т. е. $\exists\, r > 0 :\ B(x,r) \subset (X \setminus A) \Longrightarrow B(x,r) \cap A = \varnothing$. Поэтому x не есть предельная точка множества A. ⌋

Теорема 10. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество. Объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

⌈ Доказательство следует из правил двойственности и теорем 5 и 6. ⌋

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Определение 10. Множество $\overline{A}$, состоящее из всех точек множества A и всех предельных множества A, называется замыканием множества A.

Упражнение 32. Пусть A замкнуто, $A \neq \varnothing$ и $x \notin A$. Доказать, что $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y) > 0$.

Упражнение 33. Доказать, что для любого множества его замыкание есть замкнутое множество.

Упражнение 34. Доказать, что $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Упражнение 35. В пространстве $(\boldsymbol{R}, \rho)$ при любом $n \geq 1$ множество $[1/n, 1 + 1/n]$ замкнуто. Является ли множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [1/n, 1 + 1/n]$ замкнутым?

Упражнение 36. Доказать, что $\overline{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.

Упражнение 37. Доказать, что $\overline{A} = \bigcap\limits_{F \supset A,\, F - \text{замкнуто}} F$.

10.1.11 Сепарабельные метрические пространства

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $A \subset X$.

Определение 11. Множество A называется всюду плотным в (X, d), если $\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in A: \quad d(x, y) < \varepsilon$.

Теорема 11. *Следующие утверждения равносильны:*

1) A — всюду плотно в (X, d); 2) A имеет непустое пересечение с любым открытым шаром; 3) $\forall x \in X \ \exists \{x_n \mid n \geq 1\} \subset A: \ x_n \to x, \ n \to \infty$; 4) $\overline{A} = X$.

Определение 12. Метрическое пространство (X, d) называется ***сепарабельным****, если оно содержит счётное и всюду плотное подмножество.*

Примеры. 1. Пространство $(\boldsymbol{R}, \rho)$ сепарабельно, множество $\boldsymbol{Q}$ счётно и всюду плотно в $(\boldsymbol{R}, \rho)$.

2. Пространство $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ сепарабельно, множество $\boldsymbol{Q}^m$ счётно и всюду плотно в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$.

3. Пространство $(C([a, b]), \rho)$ сепарабельно. Счётным и всюду плотным множеством является множество всех многочленов с рациональными коэффициентами.

Упражнение 38. В каком случае пространство упр. 8 п. 10.1.2 сепарабельно?

Упражнение 39. Доказать, что декартово произведение сепарабельных пространств сепарабельно.

Упражнение 40. Доказать, что непустое открытое множество в сепарабельном метрическом пространстве есть объединение счётного семейства открытых шаров.

Упражнение 41.* Доказать, что пространство (l_2, ρ) сепарабельно.

Упражнение 42. Доказать, что пространство упр. 7 п. 10.1.2 не является сепарабельным.

10.1.12 Полные метрические пространства

При изучении предела последовательности действительных чисел фундаментальную роль играет ***критерий Коши:*** последовательность действительных чисел сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна. Понятие фундаментальной последовательности можно ввести в любом метрическом пространстве. Однако, критерий Коши не имеет места в любом метрическом пространстве. Например, он не имеет места в пространстве $(\boldsymbol{Q}, \rho)$ (рассмотреть последовательность приближений к числу $\sqrt{2} \notin \boldsymbol{Q}$. В пространствах, в которых критерий Коши не имеет места, теряют силу многие утверждения анализа. Поэтому естественно выделить класс метрических пространств, в которых критерий Коши справедлив.

*Определение 13. Последовательность $\{x_n \mid n \geq 1\}$ элементов метрического пространства (X, d) называется **фундаментальной** или **последовательностью Коши**, если* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \boldsymbol{N} \quad \forall m \geq N \quad \forall n \geq N \ : \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Упражнение 43. Доказать, что фундаментальная последовательность ограничена.

Упражнение 44. Доказать, что сходящаяся последовательность фундаментальна.

Упражнение 45. Пусть $\{x_n \mid n \geq 1\}$ — фундаментальная последовательность в (X, d). Доказать, что для любого $x \in X$ числовая последовательность $\{d(x_n, x) \mid n \geq 1\}$ сходится в $(\boldsymbol{R}, \rho)$.

*Определение 14. Метрическое пространство (X, d) называется **полным**, если каждая фундаментальная по-*

следовательность элементов пространства сходится к некоторому элементу этого пространства.

Примеры. 1. ***Пространство*** (R, ρ) ***полно*** в силу критерия Коши сходимости числовой последовательности.

2. ***Пространство*** (R^m, ρ) ***полно,*** так как фундаментальная в (R^m, ρ) последовательность векторов покоординатно фундаментальна и наоборот,

3. ***Пространство*** $(C([a,b]), \rho)$ ***полно*** в силу критерия Коши равномерной сходимости последовательности функций.

4. Пространство $((0,1), \rho)$, где $\rho(x,y) = |x-y|$, не является полным.

5. Пространство (Q, ρ), где $\rho(x,y) = |x-y|$, не является полным.

Упражнение 46. Декартово произведение конечного числа метрических пространств полно тогда и только тогда, когда все сомножители полные метрические пространства.

Упражнение 47. Доказать, что ***пространство*** (l_2, ρ) ***полно.***

Упражнение 48. Пусть $X = R$, $d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, $\{x, y\} \subset R$. Проверить, что (R, d) — метрическое пространство. Является ли это пространство полным?

Упражнение 49. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и A замкнутое множество в нём. Доказать, что (A, d) — полное метрическое пространство.

Теорема 12. ***(Обобщение принципа стягивающихся отрезков).*** *Пусть* $\{\overline{B}(x_n, r_n) \mid n \geq 1\}$ *- последовательность замкнутых шаров в полном метрическом пространстве* (X, d), *удовлетворяющая условиям: 1)* $\forall\, n \geq 1 : \ \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n, r_n)$; *2)* $r_n \to 0, \ n \to \infty$.

$$\text{Тогда} \quad \exists\, !x \in X : \forall\, n \geq 1 \ \ x \in \overline{B}(x_n, r_n) \quad \text{или} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) = \{x\}.$$

⌈ Докажем, что последовательность $\{x_n \mid n \geq 1\}$ центров шаров фундаментальна. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Согласно условию 2), $\exists\, N \quad \forall\, n \geq N$: $r_n < \varepsilon$. Далее, учитывая условие 1), имеем

$$\forall\, m \geq N \ \forall\, n > m : \ \overline{B}(x_n, r_n) \subset \overline{B}(x_m, r_m) \Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq r_m < \varepsilon. \quad (1)$$

Таким образом, последовательность $\{x_n \mid n \geq 1\}$ фундаментальна, а поскольку (X, d) полно, то существует элемент $x \in X$ такой, что $x_n \to x$, $n \to \infty$, в (X, d). Перейдём при $n \to \infty$ к пределу в неравенстве (1), принимая во внимание следствие 1. Получим неравенство $d(x, x_m) \leq r_m < \varepsilon$, $m \geq N$, из которого следует, что $x \in \overline{B}(x_m, r_m)$, $m \geq N$. Отсюда, в силу условия 1), имеем $x \in \overline{B}(x_n, r_n)$, $n \geq 1$.

Осталось установить единственность точки x. Пусть $y \in X$ такой элемент, что $y \in \overline{B}(x_n, r_n)$, $n \geq 1$. Тогда $d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(x_n,y) \leq 2r_n \to 0$, $n \to \infty$. Следовательно, $d(x,y) = 0$ и $x = y$. ⌋

Замечание. Справедливо также и утверждение, обратное к теореме 12: если любая последовательность замкнутых шаров, удовлетворяющих условиям 1) и 2), имеет непустое пересечение, то пространство (X,d) полно. Прямое и обратное утверждения составляют ***теорему Кантора.***

Упражнение 50. Пусть (X,d) — полное метрическое пространство. Пусть также $\forall n \geq 1: \quad A_n \neq \varnothing, \quad A_n$ замкнуто, $A_{n+1} \subset A_n, \quad d(A_n) \to 0$, $n \to \infty$. Доказать, что $\exists\, !x \in X: \quad \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$.

10.1.13 Пополнение метрических пространств

Определение 15. Два метрических пространства (X_1,d_1) и (X_2,d_2) называются ***изометричными,*** *если существует биекция $f: X_1 \to X_2$ такая, что $\forall \{x,y\} \subset X_1$: $d_2(f(x),f(y)) = d_1(x,y)$.* ***Функция f называется изометрией.***

Упражнение 51. Пусть (X_1,d_1) и (X_2,d_2) — изометричные пространства, причём пространство (X_1,d_1) полно. Доказать, что пространство (X_2,d_2) полно.

Теорема 13. *(О пополнении). Пусть (X,d) — произвольное метрическое пространство. Существует полное метрическое пространство $(Y,\tilde{d})$ с подмножеством $\tilde{X} \subset Y$ такое что: 1) (X,d) изометрично $(\tilde{X},\tilde{d})$; 2) $\tilde{X}$ всюду плотно в $(Y,\tilde{d})$. Пространство $(Y,\tilde{d})$ называется* ***пополнением пространства*** *(X,d).*

Доказательство этой теоремы, выходящее за рамки программы, здесь не приводится.

Упражнение 52. Построить пополнение пространства примера 4 п. 10.1.12.

Упражнение 53. Построить пополнение пространства упр. 48

Упражнение 54. Пусть X — множество всех многочленов p на отрезке $[0,1]$, $d(p_1,p_2) := \max(|p_1(x) - p_2(x)| \mid 0 \leq x \leq 1)$. Проверить, что пространство (X,d) неполно и найти его пополнение.

Упражнение 55.* Доказать, что любое непустое открытое множество в (R^m, ρ) можно представить в виде счётного объединения "замкнутых интервалов" вида $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, $\{a_k, b_k\} \subset \boldsymbol{R}$, $a_k < b_k$, $1 \le k \le m$ без общих внутренних точек.

Упражнение 56. Пусть A — всюду плотное в $(\boldsymbol{R}, \rho)$ множество, $\alpha \in (\boldsymbol{R} \setminus \{0\})$ и $\beta \in \boldsymbol{R}$ — фиксированные числа. Доказать, что множество $B := \{\alpha x + \beta \mid x \in A\}$ всюду плотно в $(\boldsymbol{R}, \rho)$.

10.2 Функции на метрическом пространстве

10.2.1 Предел функции в точке

Пусть (X, d_1) и (Y, d_2) — метрические пространства, $A \subset X$, x_0 — предельная точка множества A. Далее рассматриваются функции вида $f : A \to Y$. Наиболее важные частные случаи:

1) $X = Y = \boldsymbol{R}$; $f : A \to \boldsymbol{R}$ — действительная функция, определённая на множестве A действительных чисел;

2) $X = \boldsymbol{R}^m$, $Y = \boldsymbol{R}$; $f : A \to \boldsymbol{R}$ — действительная функция от m переменных;

3) $X = \boldsymbol{R}^m$, $Y = \boldsymbol{R}^n$; $f : A \to \boldsymbol{R}^n$ — векторная функция от m переменных:

4) (X, d) — метрическое пространство, $Y = \boldsymbol{R}$, $f : A \to \boldsymbol{R}$ — действительная функция, определённая на множестве A метрического пространства.

Определение 1. *Пусть x_0 — предельная точка множества A. Элемент $p \in Y$ называется **пределом функции в точке** x_0, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A,\, x \ne x_0,\, d_1(x, x_0) < \delta :$ $d_2(f(x), p) < \varepsilon$.*

Обозначения: $f(x) \to p$, $x \to x_0$, или $p = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Теорема 14. *Элемент p является пределом функции f в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n \mid n \ge 1\}$ такой, что $\forall n \ge 1 :\ x_n \in A$, $x_n \ne x_0$ и $x_n \to x_0$, $n \to \infty$ в (X, d_1), имеем $f(x_n) \to p$, $n \to \infty$ в (Y, d_2).*

⌈ Доказательство теоремы в точности повторяет доказательство аналогичной теоремы для действительной функции. ⌋

Упражнение 57. Провести доказательство теоремы 14.

Теорема 15. *(О единственности предела). Пусть $f(x) \to p$, $x \to x_0$, и $f(x) \to q$, $x \to x_0$. Тогда $p = q$.*

⌈ Доказательство следует из теоремы 14 и теоремы 1. ⌋

Упражнение 58. Пусть $Y = \boldsymbol{R}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$. Доказать существование шара $B(x_0, r)$, для которого $\forall\, x \in \big(B(x_0,r)\cap A\setminus\{x_0\}\big): \ f(x) > 0$.

10.2.2 Свойства пределов действительных функций

Пусть (X, d) — метрическое пространство, $A \subset X$, x_0 — предельная точка множества A, и $Y = \boldsymbol{R}$, $d_2(x,y) = \rho(x,y) = |x-y|$ для $\{x,y\} \subset \boldsymbol{R}$. Пусть $f : X \to \boldsymbol{R}$, $g : X \to \boldsymbol{R}$ — две функции. Утверждения следующей теоремы доказываются просто с помощью теоремы 14 и свойств сходящихся последовательностей действительных чисел.

Теорема 16. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = p \in \boldsymbol{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = q \in \boldsymbol{R}$.

Тогда: 1) $\forall\, c \in \boldsymbol{R}$: $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x)) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

4) если дополнительно $q \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Упражнение 59. Пусть $Y = \boldsymbol{R}^m$, $d_2 = \rho$ — обычное расстояние в $\boldsymbol{R}^m$. Доказать, что $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) \to (p_1, p_2, \ldots, p_m) = p$, $x \to x_0$ в $(\boldsymbol{R}^m, \rho) \iff \forall\, k,\ 1 \le k \le m:\ f_k(x) \to p_k,\ \ x \to x_0$.

10.2.3 Понятие о повторных пределах

Пусть (X_k, d_k), $k = 1, 2$ — метрические пространства и $X = X_1 \times X_2$ — декартово произведение множеств X_1 и X_2. Определим для точек $\{x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)\} \subset X$ расстояние, положив $d(x,y) = d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) := \sqrt{d_1^2(x_1,y_1) + d_2^2(x_2,y_2)}$.

Заметим, что $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \to (x_1, x_2) = x$, $n \to \infty$, в (X, d) $\iff x_1^{(n)} \to x_1$, $n \to \infty$, в (X_1, d_1) и $x_2^{(n)} \to x_2$, $n \to \infty$, в (X_2, d_2).

Пусть $(x_1^0, x_2^0) \in X$ — некоторый элемент, $f : (X \setminus \{(x_1^0, x_2^0)\}) \to \boldsymbol{R}$.

Определение 2. *Предел* $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(x_1^0,x_2^0)} f(x_1,x_2) = p$ *в* (X, d) *называется **двойным пределом**. Используется также обозначение* $p = \lim\limits_{\substack{x_1^0\to x_1^0\\ x_2^0\to x_2^0}} f(x_1, x_2)$.

Зафиксируем теперь значение $x_1 \neq x_1^0$ и рассмотрим исходную функцию $f(x_1, \cdot) :\ X_2 \to \boldsymbol{R}$, как функцию от $x_2 \in X_2$. Предположим, что существует предел $\lim\limits_{x_2\to x_2^0} f(x_1, x_2) =: g(x_1)$ в (X_2, d_2).

Определение 3. *Если существует предел* $\lim\limits_{x_1 \to x_1^0} g(x_1) = q$ *в* (X_1, d_1), *то* q *называется* ***повторным пределом*** *в точке* (x_1^0, x_2^0) *и обозначается* $q = \lim\limits_{x_1 \to x_1^0} \lim\limits_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2)$.

Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x_2 \to x_2^0} \lim\limits_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2)$.

Двойной предел и повторные пределы в точке (x_1^0, x_2^0), вообще говоря, различны.

Упражнение 60. Пусть $X_1 = X_2 = \boldsymbol{R}$, $d_1 = d_2 = \rho$ — обычное расстояние, $(x_1^0, x_2^0) = (0,0)$ и $f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \neq (0,0)$. Существует ли двойной предел в точке $(0,0)$? Чему равны повторные пределы в точке $(0,0)$?

10.2.4 Непрерывные функции

Пусть (X, d_1) и (Y, d_2) — метрические пространства, $A \subset X$, $x_0 \in A$ и $f:\ A \to Y$.

Определение 4. *Точка* $x_0 \in A$ *называется* ***изолированной точкой множества*** A, *если выполняется условие* $\exists\, r > 0 : B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$.

Определение 5. *Пусть* $x_0 \in A$ *— предельная точка множества* A. *Функция* $f:\ A \to Y$ *называется* ***непрерывной в точке*** x_0, *если* $f(x) \to f(x_0)$, $x \to x_0$, *т. е. если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in A,\ d_1(x, x_0) < \delta \ : \quad d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Определение 6. *Пусть* $x_0 \in A$ *— изолированная точка множества* A. *Условимся считать, что каждая функция* $f:\ A \to Y$ *непрерывна в точке* x_0.

Определение 7. *Функция* $f:\ A \to Y$ *— непрерывна на множестве* A, *если* f *непрерывна в каждой точке множества* A.

Обозначения: $f \in C(A, Y)$. $C(A, \boldsymbol{R}) =: C(A)$ для $\boldsymbol{R}$ с евклидовым расстоянием.

Примеры. 1. Пусть $y_0 \in Y$ — фиксированный элемент и $\forall\, x \in A\ :\ f(x) = y_0$. Функция f непрерывна на X ($d_2(f(x_1), f(x_2)) = 0$ для любых элементов $\{x_1, x_2\} \subset X$).

2. Пусть $a \in X$ — фиксированный элемент, $Y = \boldsymbol{R}$ и $f(x) = d_1(x, a)$, $x \in X$. Функция f непрерывна на X в силу неравенства треугольника $|d_1(x, a) - d_1(y, a)| \le d_1(x, y)$. В определении непрерывности можно положить $\delta = \varepsilon$.

Замечание. Пусть x_0 — внутренняя точка множества A. Определение непрерывности функции $f: A \to Y$ в точке x_0 допускает такую эквивалентную формулировку $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0: \ f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.

Упражнение 61. Доказать, что функция f из определения 15 п. 10.1.13 непрерывна на X_1.

Упражнение 62. Пусть $A \subset X$, $A \neq \varnothing$, — фиксированное множество и для $x \in X \quad f(x) := d_1(x, A) := \inf\limits_{z \in A} d_1(x, z)$, $x \in X$. Доказать, что функция f непрерывна на X.

10.2.5 Элементарные свойства непрерывных функций

Пусть $Y = \boldsymbol{R}$, $d_2(x, y) = \rho(x, y) = |x - y|$, $\{x, y\} \subset \boldsymbol{R}$.

Теорема 17. *Пусть $f: X \to \boldsymbol{R}$, $g: X \to \boldsymbol{R}$ — непрерывные в точке $x_0 \in X$ функции. Тогда:*

a) $\forall\, c \in \boldsymbol{R}$ функция cf непрерывна в точке x_0;

b) функция $f + g$ непрерывна в точке x_0;

c) функция fg непрерывна в точке x_0;

d) если дополнительно $g(x_0) \neq 0$, то функция f/g непрерывна в точке x_0.

⌈ Использовать определение непрерывности и теорему 16. ⌋

Пусть $Y = \boldsymbol{R}^m$, $d_2 = \rho$ — евклидово расстояние в $\boldsymbol{R}^m$.

Теорема 18. *Пусть функция $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m): \ X \to \boldsymbol{R}^m$. Функция f непрерывна в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда для каждого k, $1 \leq k \leq m$ функция f_k непрерывна в точке x_0.*

⌈ Для доказательства использовать равносильность сходимости в $\boldsymbol{R}^m$ покоординатной сходимости. ⌋

Теорема 19. ***(О непрерывности сложной функции).*** *Пусть (X, d_1), (Y, d_2) и (Z, d_3) — метрические пространства и $f: \ X \to Y$, $g: \ Y \to Z$. Пусть $h(x) := g(f(x))$, $x \in X$, функция h называется **сложной функцией** или **суперпозицией функций** f и g. Предположим, что для некоторого $x_0 \in X$ функция f непрерывна в точке x_0, а функция g непрерывна в точке $y_0 := f(x_0)$. Тогда функция h непрерывна в точке x_0.*

⌈ Доказательство следует из теоремы 16. ⌋

10.2.6 Примеры действительных непрерывных на R^m функций

Пусть $X = R^m$ и $Y = R$ с евклидовыми расстояниями.

1. Постоянная функция. Пусть $y_0 \in R$ — фиксированное число и $f(x) = y_0$, $x \in R^m$. Функция f непрерывна на R^m.

2. Непрерывность координат. Пусть k, $1 \le k \le m$, фиксировано и функция $\pi_k : R^m \to R$ определена следующим образом

$$\pi_k(x) = \pi_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_k, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m.$$

В силу неравенства $|\pi_k(x) - \pi_k(y)| = |x_k - y_k| \le \rho(x, y)$, $\{x, y\} \subset R^m$, функция π_k непрерывна на R^m (в определении непрерывности можно положить $\delta = \varepsilon$). Таким образом, координата точки есть непрерывная функция точки.

3. Непрерывность многочленов. Многочленом от m переменных называется функция $P : R^m \to R$, определяемая с помощью набора неотрицательных целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_m$ и набора действительных чисел $\{a(k_1, k_2, \ldots, k_m) \mid 0 \le k_j \le n_j,\ 1 \le j \le m\}$ следующим образом

$$P(x) = P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{\substack{0 \le k_1 \le n_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \le k_m \le n_m}} a(k_1, k_2, \ldots, k_m) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m},$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$.

Частным случаем многочлена от m переменных является *линейная функция* от m переменных $P(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$, где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — действительные числа.

Любой многочлен от m переменных — непрерывная на R^m функция. Действительно, поскольку π_k — непрерывная на R^m функция, то утверждение примера следует из теоремы 17.

4. Рациональные функции от переменных. Пусть P и Q — два многочлена от m переменных и $A = \{x \in R^m \mid Q(x) \ne 0\}$. Функция $S : A \to R$, определяемая равенством $S(x) = P(x)/Q(x)$, $x \in A$, называется *рациональной функцией* от m переменных. Из теоремы 17 следует, что рациональная функция от m переменных непрерывна на множестве определения.

5. Функция $f(x_1, x_2) = e^{\sqrt{x_1^2 + x_2^4}} \sin(x_1 + x_1x_2^2)$, $(x_1, x_2) \in R^2$ непрерывна на R^2. Доказательство следует из непрерывности многочленов и теоремы 19.

Упражнение 63. Доказать, что функция $f : C([0,1]) \to R$: a) $f(x) = \int\limits_0^1 t^3 x^2(t)\,dt$; b) $f(x) = x(0) + \max\limits_{1/2 \le t \le 1} x(t)$; непрерывна в $(C([0,1]), \rho)$.

10.2.7 Теорема о характеризации непрерывности

Пусть (X, d_1), (Y, d_2) — метрические пространства и $f : X \to Y$. Для множества $A \subset X$ его образ при отображении f есть множество $f(A) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in A : f(x) = y\}$. Для множества $B \subset Y$ его прообраз при отображении f есть множество $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \exists\, y \in B : f(x) = y\}$.

Теорема 20. *Функция $f : X \to Y$ непрерывна на X тогда и только тогда, когда для любого открытого в (Y, d_2) множества G множество $f^{-1}(G)$ открыто в (X, d_1).*

⌈ Необходимость. Пусть f — непрерывна на X. Предположим, что G — открытое множество, $G \subset Y$ и $G \neq \varnothing$. Пусть $x_0 \in f^{-1}(G)$ — произвольная фиксированная точка. Положим $y_0 = f(x_0) \in G$. Поскольку G открыто, то $\exists\, \varepsilon > 0 : B(y_0, \varepsilon) \subset G$. Из непрерывности функции f в точке x_0 следует также, что $\exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in B(x_0, \delta) : f(x) \in B(y_0, \varepsilon) \Longrightarrow B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$. Таким образом, $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon)) \subset f^{-1}(G)$. Если $G = \varnothing$, то $f^{-1}(G) = \varnothing$ — открыто.

Достаточность. Пусть $x_0 \in X$ — фиксированная точка и $\varepsilon > 0$ задано. Множество $G = B(y_0, \varepsilon)$, где $y_0 = f(x_0)$, открыто в (Y, d_2). Следовательно, по условию теоремы $f^{-1}(G) = f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ открыто в (X, d_1). Поэтому для $x_0 \in f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ имеем

$$\exists\, \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon)) \Longrightarrow f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon). \rfloor$$

$\forall x \in B(x_0, \delta)\ \sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \Rightarrow f \in C(x_0)$

Упражнение 64. Доказать, что $f \in C(X, Y)$ тогда и только тогда, когда для любого замкнутого в (Y, d_2) множества F множество $f^{-1}(F)$ замкнуто в (X, d_1).

Упражнение 65. Привести пример пространств X, Y, функции $f \in C(X, Y)$ и открытого в (X, d_1) множества A, для которых множество $f(A)$ не является открытым в (Y, d_2).

Упражнение 66. Пусть $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, d_2 — метрика на Y. Описать функции класса $C(X, Y)$. Рассмотреть случай $X = \boldsymbol{R}$.

Упражнение 67. Пусть (Y, d_2) — пространство с дискретной метрикой. Описать класс функций $C(\boldsymbol{R}, Y)$.

Упражнение 68. Доказать замкнутость в $(C([0,1]), \rho)$ множества:

a) $\{x \in C([0,1]) \mid \forall\, t \in [0,1] : x(t) \geq 0\}$; b) $\{x \in C([0,1]) \mid \int\limits_0^1 t x^2(t)\, dt \geq 3\}$.

Упражнение 69. Доказать, что множество: a) $\{x \in C([0,1]) \mid x(0) + \int\limits_0^1 (1-t) x(t)\, dt > 0\}$; b) $\{x \in C([0,1]) \mid x(0) > 1,\ \int\limits_0^1 x(t)\, dt < 0\}$ открыто в $(C([0,1]), \rho)$.

Определение 8. *Отображение $f: X \to Y$ называется **гомеоморфизмом**, если: 1) f — биекция между X и Y; 2) $f \in C(X,Y)$; 3) $f^{-1} \in C(Y,X)$.*

Упражнение 70. Биекция $f: X \to Y$ есть гомеоморфизм тогда и только тогда, когда множество A открыто в (X, d_1) тогда и только тогда, когда $f(A)$ открыто в (Y, d_2).

10.2.8 Равномерно непрерывная на множестве функция

Пусть (X, d_1), (Y, d_2) — метрические пространства и $A \subset X$.

Определение 9. *Функция $f: A \to Y$ называется **равномерно непрерывной на множестве** A, если:*

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \{x', x''\} \subset A,\ d_1(x', x'') < \delta: \ d_2(f(x'), f(x'')) < \varepsilon.$

Упражнение 71. Доказать, что функции упр. 61, 62 и примера 2 п. 10.2.6 равномерно непрерывны на множестве определения.

10.3 Компактные множества и их свойства

10.3.1 Определения

Пусть (X, d) — метрическое пространство, T — произвольное непустое множество индексов и $A \subset X$.

Определение 1. *Семейство множеств $O = \{O_\alpha \mid \forall \alpha \in T : O_\alpha \subset X\}$ называется **покрытием** множества A, если $\forall x \in A\ \exists \alpha \in T : \ O_\alpha \ni x \ \left(\iff A \subset \bigcup\limits_{\alpha \in T} O_\alpha\right)$. Для подмножества $T' \subset T$ семейство $O' = \{O_\alpha \mid \alpha \in T'\}$ называется **подпокрытием** покрытия O, если O' — покрытие для A.*

*Если множество T конечно, то покрытие O называется **конечным**. Покрытие $O = \{O_\alpha \mid \alpha \in T\}$ называется **открытым**, если для любого $\alpha \in T$ множество O_α открыто в (X, d).*

Упражнение 72. Пусть $(\boldsymbol{R}, \rho)$ — прямая с обычным расстоянием. Является ли семейство множеств $\{(1/n, 2 - 1/n) \mid n \geq 1\}$ покрытием (открытым покрытием) множества: a) $(0,1)$; b) $[0,1)$?

Определение 2. *Пусть $F \subset X$. Множество F называется **компактным** в (X, d), если любое открытое покрытие множества F содержит конечное подпокрытие.*

Примеры. 1. Произвольное конечное множество компактно.

2. Множество Z в (R, ρ) не является компактным.

Указание. Рассмотреть покрытие $\{(n-1/2, n+1/2) \mid n \in Z\}$.

3. Множество $(0,1]$ не является компактным в (R, ρ).

Указание. Рассмотреть покрытие $\{(1/n, 1+1/n) \mid n \geq 1\}$.

4. Множество $\{1/n \mid n \geq 1\} \cup \{0\}$ компактно в (R, ρ).

5. Открытый шар $B(x,r)$ в пространстве (R^m, ρ) не является компактным множеством.

Указание. Рассмотреть покрытие $\{B(x, r_k) \mid 0 < r_k < r,\ k \geq 1;\ r_k \to r,\ k \to \infty\}$.

Определение 3. *Если X компактно в (X,d), то метрическое пространство (X,d) называется* ***компактным.***

10.3.2 Свойства компактных множеств

Теорема 21. *Компактное множество ограничено.*

⌈ Пусть F — компактное в (X,d) множество. Для любого $x \in F$ рассмотрим открытое множество $B(x,1)$. Семейство $\{B(x,1) \mid x \in F\}$ является открытым покрытием F. Согласно определению компактного множества, существует конечное подпокрытие $B(x_1,1), B(x_2,1), \ldots, B(x_n,1)$, т. е. $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(x_k,1)$. Пусть $C := 1 + \max(d(x_1,x_k) \mid 1 \leq k \leq n\}$. Покажем, что $F \subset B(x_1, C)$. Действительно, для $x \in F$

$$\exists\, k\ :\quad B(x_k,1) \ni x \implies d(x,x_1) \leq d(x,x_k) + d(x_k,x_1) < C. \qquad ⌋$$

Теорема 22. *Компактное множество замкнуто.*

⌈ Пусть F — компактное в (X,d) множество. Докажем, что множество $X \setminus F$ открыто в (X,d). Пусть $x_0 \in (X \setminus F)$ — фиксированная точка. Каждой точке $x \in F$ сопоставим два открытых шара $B(x_0, r(x))$ и $B(x, r(x))$, где $r(x) := \dfrac{1}{3} d(x_0, x)$. Семейство $\{B(x, r(x)) \mid x \in F\}$ есть открытое покрытие компактного множества F. Следовательно, существует конечное подпокрытие $\{B(x_1,r_1), B(x_2,r_2), \ldots, B(x_n,r_n)\}$; $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(x_k,r_k)$; $r_K = r(x_k)$, $1 \leq k \leq n$. Пусть $r := \min(r_1, r_2, \ldots, r_n) > 0$. Заметим, что $B(x_0,r) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} B(x_0,r_k)$; $B(x_0,r) \cap \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B(x_0,r_k)\right) = \varnothing$, так как $B(x_0,r) \cap B(x_k,r_k) = \varnothing$ для $1 \leq k \leq n$. Поэтому $B(x_0,r) \cap F = \varnothing$, т. е. $B(x_0,r) \subset (X \setminus F)$. ⌋

Теорема 23. *Замкнутое подмножество компактного множества компактно.*

⌈ Пусть F — компактное в (X, d) множество и $G \subset F$, G — замкнуто в (X, d). Пусть $O = \{O_\alpha \mid \alpha \in T\}$ — открытое покрытие множества G. Тогда семейство $O \cup (X \setminus F)$ есть открытое покрытие компактного множества F. Следовательно, существует конечное подпокрытие $O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \dots, O_{\alpha_n}$, $X \setminus F$. Поэтому $\{O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \dots, O_{\alpha_n}\}$ — конечное подпокрытие для G. ⌋

Теорема 24. *(Обобщение теоремы Больцано-Вейерштрасса). Пусть F — компактное в (X, d) множество. Каждая бесконечная последовательность элементов из F содержит сходящуюся в (X, d) к некоторому элементу из F подпоследовательность.*

Замечание. В условиях теоремы для последовательности $\{x_n \mid n \geq 1\}$ не предполагается, что $x_m \neq x_n$ при $m \neq n$.

⌈ Пусть $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset F$ — произвольная последовательность. Если для точки x существует подпоследовательность $\{x_{n(k)} \mid k \geq 1\}$ такая, что $x_{n(k)} \to x$, $k \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $d(x_n, x) < \varepsilon$ выполняется для бесконечного числа индексов n. Поэтому, тот факт, что для точки x требуемой подпоследовательности не существует, означает существование $\varepsilon(x) > 0$ такого, для которого неравенство $d(x_n, x) < \varepsilon(x)$ выполняется только для конечного числа номеров n.

Предположим, что утверждение теоремы неверно, т. е., что для любой точки $x \in F$ не существует сходящейся к ней подпоследовательности. Тогда $\forall\, x \in F \quad \exists\, \varepsilon(x) > 0 \quad \exists\, N = N(x) \quad \forall\, n \geq N: \quad d(x_n, x) \geq \varepsilon(x)$. Семейство шаров $\{B(x, \varepsilon(x)) \mid x \in F\}$ есть открытое покрытие компактного множества F. Пусть набор $\{B(x_1, \varepsilon(x_1)), B(x_2, \varepsilon(x_2)), \dots, B(x_m, \varepsilon(x_m))\}$ составляет конечное подпокрытие F. Тогда, согласно определению, $F \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} B(x_k, \varepsilon(x_k))$. Кроме того, $x_n \notin \bigcup\limits_{k=1}^{m} B(x_k, \varepsilon(x_k))$ для $n \geq \max(N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_m))$, т. е. $x_n \notin F$. Получили противоречие с условием теоремы. ⌋

Пример. 1. Докажем, что замкнутый шар в $(C([a, b]), \rho)$ не есть компактное множество.

⌈ Достаточно рассмотреть случай $[a, b] = [0, 1]$, $x_0(t) = 0$, $t \in [0, 1]$ и шар $\overline{B}(x_0, 1)$. Последовательность функций

$$\{t^n \mid n \geq 1\} \tag{1}$$

принадлежит шару $\overline{B}(x_0, 1)$. Допустим, что шар $\overline{B}(x_0, 1)$ компактен. Тогда по теореме 24 последовательность (1) содержит равномерно на $[0, 1]$ сходящуюся к некоторой функции $f \in \overline{B}(x_0, 1)$ подпоследовательность $\{t^{n(k)} \mid k \geq 1\}$. Поэтому $\rho(f, t^{n(k)}) = \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - t^{n(k)}| \to 0$, $k \to \infty$; $\quad |f(1) - 1| \leq \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - t^{n(k)}| \to 0$, $\quad k \to \infty$, и для каждого

$t \in [0,1)$ $|f(t)-t^{n(k)}| \le \rho(f, t^{n(k)}) \to 0$, $k \to \infty$. Таким образом, $f(1) = 1$ и $f(t) = 0$, $t \in [0,1)$, что невозможно, так как $f \in B(x_0, 1) \subset C([0,1])$. ⌋

Упражнение 73. Пусть (X_k, d_k), $k = 1,2$ — метрические пространства и (X, d) — их декартово произведение. Предположим, что F_k — компактное множество в (X_k, d_k), $k = 1,2$. Доказать, что множество $F_1 \times F_2$ компактно в (X, d).

Упражнение 74. Доказать, что замкнутый шар в (l_2, ρ) не есть компактное множество.

Замечание. Из утверждений примера 1, упр. 74 следует, что компактные множества в этих пространствах не могут содержать открытых или замкнутых шаров.

Упражнение 75. Доказать, что компактное метрическое пространство полно и сепарабельно.

10.3.3 Критерий компактности

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $A \subset X$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано.

Определение 4. *Множество $C \subset X$ называется ε-сетью для множества A, если $\forall x \in A \ \exists y \in C: \ d(x,y) < \varepsilon$*
$\left(\iff \bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) \supset A\right)$.

Теорема 25. ***(Критерий Хаусдорфа).*** *Для того, чтобы замкнутое множество F метрического пространства (X, d) было компактным необходимо, а для полного пространства (X, d) и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовала конечная ε-сеть для F.*

⌈ Необходимость. Пусть F компактно. Тогда по теореме 22 F замкнуто. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Открытое покрытие $\{B(x, \varepsilon) \mid x \in F\}$ множества F должно содержать конечное подпокрытие: $\{B(x_1, \varepsilon), B(x_2, \varepsilon), \ldots, B(x_n, \varepsilon)\}$. Тогда множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ есть конечная ε-сеть для F.

Достаточность. Пусть полно (X, d), а F замкнуто. Предположим, что F не является компактным. Согласно определению, это означает, что существует открытое покрытие $O = \{O_\alpha \mid \alpha \in T\}$, не содержащее конечного подпокрытия для F. Пусть для $\varepsilon = 1$ C_1 — конечная 1-сеть для F (она существует в силу условия теоремы). Хотя бы одно из множеств $\{B(x,1) \cap F \mid x \in C_1\}$ не может быть покрыто конечным набором множеств из O. Допустим, что это множество $F_1 = B(x_1, 1) \cap F$. Пусть для $\varepsilon = 1/2$, C_2 — конечная $(1/2)$-сеть для F, а, следовательно, и для F_1. Хотя бы одно из множеств $\{B(x, 1/2) \cap F_1 \mid x \in C_2\}$

не может быть покрыто конечным набором множеств из O. Пусть это множество $F_2 = B(x_2, 1/2) \cap F_1$. Продолжая аналогично, получим последовательность множеств $\{F_n \mid n \geq 1\}$ таких, что: 1) $F_n \subset F$, $n \geq 1$; 2) $F_n \subset B(x_n, 2^{-n+1})$, $n \geq 1$; 3) F_n не может быть покрыто конечным набором множеств из O (в частности F_n бесконечно), $n \geq 1$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{y_n \mid n \geq 1\}$ таких элементов, что:

$$y_1 \in (B(x_1, 1) \cap F)) = F_1;$$

$$y_2 \in (B(x_2, 2^{-1}) \cap F_1)) = F_2, \; y_2 \neq y_1;$$

....

$$y_n \in (B(x_n, 2^{-n+1}) \cap F_{n-1})) = F_n, \; y_n \neq y_k, \; 1 \leq k \leq n-1;$$

....

Последовательность $\{y_n \mid n \geq 1\}$ фундаментальна, что следует из неравенства $d(y_m, y_n) < 2^{-m+1}$, $m < n$. Поскольку (X, d) полно, то существует элемент $y \in X$ такой, что $y_n \to y$, $n \to \infty$ в (X, d). Замкнутость F влечёт включение $y \in F$. Открытое покрытие O множества F содержит множество $O_{\alpha'} \ni y$. Поскольку $O_{\alpha'}$ открыто, то $\exists\, \delta > 0$: $B(y, \delta) \subset O_{\alpha'}$. Пусть теперь n таково, что $2^{-n+1} < \delta/3$, $d(y_n, y) < \delta/3$. Тогда $F_n \subset B(x_n, 2^{-n+1}) \subset B(y, \delta)$, так как для любого $x \in F_n$ имеем $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < 2^{-n+1} + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) < 2 \cdot 2^{-n+1} + d(y_n, y) < \delta$. Таким образом, множество F_n покрывается одним множеством $O_{\alpha'}$ из O. Полученное противоречие доказывает теорему. ⌋

Теорема 26. *Пусть (X, d) — метрическое пространство и $F \subset X$. Если каждая последовательность элементов из F содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из F, то множество F компактно.*

⌈ F замкнуто, поскольку содержит все свои предельные точки. Докажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. Предположим, что для некоторого $\varepsilon^* > 0$ не существует конечной ε-сети для F. Пусть x_1 — любой элемент из F, множество $\{B(x_1, \varepsilon^*)\}$ не есть покрытие для F. Поэтому существует $x_2 \in F$, $x_2 \notin B(x_1, \varepsilon^*)$. Набор $\{B(x_1, \varepsilon^*), B(x_2, \varepsilon^*)\}$ также не образует покрытия для F и т. д. Получим последовательность $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset F$ такую, что $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon^*$ для $m \neq n$. Последовательность $\{x_n \mid n \geq 1\}$ не может содержать сходящейся подпоследовательности (противоречие с фундаментальностью). Полученное противоречие с условием теоремы показывает, что предположение о несуществовании конечной ε^*-сети неверно. Далее см. доказательство теоремы 25. ⌋

Замечание. Теоремы 24 и 26 вместе дают ещё один критерий компактности в метрическом пространстве — ***теорему Кантора***.

Упражнение 76. Пусть для каждого $\alpha \in T$ множество F_α компактно и для любого конечного набора $F_{\alpha(1)}, F_{\alpha(2)}, \ldots, F_{\alpha(n)}$: $F_{\alpha(1)} \cap F_{\alpha(2)} \cap \ldots \cap F_{\alpha(n)} \neq \varnothing$. Доказать, что $\bigcap\limits_{\alpha \in T} F_\alpha \neq \varnothing$.

10.3.4 Компактные множества в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$

Гейне - Бореля

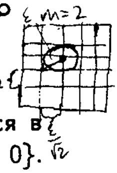
Теорема 27. *Подмножество метрического пространства $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

⌈ Необходимость. В силу теорем 21 и 22 компактное множество в любом метрическом пространстве замкнуто и ограничено.

Достаточность. Пусть F замкнуто и ограничено. Воспользуемся критерием Хаусдорфа. Предположим, что $\varepsilon > 0$ задано. Множество

на R^1 $\tilde{C} = \{k\varepsilon / k \in \mathbb{Z}\}$

$$\tilde{C} := \left\{ \left(\frac{\varepsilon k_1}{\sqrt{m}}, \frac{\varepsilon k_2}{\sqrt{m}}, \ldots, \frac{\varepsilon k_m}{\sqrt{m}} \right) \;\middle|\; k_j \in \boldsymbol{Z},\ 1 \le j \le m \right\}$$



есть ε-сеть для $\boldsymbol{R}^m$. Поскольку F ограничено, то оно содержится в гиперкубе вида $J = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid |x_j| \le p,\ 1 \le j \le m;\ p > 0\}$. Множество $C = \tilde{C} \cap J$ конечно и является ε-сетью для F. ⌋

Упражнение 77. Пусть A — произвольное замкнутое множество в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$. Доказать существование последовательности $\{\vec{a}(n) \mid n \ge 1\} \subset \boldsymbol{R}^m$ такой, что для неё множество всех частичных пределов равно A. Доказать также, что эта последовательность может быть взята такой, что $\overline{\{a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots\}} = A$.

Упражнение 78*. Описать компактные множества в (l_2, ρ). √

10.3.5 Компактные множества в $C([a,b]), \rho)$

Пусть $A \subset C([a,b])$.

Определение 5. *Семейство функций называется **равномерно ограниченным** если $\exists L \in \boldsymbol{R}$ $\forall x \in A$ $\forall t \in [a,b]$: $|x(t)| \le L$, т. е. если множество A ограничено в метрическом пространстве $(C([a,b]), \rho)$.*

Определение 6. *Семейство функций называется **равностепенно непрерывным**, если*

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in A$ $\forall t', t'' \subset [a,b]$, $|t' - t''| < \delta$: $|x(t') - x(t'')| < \varepsilon$.

Теорема 28. *(Теорема Асколи-Арцела). Для того, чтобы замкнутое множество $F \subset C([a,b])$ было компактным в $(C([a,b]),\rho)$, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *множество F было равномерно ограниченным;*

2) *множество F было равностепенно непрерывным.*

⌈ Необходимость. Пусть F — компактное множество в метрическом пространстве $(C([a,b]),\rho)$. Тогда F — ограниченное множество и, следовательно, условие 1) теоремы выполнено. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Согласно критерию Хаусдорфа, существует конечная $(1/3)$-сеть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ для F, $n = n(\varepsilon)$. В силу теоремы Кантора

$$\exists\,\delta > 0 \ \forall\, k,\ 1 \le k \le n,\ \ \forall\, t', t'' \subset [a,b],\ |t'-t''| < \delta :\ \ |x_k(t') - x_k(t'')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть теперь $x \in F$ задано. Тогда для некоторого k, $1 \le k \le n$, имеем $\rho(x, x_k) < \varepsilon/3$, т. е. $\forall\, t \in [a,b]$: $|x(t) - x_k(t)| < \varepsilon/3$. Поэтому $\forall\, t', t'' \subset [a,b]$, $|t'-t''| < \delta$: $|x(t') - x(t'')| = |x(t') - x_k(t') + x_k(t') - x_k(t'') + x_k(t'') - x(t'')| \le |x(t') - x_k(t')| + |x_k(t') - x_k(t'')| + |x_k(t'') - x(t'')| < \varepsilon$. Таким образом, условие 2) также выполнено.

Достаточность. Пусть F — замкнутое множество, удовлетворяющее условиям 1) и 2). Используем теорему 26. Предположим, что $\{x_n \mid n \ge 1\} \subset F$, $\{r_n \mid n \ge 1\}$ — множество всех рациональных чисел отрезка $[a,b]$, занумерованных в каком-нибудь порядке. Последовательность чисел $\{x_n(r_1) \mid n \ge 1\}$ ограничена по условию 1), следовательно, она содержит сходящуюся к некоторому числу $x(r_1)$ подпоследовательность $x_{n(k)} \to x(r_1)$, $k \to \infty$. Обозначим $x_{n(k)} =: x_{1k}$, $k \ge 1$. Последовательность $\{x_{1k} \mid k \ge 1\} \subset F$ и такова, что $x_{1k}(r_1) \to x(r_1)$, $k \to \infty$. Рассмотрим теперь последовательность чисел $\{x_{1k}(r_2) \mid k \ge 1\}$, которая также ограничена. Поэтому существует подпоследовательность $\{x_{1k(j)}(r_2) \mid j \ge 1\}$, сходящаяся к некоторому числу $x(r_2)$: $x_{1k(j)}(r_2) \to x(r_2)$, $j \to \infty$. Обозначим $x_{1k(j)} =: x_{2j}$, $j \ge 1$. Для последовательности $\{x_{2n} \mid n \ge 1\}$ имеем: $x_{2n}(r_1) \to x(r_1)$, $x_{2n}(r_2) \to x(r_2)$, $n \to \infty$.

Продолжая аналогично, построим для каждого $m \in N$ последовательность $\{x_{mn} \mid n \ge 1\}$, которая является подпоследовательностью исходной, и для которой $\forall\, j$, $1 \le j \le m$: $x_{mn}(r_j) \to x(r_j) \in R$, $n \to \infty$.

Последовательность $\{x_{nn} \mid n \ge 1\}$ является подпоследовательностью исходной, причём $x_{nn} \in \{x_{nk} \mid k \ge 1\}$, $n \ge 1$. Поэтому $\forall\, j \ge 1$: $x_{nn}(r_j) \to x(r_j) \in R$, $n \to \infty$. Действительно, для j заданного $x_{jn}(r_j) \to x(r_j)$, $n \to \infty$, и, следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ только для конечного числа номеров $|x_{jn}(r_j) - x(r_j)| \ge \varepsilon$. Все последовательности $\{x_{mn} \mid n \ge 1\}$, $m > j$; $\{x_{nn} \mid n \ge j\}$ по построению есть части последовательности $\{x_{jn} \mid n \ge 1\}$. Поэтому неравенство $|x_{nn}(r_j) - x(r_j)| \ge \varepsilon$ может выполняться только для конечного числа номеров n.

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ задано, а $\delta > 0$ — соответствующее число из определения равномерной непрерывности F. Пусть для числа δ набор $r_{k(1)}, r_{k(2)}, \ldots, r_{k(s)}$ есть δ-сеть для $[a,b]$ из рациональных чисел. Для $t \in [a,b]$ обозначим через $r(t)$ элемент этой сети такой, что $|t-r(t)| < \delta$. Тогда $\forall\, t \in [a,b]\ \forall\, \{m,n\} \subset \boldsymbol{N}: \ |x_{mm}(t)-x_{nn}(t)| \le |x_{mm}(t)-x_{mm}(r(t))| + |x_{mm}(r(t)) - x_{nn}(r(t))| + |x_{nn}(r(t)) - x_{nn}(t)| < 2\varepsilon + \sum\limits_{j=1}^{s} |x_{mm}(r_{k(j)}) - x_{nn}(r_{k(j)}))|$. Таким образом, последовательность $\{x_{nn} \ |n \ge 1\}$ удовлетворяет условию критерия Коши равномерной сходимости и, следовательно, сходится к непрерывной на $[a,b]$ функции, лежащей в F силу его замкнутости. ⌋

Упражнение 79. Доказать, что условие 1) теоремы можно заменить следующим, более простым $\exists\, L \in \boldsymbol{R} \quad \forall\, x \in F: \quad |x(a)| \le L$.

10.4 Свойства непрерывных функций на компактах

10.4.1 Основные теоремы

Теорема 29. *Пусть (X,d_1) — компактное метрическое пространство, (Y,d_2) — метрическое пространство. Пусть $f \in C(X,Y)$.*

Тогда множество $f(X)$ компактно в (Y,d_2).

⌈ Пусть $O = \{O_\alpha\}$ — открытое покрытие $f(X)$ в (Y,d_2). Согласно теореме 20 множество $f^{-1}(O_\alpha)$ открыто при каждом α. Семейство множеств $\{f^{-1}(O_\alpha)\}$ есть открытое покрытие компактного множества X и существует конечное подпокрытие $\{f^{-1}(O_{\alpha(1)}), f^{-1}(O_{\alpha(2)}), \ldots, f^{-1}(O_{\alpha(n)})\}$.

Поэтому имеем $X \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(O_{\alpha(k)}) \Longrightarrow f(X) \subset f\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{n} f^{-1}(O_{\alpha(k)})\Big) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} f(f^{-1}(O_{\alpha(k)})) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} O_{\alpha(k)}$. ⌋

Замечание. Пусть (X,d_1) и (Y,d_2) метрические пространства, F — компактное множество в (X,d_1) и $f \in C(F,Y)$. Тогда $f(F)$ компактно.

Рассмотрим теперь в качестве пространства (Y,d_2) числовую прямую $\boldsymbol{R}$ с обычным расстоянием.

Теорема 30. *Пусть (X,d_1) — метрическое пространство, F — компактное множество в X и $f \in C(F)$.*

Тогда: a) $\exists\, L \in \boldsymbol{R} \quad \forall\, x \in F: \ |f(x)| \le L$; b) $\exists\, \{x_*, x^*\} \subset F$: $f(x_*) = \inf\limits_{x \in F} f(x), \quad f(x^*) = \sup\limits_{x \in F} f(x)$.

б) inf. $\exists x_* \in F \quad \alpha \le f(x_*) \le \alpha - \frac{1}{n} \Rightarrow f(x_*) \to \alpha$ / $\exists x_{n_k} \to x_*$ (Больцано) $f(x_{n_k}) \to f(x_*) \Rightarrow f(x_*)$

⌈ Доказательство следует из компактности множества $f(F)$ и того, что компактное множество ограничено и замкнуто. ⌋

Теорема 31. *Пусть (X, d_1), (Y, d_2) — метрические пространства и выполнены следующие условия: 1) X — компактное множество в (X, d_1); 2) f биекция между X и Y; 3) $f \in C(X, Y)$. Тогда обратная функция $f^{-1} \in C(Y, X)$.*

⌈ Обратная функция $f^{-1} : Y \to X$ существует в силу условия 2). Пусть A — открытое множество в (X, d_1). Прообразом множества A при отображении f^{-1} является множество $(f^{-1})^{-1}(A) = \{y \mid \exists\, x \in A : f^{-1}(y) = x\} = \{y \mid y = f(x),\ x \in A\} = f(A)$.

Замкнутое подмножество $X \setminus A$ компактного по условию 1) множества X является компактным. Поскольку $f \in C(X, Y)$ по условию 3), то $f(X \setminus A)$ компактно в (Y, d_2). Следовательно, $f(X \setminus A) \overset{(2)}{=} f(X) \setminus f(A) = Y \setminus f(A)$ замкнуто, а $f(A)$ открыто в (Y, d_2). т. на • характ. непр. ⌋

Теорема 32. *(**Теорема Кантора**). Пусть (X, d_1), (Y, d_2) — метрические пространства и выполнены следующие условия: 1) X — компактное множество в (X, d_1); 2) $f \in C(X, Y)$. Тогда функция f равномерно непрерывна на X.*

⌈ Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Согласно определению непрерывности в точке, имеем $\forall\, x \in X \quad \exists\, \delta = \delta(x) > 0 \quad \forall\, z \in B(x, \delta(x)) : \quad d_1(f(z), f(x)) < \varepsilon/2$. Семейство шаров $\{B(x, \delta(x)/2) \mid x \in X\}$ является открытым покрытием компактного по условию 1) множества X. Поэтому существует конечное подпокрытие $B(x_1, \delta(x_1)/2), B(x_2, \delta(x_2)/2), \ldots, B(x_n, \delta(x_n)/2)$ такое, что $X \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \delta(x_k)/2)$. Положим $\delta := \min(\delta(x_k)/2,\ 1 \le k \le n)$. Пусть теперь $\{x', x''\} \subset X$, $d_1(x', x'') < \delta$. Для точки $x' \quad \exists\, k : B(x_k, \delta(x_k)/2) \ni x' \iff d_1(x', x_k) < \delta(x_k)/2$. Тогда $x'' \in B(x_k, \delta(x_k))$. Следовательно, $d_2(f(x'), f(x'')) \le d_2(f(x'), f(x_k)) + d_2(f(x''), f(x_k) < \varepsilon$. ⌋

Определение 1. *Пусть (X, d) — метрическое пространство и $S \subset X$. Множество S называется **связным множеством** в (X, d), если не существует открытых множеств A и B, удовлетворяющих условиям:*

$$1)\ A \cap B = \varnothing, \qquad 2)\ A \cap S \ne \varnothing, \qquad 3)\ B \cap S \ne \varnothing, \qquad 4)\ S \subset (A \cup B).$$

Пример. В пространстве $(\boldsymbol{R}, \rho)$ множества (a, b), $(a, +\infty)$ и $\boldsymbol{R}$ связны, а множество $[0, 1] \cup [2, 3]$ несвязно.

⌈ Докажем, что интервал (a, b), $\{a, b\} \subset \boldsymbol{R}$, есть связное множество. Предположим, что множество (a, b) несвязно. Достаточно рассмотреть случай, когда $a \in A$, $b \in B$, где A и B множества из определения 1. Тогда непустое множество $A \cap (a, b)$ ограничено сверху числом b и потому имеет точную верхнюю грань $c := \sup(A \cap (a, b))$. Поскольку

$A \cap (a, b)$ открыто, то $c \notin (A \cap (a, b))$, в частности, $c > a$. Аналогично, поскольку $B \cap (a, b)$ открыто, то $c \notin (B \cap (a, b))$, и $c < b$. Поэтому точка $c \in (a, b)$, но $c \notin ((A \cap (a, b)) \cup (B \cap (a, b))) = (a, b)$. ⌋

Упражнение 80. Описать связные множества пространства $(\boldsymbol{R}, \rho)$.

Упражнение 81. Пусть S_1 и S_2 — связные множества, причём $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$. Доказать, что $S_1 \cup S_2$ также связно.

Теорема 33. *Пусть (X, d_1), (Y, d_2) — метрические пространства и выполнены следующие условия: 1) X — связное множество; 2) $f \in C(X, Y)$.*

Тогда множество $f(X)$ связно в (Y, d_2).

⌈ Предположим, что $f(X)$ несвязно. Тогда существуют открытые в (X, d_1) множества A и B такие, что $A \cap B = \varnothing$, $f(X) \cap A \neq \varnothing$, $f(X) \cap B \neq \varnothing$, $f(X) \subset (A \cup B)$. Переходя к прообразам, получим $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \varnothing$, $X \cap f^{-1}(A) \neq \varnothing$, $X \cap f^{-1}(B) \neq \varnothing$, $X \subset (f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B))$. Кроме того, множества $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ открыты, следовательно, X несвязно, что противоречит условию теоремы. ⌋

Упражнение 82. Пусть $Y = \boldsymbol{R}$, ρ — обычное расстояние. Доказать, что тогда теорема 33 утверждает, что $f(X)$ — интервал (возможно бесконечный).

Упражнение 83. Пусть $f \in C(\boldsymbol{R}^m)$ и $\exists\, \alpha \in \boldsymbol{R}$: $\{x \in \boldsymbol{R}^m \mid f(x) \leq \alpha\} \neq \varnothing$ и ограничено. Тогда $\exists\, x_* \in \boldsymbol{R}^m$: $\min\limits_{\boldsymbol{R}^m} f = f(x_*)$.

Упражнение 84*. Пусть (X, d) — полное сепарабельное метрическое пространство и $f \in C(X)$. Функция f называется ***компактной***, если для каждого $\alpha \in \boldsymbol{R}$ множество $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ компактно. Построить примеры компактных функций.

10.5 Принцип сжимающих отображений

10.5.1 Определения

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $f : X \to X$ — отображение этого пространства в себя.

Определение 1. Точка $x \in X$ называется ***неподвижной точкой*** *отображения f, если $f(x) = x$.*

Определение 2. Отображение называется ***сжимающим (отображением сжатия)****, если*

$$\exists\, \lambda,\ 0 \leq \lambda < 1 \quad \forall x \in X \quad \forall y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Упражнение 85. Доказать, что в пространстве (R^2, ρ) преобразование $\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 3)$, $(x_1, x_2) \in R^2$ не имеет неподвижных точек и не является сжимающим.

Упражнение 86. Доказать, что в пространстве (R^2, ρ) преобразование $\vec{f}(x_1, x_2) = (x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi)$, $(x_1, x_2) \in R^2$, где $\varphi \in R$ — фиксировано, имеет неподвижную точку, но не является сжимающим.

Упражнение 87. Имеет ли в пространстве $(C([a,b]), \rho)$ преобразование: a) $f(x) = -x$; b) $f(x) = |x|$; c) $f(x)(t) = \max\limits_{[a,t]} x(u)$ неподвижные точки. Является ли это преобразование преобразованием сжатия?

Упражнение 88. Рассмотрим в пространстве $(C([a,b]), \rho)$ преобразование $f(x)(t) = \int\limits_a^t x(u)\,du$, $a \le t \le b$; $x \in C([a,b])$. Определить неподвижные точки f. Является ли это преобразование преобразованием сжатия?

Упражнение 89. Доказать, что сжимающее отображение пространства X в себя равномерно непрерывно на X.

10.5.2 Теорема Банаха

Теорема 34. *(Теорема Банаха). Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и $f : X \to X$ — отображение сжатия. Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку.*

⌈ Пусть x_0 — произвольный элемент из X. Рассмотрим последовательность $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_n = f(x_{n-1})$, ... Элемент x_n есть результат n-кратного применения преобразования f к элементу x_0 : $x_n = f^n(x_0)$. Докажем, что последовательность $\{x_n \mid n \ge 1\}$ фундаментальна. Для этого сначала отметим неравенство $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \le \lambda d(x_n, x_{n-1}) \le \ldots \le \lambda^n d(x_1, x_0), n \ge 1$. Учитывая это неравенство, для любых m, n, $m \le n$, получим $d(x_m, x_n) \le d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \ldots + d(x_{n-2}, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n) \le \lambda^m d(x_1, x_0) + \lambda^{m+1} d(x_1, x_0) + \ldots + \lambda^{n-1} d(x_1, x_0) \le \dfrac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_1, x_0)$. Таким образом,

$$\forall \{m, n\} \subset N, m \le n : \ d(x_m, x_n) \le \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_1, x_0). \qquad (1)$$

Из неравенства (1) следует фундаментальность последовательности $\{x_n \mid n \ge 1\}$. Поскольку (X, d) полно, то существует элемент $x^* \in X$

такой, что $x_n \to x^*$, $n \to \infty$ в (X, d). Устремив в неравенстве (1) $n \to \infty$, получим следующее неравенство

$$d(x^*, x_m) \le \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_1, x_0). \tag{2}$$

Элемент x^* есть неподвижная точка f, так как в силу непрерывности f из равенства $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \ge 1$, при $n \to \infty$ получим $x^* = f(x^*)$.

Элемент x^* есть единственная неподвижная точка f. Действительно, если для некоторого $z \in X \ : \ f(z) = z$, то $d(x^*, z) = d(f(x^*), f(z)) \le$ $\le \lambda d(x^*, z)$. Таким образом, $x^* = z$. ⌋

Замечание. Следует обратить внимание на конструктивный характер доказательства теоремы Банаха. Элементы последовательности $\{x_n \mid n \ge 1\}$ являются приближениями к неподвижной точке x^*, причём точность приближения оценивается неравенством (2).

Следствие 2. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и $f: \ X \to X$. Предположим, что для некоторого $m \in N$ отображение f^m есть отображение сжатия.

Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку.

⌈ Отображение f может иметь только одну неподвижную точку, поскольку неподвижная точка для f есть неподвижная точка и для f^m. Пусть x^* — неподвижная точка $f^m \ : \ f^m(x^*) = x^*$. Тогда $d(x^*, f(x^*)) =$ $= d(f^m(x^*), f^{m+1}(x^*)) \le \lambda d(x^*, f(x^*))$. Отсюда $x^* = f(x^*)$. ⌋

Упражнение 90. Пусть $X = [a, b]$, $\rho(x, y) = |x - y|$; (X, ρ) — полное метрическое пространство. Пусть $f: \ [a, b] \to [a, b]$ — дифференцируемая на $[a, b]$ функция. Доказать, что f есть преобразование сжатия тогда и только тогда, когда $\exists\, \lambda < 1: \ \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)| \le \lambda$.

Упражнение 91. Доказать, что требование теоремы Банаха $\lambda < 1$ существенно. В пространстве $(\boldsymbol{R}, \rho)$ рассмотреть преобразование $f(x)$ $= \pi/2 - \operatorname{arctg} x + x, x \in \boldsymbol{R}$, для которого $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ при $x \ne y$.

Упражнение 92. Проверить, что f^2 для преобразования f упр. 88 есть преобразование сжатия при $b - a < 1$.

10.5.3 Применение принципа сжимающих отображений

I. Решение уравнений вида $f(x) = x$.

*Определение 3. Функция $f: \ [a, b] \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет на $[a, b]$ условию **Липшица порядка** $\alpha > 0$ с постоянной L, если $\forall\, \{x, y\} \subset [a, b]: \ \ |f(x) - f(y)| \le L|x - y|^\alpha$. Класс функций,* *удовлетворяющих на $[a,b]$ условию Липшица порядка α, обозначается символом $Lip_\alpha([a,b])$.*

Упражнение 93. Описать класс $Lip_\alpha([a,b])$, $\alpha > 1$.

Упражнение 94. Показать, что $C^1([a,b]) \subset Lip_\alpha([a,b])$, и что обратное включение неверно.

Упражнение 95. Доказать, что из включения $f \in Lip_\alpha([a,b])$ следует равномерная непрерывность f на $[a,b]$.

Теорема 35. *Пусть $f\ [a,b] \to [a,b]$ и $f \in Lip_\alpha([a,b])$ с постоянной $L < 1$. Тогда $\exists!\, x^* \in [a,b]:\ f(x^*) = x^*$.*

⌈ Применить теорему Банаха к пространству $X = [a,b]$ с обычным расстоянием и отображению f. Заметим, что утверждение этой теоремы может быть получено элементарно, однако, теорема Банаха фактически даёт больше: начиная с любой точки $x_0 \in [a,b]$, мы получаем последовательность $\{x_n \mid n \geq 1\}$, сходящуюся к x^*, причём справедливо неравенство $|x - x^*| \leq \dfrac{L^n}{1-L}|f(x_0) - x_0|$, $n \geq 1$. ⌋

II. Решение уравнений вида $F(x) = 0$.

Теорема 36. *Пусть $F:\ [a,b] \to \boldsymbol{R}$, причём*

$F(a) < 0 < F(b)$; $\exists\, m\ \exists\, M,\ 0 < m \leq M\ \ \forall\, x \in [a,b]:\ m \leq F'(x) \leq M$.

Тогда $\exists!\, x^* \in [a,b]\ :\ F(x^*) = 0$.

⌈ Применить теорему Банаха к пространству $([a,b],\rho)$ и преобразованию $f(x) = x - \lambda F(x)$, $x \in [a,b]$, с числом λ, $0 < \lambda < M^{-1}$. См. также замечание к п. I. ⌋

III. Решение системы линейных уравнений.

Пусть $A = (a_{jk})_{j,k=1}^m$ — матица размера $m \times m$ с действительными элементами такими, что $\lambda^2 := \sum\limits_{j,k=1}^{m} (a_{jk} + \delta_{jk})^2 < 1$, $\delta_{jk} := 0$, $j \neq k$, $\delta_{jk} := 1$, $j = k$. Удобно использовать векторные обозначения. Пусть $\vec{x}$ — вектор-столбец с компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$.

Теорема 37. *Для любого $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^m$ существует единственное решение $\vec{x}^* \in \boldsymbol{R}^m$ системы $A\vec{x} = \vec{a}$.*

⌈ В полном метрическом пространстве $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ отображение, определяемое формулой $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{x} - \vec{a}$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$, есть преобразование сжатия, так как для любых $\vec{x}$ и $\vec{y}$ с компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ соответственно имеем неравенство

$$\rho^2(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{y})) = \sum_{j=1}^{m} (f_j(\vec{x}) - f_j(\vec{y}))^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{m} a_{jk}x_k + x_j - a_j - \sum_{k=1}^{m} a_{jk}y_k - y_j + a_j \Big)^2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{m} (a_{jk} + \delta_{jk})(x_k - y_k) \Big)^2 \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} (a_{jk} + \delta_{jk})^2 \sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2 = \lambda^2 \rho^2(\vec{x}, \vec{y}).$$

Согласно теореме Банаха, существует единственная неподвижная точка $\vec{x}^*$ преобразования $\vec{f}$: $\vec{f}(x^*) = \vec{x}^*$, т. е. $A\vec{x}^* = \vec{a}$. Причём для произвольной точки $\vec{x}^{(0)} \in R^m$ имеем $\vec{x}^{(n+1)} = A\vec{x}^{(n)} + \vec{x}^{(n)} - \vec{a}$, $n \ge 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}^{(n)} = \vec{x}^*$ в (R^m, ρ). Кроме того, для любого j, $1 \le j \le m$, справедливо неравенство

$$|x_j^* - x_j^{(n)}| \le \rho(\vec{x}^*, \vec{x}^{(n)}) \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \rho(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(0)}), \quad n \ge 1. \qquad \rfloor$$

IV. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

Теорема 38. *Пусть функция $F: [a,b] \times R \to R$ удовлетворяет условиям: 1) $F \in C([a,b] \times R)$; 2) $\exists L \in R\ \forall x \in [a,b]\ \forall \{y', y''\}: |F(x,y') - F(x,y'')| \le L|y' - y''|$. Тогда для любого начального значения $y_0 \in R$ задача Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{dy(x)}{dx} = F(x, y(x)), \ a \le x \le b; \\ y(a) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

имеет единственное решение.

(проверить!)

$\lceil$ Заметим, что решение задачи (1) равносильно решению ***интегрального уравнения*** $y(x) = y_0 + \int\limits_a^x F(u, y(u))\,du$, $a \le x \le b$, относительно функции $y \in C([a,b])$. Для применения теорем Банаха в пространстве $C([a,b])$ введём метрику $d(f,g) = \max\limits_{a \le x \le b} (e^{-k(x-a)}|f(x) - g(x)|)$, $\{f, g\} \subset C([a,b])$, где $k > 0$ — фиксированное число, которое будет выбрано позже. Обратим внимание на неравенства $\mu\rho(f,g) \le d(f,g) \le \rho(f,g)$, $\mu := e^{-k(b-a)}$, из которых следует полнота $(C([a,b]), d)$ при любом $k > 0$.

В пространстве $(C([a,b]), d)$ рассмотрим следующее преобразование $A: C([a,b]) \to C([a,b])$, задаваемое формулой $(Af)(x) = y_0 + \int\limits_a^x F(u, f(u))\,du$, $a \le x \le b$; $f \in C([a,b])$, есть преобразование сжатия для соответствующим образом выбранного значения k. Действительно, поскольку для любого $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $|(Af)(x) - (Ag)(x)| = \left| \int\limits_a^x F(u, f(u))\,du - \int\limits_a^x F(u, g(u))\,du \right| \le L \int\limits_a^x |f(u) - g(u)|\,du$, $\{f, g\} \subset C([a,b])$, то умножим

$\le L\cdot\max_u|e^{-k(u-a)}\cdot|f(u)-g(u)||\cdot\int_a^x e^{-k(x-u)}\,du$

$$e^{-k(x-a)}|(Af)(x)-(Ag)(x)| \le L\int_a^x e^{-k(x-u)}e^{-k(u-a)}|f(u)-g(u)|\,du \le$$

$$\le Ld(f,g)\frac{1}{k}|e^{-k(x-a)}-1| \le \frac{L}{k}d(f,g).$$

Отсюда следует, что $d(Af,Ag) \le \lambda d(f,g)$, $\{f,g\}\subset C([a,b])$, где $\lambda = L/k$. Если k таково, что $\lambda<1$, то A есть преобразование сжатия. Применяя теорему Банаха получаем заключение теоремы.

Заметим также, что теорема Банаха позволяет в сложной ситуации (когда отсутствуют алгоритмические способы определения точного решения задачи (1)) просто строить приближения к неизвестному решению с произвольной точностью. ⌋

V. Существование решения уравнения Фредгольма второго рода.

Теорема 39. *Пусть функция $K:\ [a,b]\times[a,b]\to \boldsymbol{R}$, $K\in C([a,b]\times[a,b])$ и число $\lambda\in\boldsymbol{R}$ таково, что $|\lambda|<(M(b-a))^{-1}$ для $M:=\max(|K(x,y)|\mid(x,y)\in[a,b]^2)$. Тогда для любой $g\in C([a,b])$ существует единственная функция $f\in C([a,b])$ такая, что справедливо равенство*

$$f(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy+g(x),\quad x\in[a,b]. \tag{2}$$

Замечание. Для заданных функций K и g уравнение (2) относительно функции f называется ***интегральным уравнением Фредгольма второго рода.***

⌈ К полному метрическому пространству $(C([a,b]),\rho)$ и преобразованию сжатия A, задаваемому формулой $A(f)(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)\,dy+ +g(x)$, $x\in[a,b]$; $f\in C([a,b])$, применить теорему Банаха. ⌋

Упражнение 96. Пусть (X,d) — компактное метрическое пространство, а преобразование $f:\ X\to X$ удовлетворяет условию

$$\forall\{x,y\}\subset X,\ x\ne y:\ d(f(x),f(y))<d(x,y). \tag{3}$$

Доказать, что f имеет единственную неподвижную точку .

Упражнение 97. Пусть (X,d) — метрическое пространство, а преобразование $f:\ X\to X$ удовлетворяет условию (3) и таково, что $f(X)$ компактно в (X,d). Доказать, что f имеет единственную неподвижную точку.

Упражнение 98*. Пусть (X,d) — полное метрическое пространство, функция $f\in C(X,X)$, а функция $p:\ X\to[0+\infty)$ удовлетворяет условию $d(x, f(x)) \le p(x) - p(f(x))$, $x \in X$. Доказать, что для любой точки $x_0 \in X$ последовательность итераций $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \ge 0$ сходится к неподвижной точке f.

Упражнение 99*. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, а преобразование $f : X \to X$ удовлетворяет условию $\forall \{x, y\} \subset X : d(f(x), f(y)) \ge d(x, y)$. Доказать, что $f(X) = X$ и что f — изометрия.

VI. Теорема о существовании неявной функции

Теорема 40. *Пусть функция* $F : [a, b] \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *удовлетворяет следующим условиям: 1)* $F \in C([a, b] \times \boldsymbol{R})$; *2)* $\exists m\ \exists M, 0 < m \le M\ \forall x \in [a, b]\ \forall \{y_1, y_2\} \subset \boldsymbol{R}, y_1 \ne y_2$: $m \le \dfrac{F(x, y_1) - F(x, y_2)}{y_1 - y_2} \le M$.

Тогда $\exists!\, f \in C([a, b]) : \quad F(x, f(x)) = 0, \quad x \in [a, b]$.

⌈ В полном метрическом пространстве $(C([a, b]), \rho)$ следующее преобразование $(Ag)(x) = g(x) - \dfrac{2}{m + M} F(x, g(x))$, $x \in [a, b]$, $g \in C([a, b])$, есть преобразование сжатия. ⌋

$\lambda = \frac{M-m}{M+m} < 1$

10.5.4 Теорема Стоуна-Вейерштрасса

Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство. Введём в пространстве $C(X)$ непрерывных действительных функций расстояние

$$\rho(f, g) := \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|, \quad \{f, g\} \subset C(X).$$

Пространство $(C(X), \rho)$ — полное метрическое пространство. Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству полноты пространства $(C([a, b]), \rho)$.

Определение 4. Пусть $A \subset C(X)$. *Множество* A *называется* ***алгеброй***, *если* $\forall \{f, g\} \subset A\ \forall \alpha \in \boldsymbol{R} : (\alpha f) \in A$, $(f + g) \in A$, $(fg) \in A$.

Определение 5. Пусть $A \subset C(X)$, A — *алгебра. Алгебра* A ***отделяет точки*** *множества* X, *если выполняется условие* $\forall \{x, y\} \subset X, x \ne y\ \exists f \in A : f(x) \ne f(y)$.

Теорема 41. ***(Стоуна-Вейерштрасса)****. Пусть* (X, d) — *компактное метрическое пространство,* $(C(X), \rho)$ — *пространство непрерывных действительных функций на* X *с равномерной метрикой,* $A \subset C(X)$. *Предположим, что: 1)* A — *алгебра; 2)* A *отделяет точки множества* X;

3) функция f, определяемая равенством $f(x) = 1$, $x \in X$, принадлежит A.

Тогда множество A всюду плотно в $(C(X), \rho)$.

⌈ Докажем, что замыкание $\overline{A}$ равно $C(X)$. В силу теоремы Вейерштрасса для функции $g(t) = \sqrt{t}$, $t \in [0,1]$ имеем $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P$ — многочлен от t $\forall t \in [0,1]$: $|\sqrt{t} - P(t)| < \varepsilon$. Поэтому для функции $f \in A$ со значением $\|f\| := \max\limits_{x \in X} |f(x)| > 0$ получим

$$\forall x \in X \ : \quad \left|\frac{|f(x)|}{\|f\|} - P\left(\frac{f^2(x)}{\|f\|^2}\right)\right| = \left|\sqrt{\frac{f^2(x)}{\|f\|^2}} - P\left(\frac{f^2(x)}{\|f\|^2}\right)\right| < \varepsilon.$$

и, следовательно, $|f| \in \overline{A}$.

Поскольку для $\{a, b\} \subset \boldsymbol{R}$ справедливы очевидные равенства $\min(a, b) = (a + b - |a - b|)/2$, $\max(a, b) = (a + b + |a - b|)/2$, то для любых $\{f, g\} \subset A$ на основании доказанного заключаем, что функции $h(x) = \min(f(x), g(x))$; $H(x) = \max(f(x), g(x))$, $x \in X$, принадлежат $\overline{A}$.

Если $\{x, y\} \subset X$ и $x \neq y$, а $\{\alpha, \beta\} \subset \boldsymbol{R}$, то $\exists\, f \in A : f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$. Действительно, по условию $\exists\, g \in A : g(x) \neq g(y)$. Можно положить

$$f(z) := \alpha + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}\,(g(z) - g(x)), \quad z \in X.$$

Пусть теперь $f \in C(X)$ и $\varepsilon > 0$ заданы. Зафиксируем $x \in X$ и для $z \in X$ положим $\alpha = f(x)$, $\beta = f(z)$. Согласно доказанному, $\exists\, h_z \in A$: $h_z(x) = \alpha = f(x)$, $h_z(z) = \beta = f(z)$, а поскольку $(h_z - f) \in C(X)$, то $\exists\, r(z) > 0\ \forall y \in B(z, r(z))$: $h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon$. Семейство $\{B(z, r(z)) \mid z \in X\}$ есть открытое покрытие компакта X и потому содержит конечное подпокрытие $X \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} B(z_k, r(z_k))$. Определим функцию g_x следующим образом $g_x(y) := \min\limits_{1 \leq k \leq n} (h_{z_k}(y))$, $y \in X$. Заметим, что $g_x \in \overline{A}$, $g_x(x) = f(x)$ и что $\forall y \in X$: $g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon$.

Поскольку $(g_x - f) \in C(X)$, то $\exists\, s(x) > 0$ $\forall y \in B(x, s(x))$: $g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon$. Семейство $\{B(x, s(x)) \mid x \in X\}$ есть открытое покрытие компакта X и потому содержит конечное подпокрытие $\bigcup\limits_{k=1}^{N} B(x_k, s(x_k)) \supset X$. Пусть $h(y) := \max\limits_{1 \leq k \leq N} (g_{x_k}(y))$, $y \in X$. Для функции h имеем $h \in \overline{A}$ и $\forall y \in X$: $f(y) - \varepsilon \leq h(y) \leq f(y) + \varepsilon$. Таким образом, $\overline{A} = C(X)$. ⌋

Рассмотрим теперь наиболее важные приложения теоремы Стоуна-Вейерштрасса.

Примеры. 1. Пусть X — компактное множество в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$, A — множество всех многочленов от m переменных, рассматриваемых на X. Множество A удовлетворяет всем условиям теоремы Стоуна-Вейерišтрасса. Следовательно, непрерывная функция от m переменных на компакте является равномерным на этом компакте пределом последовательности многочленов от m переменных.

2. Пусть $X = [0, 2\pi]$, причём точки 0 и 2π считаются равными. Для $\{x, y\} \subset [0, 2\pi]$ положим $d(x, y) := \min(|x-y|,\ 2\pi - |x-y|)$, (X, d) — компактное метрическое пространство. Тогда справедливо равенство $C(X) = C([0, 2\pi]) \cap \{f \mid f(0) = f(2\pi)\}$. Это множество можно рассматривать как сужение на $[0, 2\pi]$ множества непрерывных на $\boldsymbol{R}$ 2π-периодических функций. Множество

$$A = \{p \mid p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),\ n \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\}, \{a_j, b_k\} \subset \boldsymbol{R}\},$$

так называемых ***тригонометрических многочленов***, удовлетворяет всем условиям теоремы Стоуна-Вейерштрасса. Таким образом, непрерывная на $\boldsymbol{R}$ 2π-периодическая функция есть равномерный на $\boldsymbol{R}$ предел последовательности тригонометрических многочленов. Это утверждение впервые было доказано ***Вейерштрассом*** и обычно называется ***теоремой Вейерштрасса.***

Упражнение 100. Проверить выполнение условий теоремы Стоуна-Вейерштрасса в примерах 1 и 2.

Упражнение 101. Пусть $\{f_n \mid n \geq 1\} \subset C([a, b])$ — последовательность функций, разделяющая точки $[a, b]$. Доказать, что для любой функции $f \in C([a, b])$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists m \in \boldsymbol{N}$ $\exists F \in C(\boldsymbol{R}^m)$ $\forall x \in [a, b]$:

$$|f(x) - F(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))| < \varepsilon.$$

Упражнение 102. Пусть $[a, b] \subset [0, +\infty)$ и A — семейство всех конечных линейных комбинаций функций $f_n(x) = x^{2n}$, $x \in [a, b]$, $n \geq 0$. Применить теорему Стоуна-Вейерштрасса к множеству A в пространстве $(C([a, b]), \rho)$.

Упражнение 103. Две функции $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $x \in [a, b]$, разделяют точки $[a, b]$. Построить алгебру функций, включающую f и g.

10.5.5 Историческая справка

Метрические пространства возникли в результате развития и обобщения на более общие ситуации идей Коши, Вейерштрасса, Гейне и Кантора, предложенных для строгого определения действительных чисел, сначала в частных случаях, а затем и в виде общей теории. Само понятие метрического пространства и ряд других понятий современного анализа (компактность, полнота, сепарабельность, производная Фреше) ввёл в 1906 г. известный французский математик ***Морис Рене***

Фреше (1878 — 1973), который в общей ситуации отметил важность критерия Коши. Значительный вклад в разработку теории метрических пространств внёс *Феликс Хаусдорф* (1868 — 1942), который аналогично Кантору построил пополнение произвольного метрического пространства. Ф. Хаусдорф создал теорию топологических пространств, получил основополагающие результаты в теории множеств, топологии, функциональном анализе, теории чисел, теории непрерывных групп.

Джулио Асколи (1843 — 1896) — итальянский математик. Ввёл понятие равностепенной непрерывности и доказал теорему о компактности множества непрерывных функций. Автор работ по теории функций и тригонометрическим рядам.

Чезаро Арцела (1847 — 1912) — итальянский математик. Автор работ по теории функций, в частности получил критерий непрерывности предела сходящейся на отрезке последовательности непрерывных функций. Одновременно с Асколи получил условия компактности множества непрерывных функций.

Стефан Банах (1892 — 1945) — выдающийся польский математик, один из создателей современного функционального анализа (банахово пространство, банаховы алгебры, банахова решётка). Ряд результатов Банаха стали классическими и входят в учебники.

Рудольф Липшиц (1832 — 1903) — немецкий математик. Его работы посвящены различным разделам анализа. В частности, получил достаточные условия сходимости ряда Фурье, предложил достаточное условие единственности решения дифференциального уравнения.

Эрик Ивар Фредгольм (1866 — 1927) — шведский математик, основоположник теории интегральных уравнений. Он рассматривал интегральные уравнения как пределы систем линейных уравнений.

Теорема Стоуна-Вейерштрасса представляет собой элегантное и глубокое обобщение теоремы Вейерштрасса о равномерном на отрезке приближении непрерывной функции многочленами. Эта теорема была получена американским математиком *Маршаллом Гарвеем Стоуном* (1903 г. р.), автором работ по топологии и функциональному анализу.

Глава 11

Функции нескольких переменных

11.1 Производная по направлению. Частные производные

11.1.1 Определения

В этой главе рассматриваются свойства действительных функций, определённых на подмножествах пространства $\boldsymbol{R}^m$, $m \in \boldsymbol{N}$. Поскольку в дальнейшем будут систематически координаты точек из $\boldsymbol{R}^m$, то мы будем придерживаться следующих обозначений. Элемент-вектор из $\boldsymbol{R}^m$ будем обозначать символом $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_k \in \boldsymbol{R}$, $1 \le k \le m$; $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Таким образом, $\boldsymbol{R}^m = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m),\ x_k \in \boldsymbol{R},\ 1 \le k \le m.\}$ Пространство $\boldsymbol{R}^m$ будем рассматривать как линейное с обычными (покоординатными) операциями сложения, а также умножения на действительные числа На $\boldsymbol{R}^m$ будем рассматривать евклидово расстояние $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum\limits_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2\right)^{1/2}$, $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \boldsymbol{R}^m$, при этом $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ — полное метрическое пространство. Для вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \boldsymbol{R}^m$ число $\|\vec{x}\| := \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_k^2\right)^{1/2}$ называется ***длиной*** или ***нормой*** вектора $\vec{x}$. Отметим следующие, получаемые из определения, утверждения:

1) $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$, $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \boldsymbol{R}^m$;

2) $\forall\, \alpha \in \boldsymbol{R} \quad \forall\, \vec{x} \in \boldsymbol{R}^m \ : \quad \|\alpha\vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$;

3) $\forall\, \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \boldsymbol{R}^m : \|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \iff \rho(\vec{x}, -\vec{y}) \le \rho(\vec{x}, \vec{0}) + \rho(\vec{0}, -\vec{y})$.

Эти утверждения постоянно используются в дальнейшем.

Пусть $A \subset \mathbf{R}^m$ и $f : A \to \mathbf{R}$. Функция f обычно называется ***действительной функцией от m переменных.*** Значение функции f в точке $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in A$ обозначается следующим образом $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Фиксированный вектор $\vec{a} \in \mathbf{R}^m$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, будем называть также ***направлением,*** а множество $\{\vec{x} \mid \vec{x} = \vec{x}^0 + t\vec{a},\ t \in \mathbf{R}\}$ — ***прямой линией,*** проходящей через точку $\vec{x}^0 \in \mathbf{R}^m$ в направлении $\vec{a}$. Заметим, что $\rho(\vec{x}^0 + t\vec{a}, \vec{x}^0) = |t| \cdot ||\vec{a}||$.

Упражнение 1. В пространстве $\mathbf{R}^2$ изобразить прямую, проходящую через точку $\vec{x}^0 = (2, 1)$ в направлении $\vec{a} = (1, 3)$.

Определение 1. Пусть $f : A \to \mathbf{R}$, $\vec{x}^0$ — внутренняя точка множества A и $\vec{a}$ — направление. ***Производной функции в точке $\vec{x}^0$ по направлению $\vec{a}$*** *называется предел*

$$f'_{\vec{a}}(\vec{x}^0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + t\vec{a}) - f(\vec{x}^0)}{t},$$

если он существует. Удобно положить $f'_{\vec{0}} := 0$.

Определение 2. Пусть A — открытое множество в $\mathbf{R}^m$. Если для любого $\vec{x} \in A$ существует $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$, то говорят что производная $f'_{\vec{a}}$ по направлению $\vec{a}$ определена на множестве A, $f'_{\vec{a}} : A \to \mathbf{R}$.

Далее предполагаем, что A — открытое множество.

Упражнение 2. Для функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, точки $(x_1^0, x_2^0) = (2, 1)$ и направления $\vec{a} = (1, 1)$ вычислить $f'_{\vec{a}}(x_1^0, x_2^0)$.

Упражнение 3. Пусть $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1^2 - x_2^2|}$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ и $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$. Определить те направления $\vec{a}$, для которых существует $f'_{\vec{a}}(0, 0)$ и вычислить её значение.

Замечание. Предположим, что выполнены условия определения 2. Поскольку $\vec{x}^0$ — внутренняя точка множества A, то существует число $\delta > 0$ такое, что $\forall \tau, |\tau| < \delta :\ (\vec{x}^0 + \tau\vec{a}) \in A$. Определим функцию $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbf{R}$ следующим образом

$$\varphi(\tau) = f(\vec{x}^0 + \tau\vec{a}) = f(x_1^0 + \tau a_1, x_2^0 + \tau a_2, \ldots, x_m^0 + \tau a_m),\ \tau \in (-\delta, \delta),$$

где $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Для $\tau \in (-\delta, \delta)$ имеем

$$\varphi'(\tau) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + (\tau + t)\vec{a}) - f(\vec{x}^0 + \tau\vec{a})}{t} = f'_{\vec{a}}(\vec{x}^0 + \tau\vec{a}).$$

Таким образом,

$$\varphi'(\tau) = f'_{\vec{a}}(\vec{x}^0 + \tau\vec{a}), \tag{1}$$

в частности $\varphi'(0) = f'_{\vec a}(\vec x^0)$. Формула (1) часто используется.

11.1.2 Свойства производных по направлению. Частные производные.

Теорема 1. *Пусть $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$, $\vec x \in A$, $\vec a$ — направление. Предположим, что существуют производные $f'_{\vec a}(\vec x)$ и $g'_{\vec a}(\vec x)$. Тогда существуют следующие производные по направлению $\vec a$ и справедливы равенства:*

1) $\forall c \in \mathbb{R}$: $(cf)'_{\vec a}(\vec x) = cf'_{\vec a}(\vec x)$; 2) $(f+g)'_{\vec a}(\vec x) = f'_{\vec a}(\vec x) + g'_{\vec a}(\vec x)$;

3) $(fg)'_{\vec a}(\vec x) = f'_{\vec a}(\vec x)g(\vec x) + f(\vec x)g'_{\vec a}(\vec x)$; 4) если дополнительно $g(\vec x) \neq 0$, то $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_{\vec a}(\vec x) = \dfrac{f'_{\vec a}(\vec x)g(\vec x) - f(\vec x)g'_{\vec a}(\vec x)}{g^2(\vec x)}$.

⌈ Перейти к функции φ, введенной в замечании, и использовать свойства производный действительных функций. ⌋

Теорема 2. *(О среднем значении). Предположим, что для некоторых $t > 0$, точки $\vec x$ и направления $\vec a$:*

$\forall \tau, 0 \le \tau \le t$: $(\vec x + \tau\vec a) \in A$ и существует $f'_{\vec a}(\vec x + \tau\vec a)$.

Тогда $\exists\, \theta \in (0,1)$: $f(\vec x + \tau\vec a) - f(\vec x) = f'_{\vec a}(\vec x + \theta\tau\vec a)t$.

⌈ Рассмотрим функцию $\varphi(\tau) = f(\vec x + \tau\vec a)$, $\tau \in [0,t]$, для которой, согласно предположению, существует $\varphi'(\tau) = f'_{\vec a}(\vec x + \tau\vec a)$, $\tau \in [0,t]$. Применим теорему Лагранжа к функции φ на отрезке $[0,t]$. Получим $\exists\, \theta \in (0,1)$: $\varphi(t) - \varphi(0) = \varphi'(\theta t)t$. ⌋

Определение 3. *Частной производной по k-й переменной называется производная $f'_{\vec e_k}$ по направлению $\vec e_k$, где $\vec e_k := (0,0,\ldots,\underbrace{1,}_{k}0,\ldots,0)$, $1 \le k \le m$. Частная производная функции f в точке $\vec x$ по k-й переменной обозначается одним из следующих символов: $\dfrac{\partial f(\vec x)}{\partial x_k}$, $f'_k(\vec x)$, $D_k f(\vec x)$.*

Таким образом, для $\vec x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ имеем

$$f'_k(\vec x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_k+t,\ldots,x_m) - f(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_m)}{t}.$$

Из теоремы 1 получаем следующие правила вычисления частных производных: 1) $\forall c \in \mathbb{R}$: $\dfrac{\partial(cf)}{\partial x_k} = c\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$; 2) $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + \dfrac{\partial g}{\partial x_k}$;

3) $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}g + f\dfrac{\partial g}{\partial x_k}$; 4) если $g(\vec x) \neq 0$, то $\dfrac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_k} = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x_k}g - f\frac{\partial g}{\partial x_k}}{g^2}$, в точке $\vec x$.

11.1.3 Основные теоремы о производных по направлению

Теорема 3. *Пусть точка $\vec{x}$ и направление $\vec{a}$ фиксированы. Если существует $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$, то для любого $c \in \boldsymbol{R}$ существует $f'_{c\vec{a}}(\vec{x})$ и*

$$f'_{c\vec{a}}(\vec{x}) = cf'_{\vec{a}}(\vec{x}). \tag{2}$$

⌈ Доказательство следует из определения. ⌋

Теорема 4. *Пусть $\vec{x} \in A$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два направления. Предположим, что: 1) $\exists \delta > 0$ $\forall \vec{z} \in B(\vec{x}, \delta)$ существует $f'_{\vec{a}}(\vec{z})$; 2) $f'_{\vec{a}}$ непрерывна в точке $\vec{x}$; 3) существует $f'_{\vec{b}}(\vec{x})$.*

Тогда существует производная по направлению $\vec{a} + \vec{b}$ в точке $\vec{x}$ и $f'_{\vec{a}+\vec{b}}(\vec{x}) = f'_{\vec{a}}(\vec{x}) + f'_{\vec{b}}(\vec{x})$.

⌈ Используя условие 1) и теорему 2, имеем $f(\vec{x} + t(\vec{a} + \vec{b})) - f(\vec{x}) = f((\vec{x} + t\vec{b}) + t\vec{a})) - f(\vec{x} + t\vec{b}) + f(\vec{x} + t\vec{b}) - f(\vec{x}) = f'_{\vec{a}}((\vec{x} + t\vec{b}) + \theta t\vec{a})t + f(\vec{x} + t\vec{b}) - f(\vec{x})$, $\theta \in (0, 1)$. Разделив полученное равенство на t, с учётом условий 2) и 3) перейти к пределу при $t \to 0$. ⌋

Следствие 1. *Пусть A — открытое множество, $\vec{x}^0 \in A$, $f : A \to \boldsymbol{R}$ и $\forall k, 1 \le k \le m$, $\forall \vec{x} \in A$ существует производная $D_k f(x)$ и функция $D_k f$ непрерывна в точке $\vec{x}^0$.*

Тогда для любого направления $\vec{a}$ существует $f'_{\vec{a}}(\vec{x}^0)$ и

$$f'_{\vec{a}}(\vec{x}^0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k} a_k, \quad \vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m). \tag{3}$$

Определение 4. *Производной функции f в точке $\vec{x}$ называется вектор — **градиент функции** в точке $\vec{x}$, равный $\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_m}\right)$, обозначаемый одним из символов $f'(\vec{x})$, $\operatorname{grad} f(\vec{x})$, $\nabla f(\vec{x})$.*

Для двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из $\boldsymbol{R}^m$ их скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b})$, в силу неравенства Коши, удовлетворяет неравенству $|(\vec{a}, \vec{b})| \le ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||$.

Если $||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \ne 0$, то величина $\dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}||}$ называется ***косинусом угла*** между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается символом $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$. Формулу (3) можно записать в виде $f'_{\vec{a}}(\vec{x}) = ||\operatorname{grad} f(\vec{x})|| \cdot ||\vec{a}|| \cos(\widehat{\vec{a} \operatorname{grad} f(\vec{x})})$.

Замечание. Пусть точка $\vec{x}$ фиксирована. Рассмотрим различные направления $\vec{a}$ единичной длины, т. е. такие, что $||\vec{a}|| = 1$. Тогда $f'_{\vec{a}}(\vec{x}) = ||\operatorname{grad} f(\vec{x})|| \cos(\widehat{\vec{a} \operatorname{grad} f(\vec{x})})$. Поэтому направление градиента функции f

в точке $\vec{x}$ есть направление, для которого производная по направлению в точке $\vec{x}$ максимальна.

Упражнение 4. Для функций a) $f(\vec{x}) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x_k$; b) $g(\vec{x}) = \sum\limits_{k,j=1}^{m} a_{kj} x_k x_j$; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\{a_k,\ a_{kj}\} \subset \boldsymbol{R}$, найти f', g'.

Упражнение 5. Доказать формулы: 1) $\nabla(cf) = c\nabla f$, $c \in \boldsymbol{R}$;
2) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$; 3) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$;
4) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$, $g \neq 0$,
предполагая существование производных в правых частях равенств.

Упражнение 6. Пусть $f(x_1, x_2) := x_1^2/x_2$, $x_2 \neq 0$, $f(x_1, 0) := 0$; $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$. Найти $f'(0,0)$. Проверить, что функция f не является непрерывной в точке $(0,0)$.

Упражнение 7. Доказать, что: 1) $\vec{a} \to \vec{0} \iff ||\vec{a}|| \to 0$; и
2) $\vec{x} \to \vec{x}^0 \iff \vec{x} - \vec{x}^0 \to \vec{0} \iff ||\vec{x} - \vec{x}^0|| \to 0$.

11.2 Дифференцируемые функции

11.2.1 Понятие дифференцируемости

Определение 1. Функция $L : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ называется линейной, если: 1) $\forall \alpha \in \boldsymbol{R}$ $\forall x \in \boldsymbol{R}^m$: $L(\alpha\vec{x}) = \alpha L(\vec{x})$; 2) $\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \boldsymbol{R}^m$: $L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$.

Легко проверить, что для линейной функции L существуют числа $L_1, L_2, \ldots, L_m$ из $\boldsymbol{R}$ такие, что $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) : L(\vec{x}) = \sum\limits_{k=1}^{m} L_k x_k$.

Упражнение 8. Определить все линейные функции L такие, что $L(\vec{x}) = o(||\vec{x}||)$, $\vec{x} \to \vec{0}$.

Определение 2. Пусть $A \subset \boldsymbol{R}^m$, $\vec{x}$ — внутренняя точка множества A и $f : A \to \boldsymbol{R}$. Функция f называется ***дифференцируемой в точке****, если существует линейная функция $L(\vec{a}) = \sum\limits_{k=1}^{m} L_k a_k$, $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \boldsymbol{R}^m$; $\{L_k\} \subset \boldsymbol{R}$, такая, что*

$$f(\vec{x} + \vec{a}) - f(\vec{x}) - L(\vec{a}) = o(||\vec{a}||), \quad ||\vec{a}|| \to 0, \tag{1}$$

или, что равносильно (1), такая, что выполняется равенство $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \dfrac{f(\vec{x}+\vec{a})-f(\vec{x})-L(\vec{a})}{||\vec{a}||} = 0.$

Функция L *называется* ***дифференциалом (полным дифференциалом)*** *функции* f *в точке* $\vec{x}$ *и обозначается символом* $df(\vec{x}) = df(\vec{x};\vec{a}) = L(\vec{a})$, *или* $df(\vec{x}) = \sum\limits_{k=1}^{m} L_k dx_k$ *с заменой* a_k *на* dx_k, $1 \le k \le m$.

Дифференциал определяется единственным образом, см. упр. 8.

Замечание. Функция L (или определяющие её числа $L_1, L_2, \ldots, L_m$) зависит, вообще говоря, от точки $\vec{x}$.

Теорема 5. *Пусть* f *— дифференцируемая в точке* $\vec{x}$ *функция. Тогда для любого направления* $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *существует* $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$, *в частности существуют* $\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}$, $1 \le k \le m$. *При этом* $\forall\, k,\, 1 \le k \le m:\ L_k = \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}$, *а производная по направлению* $f'_{\vec{a}}(\vec{x}) = L(\vec{a}) = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} a_k$.

⌈ Пусть направление $\vec{a} \ne \vec{0}$ задано. Заметим, что $L(\tau\vec{a}) = \tau L(\vec{a})$ для $\tau \in \boldsymbol{R}$, и что $\tau\vec{a} \to \vec{0}$, если $\tau \to 0$. Поскольку f дифференцируема в точке $\vec{x}$, то $\lim\limits_{\tau\to 0} \dfrac{f(\vec{x}+\tau\vec{a})-f(\vec{x})-\tau L(\vec{a})}{|\tau|\cdot||\vec{a}||} = 0$. Отсюда следует существование $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$ и равенство $f'_{\vec{a}}(\vec{x}) = L(\vec{a})$. Положив $\vec{a} = \vec{e}_k$, получим $L_k = \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}$, $1 \le k \le m$.

$f'_{\vec a}(\vec x) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{tL(\vec a)+o(|t|)}{t} = L(\vec a)$ ⌋

Теорема 6. *Пусть* f *— дифференцируемая в точке* $\vec{x}^0$ *функция. Тогда* f *непрерывна в точке* $\vec{x}^0$.

⌈ Действительно, $f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0) = L(\vec{x}-\vec{x}^0) + o(||\vec{x}-\vec{x}^0||)$, $\vec{x}-\vec{x}^0 \to 0$. Кроме того, согласно неравенству Коши,

$$|L(\vec{x}-\vec{x}^0)| \le ||L||\cdot||L(\vec{x}-\vec{x}^0)||, \text{ где } ||L|| := \left(\sum_{k=1}^{m} L_k^2\right)^{1/2}.$$

$= \sum L_k(\vec x - \vec x^0)$

Поэтому $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}^0)| \le ||L||\cdot||L(\vec{x}-\vec{x}^0)|| + o(||\vec{x}-\vec{x}^0||), \vec{x}-\vec{x}^0 \to 0$. Следовательно, $f(\vec{x}) \to f(\vec{x}^0)$, $\vec{x} \to \vec{x}^0$. ⌋

Упражнение 9. Пусть $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$, $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$. Показать, что $f \in C(\boldsymbol{R}^2)$. Найти $f'_1(0,0)$ и $f'_2(0,0)$. Доказать, что f не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Упражнение 10. Пусть $f(\vec{x}) = \left(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2\right)^{\alpha/2}$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$, $\alpha \geq 0$. При каких α функция f дифференцируема в точке $\vec{0}$?

11.2.2 Достаточное условие дифференцируемости

Пусть $f: A \to R$, и $\vec{x}$ — фиксированная точка из A.

Теорема 7. *Предположим, что: 1)* $\exists \varepsilon > 0\ \forall z \in B(\vec{x}, \varepsilon)$ $\forall k, 1 \leq k \leq m$, *существует* $\dfrac{\partial f(\vec{z})}{\partial x_k}$; *2)* $\forall k, 1 \leq k \leq m,$: $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ *непрерывна в точке* $\vec{x}$.

Тогда функция f дифференцируема в точке $\vec{x}$.

⌈ Для любого $\vec{a} \in R^m$, для которого $||\vec{a}|| < \varepsilon$, имеем

$\dfrac{\partial f(x_1^0 + \theta_1 a_1, \ldots x_m + a_m)}{\partial x_1} = \xi_1$

$$f(\vec{x} + \vec{a}) - f(\vec{x}) = \tag{2}$$
$$= \big(f(x_1 + a_1, x_2 + a_2, \ldots, x_m + a_m) - f(x_1, x_2 + a_2, \ldots, x_m + a_m)\big) +$$
$$+ (f(x_1, x_2 + a_2, \ldots, x_m + a_m) - f(x_1, x_2, x_3 + a_3 \ldots, x_m + a_m)) + \ldots$$
$$\ldots + (f(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m + a_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)),$$
$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m),\ \vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

Применяя к каждой разности в правой части (2) теорему 2 получим

$$f(\vec{x} + \vec{a}) - f(\vec{x}) - L(\vec{a}) = \sum_{k=1}^{m} \delta_k a_k, \quad L(\vec{a}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} a_k,$$

$$\delta_k := \frac{\partial f(\vec{x} + \vec{u}^{(k)})}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}, \quad \vec{x} + \vec{u}^{(k)} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + \theta_k a_k, x_{k+1} + $$
$$+ a_{k+1}, \ldots, x_m + a_m), \theta_k \in (0, 1),\ 1 \leq k \leq m.$$

$\lim\limits_{\vec{a} \to 0} \dfrac{\partial f(\vec{x} + \vec{a})}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}$

Заметим теперь, что $||\vec{u}^{(k)}|| \leq ||\vec{a}||$. Следовательно, $\delta_k \to 0$, $\vec{a} \to \vec{0}$, $1 \leq k \leq m$. Таким образом,

$(\vec{a}_k \to 0 \Rightarrow \vec{u}^{(k)} \to 0)$

$$|f(\vec{x} + \vec{a}) - f(\vec{x}) - L(\vec{a})| \leq \delta ||\vec{a}||, \quad \delta := \left(\sum_{k=1}^{m} \delta_k^2\right)^{1/2} \to 0,\ \vec{a} \to \vec{0}. \qquad \rfloor$$

Следствие 2. *Пусть A — открытое множество, $f: A \to R$. Предположим, что* $\forall k, 1 \leq k \leq m,$: $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in C(A)$.

Тогда: a) f дифференцируема в каждой точке множества A, b) $f \in C(A)$.

Упражнение 11. Пусть функция $f: B(\vec{u}, r) \to R$ удовлетворяет условиям: 1) $\forall \vec{z} \in B(\vec{u}, r)$ f дифференцируема в точке $\vec{z}$; 2) $\exists c \in R$ $\forall \vec{z} \in B(\vec{u}, r)$: $||\nabla f(\vec{z})|| \leq c$. Тогда имеем $\forall \{\vec{z}_1, \vec{z}_2\} \subset B(\vec{u}, r)$: $|f(\vec{z}_1) - f(\vec{z}_2)| \leq c||\vec{z}_1 - \vec{z}_2||$. Доказать это утверждение.

Упражнение 12. Пусть функция $f:\ B(\vec{u},r)\to \boldsymbol{R}$ удовлетворяет условиям: 1) $\forall\,\vec{z}\in B(\vec{u},r)$ f дифференцируема в точке $\vec{z}$; 2) $\forall\,\vec{z}\in B(\vec{u},r)\ \forall\,k,\ 1\le k\le m:\ \dfrac{\partial f(\vec{z})}{\partial x_k}=0$. Доказать, что $\exists\,c\in \boldsymbol{R}\ \ \forall\,\vec{z}\in B(\vec{u},r):\ \ f(\vec{z})=c$.

Определение класса функций $C^1(A)$. Пусть A — открытое множество. Рассматриваются функции вида $f:\ A\to\boldsymbol{R}$.

$$f\in C^1(A)\iff \forall\,k,\ 1\le k\le m,:\ \ \frac{\partial f}{\partial x_k}\in C(A).$$

Заметим, что $C^1(A)\subset C(A)$.

11.2.3 Свойства дифференцируемых функций

Теорема 8. *Пусть $f:\ A\to\boldsymbol{R}$, $g:\ A\to\boldsymbol{R}$ — функции, дифференцируемые в точке $\vec{x}\in A$. Тогда функции cf, $c\in\boldsymbol{R}$; $f+g$; fg и f/g, если дополнительно $g(\vec{x})\ne 0$, дифференцируемы в точке $\vec{x}$.*

⌈ Воспользоваться соотношением (1) для функций f и g. ⌋

Теорема 9. *Пусть функция $f:\ A\to\boldsymbol{R}$ дифференцируема в точке $\vec{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)\in A$. Предположим, что функция $\vec{g}=(g_1,g_2,\dots,g_m)\ :\ (t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\to A$ такова, что $\forall\,k,\ 1\le k\le m,\ :\ g_k(t_0)=x_k^0$, существует $g_k'(t_0)$, $t_0\in\boldsymbol{R}$, $\varepsilon>0$ фиксировано.*

Тогда сложная функция $h(t):=f(g_1(t),\dots,g_m(t))$, $t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ дифференцируема в точке t_0, причём

$$h'(t_0)=\sum_{k=1}^m\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k}\,g_k'(t_0).$$

⌈ Поскольку f дифференцируема в точке $\vec{x}^0$, то

$$f(\vec{x})-f(\vec{x}^0)=\sum_{k=1}^m\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k}(x_k-x_k^0)+o(\|\vec{x}-\vec{x}^0\|,\ \vec{x}=(x_1,\dots,x_m)\to\vec{x}^0.$$

Отсюда, положив $\vec{x}=\vec{g}(t_0+\Delta t)$, $\vec{x}^0=\vec{g}(t_0)$, $\Delta t\ne 0$, и разделив на Δt, имеем такое равенство $\dfrac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}=\dfrac{f(\vec{g}(t_0+\Delta t))-f(\vec{g}(t_0))}{\Delta t}=$

$$=\sum_{k=1}^m\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k}\,\frac{g_k(t_0+\Delta t))-g_k(t_0))}{\Delta t}+\frac{o(\|\vec{x}-\vec{x}^0\|)}{\Delta t},\ \Delta t\to 0.$$ Заметим,

$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k}g_k'(t_0)$

что $\|\vec{x}-\vec{x}^0\|=O(\Delta t)$, $\Delta t\to 0$. ⌋

Производные и дифференциалы, введенные ранее, называются соответственно производными и дифференциалами *первого порядка*.

$\|\vec x-\vec x_0\|=\|\vec g(t_0+\Delta t)-\vec g(t_0)\|=\sqrt{\sum^{m}(g_k(t+\Delta t)-g_k(t_0))^2}$

Упражнение 13. Пусть $A \subset \boldsymbol{R}^m$ — открытое множество, причём $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \in C(A)$, $1 \le k \le m$. Тогда $\dfrac{d}{dx} f(x, x, \ldots, x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x, x, \ldots, x)$.

11.3 Производные и дифференциалы старших порядков

11.3.1 Производные второго порядка

Пусть A — открытое множество в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — фиксированные направления. Предположим, что для любого $\vec{x} \in A$ существует $f'_{\vec{a}}(\vec{x})$. Тогда $f'_{\vec{a}} : A \to \boldsymbol{R}$.

Определение 1. *Производная функции $f'_{\vec{a}}$ по направлению $\vec{b}$ в точке $\vec{x} \in A$, если она существует, называется* ***производной второго порядка*** *функции в точке $\vec{x}$ по направлениям $\vec{a}$, $\vec{b}$.*

<u>Обозначение:</u> $(f'_{\vec{a}})'_{\vec{b}}(\vec{x}) = f''_{\vec{a}\,\vec{b}}(\vec{x})$.

Определение 2. ***Частными производными второго порядка*** *функции f в точке $\vec{x}$ называются производные*

$$f''_{\vec{e}_j\,\vec{e}_k}(\vec{x}), \quad 1 \le j, k \le m.$$

<u>Обозначения:</u> $\dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j\, \partial x_k}$, $f''_{j\,k}(\vec{x})$.

Пример. Пусть $A = \boldsymbol{R}^2, f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \ne (0, 0)$, $f(0,0) = 0$. Производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_1\, \partial x_2}$, $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x_2\, \partial x_1}$ существуют, но различны.

Теорема 10. *Предположим, что $f''_{\vec{a}\,\vec{b}} \in C(A)$, $f''_{\vec{b}\,\vec{a}} \in C(A)$. Тогда $f''_{\vec{a}\,\vec{b}}(\vec{x}) = f''_{\vec{b}\,\vec{a}}(\vec{x})$, $\vec{x} \in A$.*

⌈ Пусть $\vec{x} \in A$ — фиксированная точка. При всех достаточно малых по модулю значений s и t имеем $(\vec{x} + s\vec{a}) \in A$, $(\vec{x} + t\vec{b}) \in A$, $(\vec{x} + s\vec{a} + t\vec{b}) \in A$. Положим $g(\vec{x}) := f(\vec{x} + s\vec{a}) - f(\vec{x})$, $h(\vec{x}) := f(\vec{x} + t\vec{b}) - f(\vec{x})$. Применяя дважды теорему 2, получим $g(\vec{x} + t\vec{b}) - g(\vec{x}) = t g'_{\vec{b}}(\vec{x} + \theta_1 t\vec{b}) =$
$= t(f'_{\vec{b}}(\vec{x} + s\vec{a} + \theta_1 t\vec{b}) - f'_{\vec{b}}(\vec{x} + \theta_1 t\vec{b})) = st f''_{\vec{b}\,\vec{a}}(\vec{x} + \theta_2 s\vec{a} + \theta_1 t\vec{b})$, $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$.

Аналогично, $h(\vec{x} + s\vec{a}) - h(\vec{x}) = st f''_{\vec{a}\,\vec{b}}(\vec{x} + \eta_2 t\vec{b} + \eta_1 s\vec{a})$, $0 < \eta_1, \eta_2 < 1$.
$\leftarrow$ проверить!
Заметим, что $g(\vec{x} + t\vec{b}) - g(\vec{x}) = h(\vec{x} + s\vec{a}) - h(\vec{x})$. Таким образом, $f''_{\vec{b}\,\vec{a}}(\vec{x} + \theta_2 s\vec{a} + \theta_1 t\vec{b}) = f''_{\vec{a}\,\vec{b}}(\vec{x} + \eta_2 t\vec{b} + \eta_1 s\vec{a})$. Отсюда, учитывая условия теоремы, получим $f''_{\vec{a}\,\vec{b}}(\vec{x}) = f''_{\vec{b}\,\vec{a}}(\vec{x})$. ⌋

Определение 3. Пусть A — открытое множество.
$f \in C^2(A) \iff \forall j,k,\ 1 \le j,k \le m$ *существует производная* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}$ *на A и* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k} \in C(A)$.

Заметим, что $C^2(A) \subset C^1(A) \subset C(A)$.

Упражнение 14. Теорема Шварца. Проверить, что для функции $f \in C^2(A)$ справедливо равенство $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k\,\partial x_j}$ на A, $1 \le j,k \le m$.

*Определение 4. **Производная второго порядка** функции f в точке $\vec{x}$ есть матрица* $f''(\vec{x}) := \left(\dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)_{j,k=1}^{m}$.

Пусть $f \in C^2(A)$ и $\vec{a} = (a_1,\ldots,a_m)$, $\vec{b} = (b_1,\ldots,b_m)$ — два направления. Тогда $f''_{\vec{a}\,\vec{b}}(\vec{x}) = f''_{\vec{b}\,\vec{a}}(\vec{x}) = \sum\limits_{j,k=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j\,\partial x_k} a_j b_k$, а матрица $f''(\vec{x})$ симметрична. В частности, $f''_{\vec{a}\,\vec{a}}(\vec{x}) = \sum\limits_{j,k=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j\,\partial x_k} a_j a_k$.

*Определение 5. Для функции $f \in C^2(A)$ **дифференциал второго порядка** в точке $\vec{x}$ называется такая форма* $d^2 f(\vec{x}) := \sum\limits_{j,k=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j\,\partial x_k} a_j a_k$, $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^m$, *или после замены a_j на dx_j — форма* $d^2 f(\vec{x}) := \sum\limits_{j,k=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j\,\partial x_k} dx_j dx_k$.

Следует также иметь в виду, что $d^2 f(\vec{x}) = d(f'_{\vec{a}}(\vec{x})) = f''_{\vec{a}\,\vec{a}}(\vec{x})$.

Упражнение 15. Для функции $f(\vec{x}) = c_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} c_k x_k + \sum\limits_{j,k=1}^{m} c_{jk} x_j x_k$, $\vec{x} = (x_1,\ldots,x_m) \in \boldsymbol{R}^m$, $\{c_0, c_k, c_{jk}\} \subset \boldsymbol{R}$, найти $f'(\vec{x})$, $f''(\vec{x})$.

11.3.2 Производные порядка n

Пусть A — открытое множество в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$, а $\vec{a}(1), \vec{a}(2), \ldots, \vec{a}(n)$ — фиксированные направления. Предположим, что для любого $\vec{x} \in A$ определена производная порядка $n-1$ по направлениям $\vec{a}(1), \vec{a}(2), \ldots, \vec{a}(n-1)$:

$$f^{(n-1)}_{\vec{a}(1)\,\vec{a}(2)\ldots\vec{a}(n-1)}(\vec{x}).$$

Производной порядка n функции f по направлениям $\vec{a}(1)$, $\vec{a}(2)$, … , $\vec{a}(n)$ в точке $\vec{x} \in A$ называется производная

$$\left(f^{(n-1)}_{\vec{a}(1)\,\vec{a}(2)\ldots\vec{a}(n-1)}\right)'_{\vec{a}(n)}(\vec{x}) =: f^{(n)}_{\vec{a}(1)\,\vec{a}(2)\ldots\vec{a}(n)}(\vec{x}).$$

Частными производными порядка n функции f в точке $\vec{x}$ называются производные

$$f^{(n)}_{\vec{e}_{k(1)}\,\vec{e}_{k(2)}\ldots\vec{e}_{k(n)}}(\vec{x}) =: \frac{\partial^n f(\vec{x})}{\partial x_{k(1)}\partial x_{k(2)}\ldots\partial x_{k(n)}} =: f^{(n)}_{k(1)\,k(2)\ldots k(n)}(\vec{x}),$$

$1 \le k(1), k(2), \ldots, k(n) \le m.$

Производной порядка n функции f в точке $\vec{x} \in A$ называется n-мерная матрица $f^{(n)}(\vec{x}) := \left(\dfrac{\partial^n f(\vec{x})}{\partial x_{k(1)}\partial x_{k(2)}\ldots\partial x_{k(n)}}\right)^m_{k(1)\,k(2),\ldots,k(n)=1}$.

Класс функций $C^n(A)$ определяется следующим образом

$$f \in C^n(A) \iff \forall\, 1 \le k(1),\, k(2), \ldots, k(n) \le m: \quad f^{(n)}_{k(1)\,k(2)\ldots k(n)} \in C(A).$$

Из теоремы 10 следует, что для функции $f \in C^n(A)$ значение производной $\dfrac{\partial^n f(\vec{x})}{\partial x_{k(1)}\partial x_{k(2)}\ldots\partial x_{k(n)}}$ не зависит от порядка $x_{k(1)}, \ldots, x_{k(n)}$.

Отметим включения $C^n(A) \subset C^{n-1}(A) \subset \ldots \subset C^1(A) \subset C(A)$.

Замечания. 1. Пусть $f \in C^n(A)$ и $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ — некоторое направление. Тогда для $\vec{x} \in A$ имеем

$$f^{(n)}_{\vec{a}\ldots\vec{a}}(\vec{x}) = \sum_{k(1),\,k(2),\ldots,k(n)=1}^{m} \frac{\partial^n f(\vec{x})}{\partial x_{k(1)}\partial x_{k(2)}\ldots\partial x_{k(n)}}\, a_{k(1)}a_{k(2)}\ldots a_{k(n)}.$$

2. Для производной $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_1}$ часто употребляется обозначение $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$. Аналогично, в упрощённом виде используются обозначения старших производных.

3. Введём следующее обозначение

$$f^{(n)}(\vec{x})\vec{a}^{\,n} := \sum_{k(1),\,k(2),\ldots,k(n)=1}^{m} \frac{\partial^n f(\vec{x})}{\partial x_{k(1)}\partial x_{k(2)}\ldots\partial x_{k(n)}}\, a_{k(1)}a_{k(2)}\ldots a_{k(n)}. \quad (1)$$

11.3.3 Формула Тейлора

Теорема 11. *Предположим, что функция $f \in C^n(A)$. Пусть точка $\vec{x} \in A$ и направление $\vec{a} \in R^m$ таковы, что $\forall t \in [0,1]$: $(\vec{x} + t\vec{a}) \in A$.*

Тогда существует число $\theta \in (0,1)$ такое, что

$$f(\vec{x}+\vec{a}) = f(\vec{x}) + f'(\vec{x})\vec{a} + \frac{1}{2} f''(\vec{x})\vec{a}^{\,2} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\vec{x})\vec{a}^{\,n-1} +$$
$$+\frac{1}{n!} f^{(n)}(\vec{x}+\theta\vec{a})\vec{a}^{\,n}, \quad (2)$$

Замечание. Внешне формула (2) напоминает формулу Тейлора для функции одной переменной. Следует, однако, иметь в виду, что каждое слагаемое суммы (2) является суммой, см. обозначение (1).

Г Для функции $\varphi(t) = f(\vec{x} + t\vec{a})$, $t \in [0,1]$, имеем

$$\varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}_{\vec{a}\ldots\vec{a}}(\vec{x} + t\vec{a}), \quad t \in [0,1], \quad 1 \le k \le m. \tag{3}$$

Запишем формулу Тейлора для функции φ относительно точки $t = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\theta), \tag{4}$$

где $\theta \in (0,1)$. Формула (2) получается теперь подстановкой в равенство (4) значений производных из (3). ⌋

Замечания. 1. Из неравенства Коши следует такая полезная оценка $\left|\frac{1}{s!} f^{(s)}(\vec{x})\vec{a}^{\,s}\right| \le L(s)||\vec{a}||^s$ с некоторым числом $L(s)$, зависящим от производной $f^{(s)}(\vec{x})$. В частности, $\frac{1}{s!} f^{(s)}(\vec{x})\vec{a}^{\,s} = O(||\vec{a}||^s)$, $\vec{a} \to \vec{0}$.

2. При условиях теоремы с учётом неравенства Коши из (2) получаем

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = f(\vec{x}) + f'(\vec{x})\vec{a} + \frac{1}{2} f''(\vec{x})\vec{a}^{\,2} + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\vec{x})\vec{a}^{\,n} + \tag{5}$$
$$+ r_n(\vec{a}), \quad r_n(\vec{a}) = o(||\vec{a}||^n), \vec{a} \to \vec{0}.$$

$6\ (x_1^0, \ldots x_m^0)$. $f(x_1, \ldots x_m) = f(\bar{x}_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left((x_1 - x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} + (x_2 - x_1)\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}\right.$

Упражнение 16. Доказать, что для функции $f \in C^s(A)$

$$\frac{1}{s!} f^{(s)}(\vec{x})\vec{a}^{\,s} = o(||\vec{a}||^s),\ \vec{a} \to \vec{0} \iff \forall\, 1 \le k(1),\, k(2), \ldots, k(s) \le m\ :$$
$$\frac{\partial^s f(\vec{x})}{\partial x_{k(1)} \partial x_{k(2)} \ldots \partial x_{k(s)}} = 0.$$

Упражнение 17. Предположим дополнительно к условиям теоремы 11, что выполняется условие $\exists\, C \in \boldsymbol{R}\ \ \forall\, 1 \le k(1),\, k(2), \ldots, k(s) \le m\ \ \forall\, \vec{x} \in A:\ \ |f^{(s)}_{\vec{a}(1)\,\vec{a}(2)\ldots\vec{a}(s)}(\vec{x})| \le C$. Доказать следующее неравенство $\left|\frac{1}{s!} f^{(s)}(\vec{x})\vec{a}^{\,s}\right| \le C\frac{m^{s/2}}{s!}\, ||\vec{a}||^s$.

Для открытого множества A определим семейство функций $C^\infty(A)$, положив $C^\infty(A) := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} C^k(A)$. Таким образом, справедливо утверждение $f \in C^\infty(A) \iff \forall\, k \in \boldsymbol{N}:\ \ f \in C^k(A)$.

Пусть $f \in C^\infty(A)$, $\vec{x}$ и $\vec{a}$ удовлетворяют условию теоремы 11 и $\exists\, C \in \boldsymbol{R}\ \forall\, 1 \le k(1)\, k(2), \ldots, k(s) \le m\ \forall\, \vec{x} \in A:\ |f^{(s)}_{\vec{a}(1)\,\vec{a}(2)\ldots\vec{a}(s)}(\vec{x})| \le C^s$.

Тогда справедливо следующее разложение в ряд Тейлора

$$f(\vec{x} + \vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\vec{x})\vec{a}^{\,n}, \ \ f^{(0)} := f.$$

Для доказательства перейти к пределу в (5), учтя оценки упр. 17.

Упражнение 18. Пусть $f \in C^1(\boldsymbol{R}^2)$. Доказать формулу

$$f(x_1, x_2) = f(0,0) + \int\limits_0^1 (f_1'(tx_1, tx_2)x_1 + f_2'(tx_1, tx_2)x_2)\,dt.$$

11.3.4 Экстремум

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}^m$, $f: A \to \boldsymbol{R}$.

Определение 6. Если существует точка $\vec{x}^{\,0} \in A$ такая, что $\forall \vec{x} \in A: f(\vec{x}) \le f(\vec{x}^{\,0})$, то функция f имеет в точке $\vec{x}^{\,0}$ ***абсолютный максимум.*** *Значение $f(\vec{x}^{\,0}) = \max\limits_{\vec{x} \in A} f(\vec{x})$ называется* ***наибольшим значением*** *функции f на множестве A.*

Определения ***абсолютного минимума*** и ***наименьшего значения*** аналогичны.

Определение 7. Функция f имеет в точке $\vec{x}^{\,0} \in A$ ***локальный максимум,*** *если существует число $r > 0$ такое, что: 1) $B(\vec{x}^{\,0}, r) \subset A$; 2) $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}, r): f(\vec{x}) \le f(\vec{x}^{\,0})$.*

Локальный максимум называется ***строгим,*** *если существует число $r > 0$ такое, что: 1) $B(\vec{x}^{\,0}, r) \subset A$; 2) $\forall \vec{x} \in (B(\vec{x}^{\,0}, r) \setminus \{\vec{x}^{\,0}\}): f(\vec{x}) < f(\vec{x}^{\,0})$.*

Определения ***локального минимума*** и ***строгого локального минимума*** аналогичны. Точки локального максимума и локального минимума называются точками ***локального экстремума.***

Теорема 12. ***(Необходимое условие локального экстремума).*** *Предположим, что: 1) $\vec{x}^{\,0}$ есть точка локального экстремума функции f; 2) существует $f'(\vec{x}^{\,0})$ (а потому существуют все частные производные первого порядка функции f в точке $\vec{x}^{\,0}$). Тогда $f'(\vec{x}^{\,0}) = \vec{0}$.*

⌈ Предположим для определённости, что $\vec{x}^{\,0}$ — точка локального максимума. Тогда $\exists\, r > 0 : B(\vec{x}^{\,0}, r) \subset A$ и $\forall \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}, r) : f(\vec{x}) \le f(\vec{x}^{\,0})$. Пусть k, $1 \le k \le m$, — фиксировано. Функция $t=0 \ne f(\vec{x}^0)$

$$g_k(t) := f(\vec{x}^{\,0}_1, \ldots, \vec{x}^{\,0}_{k-1}, \vec{x}^{\,0}_k + t, \vec{x}^{\,0}_{k+1}, \ldots, \vec{x}^{\,0}_m), \quad t \in (-r, r),$$

обладает следующими свойствами: $g_k(t) \le g_k(0)$, $t \in (-r, r)$; существует $g_k'(0) = f_k'(\vec{x}^{\,0})$. Таким образом, функция g_k имеет локальный максимум в точке $t = 0$ и существует $g_k'(0)$. Тогда $g_k'(0) = 0$. Следовательно, $f_k'(\vec{x}^{\,0}) = 0$. ⌋

Определение 8. Пусть $\vec{x}^{\,0}$ — внутренняя точка множества A. Если $f'(\vec{x}^{\,0}) = 0$, то точка $\vec{x}^{\,0}$ называется ***критической.***

Замечания. 1. Критическая точка не обязательно — точка экстремума. Например, при $m = 2$ функция $f(x_1, x_2) = x_1x_2$, $(x_1, x_2) \in R^2$, в точке $\vec{x}^{\,0} = (0,0)$ не имеет экстремума, но $f'_1(0,0) = f'_2(0,0) = 0$.

2. Точки, в которых f' не существует, могут быть точками экстремума. Например, при $m = 2$ точка $(0,0)$ есть точка абсолютного минимума каждой из следующих функций $f(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$, $g(x_1, x_2) = |x_1| + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in R^2$.

11.3.5 Достаточное условие строгого локального экстремума

Определение 9. *Пусть $D = (d_{jk})_{j,k=1}^m$, $d_{jk} = d_{kj}$ $1 \le j, k \le m$, — симметрическая матрица размера $m \times m$ с действительными элементами. Матрица D называется* ***положительно определённой,*** *если $\forall \vec{a} \in R^m$, $\vec{a} \neq \vec{0}$: $\vec{a}^{\,t} D \vec{a} > 0$ (произведение в определении — произведение матриц, $\vec{a}$ — вектор-столбец, $\vec{a}^{\,t}$ — вектор-строка). Матрица D называется* ***отрицательно определённой,*** *если $-D$ есть положительно определённая матрица. Матрица D называется* ***неопределённой,*** *если $\exists\, \vec{a} \in R^m$: $\vec{a}^{\,t} D \vec{a} < 0$ и $\exists\, \vec{b} \in R^m : \vec{b}^{\,t} D \vec{b} > 0$.*

Обратим внимание на то, что в обозначениях п. 11.3.2 $\vec{a}^{\,t} D \vec{a} = D\vec{a}^{\,2}$.

Предполагается известным ***критерий Сильвестра.*** Положим

$$d_1 = d_{11}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad d_m = \det D. \tag{1}$$

Критерий Сильвестра. *Матрица D положительно определена тогда и только тогда, когда $d_k > 0$, $1 \le k \le m$.*

Лемма 1. *Пусть A — открытое множество и функции $\{d_{jk} \mid 1 \le j, k \le m\} \subset C(A)$; $D(\vec{x}) = (d_{jk}(\vec{x}))_{j,k=1}^m$, $\vec{x} \in A$; $\vec{x}^{\,0} \in A$. Предположим, что матрица $D(\vec{x}^{\,0})$ положительно определена. Тогда $\exists\, r > 0 : B(\vec{x}^{\,0}, r) \subset A$ и $\forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}, r)$: матрица $D(\vec{x})$ положительно определена.*

⌈ Функции $d_k > 0$, $1 \le k \le m$, определённые в формуле (1), принадлежат классу $C(A)$. Согласно критерию Сильвестра, $D(\vec{x}^{\,0})$ положительно определена тогда и только тогда, когда $d_k(\vec{x}^{\,0}) > 0$, $1 \le k \le m$. Поэтому

$$\forall\, k,\ 1 \le k \le m\ \exists\, r_k > 0\ \forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}, r_k) : d_k(\vec{x}) > 0.$$

Положим $r := \min(r_1, r_2, \ldots, r_m) > 0$; $B(\vec{x}^{\,0}, r) = \bigcap\limits_{k=1}^{m} B(\vec{x}^{\,0}, r_k)$. Тогда $\forall\, k$, $1 \le k \le m$ $\forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}, r)$: $d_k(\vec{x}) > 0$. Следовательно, для

$\forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}, r)$ матрица $D(\vec{x})$ положительно определена в силу критерия Сильвестра. ⌋

Теорема 13. *Пусть A — открытое множество и $\vec{x}^{\,0} \in A$. Предположим, что $f \in C^2(A)$, и что $\vec{x}^{\,0}$ — критическая точка f, т. е., что $f'(\vec{x}^{\,0}) = \vec{0}$. Тогда:*

a) *если матрица $f''(\vec{x}^{\,0}) := \left(\dfrac{\partial^2 f(\vec{x}^{\,0})}{\partial x_j\, \partial x_k}\right)_{j,k=1}^{m}$ положительно определена, то точка $\vec{x}^{\,0}$ — точка строгого локального минимума;*

b) *если матрица $f''(\vec{x}^{\,0})$ отрицательно определена, то точка $\vec{x}^{\,0}$ — точка строгого локального максимума;*

c) *если матрица $f''(\vec{x}^{\,0})$ является неоределённой, то точка $\vec{x}^{\,0}$ не является точкой локального экстремума.*

⌈ a) Пусть $B(\vec{x}^{\,0}, \delta)$ — такой шар, что $\forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}, \delta)$ матрица $f''(\vec{x})$ положительно определена. Такой шар существует согласно лемме 1. Для каждого $\vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}, \delta)$ рассмотрим формулу Тейлора, положив $n = 2$, $\vec{a} = \vec{x} - \vec{x}^{\,0}$: $f(\vec{x}) = f(\vec{x}^{\,0}) + \dfrac{1}{2} f''(\vec{x}^{\,0} + \theta(\vec{x} - \vec{x}^{\,0}))(\vec{x} - \vec{x}^{\,0})^2$, $\theta = \theta(\vec{x}) \in (0, 1)$. Поскольку точка $(\vec{x}^{\,0} + \theta(\vec{x} - \vec{x}^{\,0})) \in B(\vec{x}^{\,0}, \delta)$, то матрица $f''(\vec{x}^{\,0}) + \theta(\vec{x} - \vec{x}^{\,0}))$ положительно определена и, следовательно, $\forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}, \delta)$, $\vec{x} \neq \vec{x}^{\,0}$: $f(\vec{x}) > f(\vec{x}^{\,0})$.

b) Применить доказанное утверждение a) к функции $-f$.

c) Заметим, что в этом случае для любого шара $B(\vec{0}, \delta)$

$\exists\, \vec{a} \in B(\vec{0}, \delta)$: $f''(\vec{x}^{\,0})\vec{a}^{\,2} > 0$ и $\exists\, \vec{b} \in B(\vec{0}, \delta)$: $f''(\vec{x}^{\,0})\vec{b}^{\,2} < 0$. ⌋

Приведём формулировку теоремы 13 для частного случая $m = 2$.

Следствие 3. *Пусть A — открытое множество в $\mathbf{R}^2$ и $\vec{x}^{\,0} \in A$. Предположим, что $f \in C^2(A)$, и что частные производные $f'_1(\vec{x}^{\,0}) = 0$, $f'_2(\vec{x}^{\,0}) = 0$. Тогда:*

a) *если $f''_{11}(\vec{x}^{\,0}) > 0$ и $f''_{11}(\vec{x}^{\,0}) f''_{22}(\vec{x}^{\,0}) - \left(f''_{12}(\vec{x}^{\,0})\right)^2 > 0$, то точка $\vec{x}^{\,0}$ — точка строгого локального минимума;*

b) *если $f''_{11}(\vec{x}^{\,0}) < 0$ и $f''_{11}(\vec{x}^{\,0}) f''_{22}(\vec{x}^{\,0}) - \left(f''_{12}(\vec{x}^{\,0})\right)^2 > 0$, то точка $\vec{x}^{\,0}$ — точка строгого локального максимума;*

c) *если $f''_{11}(\vec{x}^{\,0}) f''_{22}(\vec{x}^{\,0}) - \left(f''_{12}(\vec{x}^{\,0})\right)^2 < 0$, то точка $\vec{x}^{\,0}$ не является точкой локального экстремума.*

Упражнение 19. Найти точки локального экстремума следующей функции $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2(x_2 - 1)^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$.

Упражнение 20. Найти наименьшее и наибольшее на R^2 значения функции $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)e^{-x_1^2-x_2^2}$, $(x_1, x_2) \in R^2$.

Упражнение 21. Пусть $\{\vec{a}(1), \dots, \vec{a}(n)\} \subset R^m$. Найти наименьшее на R^m значение функции $f(\vec{x}) = \sum\limits_{k=1}^{n} ||\vec{x} - \vec{a}(k)||^2$, $\vec{x} \in R^m$.

Упражнение 22. Пусть A и B — точки на графиках функций $y = x^2$ и $y = x - 6$, $x \in R$, соответственно Для каких A и B расстояние между A и B будет наименьшим?

Упражнение 23. Доказать что сумма, произведение и суперпозиция функций из класса $C^n(A)$ принадлежит классу $C^n(A)$.

11.3.6 Условия выпуклости функции

*Определение 10. Множество $A \subset R^m$ называется **выпуклым**, если $\forall\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset A : \{\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \mid \alpha \in [0, 1]\} \subset A$. Множество $\varnothing$ выпукло.*

Замечание. Множество $\{\alpha\vec{x} + (1 - \alpha)\vec{y} \mid \alpha \in [0, 1]\}$ есть отрезок прямой, соединяющий точки $\vec{x}, \vec{y}$. Поэтому множество A выпукло, если для произвольных точек $\vec{x}, \vec{y}$ из R^m соединяющий их отрезок также лежит в A.

Упражнение 24. Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_m; b\} \subset R$. Доказать, что множество $\{\vec{x} \in R^m \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m \le b\}$ выпукло.

Упражнение 25. Доказать, что шары $B(\vec{x}, r)$, $\overline{B}(\vec{x}, r)$, $\vec{x} \in R^m$, $r > 0$, — выпуклые множества.

Упражнение 26. Доказать, что пересечение произвольного семейства выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Упражнение 27. Пусть A — выпуклое множество, $\vec{x} \in R^m$, и положим $\vec{x} + A := \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{y} \in A\}$. Доказать, что $\vec{x} + A$ — выпуклое множество.

Упражнение 28. Пусть $A = \{\vec{x} \mid ||\vec{x}|| \le 1\}$. Доказать, что для каждого $\vec{y}$ с $||\vec{y}|| = 1$ полупространство $H_y := \{\vec{x} \mid \vec{x}^t\vec{y} \le 1\}$ содержит множество A и $A = \bigcap\limits_{\vec{y},\, ||\vec{y}||=1} H_y$.

Упражнение 29. Пусть A — выпуклое множество, $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\} \subset A$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset [0, 1]$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ Доказать, что $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\vec{x}_k\right) \in A$.

Замечание. Таким образом, множество A выпукло тогда и только тогда,когда $\forall n \in N \quad \forall \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n\} \subset A \quad \forall \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset [0,1]$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1: \ \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}_k\right) \in A$.

Упражнение 30. Для выпуклого множества A пусть A^0 — множество всех его внутренних точек и $\overline{A}$ — замыкание множества A. Доказать, что множества A^0 и $\overline{A}$ выпуклы.

Упражнение 31. Пусть A — замкнутое подмножество R^m, для которого множества A и $R^m \setminus A$ выпуклы. Доказать, что A есть полупространство.

Определение 11. *Пусть A — выпуклое и открытое множество в R^m. Функция $f : A \to R$ называется выпуклой вниз на множестве A, если выполняется условие* $\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset A \ \forall \alpha \in [0,1]: \ f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) \le \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{y})$.

*Функция $f : A \to R$ называется **строго выпуклой вниз** на множестве A, если выполняется следующее условие* $\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset A, \vec{x} \ne \vec{y} \ \forall \alpha \in (0,1): \ f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) < \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{y})$.

Определение ***выпуклой вверх*** и ***строго выпуклой вверх*** функций аналогично (с заменой знаков $\le$, $<$ на $\ge$, $>$ соответственно). Функция, удовлетворяющая одному из приведенных определений, называется ***выпуклой.***

Лемма 2. *Функция f выпукла (строго выпукла) вниз на множестве A тогда и только тогда, когда для произвольных $\{\vec{a}, \vec{x}\} \subset A$, $\vec{a} \ne \vec{x}$ функция $\varphi(t) := f(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a})), t \in [0,1]$, выпукла (строго выпукла) вниз на отрезке* $[0,1]$.

⌈ Необходимость. Пусть f выпукла вниз на A. Для значений $\{t_1, t_2\} \subset [0,1]$ и $\alpha \in [0,1]$ имеем следующее неравенство $\varphi(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) = f(\vec{a} + (\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)(\vec{x} - \vec{a})) = f(\alpha(\vec{a} + t_1(\vec{x} - \vec{a})) + (1-\alpha)(\vec{a} + t_2(\vec{x} - \vec{a}))) \le \alpha f(\vec{a} + t_1(\vec{x} - \vec{a})) + (1-\alpha) f(\vec{a} + t_2(\vec{x} - \vec{a})) = \alpha\varphi(t_1) + (1-\alpha)\varphi(t_2)$.

Достаточность. Рассмотрим произвольные $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset A$ и $\alpha \in [0,1]$. Предположим, что функция $\varphi(t) := f(\vec{x} + t(\vec{y} - \vec{x}))$, $t \in [0,1]$ выпукла вниз на $[0,1]$. Тогда $\varphi(1-\alpha) = \varphi(\alpha \cdot 0 + (1-\alpha) \cdot 1) \le \alpha\varphi(0) + (1-\alpha)\varphi(1)$. Отсюда имеем $f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) \le \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{y})$. ⌋

Теорема 14. *Пусть A — открытое выпуклое множество, функция $f \in C^2(A)$ и производная второго порядка f'' положительно определена на множестве A.*

Тогда функция f строго выпукла вниз на A.

⌈ По лемме достаточно проверить, что для любых $\{\vec{a}, \vec{x}\} \subset A$, $\vec{a} \ne \vec{x}$ функция $\varphi(t) := f(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a}))$, $t \in [0,1]$, строго выпукла вниз на $[0,1]$. Однако, $\varphi''(t) = f''(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a}))(\vec{x} - \vec{a})^2$ и потому $\varphi''(t) > 0$, $t \in [0,1]$. ⌋

Замечание. Пример функции $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$, $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$, показывает, что обратное к теореме 14 утверждение неверно (имеет место только утверждение, что f'' неотрицательна на A).

Упражнение 32. Пусть $A \neq \varnothing$ — выпуклое множество и положим $f(\vec{x}) := \inf\limits_{\vec{y} \in A} \|\vec{x} - \vec{y}\|$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$. Доказать, что функция f выпукла вниз на множестве $\boldsymbol{R}^m$.

Упражнение 33. Доказать, что строго выпуклая вниз на выпуклом открытом множестве функция не может иметь более одного локального экстремума.

Упражнение 34. Пусть f — выпуклая вниз на A функция. Доказать, что для каждого $c \in \boldsymbol{R}$ множество $\{\vec{x} \in A \mid f(\vec{x}) < c\}$ — выпукло и открыто.

Упражнение 35.* Функция f выпукла на открытом множестве A. Доказать, что $f \in C(A)$.

Упражнение 36. Пусть функции f и g выпуклы вниз на A и $c > 0$. Доказать, что функции cf; $f + g$; $\max(f(\vec{x}), g(\vec{x}))$, $\vec{x} \in A$ выпуклы вниз на A.

Упражнение 37. Пусть A — открытое и выпуклое множество и $f \in C^2(A)$. Доказать, что функция f выпукла вниз на множестве A тогда и только тогда, когда f'' неотрицательно определена на A.

11.3.7 Историческая справка

Джеймс Джозеф Сильвестр (1814 — 1897) — английский математик. Наиболее важные его работы посвящены алгебре и теории чисел. Он ввёл ряд общепринятых терминов алгебры: "инвариант", "дискриминант" и др.

Глава 12

Векторные функции от нескольких переменных

12.1 Непрерывные отображения

12.1.1 Линейные отображения

В настоящей главе рассматривается ряд основных понятий дифференциального исчисления функций (отображений, преобразований) одного конечномерного пространства в другое. Пусть m и n — фиксированные натуральные числа. Пространства R^m и R^n будем рассматривать как линейные метрические пространства с евклидовым расстоянием, а элементы этих пространств — как векторы-столбцы. Евклидово расстояние в пространствах R^m и R^n обозначаются ρ_m и ρ_n соответственно. Умножение матриц на число и их сложение понимаются обычным образом.

Пусть $A \subset R^m$ и отображение $\vec{f} : A \to R^n$. Задание $\vec{f}$ означает, что для любого $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^t \in A$ поставлен в соответствие вектор $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}))^t \in R^n$. Таким образом, задание $\vec{f}$ на A равносильно заданию упорядоченного набора n действительных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ на A, где f_k — k-я компонента отображения $\vec{f}$.

Примеры. 1. *Постоянное отображение.* Пусть $A = R^m$ и $\vec{y}^0 \in R^n$ — фиксированный элемент. Положим $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}^0$, $\vec{x} \in R^m$, $\vec{f}$ — постоянное отображение.

2. *Линейное отображение.* Отображение $\vec{f} : R^m \to R^n$ называется ***линейным***, если: 1) $\forall c \in R\ \forall \vec{x} \in R^m : \vec{f}(c\vec{x}) = c\vec{f}(\vec{x})$; 2) $\forall \{\vec{u}, \vec{v}\} \subset R^m : \vec{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v})$.

Легко проверить (доказательство проводится в курсе линейной алгебры), что отображение $\vec{f}$ линейно тогда и только тогда, когда существует матрица $D = (d_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}$ размера $m \times n$ с действительными элементами такая, что $\vec{f}(\vec{x}) = D\vec{x}$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$, т. е. когда для любого $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^t \in \boldsymbol{R}^m$, j-я компонента f_j отображения $\vec{f}$ задаётся равенством $f_j(\vec{x}) = \sum\limits_{k=1}^{m} d_{jk}x_k$.

Пусть $\vec{f}: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ и $\vec{g}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^k$ — линейные отображения с матрицами $D(\vec{f})$ и $D(\vec{g})$ соответственно. Тогда их суперпозиция $\vec{h}(\vec{x}) := \vec{g}(\vec{f}(\vec{x}))$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$, есть линейное отображение со следующей матрицей $D(\vec{h}) = D(\vec{g})D(\vec{f})$.

В том случае, когда $\vec{f}: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ — линейное отображение с матрицей D с $\det D \neq 0$, то отображение $\vec{f}$ взаимно однозначно и обратное отображение $\vec{f}^{-1}$ линейно с матрицей D^{-1}.

Для матрицы $D = (d_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}$ положим $\|D\| := \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} d_{jk}^2\right)^{1/2}$.

Согласно неравенству Коши, для линейного отображения $\vec{f}$ с матрицей D имеем $\|\vec{f}(\vec{x})\| \leq \|D\| \cdot \|\vec{x}\|$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$, при этом $\|\vec{f}\|$ — норма $\vec{f}$ в $\boldsymbol{R}^n$, а $\|\vec{x}\|$ — норма $\vec{x}$ в $\boldsymbol{R}^m$. Далее в аналогичных случаях оговорка о пространстве, в котором рассматривается норма, делаться не будет.

12.1.2 Непрерывные отображения

Пусть $A \subset \boldsymbol{R}^m$ — открытое множество.

*Определение 1. Пусть $\vec{f}: A \to \boldsymbol{R}^n$, $\vec{x}^0 \in A$. Отображение $\vec{f}$ называется **непрерывным в точке** $\vec{x}^0$, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \vec{x},\ \rho_m(\vec{x}, \vec{x}^0) < \delta : \rho_n(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x}^0)) < \varepsilon.$$

*Отображение $\vec{f}$ **непрерывно на множестве** A, если оно непрерывно в каждой точке множества A.*

Приведенное определение есть перефразировка общего определения п. 10.2.4 в частном случае, когда $X = \boldsymbol{R}^m$, $Y = \boldsymbol{R}^n$ с обычным расстоянием.

Примеры. 1. Постоянное отображение непрерывно на $\boldsymbol{R}^m$.

2. Линейное отображение $\vec{f}(\vec{x}) = D\vec{x}$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$, непрерывно на $\boldsymbol{R}^m$, так как справедлива такая оценка $\rho_n(\vec{f}(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x}^0)) = \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^0)\| = \|D(\vec{x} - \vec{x}^0)\| \leq \|D\| \cdot \|\vec{x} - \vec{x}^0\| = \|D\|\rho_m(\vec{x}, \vec{x}^0)$.

Теорема 1. *Пусть $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^t : A \to \boldsymbol{R}^n$. Отображение $\vec{f}$ непрерывно на A тогда и только тогда, когда $\forall k,\ 1 \leq k \leq n : f_k \in C(A)$.*

⌈ Поскольку сходимость в (R^n, ρ_m) равносильна покоординатной сходимости, то $\vec{f}$ непрерывно в точке $\vec{x}^0 \iff \vec{f}(\vec{x}) \to \vec{f}(\vec{x}^0),\ \vec{x} \to \vec{x}^0 \iff \forall k,\ 1 \le k \le n : f_k(\vec{x}) \to f_k(\vec{x}^0),\ \vec{x} \to \vec{x}^0.$ ⌋

Следствие 1. Пусть $\vec{f} : A \to R^n$ непрерывно на A, D — матрица размера $k \times n$ с действительными непрерывными на A элементами. Тогда отображение $D\vec{f} : A \to R^k$ непрерывно на A.

Упражнение 1. Пусть D — матрица размера $n \times m$ с действительными элементами и $\vec{y}^0$ — фиксированный вектор. Отображение $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}^0 + D\vec{x}$, $\vec{x} \in R^m$ называется ***аффинным.*** Доказать, что аффинное преобразование непрерывно на R^m.

Упражнение 2. Пусть $\vec{f} : R^m \to R^m$ преобразование таково, что $\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset R^m : ||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})|| = ||\vec{x} - \vec{y}||$. Преобразование $\vec{f}$ называется ***изометрическим.*** Доказать, что $\vec{f}$ непрерывно на A. Можно также доказать, что $\vec{f}$ есть аффинное преобразование с ортогональной матрицей D.

12.2 Дифференцируемые отображения

12.2.1 Определения

Пусть $A \subset R^m$ — открытое множество.

*Определение 1. Пусть $\vec{f} : A \to R^n$, $\vec{x} \in A$. Отображение $\vec{f}$ называется **дифференцируемым в точке** $\vec{x}$, если существует линейное отображение R^m в R^n с матрицей $D = (d_{jk})_{j=1}^{n}{}_{k=1}^{m}$ такое, что $||\vec{f}(\vec{x}+\vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}) - D\vec{a}|| = o(||\vec{a}||)$, $\vec{a} \to \vec{0}$. Матрица D называется **производной отображения** $\vec{f}$ в точке $\vec{x}$ и обозначается символом $D = \vec{f}'(\vec{x})$.*

Упражнение 3. Рассмотреть частные случаи определения 1, когда: a) $m = n = 1$; b) $n = 1$.

Упражнение 4. Определить производную аффинного преобразования.

Упражнение 5. Проверить, что производная дифференцируемой в точке функции определяется однозначно.

Теорема 2. *Отображение $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^t$ дифференцируемо в точке $\vec{x}$ тогда и только тогда, когда каждая компонента f_k — дифференцируемая функция в точке*

$\vec{x}$, $1 \le k \le n$. При этом производная отображения $\vec{f}$ равна $\vec{f}'(\vec{x}) = \left(\dfrac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_k}\right)_{j=1\,k=1}^{n\quad m}$. Дифференцируемое в точке отображение непрерывно в этой точке.

⌈ Действительно, $\forall j, 1 \le j \le n : f_j$ — дифференцируема в точке $\vec{x}$ $\Longleftrightarrow \forall j, 1 \le j \le n : f_j(\vec{x}+\vec{a}) - f_j(\vec{x}) - \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_k} a_k = r_j\|\vec{a}\|$, где $r_j \to 0$, $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)^t \to \vec{0}$. Поэтому имеем следующее неравенство $\left| f_j(\vec{x}+\vec{a}) - f_j(\vec{x}) - \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_k} a_k \right| \le \|\vec{f}(\vec{x}+\vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}'(\vec{x})\vec{a}\| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} r_j^2\right)^{1/2} \|\vec{a}\|$. Отсюда следуют первые два утверждения теоремы. Учитывая теперь теорему 1 и непрерывность компонент в точке $\vec{x}$ имеем непрерывность отображения $\vec{f}$ в точке $\vec{x}$. ⌋

Упражнение 6. Пусть $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — дифференцируемые в точке $\vec{x}$ отображения. Доказать, что: 1) $\forall c \in \boldsymbol{R}$: $(c\vec{f})'(\vec{x}) = c\vec{f}'(\vec{x})$; 2) $(\vec{f}+\vec{g})'(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{x}) + \vec{g}\,'(\vec{x})$; 3) если $h: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ — дифференцируемая в точке $\vec{x}$ функция, то справедливо равенство $(h\vec{f})'(\vec{x}) = h(\vec{x})\vec{f}'(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{x})h'(\vec{x})$, где $h'(\vec{x})$ — вектор-строка.

Упражнение 7. Пусть $\vec{f}: A \to \boldsymbol{R}^n$ — дифференцируемое в точке $\vec{x}$ отображение, D — матрица размера $k \times n$ с действительными постоянными элементами. Тогда $D\vec{f}: A \to \boldsymbol{R}^k$. Доказать, следующее равенство $(D\vec{f})'(\vec{x}) = D\vec{f}\,'(\vec{x})$.

Определение 2. Пусть $\vec{f}: A \to \boldsymbol{R}^n$ — дифференцируемая в точке $\vec{x}$ функция. Матрица $\vec{f}'(\vec{x}) = \left(\dfrac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_k}\right)_{j=1\,k=1}^{n\quad m}$ называется ***матрицей Якоби.*** *Если $m = n$, то определитель $\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)} := \det \vec{f}'(\vec{x})$ называется* ***якобианом.***

Точка $\vec{x}$, в которой $\det \vec{f}'(\vec{x}) = 0$, называется ***точкой вырождения*** *отображения $\vec{f}$.*

Определение 3. Пусть $A \subset \boldsymbol{R}^m$ — открытое множество, $\vec{f}: A \to \boldsymbol{R}^n$ и $k \in (\boldsymbol{N} \cup \{0\})$. $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^t \in C^k(A, \boldsymbol{R}^n)$ $\Longleftrightarrow \forall j, 1 \le j \le n: \quad f_j \in C^k(A)$.

Упражнение 8. Пусть $m = n = 2$, $A = \{(r, \varphi) \mid r \ge 0, 0 \le \varphi < 2\pi\}$, $\vec{f}(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^t$. Доказать, что $\det \vec{f}' = r$.

Упражнение 9. Пусть $m = n = 3$, $A = \{(r, \varphi, z) \mid r \ge 0, 0 \le \varphi < 2\pi, z \in \boldsymbol{R}\}$, $\vec{f}(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)^t$. Доказать, что $\det \vec{f}' = r$.

Упражнение 10. Пусть $m = n = 3$, $A = \{(r, \theta, \varphi) \mid r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, $\vec{f}(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)^t$. Доказать, что $\det \vec{f}' = r^2 \sin\theta$.

12.2.2 Свойства дифференцируемых функций

Теорема 3. *(Правило дифференцирования сложной функции). Предположим, что: A — открытое множество в R^m, B — открытое множество в R^n, $\vec{f} : A \to B$ — функция, дифференцируемая в точке $\vec{x}^{\,0}$, $\vec{g} : B \to R^k$ — функция, дифференцируемая в точке $\vec{y}^{\,0} := \vec{f}(\vec{x}^{\,0})$.*

Тогда функция $\vec{h} := \vec{g}(\vec{f}) : A \to R^k$ дифференцируема в точке $\vec{x}^{\,0}$ и $\vec{h}'(\vec{x}^{\,0}) = \vec{g}'(\vec{f}(\vec{x}^{\,0}))\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})$.

⌈ Поскольку $\vec{f}$ дифференцируема в точке $\vec{x}^{\,0}$, то

$$||\vec{f}(\vec{x}^{\,0} + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}^{\,0}) - \vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\vec{a}|| = o(||\vec{a}||), \quad \vec{a} \to \vec{0}. \tag{1}$$

Аналогично, поскольку $\vec{g}$ дифференцируема в точке $\vec{y}^{\,0}$, то

$$||\vec{g}(\vec{y}^{\,0} + \vec{b}) - \vec{g}(\vec{y}^{\,0}) - \vec{g}'(\vec{y}^{\,0})\vec{b}|| = o(||\vec{b}||), \quad \vec{b} \to \vec{0}. \tag{2}$$

Положим $\vec{b} = \vec{f}(\vec{x}^{\,0} + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}^{\,0})$ и заметим, что по теореме 1 $\vec{b} \to \vec{0}$ при $\vec{a} \to \vec{0}$. Из равенств (1) и (2) следует

расписать и (1)

$$||\vec{h}(\vec{x}^{\,0} + \vec{a}) - \vec{h}(\vec{x}^{\,0}) - \vec{g}'(\vec{y}^{\,0})\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\vec{a}|| = \tag{3}$$

$$= ||\vec{g}(\vec{y}^{\,0} + \vec{b}) - \vec{g}(\vec{y}^{\,0}) - \vec{g}\,'(\vec{y}^{\,0})\vec{b} + \vec{g}\,'(\vec{y}^{\,0})\vec{b} - \vec{g}\,'(\vec{y}^{\,0})\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\vec{a}|| \leq$$

$$\leq o(||\vec{b}||) + ||\vec{g}\,'(\vec{y}^{\,0})|| \cdot o(||\vec{a}||), \quad \vec{a} \to \vec{0}.$$ т.к. $||\vec{b} - \vec{f}'(\vec{x}^0)\vec{a}|| = o||\vec{a}||$

Кроме того,

$$||\vec{b}|| \leq o(||\vec{a}||) + ||\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})|| \cdot ||\vec{a}||, \quad \vec{a} \to \vec{0}. \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) имеем

$$||\vec{h}(\vec{x}^{\,0} + \vec{a}) - \vec{h}(\vec{x}^{\,0}) - \vec{g}'(\vec{y}^{\,0})\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\vec{a}|| = o(||\vec{a}||), \quad \vec{a} \to \vec{0}. \qquad ⌋$$

Если $m = n = k$, то из теоремы 3 и правила вычисления определителя произведения матриц получаем следующее утверждение для якобианов.

Следствие 2. *При условиях теоремы 3 и $m = n = k$ имеем $\dfrac{\partial(h_1, h_2, \ldots, h_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \dfrac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_m)}{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)} \cdot \dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$. Здесь $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_m)^t = (g_1(\vec{f}), \ldots, g_m(\vec{f}))^t$, $\vec{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^t$.*

Упражнение 11. Используем обозначения теоремы 3. Пусть функции $\{\vec{f}, \vec{g}\} \subset C^r$ для некоторого $r \in N$. Доказать, что $\vec{h} \in C^r$.

Упражнение 12. Пусть $\vec{f}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^t$, $(r,\varphi) \in ([0,+\infty) \times [0,2\pi]$; $g \in C^2(R^2)$, $h(r,\varphi) = g(\vec{f}(r,\varphi))$, $(r,\varphi) \in ([0,+\infty) \times [0,2\pi]$.

Доказать равенство $g''_{11} + g''_{22} = h''_{11} + \dfrac{1}{r^2}h''_{22} - \dfrac{1}{r}h'_1$, $r > 0$.

Теорема 4. *Пусть A — открытое множество в R^m, $\vec{f}: A \to R^n$, $\vec{f} \in C^1(A, R^n)$ и точки $\vec{x}$ и $\vec{a}$ таковы, что $\{\vec{x} + \tau\vec{a} \mid 0 \le \tau \le 1\} \subset A$. Тогда имеет место следующее неравенство* $||\vec{f}(\vec{x}+\vec{a}) - \vec{f}(\vec{x})|| \le \sup\limits_{0\le\tau\le1} ||\vec{f}'(\vec{x}+\tau\vec{a})|| \cdot ||\vec{a}||$.

⌈ Для любого фиксированного $\vec{z} \in R^m$ рассмотрим действительную функцию $\varphi(\tau) = \vec{z}^t\vec{f}(\vec{x}+\tau\vec{a}))$, $\tau \in [0,1]$, для которой производная $\varphi'(\tau) = \vec{z}^t\vec{f}'(\vec{x}+\tau\vec{a}))\vec{a}$, $\tau \in [0,1]$, $\varphi' \in C([0,1])$. По теореме Лагранжа

$$|\varphi(1) - \varphi(0)| = |\varphi'(\theta)| \le \sup_{0\le\tau\le1} |\varphi'(\tau)|, \quad \theta \in [0,1]. \tag{5}$$

Поэтому $|\vec{z}^t(\vec{f}(\vec{x}+\vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}))| \le ||\vec{z}|| \sup\limits_{0\le\tau\le1} ||\vec{f}'(\vec{x}+\tau\vec{a})|| \cdot ||\vec{a}||$. Если величина $||\vec{f}(\vec{x}+\vec{a}) - \vec{f}(\vec{x})|| = 0$, то требуемое неравенство выполнено. Если же $||\vec{f}(\vec{x}+\vec{a}) - \vec{f}(\vec{x})|| \ne 0$, то положив $\vec{z} = \vec{f}(\vec{x}+\vec{a}) - \vec{f}(\vec{x})$, из формулы (5) после сокращения на $||\vec{z}||$ также получаем требуемое неравенство. ⌋

Упражнение 13. При условиях теоремы 4 доказать неравенство

$$||\vec{f}(\vec{x}+\vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}'(\vec{x})\vec{a}|| \le \sup_{0\le\tau\le1} ||\vec{f}'(\vec{x}+\tau\vec{a}) - \vec{f}'(\vec{x})|| \cdot ||\vec{a}||.$$

Упражнение 14. Пусть $\vec{f}(x) = (\sin x, \cos x)^t$, $x \in [0,2\pi]$. Доказать, что не существует $\theta \in [0,2\pi]$ такого, что $\vec{f}(2\pi) - \vec{f}(0) = \vec{f}'(\theta)(2\pi - 0)$.

12.2.3 Теоремы о неявной и обратной функциях

В этом разделе приведены две наиболее важные и наиболее часто употребляемые теоремы о дифференцируемых отображениях.

Лемма 1. *Пусть A — открытое множество в R^m, $\vec{f}: A \to R^m$, $\vec{f} \in C^1(A, R^m)$, $\vec{x}^0 \in A$ и $\det \vec{f}'(\vec{x}^0) \ne 0$.*

Тогда $\vec{f}$ — гомеоморфизм между некоторым открытым множеством в R^m, которое содержит точку $\vec{x}^0$, и некоторым открытым множеством в R^m, которое содержит точку $\vec{y}^0 := \vec{f}(\vec{x}^0)$.

⌈ I. Из условий леммы имеем $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \vec{x} \in B(\vec{x}^0, \varepsilon) \iff ||\vec{x} - \vec{x}^0|| < \varepsilon$:

$$||E - \left(\vec{f}'(\vec{x}^0)\right)^{-1}\vec{f}'(\vec{x})|| \le \frac{1}{2}, \quad E = (\delta_{jk})_{j,k=1}^m \tag{1}$$

и

$$\left\|\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\right)^{-1}\left(\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{x}^{\,0})-\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})(\vec{x}-\vec{x}^{\,0})\right)\right\|\le\frac{1}{2}\,\|\vec{x}-\vec{x}^{\,0}\|. \qquad (2)$$

II. Положим

$$\eta:=\varepsilon\Big/\left(2\left\|\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\right)^{-1}\right\|\right)>0, \qquad (3)$$

а также определим функцию $\forall\,\vec{y},\ \|\vec{y}-\vec{y}^{\,0}\|=\|\vec{y}-\vec{f}(\vec{x}^{\,0})\|<\eta:\ \vec{g}_{\vec{y}}(\vec{x}):=$ $=\vec{x}+\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\right)^{-1}(\vec{y}-\vec{f}(\vec{x})),\quad \vec{x}\in\overline{B}(\vec{x}^{\,0},\varepsilon)$.

Докажем, что для каждого $\vec{y}\in B(\vec{y}^{\,0},\eta)$ отображение $\vec{g}_{\vec{y}}$ переводит замкнутый шар $\overline{B}(\vec{x}^{\,0},\varepsilon)$ в себя. Действительно, из (2) и (3) имеем

$$\|\vec{g}_{\vec{y}}(\vec{x})-\vec{x}^{\,0}\|=\left\|\vec{x}-\vec{x}^{\,0}+\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\right)^{-1}(\vec{y}-\vec{f}(\vec{x}))\right\|=$$
$$=\left\|\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\right)^{-1}\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})(\vec{x}-\vec{x}^{\,0})+\vec{f}(\vec{x}^{\,0})-\vec{f}(\vec{x})\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\right)^{-1}(\vec{y}-\vec{f}(\vec{x}^{\,0}))\right\|<\frac{1}{2}\,\|\vec{x}-\vec{x}^{\,0}\|+\left\|\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\right)^{-1}\right\|\eta\le\varepsilon.$$

Заметим теперь, что $\left(\vec{g}_{\vec{y}}(\vec{x})\right)'_{\vec{x}}=E-\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\right)^{-1}\vec{f}'(\vec{x}),\ \vec{x}\in B(\vec{x}^{\,0},\varepsilon)$. Для каждого $\vec{y}\in B(\vec{y}^{\,0},\eta)$ отображение $\vec{g}_{\vec{y}}$ сжимающее, так как с учётом теоремы 4 и (1) имеем для любых векторов $\{\vec{x}\,',\vec{x}\,''\}\subset\overline{B}(\vec{x}^{\,0},\varepsilon)$: $\|\vec{g}_{\vec{y}}(\vec{x}\,')-\vec{g}_{\vec{y}}(\vec{x}\,'')\|=\left\|\vec{x}\,'-\vec{x}\,''+\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\right)^{-1}(\vec{f}(\vec{x}\,')-\vec{f}(\vec{x}\,''))\right\|\le\frac{1}{2}\,\|\vec{x}\,'-\vec{x}\,''\|$.

III. Таким образом, по теореме Банаха для каждого $\vec{y}\in B(\vec{y}^{\,0},\eta)$ получим $\exists\,!\vec{x}\in B(\vec{x}^{\,0},\varepsilon)\quad \vec{g}_{\vec{y}}(\vec{x})=\vec{x}\iff\vec{f}(\vec{x})=\vec{y}$. Следовательно на открытом множестве $\vec{f}^{\,-1}(B(\vec{y}^{\,0},\eta))\cap B(\vec{x}^{\,0},\varepsilon)$ отображение $\vec{f}$ взаимно однозначно и имеет обратное $\vec{f}^{\,-1}$.

IV. Проверим, что обратное отображение $\vec{f}^{\,-1}$ непрерывно на шаре $B(\vec{y}^{\,0},\eta)$. Действительно, пусть для произвольных $\{\vec{y}\,',\vec{y}\,''\}\subset B(\vec{y}^{\,0},\eta)$ векторы $\{\vec{x}\,',\vec{x}\,''\}\subset\vec{f}^{\,-1}(B(\vec{y}^{\,0},\eta))\cap B(\vec{x}^{\,0},\varepsilon)$ таковы, что $\vec{f}(\vec{x}\,')=\vec{y}\,'$, $\vec{f}(\vec{x}\,'')=\vec{y}\,''$. Тогда с учётом (2) сначала имеем неравенство $\|\vec{x}\,'-\vec{x}\,''\|=$ $=\|\vec{g}_{\vec{y}\,'}(\vec{x}\,')-\vec{g}_{\vec{y}\,''}(\vec{x}\,'')\|\le\|\vec{g}_{\vec{y}\,'}(\vec{x}\,')-\vec{g}_{\vec{y}\,'}(\vec{x}\,'')\|+\|\vec{g}_{\vec{y}\,'}(\vec{x}\,'')-\vec{g}_{\vec{y}\,''}(\vec{x}\,'')\|\le$ $\le\frac{1}{2}\,\|\vec{x}\,'-\vec{x}\,''\|+\left\|\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\right)^{-1}\right\|\cdot\|\vec{y}\,'-\vec{y}\,''\|$, а затем неравенство

$$\|\vec{x}\,'-\vec{x}\,''\|\le 2\left\|\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\right)^{-1}\right\|\cdot\|\vec{y}\,'-\vec{y}\,''\|. \qquad (4)\ \rfloor$$

Теорема 5. *(О существовании обратной функции).* *Пусть A — открытое множество в R^m, $\vec{f}:\ A\to R^m$, $\vec{x}^{\,0}\in A$ и $\vec{y}^{\,0}:=\vec{f}(\vec{x}^{\,0})$. Предположим, что выполнены условия: 1) $\vec{f}\in C^1(A,R^m)$; 2) $\det\vec{f}'(\vec{x}^{\,0})\ne 0$. Тогда существуют открытое в R^m множество $O(\vec{x}^{\,0})\subset A$, которое содержит точку $\vec{x}^{\,0}$, и шар $B(\vec{y}^{\,0},r)$ такие, что: a) отображение $\vec{f}:\ O(\vec{x}^{\,0})\to B(\vec{y}^{\,0},r)$ — гомеоморфизм; b) обратная к $\vec{f}$*

функция $\vec{g} = \vec{f}^{-1}: \ B(\vec{y}^{\,0}, r) \to O(\vec{x}^{\,0})$ *удовлетворяет условию* $\vec{g} \in C^1(B(\vec{y}^{\,0}, r), \boldsymbol{R}^m)$; *с)* $\forall \vec{y} \in B(\vec{y}^{\,0}, r): \ \vec{g}\,'(\vec{y}) = \left(\vec{f}\,'(\vec{g}(\vec{y}))\right)^{-1}$.

⌈ I. Утверждение а) теоремы содержится в лемме 1.

II. Заметим, что при доказательстве леммы 1 число $\varepsilon > 0$ можно взять таким, чтобы матрица $\vec{f}'(\vec{x})$ была невырожденной для каждого $\vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}, \varepsilon)$. Далее предполагаем, что такое ε фиксировано, и положим $r := \eta$, $O(\vec{x}^{\,0}) := \vec{f}^{-1}(B(\vec{y}^{\,0}, \eta)) \cap B(\vec{x}^{\,0}, \varepsilon)$. Пусть $\vec{g}: \ B(\vec{y}^{\,0}, \eta) \to O(\vec{x}^{\,0})$ — обратное к $\vec{f}$ отображение и произвольное значение $\vec{y}^{\,1} \in B(\vec{y}^{\,0}, \eta)$ фиксировано. Докажем, что отображение $\vec{g}$ дифференцируемо в точке $\vec{y}^{\,1}$, и что справедливо равенство с). Положим

$$\vec{x}^{\,1} := \vec{g}(\vec{y}^{\,1}); \qquad \vec{x} := \vec{g}(\vec{y}), \ \ \vec{y} \in B(\vec{y}^{\,0}, \eta), \tag{5}$$

тогда

$$\vec{f}(\vec{x}^{\,1}) = \vec{y}^{\,1}; \qquad \vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}, \ \ \vec{x} \in O(\vec{x}^{\,0}). \tag{6}$$

По условию теоремы отображение $\vec{f}$ дифференцируемо в точке $\vec{x}^{\,1}$ и потому

$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}^{\,1}) - \vec{f}'(\vec{x}^{\,1})(\vec{x} - \vec{x}^{\,1}) = ||\vec{x} - \vec{x}^{\,1}||\vec{\varepsilon}(\vec{x}), \ \ \vec{\varepsilon}(\vec{x}) \to \vec{0}, \ \vec{x} \to \vec{x}^{\,1}. \tag{7}$$

Отметим, что по лемме $\vec{x} \to \vec{x}^{\,1} \iff \vec{y} \to \vec{y}^{\,1}$. Из равенств (5) — (7) имеем

$$||\vec{y} - \vec{y}^{\,1} - \vec{f}'(\vec{x}^{\,1})(\vec{g}(\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}^{\,1}))|| = ||\vec{g}(\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}^{\,1})|| \cdot ||\vec{\varepsilon}(\vec{g}(\vec{y}))||, \ \ \vec{y} \to \vec{y}^{\,1}. \tag{8}$$

Для оценки левой части (8) используем неравенство (4)

$$||\vec{g}(\vec{y}) - \vec{g}(\vec{y}^{\,1}) - \left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,1})\right)^{-1}(\vec{y} - \vec{y}^{\,1})|| \le$$

$$\le 2\left|\left|\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,1})\right)^{-1}\right|\right|^2 ||\vec{y} - \vec{y}^{\,1}|| \cdot ||\vec{\varepsilon}(\vec{g}(\vec{y}))||, \ \ \vec{y} \to \vec{y}^{\,1}.$$

Поскольку $\vec{\varepsilon}(\vec{g}(\vec{y})) \to \vec{0}$, $\vec{y} \to \vec{y}^{\,1}$, то отображение $\vec{g}$ дифференцируемо в точке $\vec{y}^{\,1}$ и имеет производную $\left(\vec{f}'(\vec{x}^{\,1})\right)^{-1} = \left(\vec{f}'(\vec{g}(\vec{y}^{\,1})\right)^{-1}$. ⌋

где усл. с)

Перед формулировкой следующей теоремы введём некоторые обозначения. Далее рассматриваются пространства $\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{R}^n$ и $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^{m+n}$ с евклидовыми расстояниями. Их элементы будем обозначать соответственно символами $\vec{x}$, $\vec{y}$, $(\vec{x}, \vec{y})$ (возможно с индексами), таким образом, $(\vec{x}, \vec{y})$ есть вектор-столбец $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}$. Матрица $\vec{F}'_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{y})$ определяется как производная отображения $\vec{F}$ при фиксированном $\vec{y}$. Аналогично определяется $\vec{F}'_{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{y})$

Теорема 6. *(О существовании и свойствах неявной функции). Пусть* G *— открытое множество в пространстве* $\boldsymbol{R}^{m+n}$, $(\vec{x}^{\,0}, \vec{y}^{\,0}) \in G$. *Предположим, что функция* $\vec{F}: \ G \to \boldsymbol{R}^n$ *удовлетворяет условиям: 1)* $\vec{F}(\vec{x}^{\,0}, \vec{y}^{\,0}) = \vec{0}$;

2) $\vec F \in C^1(G, R^n)$; *3)* $\dfrac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}(\vec x^{\,0}, \vec y^{\,0}) = \det \vec F'_{\vec y}(\vec x^{\,0}, \vec y^{\,0}) \neq 0$,
$\vec F = (F_1, F_2, \dots, F_n)^t$, $\vec y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$.

Тогда существует шар $B(\vec x^{\,0}, r) \subset R^m$ *и единственная функция* $\vec h: B(\vec x^{\,0}, r) \to R^n$, $\vec h \in C^1(B(\vec x^{\,0}, r), R^n)$, *удовлетворяющая условиям: a)* $\vec h(\vec x^{\,0}) = \vec y^{\,0}$; *b)* $\forall \vec x \in B(\vec x^{\,0}, r): \vec F(\vec x, \vec h(\vec x)) = \vec 0$; *c)* $\forall \vec x \in B(\vec x^{\,0}, r): \vec h'(\vec x) = -\Big(\vec F'_{\vec y}(\vec x, \vec h(\vec x))\Big)^{-1} \vec F'_{\vec x}(\vec x, \vec h(\vec x))$.

⌈ Введём отображение $\vec f(\vec x, \vec y) := \begin{pmatrix} \vec x \\ \vec F(\vec x, \vec y) \end{pmatrix}$, $(\vec x, \vec y) \in G$, для которого

$$\vec f(\vec x^{\,0}, \vec y^{\,0}) = (\vec x^{\,0}, \vec 0); \quad \vec f'(\vec x, \vec y) := \begin{pmatrix} E & \vdots & 0 \\ \vec F'_{\vec x}(\vec x, \vec y) & \vdots & \vec F'_{\vec y}(\vec x, \vec y) \end{pmatrix}^{m}_{n}; \ \det \vec f' = \det \vec F'_{\vec y}.$$

Отображение $\vec f$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5. Поэтому в некотором шаре $B(\vec f(\vec x^{\,0}, \vec y^{\,0}), \delta) \subset R^{m+n}$ определено обратное отображение $\vec g = (\vec h_1, \vec h_2)$, причём $\vec g(\vec x^{\,0}, \vec 0) = (\vec x^{\,0}, \vec y^{\,0})$ и

$$\vec f(\vec h_1(\vec u, \vec v), \vec h_2(\vec u, \vec v)) = (\vec u, \vec v), \ (\vec u, \vec v) \in B(\vec f(\vec x^{\,0}, \vec y^{\,0}), \delta); \tag{9}$$

кроме того, $\vec g(\vec u, \vec v)$

$$\vec g \in C^1(B(\vec f(\vec x^{\,0}, \vec y^{\,0}), \delta)); \quad \vec g\,'(\vec u, \vec v) = \Big(\vec f'(\vec h_1(\vec u, \vec v), \vec h_2(\vec u, \vec v))\Big)^{-1}. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь какие-либо открытые шары $B(\vec x^{\,0}, r) \subset R^m$ и $B(\vec F(\vec x^{\,0}, \vec y^{\,0}), \tilde r) = B(\vec 0, \tilde r) \subset R^n$ такие, что~~бы~~

$$H := \Big(B(\vec x^{\,0}, r) \times B(\vec F(\vec x^{\,0}, \vec y^{\,0}), \tilde r)\Big) \subset B(\vec f(\vec x^{\,0}, \vec y^{\,0}), \delta).$$

Согласно равенству (9), имеем

$$\vec h_1(\vec u, \vec v) = \vec u, \quad \vec F(\vec u, \vec h_2(\vec u, \vec v)) = \vec v, \quad (\vec u, \vec v) \subset H. \tag{11}$$

Аналогично, в силу равенства (10),

$\begin{pmatrix} E & 0 \\ B & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -D^{-1} & \end{pmatrix}$

$$\vec g\,'(u,v) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ (\vec h_2)'_{\vec u} & (\vec h_2)'_{\vec v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \vec F'_{\vec x}(\vec u, \vec h_2(\vec u, \vec v)) & \vec F'_{\vec y}(\vec u, \vec h_2(\vec u, \vec v)) \end{pmatrix}^{-1}. \tag{12}$$

Для $\vec x \in B(\vec x^{\,0}, r)$ положим $\vec h(\vec x) := \vec h_2(\vec x, \vec 0)$. Заметим, что отображение $\vec h: B(\vec x^{\,0}, r) \to R^n$. Теперь из равенств (11), (12) следуют такие утверждения для отображения h: $\vec h(\vec x^{\,0}) = \vec y^{\,0}$; $\forall \vec x \in B(\vec x^{\,0}, r)$: $\vec F(\vec x, \vec h(\vec x)) = \vec 0$; $\vec h'(\vec x) = -\Big(\vec F'_{\vec y}(\vec x, \vec h(\vec x))\Big)^{-1} \vec F'_{\vec x}(\vec x, \vec h(\vec x))$. ⌋

$= h_2'(x, 0) = -F_y'(h_1(x,0), h_2(x,0))^{-1} F_x'(\dots)$

Упражнение 15. Пусть A — открытое подмножество R^m, $f_k \in C^1(A)$, $1 \le k \le m$. Предположим, что существует функция $\varphi \in C^1(R^m)$ такая, что $\|\varphi'\| \neq 0$ и $\forall \vec x \in A: \ \varphi(f_1(\vec x), f_2(\vec x), \dots, f_m(\vec x)) = 0$, функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ в этом случае называются ***функционально зависимыми.*** Доказать, что $\forall \vec x \in A: \ \dfrac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)}(\vec x) = 0$.

Упражнение 16. Пусть A — открытое подмножество R^m, $\vec{f} \in C^1(A, R^m)$, $\det \vec{f}\,'(\vec{x}) \neq 0, \vec{x} \in A$. Тогда для любого открытого множества $B \subset A$ образ $\vec{f}(B)$ есть открытое множество в R^m.

Упражнение 17*. Пусть $\vec{f} \in C(R^m, R^m)$ и $\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset R^m$: $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \geq \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Доказать, что: 1) $\vec{f}$ взаимно однозначно; 2) $\forall \vec{x} \in R^m$: $\det \vec{f}\,'(\vec{x}) \neq 0$; 3) $\vec{f}(R^m) = R^m$.

Упражнение 18. Пусть $B(\vec{0}, r) \subset R^m$, $B(\vec{0}, \rho) \subset R^n$ — открытые шары, отображение $\vec{F} \in C(B(\vec{0}, r) \times B(\vec{0}, \rho), R^n)$ и $\forall \vec{x} \in B(\vec{0}, r)\ \forall \{\vec{y}_1, \vec{y}_2\} \subset B(\vec{0}, \rho)$: $\|\vec{F}(\vec{x}, \vec{y}_1) - \vec{F}(\vec{x}, \vec{y}_2)\| \leq \lambda \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$ с некоторым числом $\lambda \in [0, 1)$. Предположим, что $\forall \vec{x} \in B(\vec{0}, r)$: $\|\vec{F}(\vec{x}, \vec{0})\| < \rho(1 - \lambda)$. Тогда $\exists!\, \vec{f} \in C(B(\vec{0}, r), B(\vec{0}, \rho))$: $\vec{F}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{f}(\vec{x})$, $\vec{x} \in B(\vec{0}, r)$.

Замечание. Применить теорему Банаха. Из этого утверждения легко получается основная часть теоремы 6.

12.3 Локальный относительный экстремум

12.3.1 Определения

Пусть A — открытое подмножество R^m и $f : A \to R$. Для натурального $s < m$ пусть $\varphi_j : A \to R$, $1 \leq j \leq s$ — заданные функции. Введём множество $M = \{\vec{x} \in A \mid \varphi_j(\vec{x}) = 0,\ 1 \leq j \leq s\}$, иногда говорят, что множество M определяется с помощью s ***уравнений связи:*** $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_s = 0$.

Определение 1. *Пусть $\vec{x}^0 \in M$. Функция f имеет в точке $\vec{x}^0$* ***локальный относительный максимум при условиях или ограничениях*** *$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_s = 0$, если*

$$\exists r > 0\ \forall \vec{x} \in (B(\vec{x}^0, r) \cap M) : f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}^0).$$

Локальный относительный максимум называется ***строгим,*** *если последнее неравенство выполняется со знаком "$<$" для $\vec{x} \neq \vec{x}^0$.*

Аналогично определяются понятия ***локального относительного минимума*** и ***строгого локального относительного минимума.*** Все введенные выше понятия описываются также следующими общими терминами: ***локальный относительный*** или ***условный*** экстремум.

Упражнение 19. Определить наименьшее на R^2 значение функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in R^2$. Определить наименьшее значение функции f при условии $x_1 + x_2 = 1$.

12.3.2 Необходимое условие локального относительного экстремума (правило множителей Лагранжа)

Теорема 7. *Предположим, что:* $s < m$, $f \in C^1(A)$, $\varphi_j \in C^1(A)$, $1 \le j \le s$, *и матрица* $\left(\dfrac{\partial\varphi_j(\vec{x}^0)}{\partial x_k}\right)_{j=1}^{s}\,{}_{k=1}^{m}$ *имеет ранг* s *в точке* $\vec{x}^0$ *— точке локального относительного экстремума функции* f *при ограничениях* $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_s = 0$.

Тогда существуют действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, *для которых точка* $\vec{x}^0$ *является критической точкой функции* $F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \dots + \lambda_s\varphi_s$.

Замечание. Функция F и числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ называются соответственно ***функцией Лагранжа*** и ***множителями Лагранжа***.

⌈ Допустим, что

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s)}{\partial(x_{m-s+1}, x_{m-s+2}, \dots, x_m)}(\vec{x}^0) \ne 0. \tag{1}$$

I. Определим теперь действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ так, чтобы

$$\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial\varphi_j(\vec{x}^0)}{\partial x_k} = 0, \quad m - s + 1 \le k \le m. \tag{2}$$

В силу предположения (1), эти числа определяются единственным образом.

II. Ограничения $\varphi_j(x_1, \dots, x_{m-s}, x_{m-s+1}, \dots, x_m) = 0$, $(x_1, \dots, x_m) \in A$, $1 \le j \le s$, согласно теореме о существовании и свойствах неявной функции, можно разрешить относительно переменных $x_{m-s+1}, \dots, x_m$ как функций от $x_1, \dots, x_{m-s}$ в некотором шаре B с центром в точке $(x_1^0, \dots, x_{m-s}^0)$. В этом шаре на основании правила дифференцирования сложной функции для каждого j, $1 \le j \le s$ получим

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k} + \sum_{\nu=m-s+1}^{m} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_k} = 0, \quad 1 \le k \le m - s. \tag{3}$$

III. Для $(x_1, \dots, x_{m-s}) \in B$ функция $f(x_1, \dots, x_m) =$

$$= f(x_1, \dots, x_{m-s}, x_{m-s+1}(x_1, \dots, x_{m-s}), \dots, x_m(x_1, \dots, x_{m-s}))$$

имеет локальный экстремум в точке $(x_1^0, \dots, x_{m-s}^0)$. Поэтому

$$\frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k} + \sum_{\nu=m-s+1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x_k} = 0, \quad 1 \le k \le m - s. \tag{4}$$

заменить в (2)

Учитывая равенства (2) и (3), из равенства (4) находим

$$0 = \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k} + \sum_{\nu=m-1+1}^{m}\left(-\sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial\varphi_j(\vec{x}^0)}{\partial x_\nu}\right)\frac{\partial x_\nu}{\partial x_k} =$$

$$= \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial\varphi_j(\vec{x}^0)}{\partial x_k}, \quad 1 \le k \le m - s. \quad ⌋$$

12.3.3 Достаточное условие

Теорема 8. *Предположим, что: 1) $f \in C^2(A)$, $\varphi_j \in C^2(A)$, $1 \le j \le s$; 2) $\vec{x}^0 \in M$ — критическая точка функции $F = f + \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j \varphi_j$ для некоторого набора действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$; 3) матрица $\left(\frac{\partial \varphi_j(\vec{x}^0)}{\partial x_k}\right)_{j=1}^{s}{}_{k=1}^{m}$ имеет ранг s, далее предполагаем выполнение условия (1) п. 10.3.2. Для любого элемента $(a_1, \ldots, a_{m-s}) \in R^{m-s}$ положим $Q(a_1, \ldots, a_{m-s}) := \sum\limits_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 F(\vec{x}^0)}{\partial x_j \partial x_k} a_j a_k$, где $a_{m-s+1}, \ldots, a_m$ определяются из уравнений $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j(\vec{x}^0)}{\partial x_k} a_k = 0$, $1 \le j \le s$.*

Если $Q(a_1, \ldots, a_{m-s}) > 0$, $(a_1, \ldots, a_{m-s}) \ne (0, \ldots, 0)$, то $\vec{x}^0$ — точка строгого относительного локального минимума для функции f. Если $Q(a_1, \ldots, a_{m-s}) < 0$, $(a_1, \ldots, a_{m-s}) \ne (0, \ldots, 0)$, то $\vec{x}^0$ — точка строгого относительного локального максимума для функции f.

⌈ Пусть $\vec{a} \in R^m$ таково, что $(\vec{x}^0 + \vec{a}) \in A$. С помощью формулы Тейлора имеем для некоторого $\theta \in (0,1)$

$$f(\vec{x}^0 + \vec{a}) - f(\vec{x}^0) = F(\vec{x}^0 + \vec{a}) - F(\vec{x}^0) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 F(\vec{x}^0 + \theta \vec{a})}{\partial x_j \partial x_k} a_j a_k;$$

$$0 = \varphi_j(\vec{x}^0 + \vec{a}) - \varphi_j(\vec{x}^0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j(\vec{x}^0 + \theta_j \vec{a})}{\partial x_k} a_k, \ \theta_k \in (0,1),\ 1 \le k \le s,$$

Далее нужно дважды использовать лемму 1 гл. 11. Первый раз — для того, чтобы определить $a_{m-s+1}, \ldots, a_m$ через $a_1, \ldots, a_{m-s}$, а второй раз — чтобы получить утверждение теоремы. ⌋

12.3.4 Собственные числа симметрической матрицы

Пусть $D = (d_{jk})_{j,k=1}^{m}$; $\{d_{jk}\} \subset R$; $d_{jk} = d_{kj}$, $1 \le j,k \le m$. Число $\lambda \in R$ называется ***собственным числом*** матрицы D, если $\det(D - \lambda E) = 0$. Вектор $\vec{x} \in R^m$, $\vec{x} \ne \vec{0}$, называется ***собственным вектором*** , соответствующим собственному числу λ матрицы D, если $D\vec{x} = \lambda \vec{x}$. Пусть $f(\vec{x}) := \vec{x}^t D \vec{x} = \sum\limits_{j,k=1}^{m} d_{jk} x_j x_k$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)^t \in R^m$; $f \in C(R^m)$.

Рассмотрим множество $M_1 := \{\vec{x} \in R^m \mid \|\vec{x}\| = 1\}$. Оно компактно, так как ограничено и замкнуто. Следовательно, существует вектор

$\vec{v}(1) \in M_1$ такой, что $f(\vec{v}(1)) = \max\limits_{M_1} f$. По теореме 7 существует число $\lambda_1 \in \boldsymbol{R}$ такое, что вектор $\vec{v}(1)$ является критической точкой следующей функции $F_1(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \lambda_1(1 - ||\vec{x}||^2)$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$. Поэтому $D\vec{v}(1) - \lambda_1\vec{v}(1) = \vec{0}$, откуда $\lambda_1 = \vec{v}(1)^t D\vec{v}(1) = f(\vec{v}(1))$.

Множество $M_2 := \{\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m \mid ||\vec{x}|| = 1,\ \vec{x}^t\vec{v}(1) = 0\}$ также компактно и существует $\vec{v}(2) \in M_2$ такой, что $f(\vec{v}(2)) = \max\limits_{M_2} f$. Заметим, что $M_2 \subset M_1$ и $f(\vec{v}(2)) \le f(\vec{v}(1))$. Существуют числа $\{\lambda_2, \mu_2\} \subset \boldsymbol{R}$ такие, что вектор $\vec{v}(2)$ является критической точкой функции $F_2(\vec{x}) = f(\vec{x}) + {}$ $+\lambda_2(1-||\vec{x}||^2)+\mu_2\vec{x}^t\vec{v}(1)$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$. Поэтому $2(D\vec{v}(2)-\lambda_2\vec{v}(2))+\mu_2\vec{v}(1) =$ $= \vec{0}$, и, следовательно, $\mu_2 = 0$; $D\vec{v}(2) = \lambda_2\vec{v}(2)$; $f(\vec{v}(2)) = \lambda_2 \le \lambda_1$.

Таким образом, наибольшее собственное число матрицы D равно наибольшему значению функции f на M_1 и достигается на собственном векторе, соответствующем этому собственному числу. Следующее по величине собственное число равно наибольшему значению f на M_2 и достигается на соответствующем собственном векторе и т. д.

12.3.5 Историческая справка

Якоби Карл Густав Якоб (1804 — 1851) — немецкий математик. Создатель теории эллиптических функций. Внёс большой вклад в разработку математических методов механики.

12.4 Дополнительные задачи к главам 10 — 12

1. Пусть $P_n([a,b])$ — множество всех многочленов с действительными коэффициентами не превосходящей n степени, рассматриваемых на отрезке $[a,b]$. Для двух многочленов $\{p,q\} \subset P_n([a,b])$, $p(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} p_j x^j$, $q(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} q_j x^j$, $x \in [a,b]$, положим $d(p,q) = \sum\limits_{j=0}^{n} |p_j - q_j|$. Доказать, что $(P_n([a,b]),d)$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Является ли множество всех многочленов с коэффициентами из $[0,1]$ замкнутым? Компактным?

2. Пусть $\boldsymbol{BV}([a,b])$ — множество всех действительных функций ограниченной вариации на $[a,b]$. Положим

$$d(f,g) = |f(a) - g(a)| + V(f - g, [a,b]), \quad \{f,g\} \subset \boldsymbol{BV}([a,b]).$$

Доказать, что $(\boldsymbol{BV}([a,b]),d)$ — полное метрическое пространство. Является ли это пространство сепарабельным?

3. Для функции $f : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ положим $\boldsymbol{BL}([a,b]) := \{f \mid ||f||_{BL} < +\infty\}$

и $||f||_{BL} := \sup\limits_{[a,b]} |f| + \sup\limits_{\{x,y\}\subset[a,b], x\neq y} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$. Пусть также $d(f,g) := ||f-g||_{BL}$, $\{f,g\} \subset \boldsymbol{BL}([a,b])$. Доказать, что:

a) $(\boldsymbol{BL}([a,b]), d)$ — полное сепарабельное метрическое пространство;

b) множество $\boldsymbol{BL}([a,b])$ всюду плотно в $(C([a,b]),\rho)$.

4. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех многочленов, рассматриваемых на отрезке $[a,b]$. Определить множества внутренних и предельных точек множества $\mathcal{P}$ в $(C([a,b]),\rho)$.

5. Пусть $\overline{B}(x,r)$ — замкнутый шар с центром в точке x и радиусом r в метрическом пространстве (X,d), $C(x,r)$ — замыкание открытого шара $B(x,r)$. Доказать, что $C(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$. Привести пример метрического пространства (X,d) такого, что $C(x,r) \neq \overline{B}(x,r)$ для некоторых x и r.

6. В пространстве $(C([1,2]),\rho)$ определить замыкание множества всех функций вида $f(x) = a_0 + a_1x^{1/2} + a_2x^{3/2} + \ldots + a_nx^{(2n-1)/2}$, $x \in [1,2]$; $n \in \boldsymbol{N}$, $\{a_0,a_1,\ldots,a_n\} \subset \boldsymbol{R}$.

Ответ: $C([1,2])$.

7. Пусть $A+B := \{(x_1+y_1, x_2+y_2) \mid (x_1,y_1) \in A,\ (x_2,y_2) \in B\}$, $A \subset \boldsymbol{R}^2$, $B \subset \boldsymbol{R}^2$. Доказать, что: a) $A+B$ открыто, если A или B открыто; b) $A+B$ замкнуто, если A и B замкнуты.

8. Какие из следующих подмножеств пространства $(C([0,1]),\rho)$:

a) $\{x \mid x(0)=0\}$; b) $\{x \mid \max\limits_{0\le x\le 1} x(t) > 1\}$; c) $\left\{x \;\middle|\; \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt \le 1\right\}$;

d) $\{x \mid \forall x \in [0,1] : x(t) > t\}$ замкнуты? Открыты?

9. Доказать, что метрическое пространство (X,d) сепарабельно тогда и только тогда, когда каждое открытое покрытие множества X содержит счётное подпокрытие.

10. Доказать, что в метрическом пространстве любое открытое множество есть счётное объединение замкнутых, а любое замкнутое — счётное пересечение открытых множеств.

11. Пусть F и G — непересекающиеся замкнутые множества метрического пространства. Доказать существование открытых непересекающихся множеств A и B таких, что $F \subset A$, $G \subset B$.

12. Пусть A_j — компактное множество в метрическом пространстве (X_j,d_j), $j=1,2$. Доказать, что множество $A_1 \times A_2$ компактно в декартовом произведении $(X_1 \times X_2, d = d_1 + d_2)$.

13. Пусть K — компактное множество в метрическом пространстве (X, d) и $f \in C(K)$. Доказать, что график $\{(x, y) \mid x \in K,\ y = f(x)\}$ — компактное множество в метрическом пространстве $(X \times \boldsymbol{R}, d_1)$, где $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, x_2) + |y_1 - y_2|$.

14. Какие из следующих подмножеств пространства $(C([a, b]), \rho)$ всюду плотны в нём: a) множество всех многочленов; b) $C^2([a, b])$; c) $\{x \mid x(a) + x(b) = 1\}$; d) $\left\{x \,\middle|\, \int\limits_a^b x(t)\,dt = 0\right\}$; e) $BV([a, b]) \cap C([a, b])$?

15. Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и $\{x_{jk} \mid 1 \leq k \leq n_j,\ j \geq 1\}$, $n_j \in \boldsymbol{N}$, $j \geq 1$, — произвольный набор элементов из X. Доказать, что множество $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{n_j} \overline{B}(x_{jk}, 1/j)$ компактно.

16. Предположим, что множества A и B компактны в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ и $C := \{\alpha\vec{x} \mid \vec{x} \in A\}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$; $D := \{\alpha\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in A,\ \vec{y} \in B\}$. Доказать, что множества C и D компактны в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$.

17. Пусть $\{K_n \mid n \geq 1\}$ — последовательность связных компактных множеств в метрическом пространстве, причём $K_{n+1} \subset K_n$, $n \geq 1$. Доказать, что множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ связно. Привести пример, показывающий, что условие компактности множеств нельзя заменить их замкнутостью.

18. Пусть A — компактное подмножество $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$. Доказать, что следующее множество $\Big\{\vec{x} \mid \exists\, n \in \boldsymbol{N}\ \exists\,\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset [0, 1],\ \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1,$ $\exists\,\{\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(n)}\} \subset A : \vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{x}^{(k)}\Big\}$ компактно.

19. Пусть и $A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ x_2 = 0\}$, O — открытое покрытие множества A в $(\boldsymbol{R}^2, \rho)$. Доказать существование $\varepsilon > 0$ такого, что O есть покрытие множества $A_\varepsilon := \{(x_1, x_2) \mid -\varepsilon \leq x_1 \leq 1 + \varepsilon,\ |x_2| \leq \varepsilon\}$.

20. Пусть (X, d) — метрическое пространство и $f \in C(X)$. Предположим, что для некоторого $c \in \boldsymbol{R}$ множество $\{x \mid f(x) \leq c\}$ непусто и компактно, Доказать, что $\exists\, x_* \in X\ \forall\, x \in X : f(x_*) \leq f(x)$.

21. Пусть A — некоторое преобразование полного метрического пространства (X, d) в себя, T — гомеоморфизм этого пространства в себя. Предположим, что $T^{-1}AT$ — преобразование сжатия. Доказать, что A имеет единственную неподвижную точку.

22. Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство, а преобразование $A: \ X \to X$ удовлетворяет условию $d(Ax, Ay) < d(x,y)$, для $\{x,y\} \subset X, \ x \neq y$. Доказать, что преобразование A имеет единственную неподвижную точку.

23. Пусть $f(x_1,x_2) = \left(x_1^{1/3} + x_2^{1/3}\right)^3$, $(x_1,x_2) \in \boldsymbol{R}^2$. Доказать, что:
a) $f \in C(\boldsymbol{R}^2)$; b) существуют $f_1'(0,0)$, $f_2'(0,0)$; c) f не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

24. Пусть A — симметрическая матрица размера $m \times m$, $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^m$, $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\,t} A\vec{x} - \vec{a}^{\,t}\vec{x}$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$. Доказать, что $f'(\vec{x}) = 2A\vec{x} - \vec{a}$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$.

25. Пусть $f(\vec{x}) = ||\vec{x}||$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$. Проверить, что для любого $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^m$ не существует $f_{\vec{a}}'(\vec{0})$. Доказать, что функция f недифференцируема в точке $\vec{0}$ и что $f'(\vec{x}) = \vec{x}/||\vec{x}||$ для $\vec{x} \neq \vec{0}$.

26. Вычислить $f''(\vec{x})$: a) $f(\vec{x}) = ||\vec{x}||$, $\vec{x} \neq \vec{0}$; b) $f(\vec{x}) = (\vec{a}^{\,t}\vec{x})^2$, $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^m$.

Ответ: a) $||\vec{x}||^{-1}E - ||\vec{x}||^{-3}\vec{x}\vec{x}^{\,t}$; b) $2\vec{a}\vec{a}^{\,t}$.

27. Пусть $B = \{\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m \mid ||\vec{x}|| \leq 1\}$. Предположим, что функция $f \in C(B)$ дифференцируема во внутренних точках B и $f(\vec{x}) = 0$ для точек $\vec{x}$, $||\vec{x}|| = 1$. Доказать, что $\exists\, \vec{x}^{\,0}, ||\vec{x}^{\,0}|| < 1 : f'(\vec{x}^{\,0}) = \vec{0}$.

28. Пусть D — замкнутое подмножество $\boldsymbol{R}^m$, $f \in C(D)$. Предположим, что для любой последовательности $\{\vec{x}_n \mid n \geq 1\} \subset D$ такой, что $||\vec{x}_n|| \to +\infty$, $n \to \infty$, справедливо соотношение $f(\vec{x}_n) \to +\infty$, $n \to \infty$. Доказать, что $\exists\, \vec{x}_* \in D \ \forall\, \vec{x} \in D : f(\vec{x}_*) \leq f(\vec{x})$.

29. Пусть $f \in C(\boldsymbol{R}^m)$ и для некоторого $a \in \boldsymbol{R}$ множество $\{\vec{x} \mid f(\vec{x}) \leq a\}$ непусто и ограничено. Доказать, что функция f принимает наименьшее на $\boldsymbol{R}^m$ значение.

30. Для функции $F: \ ([a,b]\times\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ существует F_2' и $F_2' \in C([a,b]\times\boldsymbol{R})$. Предположим, что для функций $\{g_1, g_2\} \subset C([a,b]) : F(x, g_k(x)) = 0$, $x \in [a,b]$, $k = 1,2$, и $\exists\,!x_0 \in [a,b] : g_1(x_0) = g_2(x_0) =: y_0$. Доказать, что $F_2'(x_0,y_0) = 0$.

31. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x_1,x_2) = x_1x_2$ на кольце $\{(x_1,x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$.

32. Найти кратчайшее расстояние от точки $(1,4)$ до параболы $y^2 = 2x$, $y \in \boldsymbol{R}$.

33. Найти наибольшее значение произведения $x_1^2x_2^2\ldots x_m^2$ при условии $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2 = 1$.

34. Пусть $(a_{jk})_{j,k=1}^m$ — симметрическая положительно определённая матрица с действительными элементами. Доказать, что существует $\alpha > 0$ такое, для которого $\sum\limits_{j,k=1}^m a_{jk}x_jx_k \geq \alpha \sum\limits_{j=1}^m x_j^2$, $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \boldsymbol{R}^m$.

35. Пусть $(a_{jk})_{j,k=1}^m$ — симметрическая положительно определённая матрица с действительными элементами, $\{a, b_1, b_2, \ldots, b_m\} \subset \boldsymbol{R}$ и

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = a + \sum_{j=1}^m b_jx_j + \sum_{j,k=1}^m a_{jk}x_jx_k.$$

Доказать, что f принимает наименьшее на $\boldsymbol{R}^m$ значение.

36. Пусть P — многочлен от x_1 и x_2. Верно ли, что существует точка, в которой $|P|$ принимает наименьшее значение на $\boldsymbol{R}^2$? Аналогичное утверждение верно для многочлена от одной переменной на $\boldsymbol{R}$. Рассмотреть пример: $P(x_1, x_2) = (x_1x_2 - 1)^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$.

37. Для фиксированного $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^m$ определить $\max\limits_{\{\vec{x} \mid \|\vec{x}\|=1\}} \vec{a}^{\,t}\vec{x}$.

38. Определить расстояние от точки $\vec{x}^{\,0}$ до гиперплоскости $\{\vec{x} \mid \vec{a}^{\,t}\vec{x} = b\}$, вектор $\vec{a}$ и число $b \in \boldsymbol{R}$ фиксированы.

39. Определить наименьшее и наибольшее значения функции $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + x_1x_2 - x_1$, $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$, на следующем множестве $\{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 1\}$.

40. Для отображения $\vec{F}(x) = \left(\int\limits_0^{2\pi} x(t)\cos t\,dt, \int\limits_0^{2\pi} x(t)\sin t\,dt\right)^t$, где $x \in C([0, 2\pi])$, определить $\vec{F}(C([0, 2\pi]))$.

41. Для отображения $\vec{F}(x) = \left(\int\limits_0^1 tx(t)\,dt, \int\limits_0^1 t^2x(t)\,dt, \int\limits_0^1 t^3x(t)\,dt\right)^t, x \in C([0,1])$, определить $\vec{F}(C([0,1]))$.

Ответ: $\boldsymbol{R}^3$.

42. Доказать, что отображение $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sin x_1 - \frac{1}{3}\cos x_2 + 2 \\ \frac{1}{6}\cos x_1 + \frac{1}{2}\sin x_2 - 1 \end{pmatrix}$ является сжимающим в $(\boldsymbol{R}^2, \rho)$.

43. Доказать, что отображение $\vec{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - 2 \\ \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + 3 \end{pmatrix}$ имеет единственную неподвижную точку.

44. Пусть $\vec{f}: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ — дифференцируемое на $\boldsymbol{R}^m$ отображение. Положим $g(\vec{x}) = ||\vec{f}(\vec{x})||$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$. Доказать, что функция g дифференцируема в точках множества $\boldsymbol{R}^m \setminus \{\vec{x} \mid \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}\}$.

45. Пусть $\vec{f}: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ — дифференцируемое на $\boldsymbol{R}^m$ отображение, для которого матрица Якоби $\vec{f}'$ постоянна. Доказать, что $\vec{f}$ — аффинное отображение.

46. Для отображения $\vec{f}: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ существует $\vec{f}'$ на $\boldsymbol{R}^m$, причём $\vec{f}'(\vec{x})$ положительно определена для каждого $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$. Доказать, что $\forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \boldsymbol{R}^m : \left(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\right)^t (\vec{x} - \vec{y}) \geq 0$.

47. Пусть A — сжимающее в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ преобразование и $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x} - A(\vec{x})$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$. Доказать, что $\vec{F}$ — гомеоморфизм $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ на себя.

48. Для отображения $\vec{f}: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ существует $\vec{f}'$ на $\boldsymbol{R}^m$, и для некоторого $\alpha > 0$ имеет место $||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})|| \geq \alpha ||\vec{x} - \vec{y}||$, $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \boldsymbol{R}^m$. Доказать, что для любого $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$ матрица $\vec{f}'(\vec{x})$ обратима.

49. Отображение $\vec{f}: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ непрерывно дифференцируемо на $\boldsymbol{R}^m$ и удовлетворяет условию Липшица $\exists\, L \in \boldsymbol{R}\ \forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \boldsymbol{R}^m : ||\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})|| \leq L ||\vec{x} - \vec{y}||$. Доказать, что $\sup\limits_{||\vec{u}|| \leq 1} ||\vec{f}'(\vec{x})\vec{u}|| \leq L$, $\vec{x} \in \boldsymbol{R}^m$.

50. Пусть $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f \in C^1(\boldsymbol{R})$ и $\exists\, \lambda \in [0,1)\ \forall\, x \in \boldsymbol{R} : |f'(x)| < \lambda$. Доказать, что отображение $\vec{F}(x_1, x_2) = (x_1 + f(x_2), x_2 + f(x_1))^t$ есть биекция $\boldsymbol{R}^2$ на себя.

51. Пусть $A \subset \boldsymbol{R}^m$, $\vec{f}: A \to \boldsymbol{R}^n$, $\vec{a} \in \boldsymbol{R}^m$, отрезок $I = \{\vec{x} + \tau\vec{a} \mid 0 \leq \tau \leq 1\} \subset A$, и $\vec{f} \in C^1(A, \boldsymbol{R}^n)$. Доказать, что $\vec{f}(\vec{x}+\vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}) = \int\limits_0^1 \vec{f}'(\vec{x}+\tau\vec{a})\vec{a}\, d\tau$.

52. Предположим, что выполнены условия предыдущей задачи и, кроме того, $\exists\, L \in \boldsymbol{R}\ \ \forall \{\vec{u}, \vec{v}\} \subset I :\ ||\vec{f}'(\vec{u}) - \vec{f}'(\vec{v})|| \leq L ||\vec{u} - \vec{v}||$. Доказать, что $||\vec{f}(\vec{x} + \vec{a}) - \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}'(\vec{x})\vec{a}|| \leq L ||\vec{a}||^2$.

53. Отображение $A: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ имеет единственную неподвижную точку $\vec{x}^*$ и удовлетворяет условию: для любого компакта K существует число $\alpha \in [0,1)$ такое, что $||A(\vec{x}) - A(\vec{y})|| \leq \alpha ||\vec{x} - \vec{y}||$, $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset K$. Доказать, что для любого $\vec{x}^{\,0} \in \boldsymbol{R}^m$ последовательность $\vec{x}^{\,0}$, $\vec{x}^{\,1} = A(\vec{x}^{\,0})$, $\vec{x}^{\,2} = A(\vec{x}^{\,2})$, $\ldots$, $\vec{x}^{\,n} = A(\vec{x}^{\,n-1})$, $\ldots$ сходится к $\vec{x}^*$.

54. Пусть $\vec{f}: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$, $\vec{f} \in C^1(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^m)$, $\overline{B}(\vec{a}, r)$ — замкнутый шар. Предположим,что существует $\lambda \in (0,1)$, удовлетворяющее условиям:

a) $\|\vec{f}(\vec{a})-\vec{a}\| \le (1-\lambda)r$; b) $\sup\limits_{\vec{x}\in\overline{B}(\vec{a},r)} \|\vec{f}'(\vec{x})\| \le \lambda$. Доказать, что $\exists\,!\vec{x}^* \in \overline{B}(\vec{a},r) : \vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$.

55*. Пусть $\vec{f} : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$, $\vec{f} \in C(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^m)$ и K — компактное множество. Предположим, что для некоторого $\lambda \in (0,1)$ справедливо неравенство $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \le \lambda\|\vec{x}-\vec{y}\|$, $\{\vec{x},\vec{y}\} \subset (\boldsymbol{R}^m \setminus K)$. Доказать, что отображение $\vec{f}$ имеет неподвижную точку.

56. (Теорема Дини). Пусть (X,d) — компактное метрическое пространство и функции $f_n \in C(X)$, $n \ge 1$, удовлетворяют условиям:

1) $\forall\, x \in X\ \forall\, n \ge 1 : f_n(x) \le f_{n+1}(x)$; 2) $\forall\, x \in X : f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$; 3) $f \in C(X)$. Доказать, что последовательность $\{f_n(x),\ x \in X \mid n \ge 1\}$ сходится равномерно на X к функции f.

Глава 13

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

13.1 Несобственные интегралы

13.1.1 Определение интегралов по неограниченным интервалам

Пусть функция $f : [a, +\infty) \to \boldsymbol{R}$ и число $a \in \boldsymbol{R}$ таковы, что $\forall A \geq a : f \in \boldsymbol{R}([a, A])$. Далее это условие предполагается выполненным и не оговаривается. Пусть $\varphi(A) := \int\limits_a^A f(x)\,dx, \quad A \geq a$.

*Определение 1. **Несобственным интегралом***

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

от функции f по множеству $[a, +\infty)$ называется конечный предел

$$\lim_{A \to +\infty} \varphi(A) = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx, \tag{2}$$

*если этот предел существует. При этом говорят, что несобственный интеграл (1) **сходится**. Если же предел в (2) не существует или бесконечен, то несобственный интеграл (1) называется **расходящимся**.*

Замечание. Если интеграл (1) сходится, то для любого $b > a$ сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_b^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{3}$$

причём

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Если для некоторого $b > a$ сходится интеграл (3), то сходится интеграл (1) и справедливо равенство (4). Оба эти утверждения следуют из равенства $\int_a^A f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^A f(x)\,dx, \quad a \le b \le A$, и определения несобственного интеграла. Далее утверждения замечания используются без оговорок.

Примеры. 1. Интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ сходится и имеет значение 1, так как $\lim_{A\to+\infty} \varphi(A) = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} (1 - e^{-A}) = 1.$

2. Справедливо равенство $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, так как $\lim_{A\to+\infty} \varphi(A) = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} (\operatorname{arctg} A - 0) = \frac{\pi}{2}$.

3. Пусть $a > 0$. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится и имеет значение $\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$, поскольку $\varphi(A) =$

$$= \int_a^A \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln A - \ln a, & \alpha = 1, \\ \dfrac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \dfrac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha \ne 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi(A) \to \begin{cases} \dfrac{a^{-\alpha+1}}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha \le 1. \end{cases}$$

4. Интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ расходится, поскольку для функции $\varphi(A) = \int_0^A \sin x\,dx = 1 - \cos A, \quad A > 0$, не существует предела при $A \to +\infty$.

13.1.2 Элементарные свойства

Приводимые ниже утверждения следуют из свойств интеграла Римана и определения несобственного интеграла.

1^0. Предположим, что несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f_k(x)\,dx$, $k = 1,2$ сходятся. Тогда имеем $\int_a^{+\infty} (cf_1(x))\,dx = c\int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx, \quad c \in \boldsymbol{R}$ и $\int_a^{+\infty} (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx$, т. е. сходятся несобственные интегралы в левых частях равенств и справедливы равенства.

2^0 Предположим, что функция f имеет примитивную F на $[a, +\infty)$. Если существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) =: F(+\infty), \tag{1}$$

то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a)$. Если предел в (1) не существует или бесконечен, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится.

Упражнение 1. Пусть $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f \in C([0, +\infty)), p \geq 1$. Доказать равенство $\left(\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx\right)^p = p\int\limits_0^{+\infty} f(x)\left(\int\limits_x^{+\infty} f(u)\,du\right)^{p-1} dx$ при предположении существования интеграла в левой части равенства.

3^0. Предположим, что $\{f, g\} \subset C^1([a, +\infty))$. Если один из несобственных интегралов

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx \tag{2}$$

сходится и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))$, то сходится второй из интегралов (2) и справедливо равенство

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}(f(x)g(x)) - f(a)g(a) - \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx.$$

Пример. Для $a = 0$, $f(x) = x$, $g'(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$, имеем $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}(-xe^{-x}) - 0 + \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1.$

4^0. ***Критерий Коши.*** Для того, чтобы несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A_0 \geq a\ \forall\, A' \geq A_0\ \forall\, A'' \geq A_0 : \left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

13.1.3 Сходимость интегралов от неотрицательных функций

В настоящем разделе изучается сходимость несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Теорема 1. *Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ от неотрицательной функции f сходится тогда и только тогда, когда $\exists\, C \in R\ \forall\, A \geq a : \varphi(A) \leq C$.*

$A' < A''$ $\varphi(A'') = \int_a^{A'} f\,dx + \int_{A'}^{A''} f\,dx \geq \varphi(A')$

⌈ Функция φ монотонно не убывает и ограничена на $[a, +\infty)$, следовательно, существует предел $\lim\limits_{A \to +\infty} \varphi(A)$. ⌋

Замечание. Для неотрицательной функции справедливо неравенство $\varphi(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx \leq \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad A \geq a.$

Упражнение 2. Для каких функций последнее неравенство является строгим?

Теорема 2. *Пусть $f : [a, +\infty) \to \boldsymbol{R}$, $g : [a, +\infty) \to \boldsymbol{R}$, причём $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \geq a$. Тогда сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ влечёт сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.*

⌈ Доказательство состоит в использовании теоремы 1 и следующего неравенства $\int\limits_a^A f(x)\,dx \leq \int\limits_a^A g(x)\,dx \leq \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$, $A \geq a$. ⌋

Примеры. 1. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos^2 x}{1 + x^2}\,dx$ сходится, поскольку применима теорема 2 для $a = 0$; $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1 + x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \geq 0$.

2. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ сходится, поскольку применима теорема 2 для $a = 1$; $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = e^{-x}$, $x \geq 1$.

3. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x} \ln x\,dx$сходится, поскольку применима теорема 2 для $a = 1$, $f(x) = e^{-x} \ln x$, $g(x) = xe^{-x}$, $x \geq 1$, и справедливо неравенство $\ln x < x$, $x > 1$.

Следствие 1. *Предположим, что для некоторых чисел $0 < C < +\infty$, $\alpha > 0$ $f(x) \sim \dfrac{C}{x^\alpha}, x \to \infty \iff \lim\limits_{x \to +\infty} (x^\alpha f(x)) = C$. При $\alpha > 1$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, при $\alpha \leq 1$ этот интеграл расходится.*

⌈ Пусть $\alpha > 1$. По определению предела функции в точке $\exists\, A_0 \geq a\ \forall\, x \geq A_0 : f(x) \leq \dfrac{2C}{x^\alpha}$. Теперь применим теорему 2 для $a = A_0$ и функций f, $g(x) = \dfrac{2C}{x^\alpha}$, $x \geq A_0$.

Пусть $\alpha \leq 1$. Аналогично, $\exists\, A_0 \geq a\ \forall\, x \geq A_0 : f(x) \geq \dfrac{C}{2x^\alpha}$. При этом интеграл $\int\limits_{A_0}^{+\infty} \dfrac{C}{2x^\alpha}$ расходится. Следовательно, по теореме 2, расходится

$x^\alpha f(x) \to C > \frac{C}{2}$

интеграл $\int\limits_{A_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ ⌋

13.1.4 Абсолютно и условно сходящиеся интегралы

Определение 2. Интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

*называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

*Если интеграл (1) сходится, а интеграл (2) расходится. то интеграл (1) называется **условно сходящимся**.*

Теорема 3. *Абсолютно сходящийся интеграл сходится.*

⌈ Пусть интеграл (2) сходится. Для неотрицательных на $[a,+\infty)$ функций $f_-(x) = (-f(x) + |f(x)|)/2$, $f_+(x) = (f(x) + |f(x)|)/2$, $x \geq a$, справедливы соотношения: $0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|$, $0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|$, $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$, $x \geq a$.

По теореме 2 сходятся оба интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f_-(x)\,dx$, $\int\limits_a^{+\infty} f_+(x)\,dx$, а вместе с ними сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} (f_+(x) - f_-(x))\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.⌋

Пример. Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{3}$$

сходится условно (подынтегральная функция равна 1 при $x = 0$).

⌈ I. Интеграл (3) сходится. Достаточно доказать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Согласно формуле интегрирования по частям, имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\cos x}{x}\right) + \frac{\cos 1}{1} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx. \tag{4}$$

В правой части (4) предел существует и равен 0, а интеграл сходится абсолютно. Следовательно, сходится интеграл в левой части (4).

II. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ расходится, так как

$$\int\limits_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty, \quad n \to \infty. \quad \rfloor$$

Теорема 4. *(Признак Дирихле). Предположим, что функции f и g удовлетворяют таким условиям: 1) $\exists C \in R\ \forall A \geq a : \left|\int\limits_a^A f(x)\, dx\right| \leq C$; 2) функция g монотонна на $[a, +\infty)$; 3) $g(x) \to 0,\ x \to +\infty$. Тогда следующий интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx \tag{5}$$

сходится.

$\lceil$ Доказательство проведём при следующих дополнительных предположениях: существует g', $\forall A \geq a :\ g' \in R([a, A])$; $\ f \in C([a, +\infty))$.

Положим $F(x) = \int\limits_a^x f(u)\, du,\ x \geq a;\ F(a) = 0,\ F'(x) = f(x),\ x \geq a.$ Применим к интегралу (5) формулу интегрирование по частям

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx = \int\limits_a^{+\infty} F'(x) g(x)\, dx = \tag{6}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (F(x) g(x)) - 0 - \int\limits_a^{+\infty} F(x) g'(x)\, dx.$$

$|F(A)g(A)| \overset{(1)}{\leq} C \cdot |g(A)| \to 0 \qquad A \to \infty$

Согласно условиям 1) и 3) теоремы 4, предел в правой части (6) существует и равен 0. Интеграл в правой части (6) сходится абсолютно, так как $\int\limits_a^{+\infty} |F(x)| \cdot |g'(x)|\, dx \leq C \int\limits_a^{+\infty} |g'(x)|\, dx \overset{(2)}{=} C \left|\int\limits_a^{+\infty} g'(x)\, dx\right| = C|g(a)|$, g'-пост. знак в силу условий 2) и 3). Поэтому сходится интеграл из левой части (6). $\rfloor$

Примеры. 1. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ сходится. Достаточно доказать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ которая следует из теоремы 4 для $a = 1$, функций $f(x) = \sin x,\ g(x) = 1/x;\ x \geq 1$, условия 1) — 3) теоремы 4 выполняются с числом $C = 2$.

2. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^3\, dx$ сходится. Достаточно доказать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \sin x^3\, dx$. Для доказательства в теореме 4 положим $a = 1,\ f(x) = x^2 \sin x^3,\ g(x) = 1/x^2;\ x \geq 1$. Условия 1) — 3) выполняются с числом $C = 2/3$.

Теорема 5. *(Признак Абеля). Предположим, что функции f и g удовлетворяют условиям: 1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ схо-*

дится; 2) функция g монотонна на $[a, +\infty)$; 2) функция g ограничена на $[a, +\infty)$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *сходится.* $g_1 = g - \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$

⌈ Доказательство следует из признака Дирихле. $f = F$ $\int\limits_a^{\infty} f\cdot g\,dx = \int\limits_a^{\infty} f(g - \lim g)\,dx + \int\limits_a^{\infty} \lim g$ ⌋

Упражнение 3. Доказать сходимость интегралов: a) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$; b) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$; c) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$; d) $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin 2x \cdot \sin x}{x}\,dx$; e) $\int\limits_0^{+\infty} x \sin x^3\,dx$.

Упражнение 4. Пусть $f \in C(\mathbf{R})$ — периодическая с периодом $2T > 0$ функция и $\int\limits_0^{T} f(x)\,dx > 0$, $\int\limits_0^{2T} f(x)\,dx = 0$. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{f(x)}{1+x}\,dx$ сходится условно.

Замечание. Определение и свойства интеграла $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ аналогичны приведенным выше. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x)\,dx$ определяется как сумма интегралов $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ для любого $a \in \mathbf{R}$.

13.1.5 Несобственные интегралы от неограниченных функций

Рассмотрим обобщение интеграла на случай, когда функция определена на отрезке, исключая конечное число точек, и является неограниченной в окрестностях этих точек. Поскольку обобщение интеграла должно сохранять свойство аддитивности при разбиении отрезка на части, то можно предполагать, что на заданном отрезке имеется только одна точка — конец отрезка, в окрестности которой функция неограничена.

Пусть $\{a, b\} \subset \mathbf{R}$ и $a < b$. Будем рассматривать функции $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ такие, что $\forall c \in (a, b) : f \in \mathcal{R}([a, c])$, и такие, что в интервале (c, b) они неограничены. Примерами таких функций являются:

$$1)\ f(x) = \frac{1}{1-x},\ x \in [0, 1); \quad 2)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}},\ x \in [\pi/2, \pi).$$

Случай, когда функция неограничена в окрестности точки a рассматривается аналогично. Пусть $\varphi(c) := \int\limits_a^{c} f(x)\,dx$, $c \in (a, b)$.

Определение 3. Несобственным интегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

от функции f по множеству $[a,b)$ называется конечный предел

$$\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)\,dx, \tag{2}$$

если этот предел существует. При этом говорят, что несобственный интеграл (1) ***сходится.*** *Если же предел в (2) не существует или бесконечен, то несобственный интеграл (1) называется* ***расходящимся.***

Примеры. 1. Несобственный интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $\alpha > 0$, сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$. Действительно, $\varphi(c) = \int_a^c \frac{dx}{(b-x)^\alpha} =$
$$\begin{cases} \ln(b-a) - \ln(b-c), & \alpha = 1; \\ \dfrac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \dfrac{(b-c)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha \neq 1, \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi(c) \to \begin{cases} +\infty, & \alpha \geq 1, \\ \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \end{cases}$$
при $c \to b-$.

2. Несобственный интеграл $\int_0^1 \ln x\,dx$ сходится. Действительно, $\int_c^1 \ln x\,dx = -1 - c\ln c + c \to -1, \quad c \to 0+$.

Приведём некоторые свойства интегралов от неограниченных функций, Доказательства этих свойств аналогичны доказательствам свойств интегралов по неограниченному интервалу.

1^0. Пусть $f(x) \geq 0$ для $x \in [a,b)$. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\exists\, C \in \boldsymbol{R} \quad \forall\, c < b: \ \int_a^c f(x)\,dx \leq C$.

2^0. Пусть $0 \leq f(x) \leq g(x)$ для $x \in [a,b)$. Сходимость интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ влечёт за собой сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

3^0. Если для некоторых $\alpha > 0$ и $0 < C < +\infty$ $f(x) \sim \dfrac{C}{(b-x)^\alpha}, x \to b- \iff (f(x)(b-x)^\alpha) \to C,\ x \to b-$, то при $\alpha < 1$ интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится и при $\alpha \geq 1$ расходится.

4^0. Если функция f имеет примитивную F на $[a,b)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to b-} F(x) =: F(b-)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a)$.

5^0. Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{1}{x} \sin\frac{1}{x}\,dx$ сходится условно.

Упражнение 5. Доказать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

Упражнение 6. В чём заключается ошибочность следующего рассуждения $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$?

13.2 Функции, определяемые с помощью интегралов

13.2.1 Введение

Пусть $\{a, b, c, d\} \subset R$, причём $a < b$, $c < d$, $f : ([a, b] \times [c, d]) \to R$.

Если для любого $y \in [c, d]$ функция $f(\cdot, y) : [a, b] \to R$, $f(\cdot, y) \in R([a, b])$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)\,dx =: J(y)$, $y \in [c, d]$, определяет функцию J на $[c, d]$. Величина y в интеграле для $J(y)$ называется ***параметром.*** Определяемые таким образом функции часто используются в математических рассуждениях и приложениях математики. Далее приводятся типичные условия, обеспечивающие для функции J такие свойства, как непрерывность, дифференцируемость и т. п., а также приводятся формулы для вычисления J' и т. п.

13.2.2 Теоремы о непрерывности, интегрировании и дифференцировании функции J

Теорема 6. *Предположим, что* $f \in C([a, b] \times [c, d])$. *Тогда* $J \in C([c, d])$.

⌈ Для любого $y \in [c, d]$ функция $f(\cdot, y) \in R([a, b])$. Следовательно, значение $J(y)$ определено для любого $y \in [c, d]$. Пусть произвольное $y_0 \in [c, d]$ фиксировано. Докажем непрерывность J в точке y_0. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Множество $[a, b] \times [c, d]$ ограничено и замкнуто в (R^2, ρ), следовательно, компактно. По теореме Кантора функция J равномерно непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$. Поэтому

$$\exists\,\delta > 0\ \forall\,\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \subset ([a, b] \times [c, d]),\ \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta\ :$$

$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| < \varepsilon/(b-a)$. Положим $x_1 = x_2 = x$, $y_1 = y$, $y_2 = y_0$. Тогда из следующего неравенства $\rho((x,y),(x,y_0)) = |y - y_0| < \delta$ получаем $\forall\, x \in [a,b] : |f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon/(b-a)$. Отсюда

$$|J(y) - J(y_0)| = \left|\int\limits_a^b (f(x,y) - f(x,y_0))\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx < \varepsilon. \ \rfloor$$

Теорема 7. *Предположим, что функция $f : ([a,b] \times [c,d]) \to R$ удовлетворяет таким условиям: 1) $\forall\, y \in [c,d] : f(\cdot,y) \in C([a,b])$; 2) $\forall\,(x,y) \in ([a,b] \times [c,d])$ существует $f_2'(x,y)$; 3) $f_2' \in C([a,b] \times [c,d])$. Тогда существует производная $J'(y)$, $y \in [c,d]$, и $J'(y) = \int\limits_a^b f_2'(x,y)\,dx$, $y \in [c,d]$* ***(формула Лейбница)***.

$\lceil$ Пусть $y_0 \in [c,d]$. Согласно формуле Ньютона-Лейбница получим такое равенство $\dfrac{J(y_0 + \Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} = \dfrac{1}{\Delta y} \int\limits_a^b (f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0))\,dx =$
$= \int\limits_a^b \left(\dfrac{1}{\Delta y} \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} f_2'(x,y)\,dy\right) dx, \Delta x \ne 0$. Используя это равенство, имеем

$$\left|\frac{J(y_0 + \Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} - \int\limits_a^b f_2'(x,y_0)\,dx\right| =$$
$$= \left|\int\limits_a^b \left(\frac{1}{\Delta y} \int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} (f_2'(x,y) - f_2'(x,y_0))\,dy\right) dx\right| \le$$
$$\le \int\limits_a^b \frac{1}{|\Delta y|} \left|\int\limits_{y_0}^{y_0+\Delta y} |f_2'(x,y) - f_2'(x,y_0)|\,dy\right| dx \to 0, \quad \Delta y \to 0,$$

в силу равномерной непрерывности f_2' на $[a,b] \times [c,d]$, как и при доказательстве теоремы 6. $\rfloor$

Теорема 8. *Пусть $f \in C([a,b] \times [c,d])$.*

Тогда $\int\limits_c^d J(y)\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx.$

$\lceil$ Согласно теореме 6, J — непрерывная на $[c,d]$ функция, а интеграл в скобках — непрерывная на $[a,b]$ функция. Поэтому все интегралы в утверждении теоремы определены. Для каждых $z \in [c,d]$ и $(x,z) \in ([a,b] \times [c,d])$ положим

$$g(z) := \int\limits_c^z J(y)\,dy, \ h(z) := \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^z f(x,y)\,dy\right) dx, \ F(x,z) := \int\limits_c^z f(x,y)\,dy.$$

Поскольку $J \in C([c,d])$, то существует $g'(z) = J(z)$, $z \in [c,d]$. Функция $F(x,z)$ при каждом $z \in [c,d]$ непрерывна по x на $[a,b]$ по теореме 6. Для любой точки (x,z) существует $F_2'(x,z) = f(x,z)$ и $F_2' \in C([a,b] \times [c,d])$, поэтому, в силу теоремы 7, для каждого $z \in [c,d]$ существует $h'(z)$ и $h'(z) = J(z)$. Таким образом, $g'(z) = h'(z) = J(z)$, $z \in [c,d]$, причём $g(c) = h(c) = 0$. Следовательно, $g(z) = h(z)$, $z \in [c,d]$. Доказываемое равенство получается при $z = d$. $\rfloor$

Пример. Вычислим интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx$, $0 < a < b$.

$\lceil$ Согласно правилу Лопиталя, имеем $f(x) := \frac{x^b - x^a}{\ln x} \to 0$, $x \to 0+$; $f(x) \to b-a$, $x \to 1-$. Поэтому можно считать, что $f(0) = 0$, $f(1) = b-a$. Поскольку $f(x) = \int\limits_a^b x^y\, dy$, $x \in [0,1]$, то, применяя теорему 8, получим

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_a^b x^y\, dy\Big)\, dx = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_0^1 x^y\, dx\Big)\, dy =$$
$$= \int\limits_a^b \Big(\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_{x=0}^{x=1}\Big)\, dy = \ln\frac{1+b}{1+a}. \quad \rfloor$$

Упражнение 7. Пусть $f \in C^1([a,b] \times [c,d])$, $\alpha : [c,d] \to [a,b]$, $\beta : [c,d] \to [a,b]$, причём α' и β' существуют на $[c,d]$. Доказать следующую ***формулу Лейбница***

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\, dx = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_2'(x,y)\, dx + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y),$$

где $y \in [c,d]$.

13.2.3 Равномерная сходимость и теорема о предельном переходе

Пусть $f : ([a,b] \times [c,d]) \to \boldsymbol{R}$ и $\forall\, y \in [c,d) : f(\cdot,y) \in C([a,b])$. Предположим также, что $\forall\, x \in [a,b] : f(x,y) \to g(x) \in \boldsymbol{R}$, $y \to d-$. Естественно ожидать, что $J(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\, dx \to \int\limits_a^b g(x)\, dx$, $y \to d-$. Однако, это утверждение не всегда верно. Рассмотрим следующий пример функции $f(x,y) = \frac{1}{y}\Big(1 - x^{1/y}\Big)x^{1/y}$, $(x,y) \in ([1/2,1] \times (0,1])$; $f \in C([1/2,1] \times (0,1])$, для которой $\forall\, x \in [1/2,1] : f(x,y) \to 0$, если $y \to 0+$, и $\int\limits_{1/2}^1 \frac{1}{y}\Big(x^{1/y} - x^{2/y}\Big)\, dx \to 1/2$, $y \to 0+$. Следовательно,

$$\lim_{y\to 0+} \int\limits_{1/2}^1 f(x,y)\, dx \neq \int\limits_{1/2}^1 \Big(\lim_{y\to 0+} f(x,y)\Big)\, dx.$$

Определение 1. *Пусть $Y \subset \boldsymbol{R}$, y_0 — предельная точка множества Y в $(\boldsymbol{R},\rho)$ и $f : ([a,b] \times Y) \to \boldsymbol{R}$. Семейство функций $\{f(x,y),\, x \in [a,b] \mid y \in Y\}$ сходится равномерно на*

$[a,b]$ *при* $y \to y_0$ *к функции* $g : [a,b] \to \boldsymbol{R}$, *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in Y, |y - y_0| < \delta, y \neq y_0\ \forall x \in [a,b] : |f(x,y) - g(x)| < \varepsilon$, *т. е. если* $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x,y) - g(x)| \to 0,\ y \to y_0$.

Замечание. В качестве y_0 можно рассматривать $+\infty$ или $-\infty$ с соответствующим изменением формулировки.

Упражнение 8. Доказать, что семейство функций $\{f(x,y),\ x \in [a,b] \mid y \in Y\}$ сходится равномерно на $[a,b]$ при $y \to y_0$ к функции g тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{y_n \mid n \geq 1\} \subset Y$, $y_n \to y_0$, $n \to \infty$, последовательность функций $\{f(x,y_n),\ x \in [a,b] \mid n \geq 1\}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к функции g.

Упражнение 9. Пусть $X := \{\varphi : [a,b] \to \boldsymbol{R} \mid \exists L = L(\varphi) \in \boldsymbol{R} : |\varphi(x)| \leq L\}$, $d(\varphi,\psi) := \sup\limits_{x\in[a,b]} |\varphi(x) - \psi(x)|$, $\{\varphi,\psi\} \subset X$. Доказать, что (X,d) — полное метрическое пространство. Показать, что семейство $\{f(x,y),\ x \in [a,b] \mid y \in Y\}$ ограниченных на $[a,b]$ функций сходится равномерно на $[a,b]$ при $y \to y_0$ к функции g тогда и только тогда, когда $f(\cdot,y) \to g$ в (X,d) при $y \to y_0$.

Теорема 9. *Пусть* $Y \subset \boldsymbol{R}$, y_0 *— предельная точка* Y *и* $f : ([a,b] \times Y) \to \boldsymbol{R}$. *Предположим, что: 1)* $\forall y \in Y : f(\cdot,y) \in \boldsymbol{R}([a,b])$; *2) семейство* $\{f(x,y),\ x \in [a,b] \mid y \in Y\}$ *функций сходится равномерно на* $[a,b]$ *при* $y \to y_0$ *к функции* g.

Тогда $g \in \boldsymbol{R}([a,b])$ *и* $\lim\limits_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

⌈ Доказательство того, что $g \in \boldsymbol{R}([a,b])$ следует из леммы 1 гл. 6. Из неравенства $\left|\int\limits_a^b f(x,y)\,dx - \int\limits_a^b g(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x,y) - g(x)|\,dx, \quad y \in Y$, и определения равномерной сходимости получаем нужное равенство. ⌋

Упражнение 10. Пусть $f \in C^1([0,1])$ и $F(x) := \int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{sign}\,\sin(xt)$, $x > 0$. Вычислить F'.

13.3 Равномерная сходимость несобственных интегралов

13.3.1 Определение равномерной сходимости несобственных интегралов

Пусть $a \in \boldsymbol{R}$, M — некоторое множество и $f : ([a,+\infty) \times M) \to \boldsymbol{R}$.

Предположим, что для каждых $A \geq a$, $\alpha \in M$: $f(\cdot, \alpha) \in \mathbf{R}([a, b])$ и несобственный интеграл $J(\alpha) =: \int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$ сходится. В п. 13.3.1 и 13.3.2 эти предположения считаются выполненными.

Определение 1. Несобственный интеграл $J(\alpha), \alpha \in M$, сходится равномерно на множестве M, если имеет место $\sup\limits_{\alpha \in M} \left| J(\alpha) - \int\limits_a^A f(x, \alpha)\, dx \right| = \sup\limits_{\alpha \in M} \left| \int\limits_A^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \right| \to 0, \quad A \to +\infty.$

Примеры. 1. Несобственный интеграл

$$J(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \tag{1}$$

сходится для $\alpha > 1$. В случае множества $M_1 = [2, +\infty)$ имеем для $A > 1$:

$$\sup_{\alpha \in [2, +\infty)} \left| \int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \right| = \sup_{\alpha \in [2, +\infty)} \frac{1}{(\alpha - 1) A^{\alpha - 1}} \leq \frac{1}{A} \to 0, \quad A \to +\infty.$$

Следовательно, интеграл (1) сходится равномерно на M_1. Для множества $M_2 = (1, +\infty)$ равномерной сходимости нет, поскольку для $A > 0$

$$\sup_{\alpha \in (1, +\infty)} \int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \sup_{\alpha \in (1, +\infty)} \frac{1}{(\alpha - 1) A^{\alpha - 1}} = +\infty.$$

2. Несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \tag{2}$$

сходится для каждого $\alpha \in \mathbf{R}$ в силу признака Дирихле. Интеграл (2) сходится равномерно на множестве $M(\gamma) = \{\alpha \mid |\alpha| \geq \gamma\}$, $\gamma > 0$, поскольку для $A > 0$ имеем

$$\sup_{\alpha \in M(\gamma)} \left| \int\limits_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \right| = \sup_{\alpha \in M(\gamma)} \left| \int\limits_A^{+\infty} \frac{\sin |\alpha| x}{|\alpha| x} |\alpha|\, dx \right| =$$

$$= \sup_{\alpha \in M(\gamma)} \left| \int\limits_{|\alpha| A}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| = \sup_{B \geq \gamma A} \left| \int\limits_B^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \to 0, \quad A \to +\infty.$$

Интеграл (2) не сходится равномерно на $M = \mathbf{R}$, так как для $A > 0$

$$\sup_{\alpha \in \mathbf{R}} \left| \int\limits_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \right| = \sup_{B > 0} \left| \int\limits_B^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \geq \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx > 0.$$

Замечание. Согласно определению, равномерная на M сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$, $\alpha \in M$, равносильна равномерной на M сходимости несобственного интеграла $\int\limits_b^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$, $\alpha \in M$, для любого $b > a$.

С помощью критерия Коши равномерной сходимости последовательности функций получаем следующий критерий равномерной сходимости несобственного интеграла.

Теорема 10. *Для того, чтобы несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$, $\alpha \in M$, *сходился равномерно на множестве* M, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, A_0 > a\ \forall\, A' \geq A_0\ \forall\, A'' \geq A_0\ \forall\, \alpha \in M:\ \left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon$.

13.3.2 Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов

Теорема 11. ***(Признак Вейерштрасса).*** *Предположим, что функции* $f : ([a,+\infty) \times M) \to \boldsymbol{R}$, $g : [a,+\infty) \to \boldsymbol{R}$ *удовлетворяют условиям: 1)* $\forall\, x \geq a\ \forall\, \alpha \in M : |f(x,\alpha)| \leq g(x)$; *2)* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходится. Тогда несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$, $\alpha \in M$, *сходится равномерно на* M.

⌈ Интеграл сходится абсолютно при любом $\alpha \in M$. Утверждение о равномерной сходимости следует из оценки

< ε Cauchy (2)

$$\sup_{\alpha \in M}\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right| \leq \int\limits_A^{+\infty} g(x)\,dx \to 0, \quad A \to +\infty. \qquad \rfloor$$

∀ε>0 ∃A ≥ x0 ...

Примеры. 1. Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin \alpha x^2}{1+x^2}\,dx$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, сходится равномерно на $\boldsymbol{R}$ в силу признака Вейерштрасса для $a = 0$, $M = \boldsymbol{R}$; $f(x,\alpha) = \dfrac{\sin \alpha x^2}{1+x^2}$, $x \geq 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$; $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \geq 0$.

2. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\alpha \cos \alpha^2 x}{\alpha + x^\alpha}\,dx$, $\alpha \in [2,10]$, сходится равномерно на $[2,10]$ в силу признака Вейерштрасса для $a = 1$, $M = [2,10]$; $f(x,\alpha) = \dfrac{\alpha \cos \alpha^2 x}{\alpha + x^\alpha}$, $x \geq 1$, $\alpha \in [2,10]$; $g(x) = \dfrac{10}{2+x^2}$, $x \geq 1$.

Теорема 12. ***(Признак Дирихле).*** *Предположим, что функции* $f : ([a,+\infty) \times M) \to \boldsymbol{R}$, $g : ([a,+\infty) \times M) \to \boldsymbol{R}$ *удовлетворяют условиям: 1)* $\exists\, C \in \boldsymbol{R}\ \sup\limits_{\alpha \in M}\sup\limits_{A \geq a}\left|\int\limits_a^A f(x,\alpha)\,dx\right| \leq C$; *2)*

$\forall\, \alpha \in M$ функция $g(\cdot, \alpha)$ монотонна на $[a, +\infty)$; 3) $h(x) := \sup\limits_{\alpha \in M} |g(x, \alpha)| \to 0,\ x \to +\infty$. Тогда несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha) g(x, \alpha)\, dx, \quad \alpha \in M, \tag{1}$$

сходится равномерно на M.

⌈ Доказательство проведём при следующих *дополнительных условиях*: $\forall\,(x, \alpha) \in ([a, +\infty) \times M)$ существует $g_1'(x, \alpha)$, $\forall\, \alpha \in M\ \forall\, A \geq a:\ \ g_1'(\cdot, \alpha) \in R([a, A])$; $\forall\, \alpha \in M:\ \ f(\cdot, \alpha) \in C([a, +\infty))$.

Интеграл (1) сходится для каждого $\alpha \in M$, в силу признака Дирихле сходимости несобственного интеграла. Пусть $F(x, \alpha) := \int\limits_a^x f(u, \alpha)\, du$, $F_1'(x, \alpha) = f(x, \alpha)$, $x \geq a$, $\alpha \in M$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\sup_{\alpha \in M} \left| \int\limits_A^{+\infty} f(x, \alpha) g(x, \alpha)\, dx \right| = \sup_{\alpha \in M} \left| \int\limits_A^{+\infty} F_1'(x, \alpha) g(x, \alpha)\, dx \right| =$$

$$= \sup_{\alpha \in M} \left| F(x, \alpha) g(x, \alpha) \Big|_{x=A}^{x \to +\infty\ \text{-ист по 3)}} - \int\limits_A^{+\infty} F(x, \alpha) g_1'(x, \alpha)\, dx \right| \leq$$

$$\leq Ch(A) + C \sup_{\alpha \in M} \underbrace{\left| \int\limits_A^{+\infty} g_1'(x, \alpha)\, dx \right|}_{\leq C_1 \sup\limits_{\alpha} |g(A,\alpha)| \Rightarrow c \cdot h(A)} \leq 2Ch(A) \to 0, \quad A \to +\infty. \quad \rfloor$$

Примеры. 3. С помощью теоремы 12 легко устанавливается равномерная сходимость интеграла (2) п. 13.3.1. Нужно положить $a = 1$, $f(x, \alpha) = \sin \alpha x$, $g(x, \alpha) = 1/x$, $x \geq 1$, $\alpha \in M(\gamma)$. Условия теоремы 12 проверяются легко.

4. Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^\alpha\, dx$, $\alpha \in M(\gamma) := \{\alpha \in R \mid \alpha \geq \gamma\}$, $\gamma > 1$, сходится равномерно на $M(\gamma)$. Для доказательства в теореме 12 можно положить $a = 1$, $f(x, \alpha) = \alpha x^{\alpha - 1} \sin x^\alpha$, $g(x, \alpha) = \dfrac{1}{\alpha x^{\alpha - 1}}$, $x \geq 1$, $\alpha \in M(\gamma)$. Тогда $\sup\limits_{\alpha \in M(\gamma)} \sup\limits_{A \geq 1} \left| \int\limits_1^A \alpha x^{\alpha - 1} \sin x^\alpha\, dx \right| \leq 2$.

Условие 2) выполнено и $h(x) = \sup\limits_{\alpha \in M(\gamma)} \dfrac{1}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \dfrac{1}{\gamma x^{\gamma - 1}} \to 0, \quad x \to +\infty$.

Упражнение 11. Доказать равномерную сходимость на $M = \{\alpha \in R \mid |al| \geq 1\}$ несобственного интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \sin(\alpha x^3)\, dx$, $\alpha \in R$.

Упражнение 12. Пусть $f:\ [0, +\infty) \to R$, $\forall\, A > 0\ :\ f \in R([0, A])$ и $\sup\limits_{0 \leq A < +\infty} \left| \int\limits_0^A e^{-\alpha_0 x} f(x)\, dx \right| < +\infty$; $\alpha_0 \in R$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)\,dx$, $\alpha > \alpha_0$, сходится равномерно на множестве $[\alpha_0 + \varepsilon, +\infty)$.

Теорема 13. *(Признак Абеля). Предположим, что функции $f : ([a, +\infty) \times M) \to \boldsymbol{R}$, $g : ([a, +\infty) \times M) \to \boldsymbol{R}$ удовлетворяют следующим условиям: 1) несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha)\,dx$, $\alpha \in M$, сходится равномерно на M; 2) $\forall\, \alpha \in M$ функция $g(\cdot, \alpha)$ монотонна на $[a, +\infty)$; 3) $\exists\, C \in \boldsymbol{R}$: $\sup\limits_{x \ge a} \sup\limits_{\alpha \in M} |g(x, \alpha)| \le C$. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x, \alpha) g(x, \alpha)\,dx$, $\alpha \in M$, сходится равномерно на M.*

⌈ Доказательство проведём при том же *дополнительном предположении*, при котором доказывалась теорема 12. Введём функцию $F(x, \alpha; A) := \int\limits_A^x f(u, \alpha)\,du$, $x \ge A > a$, $\alpha \in M$. Применив формулу интегрирования по частям, получим

F'

$$\sup_{\alpha \in M} \left| \int\limits_A^{+\infty} f(x, \alpha) g(x, \alpha)\,dx \right| =$$

$$= \sup_{\alpha \in M} \left| \lim_{x \to +\infty} \left(F(x, \alpha; A) g(x, \alpha) \right) - \int\limits_A^{+\infty} F(x, \alpha; A) g_1'(x, \alpha)\,dx \right| \le$$

$$\le C \sup_{\alpha \in M} \left| \int\limits_A^{+\infty} f(u, \alpha)\,du \right| + \sup_{\alpha \in M} \sup_{x \ge a} |F(x, \alpha; A)| \cdot \left| \int\limits_A^{+\infty} g_1'(x, \alpha)\,dx \right| \le$$

$$\le C \sup_{\alpha \in M} \left| \int\limits_A^{+\infty} f(u, \alpha)\,du \right| + \sup_{\alpha \in M} \sup_{x \ge a} |F(x, \alpha; A)| 2C \to 0, \ A \to +\infty. \quad ⌋$$

Примеры. 1. Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x}\,dx$, $\alpha \ge 0$, сходится равномерно на $[a, +\infty)$ в силу теоремы 13 для $a = 0$, $C = 1$; $f(x, \alpha) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x, \alpha) = e^{-\alpha x}$, $x \ge 0$, $\alpha \in [0, +\infty)$.

2. Несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{dx}{1 + \alpha x^2}$, $\alpha \ge 0$, сходится равномерно на $[0, +\infty)$ в силу теоремы 13.

Упражнение 13. Функции $f_n : \cdot\, [a, +\infty) \to \boldsymbol{R}$, $n \ge 1$ удовлетворяют условиям: 1) $\forall\, b > a$: $\int\limits_a^b \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$; 2) сходятся интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^{+\infty} f_n(x)\,dx$; 3) $\lim\limits_{b \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_b^{+\infty} f_n(x)\,dx =$

$= 0$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

13.4 Свойства функций, определяемых интегралами

13.4.1 Основные теоремы

Предположим, что $M = [c,d] \subset R$. В этом разделе рассматриваются свойства несобственного интеграла $J(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx, \quad \alpha \in [c,d]$, как функции от α.

Теорема 14. *(О непрерывности несобственного интеграла по параметру). Предположим, что выполняются условия: 1) $f \in C([a,+\infty) \times [c,d])$; 2) несобственный интеграл $J(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$, $\alpha \in [c,d]$, сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда $J \in C([c,d])$.*

⌈ Для $n \in N$, $n \geq a$ положим $J_n(\alpha) = \int\limits_a^{n} f(x,\alpha)\,dx$, $\alpha \in [c,d]$. По теореме 6 функция $J_n \in C([c,d])$ для каждого $n \geq a$. Кроме того, по условию 2) теоремы $\sup\limits_{\alpha\in[c,d]} |J(\alpha) - J_n(\alpha)| = \sup\limits_{\alpha\in[c,d]} \left|\int\limits_n^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right| \to 0$, $n \to \infty$. Следовательно, функция J есть равномерный на $[c,d]$ предел последовательности $\{J_n \mid n \geq a\}$ непрерывных на $[c,d]$ функций и по лемме 1 п. 8.1 — непрерывна на $[c,d]$. ⌋

Теорема 15. *(О предельном переходе под знаком несобственного интеграла). Пусть $M \subset R$, α_0 — предельная точка M. Предположим, что функции $f : ([a,+\infty) \times M) \to R$ и $g : [a,+\infty) \to R$ удовлетворяют условиям: 1) $\forall A \geq a$: $\sup\limits_{x\in[a,A]} |f(x,\alpha) - g(x)| \to 0$, $\alpha \to \alpha_0$; 2) несобственный интеграл $J(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$, $\alpha \in M$, сходится равномерно на M. Тогда*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

⌈ Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится в силу критерия Коши. Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$, согласно условию 2), имеем

$$\exists A_0 \geq a \; \forall A' \geq A_0 \; \forall A'' \geq A_0 \; \forall \alpha \in M : \left| \int\limits_{A'}^{A''} f(x,\alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Применяя к последнему интегралу теорему 9 получаем неравенство $\left| \int\limits_{A'}^{A''} g(x)\, dx \right| \leq \varepsilon$. Заметим теперь, что при любом $A \geq a$ справедливы также следующие неравенства $\left| \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx - \int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\, dx \right| \leq$

$$\leq \left| \int\limits_{a}^{A} f(x,\alpha)\, dx - \int\limits_{a}^{A} g(x)\, dx \right| + \left| \int\limits_{A}^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx \right| + \left| \int\limits_{A}^{+\infty} g(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_{a}^{A} f(x,\alpha)\, dx - \int\limits_{a}^{A} g(x)\, dx \right| + \sup_{\alpha \in M} \left| \int\limits_{A}^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx \right| + \left| \int\limits_{A}^{+\infty} g(x)\, dx \right|.$$

Теперь, используя теорему 9, условие 2) и сходимость интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\, dx$, получаем утверждение теоремы. ⌋

Замечание. Случай, когда $\alpha_0 = +\infty$, также возможен.

Теорема 16. *(Об интегрировании по параметру). Предположим, что для функции $f : ([a,+\infty) \times [c,d]) \to \mathbf{R}$ выполнены условия: 1) $f \in C([a,+\infty) \times [c,d])$; 2) интеграл $J(\alpha) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx$, $\alpha \in [c,d]$, сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда $J \in C[c,d])$ и*

$$\int\limits_{c}^{d} J(\alpha)\, d\alpha = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx \right) d\alpha = \int\limits_{a}^{+\infty} \left(\int\limits_{c}^{d} f(x,\alpha)\, d\alpha \right) dx. \tag{1}$$

⌈ То, что $J \in C[c,d])$, следует из теоремы 14. Далее для любого $A > a$ имеем равенство $\int\limits_{c}^{d} J(\alpha)\, d\alpha = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{a}^{A} f(x,\alpha)\, dx \right) d\alpha + r(A)$, где $r(A) := = \int\limits_{c}^{d} \left(\int\limits_{A}^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx \right) d\alpha$ и $|r(A)| \leq \sup\limits_{\alpha \in [c,d]} \left| \int\limits_{A}^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx \right| (d-c) \to 0, A \to +\infty$, согласно условию 2). На основании теоремы 8 заключаем, что $\int\limits_{c}^{d} J(\alpha)\, d\alpha = \int\limits_{a}^{A} \left(\int\limits_{c}^{d} f(x,\alpha)\, dx \right) d\alpha + r(A)$. Отсюда при $A \to +\infty$ получаем сходимость несобственного интеграла из правой части равенства (1) и требуемое равенство. ⌋

Теорема 17. *(О дифференцировании по параметру). Предположим, что для функции $f : ([a,+\infty) \times [c,d]) \to \mathbf{R}$ выполнены условия: 1) существует f'_α и $f'_\alpha \in C([a,+\infty) \times [c,d])$; 2) существует число $\alpha_0 \in [c,d]$, для которого $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x,\alpha_0)\, dx$*

сходится; 3) $\int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$, $\alpha \in [c,d]$, *сходится равномерно на* $[c,d]$. *Тогда интеграл* $J(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ *сходится для каждого* $\alpha \in [c,d]$, *существует производная* J' *на* $[c,d]$ *и справедливо равенство* $J'(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$, $\alpha \in [c,d]$.

$\lceil$ Можно положить $\alpha_0 = c$. Согласно условиям 1) и 3) теоремы и утверждению теоремы о непрерывности несобственного интеграла по параметру, функция

$$I(\alpha) := \int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx, \ \alpha \in [c,d], \tag{2}$$

непрерывна на отрезке $[c,d]$. Применим к несобственному интегралу (2) теорему об интегрировании по параметру, а затем формулу Ньютона-Лейбница $\int\limits_c^\alpha I(u)\,du = \int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^\alpha f'_\alpha(x,u)\,du\right)dx = \int\limits_a^{+\infty}(f(x,\alpha) - f(x,c))\,dx$. по (2)
Учитывая условие 2), получаем сходимость интеграла $J(\alpha)$, $\alpha \in [c,d]$, и следующее равенство $J(\alpha) = \int\limits_c^\alpha I(u)\,du + C$, $\alpha \in [c,d]$, где $I \in C([c,d])$ и число $C = \int\limits_a^{+\infty} f(x,c)\,dx$. Из свойств интеграла как функции верхнего предела получаем утверждение теоремы. $\rfloor$

Примеры. 1. Докажем, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

$\lceil$ Для $\alpha \in \boldsymbol{R}$ рассмотрим сходящийся интеграл $F(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$. Легко проверить, что $\forall\,\alpha \in \boldsymbol{R} : F(-\alpha) = -F(\alpha)$; $F(0) = 0$, $F(\alpha) = F(1)$, $\alpha > 0$. Пусть $\beta > 0$. Введём интеграл $J(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} e^{-\beta x}\,dx$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, к которому после естественного доопределения подынтегральной функции f в точке 0 применима теорема о дифференцировании по параметру для любого отрезка $[c,d]$, поскольку для $f'_\alpha(x,\alpha) = \cos \alpha x \cdot e^{-\beta x}$, $x \geq 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, условия этой теоремы выполнены. Получим $\forall\,\alpha \in \boldsymbol{R}$: $J'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \cos \alpha x \cdot e^{-\beta x}\,dx$. Теперь, дважды интегрируя по частям, получим $J'(\alpha) \overset{\text{равн.сх.}}{=} \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Таким образом, $J(\alpha) = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} + C$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Поскольку $J(0) = 0$, то $C = 0$. Пусть далее $\alpha = 1$. Интеграл $J(1)$ сходится равномерно относительно $\beta \geq 0$ в силу признака Абеля равномерной сходимости. Согласно теореме 14 интеграл $J(1)$ — непрерывная функция от β на $[0,+\infty)$. Поэтому

$$\lim_{\beta\to 0+} J(1) = \lim_{\beta\to 0+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\beta x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Кроме того, $\lim\limits_{\beta\to 0+} J(1) = \lim\limits_{\beta\to 0+} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\pi}{2}$. ⌋

2. ***Интеграл Фруллани.*** Пусть $f \in C^1([0,+\infty))$, причём f монотонна на $[0,+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =: f(+\infty)$.

Тогда $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\, dx = (f(+\infty)-f(0))\ln\frac{b}{a}$, $a>0$, $b>0$.

⌈ Пусть $a<b$. К интегралу $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(\alpha x)\, dx$, $\alpha\in[a,b]$, равномерно сходящемуся согласно признаку Вейерштрасса равномерной сходимости, применим теорему об интегрировании по параметру

$$\int_a^b \frac{f(+\infty)-f(0)}{\alpha}\, d\alpha = \int_a^b \left(\int_0^{+\infty} f'(\alpha x)\, dx\right) d\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\, dx. \ ⌋$$

Упражнение 14. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx$, где $\{a,b\}\subset \mathbb{R}$.

Упражнение 15. Для $a>0$, $b>0$ вычислить интеграл:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\, dx$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\, dx$.

Теорема 18. *(Об интегрировании по бесконечному промежутку). Предположим, что функция $f:([a,+\infty)\times[c,+\infty))\to\mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $f\in C([a,+\infty)\times[c,+\infty))$; 2) $\forall\, d>c$: $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx$ сходится равномерно на $[c,d]$; 3) $\forall\, b>a$: $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,\alpha)\, d\alpha$ сходится равномерно на $[a,b]$; 4) для $x\ge a$, $\alpha\ge c$ сходятся интегралы $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x,\alpha)|\, dx$, $\displaystyle\int_c^{+\infty} |f(x,\alpha)|\, d\alpha$ и сходится хотя бы один из интегралов*

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_c^{+\infty} |f(x,\alpha)|\, d\alpha\right) dx, \quad \int_c^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} |f(x,\alpha)|\, dx\right) d\alpha. \tag{3}$$

Тогда справедливо равенство

$$\int_c^{+\infty}\left(\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx\right) d\alpha = \int_a^{+\infty}\left(\int_c^{+\infty} f(x,\alpha)\, d\alpha\right) dx,$$

в котором все интегралы сходятся.

⌈ Предположим, что сходится первый из интегралов в (3). Сначала используем условия 1), 2) и теорему об интегрировании несобственного интеграла по параметру для $d > c$:

$$\int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx \right) d\alpha = \int_a^{+\infty} F(x,d)\, dx, \quad F(x,d) := \int_c^d f(x,\alpha)\, d\alpha, \quad x \geq a.$$

Заметим, что $\forall\, x \geq a\ \forall\, d \geq c : |F(x,d)| \leq g(x) := \int\limits_c^{+\infty} |f(x,\alpha)|\, d\alpha$, и, согласно условию 4), интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ сходится. Поэтому, в силу признака Вейерштрасса, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} F(x,d)\, dx$, $d \geq c$, сходится равномерно на $[c, +\infty)$. Кроме того, $\forall\, A \geq a$: $\sup\limits_{x\in[a,A]} \left| F(x,d) - \int\limits_c^{+\infty} f(x,\alpha)\, d\alpha \right| =$ нужно для
$= \sup\limits_{x\in[a,A]} \left| \int\limits_d^{+\infty} f(x,\alpha)\, d\alpha \right| \to 0$, $d \to +\infty$. Согласно теореме о предельном
~ α, ф-ию по 1)
переходе под знаком несобственного интеграла, существует предел

$$\lim_{d\to+\infty} \int_a^{+\infty} F(x,d)dx = \int_a^{+\infty} \left(\lim_{d\to+\infty} F(x,d) \right) dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^{+\infty} f(x,\alpha)\, d\alpha \right) dx. \quad ⌋$$

13.4.2 Вычисление интеграла Эйлера-Пуассона

Докажем равенство $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

⌈ В сходящемся интеграле $J := \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ сделаем замену переменной
x на $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = J$
$x = \alpha t$, где число $\alpha > 0$; $J = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2} \alpha\, dt$. Далее имеем с учётом свойств интеграла как функции нижнего предела $J^2 = \int\limits_0^{+\infty} J e^{-\alpha^2}\, d\alpha =$

$$= \lim_{\varepsilon\to0+} \int_\varepsilon^{+\infty} J e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \lim_{\varepsilon\to0+} \int_\varepsilon^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2 - \alpha^2} \alpha\, dt \right) d\alpha.$$

Теперь для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ к следующему интегралу $\int\limits_\varepsilon^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2 - \alpha^2} \alpha\, dt \right) d\alpha$ применим теорему 18. Условие 1) теоремы 18 выполнено, кроме того, $\forall\, d > 0$: $\sup\limits_{\varepsilon\leq\alpha\leq d} \int\limits_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(t^2+1)}\, dt \leq$

$\leq d \int\limits_A^{+\infty} e^{-\varepsilon^2(t^2+1)}\, dt \to 0$, $A \to +\infty$; $\forall\, b > 0$: $\sup\limits_{0\leq t\leq b} \int\limits_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(t^2+1)}\, d\alpha \leq$

$\leq \int\limits_A^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2}\,d\alpha \to 0,\quad A \to +\infty$. В силу теоремы 14 имеем такое утверждение $\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_\varepsilon^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(t^2+1)}\,d\alpha\right)dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon^2(t^2+1)}}{2(t^2+1)}\,dt \to \frac{\pi}{4},\quad \varepsilon \to 0+$.

Таким образом, $J^2 = \pi/4$. ц.ч. вычисл. по т.2]

Упражнение 16. Доказать, что: a) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},\quad \alpha > 0.$;

b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-\alpha},\quad \alpha > 0$ *(интегралы Лапласа);* c) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *(интегралы Френеля).*

Упражнение 17. Пусть $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_j(x)|^k\,dx < +\infty,\ j,k = 1,2$; положим $h(x) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u)f_2(u)\,du$. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$.

Упражнение 18.* Обосновать следующее вычисление интеграла Эйлера-Пуассона: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx =$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Указание. Использовать формулу Валлиса.

13.4.3 Несобственные интегралы от неограниченных функций, зависящие от параметра

Пусть $M \subset \boldsymbol{R}$; $f : ([a,b) \times M) \to \boldsymbol{R}$ — функция такая, что при некоторых $\alpha \in M$ функция $f(\cdot,\alpha) : [a,b) \to \boldsymbol{R}$ не является ограниченной в окрестности точки b. Предположим, что для каждого $\alpha \in M$ интеграл $\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ сходится.

Определение 1. *Интеграл*

$$\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx,\quad \alpha \in M, \tag{1}$$

сходится равномерно на M, *если* $\sup\limits_{\alpha\in M}\left|\int\limits_{b-\varepsilon}^{b} f(x,\alpha)\,dx\right| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0+$.

Исследование свойств интегралов вида (1) вполне аналогично исследованию свойств интегралов по неограниченно промежутку. На интегралы вида (1) переносятся утверждения пп. 13.3 и 13.4, в частности, справедлив признак Вейерштрасса.

13.5 Гамма-функция. Бета-функция

13.5.1 Определение гамма-функции. Элементарные свойства

Гамма-функция Γ определяется для значений $\alpha > 0$ следующим образом $\Gamma(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$. Интеграл, определяющий значение функции $\Gamma(\alpha)$, есть сумма

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx, \quad \le \frac{1}{x^2}, \quad \text{т.к. } e^{-x}x^{\alpha+1} \to 0, \tag{1}$$

в которой первый интеграл сходится при $\alpha > 0$, так как $e^{-x}x^{\alpha-1} \sim x^{\alpha-1}$, $x \to 0+$, а второй — сходится для любого $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

при $\alpha>0$ Используя равномерно сходящийся на $[0,1]$ ряд Тейлора для функции $f(x) = e^{-x}$, $x \in \boldsymbol{R}$, из равенства (1) получаем следующее представление для $\Gamma(\alpha)$

$$\Gamma(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\alpha)} + \int\limits_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx. \tag{2}$$

Заметим, что формула (2) позволяет дополнительно определить функцию Γ для всех значений α, исключая числа $0, -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$, поскольку при всех таких α правая часть равенства (2) определена.

Перечислим простейшие свойства функции Γ.

1°. Из определения следует, что $\Gamma(\alpha) > 0$ для $\alpha > 0$.

2°. Функция Γ имеет на $(0, +\infty)$ производные всех порядков, которые можно получать с помощью дифференцирования под знаком интеграла. Например,

$$\Gamma'(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\ln x\,dx, \quad \Gamma''(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}(\ln x)^2\,dx, \quad \alpha > 0.$$

⌈ Для доказательства дифференцируемости в фиксированной точке α_0 нужно применить к интегралам в равенстве (1) и $\alpha \in [\beta, \gamma]$, где $0 < \beta < \alpha_0 < \gamma$, теорему 17. ⌋

3°*. *Функциональное уравнение для гамма-функции.

$$\forall \alpha > 0 \ : \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

⌈ Для доказательства используем формулу интегрирования по частям

$$\Gamma(\alpha+1) = \lim_{x\to+\infty}(-x^\alpha e^{-x}) - 0 + \alpha \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx = \alpha\Gamma(\alpha),\ \alpha > 0. \ \rfloor$$

Замечание. Из свойства 3 следует, что функция Γ на $(0,+\infty)$ определяется своими значениями на $(0,1]$. Более того, функциональное уравнение позволяет доопределить гамма-функцию на всю ось, исключая точки $0,-1,-2,\dots,-n,\dots$. Именно, для значений $\alpha \in (-1,0)$ положим $\Gamma(\alpha) := \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$, где $(\alpha+1) \in (0,1)$, затем для значений $\alpha \in (-2,-1)$ положим $\Gamma(\alpha) := \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$, где $(\alpha+1) \in (-1,0)$, и т. д.

Далее предполагаем, что функция Γ определена на множестве $R \setminus \{0,-1,-2,-3,\dots,-n,\dots\}$ с помощью интеграла для $\alpha > 0$ и с помощью функционального уравнения для остальных значений.

4^0. $\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(n) = (n-1)!,\ n \in N, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

$\lceil$ Последнее равенство получается с помощью следующей замены переменной $x = t^2$ и использования интеграла Эйлера-Пуассона. $\rfloor$

Упражнение 19. Построить график гамма-функции.

Упражнение 20. Для $n \in N$ вычислить $\Gamma(n+1/2)$.

Упражнение 21. Доказать, что $\Gamma(\alpha) \sim \dfrac{1}{\alpha}$, $\alpha \to 0+$, $\Gamma(\alpha) \to +\infty$, $\alpha \to \infty$.

Упражнение 22. Проверить, что гамма-функция строго выпукла вниз на $(0,+\infty)$.

Определение 1. *Пусть A — интервал Функция $f : A \to (0,+\infty)$ называется* ***логарифмически выпуклой*** *на A, если функция $\ln f$ выпукла вниз на A.*

5^0. Гамма-функция логарифмически выпукла на $(0,+\infty)$.

$\lceil$ Чтобы убедиться в выпуклости вниз функции $\ln\Gamma$ рассмотрим производную $(\ln\Gamma)'' = \Gamma^{-2}(\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2)$, принимая во внимание свойства 1^0 и 2^0. Используем теперь неравенство Коши следующим образом

$$(\Gamma'(\alpha))^2 = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\ln x\,dx\right)^2 =$$

Коши-Буняк.

$$= \left(\int\limits_0^{+\infty}\left(e^{-x/2}x^{(\alpha-1)/2}\right)\left(e^{-x/2}x^{(\alpha-1)/2}\ln x\right)dx\right)^2 < \Gamma(\alpha)\Gamma''(\alpha).$$

Следовательно, $(\ln\Gamma(\alpha))'' > 0,\ \alpha > 0.$ $\quad \Gamma\cdot\Gamma'' - (\Gamma')^2 > 0$ $\rfloor$

$\Rightarrow \Gamma^2 (\ln\Gamma)'' > 0$

*Упражнение 23**. Доказать, что сумма и произведение логарифмически выпуклых на A функций логарифмически выпуклы на A. Рассмотреть случай функций класса $C^2(A)$.

*Упражнение 24**. Доказать, что положительный поточечный на A предел последовательности логарифмически выпуклых на A функций есть логарифмически выпуклая на A функция.

13.5.2 Основная теорема теории гамма-функции

Теорема 19. *Предположим, что функция* $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ *удовлетворяет условиям: 1)* $f(1)=1$; *2)* $\forall\,\alpha>0:$ $f(\alpha+1)=\alpha f(\alpha)$; *3)* f *логарифмически выпукла на* $(0,+\infty)$. *Тогда*

$$\forall\,\alpha>0:\ f(\alpha)=\Gamma(\alpha). \tag{1}$$

⌈ Из условий 1) и 2) следует, что $f(n)=(n-1)!$, $n\in N$. Равенство (1) достаточно по 2) доказать только для $\alpha\in(0,1]$. Отметим, что $\forall\,\alpha\in(0,1]$ $\forall\,n\geq 2:$ $n-1<n+\alpha\leq n+1$. Поскольку функция $\ln f$ выпукла вниз на $(0,+\infty)$, то для наклона этой функции относительно точки $x=n$ имеем

$=\ln f$ $\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$ $-\varphi\,\alpha\uparrow$

$$\frac{\ln f(n-1)-\ln f(n)}{(n-1)-n}\leq\frac{\ln f(n+\alpha)-\ln f(n)}{(n+\alpha)-n}\leq\frac{\ln f(n+1)-\ln f(n)}{(n+1)-n}$$

$$\Longrightarrow\ \ln(n-1)\leq\frac{\ln f(n+\alpha)-\ln((n-1)!)}{\alpha}\leq\ln n\ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ (n-1)^\alpha(n-1)!\leq f(n+\alpha)\leq n^\alpha(n-1)!\ \Longrightarrow$$

$(\alpha+n-1)\,f(\alpha)$ $f(1+(n-1+\alpha))=\alpha(\alpha+1)\ldots$

$$\Longrightarrow\ \frac{(n-1)^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}\leq f(\alpha)\leq\frac{n^\alpha(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}=$$

$$=\frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}\,\frac{\alpha+n}{n}, \tag{2}$$

— умножили на это.

$\Rightarrow$ $\left(1-\frac{1}{n}\right)^\alpha\frac{n^\alpha\cdot n!}{\alpha\ldots(\alpha+n)}\leq\frac{n}{\alpha+n}f(\alpha)\leq\frac{n!\,n^\alpha}{\alpha\ldots(n+\alpha)}$

так как, согласно условию 2),

$$f(n+\alpha)=(n+\alpha-1)f(n+\alpha-1)=\ldots=(n-1+\alpha)(n-2+\alpha)\ldots\alpha f(\alpha),$$

то из (2) имеем $\frac{n}{\alpha+n}f(\alpha)\leq\frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}\leq f(\alpha)$. Таким образом, для любого $\alpha\in(0,1]$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}=f(\alpha). \tag{3}$$

Следовательно, функция f определяется на $(0,1]$ единственным образом, Поскольку гамма-функция удовлетворяет условиям 1) — 3) теоремы, то $f=\Gamma$. ⌋

13.5.3 Основные формулы для гамма-функции

1⁰. Формула Эйлера.

$$\forall\,\alpha \in (\boldsymbol{R}\setminus\{0,-1,\dots,-n,\dots\}) : \Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}. \qquad (1)$$

⌈ Формула (1) для $\alpha \in (0,1]$ была доказана в п. 13.5.2, соотношение (3). Положим $\Gamma_n(\alpha) := \dfrac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}$, $\alpha \in (\boldsymbol{R}\setminus\{0,-1,\dots,-n,\dots\})$.

Для $\beta \in (1,2]$ имеем $\Gamma_n(\beta) = \dfrac{n(\beta-1)}{\beta+n}\Gamma_n(\beta-1)$, причём $(\beta-1) \in (0,1]$. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n(\beta) = (\beta-1)\Gamma(\beta-1) = \Gamma(\beta)$. Далее аналогично рассматривается интервал $(2,3]$ и т. д.

$= \frac{n^{\beta+1}\cdot n!}{(\beta+1)\dots(\beta+n+1)} \cdot \frac{(\beta+n+1)}{n\beta}$

Если же $\beta \in (-1,0)$, то $\Gamma_n(\beta) = \dfrac{\beta+1+n}{n\beta}\Gamma_n(\beta+1)$, где $(\beta+1) \in (0,1)$. Поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n(\beta) = \dfrac{1}{\beta}\Gamma(\beta+1) = \Gamma(\beta)$. ⌋

2⁰. Представление Вейерштрасса.

$$\forall\,\alpha \in (\boldsymbol{R}\setminus\{0,-1,\dots,-n,\dots\}) :\ \Gamma(\alpha) = e^{-C\alpha}\frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\alpha/n}}{1+\frac{\alpha}{n}}, \qquad (2)$$

где $C := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$, $C \approx 0{,}577215\dots$, C — ***постоянная Эйлера.***

⌈ Представим Γ_n в следующем виде

$\frac{1}{\alpha}\cdot e^{\frac{\alpha}{1}}\cdot e^{\frac{\alpha}{2}}\dots e^{\frac{\alpha}{n}}\cdot e^{\alpha\ln n-\frac{\alpha}{1}-\dots-\frac{\alpha}{n}} \;\|\; e^{-\gamma_n\alpha}$

$$\Gamma_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha\ln n}\frac{1}{\underbrace{(\frac{\alpha}{1}+1)(\frac{\alpha}{2}+1)\dots(\frac{\alpha}{n}+1)}_{n!}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha\gamma_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\alpha/k}}{1+\frac{\alpha}{k}},\quad \alpha \in (\boldsymbol{R}\setminus\{0,-1,\dots,-n,\dots\}),$$

где $\gamma_n := 1+\dfrac{1}{2}+\dots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, $n \geq 1$. Как было доказано в п. 7.2.2, последовательность $\{\gamma_n \mid n \geq 1\}$ сходится. Следовательно, сходится произведение в равенстве (2) и это равенство справедливо. ⌋

3⁰. Формула Лежандра удвоения аргумента.

$$\forall\,\alpha > 0 \ :\quad 2^{\alpha-1}\Gamma\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\alpha+1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha).$$

⌈ Положим $f(\alpha) := \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}2^{\alpha-1}\Gamma\Big(\dfrac{\alpha}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\alpha+1}{2}\Big)$, $\alpha > 0$, и докажем, что функция f удовлетворяет условиям теоремы 19. Действительно,

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{1-1}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Gamma(1) = 1;$$

$$f(\alpha+1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{\alpha}\Gamma\Big(\frac{\alpha+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\alpha}{2}+1\Big) = \alpha f(\alpha),\ \alpha > 0.$$

Кроме того, функция

$$\ln f(\alpha) = -\ln\sqrt{\pi} + \ln\Gamma\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) + \ln\Gamma\Big(\frac{\alpha+1}{2}\Big) + (\alpha-1)\ln 2,\ \ \alpha > 0,$$

есть сумма с положительными коэффициентами функций, выпуклых вниз. Следовательно. функция $\ln f$ выпукла вниз. По теореме 19 получаем равенство $f = \Gamma$. ⌋

4⁰. Функциональное уравнение Эйлера. Верно равенство

$$\forall\alpha \in (\boldsymbol{R}\setminus \boldsymbol{Z})\ :\quad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}. \tag{3}$$

⌈ Для $\alpha \in (\boldsymbol{R}\setminus \boldsymbol{Z})$ положим $\varphi(\alpha) := \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha$. Функция φ периодична с периодом 1, так как для $\alpha \in (\boldsymbol{R}\setminus \boldsymbol{Z})$ верно равенство

$$\varphi(\alpha+1) := \Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)\sin\pi(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)\frac{\Gamma(1-\alpha)}{-\alpha}(-\sin\pi\alpha) = \varphi(\alpha).$$

Кроме того, поскольку имеем $\varphi(\alpha) := \dfrac{1}{\alpha}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha =$ $= \Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)\Big(\pi - \dfrac{\pi^3\alpha^2}{3!} + \dfrac{\pi^5\alpha^4}{5!} - \ldots\Big)$, то существует следующий предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\varphi(\alpha) = \pi$.

Доопределим теперь функцию φ, положив её равной π в точках из $\boldsymbol{Z}$. Доопределённая функция φ имеет в точке $\alpha = 0$ производные всех порядков, поскольку такие производные имеют следующие функции $\Gamma(1+\alpha)$, $\Gamma(1-\alpha)$ и сумма сходящегося на оси степенного ряда. Поэтому $\varphi \in C^\infty(\boldsymbol{R})$. Функция φ положительна на $\boldsymbol{R}$. Применив дважды формулу Лежандра, получим равенство

$$\varphi\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)\varphi\Big(\frac{\alpha+1}{2}\Big) = \pi\varphi(\alpha) \tag{4}$$

сначала для $\alpha \in (0,1)$, а затем, учитывая периодичность и определение на $\boldsymbol{Z}$, и на $\boldsymbol{R}$.

Рассмотрим теперь функцию $\psi := (\ln\varphi) \in C^\infty(\boldsymbol{R})$, периодическую с периодом 1. Из формулы (4) для функции ψ' имеем уравнение

$$\frac{1}{2}\Big(\psi'\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) + \psi'\Big(\frac{\alpha+1}{2}\Big)\Big) = \psi'(\alpha),\quad \alpha \in [0,1].$$

Отсюда для любого $n \in \boldsymbol{N}$ получаем равенство

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\psi'\Big(\frac{\alpha+k}{2^n}\Big) = \psi'(\alpha),\quad \alpha \in [0,1],$$

из которого на основании теоремы Дарбу следует соотношение $\int\limits_0^1 \psi'(u)\,du = \psi'(\alpha), \alpha \in [0,1]$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем $0 = \psi(1) - \psi(0) = \psi'(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$. Таким образом, $\psi(\alpha) = \psi(0)$, $\alpha \in [0,1]$, а для значения $\psi(0) = \ln\varphi(0) = \ln\pi$. Следовательно, $\varphi(\alpha) = e^{\psi(\alpha)} = e^{\ln\pi} = \pi$, $\alpha \in [0,1]$, и потому $\varphi(\alpha) = \pi$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Если $\alpha \notin \boldsymbol{Z}$, то последнее равенство приводит к формуле $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$. ⌋

Упражнение 25. Доказать, что $\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}+\alpha\Big)\Gamma\Big(\dfrac{1}{2}-\alpha\Big)=\dfrac{\pi}{\cos\pi\alpha}$.

13.5.4 Разложение синуса в бесконечное произведение

Согласно уравнению Эйлера, имеем следующее равенство $\forall\,\alpha\in(\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Z}):\ \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sin\pi\alpha=\pi$, или $-\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)\sin\pi\alpha=\pi$. Отсюда с помощью представления Вейерштрасса $\Gamma(\pm\alpha)=e^{\mp C\alpha}\dfrac{1}{\pm\alpha}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\pm\alpha/n}}{1\pm\frac{\alpha}{n}}$,

$\sin\pi\alpha=\pi\,(\Gamma(\alpha)\,\Gamma(-\alpha)\cdot(-\alpha))^{-1}$

$\alpha\in(\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Z})$, получим равенство $\dfrac{1}{\alpha}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}}\sin\pi\alpha=\pi$, из которого следует представление $\sin\pi\alpha=\pi\alpha\prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\Big)$ сначала для $\alpha\in(\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Z})$. В точках из $\boldsymbol{Z}$ равенство также имеет место. Таким образом, получено следующее представление $\forall\,\alpha\in\boldsymbol{R}:\ \ \sin\pi\alpha=\pi\alpha\prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\Big)$.

Упражнение 26. Доказать, что для любого $\alpha\in\boldsymbol{R}$ справедливо представление $\cos\pi\alpha=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{4\alpha^2}{(2n-1)^2}\Big)$.

Упражнение 27. Найти значение произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n-\frac{1}{2})}{(n-\frac{1}{4})^2}$.

Упражнение 28. Доказать, что для $a>0$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^{+\infty}x^{-n-1}\exp\Big(-\frac{a}{2x^2}\Big)\,dx=2^{(n-1)/2}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)a^{-n/2}.$$

13.5.5 Формула Стирлинга

Теорема 20. ***(Формула Стирлинга).*** *Справедливо следующее равенство* $\forall\,\alpha>0:\ \Gamma(\alpha)=\sqrt{2\pi}\,\alpha^{\alpha-\frac{1}{2}}\,e^{-\alpha}e^{\theta(\alpha)/(12\alpha)}$, *где* $0<\theta(\alpha)<1$.

⌈ I. С помощью ряда Тейлора для функции $f(x)=\ln(1+x)$, $|x|<1$, имеем $\forall\,x\in\boldsymbol{R},\ x\neq0,\ |x|<1:\ \ \dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$.

II. Введём функцию $F(\alpha):=\Big(\alpha+\dfrac{1}{2}\Big)\ln\Big(1+\dfrac{1}{\alpha}\Big)-1,\ \ \alpha>0$. Учитывая I, получим

$$F(\alpha)=\frac{1}{2\dfrac{1}{2\alpha+1}}\ln\frac{1+\dfrac{1}{2\alpha+1}}{1-\dfrac{1}{2\alpha+1}}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2\alpha+1)^{2n}},\ \alpha>0.$$

Поэтому

$$0 < F(\alpha) < \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\alpha+1)^{2n}} = \frac{1}{12\alpha(\alpha+1)} = \frac{1}{12\alpha} - \frac{1}{12(\alpha+1)}, \alpha > 0.$$

III. Используя теперь последнюю оценку для следующей функции $\mu(\alpha) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} F(n+\alpha)$, $\mu(\alpha+1) - \mu(\alpha) = -F(\alpha)$, $\alpha > 0$, получаем такие неравенства $0 < \mu(\alpha) < \dfrac{1}{12\alpha}$, $\alpha > 0$, из которых имеем

$$\mu(\alpha) = \frac{\theta(\alpha)}{12\alpha},\ \alpha > 0; \quad \theta(\alpha) := 12\alpha\mu(\alpha),\ 0 < \theta(\alpha) < 1,\ \alpha > 0.$$

Заметим также, что по теореме о почленном дифференцировании функционального ряда $\mu''(\alpha) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} F''(n+\alpha) > 0$, $\alpha > 0$.

IV. Рассмотрим положительную функцию $f(\alpha) := \alpha^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\alpha+\mu(\alpha)}$, $\alpha > 0$, и докажем, что функция $f/f(1)$ удовлетворяет условиям основной теоремы теории гамма-функции. Действительно, для $\alpha > 0$ имеем

$$\begin{aligned} f(\alpha+1) &:= (\alpha+1)^{\alpha+1-1/2}e^{-\alpha-1+\mu(\alpha+1)} = \\ &= (\alpha+1)^{\alpha+1/2}e^{-\alpha-1}e^{\mu(\alpha)}e^{\mu(\alpha+1)-\mu(\alpha)} = \\ &= f(\alpha)(\alpha+1)^{\alpha+1/2}e^{-1}\alpha^{-\alpha+1/2}e^{-F(\alpha)} = \\ &= f(\alpha)(\alpha+1)^{\alpha+1/2}e^{-1}\alpha^{-\alpha+1/2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1/2}e^{1} = \alpha f(\alpha). \end{aligned}$$

Кроме того, $(\ln f(\alpha))'' = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{2\alpha^2} + \mu''(\alpha) > 0$, $\alpha > 0$, и потому функция f логарифмически выпукла на $(0, +\infty)$.

Таким образом, на основании основной теоремы теории гамма-функции имеем $f(\alpha)/f(1) = \Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$.

Для определения постоянной $1/f(1)$ используем для функции Γ формулу Лежандра

$$2^{\alpha-1}\frac{1}{f(1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\alpha/2-1/2}e^{-\alpha/2+\mu(\alpha/2)}\cdot\frac{1}{f(1)}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{(\alpha+1)/2-1/2}\cdot$$
$$\cdot e^{-(\alpha+1)/2+\mu((\alpha+1)/2)} = \sqrt{\pi}\frac{1}{f(1)}\alpha^{\alpha-1/2}e^{-\alpha+\mu(\alpha)}, \quad \alpha > 0,$$

откуда $\dfrac{1}{f(1)} = \sqrt{\pi}\sqrt{2}\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{\alpha/2}e^{1/2}e^{\mu(\alpha)-\mu(\alpha/2)-\mu((\alpha+1)/2)}$, $\alpha > 0$. Поскольку $\mu(\alpha) \to 0$, $\alpha \to +\infty$, то $1/f(1) = \sqrt{2\pi}$. ⌋

Следствием доказанной теоремы является известная формулу Стирлинга для $n!$ с $n \in N$, а именно

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\, e^{\theta(n)/(12n)}, \quad 0 < \theta(n) < 1.$$

Для доказательства нужно использовать равенство $n! = n\Gamma(n)$, $n \in N$, и доказанную выше формулу для $\Gamma(\alpha)$ с $\alpha = n$.

13.5.6 Бета-функция

Бета-функция $\mathrm{B}: ((0,+\infty)\times(0,+\infty)) \to \boldsymbol{R}$ определяется равенством

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) := \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx, \quad \alpha>0,\ \beta>0. \qquad (1)$$

Приведём некоторые свойства бета-функции.

1^0. Интеграл (1) сходится при $\alpha>0$, $\beta>0$, и для любых фиксированных $\alpha_0>0$, $\beta_0>0$ сходится равномерно на следующем множестве $([\alpha_0,+\infty)\times[\beta_0,+\infty))$.

2^0. $\mathrm{B}\in \boldsymbol{C}((0,+\infty)\times(0,+\infty))$.

3^0. $\forall\,\alpha>0\ \forall\,\beta>0\ :\ \mathrm{B}(\alpha,\beta)=\mathrm{B}(\beta,\alpha)$.

Доказательство получается заменой $1-x=t$ в интеграле (1).

4^0. $\mathrm{B}(\alpha,1)=\dfrac{1}{\alpha}$, $\mathrm{B}(1,\beta)=\dfrac{1}{\beta}$, $\alpha_0>0$, $\beta_0>0$.

5^0. $\mathrm{B}(\alpha,\beta+1)=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)$, $\alpha_0>0$, $\beta_0>0$.

⌈ Доказательство этого равенства следует из формулы интегрирования по частям

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta+1)=\int\limits_0^1 x^{\alpha+\beta-1}\Big(\frac{1-x}{x}\Big)^{\beta}dx = \frac{x^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\Big(\frac{1-x}{x}\Big)^{\beta}\Big|_{x\to0}^{x=1} -$$

$$-\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}\beta\Big(\frac{1-x}{x}\Big)^{\beta-1}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)\,dx = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta), \quad \alpha>0,\ \beta>0. ⌋$$

6^0. $\forall\,\alpha>0\ \forall\,\beta>0\ :\ \mathrm{B}(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

⌈ Пусть $\beta>0$ фиксировано. Докажем, что функция

$$f(\alpha):=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\mathrm{B}(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta), \quad \alpha>0,$$

удовлетворяет условиям основной теоремы теории гамма-функции. Действительно,

$$f(1)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\mathrm{B}(1,\beta)\Gamma(1+\beta)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{\beta}\beta\Gamma(\beta)=1;$$

$$f(\alpha+1)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\mathrm{B}(\alpha+1,\beta)\Gamma(\alpha+\beta+1)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{B}(\alpha,\beta)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)=\alpha f(\alpha), \quad \alpha>0.$$

Функция $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$, $\alpha>0$ логарифмически выпукла на $(0,+\infty)$, что доказывается аналогично случаю гамма-функции. Поэтому f логарифмически выпукла как произведение логарифмически выпуклых функций. Следовательно, $f=\Gamma$. ⌋

Упражнение 29. Выразить через значения гамма-функции интегралы: a) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}\,dx$; b) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} u \cos^{\beta-1} u\,du$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$;

c) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; d) $\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} u)^{2\alpha-1}\,du$, $0 < \alpha < 1$.

Упражнение 30. Предположим, что $a < b$. Вычислить следующий предел $\lim\limits_{\sigma\to 0+} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_a^b e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx\right)$.

13.5.7 Историческая справка

Джеймс Стирлинг (1692 — 1770) — шотландский математик. Первым получил асимптотическое разложение для логарифма гамма-функции, установил ряд свойств бета-функции и гипергеометрической функции.

Адриен Мари Лежандр (1752 — 1833) — французский математик. Автор работ по теории специальных функций (многочлены Лежандра), вариационному исчислению, теории чисел, также известных учебников, в частности "Теории чисел".

Симеон Дени Пуассон (1781 — 1840) — французский физик и математик. Автор основополагающих работ по небесной механике, по многим разделам математической физики, теории упругости, математическому анализу, теории вероятностей и др.

Гамма-функция принадлежит к числу наиболее удивительных объектов математики. Эта функция и связанная с ней бета-функция, которые часто встречаются в различных математических задачах и приложениях математики, привлекала к себе внимание самых выдающихся математиков. Многие существенные результаты об этих функциях получены Эйлером, в частности Эйлер получил формулу связи гамма и бета-функции, частные случаи формулы Лежандра. Существенные результаты принадлежат Гауссу в связи с его работами о гипергеометрической функции, ему принадлежит общая теорема умножения для гамма-функции. Особый раздел теории этих функций составляют работы, посвящённые продолжению гамма-функции в комплексную плоскость. То, что свойство логарифмической выпуклости характеризует гамма-функцию, обнаружено недавно. *Э. Артин* в 1931 г. показал, как можно получить все основные теоремы о гамма-функции, исходя из этого факта.

Глава 14

Кратные интегралы

14.1 Кратные интегралы по брусу

14.1.1 Определения и обозначения

В настоящей главе рассматриваются подмножества пространства R^m и действительные функции, определённые на этих подмножествах. Пространство R^m рассматривается как линейное полное метрическое пространство с евклидовым расстоянием. Необходимые определения, в частности, определения расстояния, нормы и т. п. см. в п. 11.1.1. Предлагаемая ниже конструкция определения интеграла является ещё одним обобщением схемы определения интеграла Римана на случай функций от нескольких переменных.

Определение 1. ***Прямоугольным параллелепипедом в R^m (или m-мерным интервалом или брусом)*** *называется множество* $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m] = \prod\limits_{k=1}^{m} [a_k, b_k] = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in R^m \mid a_k \leq x_k \leq b_k,\ 1 \leq k \leq m\}, \{a_k,\ b_k\} \subset R,\quad a_k < b_k,\ 1 \leq k \leq m$. ***Диаметром бруса Q*** *называется число*

$$d(Q) := \sup(\rho(\vec{x}, \vec{y}) \mid \vec{x} \in Q,\ \vec{y} \in Q) = \left(\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)^2\right)^{1/2}.$$

Объёмом (точнее m-мерным объёмом) или мерой (m-мерной мерой) бруса Q *называется положительное число* $m(Q) := \prod\limits_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$.

Упражнение 1. Пусть Q_1 и Q_2 — брусы в R^m. В каких случаях множества $Q_1 \cap Q_2$, $Q_1 \cup Q_2$, $Q_1 \setminus Q_2$ являются брусами в R^m?

Упражнение 2. Пусть Q — брус в R^m, Q^0 — множество всех внутренних в (R^m, ρ) точек Q и $\partial Q =: Q \setminus Q^0$ — ***граница*** бруса Q. Представить ∂Q в виде объединения $2m$ брусов из R^{m-1}, каждая пара которых не имеет общих внутренних точек в (R^{m-1}, ρ). Отдельно рассмотреть случаи $m = 1$, $m = 3$.

Пусть $Q = \prod\limits_{k=1}^{m} [a_k, b_k]$ — брус. Для каждого k, $1 \le k \le m$, рассмотрим для отрезка $[a_k, b_k]$ некоторое его разбиение, т. е. набор точек

$$\lambda_k = \{x_k(0), x_k(1), \dots, x_k(n_k)\}, \ a_k = x_k(0) < x_k(1) < \dots < x_k(n_k) = b_k,$$

и положим $\Delta x_k(\nu) := x_k(\nu + 1) - x_k(\nu)$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, n_k - 1$; при этом $\sum\limits_{\nu=0}^{n_k-1} \Delta x_k(\nu) = b_k - a_k$.

Для любого набора целых чисел $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ таких, что $\forall k$, $1 \le k \le m \ : \ 0 \le \nu_k \le n_k - 1$, рассмотрим брус $Q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m) := = \prod\limits_{k=1}^{m} [x_k(\nu_k), x_k(\nu_k+1)]$ с объёмом $m(Q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)) = \prod\limits_{k=1}^{m} \Delta x_k(\nu_k)$.

Определение 2. Набор брусов $\lambda = \{Q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)\} =$
$= \{Q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m) \mid 0 \le \nu_k \le n_k - 1, \ 1 \le k \le m\}$
называется разбиением бруса Q. ***Диаметром или размером разбиения*** λ *называется число*

$$|\lambda| = \max\{d(Q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)) \mid 0 \le \nu_k \le n_k - 1, \ 1 \le k \le m\}.$$

Заметим, что $\sum\limits_{0 \le \nu_k \le n_k - 1, 1 \le k \le m} m(Q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)) = m(Q)$.

Пусть $\omega(\lambda) := \{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m) \mid 0 \le \nu_k \le n_k - 1, \ 1 \le k \le m\}$.

14.1.2 Суммы Дарбу и их свойства

Пусть Q — брус, функция $f : Q \to R$, f ограничена на Q. Предположим, что $\lambda = \{Q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)\}$ — некоторое разбиение бруса Q.

*Определение 3. **Нижней суммой Дарбу** для функции f и разбиения λ называется сумма*

$$L(f; \lambda) := \sum_{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m) \in \omega(\lambda)} \inf_{Q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)} f \cdot m(Q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)).$$

Верхней суммой Дарбу *для функции f и разбиения λ называется сумма*

$$U(f; \lambda) := \sum_{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m) \in \omega(\lambda)} \sup_{Q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)} f \cdot m(Q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m)).$$

Пусть $\forall\,(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\in\omega(\lambda):\quad \vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\in Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)$. *Набор точек* $\{\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\}=\{\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\mid(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\in\omega(\lambda)\}$ ***называется набором, соответствующим разбиению*** λ. ***Интегральной суммой для функции*** f, *разбиения* λ *и соответствующего разбиению набора* $\{\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\}$ *называется сумма*

$$S(f;\lambda,\{\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\}):=$$
$$=\sum_{(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\in\omega(\lambda)} f(\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m))\cdot m(Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)).$$

Поскольку для любого набора индексов $(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\in\omega(\lambda)$ справедливы неравенства

$$\inf_Q f\le \inf_{Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)} f\le f(\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m))\le \sup_{Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)} f\le \sup_Q f, \quad (1)$$

то, умножив неравенства (1) на $m(Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m))>0$ и просуммировав по всем наборам $(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)$ из $\omega(\lambda)$, получим следующее свойство введенных сумм: для любого λ и любого набора $\{\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\}$, соответствующего разбиению λ, верны неравенства

$$\inf_Q f\cdot m(Q)\le L(f;\lambda)\le S(f;\lambda,\{\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\})\le$$
$$\le U(f;\lambda)\le \sup_Q f\cdot m(Q). \quad (2)$$

Из неравенств (2) следует, что ***множества всех верхних и нижних сумм Дарбу, соответствующих всем возможным разбиениям бруса*** Q***, являются ограниченными.***

Заметим теперь, что разбиение λ бруса Q из определения 2 получается с помощью разбиений $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ соответственно отрезков $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, …, $[a_m,b_m]$. Рассмотрим теперь для каждого из разбиений $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ соответствующие им подразбиения $\lambda'_1,\lambda'_2,\dots,\lambda'_m$, (которые получаются из $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ добавлением новых точек).Пусть λ' разбиение бруса, полученное с помощью разбиений $\lambda'_1,\lambda'_2,\dots,\lambda'_m$. При этом каждый брус $Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)$ разбиения λ окажется разбитым на части-брусы $\{Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m/\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m)\}$, которые составляют разбиение $\lambda'(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)$ бруса $Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)$. Таким образом, имеем $\lambda'=\{Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m/\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m)\mid(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m)\in\omega(\lambda'(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m))$,
$(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\in\omega(\lambda)\}$ и следующее равенство

$$\sum_{(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m)\in\omega(\lambda'(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m))} m(Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m/\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m))=$$
$$=m(Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)).$$

Определение 4. Разбиение λ' *бруса* Q*, полученное описанным выше способом, называется* ***подразбиением*** *разбиения* λ.

Суммы Дарбу, соответствующие разбиению λ и любому его подразбиению λ', связаны следующими неравенствами:

$$L(f;\lambda) \le L(f;\lambda') \le U(f;\lambda') \le U(f;\lambda). \qquad (3)$$

Для доказательства неравенств (3) используем неравенство (2) для бруса $Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)$, функции f и разбиения $\lambda'(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)$:

$$\inf_{Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)} f \cdot m(Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)) \le$$

$$\le \sum_{(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)} \inf_{Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m/\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)} f \cdot m(Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m/\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)$$

$$\le \sum_{(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)} \sup_{Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m/\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)} f \cdot m(Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m/\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)$$

$$\le \sup_{Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)} f \cdot m(Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)),$$

где суммы по $(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)$ берутся по всем возможным брусам разбиения $\lambda'(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)$. Просуммировав полученные неравенства по всем наборам $(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)$ из $\omega(\lambda)$, получим формулу (3).

Пусть λ' и λ'' — два разбиения бруса Q, полученные с помощью разбиений $\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots,\lambda'_m$ и $\lambda''_1,\lambda''_2,\ldots,\lambda''_m$ соответственно отрезков $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, ..., $[a_m,b_m]$. Положим $\lambda_k = \lambda'_k \cup \lambda''_k$, $1 \le k \le m$, и пусть λ — разбиение бруса Q, полученное с помощью $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$. Разбиение λ является подразбиением каждого из разбиений λ', λ''. Учитывая неравенства (1) и (3), получим $L(f;\lambda') \le L(f;\lambda) \le U(f;\lambda) \le U(f;\lambda'')$.

Таким образом, для любых двух разбиений λ', λ'' бруса Q справедливо неравенство

$$L(f;\lambda') \le U(f;\lambda''). \qquad (4)$$

Упражнение 3. Пусть при $m = 2$, λ — разбиение прямоугольника Q, полученное с помощью разбиений λ_1 и λ_2 отрезков $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$ соответственно. Пусть $f_k : [a_k,b_k] \to \boldsymbol{R}$, $k = 1,2$ — ограниченные функции. Доказать равенства: a) $L(g;\lambda) = L(f_1;\lambda_1)(b_2 - a_2) + L(f_2;\lambda_2)(b_1 - a_1)$, $U(g;\lambda) = U(f_1;\lambda_1)(b_2 - a_2) + U(f_2;\lambda_2)(b_1 - a_1)$ для $g(x_1,x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, $(x_1,x_2) \in Q$; b) $L(h;\lambda) = L(f_1;\lambda_1)L(f_2;\lambda_2)$, $U(h;\lambda) = U(f_1;\lambda_1)U(f_2;\lambda_2)$ для $h(x_1,x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$, $(x_1,x_2) \in Q$ при условии, что $f_1 \ge 0$, $f_2 \ge 0$.

14.1.3 Верхний и нижний интегралы. Определение кратного интеграла по брусу

Пусть Q — брус и $f : Q \to \boldsymbol{R}$ — ограниченная на Q функция.

Определение 5. Нижним интегралом от функции f ***по брусу*** Q ***называется число*** $J_* = \sup\limits_{\lambda} L(f;\lambda)$.

Верхним интегралом от функции f по брусу Q называется число $J^* = \inf\limits_{\lambda} U(f;\lambda)$.

Точные грани берутся по всевозможным разбиениям λ бруса Q.

Из неравенств (4) п. 14.1.2 следует, что справедливо неравенство

$$J_* \le J^*. \tag{1}$$

Определение 6. ***Функция f называется интегрируемой по брусу Q (обозначение $f \in R(Q)$), если $J_* = J^*$. Для интегрируемой функции f число $J := J_* = J^*$ называется интегралом (точнее m-кратным интегралом) Римана от функции f по брусу Q и обозначается одним из следующих символов:*** $\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x}$, $\int\limits_Q f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\ldots dx_m$, $\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2}\ldots\int\limits_{a_m}^{b_m} f(x_1,x_2,\ldots,x_m)\,dx_1dx_2\ldots dx_m$.

При $m = 2$ и $m = 3$ интеграл часто называют также ***двойным*** *и* ***тройным*** *соответственно.*

Упражнение 4. Пусть дополнительно к условиям упр. 3 функции $f_k \in R([a_k,b_k])$, $k = 1,2$. Доказать, что $\{g,h\} \subset R(Q)$ и определить двойные интегралы от g и h по Q.

Упражнение 5. Для $m = 2$ привести пример функции, для которой имеет место неравенство $J_* < J^*$.

Упражнение 6. Доказать, что $f \in R(Q)$ тогда и только тогда, когда $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\lambda: \quad U(f;\lambda) - L(f;\lambda) < \varepsilon$.

Упражнение 7. Интеграл от постоянной функции. Пусть $c \in R$ и $f(\vec{x}) = c$, $\vec{x} \in Q$. Доказать, что $\int\limits_Q c\,d\vec{x} = cm(Q)$.

14.1.4 Интегрируемость непрерывной функции

Лемма 1. *Пусть функция $f:\ Q \to R$ удовлетворяет для некоторого числа $\varepsilon > 0$ условию*

$$\exists\,\delta > 0\ \forall\,\{\vec{x},\vec{y}\} \subset Q,\ \rho(\vec{x},\vec{y}) < \delta:\ |f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \varepsilon. \tag{1}$$

Тогда $\forall\,\lambda,\ |\lambda| < \delta:\ U(f;\lambda) - L(f;\lambda) < \varepsilon m(Q)$.

⌈ Пусть разбиение λ имеет размер $|\lambda| < \delta$. Тогда для любого бруса $Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)$ разбиения $\lambda:\ d(Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)) < \delta$, и потому

$$\sup_{Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)} f - \inf_{Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)} f = \sup_{\{\vec{x},\vec{y}\}\subset Q(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)} (f(\vec{x}) - f(\vec{y})) < \varepsilon.$$

С помощью этого неравенства получаем оценку $U(f;\lambda) - L(f;\lambda) =$
$$= \sum_{(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\in\omega(\lambda)} \left(\sup_{Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)} f - \inf_{Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)} f \right) m(Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)) < _{\frac{\varepsilon}{m(Q)}}, и$$
$< \varepsilon m(Q)$. достигается т.к. f-непр. на комп.
$\le \sum (f(X^*) - f(X_*)) m(Q) < \frac{\varepsilon}{m(Q)}$]

Теорема 1. *Функция $f \in C(Q)$ интегрируема по Q.*

[Брус Q — ограниченное замкнутое подмножество в (R^m, ρ), следовательно, компактное в этом пространстве. По условию теоремы $f \in C(Q)$, поэтому по теореме Кантора функция f равномерно непрерывна на Q. Следовательно, условие леммы 1 для функции f и любого $\varepsilon > 0$ выполнено. Из определения интегралов J_*, J^*, неравенства (1) п. 14.1.3 и утверждения леммы 1 для любого разбиения λ, $|\lambda| < \delta$ имеем $0 \le J^* - J_* \le U(f;\lambda) - L(f;\lambda) < \varepsilon m(Q)$. Отсюда получаем $0 \le J^* - J_* < \varepsilon m(Q)$ для любого $\varepsilon > 0$. Таким образом, $J^* - J_* = 0$.]

Теорема 2. *Пусть $f \in C(Q)$. Тогда*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \lambda, |\lambda| < \delta \quad \forall \{\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\} :$$
$$\left| \int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} - \sum_{(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\in\omega(\lambda)} f(\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m))\, m(Q(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)) \right| < \varepsilon m(Q).$$

[Теорема утверждает, что для непрерывной функции кратный интеграл совпадает с пределом интегральных сумм. Для функции f выполнено условие (1) леммы 1. Кроме того, согласно определению J_* и J^* имеем неравенства $\forall \lambda : L(f;\lambda) \le J_* = \int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = J^* \le U(f;\lambda)$, и
$\forall \lambda\ \forall \{\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\} : L(f;\lambda) \le S(f;\lambda,\{\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\}) \le U(f;\lambda)$.
Отсюда следует неравенство $\left| \int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} - S(f;\lambda,\{\vec{\xi}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\}) \right| \le$
$\le U(f;\lambda) - L(f;\lambda)$. Согласно лемме 1 теперь получим
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \lambda, |\lambda| < \delta : \quad U(f;\lambda) - L(f;\lambda) < \varepsilon m(Q). \quad]$$

Следствие 1. Пусть $f \in C(Q)$, $\{\lambda^{(n)} \mid n \ge 1\}$ — последовательность разбиений бруса Q, удовлетворяющая условию $|\lambda^{(n)}| \to 0$, $n \to \infty$. Пусть для каждого натурального n $\{\vec{\xi}^{(n)}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\}$ — некоторый набор, соответствующий разбиению $\lambda^{(n)}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S(f;\lambda^{(n)},\{\vec{\xi}^{(n)}(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m)\}) = \int_Q f(\vec{x})\,d\vec{x}$.

14.1.5 Свойства интеграла от непрерывной функции

Теорема 3. *Для любого $c \in R$* $\int_Q c\,d\vec{x} = cm(Q)$.

Теорема 4. *Пусть Q — брус в $\boldsymbol{R}^m$ и $Q = Q_1 \cup Q_2$, где Q_1, Q_2 — брусы в $\boldsymbol{R}^m$, не имеющие общих внутренних точек. Пусть $f \in C(Q)$.*

Тогда $\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int\limits_{Q_1} f(\vec{x})\,d\vec{x} + \int\limits_{Q_2} f(\vec{x})\,d\vec{x}$.

⌈ В силу теоремы 1 все интегралы в утверждении теоремы определены. Построим последовательность $\{\lambda^{(n)} \mid n \geq 1\}$ разбиений бруса Q следующим образом. Пусть $\lambda^{(1)}$ состоит из брусов Q_1, Q_2; разбиение $\lambda^{(2)}$ — разбиение Q, которое является подразбиением $\lambda^{(1)}$; вообще, разбиение $\lambda^{(n)}$ — разбиение Q, которое является подразбиением $\lambda^{(n-1)}$. Последовательность разбиений можно взять такой, что $|\lambda^{(n)}| \to 0$, $n \to \infty$. Для каждого $n \geq 1$ брусы разбиения $\lambda^{(n)}$, лежащие в брусе Q_k, составляют разбиение $\lambda_k^{(n)}$ бруса Q_k, $k = 1, 2$. При этом $|\lambda_k^{(n)}| \to 0$, $n \to \infty$, $k = 1, 2$. Заметим также, что

$$S(f; \lambda^{(n)}, \{\vec{\xi}^{(n)}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)\}) = \sum_{k=1}^{2} S(f; \lambda_k^{(n)}, \{\vec{\xi}^{(n)}(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)\}).$$

Остаётся к последнему равенству применить следствие 1. ⌋

Теорема 5. *Пусть $f_k \in C(Q)$, $c_k \in \boldsymbol{R}$, $k = 1, 2$.*

Тогда $\int\limits_Q (c_1 f_1(\vec{x}) + c_2 f_2(\vec{x}))\,d\vec{x} = c_1 \int\limits_Q f_1(\vec{x})\,d\vec{x} + c_2 \int\limits_Q f_2(\vec{x})\,d\vec{x}$.

⌈ Доказательство следует из равенства

$$S(c_1 f_1 + c_2 f_2; \lambda) = c_1 S(f_1; \lambda) + c_2 S(f_2; \lambda).$$ ⌋

Теорема 6. ***(Теорема о среднем значении).*** *Пусть функция $f \in C(Q)$. Тогда $\exists\, \vec{\theta} \in Q :\ \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = f(\vec{\theta})m(Q)$.*

⌈ Поскольку $f \in C(Q)$ и Q — компакт в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$, то $\exists\, \{\vec{x}_*, \vec{x}^*\} \subset Q :\ \inf\limits_Q f = f(\vec{x}_*)$, $\sup\limits_Q f = f(\vec{x}^*)$. Теперь из определения интеграла и неравенств (1) п. 14.1.2 имеем $f(\vec{x}_*)m(Q) \leq \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \leq f(\vec{x}^*)m(Q)$, или $f(\vec{x}_*) \leq \dfrac{1}{m(Q)} \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \leq f(\vec{x}^*)$. Отрезок $\{\vec{x}_* + t(\vec{x}^* - \vec{x}_*) \mid t \in [0,1]\} \subset Q$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) := f(\vec{x}_* + t(\vec{x}^* - \vec{x}_*))$, $t \in [0,1]$. По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций $\varphi \in C([0,1])$. Кроме того,

$$\varphi(0) = f(\vec{x}_*),\ \varphi(1) = f(\vec{x}^*);\ \ \varphi(0) \leq \frac{1}{m(Q)} \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \leq \varphi(1).$$

По теореме Коши о промежуточном значении имеем равенство $\exists\, \theta \in [0,1] :\ \varphi(\theta) = \dfrac{1}{m(Q)} \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x}$. Положив $\vec{\theta} := \vec{x}_* + \theta(\vec{x}^* - \vec{x}_*)$, получим утверждение теоремы. ⌋

Теорема 7. *Пусть* $f \in C(Q)$ *и* $f(\vec{x}) \geq 0,\ \vec{x} \in Q$.

Тогда $\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \geq 0$.

⌈Для доказательства воспользоваться теоремой 6. ⌋

Теорема 8. *Пусть* $f_k \in C(Q),\ k = 1,2$ *и* $f_1(\vec{x}) \leq f_2(\vec{x}),\ \vec{x} \in Q$.

Тогда $\int\limits_Q f_1(\vec{x})\,d\vec{x} \leq \int\limits_Q f_2(\vec{x})\,d\vec{x}$.

⌈ К функции $f_1 - f_2$ применить теоремы 7 и 5. ⌋

Теорема 9. *Пусть* $f \in C(Q)$. *Тогда* $\left|\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x}\right| \leq \int\limits_Q |f(\vec{x})|\,d\vec{x}$.

⌈ Использовать неравенства $-|f| \leq f \leq |f|$ и теорему 8. ⌋

Упражнение 8. Пусть $f \in C(Q)$ и $f(\vec{x}) > 0,\ \vec{x} \in Q$. Доказать, что $\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} > 0$.

Упражнение 9*. Пусть $Q = [0,1]^2$, функция $f \in R(Q)$ и равна 0 во всех точках непрерывности. Доказать, что $\int\limits_Q f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = 0$.

14.1.6 Формула приведения m-кратного интеграла к последовательным однократным

Для вычисления m-кратного интеграла $\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x}$ по брусу Q имеется простая формула, сводящая вычисление этого интеграла к последовательному вычислению однократных интегралов Римана.

Пусть $m > 1$. Для бруса $Q = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid a_k \leq x_k \leq b_k,\ 1 \leq k \leq m\}$ в R^m и каждого k, $1 \leq k \leq m$, рассмотрим также следующий брус $Q_k := \{(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m) \mid a_j \leq x_j \leq b_j,\ 1 \leq j \leq m,\ j \neq k\}$ в R^{m-1}, Q_k — проекция бруса Q на гиперплоскость $x_k = 0$.

Упражнение 10. При $m = 2$ и $m = 3$ для бруса Q определить все брусы $\{Q_k\}$.

Пусть $f \in C(Q)$. Тогда $\forall\, k,\ 1 \leq k \leq m\ \forall\, c \in [a_k, b_k] : f \in C(Q \cap \{\vec{x} \mid x_k = c\})$. Поэтому для любого $x \in [a_k, b_k]$ определён $(m-1)$-кратный интеграл по брусу Q_k

$$g_k(x) := \int\limits_{Q_k} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_m)\,dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_m.$$

Лемма 2. *Пусть* $f \in C(Q)$.

Тогда для каждого $k,\ 1 \leq k \leq m\ :\ g_k \in C([a_k, b_k])$.

⌈ На основании теорем 5 и 9 для любых $\{x', x''\} \subset [a_k, b_k]$ имеем

$$|g_k(x') - g_k(x'')| \le \int_{Q_k} |f((x_1, \ldots, x_{k-1}, x', x_{k+1}, \ldots, x_m) - \tag{1}$$

$$- f((x_1, \ldots, x_{k-1}, x'', x_{k+1}, \ldots, x_m)| \, dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_m.$$

Пусть произвольное число $\varepsilon > 0$ задано. Поскольку $f \in C(Q)$ и Q — компакт, то по теореме Кантора для числа ε

$$\exists \, \delta > 0 \quad \forall \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset Q, \ \rho(\vec{x}, \vec{y}) < \delta: \ |f(\vec{x}) - f(\vec{y})| < \frac{\varepsilon}{m(Q_k)}. \tag{2}$$

Пусть теперь $\{x', x''\} \subset [a_k, b_k]$, $|x' - x''| < \delta$. Тогда для векторов $\vec{x}\,' = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x', x_{k+1}, \ldots, x_m), \vec{x}\,'' = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x'', x_{k+1}, \ldots, x_m)$, где $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m) \in Q_k$, имеем $\rho(\vec{x}\,', \vec{x}\,'') = |x' - x''| < \delta$, и поэтому согласно неравенству (2) $|f(\vec{x}\,') - f(\vec{x}\,'')| < \varepsilon/m(Q_k)$. Из этого неравенства, формулы (1) и теорем 8 и 3 находим

$$|g_k(x') - g_k(x'')| \le \frac{\varepsilon}{m(Q_k)} \int_{Q_k} dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_m = \varepsilon.$$

Таким образом, g_k равномерно непрерывна на $[a_k, b_k]$. ⌋

Теорема 10. *Пусть $f \in C(Q)$. Тогда для любого k, $1 \le k \le m$ справедливо такое равенство* $\int_Q f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{a_k}^{b_k} g_k(x) \, dx =$

$$= \int_{a_k}^{b_k} \left(\int_{Q_k} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) \, dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_m \right) dx_k.$$

k=2 рассм.

⌈ Пусть произвольное число $\varepsilon > 0$ задано. Поскольку $f \in R(Q)$, то существует разбиение λ бруса Q такое, что $U(f;\lambda) - L(f;\lambda) < \varepsilon$. Разбиение λ естественным образом разбивает брус Q_k. Сначала имеем

$$\int_{a_k}^{b_k} g_k(x) \, dx = \sum_{\nu_k=0}^{n_k-1} \int_{x_k(\nu_k)}^{x_k(\nu_k+1)} g_k(x) \, dx \le$$

$$\le \sum_{\nu_k=0}^{n_k-1} \sup_{x \in [x_k(\nu_k), x_k(\nu_k+1)]} g_k(x) \Delta x_k(\nu_k) \le$$

$$\le \sum_{\nu_k=0}^{n_k-1} \sup_{x \in [x_k(\nu_k), x_k(\nu_k+1)]} h_k(x) \Delta x_k(\nu_k) \le U(f;\lambda),$$

где $h_k(x) :=$

$$\sum_{\substack{\nu_1, \ldots, \nu_{k-1} \\ \nu_{k+1}, \ldots, \nu_m}} \sup_{\substack{(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m) \in \\ \in \prod_{j \ne k} [x_j(\nu_j), x_j(\nu_j+1)]}} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_m) \prod_{j \ne k} \Delta x_j(\nu_j)$$

и второе неравенство получено путём замены $(m-1)$-кратного интеграла $g_k(x)$ верхней суммой Дарбу. Аналогично, $\int_{a_k}^{b_k} g_k(x) \, dx \ge L(f;\lambda)$.

Поскольку $L(f;\lambda) \le \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \le U(f;\lambda)$, то $\left|\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} - \int\limits_{a_k}^{b_k} g_k(x)\,dx\right| \le$
$\le U(f;\lambda) - L(f;\lambda) < \varepsilon$. ⌋

Следствие 2. Пусть $f \in C(Q)$. Тогда

$$\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int\limits_{a_m}^{b_m}\left(\int\limits_{a_{m-1}}^{b_{m-1}}\left(\ldots\left(\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\right)dx_2\ldots\right)dx_{m-1}\right)dx_m.$$

⌈ Доказательство получается с помощью последовательного применения теоремы 10. Заметим, что порядок интегрирования может быть произвольным. ⌋

Следствие 3. Пусть $f \in C(Q)$. Тогда для любого k, $1 \le k \le m$, справедливо равенство

$$\int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int\limits_{Q_k}\left(\int\limits_{a_k}^{b_k} f(\vec{x})\,dx_k\right)dx_1\ldots dx_{k-1}dx_{k+1}\ldots dx_m.$$

⌈ Для доказательства достаточно дважды применить следствие 2. ⌋

Следствие 4. Пусть $f \in C(Q)$, существует f'_k на Q и $f'_k \in C(Q)$. Тогда

$$\int\limits_Q \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}\,d\vec{x} = \int\limits_{Q_k} f(x_1,\ldots,x_{k-1},b_k,x_{k+1},\ldots,x_m)\prod\nolimits_{j\ne k} dx_j -$$
$$- \int\limits_{Q_k} f(x_1,\ldots,x_{k-1},a_k,x_{k+1},\ldots,x_m)\prod_{j\ne k} dx_j. \qquad (3)$$

⌈ Для доказательства использовать следствие 3 и формулу Ньютона-Лейбница. ⌋

Простая формула (3) представляет собой некоторый аналог формулы Ньютона-Лейбница для m-кратного интеграла. Она также является частным случаем общей формулы Гаусса-Остроградского, которая доказывается далее на основании формулы (3).

Упражнение 11. Для функции $f \in C^m(Q)$ вычислить интеграл

$$\int\limits_Q \frac{\partial^m f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}\,d\vec{x}.$$

Упражнение 12. Пусть $f \in C(Q)$ и $Q(x_1,\ldots,x_m) := \{(u_1,\ldots,u_m) \mid a_k \le u_k \le x_k,\ 1 \le k \le m\}$, $(x_1,\ldots,x_m) \in Q$. Положим $g(x_1,\ldots,x_m) := = \int\limits_{Q(x_1,\ldots,x_m)} f(\vec{u})\,d\vec{u}$, $(x_1,\ldots,x_m) \in Q^0$. Вычислить следующие производные $\dfrac{\partial g}{\partial x_k}$, $1 \le k \le m$; $\dfrac{\partial^m g}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}$.

Упражнение 13. Пусть $Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$, $\{f,g\} \subset C^2(Q)$ и

$f(x_1, a_2) = f(x_1, b_2) = 0$, $x_1 \in [a_1, b_1]$; $g(a_1, x_2) = g(b_1, x_2) = 0$, $x_2 \in [a_2, b_2]$. Доказать равенство

$$\int_Q f(x_1, x_2)\frac{\partial^2 g(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\, dx_1 dx_2 = \int_Q \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} g(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

Упражнение 14. Пусть $Q = [0, 2\pi]^2$, $f \in C([-1, 1]^2)$. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_Q f(\sin^n x_1, \cos^n x_2)\, dx_1 dx_2$.

Упражнение 15. Пусть $f \in C^1(Q)$, $Q = [0, 1]^2$. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(n\left(\int_Q f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 - \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=0}^{n-1} f\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)\right)\right).$$

Упражнение 16*. Пусть $f \in C(Q)$, $Q = [0, 1]^2$. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\right)^2 \int_Q \left(x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2)\right)^n f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2\right).$$

Упражнение 17. Пусть $f \in C([0, 1])$, $Q^n = [0, 1]^n$. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q^n} f(x_1 x_2 \ldots x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Указание. В задачах 16 и 17 использовать теорему Вейерштрасса для f соответственно на $[0, 1]^2$ и $[0, 1]$.

Упражнение 18. Пусть функция $f : (\alpha, \beta) \to \boldsymbol{R}$ выпукла вниз на (α, β) и $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. Для $n \geq 2$ доказать неравенство

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)^n} \int_{[a,b]^n} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

14.2 Множества, измеримые в смысле Жордана. Мера Жордана

Для однократного интеграла отрезок является основным естественным множеством, на котором определяется интеграл. При переходе к кратным интегралам положение существенно меняется. Например, в случае двойного интеграла желательно уметь определять интегралы не только по прямоугольникам, но и по таким множествам, как треугольник, круг и т. п. Для определения кратного интеграла по множествам, более сложным, чем брусы, нужно сначала распространить понятие объёма на эти множества. Первое распространение понятия меры (т. е. длины в случае множеств на $\boldsymbol{R}$, площади для подмножеств $\boldsymbol{R}^2$ и объёма для подмножеств $\boldsymbol{R}^3$) на довольно широкий класс подмножеств принадлежит французскому математику К. Жордану. Множества из этого класса называются ***измеримыми по Жордану,*** а их объём-мера называется *мерой Жордана.* Мера Жордана обладает обычными свойствами, которые присущи длине, площади и объёму.

14.2.1 Разбиение пространства R^m

*Определение 1. **Разбиение нулевого порядка** пространства R^m есть следующее его представление в виде объединения брусов* $R^m = \bigcup\limits_{n_k \in Z, 1 \le k \le m} Q^{(0)}(n_1, \ldots, n_m)$, *где*

$$Q^{(0)}(n_1, \ldots, n_m) := \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \mid n_k \le x_k \le n_k+1, \ 1 \le k \le m\}.$$

*Пусть $n \in N$. **Разбиение n-го порядка** пространства R^m есть следующее его представление в виде объединения брусов* $R^m = \bigcup\limits_{n_k \in Z, 1 \le k \le m} Q^{(n)}(n_1, \ldots, n_m)$, *где* $Q^{(n)}(n_1, \ldots, n_m)$

$$:= \left\{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m) \;\middle|\; \frac{n_k}{2^n} \le x_k \le \frac{n_k+1}{2^n}, \ 1 \le k \le m\right\}.$$

Разбиение нулевого порядка можно получить следующим образом. На каждой из координатных осей отметим точки, координаты которых есть целые числа, и через эти точки перпендикулярно к осям проведём гиперплоскости. При $m = 2$ получим разбиение плоскости на конгруэнтные квадраты со стороной 1 (бумага в клетку). Для получения разбиения первого порядка нужно дополнительно отметить на осях точки, координаты которых кратны $1/2$.

В дальнейшем используются следующие свойства разбиений пространства R^m.

1^0. Пусть $F \subset R^m$ — ограниченное множество в (R^m, ρ). Для каждого $n \in (N \cup \{0\})$ набор брусов разбиения порядка n пространства R^m, имеющих хотя бы одну общую точку с F, конечен.

2^0. Для каждого $n \in (N \cup \{0\})$ брусы разбиения порядка $n+1$ получаются из брусов разбиения порядка n разбиением последних на 2^m конгруэнтных бруса.

3^0. Диаметр и объём бруса разбиения порядка n соответственно равны $\sqrt{m}\,2^{-n}$, 2^{-mn}.

4^0. Два различных бруса разбиения порядка n не имеют общих внутренних в (R^m, ρ) точек.

5^0. Разбиение порядка n пространства R^m определяет естественным образом разбиение порядка n таких подпространств, как подпространство $R^{m-1} = \{(x_1, \ldots, x_{m-1})\}$, $R^2 = \{(x_1, x_2)\}$ и т. п.

Разбиение порядка n пространства R^m будем обозначать следующим образом $\pi^{(n)} := \pi^{(n)}_m := \{Q^{(n)}(n_1, \ldots, n_m) \mid n_k \in Z, \ 1 \le k \le m\}$, при этом $\bigcup\limits_{Q \in \pi^{(n)}} Q = R^m$.

Для бруса $Q \in \pi^{(n)}$ через Q^0 будем обозначать множество всех его внутренних в (R^m, ρ) точек.

Упражнение 19. В R^2 изобразить множество точек, координаты которых x_1, x_2 удовлетворяют условию $\sin(2^n \pi x_1) \cdot \sin(2^n \pi x_2) \geq 0$, $n \in (N \cup \{0\})$.

14.2.2 Измеримые множества. Мера

Определение 2. Объёмом (точнее m-мерным объёмом) или мерой (точнее m-мерной мерой) бруса $Q = \prod_{k=1}^{m} [a_k, b_k]$ называется число $m(Q) := \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k)$.

Если $G \subset R^m$ и $G = \bigcup_{k=1}^{s} Q_k$, $Q_k \in \pi^{(n)}$, $1 \leq k \leq m$, при некотором n, и все $\{Q_k\}$ различны, то ***мера*** *(точнее* ***m-мерная мера****) множества G есть число*

$$m(G) := \sum_{k=1}^{m} m(Q_k). \tag{1}$$

Будем также считать, что $m(\varnothing) := 0$.

Упражнение 20. Проверить корректность последнего определения (дело в том, что представление для G не единственно!).

Далее используется определение (1) и связанные с ним элементарные свойства.

Пусть $F \subset R^m$, F ограничено в (R^m, ρ). Для каждого $n \in (N \cup \{0\})$ определим множества $F_{(n)} := \bigcup_{Q \in \pi^{(n)}, Q \subset F} Q$; $F^{(n)} := \bigcup_{Q \in \pi^{(n)}, Q \cap F \neq \emptyset} Q$; $\Delta F_{(n)} := \bigcup_{Q \in \pi^{(n)}, Q \subset F^{(n)}, Q \not\subset F_{(n)}} Q$. В том случае, когда бруса $Q \in \pi^{(n)}$, для которого $Q \subset F$, не существует, будем считать, что $F_{(n)} := \varnothing$.

При этом $F_{(n)} \subset F \subset F^{(n)}$, $(F \setminus F_{(n)}) \subset (F^{(n)} \setminus F_{(n)}) \subset \Delta F_{(n)}$.

Упражнение 21. Для $m = 2$ рассмотреть геометрическую иллюстрацию приведенных выше включений.

Мера множеств $F_{(n)}$, $F^{(n)}$ и $\Delta F_{(n)}$ определяется с помощью равенства (1), справедливы следующие соотношения

$$m(F_{(n)}) \leq m(F^{(n)}), \quad m(\Delta F_{(n)}) = m(F^{(n)}) - m(F_{(n)}); \quad n \geq 0.$$

Заметим, что определение чисел $m(F_{(n)})$ и $m(F^{(n)})$ для множества F в плоскости является естественной конструктивной процедурой получения реальных приближений для площади множества F.

Рассмотрим теперь разбиения порядков n и $n+1$ пространства R^m и соответствующие F множества $F_{(n)}$, $F^{(n)}$, $F_{(n+1)}$, $F^{(n+1)}$.

Из свойства 2 следуют включения

$$F_{(n)} \subset F_{(n+1)}, \qquad F^{(n+1)} \subset F^{(n)}. \tag{2}$$

следовательно для мер этих множеств справедливы следующие неравенства

$$0 \le m(F_{(n)}) \le m(F_{(n+1)}) \le m(F^{(n+1)}) \le m(F^{(n)}). \tag{3}$$

Согласно свойству 1^0 меры $m(F_{(0)})$ и $m(F^{(0)})$ конечны, и мы приходим к следующему заключению: последовательность чисел $\{m(F_{(n)}) \mid n \ge 0\}$ монотонно не убывает и ограничена, а последовательность чисел $\{m(F^{(n)}) \mid n \ge 0\}$ монотонно не возрастает и ограничена.

***Определение 3. Внутренней мерой** ограниченного множества $F \subset R^m$ называется неотрицательное число $m_*(F) := \lim\limits_{n\to\infty} m(F_{(n)}) = \sup\limits_{n\ge 0} m(F_{(n)})$.*

***Внешней мерой** ограниченного множества $F \subset R^m$ называется число $m^*(F) := \lim\limits_{n\to\infty} m(F^{(n)}) = \inf\limits_{n\ge 0} m(F^{(n)})$.*

Из неравенств (3) следует, что $0 \le m_*(F) \le m^*(F)$ для каждого ограниченного множества F.

***Определение 4.** Ограниченное множество $F \subset R^m$ называется **измеримым** в смысле Жордана, если справедливо равенство $m_*(F) = m^*(F)$. Для измеримого множества F число $m(F) := m_*(F) = m^*(F)$ называется **мерой Жордана** (точнее, **m-мерной мерой Жордана**) множества F.*

Класс всех подмножеств R^m, измеримых по Жордану, обозначим $\mathcal{K} = \mathcal{K}_m$. Класс $\mathcal{K}$ не пуст, в него входят множества, составленные из конечного числа брусов разбиений пространства R^m, поскольку для такого множества F имеем $F = F_{(n)}$, $m(F^{(n)}) = m(F_{(n)}) + \delta_n$ для всех n, начиная с некоторого, причём $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$. Множество $\varnothing$ также будем включать в $\mathcal{K}$, полагая при этом $m(\varnothing) := 0$. Заметим, что для любого $F \in \mathcal{K}$: $m(F) \ge 0$.

Пример. Пусть $m > 1$, c, L — фиксированные числа из R и

$$F = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \mid x_1 = c,\ |x_k| \le L,\ 2 \le k \le m\},$$

F — ограниченное множество, лежащее в гиперплоскости $x_1 = c$. Докажем, что $m_*(F) = m^*(F)$ и $m(F) = 0$.

⌈ Множество F не имеет внутренних в (R^m, ρ) точек, поэтому $F_{(n)} = \varnothing$ для любого $n \ge 0$. Кроме того, для меры $F^{(n)}$ имеем следующую оценку $m(F^{(n)}) \le 2(2L2^n + 2)^{m-1}2^{-mn}$, $n \ge 0$. Поэтому $m(F^{(n)}) \to 0$, $n \to \infty$, и, следовательно, $m_*(F) = m^*(F) = 0$. ⌋

Упражнение 22. Множество $F \in \mathcal{K}$ и $F^0 = \varnothing$. Доказать, что $m(F) = 0$.

Теорема 11. *Пусть F — ограниченное подмножество R^m. Тогда $F \in \mathcal{K} \iff m(\Delta F_{(n)}) = m(F^{(n)}) - m(F_{(n)}) \to 0$, $n \to \infty$.*

⌈ Теорема представляет собой перефразировку определения измеримого множества. ⌋

Упражнение 23. Доказать, что для любого $x \in R$ одноточечное множество $F = \{x\} \in \mathcal{K}_1$ и $m(F) = 0$.

Указание. Для каждого $n \ge 0$ имеем $F_{(n)} = \varnothing$. Поскольку множество $F^{(n)}$ состоит из одного или двух отрезков разбиения $\pi_1^{(n)}$ имеем также $m(F^{(n)}) \le 2 \cdot 2^{-n} \to 0$, $n \to \infty$.

Упражнение 24. Доказать, что любой отрезок $[a, b] \in \mathcal{K}_1$ с мерой $m([a, b]) = b - a$.

Указание. Учесть неравенства $(2^n(b-a) - 2)2^{-n} \le m([a, b]_{(n)}) \le$ $\le 2^n(b-a)2^{-n}$, и то, что $\Delta([a, b]_{(n)})$ состоит из одного или двух отрезков разбиения $\pi_1^{(n)}$, $n \ge 0$.

Упражнение 25. При $m = 2$ пусть $F = \{(x_1, x_2) \mid x_k \in (Q \cap [0, 1]),\ k = 1, 2\}$. Найти $m_*(F)$ и $m^*(F)$. Множество F не является измеримым по Жордану.

Упражнение 26. Доказать, что любой брус есть измеримое множество и его мера совпадает с определённой в п. 14.1.1.

Упражнение 27. Пусть $F = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le 1\}$. Найти $m(F_{(n)})$, $m(F^{(n)})$ для $n \ge 1$. Доказать, что $F \in \mathcal{K}_2$ и найти $m(F)$.

Упражнение 28. Пусть F — замкнутое счётное подмножество отрезка $[a, b]$. Доказать, что $F \in \mathcal{K}_1$ и что $m(F) = 0$.

Упражнение 29. Пусть множество $F \in \mathcal{K}$ и число $\varepsilon > 0$ заданы. Доказать существование замкнутого измеримого множества G и открытого измеримого множества H таких, что $G \subset F \subset H$, $m(H) - m(G) < \varepsilon$.

14.2.3 Свойства измеримых множеств

Теорема 12. *Пусть $\{A, B\} \subset \mathcal{K}$. Тогда имеют место включения: a) $(A \cup B) \in \mathcal{K}$; b) $(A \setminus B) \in \mathcal{K}$; c) $(A \cap B) \in \mathcal{K}$.*

⌈ Докажем сначала, что для каждого $n \geq 0$ справедливы включения

$$\Delta(A \cup B)_{(n)} \subset (\Delta A_{(n)} \cup \Delta B_{(n)}), \tag{1}$$

$$\Delta(A \setminus B)_{(n)} \subset (\Delta A_{(n)} \cup \Delta B_{(n)}), \tag{2}$$

Действительно, если брус $Q \in \pi^{(n)}$, $Q \subset \Delta(A \cup B)_{(n)}$, то

$\exists\, \vec{x} \;:\; \vec{x} \in (Q \cap (A \cup B))$ и $\exists\, \vec{y} \;:\; \vec{y} \in (Q \cap (R^m \setminus (A \cup B)))$.

Если при этом $\vec{x} \in A$, то $\vec{x} \in (Q \cap A)$ и $\vec{y} \in (Q \cap (R^m \setminus A))$. Следовательно, $Q \subset \Delta A_{(n)}$. Аналогично, если $\vec{x} \in B$, то $Q \subset \Delta B_{(n)}$. Таким образом, включение (1) доказано. Если $Q \in \pi^{(n)}$, $Q \subset \Delta(A \setminus B)_{(n)}$, то $\exists\, \vec{x} :\ \vec{x} \in (Q \cap (A \setminus B))$ и $\exists\, \vec{y} :\ \vec{y} \in (Q \cap (R^m \setminus (A \setminus B)))$. Если при этом $\vec{y} \notin A$, то $\vec{x} \in (Q \cap A)$ и $\vec{y} \in (Q \cap (R^m \setminus A))$. Следовательно, $Q \subset \Delta A_{(n)}$. Если же $\vec{y} \in A$, то $\vec{y} \in B$, и поэтому $\vec{y} \in (Q \cap B)$, $\vec{x} \in (Q \cap (R^m \setminus B))$. Таким образом, $Q \subset \Delta B_{(n)}$. Тем самым включение (2) доказано. $\Rightarrow \vec{x} \in Q$ и $Q \ni \vec{y}$, $y \notin A$

Из (1) и (2) следуют неравенства:

$$0 \leq m(\Delta(A \cup B)_{(n)}) \leq m(\Delta A_{(n)}) + m\Delta(B_{(n)}), \to 0$$

$$0 \leq m(\Delta(A \setminus B)_{(n)}) \leq m(\Delta A_{(n)}) + m\Delta(B_{(n)}).$$

Применив дважды теорему 11, получаем утверждения a), b). Из утверждений a) и b), а также из представления $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ следует утверждение c). ⌋

Замечание. Из теоремы 12 следует, что объединение и пересечение конечного числа измеримых множеств являются измеримыми множествами. Класс множеств $\mathcal{K}$, удовлетворяющий условиям a), b), c) теоремы 12 называется ***кольцом***. Таким образом, класс множеств измеримых по Жордану является кольцом, включающий брусы и конечные объединения брусов.

√ ***Упражнение 30.*** Объединение счётного набора множеств из $\mathcal{K}$ может не принадлежать $\mathcal{K}$. Рассмотреть следующие примеры.

a) Пусть $m = 1$. Доказать, что любое одноточечное множество $\{x\} \in \mathcal{K}_1$ и имеет меру 0. Множество, состоящее из конечного числа точек, измеримо и имеет меру 0. Доказать, что множество $\{1/n \mid n \in N\} \in \mathcal{K}_1$ и имеет меру 0. Доказать также, что $(Q \cap [0,1]) \notin \mathcal{K}_1$.

b) Пусть $m = 1$ и $\{r_n \mid n \geq 1\}$ — занумерованные каким-либо образом все рациональные числа интервала $(0,1)$. Для числа r_1 существует $\varepsilon > 0 \;:\; B(r_1, \varepsilon) \subset (0,1)$. Для произвольного фиксированного δ, $0 < \delta < \varepsilon$, положим $F_1 := \overline{B}(r_1, \delta/2)$. Пусть $r_{m(2)}$ — первая из оставшихся точек $r_2, r_3, \ldots$, не попавших в F_1. Пусть теперь F_2 — замкнутый шар с центром в точке $r_{m(2)}$ и радиусом, меньшим $\delta 2^{-2}$ и такой, что $F_2 \subset (0,1)$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Аналогично строятся множества F_n, $n \geq 3$. Доказать следующие утверждения: 1) $\forall\, n \geq 1 :\ F_n \in \mathcal{K}_1$; 2) $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right) \notin \mathcal{K}_1$; 3) замыкание в (R, ρ) множества $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ совпадает с отрезком $[0,1]$. Поскольку множества F_n, $n \geq 1$ попарно не пересекаются, то их объединению естественно приписать "длину", равную сумме ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(F_n)$, который сходится и имеет сумму, меньшую 2δ, так как $m(F_n) < 2 \cdot 2^{-n}\delta$, $n \geq 1$.

14.2.4 Свойства меры Жордана

Заметим, что согласно определению, $m(A) \geq 0$, $A \in \mathcal{K}$.

1^0. ***Полуаддитивность.*** Для любых $\{A, B\} \subset \mathcal{K}$ справедливо неравенство

$$m(A \cup B) \leq m(A) + m(B). \tag{1}$$

⌈ Согласно теореме 12, $(A \cup B) \in \mathcal{K}$. Заметим, что

$$(A \cup B)_{(n)} \subset (A_{(n)} \cup \Delta A_{(n)} \cup B_{(n)} \cup \Delta B_{(n)}),$$

так как входящий в левую часть брус содержит только точки $A \cup B$, а в правой части представлено объединение всех тех брусов, которые имеют по крайней мере одну общую точку хотя бы с одним из множеств A, B. Поэтому

$$m((A \cup B)_{(n)}) \leq m(A_{(n)}) + m(\Delta A_{(n)}) + m(B_{(n)}) + m(\Delta B_{(n)}),$$

откуда, с помощью определения меры и теоремы 11, имеем

$$m(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} m((A \cup B)_{(n)}) \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} m(A_{(n)}) + 0 + \lim_{n\to\infty} m(B_{(n)}) + 0 = m(A) + m(B).$$ ⌋

Для множества $A \subset \boldsymbol{R}^m$ пусть A^0 — множество всех его внутренних в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ точек. Заметим, что при любом $n \geq 0$ два различных бруса разбиения $\pi^{(n)}$ могут иметь общие точки, но не имеют общих внутренних в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ точек.

2^0. ***Аддитивность меры Жордана.*** Пусть $\{A, B\} \subset \mathcal{K}$ и $A^0 \cap B^0 = \varnothing$. Тогда

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B). \tag{2}$$

⌈ Достаточно доказать неравенство $m(A \cup B) \geq m(A) + m(B)$, поскольку из этого неравенства и полуаддитивности (1) следует равенство (2).

Для любого $n \geq 0$ имеем $(A_{(n)} \cup B_{(n)}) \subset (A \cup B)_{(n)}$, причём множества $A_{(n)}$ и $B_{(n)}$ общих брусов из $\pi^{(n)}$ не имеют (в противном случае $A^0_{(n)} \cap B^0_{(n)} \neq \varnothing$, следовательно, и $A^0 \cap B^0 \neq \varnothing$). Поэтому

$$m(A_{(n)} \cup B_{(n)}) = m(A_{(n)}) + m(B_{(n)}) \leq m((A \cup B)_{(n)}).$$

Поскольку $\{A,\ B,\ A \cup B\} \subset \mathcal{K}$, то $m(A) + m(B) = \lim\limits_{n\to\infty} m(A_{(n)}) + \lim\limits_{n\to\infty} m(B_{(n)}) \leq \lim\limits_{n\to\infty} m((A \cup B)_{(n)}) = m(A \cup B)$. ⌋

lim lim

3^0. ***Монотонность меры.*** Пусть $\{A, B\} \subset \mathcal{K}$, $A \subset B$. Тогда

$$m(A) \le m(B), \quad m(B \setminus A) = m(B) - m(A).$$

⌈ Заметим, что $B = A \cup (B \setminus A)$, причём $A \in \mathcal{K}$, $(B \setminus A) \in \mathcal{K}$, $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Из аддитивности имеем равенство $m(B) = m(A) + m(B \setminus A)$. Используем теперь неравенство $m(B \setminus A) \ge 0$. ⌋

Упражнение 31. Доказать, что $\{[0,1), (0,1)\} \subset \mathcal{K}_1$ и, кроме того, $m([0,1)) = m((0,1)) = 1$.

Упражнение 32. Пусть $\{A, B\} \subset \mathcal{K}$. Доказать справедливость равенства $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Упражнение 33. Для $A \in \mathcal{K}$ доказать, что $m(A) = 0 \iff A^0 = \varnothing$.

Упражнение 34. Доказать справедливость следующего соотношения $m(A \cup B) = m(A) \iff (B \setminus A)^0 = \varnothing$.

Упражнение 35. Пусть $A_k \in \mathcal{K}$ и $m(A_k) = 0$, $1 \le k \le n$. Доказать, что $m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 0$.

14.2.5 Цилиндрические множества и их измеримость

Пусть $\boldsymbol{R}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_k \in \boldsymbol{R},\ 1 \le k \le m\}$. В пространстве $\boldsymbol{R}^{m-1} = \{(x_1, \ldots, x_{m-1}) \mid x_k \in \boldsymbol{R},\ 1 \le k \le m-1\}$ рассмотрим множество A и две функции $u_j : A \to \boldsymbol{R}$, $j = 1, 2$ такие, для которых справедливо неравенство $\forall (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in A : \quad u_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) \le u_2(x_1, \ldots, x_{m-1})$.

***Определение 5. Цилиндрическим** в направлении оси $0x_m$ множеством с **основанием** A называется следующее подмножество $\boldsymbol{R}^m$* $C := \{(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m) \mid (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in A,\ u_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) \le x_m \le u_2(x_1, \ldots, x_{m-1})\}$.

Для цилиндрического множества C его основание будем обозначать следующим образом $\mathrm{ba}\, C := A$.

Пример. При $m = 2$ цилиндрическими множествами являются круг, треугольник, а при $m = 3$ — шар, часть цилиндра с осью, параллельной оси $0x_3$, полученная с помощью двух крышек.

Замечание. Брус $Q = \prod\limits_{k=1}^{m} [a_k, b_k]$ является цилиндрическим множеством с основанием $\mathrm{ba}\, Q = \prod\limits_{k=1}^{m-1} [a_k, b_k]$ — брусом в $\boldsymbol{R}^{m-1}$ и функциями $u_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) = a_m$, $u_2(x_1, \ldots, x_{m-1}) = b_m$; $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathrm{ba}\, Q$.

Очень широким является класс множеств, которые можно получить как объединение конечного числа цилиндрических множеств. В практических приложениях можно обычно ограничиться только такими множествами.

Теорема 13. *Пусть C - цилиндрическое множество с основанием $\mathrm{ba}\,C$ и функциями u_1, u_2. Предположим, что: 1) $\mathrm{ba}\,C$ компактно в (R^{m-1}, ρ_{m-1}) и $\mathrm{ba}\,C \in \mathcal{K}_{m-1}$; 2) $u_j \in C(\mathrm{ba}\,C)$, $j = 1, 2$.*

Тогда множество C компактно в (R^m, ρ_m) и $C \in \mathcal{K}_m$.

⌈ В конечномерном пространстве с обычным расстоянием множество компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто. Ограниченность C следует из ограниченности $\mathrm{ba}\,C$ и ограниченности непрерывных функций u_1, u_2 на компакте $\mathrm{ba}\,C$. Замкнутость C следует из замкнутости $\mathrm{ba}\,C$, непрерывности функций u_1, u_2 и определения цилиндрического множества. Действительно, если последовательность $\{(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}) \in C \mid n \geq 1\}$ сходится д-ть к $(x_1, \ldots, x_m)$ ∈C, то $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathrm{ba}\,C$, поскольку $(x_1^{(n)}, \ldots, x_{m-1}^{(n)}) \in \mathrm{ba}\,C$, $n \geq 1$; $(x_1^{(n)}, \ldots, x_{m-1}^{(n)}) \to (x_1, \ldots, x_{m-1})$, $n \to \infty$. Кроме того, имеем осталось $x_m \in$?

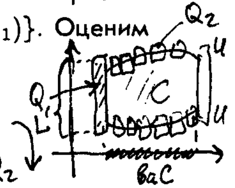
∈ baC по 1)

$$\forall n \geq 1 : \quad u_1(x_1^{(n)}, \ldots, x_{m-1}^{(n)}) \leq x_m^{(n)} \leq u_2(x_1^{(n)}, \ldots, x_{m-1}^{(n)}).$$

перех. к lim и непр. u_i

Отсюда следуют неравенства $u_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) \leq x_m \leq u_2(x_1, \ldots, x_{m-1})$. ⇒ $x_1 \ldots x_m \in C$

Доказательство измеримости более сложно. Пусть $\pi_m^{(n)}$ разбиение порядка n пространства R^m. Это разбиение определяет также разбиение $\pi_{m-1}^{(n)}$ порядка n пространства $R^{m-1} = \{(x_1, \ldots, x_{m-1})\}$. Оценим величину $m(\Delta C_{(n)})$. Заметим, что



$$\Delta C_{(n)} = \underbrace{\bigcup_{\substack{Q \in \pi_m^{(n)}, Q \subset \Delta C_{(n)} \\ \mathrm{ba}\,Q \subset \Delta(\mathrm{ba}\,C)_{(n)}}} Q}_{Q_1} \cup \underbrace{\bigcup_{\substack{Q \in \pi_m^{(n)}, Q \subset \Delta C_{(n)} \\ \mathrm{ba}\,Q \subset (\mathrm{ba}\,C)_{(n)}}} Q}_{Q_2}.$$

Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. Согласно условиям 1) и 2), имеем $\exists L > 0 \ \forall (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathrm{ba}\,C : \ -L \leq u_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) \leq u_2(x_1, \ldots, x_{m-1})$
$\leq L$, и к функциям u_1, u_2 на $\mathrm{ba}\,C$ применима теорема Кантора. Следовательно, $\exists \delta > 0 \quad \forall \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{m-1}), \ \vec{y} = (y_1, \ldots, y_{m-1})\} \subset \mathrm{ba}\,C$, $\rho(\vec{x}, \vec{y}) < \delta : |u_k(\vec{x}) - u_k(\vec{y})| < \varepsilon$, $k = 1, 2$.

Далее рассматриваются только n, для которых $\sqrt{m}\, 2^{-n} < \min(\varepsilon, \delta)$.

Пусть $\mathrm{ba}\,Q \in \pi_{m-1}^{(n)}$ и $\mathrm{ba}\,Q \subset \Delta(\mathrm{ba}\,C)_{(n)}$. Брус $\mathrm{ba}\,Q$ является основанием некоторого количества брусов $\pi_m^{(n)}$ из $\Delta C_{(n)}$. Высота наибольшего "столбика" — бруса с основанием $\mathrm{ba}\,Q$, содержащего точки C, не больше $2(L + 2^{-n})$, а мера — объём этого "столбика" не больше $2(L + 2^{-n}) m(\mathrm{ba}\,Q)$. где $Q_2 \to Q_1$

Пусть теперь $\mathrm{ba}\,Q \in \pi_{m-1}^{(n)}$ и $\mathrm{ba}\,Q \subset (\mathrm{ba}\,C)_{(n)}$. При этом $\mathrm{ba}\,Q$ является основанием не более чем двух "столбиков", высота каждого из которых не больше $2(\varepsilon + 2^{-n})$ и состоящих из брусов $\pi_m^{(n)}$, лежащих в $\Delta C_{(n)}$.

Таким образом, Q_1 – проект. в гр. основания, имеет с C точки и $\notin C$.

2 столбика

$$m(\Delta C_{(n)}) = \overset{Q_1}{\sum_{\substack{Q\in\pi_m^{(n)},\, Q\subset \Delta C_{(n)} \\ \mathrm{ba}\, Q\subset \Delta(\mathrm{ba}\, C)_{(n)}}}} m(Q) + \overset{Q_2}{\sum_{\substack{Q\in\pi_m^{(n)},\, Q\subset \Delta C_{(n)} \\ \mathrm{ba}\, Q\subset (\mathrm{ba}\, C)_{(n)}}}} m(Q) \le$$

для ребра || ?

$$\le 2(L+2^{-n})m(\Delta(\mathrm{ba}\, C)_{(n)}) + \overset{2}{\cancel{4}}(\varepsilon + 2^{-n})m((\mathrm{ba}\, C)_{(n)}) <$$
$$< 2(L+1)m(\Delta(\mathrm{ba}\, C)_{(n)}) + 8\varepsilon m(\mathrm{ba}\, C).$$

Поскольку $\mathrm{ba}\, C \in \mathcal{K}_{m-1}$ по условию 1), то $m(\Delta(\mathrm{ba}\, C)_{(n)}) < \varepsilon$ для всех n, начиная с некоторого. Поэтому $\exists\, n_0\ \forall\, n \ge n_0 : m(\Delta C_{(n)}) < (2(L+1) + 8m(\mathrm{ba}\, c))\varepsilon$. Следовательно, $C \in \mathcal{K}_m$.]

Упражнение 36. Доказать, что множество

$$\Big\{(x_1,x_2)\ \Big|\ 0 < x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le \Big|\sin(1/x_1)\Big|\Big\} \in \mathcal{K}_2.$$

Упражнение 37. Пусть $\Gamma = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in [a,b],\ x_2 = f(x_1)\}$ для $f \in C([a,b])$. Доказать, что $\Gamma \in \mathcal{K}_2$, и что плоская мера $m(\Gamma) = 0$.

Упражнение 38. Пусть $\varphi_k \in C^1(\alpha,\beta])$, $k = 1,2$; $(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2 > 0$, $t \in [\alpha,\beta]$. ***Регулярная кривая*** есть множество

$$\Gamma = \{(x_1,x_2) \mid x_k = \varphi_k(t),\ t\in[\alpha,\beta],\ k = 1,2\}.$$

Доказать, что $\Gamma \in \mathcal{K}_2$, и что плоская мера $m(\Gamma) = 0$.

Упражнение 39. Пусть $f \in C([a_1,b_1]\times[a_2,b_2])$. Доказать, что ***поверхность*** в R^3

$$S = \{(x_1,x_2,x_3) \mid (x_1,x_2) \in ([a_1,b_1]\times[a_2,b_2]),\ x_3 = f(x_1,x_2)\}$$

есть измеримое множество и имеет объём 0.

Упражнение 40.* Привести пример компактного неизмеримого по Жордану множества в R^2.

14.3 Кратные интегралы по измеримым множествам

14.3.1 Определение интеграла

Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_m$ — множество всех измеримых подмножеств R^m, множество $A \in \mathcal{K}$ и $f : A \to R$ — ограниченная и непрерывная на A функция. Для каждого $n \ge 0$ для разбиения $\pi_m^{(n)}$ пространства R^m определим множество $A_{(n)}$.

Определение интеграла по измеримым множествам включает ряд этапов.

I. Определение интеграла от непрерывной функции по брусу. Это определение было приведено и детально изучено в п. 14.1.

II. Определение интеграла от непрерывной функции по множеству $A_{(n)}$. Интеграл от непрерывной на A функции по множеству $A_{(n)}$ определяется равенством

$$\int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\,d\vec{x} := \sum_{Q\in\pi_m^{(n)},\, Q\subset A_{(n)}} \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x}, \tag{1}$$

где в правой части каждое из конечного числа слагаемых есть интеграл от непрерывной функции по брусу. Если множество $A_{(n)} = \varnothing$, то положим $\int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\,d\vec{x} := 0$.

Лемма 3. *Пусть $A \in \mathcal{K}$, функция $f \in C(A)$ ограничена на A. Тогда последовательность чисел $\left\{ \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\,d\vec{x} \;\middle|\; n \geq 0 \right\}$ фундаментальна.*

Пусть $k < n$, тогда $A_{(k)} \subset A_{(n)}$ и , согласно определению (1), имеем

$$\left| \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\,d\vec{x} - \int\limits_{A_{(k)}} f(\vec{x})\,d\vec{x} \right| = \left| \int\limits_{A_{(n)}\setminus A^0_{(k)}} f(\vec{x})\,d\vec{x} \right|. \tag{2}$$

— выкинули обд. бруски

По условию леммы $\exists\, L > 0 \quad \forall\, \vec{x} \in A: \quad |f(\vec{x})| \leq L$, а по теореме 9 для бруса $Q \subset A$ справедлива оценка

$$\left| \int\limits_Q f(\vec{x})\,d\vec{x} \right| \leq Lm(Q). \tag{3}$$

Из формул (2) и (3) получаем следующее неравенство

$$\left| \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\,d\vec{x} - \int\limits_{A_{(k)}} f(\vec{x})\,d\vec{x} \right| \leq m(A_{(n)} \setminus A^0_{(k)}) = L(m(A_{(n)}) - m(A_{(k)})),$$

$< \varepsilon$

из которого следует утверждение леммы. так как последовательность чисел $\{m(A_{(n)}) \mid n \geq 0\}$ сходится и, следовательно, фундаментальна. ⌋

III. Определение интеграла от непрерывной и ограниченной на A функции по измеримому множеству A. ***m-кратным интегралом*** от функции f по множеству A называется число

$$\int\limits_A f(\vec{x})\,d\vec{x} := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\,d\vec{x}. \tag{4}$$

Если $A \in \mathcal{K}$ и $m(A) = 0$, то $A_{(n)} = \varnothing$ для $n \geq 0$ и $\int\limits_A f(\vec{x})\,d\vec{x} := 0$.

Приведенное определение допускает некоторое обобщение.

IV. Пусть $A \in \mathcal{K}$, функция f ограничена на A, $B \subset A$, $B \in \mathcal{K}$ с $m(B) = 0$ и $f \in C(A \setminus B)$. Интеграл от функции f по множеству A определяется формулой (4), если в качестве $A_{(n)}$ взять объединение всех тех брусов $\pi_m^{(n)}$, которые целиком лежат в множестве A и не содержат точек из B.

14.3.2 Свойства интеграла

1^0. Пусть $A \in \mathcal{K}$, $c \in \boldsymbol{R}$ и $f(\vec{x}) = c$, $\vec{x} \in A$. Тогда

$$\int_A c\, d\vec{x} = cm(A). \tag{5}$$

⌈ Равенство (5) справедливо для бруса, см. теорему 3, и, следовательно, согласно определению (1), для $A_{(n)}$ имеем $\int\limits_{A_{(n)}} c\, d\vec{x} = cm(A_{(n)})$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем равенстве, с учётом определений величин $\int\limits_A c\, d\vec{x}$ и $m(A)$, получаем равенство (5). ⌋

2^0. Пусть $A \in \mathcal{K}$, $f_k \in C(A)$ и ограничена на A, $k = 1, 2$. Для любых $\{c_1, c_2\} \subset \boldsymbol{R}$ справедливо равенство

$$\int_A (c_1 f_1(\vec{x}) + c_2 f_2(\vec{x}))\, d\vec{x} = c_1 \int_A f_1(\vec{x})\, d\vec{x} + c_2 \int_A f_2(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{6}$$

⌈ Справедливость равенства (6) для $A_{(n)}$ следует из определения интеграла (1) и теоремы 5. Перейдя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, с учётом определения III получаем равенство (6). ⌋

3^0. Пусть $\{A, B\} \subset \mathcal{K}$ и $m(A \cap B) = 0$; функция $f \in C(A \cup B)$ и ограничена на $A \cup B$. Тогда

$$\int_{A \cup B} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_A f(\vec{x})\, d\vec{x} + \int_B f(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{7}$$

⌈ При любом $n \ge 0$ множества $A_{(n)}$ и $B_{(n)}$ общих брусов разбиения $\pi_m^{(n)}$ не содержат. Поэтому, согласно определению (1), имеем

$$\int_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} + \int_{B_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{A_{(n)} \cup B_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x}. \tag{8}$$

Кроме того, $C_n := (A \cup B)_{(n)} \setminus (A_{(n)} \cup B_{(n)})^0 \subset (\Delta A_{(n)} \cup \Delta B_{(n)})$, откуда

$$\left| \int_{(A \cup B)_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} - \int_{A_{(n)} \cup B_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} \right| \le \left| \int_{C_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} \right| \le$$
$$\le Lm(C_n) \le L(m(\Delta A_{(n)}) + m(\Delta B_{(n)})), \quad L := \sup_{A \cup B} |f|. \tag{9}$$

Нужное равенство получается из равенства (8) с помощью предельного перехода при $n \to \infty$ с учётом определения III, неравенства (9) и измеримости множеств A и B. ⌋

4^0. Пусть $A \in \mathcal{K}$, $f \in C(A)$ и ограничена на A. Тогда

$$\left| \int_A f(\vec{x})\, d\vec{x} \right| \le \int_A |f(\vec{x})|\, d\vec{x}. \tag{10}$$

⌈ Сначала получаем равенство (10) для множества $A_{(n)}$, используя определение (1) и теорему 9. Затем, осуществляя предельный переход при $n \to \infty$, получим (10). ⌋

5^0. При условиях свойства 4^0 пусть $f(\vec{x}) \ge 0, \vec{x} \in A$. Тогда $\int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x} \ge 0$.

⌈ См. теорему 7. ⌋

Упражнение 41. Теорема о среднем значении. Пусть множество $A \in \mathcal{K}$ компактно и обладает следующим свойством связности $\forall\, \{\vec{x}, \vec{y}\} \subset A \quad \exists\, \vec{g} \in C([0,1], A)$, $\vec{g}(0) = \vec{x}$, $\vec{g}(1) = \vec{y}$. Тогда для функции $f \in C(A)$ справедливо утверждение $\exists\, \vec{\theta} \in A: \ \int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x} = f(\vec{\theta}) m(A)$.

Упражнение 42. Пусть $\{A, B\} \subset \mathcal{K}$, $B \subset A$ и $m(B) = 0$. Функция $f: \ A \to \boldsymbol{R}$ ограничена на A и $f \in C(A \setminus B)$. Пусть $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{K}$, причём $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = A$ и $m(A_j \cap A_k) = \varnothing$ для $j \neq k$. Пусть также $\vec{\xi}_k \in A_k$, $1 \leq k \leq n$, и $\lambda_n := \max(d(A_k) \mid 1 \leq k \leq n)$. Доказать, что справедливо равенство $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\vec{\xi}_k) m(A_k) = \int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x}$.

Упражнение 43. Пусть выполнены предположение свойства 5^0 и $\int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x} = 0$. Доказать, что $\forall\, \vec{x} \in A^0 \ : \ f(\vec{x}) = 0$.

14.3.3 Вычисление интеграла по цилиндрическим множествам

Пусть A — цилиндрическое множество в $\boldsymbol{R}^m$ с компактным основанием $\operatorname{ba} A \subset \boldsymbol{R}^{m-1}$ и непрерывными на $\operatorname{ba} A$ функциями u_1 и u_2, и $f \in C(A)$. Положим $g(x_1, \ldots, x_{m-1}) := \int\limits_{u_1(x_1,\ldots,x_{m-1})}^{u_2(x_1,\ldots,x_{m-1})} f(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m)\, dx_m$ для $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \operatorname{ba} A$.

Лемма 4. $g \in C(\operatorname{ba} A)$.

⌈ В том случае, когда функция f является многочленом, утверждение леммы есть следствие теоремы о непрерывности сложной функции.

В общем случае применим теорему Вейерштрасса. Пусть произвольное $\varepsilon > 0$ задано. Тогда существует многочлен P_ε от m переменных такой, что $\max\limits_{\vec{x} \in A} |f(\vec{x}) - P_\varepsilon(\vec{x})| < \varepsilon$. Пусть $h_\varepsilon(x_1, \ldots, x_{m-1}) := $
$= \int\limits_{u_1(x_1,\ldots,x_{m-1})}^{u_2(x_1,\ldots,x_{m-1})} P_\varepsilon(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m)\, dx_m$, $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \operatorname{ba} A$. Тогда функция $h_\varepsilon \in C(\operatorname{ba} A)$. Кроме того, имеем

$$\forall\, (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \operatorname{ba} A : |g(x_1, \ldots, x_{m-1}) - h_\varepsilon(x_1, \ldots, x_{m-1})| < \varepsilon(L_2 - L_1),$$

где $L_1 := \min\limits_{\operatorname{ba} A} u_1$, $L_2 := \max\limits_{\operatorname{ba} A} u_2$. $\quad$ || $\sup\limits_{\operatorname{ba} A}(u_2 - u_1)$

Пусть теперь точка $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \operatorname{ba} A$ фиксирована и $\delta > 0$ взято таким, что $\forall\, (x'_1, \ldots, x'_{m-1}) \in \operatorname{ba} A$, $\rho((x_1, \ldots, x_{m-1}), (x'_1, \ldots, x'_{m-1})) <$

$< \delta$: $|h_\varepsilon(x_1, \dots, x_{m-1}) - h_\varepsilon(x'_1, \dots, x'_{m-1})| < \varepsilon$. Тогда $|g(x'_1, \dots, x'_{m-1}) - -g(x_1, \dots, x_{m-1})| < 2\varepsilon(L_2 - L_1) + \varepsilon$. ⌋

Теорема 14. *Пусть A — цилиндрическое множество в R^m с компактным измеримым основанием $\operatorname{ba} A$ и непрерывными на $\operatorname{ba} A$ функциями u_1 и u_2. Тогда*

$$\int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int\limits_{\operatorname{ba} A} \left(\int\limits_{u_1(x_1,\dots,x_{m-1})}^{u_2(x_1,\dots,x_{m-1})} f(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)\, dx_m \right) \prod_{k=1}^{m-1} dx_k.$$

⌈ Для разбиения $\pi_m^{(n)}$ определим множества $A_{(n)}$ и $(\operatorname{ba} A)_{(n)}$. По теореме 13 множество A измеримо и, согласно определению интеграла, получим $\int\limits_A f(\vec{x})\, d\vec{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x}$.

Рассмотрим случай, в котором проекция множества $A_{(n)}$ на подпространство $x_m = 0$ совпадает с $(\operatorname{ba} A)_{(n)}$.

Множество $A_{(n)}$ составлено из цилиндрических множеств — "столбиков", основаниями которых являются брусы $Q \in \pi_{m-1}^{(n)}$, $Q \subset (\operatorname{ba} A)_{(n)}$. Определим на $(\operatorname{ba} A)_{(n)}$ две функции $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ следующим образом

$$\overline{u}_1(x_1, \dots, x_{m-1}) := \min\{x_m \mid (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) \in A_{(n)}\};$$

$$\overline{u}_2(x_1, \dots, x_{m-1}) := \max\{x_m \mid (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) \in A_{(n)}\},$$

где $(x_1, \dots, x_{m-1}) \in (\operatorname{ba} A)_{(n)}$. Функции $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ постоянны на каждом Q^0, $Q \in \pi_{m-1}^{(n)}$, $Q \subset (\operatorname{ba} A)_{(n)}$.

Из следствия 3 и свойства интеграла (7), получаем равенство

$$\int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int\limits_{(\operatorname{ba} A)_{(n)}} \left(\int\limits_{\overline{u}_1(x_1,\dots,x_{m-1})}^{\overline{u}_2(x_1,\dots,x_{m-1})} f(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)\, dx_m \right) \prod_{k=1}^{m-1} dx_k.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ задано. Определим $\delta > 0$ так, чтобы

$$\forall \{\vec{z}\,' = (z'_1, \dots, z'_{m-1}),\ \vec{z}\,'' = (z''_1, \dots, z''_{m-1})\} \subset \operatorname{ba} A,\ \rho(\vec{z}\,', \vec{z}\,'') < \delta :$$
$$|u_k(\vec{z}\,') - u_k(\vec{z}\,'')| < \varepsilon,\ k = 1, 2.$$

Такой выбор δ возможен в силу равномерной непрерывности функций u_1 и u_2 на компакте $\operatorname{ba} A$. Если $\underbrace{2^{-n}\sqrt{m}}_{\text{диаметр бруска}} < \delta$, то еще 2 бруска

$$0 \le \overline{u}_1(x_1, \dots, x_{m-1}) - u_1(x_1, \dots, x_{m-1}) < \varepsilon + 2 \cdot 2^{-n};$$

$$0 \le u_2(x_1, \dots, x_{m-1}) - \overline{u}_2(x_1, \dots, x_{m-1}) < \varepsilon + 2 \cdot 2^{-n}.$$

для $(x_1, \dots, x_{m-1}) \in (\operatorname{ba} A)_{(n)}$. Поэтому

$$\left| \int\limits_{A_{(n)}} f(\vec{x})\, d\vec{x} - \int\limits_{(\operatorname{ba} A)_{(n)}} g(x_1, \dots, x_{m-1}) \prod_{k=1}^{m-1} dx_k \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{(\operatorname{ba} A)_{(n)}} \left(\int\limits_{\overline{u}_1(x_1,\dots,x_{m-1})}^{\overline{u}_2(x_1,\dots,x_{m-1})} f(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)\, dx_m \prod_{k=1}^{m-1} dx_k - \right.\right.$$

$$-\int\limits_{u_1(x_1,\dots,x_{m-1})}^{u_2(x_1,\dots,x_{m-1})} f(x_1,\dots,x_{m-1},x_m)\,dx_m\Bigg)\prod_{k=1}^{m-1}dx_k\Bigg|\le$$

$$\le 2L(\varepsilon+2^{-n+1})m((\operatorname{ba}A)_{(n)})\le 2Lm(\operatorname{ba}A)(\varepsilon+2^{-n+1}),$$

где $L:=\max\limits_A|f|$.

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в последнем неравенстве, получим

$$\left|\int\limits_A f(\vec{x})\,d\vec{x}-\int\limits_{\operatorname{ba}A} g(x_1,\dots,x_{m-1})\prod_{k=1}^{m-1}dx_k\right|\le 2Lm(\operatorname{ba}A)\varepsilon,$$

откуда при $\varepsilon\to 0+$ следует утверждение теоремы. ⌋

Следствие 5. Пусть A — цилиндрическое множество, удовлетворяющее условиям теоремы 14. Тогда

$$m(A)=\int\limits_A d\vec{x}=\int\limits_{\operatorname{ba}A}(u_2(x_1,\dots,x_{m-1})-u_1(x_1,\dots,x_{m-1}))\prod_{k=1}^{m-1}dx_k. \quad (11)$$

Упражнение 44. С помощью формулы (11) вычислить площадь круга и объём шара.

Упражнение 45. Пусть B — компактное измеримое множество в $R^{m-1}=\{(x_1,\dots,x_{m-1})\}$ и $f\in C(B)$. Доказать, что множество

$$\{(x_1,\dots,x_{m-1},x_m)\mid(x_1,\dots,x_{m-1})\in B,\ x_m=f(x_1,\dots,x_{m-1})\}$$

имеет m-мерную меру 0.

14.4 Отображения множеств. Формула замены переменных

14.4.1 Отображения специального вида

Пусть A — открытое подмножество R^m, число k, $1\le k\le m$, фиксировано и функция $u\in C^1(A)$. Отображение $\vec{g}:\ A\to R^m$, определяемое формулой

$$\vec{g}(\vec{x}):=(x_1,\dots,x_{k-1},u(\vec{x}),x_{k+1},\dots,x_m),\quad \vec{x}=(x_1,\dots,x_m)\in A, \quad (1)$$

задаёт отображение подмножеств множества A в некоторый набор подмножеств R^m: $\vec{g}(B)=\{\vec{g}(\vec{x})\mid\vec{x}\in B\}$, $B\subset A$.

Множества $B\subset A$ удобно рассматривать в одном пространстве $R^m=\{(x_1,\dots,x_m)\}$, а их образы — $\vec{g}(B)$ — в другом пространстве $R^m=\{(y_1,\dots,y_m)\}$, полагая $\vec{y}=(y_1,\dots,y_m)=\vec{g}(\vec{x})$.

Упражнение 46. Пусть $m=2$, $A=R^2$ и а) $\vec{g}(x_1,x_2)=(x_1,x_1^2x_2)$, $(x_1,x_2)\in R^2$, $k=2$; b) $\vec{h}(x_1,x_2)=(-x_1x_2,x_2)$, $(x_1,x_2)\in R^2$, $k=1$. Для $Q=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ определить образы $\vec{g}(Q)$, $\vec{h}(Q)$.

Определение 1. Отображение вида (1) называется отображением специального вида.

Далее предполагаем, что для отображения (1) выполняются следующие два условия:

$$\vec{L} := \sup_{\vec{x}\in A} |u_k'(\vec{x})| < +\infty, \tag{2}$$

$$\text{либо } \forall\, \vec{x} \in A: \quad u_k'(\vec{x}) > 0, \quad \text{либо } \forall\, \vec{x} \in A: \quad u_k'(\vec{x}) < 0. \tag{3}$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть отображение $\vec{h} = (h_1, \ldots, h_m) : A \to \boldsymbol{R}^m$ удовлетворяет условиям: 1) $\vec{h}$ — взаимно однозначное отображение (инъекция) множества A в $\boldsymbol{R}^m$; 2) $\vec{h} \in C(A, \boldsymbol{R}^m)$. Тогда для любых $G \subset A$, $F \subset A$, $G^0 \cap F^0 = \varnothing$ справедливо равенство $\vec{h}(G)^0 \cap \vec{h}(F)^0 = \varnothing$.*

⌈ Предположим, что утверждение леммы неверно. Пусть вектор $\vec{y} \in (\vec{h}(G)^0 \cap \vec{h}(F)^0)$. Тогда $\exists\, \varepsilon > 0 : \quad B(\vec{y}, \varepsilon) \subset (\vec{h}(G)^0 \cap \vec{h}(F)^0)$. Пусть $\vec{x} \in A$ тот вектор, для которого $\vec{h}(\vec{x}) = \vec{y}$. Поскольку $\vec{h} \in C(A, \boldsymbol{R}^m)$, то $\exists\, \delta > 0 : \vec{h}(B(\vec{x}, \delta)) \subset B(\vec{y}, \varepsilon)$, а так как $B(\vec{y}, \varepsilon) \subset \vec{h}(G)$, $B(\vec{y}, \varepsilon) \subset \vec{h}(F)$, то $\vec{h}(B(\vec{x}, \delta)) \subset \vec{h}(G)$, $\vec{h}(B(\vec{x}, \delta)) \subset \vec{h}(F)$. Отсюда, согласно условию 1), $B(\vec{x}, \delta) \subset G$, $B(\vec{x}, \delta) \subset F$, что противоречит условию $G^0 \cap F^0 = \varnothing$. ⌋

14.4.2 Измеримость образа при отображении специального вида

Теорема 15. *Пусть $\vec{g}$ — отображение специального вида* (1), *удовлетворяющее условиям* (2), (3), *и являющееся взаимно однозначным. Предположим, что множество $B \subset A$, $B \in \mathcal{K}_m$ и компактно. Тогда образ $\vec{g}(B)$ есть компактное измеримое множество.*

⌈ Доказательство теоремы разделим на три части.

I. Рассмотрим сначала случай, когда B брус в $\boldsymbol{R}^m$. Именно, пусть

$B = Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m]$,

$\text{ba}\, Q = \{x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_m) \mid a_j \le x_j \le b, \ 1 \le j \le m, \ j \ne k\}$.

При условии $u_k' > 0$ на A образ $\vec{g}(Q)$ есть такое цилиндрическое множество $\vec{g}(Q) = \{(y_1, \ldots, y_m) \mid (y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_m) \in \text{ba}\, Q$, $u(y_1, \ldots, y_{k-1}, a_k, y_{k+1}, \ldots, y_m) \le y_k \le u(y_1, \ldots, y_{k-1}, b_k, y_{k+1}, \ldots, y_m)\}$ в $\boldsymbol{R}^m$ с компактным и измеримым основанием $\text{ba}\, Q$ и непрерывными функциями u_1 и u_2. Согласно теореме 13 $\vec{g}(Q)$ есть компактное измеримое множество в $\boldsymbol{R}^m$. С учётом следствия 5 для меры $\vec{g}(Q)$ имеем

$m(\vec{g}(Q)) =$

$$\int\limits_{\mathrm{ba}\,Q} u(x_1,\ldots,x_{k-1},x,x_{k+1},\ldots,x_m)\Big|_{x=a_k}^{x=b_k} \prod_{j\neq k} dx_j.$$

Отсюда с помощью следствия 4 и теоремы 6 о среднем значении, получаем равенство

$$m(\vec{g}(Q)) = \int\limits_Q |u'_k(\vec{x})|\,d\vec{x} = |u'_k(\vec{x}(Q))|m(Q) \tag{4}$$

для некоторой точки $\vec{x}(Q) \in Q$.

II. Для разбиения $\pi_m^{(n)}$ определим множества $B_{(n)}$, $B^{(n)}$, $\Delta B_{(n)}$ и рассмотрим их образы $\vec{g}(B_{(n)})$, $\vec{g}(B^{(n)})$, $\vec{g}(\Delta B_{(n)})$. Поскольку множество A открыто, то $B^{(n)} \subset A$ для всех n, больших некоторого N_0. Далее $n > N_0$.

Заметим, что отображение $\vec{g}$ при условиях теоремы есть непрерывная инъекция из A в R^m, и что справедливо следующее утверждение $B_{(n)} \subset B \subset B^{(n)} \implies \vec{g}(B_{(n)}) \subset \vec{g}(B) \subset \vec{g}(B^{(n)})$. Кроме того, $\vec{g}(B_{(n)}) = \bigcup\limits_{Q\in\pi_m^{(n)},\,Q\subset B_{(n)}} \vec{g}(Q)$. Поэтому согласно части *I* доказательства и свойствам измеримых множеств, множество $\vec{g}(B_{(n)})$ измеримо. На основании леммы 5 и аддитивности меры

$$m(\vec{g}(B_{(n)})) = \sum_{Q\in\pi_m^{(n)},\,Q\subset B_{(n)}} m(\vec{g}(Q)). \tag{5}$$

Аналогично, множества $\vec{g}(B^{(n)}) \in \mathcal{K}_m$, $\vec{g}(\Delta B_{(n)}) \in \mathcal{K}_m$ и их меры вычисляются так же как в (5). Покажем ещё, что $m(\vec{g}(\Delta B_{(n)})) \to 0, n \to \infty$. Действительно, для любого бруса $Q \subset A$ имеем $m(\vec{g}(Q)) \le Lm(Q)$ из формулы (4) и условия (2). Отсюда

$$m(\vec{g}(\Delta B_{(n)})) \le \sum_{Q\in\pi_m^{(n)},\,Q\subset\Delta B_{(n)}} m(\vec{g}(Q)) \le Lm(\Delta B_{(n)}).$$

Правая часть этого неравенства стремится к 0 в силу измеримости множества B.

III. Докажем теперь измеримость $\vec{g}(B)$. Пусть числа n и $\varepsilon > 0$ фиксированы. Поскольку множества $\vec{g}(B_{(n)})$ и $\vec{g}(B^{(n)})$ измеримы, то

$\exists\, N_1 = N_1(n,\varepsilon) \quad \forall\, N \ge N_1$:

$(\vec{g}(B_{(n)}))_{(N)} \subset \vec{g}(B_{(n)}) \subset \vec{g}(B) \subset \vec{g}(B^{(n)}) \subset (\vec{g}(B^{(n)}))^{(N)}$;

$m(\vec{g}(B_{(n)})) - m((\vec{g}(B_{(n)}))_{(N)}) < \dfrac{\varepsilon}{2}, m((\vec{g}(B^{(n)}))^{(N)}) - m(\vec{g}(B^{(n)})) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Поэтому $m(\Delta\vec{g}(B)_{(N)}) \le m((\vec{g}(B^{(n)}))^{(N)}) - m((\vec{g}(B_{(n)}))_{(N)}) =$

$= m((\vec{g}(B^{(n)}))^{(N)}) - m(\vec{g}(B^{(n)})) + m(\vec{g}(B^{(n)})) - m(\vec{g}(B_{(n)}))+$

$+m(\vec{g}(B_{(n)})) - m((\vec{g}(B_{(n)}))_{(N)}) < \varepsilon + m(\vec{g}(\Delta B_{(n)}))$.

Если n таково, что $m(\vec{g}(\Delta B_{(n)})) < \varepsilon$, то $m(\Delta\vec{g}(B)_{(N)}) < 2\varepsilon$ для $N \ge N_1$. Это означает, что $m(\Delta\vec{g}(B)_{(N)}) \to 0$, $N \to \infty$, т. е. $\vec{g}(B) \in \mathcal{K}_m$.

Поскольку $m(\vec{g}(B_{(n)})) \le m(\vec{g}(B)) \le m(\vec{g}(B^{(n)}))$, то имеем неравенство $m(\vec{g}(B)) - m(\vec{g}(B_{(n)})) < m(\vec{g}(\Delta B_{(n)}))$, откуда следует, что

$$m(\vec{g}(B)) = \lim_{n\to\infty} m(\vec{g}(B_{(n)})). \tag{6}$$

Кроме того, $\vec{g}(B)$ компактно как непрерывный образ компакта. ⌋

Упражнение 47. Пусть при $m = 2$, $A = R^2$, $B = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$, $\vec{g}(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)$, $(x_1, x_2) \in R^2$. Доказать измеримость $\vec{g}(B)$ (хотя не все условия теоремы 15 выполнены).

Упражнение 48. Пусть $\vec{g}$ — отображение вида (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3). Пусть $Q \subset A$ — брус и $f \in C(\vec{g}(Q))$. Доказать, что $\exists \vec{\theta}_1 \in \vec{g}(Q)\ \exists \vec{\theta}_2 \in Q : \int\limits_{\vec{g}(Q)} f(\vec{x})\, d\vec{x} = f(\vec{\theta}_1)|u_k'(\vec{\theta}_2)|m(Q)$.

14.4.3 Формула замены переменных для отображения специального вида

Теорема 16. *Пусть $\vec{g}$ — отображение специального вида* (1), *удовлетворяющее условиям* (2), (3) *п.* 14.4.1 *и являющееся взаимно однозначным. Предположим, что множество $B \subset A$, $B \in \mathcal{K}_m$ и компактно, а функция $f \in C(\vec{g}(B))$. Тогда*

$$\int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\, d\vec{y} = \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))|u_k'(\vec{x})|\, d\vec{x}. \tag{1}$$

*Формула (1) называется **формулой замены переменных** или **формулой перехода** от интегрирования по переменным $x_1, \ldots, x_m$ к интегрированию по новым переменным $y_1, \ldots, y_m$, а переход осуществляется функцией $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$.*

⌈ В силу теоремы 15 множество $\vec{g}(B)$ компактно и измеримо По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций функция $(f(\vec{g})|u_k'|) \in C(B)$. Поэтому оба интеграла в формуле (1) определены и нужно только доказать их равенство. Для разбиения $\pi_m^{(n)}$ пространства R^m рассмотрим множество $B_{(n)}$ и для каждого бруса $Q \in \pi_m^{(n)}$, $Q \subset B_{(n)}$ выберем пока произвольную точку $\vec{x}(Q) \in Q$. Затем запишем очевидное неравенство

$$\left| \int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\, d\vec{y} - \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))|u_k'(\vec{x})|\, d\vec{x} \right| \le J_n^1 + J_n^2 + J_n^3 + J_n^4, \tag{2}$$

где

$$J_n^1 := \left| \int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\, d\vec{y} - \int\limits_{\vec{g}(B_{(n)})} f(\vec{y})\, d\vec{y} \right|,$$

$$J_n^2 := \left| \int\limits_{\vec{g}(B_{(n)})} f(\vec{y})\, d\vec{y} - \sum_{Q \in \pi_m^{(n)},\ Q \subset B_{(n)}} f(\vec{g}(\vec{x}(Q)))|u_k'(\vec{x}(Q))|m(Q) \right|,$$

$$J_n^3 := \Big| \sum_{Q\in\pi_m^{(n)},\ Q\subset B_{(n)}} f(\vec{g}(\vec{x}(Q)))|u_k'(\vec{x}(Q))|m(Q) - \int\limits_{B_{(n)}} f(\vec{g}(\vec{x}))|u_k'(\vec{x})|\,d\vec{x}\Big|,$$

$$J_n^4 := \Big| \int\limits_{B_{(n)}} f(\vec{g}(\vec{x}))|u_k'(\vec{x})|\,d\vec{x} - \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))|u_k'(\vec{x})|\,d\vec{x}\Big|.$$

Докажем, что правая часть (2) стремится к 0 при $n\to\infty$. Пусть $\overline{L} := = \max\{\max\limits_{\vec{g}(B)}|f|,\ \max\limits_{B}|f(\vec{g})u_k'|\}$. Из неравенства (10) п. 14.3.2 и формулы (6) п.14.4.2 имеем $J_n^1 \le \overline{L}(m(\vec{g}(B)) - m(\vec{g}(B_{(n)}))) \to 0,\quad n\to\infty$. Аналогично, $J_n^4 \le \overline{L}(m(B) - m(B_{(n)})) \to 0,\ \ n\to\infty$.

Для оценки J_n^2 сначала выберем для каждого Q точку $\vec{x}(Q)$ таким образом, чтобы выполнялось равенство (4) п. 14.4.2. Тогда

$$J_n^2 \le \sum_{Q\in\pi_m^{(n)},\ Q\subset B} \Big| \int\limits_{\vec{g}(Q)} (f(\vec{y}) - f(\vec{g}(\vec{x}(Q))))\,d\vec{y}\Big|.$$

С помощью равномерной непрерывности функций f на $\vec{g}(B)$ и u_k' на B легко показать, что $J_n^2 \to 0,\ n\to\infty$.

При оценке величины J_n^3 нужно сначала применить теорему 6 о среднем значении. Получим $J_n^3 \le$

$$\le \Big| \sum_{Q\in\pi_m^{(n)},\ Q\subset B_{(n)}} \Big(f(\vec{g}(\vec{x}(Q)))|u_k'(\vec{x}(Q))| - f(\vec{g}(\vec{\theta}(Q)))|u_k'(\vec{\theta}(Q))|\Big)m(Q)\Big|$$

для $\vec{\theta}(Q)\in Q$, а затем воспользоваться равномерной непрерывностью функции $f(\vec{g})|u_k'|$ на B. ⌋

Замечание. Для отображения $\vec{g} = (g_1,\dots,g_m)$ вида (1) п. 14.4.1 имеем $\dfrac{\partial(g_1,\dots,g_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)} = u_k'$. Поэтому формулу (1) можно записать в виде

$$\int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\,d\vec{y} = \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))\left|\frac{\partial(g_1,\dots,g_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\right|d\vec{x}. \tag{3}$$

Упражнение 49. Пусть $B = \{(z_1,z_2)\mid 1\le z_1^2+z_2^2\le 4,\ z_2\ge z_1,\ z_2\ge -z_1\}$ и $f\in C(B)$. Пусть $Q = \{(r,\varphi)\mid 1\le r\le 2,\ \pi/4\le\varphi\le 3\pi/4\}$ — брус в пространстве $\{(r,\varphi)\}$. Для следующего отображения $\vec{g} = (y_1,y_2):\ (r,\varphi)\mapsto(r\cos\varphi, r)$ с якобианом $\dfrac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(r,\varphi)} = r\sin\varphi$ построить $\vec{g}(Q)$. Далее для отображения $\vec{h} = (z_1,z_2):\ (y_1,y_2)\mapsto(y_1, r\sin\varphi) = = \Big(y_1, y_2\sqrt{1-\big(y_1/y_2\big)^2}\Big) = (y_1,\sqrt{y_2^2-y_1^2})$ построить образ $\vec{h}(\vec{g}(Q))$ и показать, что $\vec{h}(\vec{g}) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $\dfrac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(y_1,y_2)} = \dfrac{y_2}{\sqrt{y_2^2-y_1^2}}$. Применив дважды теорему 16, доказать равенства

$$\int\limits_B f(z_1,z_2)\,dz_1dz_2 = \int\limits_{\vec{g}(Q)} f(y_1,\sqrt{y_2^2-y_1^2})\frac{y_2}{\sqrt{y_2^2-y_1^2}}\,dy_1dy_2 =$$

$$= \int\limits_Q f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\frac{r}{\sqrt{r^2 - r^2\cos^2\varphi}}\,|r\sin\varphi|\,drd\varphi =$$

$$= \int\limits_Q r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,drd\varphi.$$

Заметим, что $\dfrac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(r,\varphi)} = \dfrac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(y_1,y_2)}\,\dfrac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(r,\varphi)} = r.$

14.4.4 Локальное сведение общего отображения к суперпозиции отображений специального вида

Пусть A — открытое множество в $\boldsymbol{R}^m$, $\vec{g} = (g_1,\dots,g_m) : A \to \boldsymbol{R}^m$, причём $\vec{g} \in C(A, \boldsymbol{R}^m)$ и

$$\forall\,\vec{x} \in A\ :\quad \det\vec{g}\,'(\vec{x}) = \frac{\partial(g_1,\dots,g_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}(\vec{x}) \neq 0. \tag{1}$$

Лемма 6. $\forall\,\vec{x}_0 \in A \quad \exists\, r > 0 \quad \forall\,\vec{x} \in B(\vec{x}^{\,0}) := B(\vec{x}^{\,0}, r) : \vec{g}(\vec{x}) = \vec{g}_{(m)}(\vec{g}_{(m-1)}(\dots(\vec{g}_{(1)}(\vec{x}))\dots))$, *где отображение* $\vec{g}_{(k)}$ — *отображение специального вида* (1), *удовлетворяющие условиям* (2) *и* (3) *п.* 14.4.1, $k = 1,\dots,m$.

⌈ Согласно условию (1), определитель $\det\vec{g}\,'(\vec{x}_0) \neq 0$. Следовательно, существует минор $(m-1)$-го порядка, отличный от 0. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\dfrac{\partial(g_1,\dots,g_{m-1})}{\partial(x_1,\dots,x_{m-1})}(\vec{x}_0) \neq 0$. Аналогичное рассуждение показывает, что можно считать выполненными следующие неравенства

$$\frac{\partial(g_1,\dots,g_k)}{\partial(x_1,\dots,x_k)}(\vec{x}_0) \neq 0.\quad 1 \le k \le m. \tag{2}$$

Для $\vec{x} \in A$ положим

$$y_1^{(1)} = g_1(\vec{x}),\ y_2^{(1)} = x_2,\ \dots,\ y_m^{(1)} = x_m; \tag{3}$$

$$\vec{y}^{(1)} = \vec{y}^{(1)}(\vec{x}) = \vec{g}_{(1)}(\vec{x}) := (y_1^{(1)},\dots,y_m^{(1)});$$

$$\vec{y}_0^{(1)} := \vec{y}^{(1)}(\vec{x}_0),$$

При этом $\dfrac{\partial(y_1^{(1)},\dots,y_m^{(1)})}{\partial(x_1,\dots,x_m)} = \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}$.

В силу предположения (2), существует открытый шар $B_1(\vec{y}_0^{(1)})$ с центром в точке $\vec{y}_0^{(1)}$ и единственным образом определяемая действительная функция $h_1 \in C^1(B_1(\vec{y}_0^{(1)}))$ такая, что для каждого $\vec{y}^{(1)} \in B_1(\vec{y}_0^{(1)})$ набор

$$x_1 = h_1(\vec{y}^{(1)}),\ x_2 = y_2^{(1)},\ \dots,\ x_m = y_m^{(1)} \tag{4}$$

является решением системы (3) относительно $x_1,\dots,x_m$, т. е.

$$y_1^{(1)} = g_1(h_1(y_1^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}), \; y_2^{(1)} = y_2^{(1)}, \; \ldots, \; y_m^{(1)} = y_m^{(1)}. \tag{5}$$

Пусть $\vec{h}_1 := (h_1, y_2^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}) : B_1(\vec{y}_0^{(1)}) \to \boldsymbol{R}^m$, и $\mathcal{D}_1(\vec{x}_0) := \vec{h}_1(B_1(\vec{y}_0^{(1)}))$ — открытое множество, содержащее точку $\vec{x}_0$.

Для $\vec{x} \in A$ положим

$$y_1^{(2)} = y_1^{(1)}, \; y_2^{(2)} = g_2(\vec{x}) = g_2(h_1(\vec{y}^{(1)}), y_2^{(1)} \ldots, \; y_m^{(1)}), \; y_3^{(2)} = y_3^{(1)}, \; \ldots, \; y_m^{(2)} = y_m^{(1)}; \tag{6}$$

$$\vec{y}^{(2)} = \vec{g}_{(2)}(\vec{y}^{(1)}) := (y_1^{(2)}, \ldots, y_m^{(2)});$$

$$\vec{y}_0^{(2)} := \vec{y}^{(2)}(\vec{y}_0^{(1)}).$$

Для некоторого открытого шара $B_2(\vec{y}_0^{(2)})$ с центром в точке $\vec{y}_0^{(2)}$ систему (6) можно разрешить относительно $y_1^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}$. Действительно, согласно (6),

$$\frac{\partial y_2^{(2)}}{\partial y_2^{(1)}} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial y_2^{(1)}} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}, \tag{7}$$

кроме того, из (5) следует, что

$$0 = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial y_2^{(1)}} + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}. \tag{8}$$

Поэтому $\dfrac{\partial y_2^{(2)}}{\partial y_2^{(1)}} \neq 0$, так как иначе однородная система (7), (8) с отличным от 0 по предположению (2) определителем имела бы отличное от нулевого решение $\dfrac{\partial h_1}{\partial y_2^{(1)}}$, 1. Как и выше, получаем открытое множество $\mathcal{D}_2(\vec{x}_0)$, содержащее точку $\vec{x}_0$, и такое, что для каждого $\vec{x} \in \mathcal{D} := \mathcal{D}_1(\vec{x}_0) \cap \mathcal{D}_2(\vec{x}_0)$ имеем $\vec{y}^{(2)}(\vec{x}) = \vec{g}_{(2)}(\vec{g}_{(1)}(\vec{x})) = (g_2(\vec{x}), g_1(\vec{x}), x_3, \ldots, x_m)$, причём отображения $\vec{g}_{(1)} : \mathcal{D} \to B_1(\vec{y}_0^{(1)})$, $\vec{g}_{(2)} : B_1(\vec{y}_0^{(1)}) \to B_2(\vec{y}_0^{(2)})$ удовлетворяют всем нужным условиям. Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным выше. $\rfloor$

14.4.5 Формула замены переменных

Теорема 17. *Пусть $A \subset \boldsymbol{R}^m$ — открытое множество, $B \subset A$ — компактное измеримое множество. Пусть отображение $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_m) : A \to \boldsymbol{R}^m$ удовлетворяет следующим условиям: 1) отображение $\vec{g}$ множества B на $\vec{g}(B)$ взаимно однозначно; 2) $\vec{g} \in C(A, \boldsymbol{R}^m)$; 3) либо $\forall \vec{x} \in B: \quad J(\vec{x}) := \dfrac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(\vec{x}) > 0$, либо $\forall \vec{x} \in B: \quad J(\vec{x}) < 0$.*

Пусть также функция $f \in C(\vec{g}(B))$.

Тогда множество $\vec{g}(B)$ компактно, измеримо и справедлива следующая формула

$$\int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\,d\vec{y} = \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))\left|\frac{\partial(g_1,\dots,g_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\right| d\vec{x}. \tag{1}$$

⌈ Согласно лемме 6,

$$\forall\,\vec{x}\in B\ \exists\,\delta>0\ \forall\,\vec{u}\in B(\vec{x},\delta):\ \vec{g}(\vec{u}) = \vec{g}_{(m)}(\vec{g}_{(m-1)}(\dots(\vec{g}_{(1)}(\vec{u}))\dots)), \tag{2}$$

причём $\delta=\delta(\vec{x})$, а отображение $\vec{g}_{(k)}$ есть отображение специального вида (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3) п. 14.4.1, $1\le k\le m$. Семейство шаров $\{B(\vec{x},\delta(\vec{x})/2)\mid \vec{x}\in B\}$ есть открытое покрытие компактного множества B. Поэтому существует конечное подпокрытие $\{B(\vec{x}^{(j)},\delta(\vec{x}^{(j)})/2)\mid 1\le j\le s\}$. Пусть $\gamma := (1/2)\min\{\delta(\vec{x}^{(j)})\mid 1\le j\le s\}>0$. Рассмотрим теперь такие разбиения $\pi_m^{(n)}$ пространства $\boldsymbol{R}^m$, для которых диаметр брусов меньше γ. Пусть $Q(1),\dots,Q(N)$ — все те брусы разбиения $\pi_m^{(n)}$, которые имеют непустое пересечение с множеством B. Положим $B(j):=B\cap Q(j)$, $1\le j\le N$. При этом

$$B=\bigcup_{j=1}^{N}B(j);\qquad B(j)^0\cap B(k)^0=\varnothing,\quad j\ne k. \tag{3}$$

Поскольку $\forall\,\nu,\ 1\le\nu\le N\ \ \exists\,j_0=j_0(\nu):\ B(\nu)\cap B(\vec{x}^{(j_0)},\delta(\vec{x}^{(j_0)})/2)\ne\varnothing$ и $B(\nu)\subset Q(\nu)$, то $B(\nu)\subset B(\vec{x}^{(j_0)},\delta(\vec{x}^{(j_0)}))$.

Таким образом, рассматривая отображение $\vec{g}$ на $B(\nu)$ можно предполагать, что оно имеет вид (2) и что образ $\vec{g}(B(\nu))$ получен таким образом: $\vec{g}(B(\nu))=\vec{g}_{(m)}(B^{(m-1)}(\nu)),\dots,B^{(2)}(\nu):=\vec{g}_{(2)}(B^{(1)}(\nu)),B^{(1)}(\nu):=$ $=\vec{g}_{(1)}(B(\nu))$. Множества $B^{(j)}(\nu)$, $1\le j\le m-1$; $\vec{g}(B(\nu))$ компактны и измеримы на основании теоремы 16. Применяя теперь последовательно теорему 17 и следствие 2 п. 12.2.2, имеем

$$\int\limits_{\vec{g}(B(\nu))} f(\vec{y})\,d\vec{y} = \tag{4}$$

$$= \int\limits_{\vec{g}_{(m)}(B^{(m-1)}(\nu))} f(\vec{y})\,d\vec{y} = \int\limits_{B^{(m-1)}(\nu)} f(\vec{g}_{(m)}(\vec{z}))\left|\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(z_1,\dots,z_m)}\right| d\vec{z} =$$

$$= \int\limits_{B^{(m-2)}(\nu)} f(\vec{g}_{(m)}(\vec{g}_{(m-1)}(\vec{u})))\left|\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(z_1,\dots,z_m)}\right|\cdot\left|\frac{\partial(z_1,\dots,z_m)}{\partial(u_1,\dots,u_m)}\right| d\vec{u} =$$

$$= \int\limits_{B^{(m-2)}(\nu)} f(\vec{g}_{(m)}(\vec{g}_{(m-1)}(\vec{u})))\left|\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(u_1,\dots,u_m)}\right| d\vec{u} = \dots$$

$$\dots = \int\limits_{B(\nu)} f(\vec{g}_{(m)}(\vec{g}_{(m-1)}(\dots(\vec{g}_{(1)}(\vec{x}))\dots)))\left|\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\right| d\vec{x} =$$

$$= \int\limits_{B(\nu)} f((\vec{x}))\left|\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(x_1,\dots,x_m)}\right| d\vec{x}.$$

Поскольку $\vec{g}(B) = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \vec{g}(B(j))$, то $\vec{g}(B)$ компактно и измеримо. С помощью представления (3), леммы 5 и равенств (4) находим окончательно $\int\limits_{\vec{g}(B)} f(\vec{y})\,d\vec{y} =$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \int\limits_{\vec{g}(B(\nu))} f(\vec{y})\,d\vec{y} = \sum_{\nu=1}^{N} \int\limits_{B(\nu)} f(\vec{g}(\vec{x}))|J(\vec{x})|\,d\vec{x} = \int\limits_{B} f(\vec{g}(\vec{x}))|J(\vec{x})|\,d\vec{x}. \qquad \rfloor$$

Замечание. Формула замены переменных (1) часто записывается также в следующей форме. Пусть $D := \vec{g}(B)$, тогда $B := \vec{g}^{\,-1}(D)$ и формула (1) примет вид $\int\limits_{D} f(\vec{y})\,d\vec{y} = \int\limits_{\vec{g}^{\,-1}(D)} f(\vec{g}(\vec{x}))|J(\vec{x})|\,d\vec{x}$, при этом вместо условий на множество B нужно потребовать компактность и измеримость множества D.

14.4.6 Следствие и примеры

Следствие 6. При условиях теоремы 17 на множество B и отображение $\vec{g}$ справедливо равенство

$$m(\vec{g}(B)) = \int\limits_{B} \left| \frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)} \right| d\vec{x}. \tag{1}$$

Площадь фигур в плоскости обладает следующим свойством: конгруэнтные фигуры имеют одинаковую площадь. Аналогичным свойством обладают длина и объём. Для введенной ранее меры Жордана такое свойство не является непосредственным следствием определения, поскольку это определение зависит от системы координат пространства. Следующее утверждение содержит это свойство меры Жордана.

Следствие 7. Пусть D — матрица размера $m \times m$ с действительными элементами, для которой $|\det D| = 1$; $\vec{g}$ — аффинное преобразование, определяемое формулой $\vec{g}(\vec{x}) = D\vec{x} + \vec{a}$, $\vec{x} \in R^m$; $\vec{a} \in R^m$.

Тогда для любого компактного измеримого множества $B \subset R^m$ справедливо равенство $m(B) = m(\vec{g}(B))$.

Условия теоремы 17 могут быть ослаблены. Следующий пример показывает, что формула замены переменных остаётся верной, если условия 1), 3) этой теоремы нарушаются на множестве меры 0. Приведенные при рассмотрении этого примера рассуждения могут быть использованы для обобщения теоремы 17 и в общем случае.

Пример. Переход к полярным координатам. Пусть $B = \{(\varphi, r) \mid \varphi \in [0, 2\pi],\ r \in [0, r_1]\}$ — брус-прямоугольник в R^2, $x_1 = \varphi$, $x_2 = r$; а отображение $\vec{g} = (g_1, g_2) = (y_1, y_2)$ задаётся равенствами

$y_1 = g_1(\varphi, r) = r\cos\varphi$, $\quad y_2 = g_2(\varphi, r) = r\sin\varphi$. Для этого отображения $J = \dfrac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(\varphi, r)} = -r$ и $J = 0$ на нижней стороне прямоугольника B. Кроме того, отображение $\vec{g}: B \to \vec{g}(B)$ не является взаимно однозначным, так как упомянутая сторона переходит в точку $(0,0)$ — центр круга $\vec{g}(B)$. Однако, для любой функции $f \in C(\vec{g}(B))$ справедлива формула

$$\int\limits_{\vec{g}(B)} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = \int\limits_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi dr, \tag{2}$$

или

$$\iint\limits_{\{y_1^2+y_2^2\le r_1\}} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = \int\limits_0^{r_1}\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi dr.$$

⌈ Докажем формулу (2). Сначала заметим, что оба интеграла в (2) определены, поскольку множество B и круг $\vec{g}(B)$ — компактные измеримые множества, а подынтегральные выражения непрерывны. Пусть число $0 < \varepsilon < \min(\pi, r_1)$ задано. Положим $B_\varepsilon = \{(\varphi, r) \mid \varphi \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon],\ r \in [\varepsilon, r_1]\}$. Имеем $B_\varepsilon \subset B$; $\ m(B \setminus B_\varepsilon) = 2\pi\varepsilon + 2(r_1 - \varepsilon)\varepsilon \to 0$, $\ \varepsilon \to 0+$. Тогда

$$\left|\int\limits_{B\setminus B_\varepsilon} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi dr\right| \le r_1 \max_{\vec{g}(B)} |f|\, m(B \setminus B_\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Для множества B_ε и отображения $\vec{g}: B_\varepsilon \to \vec{g}(B_\varepsilon)$ все условия теоремы 17 выполнены, и, следовательно,

$$\int\limits_{\vec{g}(B_\varepsilon)} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = \int\limits_{B_\varepsilon} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi dr.$$

Кроме того, из равенства $\vec{g}(B) \setminus \vec{g}(B_\varepsilon) = \vec{g}(B \setminus B_\varepsilon)$ имеем также

$$\left|\int\limits_{\vec{g}(B)} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 - \int\limits_{\vec{g}(B_\varepsilon)} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2\right| \le$$

$$\le \max_{\vec{g}(B)} |f|\, m(\vec{g}(B \setminus B_\varepsilon)) \le \max_{\vec{g}(B)} |f|\, (\pi\varepsilon^2 + r_1^2 \operatorname{tg}\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0+.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\vec{g}(B)} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = \int\limits_{\vec{g}(B_\varepsilon)} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 + \int\limits_{\vec{g}(B\setminus B_\varepsilon)} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 =$$

$$= \int\limits_{B_\varepsilon} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi dr + \int\limits_{\vec{g}(B\setminus B_\varepsilon)} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 =$$

$$= \int\limits_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi dr + \int\limits_{\vec{g}(B\setminus B_\varepsilon)} f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 -$$

$$- \int\limits_{B\setminus B_\varepsilon} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi dr.$$

Устремив $\varepsilon \to 0+$ в этом равенстве, получим формулу (2). ⌋

Упражнение 50. Пусть $B_t = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le t^2\}$, $t \in [0,1]$, и для функции $f \in C(B_1)$ пусть $F(t) = \iint\limits_{B_t} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$. Вычислить F'.

Упражнение 51. Пусть $B_t = \{(x_1, x_2) \mid t^2 \le x_1^2 + x_2^2 \le t^4,\ tx_1 \le x_2 \le 2tx_1\}$, $t \ge 1$. Доказать, что для каждого $t \ge 1$ множество B_t измеримо и для функции $F(t) = m(B_t)$, $t \ge 1$, вычислить F'.

Упражнение 52. Пусть $B_\varepsilon = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| \le 1,\ |x_1 - x_2| \ge \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, Вычислить предел $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \iint\limits_{B_\varepsilon} \ln|x_1 - x_2|\, dx_1 dx_2$.

Упражнение 53. Пусть $B_a = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2(1+x_2^2) \le 1,\ x_2^2 \le a^2\}$, $a > 1$. Вычислить предел $\lim\limits_{a \to +\infty} \iint\limits_{B_a} \dfrac{dx_1 dx_2}{1 + x_2^2}$.

14.5 Несобственные кратные интегралы. Определения и примеры

14.5.1 Интегралы от неограниченных функций

Пусть $A \subset R^m$ — компактное измеримое множество, $\vec{x}^0 \in A$ — фиксированный вектор, положим $B = A \setminus \{\vec{x}^0\}$. Пусть функция $f \in C(B)$. Нас интересует случай, когда функция f не является ограниченной на B.

Пример. Для $m = 2$, $A = \overline{B}((x_1^0, x_2^0)$, пусть $\vec{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$, $r = r(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$, $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{r^\alpha}$, $\alpha > 0$.

Пусть $\{E_n \mid n \ge 1\}$ — последовательность измеримых открытых подмножеств R^m, удовлетворяющая условиям: 1) $\forall n \ge 1 :\ E_n \ni \vec{x}^0$; 2) $d(E_n) = \sup\limits_{\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset E_n} \rho_m(\vec{x}, \vec{y}) \to 0$, $n \to \infty$.

Такие последовательности существуют. Например, условиям 1) и 2) удовлетворяет следующая последовательность открытых измеримых шаров

$$E_n = B(\vec{x}^0, \delta_n),\quad \delta_n > 0,\quad n \ge 1;\quad \delta_n \to 0,\quad n \to \infty. \tag{1}$$

Каждое из множеств $A \setminus E_n$, $n \ge 1$, компактно и измеримо. Кроме того, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A \setminus E_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (B \setminus E_n) = B$; $\forall n \ge 1 :\ f \in C(A \setminus E_n)$.

Определение 1. Несобственным m-кратным интегралом от функции f по множеству A называется предел

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{A \setminus E_n} f(\vec{x})\, d\vec{x}, \tag{2}$$

который обозначается символом

$$\int\limits_A f(\vec{x})\,d\vec{x}. \tag{3}$$

Если предел (2) существует, конечен и не зависит от выбора последовательности $\{E_n \mid n \geq 1\}$, то несобственный интеграл (3) называется ***сходящимся****, в остальных случаях —* ***расходящимся****.*

Для некоторых расходящихся интегралов предел (2) существует для некоторых специальных последовательностей $\{E_n \mid n \geq 1\}$. Важным является случай последовательности (1).

Определение 2. *Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{A\setminus B(\vec{x}^{\,0},\delta_n)} f(\vec{x})\,d\vec{x}$, если он существует и конечен, называется* ***главным значением расходящегося интеграла*** *(3) и обозначается символом $v.p. \int\limits_A f(\vec{x})\,d\vec{x}$.*

Примеры. 1. Пусть для $m = 2$, $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, $\vec{x}^{\,0} = (0,0)$; $f(x_1,x_2) = \dfrac{1}{(x_1^2+x_2^2)^\alpha}$, $(x_1,x_2) \neq (0,0)$; $\alpha > 0$. Для $n \geq 1$ определим числа $\delta_n' := \min\{\sqrt{x_1^2+x_2^2} \mid (x_1,x_2) \notin E_n\}$, $\delta_n'' := \max\{\sqrt{x_1^2+x_2^2} \mid (x_1,x_2) \in \overline{E}_n\}$, где $\overline{E}_n$ — замыкание E_n. Предположим, что множества E_n ограничены. Согласно условиям 1) и 2), $\delta_n' \to 0$, $\delta_n'' \to 0$, $n \to \infty$. Имеем

$$\iint\limits_{A\setminus B((0,0),\delta_n'')} \frac{dx_1dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^\alpha} \leq \iint\limits_{A\setminus E_n} \frac{dx_1dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^\alpha} \leq \iint\limits_{A\setminus B((0,0),\delta_n')} \frac{dx_1dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^\alpha}. \tag{4}$$

Переходя к полярным координатам, получим $\iint\limits_{A\setminus B((0,0),\delta_n')} \dfrac{dx_1dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^\alpha} =$

$$= \int\limits_{\delta_n'}^{1}\int\limits_0^{2\pi} \frac{r}{r^{2\alpha}}\,dr\,d\varphi = 2\pi\int\limits_{\delta_n'}^{1} r^{1-2\alpha}\,dr = 2\pi \begin{cases} \dfrac{1-(\delta_n')^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}, & 2-2\alpha \neq 0 \\ -\ln\delta_n', & 2-2\alpha = 0. \end{cases}$$

Из этого равенства и формулы (4) следует, что при $2-2\alpha > 0$, т. е. при $\alpha < 1$, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{A\setminus E_n} \dfrac{dx_1dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^\alpha} = \dfrac{\pi}{1-\alpha}$.

Для $\alpha \geq 1$ предел не существует.

2. Пусть $m = 1$, $A = [-1,1]$, $x^0 = 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$. Интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x}$ расходится, однако, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[-1,1]\setminus(-\delta_n,\delta_n)}\dfrac{dx}{x} =$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int\limits_{-1}^{-\delta_n}\dfrac{dx}{x} + \int\limits_{\delta_n}^{1}\dfrac{dx}{x}\right) = 0$, $\delta_n > 0$, $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$. Таким образом,

$$v.p. \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0.$$

Для функции f со значениями одного знака на всём B проблема сходимости интеграла

$$\int_A f(\vec{x})\,d\vec{x} \tag{5}$$

решается следующей теоремой.

Теорема 18. *Для того чтобы несобственный интеграл (5) от непрерывной и неотрицательной на множестве B функции f сходился, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности $\{D_n \mid n \geq 1\}$, открытых измеримых множеств, удовлетворяющих условиям 1) и 2) и таких, что $D_{n+1} \subset D_n$, $n \geq 1$, последовательность*

$$\int_{A\setminus D_n} f(\vec{x})\,d\vec{x}, \ \ n \geq 1, \tag{6}$$

была ограниченной.

⌈ Необходимость. Согласно определению сходящегося интеграла, последовательность (6) сходится для любой последовательности $\{E_n \mid n \geq 1\}$, удовлетворяющей условиям 1) и 2). Следовательно, она ограничена. Неотрицательность функции при этом не обязательна.

Достаточность. Для каждого $n \geq 1$ множества $A \setminus D_n$ и $A \setminus D_{n+1}$ компактны и измеримы, причём $(A \setminus D_n) \subset (A \setminus D_{n+1})$. Неотрицательность f влечёт следующее неравенство

$$\int_{A\setminus D_{n+1}} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_{A\setminus D_n} f(\vec{x})\,d\vec{x} + \int_{D_n\setminus D_{n+1}} f(\vec{x})\,d\vec{x} \geq \int_{A\setminus D_n} f(\vec{x})\,d\vec{x}.$$

Таким образом, последовательность (6) не убывает и ограничена. Поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{A\setminus D_n} f(\vec{x})\,d\vec{x} =: J$.

Пусть теперь $\{E_n \mid n \geq 1\}$ — произвольная последовательность открытых множеств, удовлетворяющая условиям 1) и 2), и число $\varepsilon > 0$ задано. Сначала заметим, что

$$\exists\, n_0 \quad \forall\, n \geq n_0 \ : \quad 0 \leq J - \int_{A\setminus D_n} f(\vec{x})\,d\vec{x} < \varepsilon. \tag{7}$$

Множество D_{n_0} открыто и $D_{n_0} \ni \vec{x}^{\,0}$, поэтому $\exists\, \rho > 0 : \ B(\vec{x}^{\,0}, \rho) \subset D_{n_0}$. Далее в силу условия 2), $\exists\, N \ \ \forall\, n \geq N : \ \ d(E_n) < \rho$. Следовательно, $\forall\, n \geq N : \ \ E_n \subset D_{n_0}$.

Аналогично, множество E_n открыто и содержит точку $\vec{x}^{\,0}$. Как и выше, заключаем $\exists\, m(n) \ \ \forall\, m \geq m(n) : \ \ D_m \subset E_n$. Положим теперь $m_0(n) := \max\{m(n), n_0\}$. Тогда $\forall\, n \geq N : \ \ D_{m_0(n)} \subset E_n \subset D_{n_0}$, и, в силу неотрицательности f, получаем $\int\limits_{A\setminus D_{n_0}} f(\vec{x})\,d\vec{x} \leq \int\limits_{A\setminus E_n} f(\vec{x})\,d\vec{x} \leq$

$\leq \int\limits_{A\setminus D_{m_0(n)}} f(\vec{x})\,d\vec{x}$. Отсюда, учитывая неравенства (7), имеем $\forall n \geq N$:

$J - \varepsilon < \int\limits_{A\setminus E_n} f(\vec{x})\,d\vec{x} \leq J.$ ⌋

Пример. Пусть $m = 2$, A — компактное измеримое подмножество R^2, $\vec{x}^{\,0} = (x_1^0, x_2^0)$ — внутренняя точка A и $f: A \to [0, +\infty)$, $f \in C(A)$. Докажем, что несобственный интеграл

$$\iint\limits_A \frac{f(x_1, x_2)}{r^\alpha}\,dx_1 dx_2 \tag{8}$$

сходится для $\alpha \in (0, 2)$, а интеграл $\iint\limits_A \frac{dx_1 dx_2}{r^\alpha}$ с $\alpha \geq 2$ расходится.

⌈ Предположив, что $B(\vec{x}^{\,0}, 1) \subset A$, рассмотрим последовательность

$$\iint\limits_{A\setminus B(\vec{x}^{\,0},1/n)} \frac{f(x_1, x_2)}{r^\alpha}\,dx_1 dx_2 = \tag{9}$$

$$= \iint\limits_{A\setminus B(\vec{x}^{\,0},1)} \frac{f(x_1, x_2)}{r^\alpha}\,dx_1 dx_2 + \iint\limits_{B(\vec{x}^{\,0},1)\setminus B(\vec{x}^{\,0},1/n)} \frac{f(x_1, x_2)}{r^\alpha}\,dx_1 dx_2,\ n \geq 1.$$

Оба интеграла в правой части (9) определены как интегралы от непрерывных функций по измеримым множествам, причём первый из них не зависит от n. Для второго интеграла правой части (9) имеем

$$\iint\limits_{B(\vec{x}^{\,0},1)\setminus B(\vec{x}^{\,0},1/n)} \frac{f(x_1, x_2)}{r^\alpha}\,dx_1 dx_2 \leq \max_A f \iint\limits_{B(\vec{x}^{\,0},1)\setminus B(\vec{x}^{\,0},1/n)} \frac{1}{r^\alpha}\,dx_1 dx_2 =$$

$$= \max_A f \int\limits_{1/n}^{1} \int\limits_0^{2\pi} \frac{r}{r^\alpha}\,dr\,d\varphi = 2\pi \max_A f \left.\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right|_{1/n}^{1} \to \frac{2\pi}{2-\alpha} \max_A f,\ n \to \infty$$

для $0 < \alpha < 2$. Поэтому последовательность (9) ограничена и по теореме 18 интеграл (8) сходится.

Для второго интеграла аналогично доказывается неограниченность последовательности (9) для $f(x_1, x_2) = 1$. ⌋

Определение 3. Несобственный интеграл (5) называется абсолютно сходящимся, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_A |f(\vec{x})|\,d\vec{x}$.

Легко проверить, что абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Несобственные кратные интегралы обладают рядом свойств, аналогичных свойствам одномерных несобственных интегралов, Однако, из-за существенного различия определений, при $m \geq 2$ несобственный интеграл сходится тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно. Доказательство этого утверждения и подробная теория несобственных кратных интегралов здесь не приводятся.

Упражнение 54. Вычислить интеграл $\iint\limits_A (1-x_1)^\alpha x_2^\beta\,dx_1dx_2$ по множеству $A = \{(x_1,x_2) \mid 0 \le x_2 \le x_1 \le 1\}$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

Упражнение 55. Вычислить интеграл $\iint\limits_A x_1^\alpha x_2^\beta\,dx_1dx_2$ по множеству $A = \{(x_1,x_2) \mid 0 \le x_2 \le 1-x_1,\ x_1 \ge 0\}$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

Упражнение 56. Вычислить $\iint\limits_A (x_1^2+x_2^2)^\alpha(1-x_1^2-x_2^2)^\beta\,dx_1dx_2$, где $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2+x_2^2 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

14.5.2 Интегралы по неограниченным множествам

Пусть $B \subset \boldsymbol{R}^m$ — неограниченное множество, для которого существует последовательность $\{D_n \mid n \ge 1\}$ компактных измеримых множеств, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $\forall\, n \ge 1 :\ D_n \subset D_{n+1} \subset B$; 2) $\forall\, c > 0\ \exists\, N\ \forall n \ge N :\ (B \cap B(\vec{0},c)) \subset D_n$.

Такую последовательность $\{D_n \mid n \ge 1\}$ будем называть ***исчерпывающей*** для множества B. Пусть $f \in C(B)$.

Определение 4. Несобственным интегралом от функции f по множеству B называется предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(\vec{x})\,d\vec{x}, \tag{1}$$

обозначаемый символом

$$\int\limits_A f(\vec{x})\,d\vec{x}. \tag{2}$$

Несобственный интеграл (2) называется ***сходящимся,*** *если предел (1) конечен и не зависит от выбора исчерпывающей последовательности $\{D_n \mid n \ge 1\}$, в остальных случаях интеграл (2) называется* ***расходящимся.***

Для интеграла (2) справедлив аналог теоремы 18.

При вычислении несобственных интегралов из пп. 14.5.1 и 14.5.2 можно пользоваться формулой их сведения к повторным при условии сходимости повторных интегралов от абсолютной величины функции, а также формулой замены переменных. Эти утверждения, как и теория интеграла (2), здесь рассматриваться не будут.

Пример. Пусть при $m = 2$, $B = [0,+\infty)^2$, $f(x_1,x_2) = e^{-x_1^2-x_2^2}$, $(x_1,x_2) \in B$. Несобственный интеграл

$$J = \iint\limits_B f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2 = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x_1^2-x_2^2}\,dx_1dx_2$$

сходится. Доказательство независимости предела от исчерпывающей последовательности проводится аналогично соответствующей части теоремы 18. После перехода в интеграле J к повторным интегралам, получим формулу

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x_2^2}\Big(\int_0^{+\infty} e^{-x_1^2}\,dx_1\Big)\,dx_2 = \Big(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\Big)^2. \tag{3}$$

Доказательство равенства (3) получается просто, если рассмотреть в качестве исчерпывающей последовательности $D_n = [0,n]^2$, $n \geq 1$, и применить правило перехода к повторным интеграла для бруса D_n :

$$J = \lim_{n\to\infty} \int_{D_n} e^{-x_1^2-x_2^2}\,dx_1dx_2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-x_2^2}\Big(\int_0^n e^{-x_1^2}\,dx_1\Big)\,dx_2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\Big)^2 = \Big(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\Big)^2.$$

С помощью формулы перехода к полярным координатам для исчерпывающей последовательности

$$D'_n = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq n^2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\},\ n \geq 1,$$

аналогично доказательству равенства (3) получаем формулу

$$J = \int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr d\varphi = -\frac{\pi}{4}\, e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r\to+\infty} = \frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) находим значение интеграла Эйлера-Пуассона

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Упражнение 57. Доказать, что абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Упражнение 58. Пусть функция $f:\ B \to R$ непрерывна на B и удовлетворяет условию $\exists\, c > 0\ \exists\, \alpha > 2\ \forall\,(x_1,x_2) \in B:\ |f(x_1,x_2)| \leq \leq \dfrac{c}{1+r^\alpha}$, $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Доказать абсолютную сходимость интеграла $\iint\limits_B f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$.

Упражнение 59. Для $\alpha > -1$ вычислить интеграл:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x_1^2+x_2^2)^\alpha}\,dx_1dx_2$, $\alpha > 0$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (x_1^2+x_2^2)^\alpha e^{-x_1^2-x_2^2}\,dx_1dx_2$.

Упражнение 60*. Доказать сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty}\cdots\int_1^{+\infty} \frac{dx_1dx_2\ldots dx_m}{x_1x_2\ldots x_m(\max\{x_1,x_2,\ldots,x_m\})^\alpha},\quad \alpha > 0.$$

Глава 15

Интегралы по многообразиям и теорема Стокса

15.1 Основные определения

15.1.1 Допустимые координатные пространства. Ориентация

Пусть $R^p = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_p)\}$ — p-мерное пространство. Это пространство будем называть также x-пространством, чтобы отличать от других. Пусть A — некоторое множество в x-пространстве. Любая точка $P \in A$ в x-пространстве задаётся набором координат $x_1, \ldots, x_p$. Однако, точки из A могут задаваться и другими способами.

Пусть G — открытое в пространстве (R^p, ρ) множество, причём $G \supset A$. Пусть $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_p) : G \to R^p$ — отображение, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $\vec{g} \in C^1(G, R^p)$; 2) $\vec{g}$ есть взаимно однозначное соответствие между множествами G и $\vec{g}(G)$; 3) либо $\forall\, \vec{x} \in G : \ J(\vec{x}) := = \dfrac{\partial(g_1, \ldots, g_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)}(\vec{x}) > 0$ либо $\forall\, \vec{x} \in G : \ J(\vec{x}) < 0$.

Определение 1. *Отображение $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_p) : G \to R^p$, удовлетворяющее условиям 1) — 3), называется **регулярным** или **диффеоморфизмом**.*

Регулярное отображение имеет обратное, которое также регулярно.

Упражнение 1. Доказать последнее утверждение, Доказать, что суперпозиция регулярных отображений есть регулярное отображение.

Любая точка $P \in A$, имеющая координаты $x_1, \ldots, x_p$ в x-пространстве, может быть также задана с помощью образа $(y_1, \ldots, y_p) = \vec{g}(\vec{x}) = (g_1(\vec{x}), \ldots, g_p(\vec{x}))$ при регулярном преобразовании $\vec{g}$. Этот образ будем считать расположенным в y-пространстве — другой копии R^p, отличной от x-пространства. Значения $y_1, \ldots, y_p$ будем называть координатами точки P в y-пространстве, а переход от координат $x_1, \ldots, x_p$ к координатам $y_1, \ldots, y_p$ — ***заменой*** или ***преобразованием*** координат. Преобразование координат, осуществляемое с помощью регулярного преобразования, называется ***допустимым.*** Далее рассматриваются только допустимые преобразования координат. Иногда y-пространство, в котором расположен образ $\vec{g}(A)$, называют ***допустимым координатным пространством*** для множества A. Тогда x-пространство допустимо для $\vec{g}(A)$, если y-пространство допустимо для A.

Таким образом, множеству G соответствует класс координатных пространств, получаемых из x-пространства (а также и друг из друга) с помощью допустимых преобразований координат.

Определение 2. Допустимые для множества A x-пространство и z-пространство называются ***одинаково ориентированными,*** *если*

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_p)}{\partial(z_1, \ldots, z_p)} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial(z_1, \ldots, z_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_p)} > 0$$

и ***противоположно ориентированными,*** *если*

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_p)}{\partial(z_1, \ldots, z_p)} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial(z_1, \ldots, z_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_p)} < 0.$$

Множество A называется ***ориентированным,*** *если какое-нибудь допустимое координатное пространство для A фиксировано и названо* ***положительным*** *или пространством знака $+1$. При этом все одинаково ориентированные с фиксированным пространством допустимые пространства также положительны (имеют знак $+1$). Пространства, противоположно ориентированные с фиксированным пространством, называются* ***отрицательными*** *или пространствами знака -1.*

Согласно этому определению, любое подмножество x-пространства ориентировано, если x-пространство названо, например, положительным. При этом допустимое y-пространство имеет

знак $+1$, если $\dfrac{\partial(y_1, \ldots, y_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)} > 0$, и знак -1, если $\dfrac{\partial(y_1, \ldots, y_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_p)} < 0$.

Заметим также, что y-пространство и z-пространство, для которых

$$\frac{\partial(y_1,\ldots,y_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}>0, \qquad \frac{\partial(z_1,\ldots,z_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}>0,$$

одинаково ориентированы, поскольку

$$\frac{\partial(y_1,\ldots,y_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}\cdot\frac{\partial(x_1,\ldots,x_p)}{\partial(z_1,\ldots,z_p)}=\frac{\partial(y_1,\ldots,y_p)}{\partial(z_1,\ldots,z_p)}.$$

Примеры. 1. Пусть при $p=1$ множества $G=\boldsymbol{R}$, $A=[a,b]$ — отрезок на прямой $\boldsymbol{R}$ в x-пространстве, которое будем считать положительным. Пусть $g\in C^1(\boldsymbol{R})$, причём $g'(x)>0$, $x\in\boldsymbol{R}$. Образ $g(A)=[g(a),g(b)]$ лежит в положительном y-пространстве, поскольку $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dg}{dx}>0$. Если $h\in C^1(\boldsymbol{R})$ и $h'(x)<0$, $x\in\boldsymbol{R}$, то регулярное преобразование h приводит к отрицательному z-пространству, в котором $h(A)=[h(b),h(a)]$. Поэтому положительную ориентацию отрезка на прямой можно интерпретировать, как задание начальной a и конечной b точек отрезка (или задание направления движения от a к b). При этом в положительном y-пространстве этот порядок сохраняется: $g(a)<g(b)$. В отрицательном z-пространстве порядок изменяется на противоположный: $h(b)<h(a)$.

2. Пусть для $p=2$ множества $G=\boldsymbol{R}^2$, $A=[0,2]\times[0,1]$ лежат в положительном x-пространстве. Отображение $\vec{y}=\vec{g}(x_1,x_2)=(x_1+1,2x_2+2)$, $(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2$, является регулярным, причём

$$\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=2>0;\quad (x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2.$$

Поэтому образ $\vec{g}(A)=[1,3]\times[2,4]$ лежит в положительном y-пространстве. Отображение $\vec{z}=\vec{h}(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$, $(x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2$, также регулярно и

$$\frac{\partial(z_1,z_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1<0;\quad (x_1,x_2)\in\boldsymbol{R}^2,$$

а образ $\vec{h}(A)=[0,1]\times[0,2]$ лежит в отрицательном z-пространстве. Множество A ориентировано.

Ориентацию множества A можно интерпретировать как задание направления обхода его границы (одного из двух возможных: по часовой стрелке, если смотреть на плоскость сверху, или против часовой стрелки). При переходе к положительному y-пространству направление обхода сохраняется, при переходе к отрицательному z-пространству — меняется на противоположное.

Упражнение 2. Пусть $\boldsymbol{R}^p$ — положительное x-пространство и $\vec{y}=\vec{g}(\vec{x})=(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(p)})$, $\vec{x}\in\boldsymbol{R}^p$, где $\sigma=(\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(p))$, — некоторая перестановка чисел $1,2,\ldots,p$. Определить, для каких перестановок σ регулярное преобразование $\vec{g}$ приводит к положительному y-пространству.

15.1.2 Дифференциальные формы степени m в пространстве R^m. Новая форма формулы замены переменных

Пусть $A \subset R^m$ — компактное измеримое ориентированное множество в x-пространстве. Пусть $G \supset A$ и $\vec{y} = \vec{g}: \ G \to R^m$ — регулярное преобразование, переводящее множество A в $\vec{g}(A)$. Множество $\vec{g}(A)$ по теореме 17 п. 14.4.5 компактно и измеримо, и лежит в y-пространстве. Пусть $f \in C(\vec{g}(A))$.

Определение 3. Дифференциальная форма степени m $\omega = f(y_1, y_2, \ldots, y_m)\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_m$ на $\vec{g}(A)$ в m-мерном y-пространстве есть символ, определяемый равенством

$$\omega = f\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_m = \tag{1}$$
$$= \begin{cases} f\, dy_1 dy_2 \ldots dy_m, & \text{если } y\text{-пространство знака } +1, \\ -f\, dy_1 dy_2 \ldots dy_m, & \text{если } y\text{-пространство знака } -1. \end{cases}$$

Выражение в правой части (1) есть подынтегральное выражение m-кратного интеграла по множеству $\vec{g}(A)$ от функции f или $-f$.

С помощью определения (3) формулу замены переменных в m-кратном интеграле из теоремы 17 п. 14.4.5 можно записать в более удобной для дальнейшего форме

$$\int\limits_{\vec{g}(A)} f\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_m = \int\limits_{A} f \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m. \tag{2}$$

Упражнение 3. Доказать равенство (2).

Далее используются следующие свойства дифференциальных форм степени m в пространстве R^m. Эти свойства фактически описывают правила преобразования подынтегральных выражений при регулярных преобразованиях (заменах) координат.

1^0. Если y-пространство — допустимое координатное пространство для множества A, лежащего в x-пространстве, то будем считать, что

$$f(\vec{y})\, dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_m =$$
$$= f(\vec{y}(\vec{x})) \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m. \tag{3}$$

Равенство (3) есть формула связи для выражений дифференциальной формы в разных координатных пространствах. Оно представляет собой удобную формализованную запись равенства (2) и реально используется только в равенствах типа (2).

2^0. Если y-пространство и z-пространство — допустимые координатные пространства для множества A, то

$$f(\vec{y})\,dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_m =$$
$$= f(\vec{y}(\vec{z}))\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_m)}\,dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_m. \qquad (4)$$

Равенство (4) получается формально двукратным применением (3)

$$f\,dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_m = f\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, x_2 \ldots, x_m)}\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m =$$
$$= f\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}\,\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_m)}\,dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_m =$$
$$= f\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_m)}\,dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_m.$$

3°. Пусть $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(m))$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, m$. Положим $S(\sigma) := 1$, если σ — чётная перестановка, и $S(\sigma) := -1$, если σ — нечётная перестановка. Тогда y-пространство для отображения $\vec{y} = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$ является допустимым для любого множества A, причём

$$\frac{\partial(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = S(\sigma).$$

Согласно равенству (4), имеем

$$f\,x_{\sigma(1)} \wedge x_{\sigma(2)} \wedge \ldots \wedge x_{\sigma(m)} = S(\sigma) f\,dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m. \qquad (5)$$

Например, для $m = 2$ получим следующее равенство дифференциальных форм $f(x_1, x_2)\,dx_1 \wedge dx_2 = -f(x_1, x_2)\,dx_2 \wedge dx_1$.

Упражнение 4. Проверить равенство (5).

Упражнение 5. Множество $F = \{(y_1, y_2) \mid 1 \le y_1^2 + y_2^2 \le 4,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0\}$ лежит в положительном y-пространстве. Определить вид дифференциальной формы $\omega = (y_1^2 y_2 + y_2^3)\,dy_2 \wedge dy_1$, $(y_1, y_2) \in F$, в полярных координатах.

15.1.3 Многообразия

Многообразиями размерности p называют такие подмножества пространства $\boldsymbol{R}^m$, которые "в малом" подобны пространству $\boldsymbol{R}^p$. Одномерное многообразие "в малом" устроено примерно так, как прямая — пространство $\boldsymbol{R}$, двумерное — как плоскость и т. п. Понятие многообразия включает в себя такие понятия, как гладкая кривая на плоскости или в пространстве (одномерное многообразие), гладкая поверхность в пространстве (двумерное многообразие).

Здесь и в дальнейшем в случае множества $T \subset \boldsymbol{R}^p$, не являющегося открытым в $(\boldsymbol{R}^p, \rho)$, обозначение $\vec{f} \in C^r(T, \boldsymbol{R}^p)$ понимается следующим образом: существуют открытое в $(\boldsymbol{R}^P, \rho)$ множество $G \supset T$ и функция $\vec{g} \in C^r(G, \boldsymbol{R}^p)$ такие, что $\vec{g}(\vec{t}) = \vec{f}(\vec{t})$, $\vec{t} \in T$.

Определение 4. *Пусть $1 \le p \le m$. Множество $M \subset \boldsymbol{R}^m$ называется **многообразием размерности** p или p-**мерным многообразием,** если существуют множество $T \subset \boldsymbol{R}^p$ и функция $\vec{u} \in C^1(T, \boldsymbol{R}^m)$ такие, что $\vec{u}(T) = M$. При этом говорят, что функция $\vec{u}$ задаёт **параметрическое представление многообразия на множестве параметров** T. Числа $t_1, \ldots, t_p$ называются **координатами** точки $\vec{u}(t_1, \ldots, t_p)$ многообразия M. Допустимое координатное пространство для параметрического множества T называется **допустимым координатным пространством многообразия** M.*

Пусть M — многообразие из определения 4. Если s-пространство — допустимое координатное пространство для T, получаемое с помощью регулярного преобразования $\vec{s} = \vec{g}(\vec{t})$, $\vec{t} \in T$, то $M = \vec{v}(S)$, где $S := \vec{g}(T)$, $\vec{v} := \vec{u}(\vec{g}^{\,-1})$. Поэтому функция $\vec{v}$ также задаёт параметрическое представление многообразия M на множестве параметров S. Представления многообразия с помощью функций $\vec{u}$ и $\vec{v}$ называются ***эквивалентными,*** при этом говорят, что функция $\vec{g}$ осуществляет ***преобразование*** параметров многообразия.

Многообразие M называется ***ориентированным,*** если какое-нибудь допустимое координатное пространство фиксировано и названо, например, положительным.

Далее на функцию $\vec{u}$ будут налагаться дополнительные условия гладкости, а в качестве T будут рассматриваться компактные измеримые множества. Приведём наиболее типичные примеры многообразий.

1⁰. Ориентированная кривая. Пусть $p = 1$ и множество $T = [a, b]$ лежит в положительном t-пространстве. Ориентацию множества T будем трактовать, как задание направления движения вдоль T от a к b. Пусть $\vec{u} \in C^1([a, b], \boldsymbol{R}^m)$.

Одномерное ориентированное многообразие $\Gamma = \vec{u}(T)$ называется ***ориентированной кривой в пространстве*** $\boldsymbol{R}^m$. Ориентацию кривой Γ можно трактовать, как задание направления движения по Γ от $\vec{u}(a)$ к $\vec{u}(b)$. При этом переход к положительному допустимому координатному s-пространству приводит к параметрическому множеству, для которого движение в сторону возрастания нового параметра также соответствует ранее заданному движению по Γ, поскольку $\dfrac{ds}{dt} > 0$ и, следовательно, $t_1 < t_2 \iff s_1 < s_2$. Если перейти к отрицательному допустимому координатному пространству, то движение в сторону уменьшения нового параметра соответствует ранее заданному движению по Γ.

Примеры. 1. Пусть $m = 2$, $T = [0,\pi]$, $\vec{u}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$, t-пространство положительно и 0 — начало отрезка $[0,\pi]$. Тогда $\Gamma = \vec{u}([0,\pi])$ — ориентированная полуокружность с центром в $(0,0)$ и радиусом 1, расположенная в верхней полуплоскости $\boldsymbol{R}^2$. Ориентацию Γ можно трактовать как задание движения по Γ от $(1,0)$ к $(-1,0)$. Если преобразовать параметр t с помощью равенства $s = -t$, то $\dfrac{ds}{dt} = -1 < 0$ и s-пространство отрицательно для $[0,\pi]$, а эквивалентное параметрическое представление для Γ задаётся функцией $\vec{v}(s) = (\cos s, -\sin s)$, $s \in [-\pi, 0]$. Поскольку s-пространство отрицательно, то движение от 0 к $-\pi$ вдоль $[-\pi,0]$ соответствует заданному движению по Γ.

Приведём ещё одно параметрическое представление для Γ, которое получается с помощью следующего преобразования параметра $z = \cos t$, $t \in [0,\pi]$. При этом $\Gamma = \{(z, \sqrt{1-z^2}) \mid z \in [-1,1]\}$, а z-пространство отрицательно, поскольку $\dfrac{dz}{dt} = -\sin t$, $t \in [0,\pi]$.

2. Пусть $m = 3$, $T = \boldsymbol{R}$, t-пространство положительно, ориентация T есть движение вправо вдоль T. ***Винтовой линией*** называется кривая $\Gamma = \{(\cos t, \sin t, t) \mid t \in \boldsymbol{R}\}$ в $\boldsymbol{R}^3$. Ориентация Γ есть движение вверх по Γ.

2°. ***Ориентированная поверхность.*** Пусть $p = 2$, $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $\vec{u} \in C^1(T, \boldsymbol{R}^m)$. Двумерное многообразие $S = \vec{u}(T)$ называется ***поверхностью*** в $\boldsymbol{R}^m$. Если T — ориентированное множество, то поверхность S называется ***ориентированной.***

Пример. Пусть $m = 3$, $T = \{(r,\varphi) \mid r \in [0,2],\ \varphi \in [0,\pi]\}$,

$$\vec{u}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 4 - r^2),\ (r,\varphi) \in T.$$

Здесь $S = \vec{u}(T)$ — часть параболоида вращения. Предположим, что T ориентировано, ориентация множества T есть задание обхода его границы против часовой стрелки. При этом поверхность S ориентирована. Ориентацию S можно трактовать как выбор верхней стороны S, если смотреть из точки $(0,0,5)$. Тогда обход контура S, соответствующий обходу границы T, будет также происходить против часовой стрелки.

3°. ***Определение.*** Многообразие M, определяемое с помощью функции $\vec{u} \in C^1(T, \boldsymbol{R}^m)$ на множестве параметров T, называется ***собственно p-мерным*** в точке $\vec{u}(\vec{t}^{\,0}) \in M$, $\vec{t}^{\,0} \in T$, если матрица

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1(\vec{t}^{\,0})}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1(\vec{t}^{\,0})}{\partial t_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_m(\vec{t}^{\,0})}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_m(\vec{t}^{\,0})}{\partial t_p} \end{pmatrix}$$

имеет ранг p.

Это определение описывает свойство многообразия M в точке $\vec{u}(\vec{t}^{\,0})$, которое не зависит от выбора параметрических координат. Действительно, пусть s-пространство — допустимое координатное пространство для T, причём $\vec{s} = \vec{g}(\vec{t})$, $\vec{t} \in T$; $\vec{s}^{\,0} = \vec{g}(\vec{t}^{\,0})$; $M = \vec{v}(S)$, $S = \vec{g}(T)$, $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_m) = \vec{u}(\vec{g}^{\,-1}) = \vec{u}(\vec{t}(\vec{s}))$, $\vec{u}(\vec{t}^{\,0}) = \vec{v}(\vec{s}^{\,0})$.

Если, например, $\dfrac{\partial(u_1, \ldots, u_p)}{\partial(t_1, \ldots, t_p)}(\vec{t}^{\,0}) \neq 0$, то

$$\frac{\partial(v_1, \ldots, v_p)}{\partial(s_1, \ldots, s_p)}(\vec{s}^{\,0}) = \frac{\partial(u_1, \ldots, u_p)}{\partial(t_1, \ldots, t_p)}(\vec{t}^{\,0}) \cdot \frac{\partial(t_1, \ldots, t_p)}{\partial(s_1, \ldots, s_p)}(\vec{s}^{\,0}) \neq 0.$$

15.2 Интеграл по многообразию от дифференциальной формы

15.2.1 Дифференциальные формы степени p в пространстве R^m

Пусть $1 \leq p \leq m$, T — ориентированное компактное измеримое множество в t-пространстве R^p, $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_m) \in C^1(T, R^m)$. Тогда $M = \vec{u}(T)$ — ориентированное p-мерное многообразие в x-пространстве R^m. Рассмотрим функции $f_j \in C(M)$, $1 \leq j \leq q$, $q \in N$.

Определение 1. *Дифференциальной формой степени p на p-мерном ориентированном многообразии M в R^m называется выражение*

$$\omega = f_1(x_1, \ldots, x_m)\, dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} + \ldots$$
$$\ldots + f_q(x_1, \ldots, x_m)\, dx_{\mu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu(p)}, \tag{1}$$

в котором каждый из индексов $\{\nu(j), \mu(k)\}$ принимает одно из значений $1, 2, \ldots, m$. Для каждого параметрического представления многообразия M, задаваемого функцией $\vec{u}$ на множестве параметров T, значение ω равно

$$\omega = f_1(x_1, \ldots, x_m)\, dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} + \ldots$$
$$\ldots + f_q(x_1, \ldots, x_m)\, dx_{\mu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu(p)} =$$
$$= \Bigg(f_1(u_1(\vec{t}), \ldots, u_m(\vec{t})) \frac{\partial(u_{\nu(1)}, \ldots, u_{\nu(p)})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} + \ldots$$

$$\ldots + f_q(u_1(\vec{t}), \ldots, u_m(\vec{t}))\frac{\partial(u_{\mu(1)}, \ldots, u_{\mu(p)})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} \Bigg) \, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p. \quad (2)$$

Функции $f_1, \ldots, f_q$ называются ***коэффициентами*** *дифференциальной формы ω.*

Заметим, что в правой части (2) фигурирует определённая в п.15.1.2 дифференциальная форма степени p на множестве $T \subset \boldsymbol{R}^p$.

Хотя в дальнейшем дифференциальные формы почти всегда встречаются под знаком интеграла, целесообразно установить некоторые правила формального проведения операций над ними.

1^0. Каждая дифференциальная форма (1) может быть записана в форме, называемой ***канонической***, в которой: a) отсутствуют слагаемые вида $f\, dx_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda(p)}$ с совпадающими индексами; b) каждое слагаемое в (1) имеет вид $f\, dx_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda(p)}$ для $1 \le \lambda(1) < \lambda(2) < \ldots < \lambda(p) \le m$.

⌈ Действительно, если, например, $\lambda(1) = \lambda(2)$, то

$$f\, dx_{\lambda(1)} \wedge dx_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda(p)} = f\frac{\partial(x_{\lambda(1)}, x_{\lambda(1)}, \ldots, x_{\lambda(p)})}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_p)}\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p \doteq 0$$

для любого параметрического представления многообразия, поскольку якобиан в этом выражении содержит две одинаковые строки. Если же индексы $\lambda(1), \lambda(2), \ldots, \lambda(p)$ различны, то

$$f\, dx_{\lambda(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda(p)} = f\frac{\partial(x_{\lambda(1)}, \ldots, x_{\lambda(p)})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)}\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p =$$

$$= S(\sigma) f\frac{\partial(x_{\lambda'(1)}, \ldots, x_{\lambda'(p)})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)}\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p = \overline{f}\, dx_{\lambda'(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\lambda'(p)},$$

где $\overline{f} = fS(\sigma)$, σ — перестановка чисел $\lambda(1), \lambda(2), \ldots, \lambda(p)$ такая, что переставленные индексы $\lambda'(1), \lambda'(2), \ldots, \lambda'(p)$ упорядочены: $\lambda'(1) < \lambda'(2) < \ldots < \lambda'(p)$. Напомним, что $S(\sigma) = 1$, если перестановка σ — чётна и $S(\sigma) = -1$, если перестановка σ — нечётна. ⌋

2^0. Дифференциальная форма равна 0, если в её канонической форме все коэффициенты равны 0. Две дифференциальных формы ω_1 и ω_2 равны ($\omega_1 = \omega_2$), если в канонической форме равны их соответствующие коэффициенты. Сумма $\omega_1 + \omega_2$ форм ω_1 и ω_2 определяется как форма, равная сумме соответствующих выражений из (1). Функция $f: M \to \boldsymbol{R}$ называется дифференциальной формой степени 0.

Упражнение 6. Привести к канонической форме следующую дифференциальную форму $\omega = \sum\limits_{j,k=1}^{3} f_{jk}\, dx_j \wedge dx_k$ степени 2 в $\boldsymbol{R}^3$. Проверить, что любая дифференциальная форма второй степени в $\boldsymbol{R}^3$ имеет такой вид

$$\omega = P\,dx_2 \wedge dx_3 + Q\,dx_3 \wedge dx_1 + R\,dx_1 \wedge dx_2.$$

Упражнение 7. Доказать, что $\sum\limits_{j,k=1}^{m} f_{jk}\,dx_j \wedge dx_k = 0$ тогда и только тогда, когда $f_{jk} = f_{kj}$, $j,k = 1,2,\ldots,m$.

Упражнение 8. Пусть $\omega = P\,dx_2 \wedge dx_3 + Q\,dx_3 \wedge dx_1 + R\,dx_1 \wedge dx_2$ — дифференциальная форма второй степени на многообразии $M = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 = 1\}$ — плоскости в $\boldsymbol{R}^3$. Доказать, что $\omega = P\,dx_2 \wedge dx_3$ на многообразии M.

Упражнение 9. Пусть $\omega = f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2$ — дифференциальная форма первой степени на многообразии $M = \{(x_1,x_2) \mid x_1 + x_2 = 1\}$. Доказать, что $\omega = (f_1 - f_2)dx_1$ на многообразии M.

15.2.2 Интеграл от формы по многообразию

Пусть M — ориентированное многообразие размерности p в $\boldsymbol{R}^m$, а

$$\omega = f_1\,dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} + \ldots + f_q\,dx_{\mu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu(p)}$$

— дифференциальная форма степени p на многообразии M.

Определение 2. ***Интегралом от дифференциальной формы*** *ω степени p по ориентированному многообразию M размерности p в $\boldsymbol{R}^m$ называется число*

$$\int\limits_M \omega := \int\limits_T \left(f_1(\vec{u}(\vec{t}))\frac{\partial(u_{\nu(1)},\ldots,u_{\nu(p)})}{\partial(t_1,\ldots,t_p)} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + f_q(\vec{u}(\vec{t}))\frac{\partial(u_{\mu(1)},\ldots,u_{\mu(p)})}{\partial(t_1,\ldots,t_p)} \right) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p, \qquad (1)$$

где $\vec{u}$ — функция, которая осуществляет параметрическое представление многообразия M на множестве параметров T.

Замечание. Интеграл в правой части (1) есть интеграл от дифференциальной формы степени p по множеству T в $\boldsymbol{R}^p$. Однако, для заданного многообразия M параметрическое множество и функция, осуществляющая параметрическое представление, могут быть выбраны разными способами. Существенным обстоятельством, оправдывающим определение 2 является то, что значение интеграла $\int\limits_M \omega$ не зависит от выбора параметрического множества и соответствующих эквивалентных представлений многообразия M.

Действительно, пусть s-пространство — допустимое пространство для T, полученное с помощью регулярного преобразования $\vec{g}$, и

$$\vec{s}=\vec{g}(\vec{t}),\ t\in T;\quad S=\vec{g}(T);\quad \vec{v}=\vec{u}(\vec{g}^{-1});\quad M=\vec{u}(T)=\vec{v}(S).$$

Тогда с помощью формулы замены переменных получим $\int\limits_M \omega :=$

$$= \int\limits_T \left(f_1 \frac{\partial(u_{\nu(1)},\dots,u_{\nu(p)})}{\partial(t_1,\dots,t_p)} + \dots + f_q \frac{\partial(u_{\mu(1)},\dots,u_{\mu(p)})}{\partial(t_1,\dots,t_p)} \right) dt_1\wedge\dots\wedge dt_p =$$

$$= \int\limits_S \left(f_1 \frac{\partial(u_{\nu(1)},\dots,u_{\nu(p)})}{\partial(t_1,\dots,t_p)} + \dots \right.$$

$$\left. \dots + f_q \frac{\partial(u_{\mu(1)},\dots,u_{\mu(p)})}{\partial(t_1,\dots,t_p)} \right) \frac{\partial(t_1,\dots,t_p)}{\partial(s_1,\dots,s_p)}\, ds_1\wedge\dots\wedge ds_p =$$

$$= \int\limits_S \left(f_1 \frac{\partial(v_{\nu(1)},\dots,v_{\nu(p)})}{\partial(s_1,\dots,s_p)} + \dots + f_q \frac{\partial(v_{\mu(1)},\dots,v_{\mu(p)})}{\partial(s_1,\dots,s_p)} \right) ds_1\wedge\dots\wedge ds_p.$$

Рассмотрим следующие два частных случая определения 2.

I. Если $p=m$ и $\omega = f\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_m$, то

$$\int\limits_M f\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_m = \int\limits_T f\frac{\partial(x_1,\dots,x_m)}{\partial(t_1,\dots,t_m)}\, dt_1\wedge\dots\wedge dt_m,$$

что представляет собой формулу замены переменных.

II. Если многообразие M может быть задано с помощью специального параметрического представления

$x_1=u_1=t_1,\dots,x_p=u_p=t_p;\quad x_{p+1}=u_{p+1}(\vec{t}),\dots,x_m=u_m(\vec{t}),\ \vec{t}\in T$, то якобиан $\dfrac{\partial(x_1,\dots,x_p)}{\partial(t_1,\dots,t_p)}=1$ и справедливо следующее равенство

$$\int\limits_M f(x_1,\dots,x_m)\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_p = \tag{2}$$

$$= \int\limits_T f(t_1,\dots,t_p,u_{p+1}(\vec{t}),\dots,u_m(\vec{t}))\,dt_1\wedge\dots\wedge dt_p =$$

$$= \int\limits_T f(x_1,\dots,x_p,u_{p+1}(\vec{x}),\dots,u_m(\vec{x}))\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_p,\ \vec{x}=(x_1,\dots,x_p).$$

1^0. Криволинейный интеграл второго рода. Предположим, что $\Gamma=\vec{u}([a,b])$ — ориентированная кривая в $\boldsymbol{R}^m$, причём функция $\vec{u}\in C^1([a,b],\boldsymbol{R}^m)$. Кривая Γ, для которой $\vec{u}\in C^1([a,b],\boldsymbol{R}^m)$, называется ***гладкой кривой.*** Пусть $f_j\in C(\Gamma)$, $1\le j\le m$. Рассмотрим следующую дифференциальную форму первой степени на Γ

$$\omega = f_1(\vec{x})\,dx_1+\dots+f_m(\vec{x})\,dx_m.$$

*Определение 3. **Криволинейным интегралом второго рода** от формы ω по ориентированной кривой Γ называется число*

$$\int\limits_\Gamma \omega := j\int\limits_a^b \left(f_1(u_1(t),\dots,u_m(t))\frac{du_1(t)}{dt} + \dots \right.$$

$$\ldots + f_m(u_1(t), \ldots, u_m(t)) \frac{du_m(t)}{dt} \Bigg) \, dt, \tag{3}$$

где $j = +1$, если t-пространство имеет знак $+1$, и $j = -1$, если t-пространство имеет знак -1.

Заметим, что интеграл в правой части (3) есть интеграл Римана от непрерывной функции по отрезку $[a, b]$.

***Примеры.** 1.* Пусть $m = 2$, множество $T = [0, \pi]$ лежит в положительном t-пространстве и $\Gamma = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$. При этом $x_1 = u_1 = \cos t$, $x_2 = u_2 = \sin t$, $t \in [0, \pi]$. Для функций $f_1 = -x_2$, $f_2 = x_1$ имеем $\int\limits_\Gamma (-x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2) = (+1) \int\limits_0^\pi (-\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t)\, dt = \pi$. Заметим, что движение в сторону возрастания t по $[0, \pi]$ соответствует движению против часовой стрелке по Γ.

2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_\Gamma ((2a - x_2)\, dx_1 + x_1\, dx_2)$, $a > 0$, где Γ — арка циклоиды над отрезком $[0, 2\pi a]$, пробегаемая в направлении от точки $(0, 0)$ к точке $(2\pi a, 0)$. Рассмотрим следующее параметрическое представление для Γ

$$\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = a(t - \sin t),\ x_2 = a(1 - \cos t),\quad t \in [0, 2\pi]\}.$$

Поскольку возрастание параметра t на $[0, 2\pi]$ соответствует движение в заданном направлении по Γ, то t-пространство следует считать положительным. Поэтому имеем $\int\limits_\Gamma ((2a - x_2)\, dx_1 + x_1\, dx_2) = (+1) \int\limits_0^{2\pi} ((2a - a(1 - \cos t))a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)a \sin t)\, dt = -2\pi a^2$.

Замечание. Криволинейный интеграл $\int\limits_\Gamma \omega$ обладает многими обычными свойствами интеграла Римана. Например, $\int\limits_\Gamma (\omega_1 + \omega_2) = \int\limits_\Gamma \omega_1 + \int\limits_\Gamma \omega_2$. Далее, если $c \in (a, b)$, и $\Gamma_1 := \vec{u}([a, c])$, $\Gamma_2 := \vec{u}([c, b])$, то $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и $\int\limits_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \omega = \int\limits_{\Gamma_1} \omega + \int\limits_{\Gamma_2} \omega$.

2^0. Криволинейный интеграл второго рода как предел интегральных сумм. Пусть $\Gamma = \vec{u}([a, b])$ — ориентированная кривая в $\boldsymbol{R}^3$. Предположим, что t-пространство для $[a, b]$ положительно. Ориентацию Γ будем интерпретировать, как задание движения по Γ, соответствующего возрастанию параметра t. Пусть $\vec{F}$ — векторная функция, заданная на Γ, т. е. $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3) : \ \Gamma \to \boldsymbol{R}^3$. Пусть $\lambda = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ — разбиение $[a, b]$, $|\lambda|$ — его размер. В каждом из отрезков $[t_\nu, t_{\nu+1}]$ рассмотрим точку ξ_ν; $0 \le \nu \le n - 1$. Для участка кривой Γ, соответствующего параметрическому множеству $[t_\nu, t_{\nu+1}]$, рассмотрим скалярное произведение вектора $\vec{F}(\vec{u}(\xi_\nu))$ на вектор $\vec{u}(t_{\nu+1}) - \vec{u}(t_\nu)$, который направлен в сторону движения по этому участку. Это скалярное произведение равно такой сумме $(\vec{F}(\vec{u}(\xi_\nu)),(\vec{u}(t_{\nu+1})-\vec{u}(t_\nu))) = \sum\limits_{j=1}^{3} f_j(u_1(\xi_\nu),u_2(\xi_\nu),u_3(\xi_\nu))(u_j(t_{\nu+1})-u_j(t_\nu))$. Следующая величина

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}(\vec{F}(\vec{u}(\xi_\nu)),(\vec{u}(t_{\nu+1})-\vec{u}(t_\nu))) \tag{4}$$

есть сумма трёх сумм вида $S_1 := \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} f_1(\vec{u}(\xi_\nu))(u_1(t_{\nu+1})-u_1(t_\nu))$. Если Γ — гладкая кривая, а $\vec{F}\in C(\Gamma,\boldsymbol{R}^3)$, то, по теореме Лагранжа, $S_1 = \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} f_1(\vec{u}(\xi_\nu))\dfrac{du_1(\eta_\nu)}{dt}\Delta t_\nu$; $\eta_\nu\in[t_\nu,t_{\nu+1}]$, и $S_1\to\int\limits_a^b f_1(\vec{u}(t))\dfrac{du_1(t)}{dt}\,dt$ при $|\lambda|\to 0$. Таким образом, криволинейный интеграл второго рода допускает следующее представление

$$\int\limits_\Gamma(f_1\,dx_1+f_2\,dx_2+f_3\,dx_3)=\lim_{|\lambda|\to 0}\sum_{\nu=0}^{n-1}(\vec{F}(\vec{u}(\xi_\nu)),(\vec{u}(t_{\nu+1})-\vec{u}(t_\nu))) \tag{5}$$

Представление (5) позволяет получить ряд важных физических интерпретаций криволинейного интеграла второго рода.

Пример. Предположим, что на материальную точку P, помещённую в точке $\vec{x}\in\boldsymbol{R}^3$, действует сила $\vec{F}=(f_1(\vec{x}),f_2(\vec{x}),f_3(\vec{x}))$. Пусть Γ — гладкая кривая в $\boldsymbol{R}^3$, задаваемая с помощью функции $\vec{u}$ на $[a,b]$. Предположим, что точка P движется от одного конца Γ к другому, причём направление движения соответствует возрастанию параметра t. Какая работа затрачивается на перемещение точки P по кривой? Приближённое значение даёт сумма (4), а точное значение равно криволинейному интегралу второго рода из формулы (5).

Замечания. 1. Криволинейный интеграл второго рода был определён в 1^0 по гладкой кривой. Непрерывная кривая называется ***кусочно-гладкой***, если она составлена из конечного числа гладких кусков. Криволинейный интеграл второго рода по кусочно-гладкой кривой определяется как сумма интегралов по гладким кускам.

2. Заметим также, что переход к противоположной ориентации изменяет знак интеграла $\int\limits_\Gamma\omega$. Точнее, если Γ — ориентированная кривая, а Γ' — та же кривая с противоположной ориентацией, то $\int\limits_\Gamma\omega=-\int\limits_{\Gamma'}\omega$.

Упражнение 10. Пусть $m=2$ и кривая $\Gamma=\{(x,u(x))\mid x\in[a,b],\ u\in C^1([a,b])\}$ пробегается в направлении возрастания параметра x. Доказать, что для $\{P,Q\}\subset C(\Gamma)$ справедлива формула

$$\int\limits_\Gamma(P\,dx_1+Q\,dx_2)=\int\limits_a^b(P(x,u(x))+Q(x,u(x))u'(x))\,dx.$$

Упражнение 11. Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$, если $\omega = x_1 dx_1 - x_1 x_2 dx_2$ и $\Gamma = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| = 1\}$ — кривая, пробегаемая по часовой стрелке.

3^0. ***Поверхностный интеграл второго рода.*** Пусть $m = 3$, $p = 2$, T — компактное измеримое подмножество R^2, положим $\vec{u}(T) = \{(x_1, x_2, x_3) = (u_1(t_1, t_2), u_2(t_1, t_2), u_3(t_1, t_2)) \mid (t_1, t_2) \in T\}$ для функции $\vec{u} \in C^1(T, R^3)$. Допустим, что множество T ориентировано, тогда $S = \vec{u}(T)$ — ориентированная поверхность в R^3. Пусть $f_j \in C(S)$, $j = 1, 2, 3$.

Определение 4. *Интеграл* $\int\limits_{S} \omega$ *от дифференциальной формы второй степени*

$$\omega = f_1(\vec{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2(\vec{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3(\vec{x})\, dx_1 \wedge dx_2$$

по ориентированному многообразию — поверхности S называется ***поверхностным интегралом второго рода.***

Заметим, что согласно общему определению 2 интеграла от формы по многообразию, поверхностный интеграл второго рода вычисляется по следующей формуле

$$\int\limits_{S} (f_1(\vec{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2(\vec{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3(\vec{x})\, dx_1 \wedge dx_2) = \tag{6}$$

$$= \int\limits_{T} \left(f_1(\vec{u}(t_1, t_2)) \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2)} + f_2(\vec{u}(t_1, t_2)) \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t_1, t_2)} + \right.$$

$$\left. + f_3(\vec{u}(t_1, t_2)) \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)} \right) dt_1 \wedge dt_2.$$

Пример. Пусть $T = \{(t_1, t_2) \mid t_1^2 + t_2^2 \le 1\}$, $x_1 = u_1(t_1, t_2) = t_1$, $x_2 = u_2(t_1, t_2) = t_2$, $x_3 = u_3(t_1, t_2) = 1 - t_1^2 - t_2^2$; $(t_1, t_2) \in T$, причём t-пространство имеет знак $+1$. Тогда $S = \vec{u}(T)$ есть ориентированная поверхность — верхняя сторона параболоида вращения, расположенная в полупространстве $x_3 \ge 0$. Для функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_3$ вычислим интеграл $\int\limits_{S} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 \wedge dx_2$. На основании формулы (6) имеем

$$\int\limits_{S} x_3\, dx_1 \wedge dx_2 = \int\limits_{T} (1 - t_1^2 - t_2^2)\, dt_1 dt_2 = \pi/2.$$

Упражнение 12. Вычислить интеграл $\int\limits_{S} (dx_1 \wedge dx_3 + 2x_1\, dx_1 \wedge dx_2)$ по внешней стороне поверхности цилиндра $x_1^2 + x_2^2 \le 1$, $|x_3| \le 1$.

Упражнение 13. Пусть $F(t) = \int\limits_{\Gamma(t)} (x_1 x_2\, dx_1 + x_2\, dx_2)$, $t > 0$, где $\Gamma(t) = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = t^2,\ x_1 \ge 0\}$ с началом в точке $(0, t)$. Вычислить производную F'.

Упражнение 14. Пусть $F(t) = \int\limits_{S(t)} (x_1x_2x_3\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1)$, где $S(t) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = t^2,\ x_3 \geq 0\}$, $t > 0$. Вычислить F'.

15.3 Внешний дифференциал формы. Ориентация границы

15.3.1 Внешний дифференциал дифференциальной формы

Пусть $\omega = f_1(\vec{x})\,dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} + \ldots + f_q(\vec{x})\,dx_{\mu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu(p)}$ — дифференциальная форма степени $p \leq m$ на ориентированном множестве $M \subset R^m$, причём $f_k \in C^1(M)$, $1 \leq k \leq q$.

Определение 1. Внешним дифференциалом формы ω степени p называется следующая дифференциальная форма степени $p+1$

$$d\omega := \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_k}\,dx_k \wedge dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_q(\vec{x})}{\partial x_k}\,dx_k \wedge dx_{\mu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu(p)}.$$

Внешним дифференциалом функции f (т. е. формы степени 0) называется её дифференциал $df = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}\,dx_k$.

Заметим, что форма записи формы $d\omega$ в определении 1 не является канонической и что, согласно, определению $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

Примеры. 1. Пусть $m = 2$, $p = 1$ и $\omega = P(x_1, x_2)\,dx_1 + Q(x_1, x_2)\,dx_2$ — дифференциальная форма первой степени на R^2. Согласно определению (1), её внешний дифференциал равен

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial x_1}\,dx_1 \wedge dx_1 + \frac{\partial P}{\partial x_2}\,dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_1}\,dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial Q}{\partial x_2}\,dx_2 \wedge dx_2,$$

откуда после приведения к канонической форме получим

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

2. Пусть $m = 3$, $p = 1$. Внешний дифференциал формы первой степени на R^3 $\omega = P(\vec{x})\,dx_1 + Q(\vec{x})\,dx_2 + R(\vec{x})\,dx_3$ после упрощения имеет вид

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 +$$
$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

31 — 4-1168

3. Пусть $m = 3$, $p = 2$ и

$$\omega = P(\vec{x})\,dx_2 \wedge dx_3 + Q(\vec{x})\,dx_3 \wedge dx_1 + R(\vec{x})\,dx_1 \wedge dx_2$$

— дифференциальная форма второй степени на R^3. Её внешний дифференциал после приведения к канонической форме равен

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Следует обратить внимание на "циклическую" запись форм и их внешних дифференциалов в примерах 1 — 3. Заметим также, что согласно определению внешний дифференциал любой формы степени m в R^m равен 0.

Теорема 1. *Пусть ω — дифференциальная форма степени p на M с коэффициентами, принадлежащими классу $C^2(M)$. Тогда $d(d\omega) = 0$.*

⌈ Достаточно рассмотреть случай дифференциальной формы вида $\omega = f(\vec{x})\,dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)}$. На основании определения 1 сначала имеем

$$d\omega = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)},$$

а затем

$$d(d\omega) = \sum_{k=1}^{m} d\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_k}\, dx_j \wedge dx_k \wedge dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} =$$

$$= \sum_{1 \le k < j \le m} \left(\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_k}\right) dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} = 0,$$

поскольку для $f \in C^2(M)$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_k}, \quad 1 \le k, j \le m.$$

Доказанную теорему иногда называют ***теоремой Пуанкаре.***

Упражнение 15. Определить внешний дифференциал формы:

a) $x_1\,dx_2 \wedge dx_3 + x_2\,dx_3 \wedge dx_1 + x_3\,dx_1 \wedge dx_2$;

b) $f_1(x_1)dx_1 + f_2(x_2)dx_2 + \ldots + f_m(x_m)dx_m$;

c) $f_1(x_2, x_3)\,dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x_1, x_3)\,dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x_1, x_2)\,dx_1 \wedge dx_2$;

d) $\sum\limits_{k=1}^{m} f_k\,dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{k-1}$;

e) $\sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \left(f_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_k} - f_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_m$.

Упражнение 16. Привести примеры дифференциальных форм ω, для которых $d\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_m$.

15.3.2 Ориентация границы множества, состоящего из конечного числа брусов

Пусть для множества A в пространстве $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ A^0 — множество всех его внутренних в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ точек.

Определение 2. *Пусть F — замкнутое в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$ множество. **Границей** ∂F множества F называется множество $\partial F := F \setminus F^0$.*

Пример. Брус $Q = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid a_k \le x_k \le b_k,\ 1 \le k \le m\}$ в $\boldsymbol{R}^m$ есть замкнутое множество. Его граница ∂Q есть объединение 2^m $(m-1)$-мерных брусов следующего вида

$$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times \{c_k\} \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \ldots \times [a_m, b_m],$$

где $c_k = a_k$ или $c_k = b_k$, $1 \le k \le m$.

Пусть M — множество, которое является объединением конечного числа брусов некоторого разбиения пространства $\boldsymbol{R}^m$.

Граница ∂M множества M состоит из конечного числа $(m-1)$-мерных брусов. Пусть для каждого k, $1 \le k \le m$, $\partial_k M$ есть та часть границы ∂M, которая располагается в гиперплоскостях вида $x_k = \mathrm{constant}$. Все брусы размерности $m-1$, составляющие $\partial_k M$, разделим на две части $\partial_k^- M$ и $\partial_k^+ M$ следующим образом. Предположим, что Q — $(m-1)$-мерный брус, лежащий в гиперплоскости $x_k = c$ и $Q \subset \partial_k M$. Брус Q входит в $\partial_k^+ M$ $(\partial_k^- M)$, если $\forall\, \vec{x} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = c, x_{k+1}, \ldots, x_m) \in Q^0$ при всех достаточно малых положительных δ имеем

$$\vec{x}_\delta := (x_1, \ldots, x_{k-1}, c + \delta, x_{k+1}, \ldots, x_m) \notin M \quad (\vec{x}_\delta \in M).$$

Здесь Q^0 — множество всех внутренних точек Q в гиперплоскости $x_k = c$, которая является $(m-1)$-мерным пространством с обычным расстоянием.

Предположим теперь, что $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-пространство имеет знак j. При этом множество M ориентировано. Заметим теперь, что при этом $(x_k, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{k-1})$-пространство есть пространство, получаемое с помощью регулярного преобразования — перестановки координат из $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$-пространства, и имеет знак $j(-1)^{(m-1)(k-1)}$.

Определение 3. *Для любого k, $1 \le k \le m$, множество $\partial_k M$ лежит в $(x_{k+1}, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{k-1})$-пространстве, которое есть, согласно определению, пространство знака $j(-1)^{(m-1)(k-1)}$ для множества $\partial_k^+ M$ и знака $-j(-1)^{(m-1)(k-1)}$ для множества $\partial_k^- M$. При этом граница ∂M множества*

 $(-1)^{(m-i+1)(i-1)} = (-1)^{(m-1)(i-1)} \cdot (-1)^{l(i-1)}$ поменять $x_1 \to x_i$

*M называется **ориентированной**. Эта ориентация границы ∂M называется **ориентацией, соответствующей ориентации множества** M.*

Упражнение 17. Доказать следующие утверждения:

a) Если брус Q принадлежит $(x_{k+1}, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{k-1})$-пространству знака $+1$ и одновременно принадлежит $(x_{k+1}, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{k-1})$-пространству знака -1, то Q не входит в ∂M.

b) Пусть Q — брус, $\widetilde{Q}$ — ориентированный брус Q и $\widetilde{\widetilde{Q}}$ — брус Q с ориентацией, противоположной $\widetilde{Q}$. Условимся считать, что $\widetilde{Q} \cup \widetilde{\widetilde{Q}} = \varnothing$. Для множества $M = \bigcup\limits_{j=1}^{N} Q_j$, $N \in \boldsymbol{N}$ доказать равенство $\widetilde{\partial M} = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \widetilde{\partial Q_j}$.

c) Доказать, что $\partial(\widetilde{\widetilde{\partial M}}) = \varnothing$.

Упражнение 18. Пусть при $m = 2$ множество M лежит в положительном (x_1, x_2)-пространстве. Положительную ориентацию отрезка в одномерном пространстве будем трактовать как задание направления движения в сторону возрастания координаты. Доказать, что ориентацию ∂M, соответствующую ориентации M, можно интерпретировать как задание обхода ∂M в таком направлении, при котором ближайшая часть множества M оказывается слева. Обратить также внимание на то, что ∂M состоит из конечного числа замкнутых ломаных. Если лежит M в отрицательном (x_1, x_2)-пространстве, то обход ∂M следует заменить на обратный.

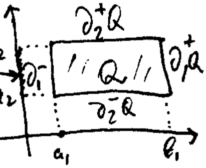
Упражнение 19. Пусть при $m = 3$ множество M лежит в положительном (x_1, x_2, x_3)-пространстве. Доказать, что ориентацию ∂M можно трактовать как выбор внешней по отношению к M стороны поверхности ∂M, поскольку, если смотреть на грани — части ∂M извне M, то их ориентация будет такой, как описано в упр. 18.

15.4 Формула Стокса в специальном случае

15.4.1 Формула Стокса для множества, состоящего из конечного числа брусов

Пусть $m > 1$, $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ — брус в $\boldsymbol{R}^m$, и число k, $1 \le k \le m$, фиксировано. Для множества Q рассмотрим части границы $\partial_k^+ Q = \{(x_1, \ldots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) \mid a_j \le x_j \le b_j, 1 \le j \le m, j \ne k\}$, $\partial_k^- Q =$
$\partial_k^-(Q)$ $\{(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_m) \mid a_j \le x_j \le b_j, 1 \le j \le m, j \ne k\}$.

На основании формулы (3) п. 14.1.6 для функции $\left\{f, \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right\} \subset C(Q)$, имеем $\displaystyle\int_Q \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}\, d\vec{x} =$



(∗)

$$= \int_{Q_k} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_m -$$

$$- \int_{Q_k} f(x_1, \ldots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)\, dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_m. \quad (1)$$

Здесь брус $Q_k := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \ldots \times [a_m, b_m]$. Предположим теперь, что $(x_1, \ldots, x_m)$-пространство имеет знак j, тогда $(x_k, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{k-1})$-пространство имеет знак $j(-1)^{(m-1)(k-1)}$. Рассмотрим ориентацию ∂Q, определённую в п. 15.3.2. При этом $(x_{k+1}, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{k-1})$-пространство имеет знак $j(-1)^{(m-1)(k-1)}$ для множества $\partial_k^+ Q$ и знак $-j(-1)^{(m-1)(k-1)}$ для множества $\partial_k^- Q$. Учитывая теперь определения дифференциальной формы и интеграла по многообразию, запишем формулу (1) в следующем виде

Запишем для (∗)

$$\int_Q \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} = \quad (2)$$

$\approx \int f(x_1, \ldots b_i, \ldots x_m)\, dx_{i+1} \wedge dx_{i+2} \ldots$ i-го нет

$$= \int_{\partial_k^+ Q} f\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} +$$

$$+ \int_{\partial_k^- Q} f\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1}.$$

$\approx (-1)^{(m-1)(i-1)} \int_{Q_i} \ldots = \int_{\partial_i^- Q} \ldots$

Заметим также, что согласно определению интеграла по многообразию, для $j \neq k$ имеем !

$$\int_{\partial_j^+ Q} f\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} = \quad (3)$$

$$= \int_{Q_j} f \frac{\partial(x_{k+1}, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{k-1})}{\partial(x_{j+1}, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_{j-1})}\, dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{j-1} = 0,$$

поскольку якобиан в правой части содержит следующую строку из нулей $\dfrac{\partial x_j}{\partial x_l} = 0$, $l = j+1, \ldots, m, 1, \ldots, j-1$. Аналогично, для $j \neq k$

$X_1 \ldots X_m$ - независимы

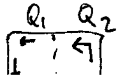
$$\int_{\partial_j^- Q} f\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} = 0. \quad (4)$$

Равенства (3) и (4) позволяют представить формулу (2) в виде

$$\int_Q \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} =$$

$$= \int_{\partial Q} f\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1}. \quad (5)$$

$\partial Q = \partial_i^+ Q \cup \partial_i^- Q \cup \bigcup (\partial_j^+ Q \cup \partial_j^- Q)$



Рассмотрим теперь два бруса Q_1 и Q_2 с общей $(m-1)$-мерной гранью, лежащей в гиперплоскости $x_k = constant$:

$$Q_1 = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid a_k \le x_k \le b_k; \ \ a_j \le x_j \le b_j, \ 1 \le j \le m, \ j \ne k\},$$
$$Q_2 = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid b_k \le x_k \le c_k; \ \ a_j \le x_j \le b_j, \ 1 \le j \le m, \ j \ne k\},$$

Объединение $Q = Q_1 \cup Q_2$ есть также брус, причём $\partial_k^- Q_1 = \partial_k^- Q$, $\partial_k^+ Q_2 = \partial_k^+ Q$. Общая грань брусов Q_1 и Q_2 есть множество $\partial_k^+ Q_1 = \partial_k^- Q_2$, которое не имеет внутренних точек в $(\boldsymbol{R}^m, \rho)$. Как часть границы бруса Q_1 это множество лежит в пространстве знака $j(-1)^{(m-1)(k-1)}$, а как часть Q_2 — в пространстве знака $-j(-1)^{(m-1)(k-1)}$. Пусть $\left\{f, \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right\} \subset C(Q)$. Если теперь записать формулу (2) для каждого их брусов Q_1, Q_2, то правые части полученных равенств будут содержать два интеграла от функции f по $\partial_k^+ Q_1$ и $\partial_k^- Q_2$, т. е. по одному множеству, имеющему противоположную ориентацию в интегралах. Тогда сумма этих двух интегралов будет равна 0. Следовательно, учитывая формулу (5), получим

$$\int\limits_{Q_1 \cup Q_2} \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} =$$
$$= \int\limits_{\partial(Q_1 \cup Q_2)} f\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1}. \qquad (6)$$

Из равенства (6) следует такое утверждение.

Лемма 1. *Пусть M — множество, которое является объединением конечного числа брусов в $\boldsymbol{R}^m$. Предположим, что M ориентировано и пусть ∂M — граница множества M, ориентированная соответствующим ориентации M способом, Пусть $\left\{f, \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right\} \subset C(M)$. Тогда*

$M = \bigcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$

$$\int\limits_{M} \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} =$$
$$= \int\limits_{\partial M} f\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1}. \qquad (7)$$

Полученную формулу (7) можно записать в иной форме. Предположим, что $\{f_1, \ldots, f_m\} \subset C^1(M)$. Положим в (7) $f = f_k$ и затем сложим все полученные равенства, получим

$$\int\limits_{M} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} =$$
$$= \int\limits_{\partial M} \sum_{k=1}^{m} f_k\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1}. \qquad (8)$$

Пусть

$$\omega := \sum_{k=1}^{m} f_k\, dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1}$$

— дифференциальная форма степени $m-1$ на ∂M — $(m-1)$-мерном многообразии. Тогда внешний дифференциал ω равен

$$d\omega = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1}.$$

Поэтому формулу (8) можно записать в виде

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \tag{9}$$

Полученное равенство представляет собой специальный случай общей формулы Стокса.

15.4.2 Частные случаи

Формула (9) п. 15.4.1 представляет собой интересный результат, охватывающий ряд классических утверждений анализа.

I. Формула Ньютона-Лейбница. Определим 0-кратный интеграл от функции f по 0-мерному множеству, состоящему из одной точки $\{a\}$, как $f(a)$. Пусть отрезок $[a,b] = M$ лежит в положительном x-пространстве $\boldsymbol{R}$, функция $f \in C^1([a,b])$ и $\omega = f$ — дифференциальная форма степени 0 на $[a,b]$. В этом случае $\partial M = \{a,b\}$, причём $\partial^- M = \{a\}$, $\partial^+ M = \{b\}$.

Кроме того, $d\omega = f'dx$ и формула (9) принимает вид

$$\int_M d\omega = \int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a) = \int_{\partial M} f.$$

Это равенство представляет собой формулу Ньютона-Лейбница.

II. Формула Грина. Пусть M — множество, которое является объединением конечного числа прямоугольников — брусов в положительном (x_1, x_2)-пространстве. При этом ∂M есть объединение конечного числа отрезков, а ориентацию ∂M, соответствующую ориентации M, можно интерпретировать как задание обхода ∂M в таком направлении, что ближайшая часть множества M остаётся слева, если смотреть на плоскость сверху.

Пусть $\{P, Q\} \subset C^1(M)$ и $\omega = P\, dx_1 + Q\, dx_2$ — дифференциальная форма первой степени с внешним дифференциалом

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2.$$

В этом случае формулу (9) п. 15.4.1 можно записать в виде

$$\int\limits_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial M} (P\,dx_1 + Q\,dx_2). \tag{1}$$

Это равенство называется ***формулой Грина.*** Интеграл в левой части (1) есть двойной интеграл по M от непрерывной функции, а интеграл в правой части (1) есть криволинейный интеграл второго рода по границе ∂M, ориентированной указанным выше способом.

Замечание. Для отрицательного (x_1, x_2)-пространства интеграл в левой части формулы (1) следует взять со знаком "$-$", а интеграл правой части рассматривать по ∂M с противоположной ориентацией.

III. Формула Гаусса-Остроградского. Предположим, что множество M является объединением конечного числа брусов в положительном (x_1, x_2, x_3)-пространстве. При этом ∂M есть объединение конечного числа прямоугольников, а ориентацию ∂M можно интерпретировать как выбор внешней стороны поверхности ∂M. Пусть $\{P, Q, R\} \subset C^1(M)$. Для дифференциальной формы второй степени

$$\omega = P(\vec{x})\,dx_2 \wedge dx_3 + Q(\vec{x})\,dx_3 \wedge dx_1 + R(\vec{x})\,dx_1 \wedge dx_2$$

с внешним дифференциалом

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

формулу 9 п. 15.4.1 можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\int\limits_M \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &\quad = \int\limits_{\partial M} (P\,dx_2 \wedge dx_3 + Q\,dx_3 \wedge dx_1 + R\,dx_1 \wedge dx_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Равенство (2) называется ***формулой Гаусса-Остроградского.*** Интеграл в левой части (2) есть тройной интеграл по M от непрерывной функции, а интеграл правой части (2) есть поверхностный интеграл второго рода от формы ω по внешней стороне поверхности ∂M.

Замечание. В случае отрицательного (x_1, x_2, x_3)-пространства интеграл в левой части (2) следует взять со знаком "$-$", а интеграл в правой части рассматривать по внутренней стороне ∂M.

Пример. Пусть $\{\varphi, \psi\} \subset C^1(M)$. В формуле Грина положим $P = 0$, $Q = \varphi\psi$, получим $\int\limits_M \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial M} \varphi\psi\,dx_2$, откуда

$$\int\limits_M \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\,dx_1 dx_2 = -\int\limits_M \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\,dx_1 dx_2 + \int\limits_{\partial M} \varphi\psi\,dx_2. \tag{3}$$

Аналогично

$$\int\limits_M \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\,dx_1 dx_2 = -\int\limits_M \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\,dx_1 dx_2 + \int\limits_{\partial M} \varphi\psi\,dx_1. \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) являются для кратных интегралов аналогами одномерной формулы интегрирования по частям. Эти формулы допускают различные обобщения. Например, если $\{\varphi, \psi\} \subset C^s(M)$, $p+q=s$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, то

$$\int\limits_M \varphi \frac{\partial^s \psi}{\partial x_1^p \partial x_2^q}\, dx_1 dx_2 = (-1)^s \int\limits_M \psi \frac{\partial^s \varphi}{\partial x_1^p \partial x_2^q}\, dx_1 dx_2 +$$
$$+ \int\limits_{\partial M} \left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^k} \frac{\partial^{s-k-1}\psi}{\partial x_1^{p-k-1} \partial x_2^q}\, dx_2 - \right. \tag{5}$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{p+k} \frac{\partial^{p+1+k}\varphi}{\partial x_1^p \partial x_2^{1+k}} \frac{\partial^{q-k-1}\psi}{\partial x_2^{q-k-1}}\, dx_1 \right).$$

С помощью формулы Гаусса-Остроградского легко получить аналоги формул (3) — (5) для тройных интегралов.

Упражнение 20. Пусть $\{\varphi, \psi\} \subset C^2(M)$ и $\Delta\varphi := \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}$. Доказать следующую ***формулу Грина:*** $\int\limits_M (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, dx_1 \wedge dx_2 =$

$$= \int\limits_{\partial M} \left(\left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) dx_2 + \left(-\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) dx_1 \right).$$

Упражнение 21. Пусть $(x_1, \ldots, x_m)$-пространство положительно и

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{(m-1)(k-1)} x_k dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_m \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1}.$$

Доказать для меры $m(M)$ множества M следующую полезную формулу $m(M) = \dfrac{1}{m} \int\limits_{\partial M} \omega$. Записать полученную формулу для $m = 2$, $m = 3$.

15.5 Общая формула Стокса

15.5.1 Вывод формулы Стокса

Формула (9) п. 15.4.1 была доказана для множества M, которое является объединением конечного числа брусов в R^m, и дифференциальной формы степени $m-1$. Эта формула допускает обобщение на случай произвольной формы на многообразии более общего вида.

Пусть T — объединение конечного числа брусов в $(t_1, \ldots, t_{p+1})$-пространстве R^{p+1}. Пусть T — ориентированное множество и ∂T — граница T, ориентированная соответствующим ориентации множества T образом.

Пусть $p < m$ и $\{u_1, \ldots, u_m\} \subset C^2(T)$. Множество

$$M = \vec{u}(T) = \{(u_1(\vec{t}), \ldots, u_m(\vec{t})) \mid \vec{t} \in T\}$$

есть $(p+1)$-мерное ориентированное многообразие в $(x_1, \ldots, x_m)$-пространстве R^m. Множество $\vec{u}(\partial T)$ называется ***ориентированной границей*** многообразия M, $\vec{u}(\partial T)$ — ориентированное многообразие размерности p в R^m.

Теорема 2. *(Общая формула Стокса.) Пусть функции* $\{f_1, \ldots, f_q\} \subset C^1(M)$ *и*

$$\omega = f_1(\vec{x})\, dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} + \ldots + f_q(\vec{x})\, dx_{\mu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu(p)}$$

— дифференциальная форма степени p. Тогда

$$\int\limits_{\vec{u}(T)} d\omega = \int\limits_{\vec{u}(\partial T)} \omega. \tag{1}$$

⌈ Согласно определению интеграла по многообразию, доказательство достаточно провести для формы вида $\omega = f(\vec{x})\, dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)}$, внешний дифференциал которой равен $d\omega = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)}$.

На основании определения интеграла по многообразию, для интеграла из левой части (1) имеем

$$\int\limits_{\vec{u}(T)} d\omega = \int\limits_{\vec{u}(T)} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} = \tag{2}$$

$$= \int\limits_{T} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial(x_k, x_{\nu(1)}, \ldots, x_{\nu(p)})}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_{p+1})}\, dt_1 \wedge dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_{p+1}.$$

С помощью разложения якобиана в (2) по элементам первой строки

$$\frac{\partial(x_k, x_{\nu(1)}, \ldots, x_{\nu(p)})}{\partial(t_1, t_2, \ldots, t_{p+1})} = \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \frac{\partial(x_{\nu(1)}, x_{\nu(2)}, \ldots, x_{\nu(p)})}{\partial(t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_{p+1})},$$

а также формулы для вычисления производной сложной функции $\sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \dfrac{\partial x_k}{\partial t_j} = \dfrac{\partial f}{\partial t_j}$, равенство (2) запишем в следующем виде $\int\limits_{\vec{u}(T)} d\omega =$

$$= \int\limits_{T} \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} \frac{\partial f}{\partial t_j} \frac{\partial(x_{\nu(1)}, x_{\nu(2)}, \ldots, x_{\nu(p)})}{\partial t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_{p+1})}\, dt_1 \wedge dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_{p+1}. \tag{3}$$

Для интеграла в правой части (1) на основании определения интеграла по многообразию получим такое равенство $\int\limits_{\vec{u}(\partial T)} \omega = \sum\limits_{k=1}^{p+1} \int\limits_{\vec{u}(\partial_k T)} \omega =$

$$\sum_{k=1}^{p+1} \int\limits_{\partial_k T} f \frac{\partial(x_{\nu(1)}, x_{\nu(2)}, \ldots, x_{\nu(p)})}{\partial(t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_{p+1})}\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{k-1} \wedge dt_{k+1} \ldots \wedge dt_{p+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} \int\limits_{\partial T} f \frac{\partial(x_{\nu(1)}, x_{\nu(2)}, \ldots, x_{\nu(p)})}{\partial(t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_{p+1})}\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{k-1} \wedge dt_{k+1} \ldots \wedge dt_{p+1} =$$

$$= \int\limits_{\partial T} \tilde{\omega}, \tag{4}$$

где

$$\tilde{\omega} := \sum_{k=1}^{p+1} f \frac{\partial(x_{\nu(1)}, x_{\nu(2)}, \dots, x_{\nu(p)})}{\partial(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_{p+1})} \, dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1} \wedge dt_{k+1} \wedge \dots \wedge dt_{p+1}$$

— дифференциальная форма степени p с внешним дифференциалом

$$d\tilde{\omega} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{p+1} \frac{\partial}{\partial t_j} \left(f \frac{\partial(x_{\nu(1)}, x_{\nu(2)}, \dots, x_{\nu(p)})}{\partial(t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_{p+1})} \right) \times$$

$$\times dt_j \wedge dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1} \wedge dt_{k+1} \dots \wedge dt_{p+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial t_j} \left(f \frac{\partial(x_{\nu(1)}, x_{\nu(2)}, \dots, x_{\nu(p)})}{\partial(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_{p+1})} \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{p+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial t_j} \frac{\partial(x_{\nu(1)}, x_{\nu(2)}, \dots, x_{\nu(p)})}{\partial(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_{p+1})} \, dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{p+1}, \tag{5}$$

поскольку форма

$$\tilde{\tilde{\omega}} := \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial t_j} \frac{\partial(x_{\nu(1)}, x_{\nu(2)}, \dots, x_{\nu(p)})}{\partial t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_{p+1})} \, dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{p+1} = 0.$$

Действительно,

$$\tilde{\tilde{\omega}} := \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial\left(x_{\nu(1)}, \dots, \frac{\partial x_{\nu(k)}}{\partial t_j}, \dots, x_{\nu(p)}\right)}{\partial t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_{p+1})} \, dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{p+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{j-1} (-1)^{k+s} \frac{\partial^2 x_{\nu(k)}}{\partial t_s \partial t_j} \frac{\partial(x_{\nu(r)}, r \neq k)}{\partial(t_r, r \neq s, r \neq j)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=j+1}^{p+1} (-1)^{k+s-1} \frac{\partial^2 x_{\nu(k)}}{\partial t_s \partial t_j} \frac{\partial(x_{\nu(r)}, r \neq k)}{\partial(t_r, r \neq s, r \neq j)} \right) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{p+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{s=1}^{j-1} \left((-1)^{j+s-1} \frac{\partial^2 x_{\nu(k)}}{\partial t_s \partial t_j} + (-1)^{j+s} \frac{\partial^2 x_{\nu(k)}}{\partial t_j \partial t_s} \right) \times$$

$$\times \frac{\partial(x_{\nu(r)}, r \neq k)}{\partial(t_r, r \neq s, r \neq j)} \, dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{p+1} = 0.$$

Применим теперь к множеству T и дифференциальной форме $\tilde{\omega}$ формулу (9) п. 15.4.1 $\int\limits_{\partial T} \tilde{\omega} = \int\limits_{T} d\tilde{\omega} =$

$$= \int\limits_{T} \sum_{j=1}^{p+1} \frac{\partial f}{\partial t_j} \frac{\partial(x_{\nu(1)}, x_{\nu(2)}, \dots, x_{\nu(p)})}{\partial(t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_{p+1})} \, d_1 \wedge \dots \wedge dt_{p+1}. \tag{6}$$

Из формул (3), (4) и (6) следует равенство $\int\limits_{\vec{u}(T)} d\omega = \int\limits_{\vec{u}(\partial T)} \omega.$ ⌋

Заметим, что частные случаи (1) и (2) п. 15.4.2 также справедливы для $\vec{u}(T)$ и $\partial M = \vec{u}(\partial T)$.

15.5.2 Следствия из общей формулы Стокса

I. При $m = 2$ и $p = 1$ $\vec{u}(T) = M$ — множество точек плоскости, а $\vec{u}(\partial T) =: \Gamma$ — кривая или набор кривых, ограничивающих множество M. Предположим также, что на множестве $T \setminus \Phi$ отображение $\vec{u}$ взаимно однозначно и $\dfrac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)} \neq 0$, $m(\Phi) = 0$; $\omega = P\,dx_1 + Q\,dx_2$. Пусть $\{P, Q\} \subset C^1(M)$. Предположим, что x-пространство положительно. Тогда формула Стокса имеет вид

$$\int\limits_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 = \int\limits_\Gamma (P\,dx_1 + Q\,dx_2).$$

Это равенство называется ***формулой Грина.*** Интеграл в левой части формулы есть двойной интеграл по M, а интеграл в правой части — криволинейный интеграл второго рода по Γ, пробегаемой в таком направлении, что ближайшая часть M остаётся слева.

Положив $P = -x_2$, $Q = x_1$ в формуле Грина, получаем следующее выражение для площади — меры Жордана $m(M) = \dfrac{1}{2} \int\limits_\Gamma (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$.

II. Пусть $m = 3$, $p = 2$. Допустим, что на множестве $T \setminus \Phi$ отображение $\vec{u}$ взаимно однозначно и

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} \neq 0, \quad m(\Phi) = 0; \quad \omega = P\,dx_2 \wedge dx_3 + Q\,dx_3 \wedge dx_1 + R\,dx_1 \wedge dx_2.$$

Предположим, что функции $\{P, Q, R\} \subset C^1(M)$ для $M = \vec{u}(T)$, и что x-пространство положительно, а $S := \vec{u}(\partial T)$. Тогда формула Стокса принимает вид

$$\int\limits_M \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \int\limits_S (P\,dx_2 \wedge dx_3 + Q\,dx_3 \wedge dx_1 + R\,dx_1 \wedge dx_2).$$

Полученная формула называется ***формулой Гаусса-Остроградского.*** Интеграл в левой части этой формулы — тройной интеграл по M, а интеграл правой части — поверхностный интеграл второго рода по внешней стороне поверхности S.

Положив в формуле Гаусса-Остроградского $P = x_1$, $Q = x_2$, $R = x_3$, получим формулу

$$m(M) = \frac{1}{3} \int\limits_S (x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2),$$

позволяющую вычислять объём с помощью поверхностных интегралов второго рода.

III. Пусть $m = 3$, $p = 1$. При этом $S := \vec{u}(T) = \{(u_1(t_1,t_2), u_2(t_1,t_2), u_3(t_1,t_2)) \mid (t_1,t_2) \in T\}$ — поверхность в R^3, а $\Gamma := \vec{u}(\partial T)$ — край поверхности S. Обычно Γ — кривая или набор кривых. Для дифференциальной формы первой степени $\omega = P\,dx_1 + Q\,dx_2 + R\,dx_3$ внешний дифференциал определён в п. 15.3.1. В этом случае общая формула Стокса принимает вид

$$\int_\Gamma (P\,dx_1 + Q\,dx_2 + R\,dx_3) = \int_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2\right).$$

Это равенство есть классическая ***формула Стокса.***

Упражнение 22. Вычислить площадь круга с помощью криволинейного интеграла.

Упражнение 23. Вычислить объём шара с помощью поверхностного интеграла.

Упражнение 24. Вычислить интеграл $\int_\Gamma \left(\frac{x_1}{r^2}\,dx_2 - \frac{x_2}{r^2}\,dx_1\right)$, где Γ — пробегаемая против часовой стрелки окружность радиуса 1 с центром в точке $(0,0)$ и $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Предостережение. Формулу Грина к кругу, ограниченному Γ, применить нельзя.

Упражнение 25.* Пусть $A = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ и $f \in C^2(A)$. Вычислить предел

$$\lim_{n\to} \left(n\left(\int_A f(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 - \frac{1}{n^2} \sum_{k^2+j^2 \le n^2} f\left(\frac{k}{n}, \frac{j}{n}\right)\right)\right).$$

15.6 Криволинейный интеграл от формы первой степени

15.6.1 Криволинейный интеграл второго рода от дифференциала

Пусть $G \subset R^m$ — открытое множество.

Определение 1. *Определённая на G дифференциальная форма ω называется точной на G, если она является внешним дифференциалом некоторой формы в G.*

Пример. Важиым примером точной формы первой степени является дифференциал функции $g \in C^1(G)$

$$\omega = dg = \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_m}\,dx_m.$$

Криволинейный интеграл от дифференциала обладает следующим простым, но важным свойством.

Теорема 3. *Пусть функция $g \in C^1(G)$ и $\Gamma = \{\vec{u}(t) \mid t \in [a,b]\} \subset G$ — кусочно-гладкая кривая в G, причём отрезок $[a,b]$ лежит в положительном t-пространстве. Тогда*

$$\int\limits_\Gamma dg = \int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_m}\,dx_m\right) = g(\vec{u}(b)) - g(\vec{u}(a)). \qquad (1)$$

⌈ Согласно определению криволинейного интеграла второго рода, имеем следующее равенство

$$\int\limits_\Gamma dg = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial g(\vec{u}(t))}{\partial x_1}\,\frac{du_1(t)}{dt} + \ldots + \frac{\partial g(\vec{u}(t))}{\partial x_m}\,\frac{du_m(t)}{dt}\right) dt =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{d}{dt}\,g(\vec{u}(t))\,dt = g(\vec{u}(b)) - g(\vec{u}(a)).$$ ⌋

Замечание. При условии теоремы 3 ориентацию Γ можно интерпретировать как задание движения по Γ, соответствующего возрастанию параметра t. При этом $\vec{u}(a)$ и $\vec{u}(b)$ — соответственно начало и конец кривой Γ. В случае, когда $\omega = dg$ в G, теорема 3 утверждает, что криволинейный интеграл $\int\limits_\Gamma dg$ по кривой Γ в G зависит только от начала $\vec{u}(a)$ и конца $\vec{u}(b)$ кривой Γ. При этом говорят, что интеграл $\int\limits_\Gamma dg$ ***не зависит от пути интегрирования.***

*Определение 2. Кусочно-гладкая кривая $\Gamma = \{\vec{u}(t) \mid t \in [a,b]\}$ называется **замкнутой**, если $\vec{u}(a) = \vec{u}(b)$ (т. е. если начало и конец кривой совпадают).*

Следствие 1. Если $g \in C^1(G)$ и Γ — кусочно-гладкая замкнутая кривая в G, то $\int\limits_\Gamma dg = 0$.

⌈ Доказательство следует из формулы (1). ⌋

15.6.2 Замкнутые дифференциальные формы. Односвязные множества

*Определение 3. Дифференциальная форма ω, определённая на открытом множестве $G \subset R^m$, с коэффициентами из класса $C^1(G)$ называется **замкнутой** в G, если $d\omega = 0$ в G.*

Примеры. 1. Пусть $g \in C^2(G)$ и $\omega = dg$. Форма $\omega = dg$ — замкнута в G, поскольку, согласно теореме Пуанкаре, $d\omega = d(d\omega) = 0$.

2. Пусть при $m = 2$, $\{P, Q\} \subset C^1(G)$ и
$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial x_2}, \quad (x_1, x_2) \in G. \tag{1}$$
Для формы первой степени $\omega = P\,dx_1 + Q\,dx_2$ внешний дифференциал при условии (1) равен
$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 = 0.$$
Следовательно, ω — замкнутая форма. Заметим, что условие (1) необходимо для замкнутости формы ω.

3. Пусть $m = 3$, $\{P, Q, R\} \subset C^1(G)$, причём на множестве G выполняются равенства
$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial P}{\partial x_3} = \frac{\partial R}{\partial x_1}. \tag{2}$$
Форма первой степени $\omega = P\,dx_1 + Q\,dx_2 + R\,dx_3$ при условиях (2) замкнута, поскольку
$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 +$$
$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 = 0.$$
Условия (2) необходимы для замкнутости формы ω в G.

4. Точная дифференциальная форма первой степени с коэффициентами из класса $C^1(G)$ является замкнутой, согласно теореме Пуанкаре.

Пусть $\Gamma = \{\vec{u}(t) \mid t \in [a, b]\}$ — кривая в R^m.

*Определение 4. Кривая Γ называется **кусочно дважды непрерывно дифференцируемой,** если Γ непрерывна и отрезок $[a, b]$ можно представить в виде объединения в конечном числе отрезков $[\alpha, \beta]$ таких, что $\vec{u} \in C^2([\alpha, \beta])$ (в точках α и β рассматриваются соответствующие односторонние производные).*

В этом разделе далее под замкнутой кривой будем подразумевать замкнутую кусочно дважды непрерывно дифференцируемую кривую.

*Определение 5. Пусть $M \subset R^m$, $\Gamma = \{\vec{u}(t) \mid t \in [a, b]\}$ — замкнутая кривая в M. Замкнутая кривая Γ **гомотопна точке** в M, если для множества $D := [a, b] \times [0, 1]$ существуют точка $\vec{x}_0 \in M$ и функция $\vec{\varphi} \in C(D, R^m)$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) $\forall\,(t, \alpha) \in D: \ \vec{\varphi}(t, \alpha) \in M$; 2) $\forall\, t \in [a, b]: \ \vec{\varphi}(t, 0) = \vec{u}(t)$, $\vec{\varphi}(t, 1) = \vec{x}_0$; 3) $\forall\,\alpha \in [0, 1]: \ \vec{\varphi}(a, \alpha) = \vec{\varphi}(b, \alpha)$; 4) $\exists\, a = t_0 < t_1 < \ldots < t_s = b \quad \forall\, k, 0 \le k \le s - 1 \ : \ \vec{\varphi} \in C^2(D_k, R^m)$, $\quad D_k := [t_k, t_{k+1}] \times [0, 1]$.*

Определение 6. *Множество M называется* ***линейно связным,*** *если для любых его двух точек существует непрерывная кривая, лежащая в M и соединяющая эти точки. Множество называется* ***односвязным,*** *если оно линейно связно и любая замкнутая кривая, лежащая в M, гомотопна точке в M.*

Примеры. 1. Множество $M \subset \boldsymbol{R}^m$ называется ***звёздным*** относительно точки $\vec{x}_0$, если для любой точки $\vec{x} \in M$ следующий отрезок $\{\vec{x}_0 + \tau(\vec{x} - \vec{x}_0) \mid \tau \in [0,1]\} \subset M$. Звёздное множество односвязно, причём $\vec{\varphi}(t,\alpha) = \alpha\vec{x}_0 + (1-\alpha)\vec{u}(t)$, $(t,\alpha) \in D$.

2. Множество $M = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 \le 1\} \subset \boldsymbol{R}^2$ не является односвязным.

Теорема 4. *Пусть M — односвязное множество в $\boldsymbol{R}^m$, ω — замкнутая дифференциальная форма первой степени с коэффициентами из класса $C^1(M)$. Тогда для любой замкнутой кривой Γ, лежащей в M, $\int\limits_\Gamma \omega = 0$.*

⌈ Кривая $\Gamma = \{\vec{u}(t) \mid t \in [a,b]\}$ гомотопна точке в M. Пусть $\vec{\varphi}:\ D \to \boldsymbol{R}^m$ — соответствующее отображение из определения 5. Множество $\vec{\varphi}(D)$ — двумерное многообразие, т. е. поверхность в $\boldsymbol{R}^m$, лежащая в M; $\vec{\varphi}(D)$ естественно интерпретировать как поверхность, натянутую на контур Γ. Предположим, что (t,α)-пространство положительно для D и для каждого $\{D_k\}$ из определения 5. Для каждого k, $0 \le k \le s-1$, рассмотрим соответствующую ориентацию границы ∂D_k. Любой отрезок $\{(t,\alpha) \mid t = t_k,\ \alpha \in [0,1]\}$, $1 \le k \le s-1$, ориентирован положительно в качестве части ∂D_{k-1} и ориентирован отрицательно в качестве части ∂D_k. При каждом k, $0 \le k \le s-1$, к ориентированному многообразию $\vec{\varphi}(D_k)$ и дифференциальной форме ω применима теорема Стокса $\int\limits_{\vec{\varphi}(D_k)} d\omega = \int\limits_{\vec{\varphi}(\partial D_k)} \omega$. В полученном равенстве левая часть равна нулю.

$\int\limits_{\Gamma_i}\omega + \int\limits_{\vec{\varphi}(\partial D_i)\setminus\Gamma_i}\omega = 0$ – [illegible]

Складывая правые части и используя аддитивность криволинейного интеграла по множеству интегрирования, получим

$$0 = \sum_{k=0}^{s-1} \int\limits_{\vec{\varphi}(\partial D_k)} \omega = \int\limits_{\vec{\varphi}(\partial D)} \omega = \int\limits_\Gamma \omega. \qquad \rfloor$$

Следствие 2. *При условиях теоремы 4 криволинейный интеграл второго рода от формы ω не зависит от кривой — пути интегрирования, лежащей в M. Точнее, для любых двух кусочно дважды непрерывно дифференцируемых кривых Γ_1 и Γ_2, лежащих в M и таких, что они имеют общее начало и общий конец, справедливо равенство $\int\limits_{\Gamma_1} \omega = \int\limits_{\Gamma_2} \omega$.*

⌈ Доказательство следует из теоремы 4, которую с учётом ориентации нужно применить к кривой $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. ⌋

Следствие 3. Теорема 4 справедлива для точной формы $\omega = dg$, $g \in C^2(M)$.

Замечание. Очевидно также следующее утверждение. Если для множества M и формы ω криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega = 0$ для любой замкнутой кривой $\Gamma \subset M$, то криволинейный интеграл от ω не зависит от пути интегрирования.

Теорема 5. *Пусть M — открытое односвязное множество в R^m и $\omega = f_1(\vec{x})\,dx_1 + \ldots + f_m(\vec{x})\,dx_m$ — дифференциальная форма первой степени, коэффициенты которой $\{f_1, \ldots, f_m\} \subset C^1(M)$. Для того, чтобы форма ω была точной на M, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \vec{x} \in M \quad \forall k, j,\, 1 \le k, j \le m \ : \quad \frac{\partial f_k(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_k}. \tag{3}$$

⌈ Необходимость. Если ω — точная форма, то существует функция g такая, что на M имеем $\omega = dg = f_1\,dx_1 + \ldots + f_m\,dx_m$. Тогда $f_k = \dfrac{\partial g}{\partial x_k}$, $1 \le k \le m$, на M. Поскольку, согласно условию, $\{f_1, \ldots, f_m\} \subset C^1(M)$, то $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j} \in C(M)$, $1 \le k, j \le m$. Тогда на M справедливо равенство $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k}$, откуда $\dfrac{\partial f_k(\vec{x})}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_k}$, $1 \le k, j \le m$.

Заметим, что при доказательстве необходимости односвязность множества M не использовалась.

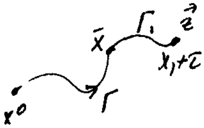
Достаточность. Из условий (3) теоремы 5 следует, что $d\omega = 0$ на M. Поэтому для формы ω справедливо утверждение теоремы 4, из которого следует, что криволинейный интеграл от ω не зависит от пути интегрирования в M. Пусть $\vec{x}_0$ — произвольная фиксированная точка M и для точки $\vec{x} \in M$ пусть $\Gamma(\vec{x})$ — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая кривая с началом $\vec{x}_0$ и концом $\vec{x}$, лежащая в M. Рассмотрим функцию $g : M \to R$, определённую таким равенством $g(\vec{x}) := \int\limits_{\Gamma(\vec{x})} \omega$, $\vec{x} \in M$, заметим, что для каждого $\vec{x} \in M$ значение $g(\vec{x})$ не зависит от вида кривой $\Gamma(\vec{x})$.

Докажем, что $\omega = dg$, т. е. что $\dfrac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_k} = f_k(\vec{x})$, $\vec{x} \in M$, $1 \le k \le m$.
из-за открытости
Рассмотрим точки вида $\vec{z} = (x_1 + \tau, x_2, \ldots, x_m)$, лежащие в M при всех τ, $|\tau| < \delta$, где δ — некоторое положительное число, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$. Пусть $\Gamma_1 = \{(x_1 + t\tau, x_2, \ldots, x_m) \mid t \in [0, 1]\}$ — кривая — отрезок прямой

с началом в точке $\vec{x}$ и концом в точке $\vec{z}$. Для $\Gamma(\vec{z}) := \Gamma(\vec{x}) \cup \Gamma_1$ и $\tau \neq 0$ имеем можно выбрать, т.к. нез. от пути ин

$$\frac{g(\vec{z}) - g(\vec{x})}{\tau} = \frac{g(x_1 + \tau, x_2, \ldots, x_m) - g(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\tau} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\Big(\int\limits_{\Gamma(\vec{x})\cup\Gamma_1} \omega - \int\limits_{\Gamma(\vec{x})} \omega\Big) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{\Gamma_1} \omega =$$



$$= \frac{1}{\tau}\int\limits_0^1 f_1(x_1 + t\tau, x_2, \ldots, x_m)\underbrace{\tau\, dt}_{\text{замен.}} = \int\limits_0^1 f_1(x_1 + t\tau, x_2, \ldots, x_m)\, dt.$$

Отсюда с помощью теоремы о среднем значении и предельного перехода приходим к равенству $\dfrac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_1} = f_1(\vec{x})$. Дальнейшие рассуждения аналогичны. $f_1 \in C(M) \overset{\text{средн.}}{=} f_1(x_1+\theta\cdot\tau_1)\cdot 1 \xrightarrow[\tau\to 0]{} f_1(x_1,\ldots x_k)$ $\tau>0$, $\tau<0$]

Часто оказывается полезной следующая теорема, содержащаяся в приведенных выше утверждениях.

Теорема 6. *Для того чтобы криволинейный интеграл от формы $\omega = f_1\,dx_1 + \ldots + f_m\,dx_m$, $\{f_1, \ldots, f_m\} \subset C^1(M)$, не зависел от пути интегрирования в односвязном открытом множестве M, необходимо и достаточно выполнение условий* (3).

Упражнение 26. Форма $\omega = \sin x_2^2\,dx_1 + 2x_1x_2\cos x_2^2\,dx_2$ точна в R^2. Доказать это утверждение и найти функцию g, для которой $\omega = dg$.

Упражнение 27. Доказать, что следующая форма

$$\omega = f_1(x_1)\,dx_1 + f_2(x_2)\,dx_3 + f_1(x_3)\,dx_3, \quad \{f_1, f_2, f_3\} \subset C(R),$$

точна в R^3. Найти g, для которой $\omega = dg$.

Упражнение 28. При каком условии на функцию f форма $\omega = f(x_1, \ldots, x_m)\,dx_1$ замкнута?

Упражнение 29. На множестве $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ для следующей формы $\omega = \dfrac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{x_1^2 + x_2^2}$ вычислить $d\omega$. Вычислить также интеграл от ω :

1) по замкнутой кривой, не охватывающей точку $(0,0)$;
2) по замкнутой кривой, охватывающей точку $(0,0)$.

Упражнение 30. Доказать, что множество $\{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ не односвязно.

Упражнение 31. Является ли вектор $(-x_2, x_1, x_3)$ градиентом некоторой функции в R^3?

15.7 Мера на многообразии

15.7.1 Частный случай многообразия — гиперплоскость в R^m

Напомним, что многообразиями размерности p в R^m называют подмножества R^m такие, которые в малом подобны или близки пространству R^p. При $p = 1$ это гладкая кривая, которая в малом подобна прямой, при $p = 2$ это гладкая поверхность, которая в малом подобна плоскости и т. п.

Цель настоящего раздела состоит в том, чтобы ввести понятие меры многообразия размерности p в R^m, которое бы при $p = 1$ было обобщением длины кривой, при $p = 2$ — площади поверхности. Это новое понятие удобно рассмотреть сначала для случая, когда многообразие размерности p есть гиперплоскость в R^m.

Пусть $T = R^p$, $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_m) : T \to R^m$, причём

$$u_k(\vec{t}) = x_k(\vec{t}) = \sum_{j=1}^{p} a_{kj}t_j + a_{k0}, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \quad \vec{t} = (t_1, \ldots, t_p) \in R^p,$$

и a_{kj}, $1 \le k \le m$, $0 \le j \le p$ — фиксированные числа из R. p-мерное многообразие $M := \vec{u}(R^P)$ есть гиперплоскость в R^m. Предположим, что M собственно p-мерно, т. е. что матрица $(a_{kj})_{k=1,j=1}^{m\ \ p}$ имеет ранг p. Далее предполагается, что $p < m$.

Каждое измеримое множество $A \subset M$ имеет m-мерную меру Жордана 0. Однако, M есть гиперплоскость размерности p, и для её подмножеств можно рассматривать p-мерную меру Жордана. Построим в M систему координат следующим образом. Пусть $\vec{t}^{\,0} = (t_1^0, \ldots, t_p^0)$ — фиксированная точка из T и $\vec{x}^{\,0} = \vec{u}(\vec{t}^{\,0}) = (x_1^0, \ldots, x_m^0) \in M$ — её образ на M. Каждой точке $\vec{x} \in M$ поставим в соответствие вектор $\vec{r} := \vec{x} - \vec{x}^{\,0}$. Из-за предположения собственной p-мерности M множество $H := \{\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}^{\,0} \mid \vec{x} \in M\}$ содержит p линейно независимых векторов и является p-мерным линейным пространством. Если рассмотреть некоторый ортонормированный базис в H, то для определённого класса подмножеств H можно определить p-мерную меру Жордана. Согласно следствию 7 п. 14.4.6 значения этой меры не будут зависеть от выбора точки $\vec{x}^{\,0}$ и базиса в H. Нас интересует связь между значением меры Жордана измеримого множества $A \subset T = R^p$ и значением меры множества $\vec{u}(A)$ на многообразии M.

Построим в H специальный базис, используя то, что, согласно предположению, p векторов $\vec{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$, $1 \le j \le p$, линейно независимы. Сначала заметим, что

$$\forall \vec{r} \in H : \quad \vec{r} = \vec{x} - \vec{x}^{\,0} = \sum_{j=1}^{p} \vec{a}_j(t_j - t_j^0). \tag{1}$$

С помощью процесса ортогонализации Шмидта векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p$ можно ортонормировать. Положим

$$\vec{e}_1 := ||\vec{a}_1||^{-1}\vec{a}_1,$$

$$\vec{e}_2 := \left\|\vec{a}_2 - \left(\vec{a}_2, \frac{\vec{a}_1}{||\vec{a}_1||}\right)\frac{\vec{a}_1}{||\vec{a}_1||}\right\|^{-1}\left(\vec{a}_2 - \left(\vec{a}_2, \frac{\vec{a}_1}{||\vec{a}_1||}\right)\frac{\vec{a}_1}{||\vec{a}_1||}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Здесь $(\vec{a}, \vec{b})$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Получим ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p$, при этом

$$\vec{a}_j = d_{j1}\vec{e}_1 + d_{j2}\vec{e}_2 + \ldots + d_{jj}\vec{e}_j, \quad 1 \le j \le p.$$

Действительные числа d_{jk}, $1 \le k \le j \le p$ определяются известным образом по набору $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p$, причём $d_{jj} > 0$, $1 \le j \le p$. Для d_{11} и d_{22} имеем

$$d_{11} = ||\vec{a}_1||,$$

$$d_{22} = \left\|\vec{a}_2 - \frac{(\vec{a}_2, \vec{a}_1)}{||\vec{a}_1||^2}\vec{a}_1\right\| =$$

$$= \left(||\vec{a}_2||^2 - 2\frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{||\vec{a}_1||^2}(\vec{a}_1, \vec{a}_2) + \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)^2}{||\vec{a}_1||^4}||\vec{a}_1||^2\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{||\vec{a}_1||}\sqrt{||\vec{a}_1||^2||\vec{a}_2||^2 - (\vec{a}_1, \vec{a}_2)^2}. \tag{2}$$

Используя представление (1) для векторов из H, получаем следующее равенство

$$\vec{r} = \sum_{j=1}^{p} \vec{a}_j(t_j - t_j^0) = \sum_{k=1}^{p} s_k\vec{e}_k, \quad \vec{r} \in H, \tag{3}$$

в котором

$$\begin{array}{llll} s_1 = & d_{11}(t_1 - t_1^0) + & d_{21}(t_2 - t_2^0) + \ldots + & d_{p1}(t_p - t_p^0), \\ s_2 = & & d_{22}(t_2 - t_2^0) + \ldots + & d_{p2}(t_p - t_p^0), \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ s_p = & & & d_{pp}(t_p - t_p^0). \end{array} \tag{4}$$

Заметим, что якобиан преобразования от переменных $t_1, \ldots, t_p$ к переменным $s_1, \ldots, s_p$ равен

$$\rho = \frac{\partial(s_1, \ldots, s_p)}{\partial(t_1, \ldots, t_p)} = d_{11}d_{22}\ldots d_{pp} > 0. \tag{5}$$

В качестве координат точки $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}^0 = \vec{u}(\vec{t}) - \vec{u}(\vec{t}^0)$ в H ("внутренних" координат многообразия M) рассмотрим координаты $s_1, \ldots, s_p$, связанные с координатами точки $\vec{t}$ в T равенствами (4). Если F — измеримое подмножество $T = \boldsymbol{R}^p$ с p-мерной мерой $m(F)$, то образ $\vec{u}(F)$, лежащий на многообразии M, согласно формуле замены переменных, измерим и его p-мерная мера $m(\vec{u}(F))$ равна

$$m(\vec{u}(F)) = \int\limits_{\vec{u}(F)} 1\,ds_1 \dots ds_p = \int\limits_{\vec{s}(F)} 1\,ds_1 \dots ds_p =$$

$$= \int\limits_F \frac{\partial(s_1, \dots, s_p)}{\partial(t_1, \dots, t_p)}\, dt_1 \dots dt_p = \rho m(F). \qquad (6)$$

Таким образом, для измеримого множества $F \subset T$ с мерой $m(F)$ образ $\vec{u}(F)$ на многообразии M имеет меру, равную $\rho m(F)$. Поэтому величина ρ из формулы (5) называется *коэффициентом искажения меры.* Заметим, что допустимых координат $\tau_1, \dots, \tau_p$

$$t_k = \sum_{j=1}^{p} b_{kj}\tau_j + b_{k0}, \quad 1 \le k \le p,$$

для множества T значение коэффициента искажения $\tilde{\rho}$ связано со значением ρ следующим образом

$$\tilde{\rho} = \frac{\partial(s_1, \dots, s_p)}{\partial(\tau_1, \dots, \tau_p)} = \frac{\partial(s_1, \dots, s_p)}{\partial(t_1, \dots, t_p)} \frac{\partial(t_1, \dots, t_p)}{\partial(\tau_1, \dots, \tau_p)} = \rho \frac{\partial(t_1, \dots, t_p)}{\partial(\tau_1, \dots, \tau_p)}. \qquad (7)$$

15.7.2 Определение меры на многообразии

Пусть $T \subset R^p$; $\vec{u} \in C^1(T, R^m)$; $M := \vec{u}(T)$. Множество M — p-мерное многообразие. Предположим, что M собственно p-мерно на T.

При этих предположениях в окрестности любой точки $\vec{t}^0 \in T$ значения $\vec{u}(\vec{t})$ близки к значениям $\vec{v}(\vec{t})$ следующего отображения, рассмотренного в п. 15.7.1,

$$v_k(\vec{t}) := u_k(\vec{t}^0) + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial u_k(\vec{t}^0)}{\partial t_j}(t_j - t_j^0), \quad 1 \le k \le m. \qquad (8)$$

"Близость" состоит в том, что $||\vec{u}(\vec{t}) - \vec{v}(\vec{t})|| = o(||\vec{t} - \vec{t}^0||)$, $\vec{t} \to \vec{t}^0$. Если множество F лежит в окрестности точки $\vec{t}^0$, то образ $\vec{u}(F)$, лежащий на многообразии M, близок к образу $\vec{v}(F)$. Меру же образа $\vec{v}(F)$ можно определить так, как это было сделано в п. 15.7.1, и считать приближённым значением "меры" $\vec{u}(F)$. Точность такого "приближения" тем выше, чем меньшая окрестность точки $\vec{t}^0$ рассматривается. Замети ещё, что в преобразовании (8) роль чисел $\{a_{kj}\}$ играют числа

$$\frac{\partial u_k(\vec{t}^0)}{\partial t_j}, \quad 1 \le k \le m,\ 1 \le j \le p.$$

Замечание. Если $p = 1$, то M — кривая, а равенства (8) есть параметрические уравнения касательной к M в точке $\vec{u}(\vec{t}^0)$. Если $p = 2$, то M — поверхность, а равенства (8) есть параметрические уравнения касательной плоскости к M в точке $\vec{u}(\vec{t}^0)$.

После приведенных выше рассуждений становится понятным следующее формальное определение.

Для каждой точки $\vec{t} \in T$ пусть $a_{kj}(\vec{t}) = \dfrac{\partial u_k(\vec{t})}{\partial t_j}$, $1 \le k \le m$, $1 \le j \le p$; числа $d_{kj}(\vec{t})$, $1 \le j \le k \le p$, и $\rho(\vec{t})$ определены так, как в п. 15.7.1. В частности, числа $d_{11}(\vec{t})$, $d_{22}(\vec{t})$ определяются формулами (2). Значение $\rho(\vec{t})$ называется ***коэффициентом искажения меры в точке*** $\vec{t}$. Заметим, что $\rho \in C(T)$.

Определение 1. Пусть T — компактное измеримое множество в t-пространстве R^p и $\vec{u} \in C^1(T, R^m)$. Предположим, что p-мерное многообразие $M = \vec{u}(T)$ собственно p-мерно на T. ***p-мерной мерой p-мерного многообразия*** *M называется число*

$$m(M) := \int_T \rho(\vec{t})\, dt_1 \dots dt_p. \qquad (9)$$

Замечания. 1. Определённая формулой (9) мера многообразия M не зависит от допустимых координат для параметрического множества T. Действительно, для допустимых координат $\tau_1, \dots, \tau_p$ и $S = \vec{\tau}(T)$ с помощью формул замены переменных и (7) получим

$$\int_S \tilde{\rho}(\vec{\tau})\, d\vec{\tau} = \int_T \tilde{\rho}(\vec{\tau}(\vec{t}))\frac{\partial(\tau_1, \dots, \tau_p)}{\partial(t_1, \dots, t_p)}\, d\vec{t} = \int_T \rho(\vec{t})\, d\vec{t}.$$

2. Многообразие M может не быть в некоторых точках собственно p-мерным. Формула (9) относится к многообразию M такому, что для любой точки $\vec{t}$ либо M собственно p-мерно в точке $\vec{u}(\vec{t})$, либо в точке $\vec{t}$ существует предел $\lim\limits_{\vec{\tau} \to \vec{t}} \rho(\vec{\tau})$. Более того, условие собственной p-мерности, а также условия гладкости, могут не выполняться на подмножестве T с нулевой мерой, если $\vec{u}$ непрерывна и $\left\{\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t_k}\right\}$ непрерывны и ограничены на остальной части T.

Упражнение 32. Пусть T — компактное измеримое множество, $T = T_1 \cup T_2$, причём T_1, T_2 измеримы и $T_1^0 \cap T_2^0 = \varnothing$. Пусть $M = \vec{u}(T)$, $M_k = \vec{u}(T_k)$, $k = 1, 2$. Доказать, что $m(M) = m(M_1) + m(M_2)$.

15.7.3 Длина дуги

Пусть $p = 1$, $T = [a, b]$, $\vec{u} \in C([a, b], \boldsymbol{R}^m)$. Одномерное многообразие $\Gamma := \vec{(}[a, b])$ есть непрерывная кривая в $\boldsymbol{R}^m$. Предположим также, что $[a, b]$ можно представить в виде объединения конечного числа отрезков $[\alpha, \beta]$ таких, что $\vec{u} \in C^1([\alpha, \beta])$ (в точках α и β рассматриваются соответствующие односторонние производные).

В этом случае

$$a_{k1}(t) = a_k(t) = \frac{du_k(t)}{dt}, \quad 1 \le k \le m; \quad \|\vec{a}_1(t)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{du_k(t)}{dt}\right)^2};$$

и $\rho(t) = \|\vec{a}_1(t)\|$ для всех t на $[a, b]$, исключая, возможно, конечное число точек, в которых существует предел ρ. Заметим, что криаая Γ одномерна в тех точках t, в которых $\|\vec{a}_1(t)\| \neq 0$, т. е. в тех точках, в которых не обращаются в нуль одновременно все производные $u'_k(t)$, $1 \le k \le m$. Обратим также внимание на то, что для точки t_0 следующая функция $\vec{v}(t) = \vec{u}(t_0) + \vec{u}\,'(t_0)(t - t_0)$, $t \in R$, определяет касательную к кривой Γ в точке $\vec{u}(t_0)$.

Мера $l(\Gamma) := m(\Gamma)$ одномерного многообразия Γ называется ***длиной кривой*** Γ. Согласно формуле (9), имеем

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{du_k(t)}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{10}$$

Пример. Пусть $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t,\ x_3 = 2t;\ t \in [0, 2\pi]\}$, Γ — часть винтовой линии. Для длины кривой Γ имеем $l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 2^2}\, dt = 2\pi\sqrt{5}$.

15.7.4 Длина дуги как предел

Длина дуги может быть также определена как предел вписанных ломаных. Рассмотрим это определение при условиях п. 15.7.3. Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ — разбиение λ отрезка $[a, b]$, включающее точки, в которых $\vec{u}\,'$ не существует. В пространстве R^m рассмотрим точки $\vec{u}(t_0)$, $\vec{u}(t_1)$, $\ldots$, $\vec{u}(t_n)$, лежащие на кривой Γ. Соединим каждую пару точек $\vec{u}(t_k)$, $\vec{u}(t_{k+1})$ отрезком прямой, $0 \le k \le n-1$. Получим ломаную Γ_n, длина которой $l(\Gamma_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (u_j(t_{k+1}) - u_j(t_k))^2}$. Естественно следующее определение: если при $|\lambda| \to 0$ существует предел

$$\lim_{|\lambda| \to 0} l(\Gamma_n), \tag{11}$$

то кривая Γ называется ***спрямляемой***, а предел (11) называется ***длиной кривой*** Γ.

При предположениях о функции $\vec{u}$ с помощью теоремы Лагранжа легко доказать, что предел (11) существует и совпадает с интегралом (10).

15.7.5 Площадь поверхности

Пусть $p = 2$, T — компактное измеримое подмножество R^2, $\vec{u} \in C^1(T, R^m)$. Двумерное многообразие $S := \vec{u}(T)$ есть поверхность в R^m.

Предположим, что поверхность S собственно двумерна в точках T, т. е. что следующие векторы $\vec{a}_1(\vec{t}) = \left(\frac{\partial u_1(\vec{t})}{\partial t_1}, \frac{\partial u_2(\vec{t})}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial u_m(\vec{t})}{\partial t_1}\right)$ и $\vec{a}_2(\vec{t}) = \left(\frac{\partial u_1(\vec{t})}{\partial t_2}, \frac{\partial u_2(\vec{t})}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial u_m(\vec{t})}{\partial t_2}\right)$ линейно независимы для любого вектора $\vec{t} = (t_1, t_2) \in T$. Согласно формуле (5), в этом случае

$$\rho(\vec{t}) = \sqrt{||\vec{a}_1(\vec{t})||^2||\vec{a}_2(\vec{t})||^2 - (\vec{a}_1(\vec{t}), \vec{a}_2(\vec{t}))^2} = \sqrt{EG - F^2},$$

где

$$E := ||\vec{a}_1(\vec{t})||^2 = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u_k(\vec{t})}{\partial t_1}\right)^2; \quad G := ||\vec{a}_2(\vec{t})||^2 = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u_k(\vec{t})}{\partial t_2}\right)^2;$$

$$F := (\vec{a}_1(\vec{t}), \vec{a}_2(\vec{t})) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u_k(\vec{t})}{\partial t_1} \frac{\partial u_k(\vec{t})}{\partial t_2}$$

есть козффициенты первой квадратичной формы поверхности S.

Заметим, что функция

$$\vec{v}(\vec{t}) = \vec{u}(\vec{t}^0) + \frac{\partial \vec{u}(\vec{t}^0)}{\partial t_1}(t_1 - t_1^0) + \frac{\partial \vec{u}(\vec{t}^0)}{\partial t_2}(t_2 - t_2^0),$$

задаёт касательную плоскость к S в точке $\vec{u}(\vec{t}^0)$.

Мера $m(S) =: \sigma(S)$ поверхности S называется ***площадью поверхности*** S. Согласно формуле (9),

$$\sigma(S) = \int_T \sqrt{EG - F^2}\, dt_1 dt_2. \tag{12}$$

Кроме формулы (12) при $m = 3$ часто используется также следующая формула

$$\sigma(S) = \int_T \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dt_1 dt_2, \tag{13}$$

в которой $A := \frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2)}$, $B := \frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t_1, t_2)}$, $C := \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)}$. Формула (13) следует из равенства $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$, которое проверяется прямым подсчётом.

Полезным для применения является частный случай формулы (13), относящийся к поверхности S, задаваемой следующим образом $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = u_1 = t_1,\ x_2 = u_2 = t_2,\ x_3 = u_3 = f(t_1, t_2);\ (t_1, t_2) \in T\}$. В этом случае $A = -f_1'(x_1, x_2)$, $B == -f_2'(x_1, x_2)$, $C = 1$ и потому

$$\sigma(S) = \int_T \sqrt{1 + (f_1')^2 + (f_2')^2}\, dx_1 dx_2. \tag{14}$$

Заметим, что в (14) T — проекция поверхности S на плоскость (x_1, x_2).

Пример. Определим площадь ***сферической "шапочки"***

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2,\ x_3 \geq r_0\},$$

где $r_0 \in [0, r]$. Пусть $T = \{(\varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \arccos\frac{r_0}{r}\}$, $u_1(\varphi,\theta) = r\sin\theta\cos\varphi$, $u_2(\varphi,\theta) = r\sin\theta\sin\varphi$, $u_3(\varphi,\theta) = r\cos\theta$, $(\varphi,\theta) \in T$. Тогда $S = \vec{u}(T)$ и $A = -r^2\cos\varphi\sin^2\theta$, $B = -r^2\sin\varphi\sin^2\theta$, $C = -r^2\sin\theta\cos\theta$, $A^2 + B^2 + C^2 = r^4\sin^2\theta$.

С помощью формулы (13) находим

$$\sigma(S) = \int_T r^2\sin\theta\, d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\arccos(r_0/r)} r^2\sin\theta\, d\theta\Big)\, d\varphi = 2\pi r^2\Big(1 - \frac{r_0}{r}\Big).$$

При $r_0 = 0$ получим площадь полусферы, откуда следует, что площадь поверхности сферы радиуса r равна $4\pi r^2$.

15.7.6 Площадь поверхности как предел

Площадь даже совсем простых поверхностей нельзя определить как предел площадей вписанных многогранных поверхностей при условии, что диаметры всех граней стремятся к нулю. Первый пример, в котором для цилиндра предел площадей вписанных многогранных поверхностей может быть произвольным числом или $+\infty$, был построен Шварцем. Возможен следующий подход к определению площади поверхности, приводящий к интегральным суммам для интеграла (9).

Пусть S — поверхность, удовлетворяющая условиям п. 15.7.5, причём $m = 3$ и $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Представим прямоугольник T в виде $T = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k, Q_k = [\alpha(k), \beta(k)] \times [\gamma(k), \delta(k)], 1 \leq k \leq n; Q_k^0 \cap Q_j^0 = \varnothing, k \neq j$.

Пусть $\lambda := \max\limits_{1\leq k\leq n} d(Q_k)$. Тогда $S = \vec{u}(T) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} S_k; S_k := \vec{u}(Q_k), 1 \leq k \leq n$.

Зафиксируем некоторые точки $\vec{t}^{(k)} = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}) \in Q_k^0$, $1 \leq k \leq n$. В каждой точке $\vec{u}(\vec{t}^{(k)}) \in S_k$ рассмотрим касательную плоскость

$$\vec{v}(\vec{t}) = \vec{u}(\vec{t}^{(k)}) + \frac{\partial\vec{u}(\vec{t}^{(k)})}{\partial t_1}(t_1 - t_1^{(k)}) + \frac{\partial\vec{u}(\vec{t}^{(k)})}{\partial t_2}(t_2 - t_2^{(k)}),\ \vec{t} = (t_1, t_2) \in R^2.$$

Кусок поверхности $S_k = \vec{u}(Q_k)$ близок к образу $\vec{v}(Q_k)$, лежащему в касательной плоскости, так как $||\vec{u}(\vec{t}) - \vec{v}(\vec{t})|| = o(||\vec{t} - \vec{t}^{(k)}||)$, $\vec{t} \to \vec{t}^{(k)}$. Площадь образа $\vec{v}(Q_k)$, согласно п. 15.7.1, равна $\sigma(\vec{v}(Q_k)) = \rho(\vec{t}^{(k)})m(Q_k)$. Рассмотрим сумму $\sigma_n(S) := \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\vec{t}^{(k)})m(Q_k)$. Площадью поверхности S естественно назвать предел

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma_n(S) = \sigma(S), \tag{15}$$

если он существует.

Используя непрерывность функции ρ на Q, легко проверить, что предел (15) существует и равен интегралу (12). Действительно, величина

$$\Delta_n := |\sigma(S) - \sigma_n(S)| = \left|\int\limits_T \rho(\vec{t})\,d\vec{t} - \sum_{k=1}^{n} \rho(\vec{t}^{(k)})m(Q_k)\right|$$

в силу аддитивности интеграла может быть записана в следующем виде $\Delta_n = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{Q_k} (\rho(\vec{t}) - \rho(\vec{t}^{(k)}))\,d\vec{t}\right|$, откуда $\Delta_n \le \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{Q_k} |\rho(\vec{t}) - \rho(\vec{t}^{(k)})|\,d\vec{t}$. Далее с помощью обычных рассуждений получим $\Delta_n \to 0$, $\lambda \to 0$.

Упражнение 33. Вычислить поверхность тора $S =$

$$= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 = (R + r\cos\varphi)\cos\theta, \\ x_2 = (R + r\cos\varphi)\sin\theta, \quad (\varphi, \theta) \in [0, 2\pi]^2, 0 \le r \le R \\ x_3 = r\sin\varphi, \end{array} \right\}.$$

15.8 Интегралы первого рода по многообразию

15.8.1 Общее определение

Пусть T — компактное измеримое подмножество R^p, $\vec{u} \in C^1(T, R^m)$. Предположим, что p-мерное многообразие $M = \vec{u}(T)$ собственно p-мерно на T, и пусть $\rho(\vec{t})$ — коэффициент искажения меры в точке $\vec{t} \in T$. Пусть также $f \in C(M)$.

Определение 1. *Интегралом первого рода от функции f по многообразию M называется интеграл*

$$\int\limits_M f\,dm := \int\limits_T f(\vec{u}(\vec{t}))\rho(\vec{t})\,d\vec{t}. \tag{1}$$

Замечания. 1. Введенный интеграл (1) не зависит от допустимых координат для T. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_p$ — допустимые координаты для T, причём $\tau(T) = S$. С помощью формулы замены переменных получаем

$$\int\limits_S f\tilde{\rho}(\vec{\tau})\,d\vec{\tau} = \int\limits_T f\tilde{\rho}(\vec{\tau}(\vec{t}))\frac{\partial(\tau_1, \ldots, \tau_p)}{\partial(t_1, \ldots, t_p)}\,d\vec{t} = \int\limits_T f\rho(\vec{t})\,d\vec{t}.$$

2. Если $f(\vec{u}) = 1$, $\vec{u} \in M$, то интеграл (1) равен мере многообразия M, т. е. $\int\limits_M dm = m(M)$.

15.8.2 Связь с интегралом второго рода

Предположим, что t-пространство положительно для T. Интеграл от формы $f(\vec{x})\,dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)}$ по ориентированному многообразию ранее был определён формулой

$$\int\limits_M f(\vec{x})\,dx_{\nu(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\nu(p)} = \int\limits_T f(\vec{u}(\vec{t}))\frac{\partial(u_{\nu(1)}, \ldots, u_{\nu(p)})}{\partial(t_1, \ldots, t_p)}\,d\vec{t}.$$

Этот интеграл называется ***интегралом второго рода,*** он связан с интегралом первого рода следующей формулой

$$\int_M f(\vec{x})\,dx_{\nu(1)}\wedge\ldots\wedge dx_{\nu(p)} = \int_T f(\vec{u}(\vec{t}))\frac{\partial(u_{\nu(1)},\ldots,u_{\nu(p)})}{\partial(t_1,\ldots,t_p)}\,d\vec{t} =$$

$$= \int_T f(\vec{u}(\vec{t}))\frac{\partial(u_{\nu(1)},\ldots,u_{\nu(p)})}{\partial(t_1,\ldots,t_p)}\,\frac{1}{\rho(\vec{t})}\,\rho(\vec{t})\,d\vec{t} =$$

$$= \int_M f(\vec{u}(\vec{t}))\frac{\partial(u_{\nu(1)},\ldots,u_{\nu(p)})}{\partial(t_1,\ldots,t_p)}\,\frac{1}{\rho(\vec{t})}\,dm.$$

Упражнение 34. Интеграл второго рода из левой части последнего равенства зависит от ориентации множества M, интеграл же правой части есть интеграл по множеству M. Как реагирует на смену ориентации подынтегральное выражение правой части?

15.8.3 Криволинейный интеграл первого рода, связь с криволинейным интегралом второго рода

Пусть $p=1$, $T=[a,b]$, $\vec{u}(T)=\Gamma$ — одномерное многообразие — кривая в R^m. Интеграл (1) в этом случае называется ***криволинейным интегралом первого рода*** от функции f по кривой Γ и обозначается символом

$$\int_\Gamma f(\vec{x})\,dl.$$

Значение этого интеграла вычисляется по формуле

$$\int_\Gamma f(\vec{x})\,dl = \int_a^b f(\vec{u}(t))\sqrt{\sum_{k=1}^m\left(\frac{du_k(t)}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Предположим, что T лежит в пространстве знака $+1$. Пусть

$$\omega = f_1(\vec{x})\,dx_1+\ldots+f_m(\vec{x})\,dx_m;\qquad f_k\in C(\Gamma),\ 1\le k\le m,$$

— дифференциальная форма первой степени. Криволинейный интеграл второго рода от формы ω по ориентированной кривой Γ (движение по Γ соответствует возрастанию t) был определён равенством

$$\int_\Gamma (f_1(\vec{x})\,dx_1+\ldots+f_m(\vec{x})\,dx_m) = \int_a^b\sum_{k=1}^m f_k(\vec{u}(t))\frac{du_k(t)}{dt}\,dt,$$

откуда

$$\int_\Gamma\omega = \int_a^b\sum_{k=1}^m f_k(\vec{u}(t))\frac{du_k(t)}{dt}\,\frac{1}{\rho(t)}\,\rho(t)\,dt = \int_\Gamma\sum_{k=1}^m f_k\frac{du_k(t)}{dt}\,\frac{1}{\rho(t)}\,dl. \qquad (3)$$

Пусть $\vec{f}=(f_1,\ldots,f_m)$; $\vec{\tau}=\vec{\tau}(t):=\dfrac{1}{\rho(t)}\left(\dfrac{du_1(t)}{dt},\ldots,\dfrac{du_m(t)}{dt}\right)$;

$\vec{\tau}(t)$ — единичный вектор касательной к кривой Γ в точке $\vec{u}(t)$, направленный в сторону заданного движения по Γ. Тогда формула (3) может быть записана в виде $\int\limits_{\Gamma}\omega = \int\limits_{\Gamma}(\vec{f},\vec{\tau})\,dl$. Если t-пространство для $[a,b]$ отрицательно, то вектор $\vec{\tau}(t) := -\dfrac{1}{\rho(t)}\left(\dfrac{du_1(t)}{dt},\ldots,\dfrac{du_m(t)}{dt}\right)$.

15.8.4 Криволинейный интеграл первого рода как предел

Используем обозначения из п. 15.7.4. Пусть $\Gamma_k = \vec{u}([t_k,t_{k+1}])$, $\xi_k \in [t_k,t_{k+1}]$, $0 \le k \le n-1$. Рассмотрим сумму $J_\lambda = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\vec{u}(\xi_k))l(\Gamma_k)$, в которой k-е слагаемое есть произведение значения функции f в точке $\vec{u}(\xi_k) \in \Gamma_k$ на значение длины куска Γ_k. При предположениях о функциях f и $\vec{u}$ предел сумм J_λ при $|\lambda| \to 0$ существует и равен интегралу из правой части (2). Определение интеграла с помощью предела сумм J_λ позволяет получать такие физические интерпретации интеграла первого рода, как значение массы кривой, определяемое по заданной плотности распределения масс и т. п.

15.8.5 Поверхностный интеграл первого рода

Пусть $p = 2$, T — компактное измеримое подмножество R^2, $\vec{u} \in C^1(T,R^3)$. Предположим, что поверхность $S = \vec{u}(T)$ собственно двумерна на T. Пусть $f \in C(S)$.

Интеграл (1) в этом случае называется ***поверхностным интегралом первого рода*** от f функции по поверхности S и обозначается символом

$$\int\limits_S f(\vec{x})\,d\sigma.$$

Значение этого интеграла вычисляется по формуле

$$\int\limits_S f(\vec{x})\,d\sigma = \int\limits_T f(\vec{u}(\vec{t}))\sqrt{EG-F^2}\,d\vec{t}, \tag{4}$$

где функции E, G и F определены в п. 15.7.5.

Интеграл (4) также может быть олпределён как предел сумм типа интегральных. Используем обозначения п. 15.7.6. Для точки $\vec{u}(\vec{t}^{(k)})$ рассмотрим значение $f(\vec{u}(\vec{t}^{(k)}))$ и составим сумму $J_\lambda = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\vec{u}(\vec{t}^{(k)}))\sigma(S_k)$, в которой $\sigma(S_k)$ — площадь куска $S_k = \vec{u}(Q_k)$.

Если существует конечный предел

$$\lim_{|\lambda|\to 0} J_\lambda, \tag{5}$$

то он называется ***поверхностным интегралом первого рода*** от функции f по поверхности S.

При предположениях о функциях f, $\vec{u}$ предел (5) существует и равен интегралу (4). Действительно,

$$\left|\int\limits_S f(\vec{x})\,d\sigma - J_\lambda\right| = \left|\int\limits_T f(\vec{u}(\vec{t}))\rho(\vec{t})\,d\vec{t} - J_\lambda\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{Q_k} (f(\vec{u}(\vec{t})) - f(\vec{u}(\vec{t}^{(k)})))\rho(\vec{t})\,d\vec{t}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{Q_k} |f(\vec{u}(\vec{t})) - f(\vec{u}(\vec{t}^{(k)}))|\rho(\vec{t})\,d\vec{t},$$

откуда с помощью теоремы Кантора имеем $\lim\limits_{|\lambda|\to 0} J_\lambda = \int\limits_S f(\vec{x})\,d\sigma$.

Отметим ещё частный случай формулы (4) для поверхности S, заданной следующим образом

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in T,\ x_3 = u(x_1, x_2)\}, \quad u \in C^1(T).$$

При этом $\int\limits_S f(\vec{x})\,d\sigma = \int\limits_T f(x_1, x_2, u(x_1, x_2))\sqrt{1 + (u_1')^2 + (u_2')^2}\,dx_1 dx_2$.

15.8.6 Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода

Пусть параметрическое множество T и поверхность S удовлетворяют условиям п. 15.8.4, T лежит в положительном пространстве, тогда S — ориентированная поверхность. Пусть $\{f_1, f_2, f_3\} \subset C(S)$.

Поверхностный интеграл второго рода от формы

$$\omega = f_1(\vec{x})\,dx_2 \wedge dx_3 + f_2(\vec{x})\,dx_3 \wedge dx_1 + f_3(\vec{x})\,dx_1 \wedge dx_2$$

по ориентированной поверхности S ранее был определён равенством

$$\int\limits_S (f_1(\vec{x})\,dx_2 \wedge dx_3 + f_2(\vec{x})\,dx_3 \wedge dx_1 + f_3(\vec{x})\,dx_1 \wedge dx_2) =$$

$$= \int\limits_T \left(f_1(\vec{u}(t_1, t_2))\frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2)} + f_2(\vec{u}(t_1, t_2))\frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t_1, t_2)} + \right. \tag{6}$$

$$\left. + f_3(\vec{u}(t_1, t_2))\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)} \right) dt_1 dt_2.$$

Введём вектор $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, где

$$n_1 := \frac{1}{\rho(t_1, t_2)}\,\frac{\partial(u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2)} = \cos\widehat{(\vec{n}, x_1)};$$

$$n_2 := \frac{1}{\rho(t_1, t_2)}\,\frac{\partial(u_3, u_1)}{\partial(t_1, t_2)} = \cos\widehat{(\vec{n}, x_2)};$$

$$n_3 := \frac{1}{\rho(t_1, t_2)}\,\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(t_1, t_2)} = \cos\widehat{(\vec{n}, x_3)}.$$

Заметим, что $\vec{n} = \dfrac{1}{\rho}\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, где $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ — векторное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Вектор $\vec{n}$ перпендикулярен к плоскости, которая определяется векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ и касается поверхности S в точке $\vec{u}(t_1, t_2)$. При этом $\|\vec{n}\| = 1$. Вектор $\vec{n}$ называется ***вектором нормали к поверхности в точке*** $\vec{u}(t_1, t_2)$. Положим также $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$.

Формулу (6) теперь можно записать в виде

$$\int_S (f_1(\vec{x})\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2(\vec{x})\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3(\vec{x})\, dx_1 \wedge dx_2) = \int_S (\vec{f}, \vec{n})\, d\sigma. \quad (7)$$

В формуле (7) левая часть содержит интеграл второго рода по ориентированное поверхности S, а правая — поверхностный интеграл первого рода. Если бы множество T лежало в отрицательном пространстве, то вектор $\vec{n}$ имел бы координаты $-n_1$, $-n_2$, $-n_3$. Таким образом, ориентация поверхности S учитывается в правой части равенства (7) вектором нормали $\vec{n}$.

Рассмотрим расположение вектора $\vec{n}$ более подробно в следующих двух случаях.

I. Пусть $S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in T,\ x_3 = u(x_1, x_2)\}$, $u \in C^1(T)$. Тогда

$$\rho(x_1, x_2) = \sqrt{1 + (u_1')^2 + (u_2')^2}; \quad n_1 = -\frac{1}{\rho}\, u_1',\ n_2 = -\frac{1}{\rho}\, u_2',\ n_3 = \frac{1}{\rho}.$$

Напомним, что T лежит в положительном пространстве. Поскольку $n_3 = \cos\widehat{(\vec{n}, x_3)} > 0$, то вектор $\vec{n}$ образует острый угол с положительным направлении оси Ox_3. Ориентированная поверхность S есть верхняя сторона поверхности S, поскольку при обходе T против часовой стрелки соответствующий обход поверхности S происходит так, что ближайшая к наблюдателю часть поверхности S расположена слева, если смотреть сверху. Таким образом, при движении наблюдателя в положительном направлении при обходе S вектор $\vec{n}$ направлен от ног к голове.

II. Пусть $A \subset R^3$ — множество, состоящее из конечного числа брусов некоторого разбиения пространства R^3. Предположим, что пространство R^3 положительно для A. Тогда ориентированная соответствующим ориентации множества A граница ∂A есть внешняя сторона ∂A. Предположим, что функция $\vec{u} \in C^1(A, R^3)$, а замкнутая поверхность $S = \vec{u}(\partial A)$ собственно двумерна. Ориентированная поверхность S — это внешняя сторона S, если t-пространство для A и x-пространство для S одинаково ориентированы, т. е. если $\dfrac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} > 0$.

Покажем, что в этом случае вектор нормали $\vec{n}$ направлен во внешнюю сторону S. Пусть Q — брус-прямоугольник, лежащий в $\partial^+ A$ в плоскости $t_3 = c$, (t_1, t_2, t_3) — внутренняя точка Q. При всех достаточно малых $\delta > 0$ точки $(t_1, t_2, t_3 + \delta) \notin A$. Рассмотрим в точке $\vec{u}(t_1, t_2, t_3)$ на S касательную плоскость к S. Эта плоскость определяется линейно независимыми векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{n}$ образуют базис в R^3. Рассмотрим в этом базисе координаты точек $\vec{u}(t_1, t_2, t_3 + \delta) \notin \vec{u}(A)$. Пусть $\vec{u}(t_1, t_2, t_3 + \delta) = \vec{u}(t_1, t_2, t_3) + z_1\vec{a}_1 + z_2\vec{a}_2 + z_3\vec{n}$. Тогда

$$z_3 = (\vec{u}(t_1, t_2, t_3 + \delta) - \vec{u}(t_1, t_2, t_3), \vec{n}) \approx \frac{1}{\rho} \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} \delta.$$

Отсюда следует, что если $\dfrac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} > 0$, т. е. если t-пространство и x-пространство одинаково ориентированы, то $z_3 > 0$. Следовательно, вектор $\vec{n}$ направлен во внешнюю сторону. Таким образом, при движении наблюдателя по контуру S в положительном направлении вектор $\vec{n}$ направлен от ног к голове. Это правило справедливо во всех случаях и позволяет связывать выбранную сторону поверхности с направлением нормали $\vec{n}$ в формуле (7).

15.8.7 Историческая справка

Грин Джордж (1793 — 1841) — английский математик и физик, автор классичеких работ по математической физике. Формула Грина была известна ещё Л. Эйлеру.

Остороградский Михаил Васильевич (1801 — 1862) — русский математик, один из основателей петербургской математической школы. Его работы посвящены различным вопросам математики и механики.

Стокс Джордж Габриэль (1819 — 1903) — английский математик и физик. Формула Стокса (1854) устанавливает связь между потоком векторного поля через ориентированную поверхность и циркуляцией этого поля по ориентированному краю поверхности. Позже обобщение этой формулы получило название общей формулы Стокса.

Пуанкаре Анри Жюль (1854 — 1912) — выдающийся французский математик, физик, астроном и и философ. Его работы касались почти всех разделов математики и содержали новые идеи и методы исследований.

Шварц Карл Герман Амандус (1843 — 1921) — немецкий математик.

Глава 16

Элементы теории рядов Фурье и интеграла Фурье

16.1 Ряд Фурье по ортонормированной последовательности

16.1.1 Основные определения

В этом разделе на пространство функций, интегрируемых по Риману на заданном отрезке, переносятся с определёнными видоизменениями те понятия и факты геометрии конечномерного пространства, которые определяются с помощью скалярного произведения: ортогональность, норма, ортонормированный базис, теорема Пифагора и др.

Пусть $[a, b]$ — фиксированный отрезок на R. Относительно класса функций $R([a, b])$ напомним, что $C([a, b]) \subset R([a, b])$, и что сумма и произведение функций из $R([a, b])$ также функции из $R([a, b])$. Кроме того, в дальнейшем полезно иметь в виду следующие утверждения.

I. Если $f \in R([a, b])$; $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$; $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, то функция f равна нулю во всех точках непрерывности.

II. Если функция $f \in R([a, b])$ и равна нулю во всех точках непрерывности, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$.

Следующее определение покажется естественным обобщением скалярного произведения в конечномерном пространстве, если функции приблизить векторами значений, взятых в конечном числе точек, и для векторов-приближений рассмотреть скалярное произведение, которое после умножения на некоторые числа будет сходится к интегралу.

Определение 1. Пусть $\{f,g\} \subset R([a,b])$. ***Скалярным произведением*** *функций* f *и* g *называется число*

$$(f,g) := \int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

Из определения 1 следуют такие свойства скалярного произведения.

1^0. $\forall f \in R([a,b]) \ : \quad (f,f) \geq 0.$

2^0. $\forall \{f,g\} \subset R([a,b]) \ : \quad (f,g) = (g,f).$

3^0. $\forall \{f,g\} \subset R([a,b]) \quad \forall \alpha \in R: \quad (\alpha f, g) = \alpha(f,g).$

4^0. $\forall \{f_1, f_2, g\} \subset R([a,b]) \ : \quad (f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g).$

5^0. ***Неравенство Коши.*** $\forall \{f,g\} \subset R([a,b]): \quad (f,g)^2 \leq (f,f)(g,g).$

Определение 2. ***Нормой*** *функции* $f \in R([a,b])$ *называется число* $||f|| := (f,f)^{1/2} = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}.$

Из этого определения и свойства 5^0 следует, что:

6^0. $\forall f \in R([a,b]) \quad \forall \alpha \in R: \quad ||\alpha f|| = |\alpha| \cdot ||f||;$

7^0. $\forall \{f,g\} \subset R([a,b]) \ : \quad ||f+g|| \leq ||f|| + ||g||.$

Заметим, что равенство $||f|| = 0$ равносильно тому, что ***функция*** f ***равна нулю во всех точках непрерывности.*** Далее ***будем считать функции*** f ***и*** g ***совпадающими, если*** $||f - g|| = 0$, ***т. е. если функция*** $f - g$ ***равна нулю во всех точках непрерывности.***

Определение 3. Пусть $\{f,g\} \subset R([a,b])$. *Функции* f *и* g *называются* ***ортогональными на*** $[a,b]$, *если скалярное произведение* $(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$. *Функция* f *называется* ***нормированной,*** *если* $||f|| = 1$.

Среднеквадратическим расстоянием между функциями *f и g называется число* $||f - g||$.

Среднеквадратическое расстояние обладает всеми свойствами расстояния (с учётом договорённости о совпадающих функциях), а множество с расстоянием $(R([a,b]), ||f-g||)$ — метрическое пространство. Существенным обстоятельством является тот факт, что метрическое пространство $(R([a,b]), ||f-g||)$ ***неполно.***

Упражнение 1. Доказать, что функция $f \in R([a,b])$ ортогональна к любому многочлену степени не больше n_0 на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда f ортогональна каждой из функций $g_k(t) = t^k, \ \ k = 0, 1, 2, \ldots, n_0$.

Упражнение 2. Доказать, что пространство $(R([a,b]))$ неполно.

Определение 4. Набор функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ называется ***ортонормированным набором,*** *если эти функции попарно ортогональны и нормированы, т. е. если выполняются равенства $(\varphi_j, \varphi_k) = 1, j = k, \quad (\varphi_j, \varphi_k) = 0, j \neq k$.*

Последовательность функций называется ***ортонормированной*** *последовательностью, если выполняются равенства $(\varphi_j, \varphi_k) = 1, j = k, \quad (\varphi_j, \varphi_k) = 0, j \neq k;\ j \geq 1,\ k \geq 1$.*

Упражнение 3. Доказать, что функции последовательности

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \ldots,\ \cos nt,\ \sin nt,\ \ldots\ ,t \in [0, 2\pi],$$

попарно ортогональны на отрезке $[0, 2\pi]$, а последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\quad ,\frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}},\quad \ldots,\quad \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}},\quad \ldots$$

ортонормирована на этом отрезке.

Определение 5. Функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из $R([a,b])$ при $n \geq 2$ называются ***линейно зависимыми на отрезке*** *$[a,b]$, если существует набор $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset R$, $|c_1|+|c_2|+\ldots+|c_n| \neq 0$, для которого $||c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n|| = 0$. Функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$, не являющиеся линейно зависимыми на $[a,b]$, называются* ***линейно независимыми на*** *$[a,b]$.*

Заметим, что для линейно независимых функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ справедливы неравенства $||f_k|| \neq 0, \quad 1 \leq k \leq n$.

Последовательность функций $\{f_n \mid n \geq 1\} \subset R([a,b])$ называется ***последовательностью линейно независимых функций,*** если любой конечный набор $f_{j(1)}, f_{j(2)}, \ldots, f_{j(n)}$ есть набор линейно независимых функций ($j(1), j(2), \ldots, j(n)$ — различные натуральные числа).

Лемма 1. *Пусть $[a,b]$ — любой отрезок. Последовательность функций $f_n(t) = t^n, t \in [a,b]$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ — последовательность линейно независимых функций на $[a,b]$.*

⌈ Докажем, что для любого $n \geq 2$ функции $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно независимы на $[a,b]$. Действительно, пусть действительные числа $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ таковы, что $\left|\left|\sum\limits_{j=0}^{n} c_j t^j\right|\right| = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in [a,b] : \sum\limits_{j=0}^{n} c_j t^j = 0$.

Следовательно, для многочлена $P(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j t^j$ степени не выше n каждое значение $t \in [a,b]$ является корнем. Так как отличный от нуля многочлен не может иметь более n корней, то $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$. ⌋

Упражнение 4. Доказать, что любой набор ортонормированных функций есть набор линейно независимых функций.

Упражнение 5. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — различные действительные числа. Доказать, что наборы функций a) $f_k(t) = t^{\alpha_k}, t \in [a,b], a > 0;$ $k = 1,2,\dots,n;$ b) $f_k(t) = e^{\alpha_k t}, t \in [a,b];$ $k = 1,2,\dots,n$, есть наборы линейно независимых функций на $[a,b]$.

Упражнение 6. Пусть функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ линейно независимы на $[a,b]$. Доказать, что $\det((f_k, f_j))_{k,j=1}^n \neq 0$.

Упражнение 7. Пусть функции $f_1, f_2, \dots, f_n$ линейно независимы на $[a,b]$. Доказать, что для любых действительных чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ существует функция $f \in R([a,b])$ такая, что $(f, f_k) = c_k$, $k = 1,2,\dots,n$.

Упражнение 8*. Пусть $f \in R([a,b])$ и $\int\limits_a^b t^n f(t)\,dt = 0$, $n = 0,1,2,\dots$. Доказать, что $||f|| = 0$.

Замечание. Любую последовательность $\{f_n \mid n \geq 1\}$ линейно независимых на $[a,b]$ функций из $R([a,b])$ можно преобразовать в ортонормированную последовательность следующим образом. Положим $\varphi_1 := ||f_1||^{-1} f_1$. Тогда $||\varphi_1|| = 1$ ($||f_1|| \neq 0$ из-за линейной независимости). Пусть далее $\varphi_2 := ||f_2 - (f_2,\varphi_1)\varphi_1||^{-1}(f_2 - (f_2,\varphi_1)\varphi_1)$. Тогда $||\varphi_2|| = 1$ и $(\varphi_2, \varphi_1) = 0$ ($||f_2 - (f_2,\varphi_1)\varphi_1|| \neq 0$ из-за линейной независимости f_1 и f_2) и т. д. Полученная последовательность $\{\varphi_n \mid n \geq 1\}$ будет ортонормированной, причём справедливы представления вида

$$\varphi_n = c_{n1} f_1 + c_{n2} f_2 + \dots + c_{nn} f_n, \quad f_n = d_{n1}\varphi_1 + d_{n2}\varphi_2 + \dots + d_{nn}\varphi_n, \ n \geq 1,$$

где $\{c_{jk},\ d_{jk}\} \subset R$. Процесс построения последовательности $\{\varphi_n \mid n \geq 1\}$ называется ***процессом ортогонализации Шмидта.***

16.1.2 Задача о наилучшем приближении в смысле среднеквадратического расстояния

Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \subset R([a,b])$ — ортонормированный на $[a,b]$ набор функций, $H_n := \left\{ \sum\limits_{k=1}^n a_k \varphi_k \;\middle|\; a_k \in R,\ 1 \leq k \leq n, \right\}$. Семейство функций H_n — ***n-мерное подпространство*** $R([a,b])$. Функции из H_n называются ***многочленами*** относительно функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Пусть $f \in R([a,b])$ — фиксированная функция.

Рассмотрим задачу определения такого многочлена $P^* \in H_n$, для которого

$$||f - P^*|| \leq ||f - P||, \ \ P \in H_n, \quad \Longleftrightarrow \quad ||f - P^*|| = \min_{P \in H_n} ||f - P||.$$

Многочлен P^* называется ***проекцией*** f на подпространство H_n.

Лемма 2. *Для любого* $P = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right) \in H_n$ *справедливо равенство*

$$||f - P||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - (f, \varphi_k))^2. \qquad (1)$$

⌈ Действительно, используя свойства скалярного произведения, имеем

$$||f - P||^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\right) =$$

$$= ||f||^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(f, \varphi_k) + \sum_{k,j=1=1}^{n} a_k a_j(\varphi_k, \varphi_j) =$$

$$= ||f||^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 =$$

$$= ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - (f, \varphi_k))^2.$$ ⌋

Следствие 1. *Для любого многочлена* $P = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k \in H_n$ *справедливо неравенство*

$$||f - P||^2 \geq ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)^2, \qquad (2)$$

в котором знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$a_k = (f, \varphi_k), \quad 1 \leq k \leq n. \qquad (3)$$

Таким образом, проекция P^* функции f на подпространство H_n определяется единственным образом

$$P^* = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\varphi_k \qquad (4)$$

и имеет такой же вид, как и проекция вектора в конечномерном пространстве. Кроме того,

$$||f - P^*||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)^2. \qquad (5)$$

Внешне все приведенные определения и утверждения представляются вполне аналогичными фактам и понятиям конечномерного пространства со скалярным произведением. Однако, эта аналогия не является полной. Особенно следует обратить внимание на то, что в пространстве $R([a, b])$ существуют бесконечные последовательности ортонормированных функций, см. упр. 3.

Упражнение 9. Для функции $f(t) = (\pi - t)/2$, $t \in [0, 2\pi]$ и заданного $n \in N$ определить ***тригонометрический*** многочлен вида $T_n =$

$\alpha_0+\sum\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt)$, $t\in[0,2\pi]$; $\{\alpha_k,\beta_k\}\subset R$, минимизирующий расстояние $||f-T_n||$.

16.1.3 Коэффициенты Фурье. Ряд Фурье. Элементарные свойства

Пусть $\{\varphi_n \mid n\geq 1\}$ — фиксированная ортонормированная последовательность функций из $R([a,b])$.

Определение 6. *Для функции $f\in R([a,b])$ числа*

$$c_n(f):=(f,\varphi_n)=\int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt,\quad n\geq 1,$$

*называются **коэффициентами Фурье** функции f относительно ортонормированной последовательности функций $\{\varphi_n \mid n\geq 1\}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(f)\varphi_n$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(f)\varphi_n(t)$, $t\in[a,b]$ называется **рядом Фурье** функции f относительно ортонормированной последовательности $\{\varphi_n \mid n\geq 1\}$.*

Отметим следующие свойства коэффициентов Фурье.

1^0. Для любой функции $f\in R([a,b])$ справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2(f)=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)^2\leq||f||^2\quad \textit{(неравенство Бесселя)}. \qquad (1)$$

⌈ Действительно, при каждом $n\geq 1$ из равенства (5) п. 16.1.2 имеем неравенство $||f||^2-\sum\limits_{k=1}^{n}(f,\varphi_k)^2\geq 0$, откуда и следует (1). ⌋

2^0. Пусть $f\in R([a,b])$. Тогда

$$c_n(f)\to 0,\quad n\to\infty. \qquad (2)$$

Определение 7. *Последовательность $\{f_n \mid n\geq 1\}\subset R([a,b])$ называется **замкнутой** в $(R([a,b]),||f-g||)$, если*

$$\forall f\in R([a,b])\ \forall\varepsilon>0\ \exists P=\sum_{k=1}^{n}a_kf_k,\ n\in N\,\{a_k\}\subset R:\quad ||f-P||<\varepsilon,$$

т. е. если семейство всех конечных линейных комбинаций членов последовательности $\{f_n \mid n\geq 1\}$ всюду плотно в пространстве $(R([a,b]),||f-g||)$.

Замечание. Пусть $\{f_n \mid n\geq 1\}$ — замкнутая последовательность в $R([a,b])$ и $\{\varphi_n \mid n\geq 1\}$ — ортонормированная последовательность, полученная из $\{f_n \mid n\geq 1\}$ с помощью процесса ортогонализации. Тогда $\{\varphi_n \mid n\geq 1\}$ замкнута в $R([a,b])$.

Примеры. 1. Для любого отрезка $[a,b]$ последовательность функций $f_n(t)=t^n$, $t\in[a,b]$; $n=0,1,2,\ldots$ замкнута в $R([a,b])$.

⌈ Утверждение этого примера не является тривиальным. Доказательство состоит из следующих двух частей.

I. Сначала докажем, что

$$\forall f \in R([a,b]) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_\varepsilon \in C([a,b]) \ : \quad \|f - h_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Поскольку $f \in R([a,b])$, то $\sup\limits_{[a,b]}|f| = L < +\infty$; $\forall \delta > 0 \ \exists \lambda = \lambda([a,b])$: $0 \le \int\limits_a^b f(t)\,dt - L(f;\lambda) < \delta$. Пусть функция g_λ определена равенством

$$g_\lambda(t) := m_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad 0 \le k \le n-1; \quad g_\lambda(b) = m_{n-1},$$

при этом $\sup\limits_{[a,b]}|g_\lambda| \le L$, $g_\lambda(t) \le f(t)$, $t \in [a,b]$. Пусть число $\delta_1 := \min\{\delta/n, \ \Delta t_k/(2n), \ 0 \le k \le n-1\}$ и определим функцию $g_\delta \in C([a,b])$ следующим образом: $g_\delta(t) := m_k$, $t \in [t_k + \delta_1, t_{k+1} - \delta_1]$, $0 \le k \le n-1$, и доопределим g_δ на каждом из отрезков $[t_k - \delta_1, t_k + \delta_1]$, $0 \le k \le n-1$; $[t_0, t_0 + \delta_1]$, $[t_n - \delta_1, t_n]$ линейно так, чтобы $g_\delta \in C([a,b])$. Тогда

$$\|f - g_\delta\|^2 = \int\limits_a^b (f(t) - g_\delta(t))^2\,dt \le 2L \int\limits_a^b |f(t) - g_\delta(t)|\,dt \le$$

$$\le 2L \left(\int\limits_a^b |f(t) - g_\lambda(t)|\,dt + \int\limits_a^b |g_\lambda(t) - g_\delta(t)|\,dt \right) \le$$

$$\le 2L \left(\delta + \sum_{k=1}^{n-1} L2\delta_1 \right) \le \tilde{L}\delta, \quad \tilde{L} := 2L(1 + 2L).$$

Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ функцию h_ε можно положить равной g_δ с $\delta = \tilde{L}^{-1}\varepsilon^2$.

II. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Рассмотрим функцию $h_{\varepsilon/2} \in C([a,b])$, для которой $\|f - h_{\varepsilon/2}\| < \varepsilon/2$. Согласно теореме Вейерштрасса, для функции $h_{\varepsilon/2}$ существует многочлен $P_\varepsilon(t) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k t^k$, $t \in [a,b]$; $\{a_k\} \subset R$, такой, для которого $\forall t \in [a,b]$: $|h_{\varepsilon/2}(t) - P_\varepsilon(t)| < \varepsilon/(2\sqrt{b-a})$. Тогда $\|h_{\varepsilon/2} - P_\varepsilon\| < \varepsilon/2$, и из неравенств (3) и (4) получим

$$\|f - P_\varepsilon\| \le \|f - h_{\varepsilon/2}\| + \|h_{\varepsilon/2} - P_\varepsilon\| < \varepsilon. \quad ⌋$$

Замечание. Следуя доказательству части I примера 1, легко доказать, что $\forall f \in R([a,b])$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \tilde{h}_\varepsilon \in C([a,b])$, $\tilde{h}_\varepsilon(a) = \tilde{h}_\varepsilon(b)$: $\|f - \tilde{h}_\varepsilon\| < \varepsilon$.

2. Замкнутой в $R([-\pi,\pi])$ является последовательность функций

$$1, \quad \cos t, \quad \sin t, \quad ,\cos 2t, \quad \sin 2t, \quad \ldots, \quad \cos nt, \quad \sin nt, \quad \ldots . \qquad (5)$$

⌈ Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Согласно доказанному в части I примера 1, для любой функции $f \in R([-\pi,\pi])$ справедливо такое утверждение

$$\exists\, h_{\varepsilon/2} \in C([-\pi,\pi]),\ h_{\varepsilon/2}(-\pi) = h_{\varepsilon/2}(\pi)\ :\quad \|f - h_{\varepsilon/2}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу теоремы Вейерштрасса существует многочлен вида

$$P_\varepsilon(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt),\quad \{\alpha_k, \beta_k\} \subset R,$$

для которого $\forall\, t \in [-\pi,\pi]:\quad |h_{\varepsilon/2}(t) - P_\varepsilon(t)| < \varepsilon/(2\sqrt{2\pi})$. Тогда $\|h_{\varepsilon/2} - P_\varepsilon\| < \varepsilon/2$, и, следовательно, $\|f - P_\varepsilon\| \le \|f - h_{\varepsilon/2}\| + \|h_{\varepsilon/2} - P_\varepsilon\| < \varepsilon.$ ⌋

Замечание. Система (5) замкнута в $R([a, a+2\pi])$ для любого числа $a \in R$.

Упражнение 10. Доказать, что для любого $a \ge 0$ последовательность $f_n(t) = t^{2n}$, $t \in [a,b]$, $n = 0,1,2,\ldots$ замкнута в $R([a,b])$.

Упражнение 11. Доказать, что последовательность $f_n(t) = t^{2n+1}$, $t \in [a,b]$, $n = 0,1,2,\ldots$ замкнута в $R([a,b])$ при $a \ge 0$.

Упражнение 12. Доказать, что каждая из последовательностей

$$1, \cos t, \cos 2t, \ldots, \cos nt, \ldots;\quad \sin t, \sin 2t, \ldots, \sin nt, \ldots;\quad t \in [0,\pi],$$

замкнута в $R([0,\pi])$.

Упражнение 13. Доказать, что последовательность функций из упр. 10 не является замкнутой в $R([-1,1])$.

Указание. Рассмотреть интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \left(t - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k t^{2k}\right)^2 dt$, $\{c_k\} \subset R$.

Упражнение 14. Последовательность $\{\varphi_n \mid n \ge 1\}$ замкнута в $R([a,b])$. Замкнута ли последовательность $\{\varphi_n \mid n \ge 2\}$ в $R([a,b])$?

Указание. Рассмотреть последовательность упр. 12.

Следующее свойство ряда Фурье сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\{\varphi_n \mid n \ge 1\}$ — замкнутая ортонормированная последовательность функций в $R([a,b])$. Тогда для любой функции $f \in R([a,b])$ её ряд Фурье*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n(t),\quad t \in [a,b],$$

сходится в среднем квадратическом к функции f, т. е.

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k\| = \sqrt{\int_a^b \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k(t)\right)^2 dt} \to 0,\quad n \to \infty.$$

При этом имеет место равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f)\quad \textit{(равенство Парсеваля)}. \tag{6}$$

⌈ Пусть $f \in R([a,b])$, положим $s_n(t) := \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k(t)$, $t \in [a,b]$, $n \geq 1$. Функция s_n (см. п. 16.1.2) является проекцией функции f на подпространство, порождённое функциями $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Поэтому $s_n = P^*$ и $||f - s_n||^2 = ||f||^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2(f)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Поскольку последовательность $\{\varphi_n \mid n \geq 1\}$ замкнута, то $\exists\, P_\varepsilon = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k\varphi_k$, $\{a_k\} \subset R : ||f - P_\varepsilon|| < \varepsilon$. Отсюда для $n \geq m$ получим $||f - s_n||^2 \leq ||f - P_\varepsilon||^2 < \varepsilon^2$. было

Следовательно, $\forall\, n \geq m : 0 \leq ||f - s_n||^2 = ||f||^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2(f) < \varepsilon^2$.

Поэтому $||f - s_n||^2 \to 0$, $n \to \infty \Longrightarrow ||f||^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2(f)$. ⌋

Замечание. Следует иметь в виду, что утверждение о среднеквадратической сходимости ряда Фурье не влечёт за собой его равномерную или хотя бы поточечную сходимость на $[a,b]$.

Упражнение 15. Доказать, что при условиях теоремы 1 для $\{f,g\} \subset R([a,b])$ справедливо равенство $(f,g) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n(f)c_n(g)$ ***(обобщённое равенство Парсеваля)***.

Упражнение 16*. Привести пример функций f, f_n, $n \geq 1$ из множества $R([0,1])$, для которых: a) $||f - f_n|| \to 0$, $n \to \infty$; b) последовательность функций $\{f_n \mid n \geq 1\}$ не сходится к функции f ни в одной точке отрезка $[0,1]$.

Определение 8. *Последовательность $\{f_n \mid n \geq 1\} \subset R([a,b])$ называется **полной** в $R([a,b])$, если для любой функции $f \in R([a,b])$ имеем $\forall\, n \geq 1 : (f, f_n) = 0 \Longrightarrow ||f|| = 0$.*

Замечание. Замкнутая в $R([a,b])$ последовательность $\{f_n \mid n \geq 1\}$ полна в $R([a,b])$. Действительно, пусть для функции $f \in R([a,b])$ выполняются равенства $(f, f_n) = 0$, $n \geq 1$. В силу замкнутости последовательности $\{f_n \mid n \geq 1\}$ справедливо следующее утверждение

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, P_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k,\ \{a_k\} \subset R : \quad ||f - P_\varepsilon|| < \varepsilon.$$

Тогда $||f||^2 = (f,f) = (f, f - P_\varepsilon) \leq ||f|| \cdot ||f - P_\varepsilon|| \leq \varepsilon ||f||$. Отсюда следует, что $||f|| = 0$.

Упражнение 17. Пусть $f \in C([-1,1])$ и $\forall\, n \geq 0 : \int\limits_{-1}^{1} f(t)t^{2n}\,dt = 0$. Доказать, что f — нечётная на $[-1,1]$ функция.

Упражнение 18. Пусть $f \in C([-1,1])$ и $\forall\, n \geq 0 \;:\; \int\limits_{-1}^{1} f(t)t^{2n+1}\,dt = 0$. Доказать, что f — чётная на $[-1,1]$ функция.

Упражнение 19*. Пусть $f \in R([0,3\pi])$ и

$$\forall\, n \geq 0 \;:\; \int\limits_0^{3\pi} f(t)\cos nt\,dt = \int\limits_0^{3\pi} f(t)\sin nt\,dt = 0.$$

Доказать, что функция f в точках непрерывности совпадает с функцией g, для которой $g(t) = 0,\;\; t \in (\pi, 2\pi);\quad g(t) + g(2\pi + t) = 0,\;\; t \in [0,\pi]$.

Упражнение 20. Пусть функция $f \in C([a,b])$, $a > 0$, и удовлетворяет условию $\forall\, n \geq 0 \;:\; \int\limits_a^b f(t)e^{nt}\,dt = 0$. Доказать, что $f(t) = 0,\; t \in [a,b]$.

Упражнение 21. Пусть $f \in C([0,2\pi])$ и $f(0) = f(2\pi)$. Предположим, что для некоторого $m \in N$ справедливы равенства

$$\forall\, n \geq m \;:\; \int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt = \int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt = 0.$$

Какой может быть функция f?

Упражнение 22*. Пусть функции $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset R([a,b])$ линейно независимы на $[a,b]$. Доказать существование $\varepsilon > 0$ такого, что

$$\forall\, \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \subset R([a,b]),\;\; \|f_k - \varphi_k\| < \varepsilon,\;\; 1 \leq k \leq n,$$

функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы на $[a,b]$.

16.2 Ряд Фурье по тригонометрической последовательности

16.2.1 Обозначения. Следствия из общей теории

Функции последовательности

$$\frac{1}{2},\quad \cos t,\quad \sin t,\quad ,\cos 2t,\quad \sin 2t,\quad \ldots,\quad \cos nt,\quad \sin nt,\quad \ldots \qquad (1)$$

имеют на отрезке $[-\pi,\pi]$ нормы $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\pi}$, $\ldots$, $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\pi}$, $\ldots$ соответственно и попарно ортогональны на $[-\pi,\pi]$. Последовательность (1) замкнута в $R([-\pi,\pi])$. Первыми в математике и её приложениях появились ряды Фурье относительно тригонометрической последовательности (1). Эти ряды уже встречались в работах Д. Бернулли, Даламбера, Лагранжа и Эйлера, относящихся к первой половине XVIII века. Ж. Фурье в опубликованной в 1822 г. книге "Аналитическая теория тепла" систематически использовал ряды относительно последовательности (1) и продемонстрировал пользу и важность таких рядов. Разработка теории рядов Фурье несколькими поколениями математиков привела к настоящему времени к созданию глубокой и обширной теории, имеющей исключительно важное значение как для самой математики, так и для её приложений. Весьма существенным оказалось также влияние этой теории и возникавших в ней проблем для развития других разделов математики, например, теории интеграла.

По сложившейся традиции для функции $f \in R([-\pi,\pi])$ её ***коэффициенты Фурье*** относительно тригонометрической последовательности (1) определяются равенствами

$$\begin{aligned} a_n &:= a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad n \geq 0; \\ b_n &:= b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Функции f при этом сопоставляется следующий функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt), \quad t \in [-\pi,\pi], \tag{3}$$

называемый ***рядом Фурье***.

Замечание. Все члены ряда (3) — периодические с периодом 2π функции. Если ряд (3) сходится на $[-\pi,\pi]$, то такой же будет его сумма. Поэтому часто удобно считать функцию f заданной на R и периодической с периодом 2π, сохранив предположение $f \in R([-\pi,\pi])$.

Пусть R_0 — множество всех функций $f: R \to R$, периодических с периодом 2π и таких, что $f \in R([-\pi,\pi])$. При фактических вычислениях часто удобно использовать тот факт, что интеграл от периодической функции по любому отрезку, длина которого равна периоду, принимает одно и то же значение.

Последовательность функций (1) не является нормированной, нормировка приводит к следующей ортонормированной последовательности функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots, \quad \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots \tag{4}$$

на отрезке $[-\pi,\pi]$,относительно которой коэффициенты Фурье из п. 16.1.3 определяются равенствами

$$\begin{aligned} c_0' &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \quad c_n' := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt; \\ c_n'' &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt; \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Из результатов п. 16.1.3 для функции $f \in R([-\pi,\pi])$ имеем:

(i) $c'_n(f) \to 0, \quad c''_n(f) \to 0, \quad n \to \infty$;

(ii) $(c'_0(f))^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left((c'_n(f))^2 + (c''_n(f))^2\right) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$;

(iii) $\left\|f(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c'_0(f) - \sum\limits_{k=1}^{n} \left(c'_k(f)\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} + c''_k(f)\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\right)\right\| \to 0, \; n \to \infty.$

Заметим теперь, согласно (2), (3) и (5) справедливы такие равенства

$$c'_0(f) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,a_0(f); \quad c'_n(f) = \sqrt{\pi}a_n(f), \quad c''_n(f) = \sqrt{\pi}b_n(f), \quad n \geq 1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} c'_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c'_k(f)\frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} + c''_k(f)\frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}}\right) =$$
$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt).$$

Поэтому из утверждений (i) — (iii) следует, что для любой функции $f \in R([-\pi,\pi])$ для её ряда Фурье по тригонометрической последовательности справедливы следующие утверждения:

(i′) $a_n \to 0, \quad b_n \to 0, \quad n \to \infty$; (6)

(ii′) $\frac{1}{2} a_0^2(f) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$ ***(равенство Парсеваля)***; (7)

(iii′) $\left\|f(t) - \frac{a_0(f)}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt)\right\| \to 0, \quad n \to \infty,$

т. е. ряд Фурье сходится в среднем квадратичном.

Упражнение 23. Пусть $\{f,g\} \subset R([-\pi,\pi])$. Доказать ***обобщённое равенство Парсеваля:***

$$\frac{1}{2} a_0(f)a_0(g) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

Указание. Записать равенство Парсеваля (7) для двух функций $f+g$, $f-g$.

Упражнение 24. Доказать, что ряд Фурье для многочлена $T_n(t) = \alpha_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$, $t \in R$, совпадает с многочленом T_n.

16.2.2 Вспомогательные утверждения

Основной задачей дальнейшего изложения является изучение ряда Фурье (3) как функционального ряда. При этом нас интересуют вопросы, подобные следующим: при каких условиях ряд (3) сходится в заданной точке? Чему равна его сумма? При каких условиях ряд (3) можно интегрировать или дифференцировать почленно? Сначала рассмотрим некоторые утверждения, играющие в дальнейшем основную роль в доказательствах.

Утверждение (i′) п. 16.2.1 о стремлении к нулю коэффициентов Фурье интегрируемой функции имеет ряд обобщений и первоначально появилось в следующей форме.

1°. Лемма Римана. Пусть $[a,b]$ — некоторый отрезок, а f — функция такая, что функция $|f|$ интегрируема по $[a,b]$ хотя бы в несобственном смысле. Тогда $\int\limits_a^b f(t)\cos\lambda t\,dt \to 0$, $\int\limits_a^b f(t)\sin\lambda t\,dt \to 0$, $\lambda\to+\infty$.

⌈ Оба утверждения доказываются одинаково. Поэтому рассмотрим доказательство первого из них.

I. Утверждение очевидно для постоянной функции $f(t)=c\in\boldsymbol{R}$, $t\in[a,b]$. Действительно, тогда $\int\limits_a^b c\cos\lambda t\,dt = c\dfrac{\sin\lambda b-\sin\lambda a}{\lambda}\to 0, \lambda\to+\infty$.

II. Утверждение леммы справедливо для кусочно-постоянной на $[a,b]$ функции f, т. е. такой, что существует разбиение $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$, для которого на каждом из интервалов (t_k,t_{k+1}) функция f постоянна и принимает значение $c_k\in\boldsymbol{R}$, $0\le k\le n-1$. Действительно, в этом случае

$$\int\limits_a^b f(t)\cos\lambda t\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\cos\lambda t\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\frac{\sin\lambda t_{k+1}-\sin\lambda t_k}{\lambda}\to 0$$

при $\lambda\to+\infty$.

III. Пусть теперь $f\in\boldsymbol{R}([a,b])$ и $\varepsilon>0$ задано. Тогда

$$\exists\,\mu=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}\ :\quad \int\limits_a^b f(t)\,dt - L(f;\mu)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Определим функцию f_ε следующим образом

$$f_\varepsilon(t):=m_k=\inf_{[t_k,t_{k+1}]} f,\quad t\in[t_k,t_{k+1}),\quad 0\le k\le n-1,\quad f_\varepsilon(b):=m_{n-1}.$$

Заметим, что $f_\varepsilon(t)\le f(t)$, $t\in[a,b]$. Согласно доказанному в части II имеем $\exists\,\Lambda\ \forall\,\lambda\ge\Lambda:\ \left|\int\limits_a^b f_\varepsilon(t)\cos\lambda t\,dt\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Теперь для $\lambda\ge\Lambda$ имеем

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\cos\lambda t\,dt\right| = \left|\int\limits_a^b (f(t)-f_\varepsilon(t)+f_\varepsilon(t))\cos\lambda t\,dt\right|\le$$

$$\le\int\limits_a^b |f(t)-f_\varepsilon(t)|\cdot|\cos\lambda t|\,dt + \left|\int\limits_a^b f_\varepsilon(t)\cos\lambda t\,dt\right|<$$

f-интегр. ⇒ ∃ наиб. что   ≤ U(...)

$$< \int_a^b f(t)\,dt - L(f;\mu) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

IV. Пусть теперь $|f|$ интегрируема в несобственном смысле. Предположим, что b — единственная особая точка. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Тогда $\exists\,\delta > 0 : \quad \int\limits_{b-\delta}^{b} |f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$, а в силу доказанного (и на $[a, b-\delta]$ ф-я f-интегр.) в III $\exists\,\Lambda \quad \forall\,\lambda \geq \Lambda$: $\left|\int\limits_a^{b-\delta} f(t)\cos\lambda t\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для $\lambda \geq \Lambda$ получим следующее неравенство

$$\left|\int_a^b f(t)\cos\lambda t\,dt\right| \leq \left|\int_a^{b-\delta} f(t)\cos\lambda t\,dt\right| + \int_{b-\delta}^{b} |f(t)|\,dt < \varepsilon. \qquad \rfloor$$

Упражнение 25. Пусть для функции $f\ :\ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ сходится. Доказать, что имеет место сходимость

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt \to 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt \to 0, \quad \lambda \to +\infty.$$

Указание. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют a и b такие, что

$$\int_{-\infty}^{a} |f(t)|\,dt + \int_{b}^{+\infty} |f(t)|\,dt < \varepsilon.$$

2⁰. Интегральное представление для частичной суммы ряда Фурье. Пусть $f \in \boldsymbol{R}_0$. Положим для $x \in \boldsymbol{R}$

$$s_0(f,x) := s_0(x) := \frac{1}{2}\,a_0(f);$$

$$s_n(f,x) := s_n(x) := \frac{1}{2}\,a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx), \quad n \geq 1.$$

Лемма 3. *Для любых функции $f \in \boldsymbol{R}_0$ и числа $n \geq 0$ справедливо представление*

$$s_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x-v)+f(x+v)}{2}\,\mathcal{D}_n(v)\,dv, \quad x \in \boldsymbol{R}, \tag{8}$$

в котором $\mathcal{D}_n(v) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{v}{2}}$ $= \frac{1}{2} + \cos t + \ldots + \cos nt$, $v \in (0,\pi)$, — ***ядро Дирихле.***

С помощью определения (2) сначала имеем

$x - u = v$

$$s_n(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos ku\,du\,\cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin ku\,du\,\sin kx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-u) \right) du.$$

Используем теперь тождество $\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kv = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{v}{2}}$, $v \neq 2\pi n$, $n \in Z$. Это тождество справедливо на всей прямой, если его правую часть доопределить в точках $v = 2\pi n$, $n \in Z$ так, чтобы получилась непрерывная на оси функция. Нужные пределы существуют.

Учитывая периодичность функций f и $\mathcal{D}_n$, а также чётность $\mathcal{D}_n$, получим

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-v)\mathcal{D}_n(v)\,dv =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} f(x-v)\mathcal{D}_n(v)\,dv + \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x-v)\mathcal{D}_n(v)\,dv =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} (f(x-v) + f(x+v))\mathcal{D}_n(v)\,dv,$$

и формула (8) доказана. ⌋

Замечание. Следующие свойства ядра Дирихле часто используются $\mathcal{D}_n(v) = \mathcal{D}_n(-v)$, $v \in (0,\pi)$; $\frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \mathcal{D}_n(v)\,dv = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathcal{D}_n(v)\,dv = 1.$ (*i

Второе равенство следует из представления (8) для функции $f(x) = 1$, $x \in R$, для которой $a_0 = 2$, $a_n = b_n = 0$, $n \geq 1$.

3°. Интегральное представление для средних по Чезаро частичных сумм ряда Фурье. Пусть $f \in R_0$, для $n \geq 1$ положим

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_{n-1}(x)}{n}, \quad x \in R.$$

Заметим, что для каждого $n \geq 1$ функция σ_n — тригонометрический многочлен.

Лемма 4. *Для любых функции $f \in R_0$ и числа $n \geq 1$ справедливо представление*

$$\sigma_n(x) = \int\limits_{0}^{\pi/2} (f(x-2v) + f(x+2v))\mathcal{F}_n(v)\,dv, \tag{9}$$

$\frac{\mathcal{D}_0(v)+\ldots \mathcal{D}_n(v)}{n+1}$

в котором $\mathcal{F}_n(v) := \dfrac{1}{n\pi} \dfrac{\sin^2 nv}{\sin^2 v}$, $v \in (0,\pi)$, — ***ядро Фейера.*** (*

⌈ Согласно формуле (8) имеем

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi/2} (f(x-2v) + f(x+2v))\mathcal{D}_n(2v)2\,dv.$$

Отсюда

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int\limits_0^{\pi/2} (f(x-2v) + f(x+2v)) \frac{1}{\sin v} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)v\, dv.$$

Теперь формула (9) получаем с помощью тождества

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)v = \frac{\sin^2 nv}{\sin v}, \quad v \in (0, \pi).$$ ⌋

Замечание. Отметим следующие свойства ядра Фейера:

$$\mathcal{F}_n(v) \geq 0, \quad \mathcal{F}_n(v) = \mathcal{F}_n(-v), \quad v \in (0,\pi); \quad 2\int\limits_0^{\pi/2} \mathcal{F}_n(v)\, dv = 1.$$ (следств. (*) и (**))

16.2.3 Сходимость ряда Фурье в точке

Пусть $f \in R_0$ и $x \in [-\pi, \pi]$ — фиксированная точка. Для числа $c \in \boldsymbol{R}$ с помощью (8) получим равенство

$$s_n(x) - c = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} g_c(u)\mathcal{D}_n(u)\, du, \tag{10}$$

в котором

$$g_c(u) := g_c(x,u) := \frac{f(x-u) + f(x+u)}{2} - c. \tag{11}$$

Теорема 2. *Для того чтобы ряд Фурье* (3) *функции f сходился в точке x к числу $c \in \boldsymbol{R}$, т. е. чтобы*

$$s_n(x) \to c, \quad n \to \infty, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx) = c,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists\, \delta > 0 \ : \quad \int\limits_0^{\delta} g_c(u) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{u}\, du \to 0, \quad n \to \infty.$$

⌐ С помощью формулы (10) для любого $\delta \in (0, \pi)$, имеем

$$s_n(x) - c = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} g_c(u)\mathcal{D}_n(u)\, du =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\delta} g_c(u) \frac{\sin \lambda u}{u}\, du + \frac{2}{\pi} \int\limits_{\delta}^{\pi} g_c(u) \frac{\sin \lambda u}{2\sin\frac{u}{2}}\, du + \tag{12}$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\delta} g_c(u) \left(\frac{\sin \lambda u}{2\sin\frac{u}{2}} - \frac{\sin \lambda u}{u} \right) du, \quad \lambda = n + \frac{1}{2}.$$

Покажем, что ко второму и третьему интегралам правой части (12) при любом $\delta \in (0,\pi)$ применима лемма Римана. Действительно, функция $g_c \in R([\delta,\pi])$, функция $h(u) = 2\sin\frac{u}{2}$ непрерывна и положительна на $[\delta,\pi]$. Следовательно, функция $\frac{g_c}{h} \in R([\delta,\pi])$. В силу леммы Римана,

$$\forall\, \delta > 0 \;:\quad \frac{2}{\pi} \int\limits_{\delta}^{\pi} g_c(u) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}}\, du \to 0, \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Далее заметим, что

$$\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} - \frac{1}{u} = \frac{1}{2u\sin\frac{u}{2}} \left(u - u + \frac{u^3}{24} - \ldots\right) \to 0, \quad u \to 0+.$$

Поэтому, согласно лемме Римана,

$$\forall\, \delta > 0 \;:\quad \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\delta} g_c(u) \left(\frac{\sin\lambda u}{2\sin\frac{u}{2}} - \frac{\sin\lambda u}{u}\right) du \to 0, \quad \lambda \to +\infty. \tag{14}$$

Из соотношений (13), (14) и (12) получаем утверждение теоремы. ⌋

Замечание. Из теоремы 2 вытекает следующее, неожиданное на первый взгляд, заключение. Пусть $\delta' \in (0, \pi)$ задано. Рассмотрим функцию $\tilde{f}$ такую, что $\tilde{f}(t) = f(t)$, $t \in (x - \delta', x + \delta')$, а в остальных точках определённую произвольно, но так, чтобы $\tilde{f} \in R_0$. Положим в условии теоремы 2 $\delta = \delta'$. Тогда функция g_c на отрезке $[0, \delta]$ одна и та же для функций f и $\tilde{f}$. Следовательно, в силу теоремы 2 сходимость и предел у последовательностей $\{s_n(f, x)\}$ и $\{s_n(\tilde{f}, x)\}$ одинаковы. Таким образом, предельное поведение последовательности $\{s_n(f, x)\}$ зависит только от поведения функции вблизи точки x. Это утверждение часто называют ***принципом локализации Римана.***

Упражнение 26. Пусть $\{f, g\} \subset R_0$ и для фиксированного x $\exists\, \delta > 0 :$ $\int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+u) - g(x+u)}{u} \right| du < +\infty$. Доказать, что тогда справедливо утверждение $(s_n(f, x) - s_n(g, x)) \to 0$, $n \to \infty$.

Теорема 3. ***(Признак Дини).*** *Пусть для числа c*

$$\exists\, \delta \in (0, \pi) \;:\quad \int\limits_{0}^{\delta} \frac{|g_c(u)|}{u}\, du < +\infty. \tag{15}$$

Тогда $s_n(x) \to c, \quad n \to \infty.$

⌈ Для доказательства согласно теореме 2 достаточно проверить, что

$\to 0$ $, n+\frac{1}{2} \to \infty$ по Л. Римана

$$\int\limits_{0}^{\delta} g_c(u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{u}\, du \to 0, \quad n \to \infty.$$

Однако, при условии теоремы 3 последнее утверждение следует из леммы Римана. ⌋

Замечание. Пусть условие (15) выполнено. Если предположить дополнительно существование предела $\lim\limits_{u \to 0+} g_c(u)$, то из (15) следует, что этот предел равен нулю.

Поэтому, *если выполнено условие (15) и точка x - точка разрыва первого рода функции f, то* $c = \dfrac{f(x-)+f(x+)}{2}$.

Если выполнено условие (15) и x - точка непрерывности функции f, то $c = f(x)$.

Заметим также без доказательства, что ряд Фурье для непрерывной в точке функции не обязательно сходится в этой точке.

Теорема 4. ***(Признак Липшица).*** Пусть функция f в точке x удовлетворяет для некоторого числа $\alpha \in (0,1]$ условию Липшица

$$\exists L \in \boldsymbol{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u \in (-\delta, \delta) \ : \quad |f(x+u) - f(x)| \le L|u|^\alpha. \qquad (16)$$

Тогда $s_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$.

⌈ Из условия теоремы следует, что для числа $c = f(x)$ справедливо неравенство $|g_c(u)| = (1/2)|f(x-u) + f(x+u) - 2f(x)| \le L|u|^\alpha$, $u \in (-\delta, \delta)$. Поэтому условие (15) признака Дини выполняется для $c = f(x)$.⌋

Следствие 2. Если в точке x функция f имеет производную, то $s_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$.

Следствие 3. Пусть x — точка разрыва первого рода функции f. Предположим, что существуют конечные пределы $\lim\limits_{u\to 0-} \dfrac{f(x+u)-f(x-)}{u}$, $\lim\limits_{u\to 0+} \dfrac{f(x+u)-f(x+)}{u}$.

Тогда $s_n(x) \to \dfrac{f(x-)+f(x+)}{2}$, $n \to \infty$.

Пример. Рассмотрим следующую функцию из $\boldsymbol{R}_0$ $f(x) = (\pi - x)/2$, $x \in (0, 2\pi)$; $f(0) = f(2\pi) = 0$. Для неё имеем $f'(x) = -1/2$, $x \in (0, 2\pi)$; $\dfrac{f(0-)+f(0+)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 = f(0)$. Кроме того, $a_n = 0$, $n \ge 0$; $b_n = \dfrac{1}{n}$, $n \ge 1$. Следовательно, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Упражнение 27. Доказать формулу Эйлера $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Упражнение 28. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(\dfrac{\pi^2}{6} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}\right)\right) = 1$.

Следствие 4. Для любой функции $g \in \boldsymbol{R}_0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n(g)}{n}$ *сходится.*

⌈ Действительно, запишем для функции g и функции f из рассмотренного выше примера обобщённое равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(g)}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \frac{\pi - t}{2}\, dt. \qquad ⌋$$

Следствие 5. В классе R_0 не существует функции, для которой сходящийся на R ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$, $x \in R$, *был бы рядом Фурье.*

Упражнение 29. Пусть $\theta \in (0, 2\pi)$. Доказать, что

$$\frac{\theta}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\theta}{\pi n} \cos nx + \frac{1 - \cos n\theta}{\pi n} \sin nx \right) =$$

$$= \frac{\theta}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\theta - x)}{\pi n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\pi n} = \begin{cases} 1/2, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, \theta), \\ 1/2, & x = \theta, \\ 0, & x \in (\theta, 2\pi). \end{cases}$$

16.2.4 Теорема Фейера

Теорема 5. *Пусть функция $f \in C(R)$ и периодична с периодом 2π. Тогда* $\max\limits_{x \in R} |f(x) - \sigma_n(x)| \to 0$, $n \to \infty$.

⌈ Из леммы 4 сначала имеем для $x \in R$

$$\sigma_n(x) - f(x) = \int\limits_0^{\pi/2} (f(x - 2v) + f(x + 2v) - 2f(x))\mathcal{F}_n(v)\, dv.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ задано. Поскольку функция $f \in C(R)$ и периодична, то она равномерно непрерывна на R. Следовательно,

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall \{x', x''\} \subset R,\ |x' - x''| < \delta \ :\quad |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому имеем следующую оценку для величины $|\sigma_n(x) - f(x)| \leq$

$$\leq \int\limits_0^{\delta/2} |f(x - 2v) + f(x + 2v) - 2f(x)|\mathcal{F}_n(v)\, dv + \int\limits_{\delta/2}^{\pi/2} 4 \max_R |f| \mathcal{F}_n(v)\, dv <$$

$$< \varepsilon \int\limits_0^{\delta/2} \mathcal{F}_n(v)\, dv + 4 \max_R |f| \int\limits_{\delta/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nv}{\pi n \sin^2 v}\, dv <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4}{\pi} \max_R |f| \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{\pi}{2} \frac{1}{n}.$$ ⌋

Следствие 6. (Теорема Вейерштрасса). Пусть функция $f \in C(R)$ и периодична с периодом 2π. Тогда $\forall\, \varepsilon\ \exists\, T_\varepsilon(x) = \alpha_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$, $\{\alpha_k, \beta_j\} \subset R, \forall\, x \in R:\ |f(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon$.

Следствие 7. (Теорема Вейерштрасса). Пусть функция $f \in C([a, b])$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k, \ \{\alpha_k\} \subset \boldsymbol{R} \ \forall x \in [a,b]) : \ |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

⌈ Достаточно рассмотреть случай, когда $[a,b] = [0,\pi]$. Пусть функция $g \in C([0,2\pi]), g(0) = g(2\pi), \ g(t) = f(t), \ t \in [0,\pi]$. Согласно следствию 6 для каждого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен T_ε такой, что $\forall x \in [0,2\pi] : \ |g(x) - T_\varepsilon(x)| < \varepsilon/2$. Многочлен T_ε есть конечная линейная комбинация функций вида $\cos kx$, $\sin kx$, каждая их которых есть сумма ряда Тейлора на $\boldsymbol{R}$, равномерно сходящегося на каждом отрезке. Поэтому $\exists P_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x^k, \ \{\alpha_k\} \subset \boldsymbol{R} \ \ \forall x \in [0,2\pi]) \ :$ $|T_\varepsilon(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon/2$. Следовательно, $|g(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon, \ x \in [0,2\pi]$. ⌋

16.3 Дифференцирование и интегрирование ряда Фурье

16.3.1 Понятие тригонометрического ряда. Свойства коэффициентов Фурье

Ряд вида

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx), \ t \in \boldsymbol{R}, \ \ \{\alpha_k, \beta_j\} \subset \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

называется *тригонометрическим.* Как показывает следствие 5 существуют сходящиеся тригонометрические ряды, которые не являются рядами Фурье функций из $\boldsymbol{R}_0$. Однако, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Равномерно сходящийся на оси тригонометрический ряд есть ряд Фурье своей суммы.*

⌈ Заметим сначала, что сумма равномерно сходящегося на $\boldsymbol{R}$ тригонометрического ряда непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Пусть ряд (1) сходится равномерно на $\boldsymbol{R}$ к сумме $f \in C(\boldsymbol{R})$:

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) = f(t), \ t \in \boldsymbol{R}. \tag{2}$$

Умножим равенство (2) на $\frac{1}{\pi} \cos mt$, где $m \geq 0$. Полученный в левой части ряд также сходится равномерно на $\boldsymbol{R}$, поэтому допустимо его почленное интегрирование по отрезку $[-\pi,\pi]$. В результате получим

$$\alpha_0 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \, dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cdot \cos mt \, dt}_{= 0} + +\beta_n \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cdot \cos mt \, dt}_{= 0} \right) =$$

m≠n

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \, dt = a_m(f).$$

В силу ортогональности функций тригонометрической последовательности, это равенство принимает вид $\alpha_m = a_m(f)$. Аналогично $\beta_m = b_m(f)$, $m \in N$. т.е. нашли через φ. с такими и-ами.]

Лемма 5. *Пусть функция $f \in C(R)$, периодична с периодом 2π и, исключая, возможно, конечное число точек отрезка $[-\pi, \pi]$, существует f', причём $f' \in R_0$.*

Тогда $a_n(f) = -\frac{b_n(f')}{n}$, $b_n(f) = \frac{a_n(f')}{n}$, $n \geq 1$.

расписать инт-е по частям

[Обе формулы доказываются с помощью интегрирования по частям.]

Лемма 6. *Пусть $f \in C^{r-1}(R)$ для $r \geq 1$, периодична с периодом 2π и, исключая, возможно, конечное число точек отрезка $[-\pi, \pi]$, существует $f^{(r)}$, причём $f^{(r)} \in R_0$.*

Тогда $|a_n(f)| + |b_n(f)| \leq \frac{|a_n(f^{(r)})| + |b_n(f^{(r)})|}{n^r}$, $n \geq 1$.

[Для доказательства последовательно применить лемму 5.]

Упражнение 30. Пусть $\{f, g\} \subset R_0$, $\{\alpha, \beta, \varphi\} \subset R$, $g_\varphi(t) = f(t + \varphi)$, $t \in R$. Доказать, что a) $a_n(\alpha f + \beta g) = \alpha a_n(f) + \beta a_n(g)$, $n \geq 0$; $b_n(\alpha f + \beta g) = \alpha b_n(f) + \beta b_n(g)$, $n \geq 1$; b) $a_0(g_\varphi) = a_0(g)$, $a_n(g_\varphi) = a_n(f) \cos n\varphi + b_n(f) \sin n\varphi$, $b_n(g_\varphi) = b_n(f) \cos n\varphi - a_n(f) \sin n\varphi$, $n \geq 1$.

16.3.2 Равномерная сходимость и почленное дифференцирование ряда Фурье

Теорема 7. *Пусть функция $f \in C(R)$, периодична с периодом 2π и, исключая, возможно, конечное число точек отрезка $[-\pi, \pi]$, существует f', причём $f' \in R_0$. Тогда*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in R, \tag{3}$$

причём ряд (3) *сходится равномерно на R.*

[Докажем равномерную на R сходимость ряда (3). Согласно признаку Вейерштрасса равномерной сходимости, достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)| + |b_n(f)|). \tag{4}$$

Из леммы 5 и неравенства Коши имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k} \leq$$

$\frac{\pi^2}{6}$ по Парсевалю: $\le \sqrt{\frac{\pi^2}{3}}\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f')^2dx} < \infty$

$$\le \left(2\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2(f')+b_k^2(f')\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \le \left(2\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(t))^2\,dt\frac{\pi^2}{6}\right)^{1/2}.$$

Из этого неравенства следует сходимость ряда (4). В точках, в которых существует f', равенство (3) справедливо. Поскольку функция f и сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций есть непрерывные функции, то равенство (3) выполняется на R. доказано частное и по точкам

Замечание. Из теоремы 7 следует также такое неравенство

$$\max_{x\in R}|f(x)-s_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k(f)|+|b_k(f)|) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|a_k(f')|+|b_k(f')|}{k} \le$$

$$\le \varepsilon_n\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < \varepsilon_n\left(\int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\right)^{1/2} = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}},\ n\ge 1. \tag{5}$$

где

$$\varepsilon_n := \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k(f')|+|b_k(f')|)^2\right)^{1/2} \to 0,\quad n\to\infty.$$

Неравенство (5) даёт представление о скорости сходимости частичных сумм $\{s_n\}$ к функции f. При условиях леммы 6 аналогично получается неравенство

$$\max_{x\in R}|f(x)-s_n(x)| \le \frac{\bar\varepsilon_n}{n^{r-(1/2)}},\quad n\ge 1;\quad \bar\varepsilon_n\to 0,\ n\to\infty.$$

Теорема 8. *Пусть функция $f\in C^1(R)$, периодична с периодом 2π и, исключая, возможно, конечное число точек отрезка $[-\pi,\pi]$, существует f'', причём $f''\in R_0$. Тогда ряд Фурье (3) для функции можно почленно дифференцировать и $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx)$, $x\in R$, причём полученный ряд сходится равномерно на R.*

⌈ Утверждение теоремы есть непосредственное следствие теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда и теоремы 7. ⌋

16.3.3 Интегрирование ряда Фурье

Пусть $f\in R_0$. Тогда ряд Фурье

$$\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos nx+b_n(f)\sin nx),\quad x\in R, \tag{6}$$

не обязательно сходится поточечно. Однако, в силу следствия 4 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(f)}{n} \tag{7}$$

всегда сходится.

Заметим теперь, что интеграл $\int\limits_0^x f(t)\,dt$, $x \in \boldsymbol{R}$, от периодической функции $f \in \boldsymbol{R}_0$ не является периодической функцией. Например, для функции $f(t) = 1 + \cos t$, $t \in \boldsymbol{R}$, этот интеграл равен $x + \sin x$, $x \in \boldsymbol{R}$. Однако, функция

$$F(x) := \int\limits_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0(f)}{2}\,x, \quad x \in \boldsymbol{R}, \tag{8}$$

периодична с периодом 2π и $F \in C(\boldsymbol{R})$. Действительно,

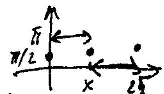
$$F(x + 2\pi) = \int\limits_0^{x+2\pi} f(t)\,dt - (a_0(f)/2)(x + 2\pi) =$$

$$= \int\limits_0^x f(t)\,dt - (a_0(f)/2)x + \underbrace{\int\limits_x^{x+2\pi} f(t)\,dt - \pi a_0(f)}_{=0 \text{ период. } 2\pi} = F(x), \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

Пусть $x \in (0, 2\pi)$. Рассмотрим периодическую с периодом 2π функцию $g \in \boldsymbol{R}_0$, равную на периоде $g(t) = \pi/2$, $t = 0$, $t = x$; $g(t) = \pi$, $t \in (0, x)$; $g(t) = 0$, $t \in (x, 2\pi]$. Коэффициенты Фурье функции g равны

$$a_0(g) = x; \quad a_n(g) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^x \pi \cos nt\,dt = \frac{\sin nx}{n}, \quad b_n(g) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^x \pi \sin nt\,dt =$$

$$= \frac{1 - \cos nx}{n}, \quad n \geq 1.$$



Применим теперь к функциям f, g из $\boldsymbol{R}_0$ обобщённое равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^x \pi f(t)\,dt = \frac{a_0(f)}{2}\,x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f) \frac{\sin nx}{n} + b_n(f) \frac{1 - \cos nx}{n} \right), \tag{9}$$

где $x \in [0, 2\pi]$. Теперь, учитывая сходимость ряда (7) и определение (8) функции F, получим равенство

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n(f)}{n} \cos nx + \frac{a_n(f)}{n} \sin nx \right) \tag{10}$$

для $x \in [0, 2\pi]$.

Заметим, что равенство (9) получается с помощью формального почленного интегрирования ряда Фурье (6), который для функции $f \in \boldsymbol{R}_0$ не обязательно сходится поточечно. Однако, ряды в (9) и (10) сходятся равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$ в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости, поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k(f)| + |b_k(f)|}{k} < +\infty$. $< \sqrt{\sum(|a_n|+|b_n|)^2} \cdot \sum$ это сумма непр.

$\Leftarrow$ доказали (9) равн. сход. ряда

Заметим также, что вследствие периодичности функции F равенство (10), а вместе с ним и равенство (9), справедливы на $\boldsymbol{R}$. Из теоремы 6 теперь заключаем, что ряд (10) есть ряд Фурье функции F и что

$$a_0(F) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{n}; \quad a_n(F) = -\frac{b_n(f)}{n}, \quad b_n(F) = \frac{a_n(f)}{n}, \quad n \geq 1.$$

Полученный интересный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 9. *Пусть $f \in R_0$. Ряд, полученный из ряда Фурье функции f формальным почленным интегрированием, сходится равномерно на R к функции $\int\limits_0^x f(t)\,dt$, $t \in R$.*

Таким образом, формальное почленное интегрирование, возможно, расходящегося в некоторых точках, ряда Фурье для функции f, приводит к ряду, равномерно сходящемуся на оси к интегралу от функции f.

16.3.4 Случай функции с произвольным периодом

Рассмотрим функцию $f: R \to R$, которая периодична с периодом $2l$, $l > 0$, т. е. такую, что $f(x+2l) = f(x)$, $x \in R$. Пусть $f \in R([-l,l])$. Для таких функций можно рассматривать ряд Фурье по несколько видоизменённой тригонометрической последовательности и и получить все факты, доказанные выше для 2π-периодических функций. Приведём основные формулы.

Функция $g(t) := f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$, $t \in R$, имеет период 2π, поскольку

$$g(t+2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = g(t), \quad t \in R.$$

Коэффициенты Фурье для функции g и её ряд Фурье имеют вид:

$$a_n(g) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt, n \geq 0; \; b_n(g) := \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin nt\,dt, n \geq 1;$$

$$g(t) \sim \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(g)\cos nt + b_n(g)\sin nt), \quad t \in R. \tag{11}$$

Положив в формуле (11) $t = \frac{\pi}{l}x$, получим

$$f(x) \sim \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(g)\cos\frac{\pi nx}{l} + b_n(g)\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \quad x \in R. \tag{12}$$

Кроме того, замена $t = \frac{\pi}{l}x$ в интегралах (11) приводит к следующим выражениям для коэффициентов Фурье $\{a_n(f),\ b_n(f)\}$ функции f

$$\begin{aligned} a_n(f) &= a_n(g) = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx, \ n \geq 0; \\ b_n(f) &= b_n(g) = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx, \ n \geq 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Формулы (13) определяют коэффициенты Фурье, а формула (12) — ряд Фурье, для $2l$-периодической функции f относительно последовательности функций

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{\pi n x}{l},\ \sin\frac{\pi n x}{l},\ \ldots\ ,$$

попарно ортогональных на $[-l, l]$. Эта последовательность функций замкнута в $R([-l, l])$.

16.4 Интеграл Фурье

16.4.1 Формальный вывод интегральной формулы Фурье

Пусть функция $f:\ R \to R$ такова, что $f \in R([-l, l])$ для каждого $l > 0$. При определённых условиях, приведенных выше, функцию f на отрезке $[-l, l]$ можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \quad x \in [-l, l].$$

Используя формулы (13) п. 16.3.4 для коэффициентов Фурье, запишем зто представление в виде

a_0

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)\,du + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{\pi n(x-u)}{l}\,du =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)\,du + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} F_l\left(\frac{\pi n}{l}\right)\frac{\pi}{l}, \quad x \in [-l, l], \tag{1}$$

$\lambda = \frac{\pi n}{l}$

где

$$F_l(\lambda) := \int_{-l}^{l} f(u)\cos\lambda(x-u)\,du. \tag{2}$$

Предположим теперь, что $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,du < +\infty$. Тогда для каждого $\lambda \in R$ имеем

$$F_l(\lambda) \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\lambda(x-u)\,du, \qquad \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)\,du \to 0, \quad l \to +\infty.$$

Поскольку сумма в правой части (1) аналогична интегральной сумме для функции $F_{+\infty}$, интервала $[0, +\infty)$, разбиения $\left\{0, \pi/l, 2\pi/l, \ldots\right\}$ и соответствующего набора точек $\left\{\pi/l, 2\pi/l, \ldots\right\}$, то можно ожидать, что правая часть равенства (1) при $l \to +\infty$ сходится к такому интегралу

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\lambda(x-u)\,du\right)d\lambda.$$

Эти рассуждения приводят к следующей формуле

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda(x-u)\, du \right) d\lambda, \quad x \in \boldsymbol{R}, \tag{3}$$

которую также часто записывают в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda, \quad x \in \boldsymbol{R}, \tag{4}$$

где

$$a(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda u\, du, \quad b(\lambda) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin \lambda u\, du, \quad \lambda \in \boldsymbol{R}. \tag{5}$$

Каждая из формул (3) и (4) называется ***интегральной формулой Фурье***, а правая часть из (3) или (4) — ***интегралом Фурье***.

16.4.2 Сходимость интеграла Фурье в точке

Пусть функция $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ абсолютно интегрируема по $\boldsymbol{R}$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\, du < +\infty.$$

При этом условии функции a и b, определяемые равенствами (5), непрерывны по λ на $\boldsymbol{R}$, поскольку определяющие их интегралы сходятся равномерно по λ на $\boldsymbol{R}$, в силу признака Вейерштрасса. Согласно лемме Римана, $a(\lambda) \to 0$, $b(\lambda) \to 0$, $|\lambda| \to +\infty$.

Заметим также, что a — чётная, а b — нечётная функции на $\boldsymbol{R}$.

Упражнение 31. Доказать, что функции a и b равномерно непрерывны на $\boldsymbol{R}$. Таким образом, для каждого $x \in \boldsymbol{R}$ функция

$$g(\lambda) := a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda(x-u)\, du, \quad \lambda \geq 0,$$

непрерывна по λ на $[0, +\infty)$.

Для числа $A \geq 0$ положим $J(A) :=$

сход. по λ (Вейерштр. пр.) и непр. ⇒ можно ∫

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^A (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda(x-u)\, du \right) d\lambda.$$

Из теоремы об интегрировании по параметру равномерно сходящегося несобственного интеграла следует такое представление для J

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{\sin A(x-u)}{x-u}\, du = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (f(x-v) + f(x+v)) \frac{\sin Av}{v}\, dv.$$

при x=u бред lim в точке

Учитывая равенство $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin Av}{v}\, dv = \frac{\pi}{2}$, $A > 0$, получаем следующее представление для $J(A) - c$, $c \in \boldsymbol{R}$:

$$J(A) - c = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} g_c(u) \frac{\sin Au}{u}\, du, \tag{6}$$

в котором $g_c(u) := g_c(u, x) := \dfrac{f(x-u) + f(x+u)}{2} - c.$

Теорема 10. ***(Признак Дини).*** *Пусть* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\, du < +\infty$, *число* $x \in R$ *— фиксировано и для некоторого числа* $c \in R$ *справедливо утверждение* $\exists\, \delta > 0: \int\limits_0^{\delta} \dfrac{|g_c(u)|}{u}\, du < +\infty$.

Тогда $J(A) \to c$, $A \to +\infty$, *т. е. справедливо равенство*

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda(x-u)\, du \Big)\, d\lambda = c.$$

⌈ Согласно представлению (6) имеем f-абс. инт. $\Rightarrow g_c(u)$ - абс. инт.

$$J(A) - c = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\delta} g_c(u) \frac{\sin Au}{u}\, du +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{f(x-u) + f(x+u)}{2u} \sin Au\, du - \frac{2c}{\pi} \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin Au}{u}\, du. \tag{7}$$

Первый и второй интегралы правой части (7) сходятся к нулю при $A \to +\infty$ по лемме Римана. Кроме того,

$$\int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\sin Au}{u}\, du = \int\limits_{\delta A}^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\, dv \to 0, \ \ A \to +\infty. \qquad ⌋$$

Замечание. *Если выполнены условия теоремы 10 и* x *— точка разрыва первого рода* f, *то* $c = \dfrac{f(x-) + f(x+)}{2}$.
Если выполнены условия теоремы 10 и x *есть точка непрерывности* f, *то* $c = f(x)$.

Теорема 11. ***(Признак Липшица).*** *Предположим, что* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\, du < +\infty$ *и функция* f *в точке* x *удовлетворяет для некоторого* $\alpha \in (0, 1]$ *условию Липшица*

$$\exists\, L \in R \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, u \in (-\delta, \delta) \ : \quad |f(x+u) - f(x)| \le L|u|^{\alpha}.$$

Тогда $J(A) \to f(x)$, $A \to +\infty$, *т. е. справедливо равенство*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos \lambda(x-u)\, du \Big)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x)\, d\lambda.$$

⌈ Доказательство следует из теоремы 10. ⌋

Следствие 8. Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,du < +\infty$ *и функция* f *имеет в точке* x *производную* $f'(x)$, *то* $J(A) \to f(x), \quad A \to +\infty$.

Замечание. Справедлив аналог следствия 3.

Упражнение 32. Пусть $f(x) = \dfrac{\pi}{2\sigma}\, e^{-\sigma|x|}$, $x \in \boldsymbol{R}$, $\sigma > 0$. Вычислить функции a и b и доказать такое равенство $\dfrac{\pi}{2\sigma}\, e^{-\sigma|x|} = \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{\cos\lambda x}{\sigma^2 + \lambda^2}\, d\lambda$ для $x \in \boldsymbol{R}$.

16.4.3 Преобразование Фурье

Пусть функция $f:\ \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такова, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,du < +\infty$.

Определение 1. Преобразованием Фурье функции f *называется комплексная функция*

$$\hat{f}(\lambda) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx,\ \lambda \in \boldsymbol{R}.$$

Теорема 12. *(Формула обращения). Пусть функция* f *непрерывна в точке* x, *удовлетворяет условию признака Дини в точке* x *и* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,du < +\infty$.

Тогда $f(x) = \dfrac{1}{2\pi} \lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} e^{-i\lambda x} \hat{f}(\lambda)\,d\lambda$.

⌈ Для доказательства заметим, что $e^{-i\lambda x}\hat{f}(\lambda) = (\cos\lambda x - i\sin\lambda x)\cdot(a(\lambda) + {} + ib(\lambda)) = a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x - ia(\lambda)\underbrace{\sin\lambda x + ib(\lambda)}_{\to 0}\cos\lambda x$. Поэтому $\int\limits_{-A}^{A} e^{-i\lambda x}\hat{f}(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{-A}^{A} (a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x)\,d\lambda = 2\pi J(A)$. Затем нуж- $J(A) \Rightarrow f(x),\ A \to \infty$ но использовать признак Дини сходимости интеграла Фурье и учесть непрерывность функции f в точке x. ⌋

Упражнение 33. Вычислить преобразование Фурье следующих функций: a) $f(x) = 1/(2a), x \in (-a, a)$, $f(x) = 0, |x| \geq a$, $a > 0$; b) $f(x) = ae^{-ax}, x \geq 0$, $f(x) = 0, x < 0$, $a > 0$; c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$, $x \in \boldsymbol{R}$, $a \in \boldsymbol{R}$, $\sigma > 0$.

Ответы. a) $\dfrac{\sin\lambda a}{\lambda a}$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$; b) $\dfrac{a}{a - i\lambda}$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$; c) $\pi e^{-|\lambda|}$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$;

d) $\exp\left(ia\lambda - \dfrac{\sigma^2\lambda^2}{2}\right)$, $\lambda \in R$.

Замечание. В том случае, когда преобразование Фурье $\hat{f}$ также абсолютно интегрируемо по R, формулы, выражающие f и $\hat{f}$ друг через друга, принимают следующий вид

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx,\ \lambda \in R; \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}\hat{f}(\lambda)\,d\lambda,\ x \in R.$$

16.4.4 Элементарные свойства преобразования Фурье

1^0. Пусть $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,du < +\infty$. Тогда преобразование Фурье $\hat{f}$ равномерно непрерывно на оси, причём $\hat{f}(\lambda) \to 0$, $|\lambda| \to +\infty$. т.к. $\hat{f}$ - равн. непр. по λ

⌈ Утверждение о непрерывности следует из теоремы о непрерывности по параметру равномерно сходящегося интеграла, то, что $\hat{f}(\lambda) \to 0$, $|\lambda| \to +\infty$ следует из леммы Римана. мажор. $\int |f(x)|dx$ ⌋

2^0. Если для некоторого числа $n \in N$ справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|^n)|f(x)|\,dx < +\infty,$$

то преобразование Фурье $\hat{f}$ имеет производные до порядка n включительно (каждая из них удовлетворяет 1^0), причём

$$\hat{f}^{(k)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}(ix)^k f(x)\,dx,\ \lambda \in R;\ 1 \le k \le n.$$

$\underline{K=1}$ проверим усл.

$\frac{d}{d\lambda}(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(-it)f(t)}_{\text{сх. р-но по } \lambda}$

В частности, $\hat{f}^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$, $1 \le k \le n$.

⌈ Это свойство есть результат последовательного применения теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. ⌋

3^0. Пусть $f \in C^{n-1}(R)$, существует $f^{(n)}$ на R, причём

$$f^{(k)}(x) \to 0,\ |x| \to +\infty,\ 0 \le k \le n-1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)|\,dx < +\infty,\ 0 \le k \le n.$$

Тогда $\widehat{f^{(n)}}(\lambda) = \left(\dfrac{\lambda}{i}\right)^n \hat{f}(\lambda)$, $\lambda \in R$.

⌈ Рассмотрим только случай $n = 1$. Используя формулу интегрирования по частям, получим следующее равенство $\widehat{f'}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underset{u}{e^{i\lambda x}}\, \underset{v'}{f'(x)}\,dx =$

$$= e^{i\lambda x} f(x)\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - i\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx = \frac{\lambda}{i}\hat{f}(\lambda),\quad \lambda \in R.$$ ⌋

Замечание. Заметим, что при условии 3^0 $\lambda^n \hat{f}(\lambda) \to 0$, $|\lambda| \to +\infty$.

4° Пусть функции f_1 и f_2 таковы, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_k(u)|\,du < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_k^2(u)|\,du < +\infty; \quad k = 1, 2.$$

Тогда ***свёртка функций*** f_1 и f_2

$$(f_1 * f_2)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u) f_2(u)\,du, \quad x \in \mathbf{R},$$

имеет следующее преобразование Фурье $\widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1 \cdot \hat{f}_2$.

⌈ При предположениях 4 выполнены условия теоремы об интегрировании по параметру по неограниченному промежутку несобственного интеграла. Поэтому $\widehat{f_1 * f_2}(\lambda) =$

перест. du, dx

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}(f_1 * f_2)(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} f_1(\underset{v}{x-u})\,dx \right) f_2(u)\,du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(u+v)} f_1(v)\,dv \right) f_2(u)\,du = \hat{f}_1(\lambda)\hat{f}_2(\lambda), \quad \lambda \in \mathbf{R}. \quad ⌋$$

16.4.5 Пример применения преобразования Фурье

Найдём решение $u : (\mathbf{R} \times [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ ***уравнения теплопроводности***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{8}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty. \tag{9}$$

Задачу решения уравнения (8) при условии (9) рассмотрим при следующих дополнительных предположениях: 1) для каждого $t \geq 0$ функция $u(\cdot, t)$ абсолютно интегрируема по $\mathbf{R}$, при каждом $t \geq 0 : \ u(x,t) \to 0$, $u_1'(x,t) \to 0$, $|x| \to +\infty$. Пусть $\hat{u}(\lambda, t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} u(x,t)\,dx$ для $\lambda \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$. Заметим, что

$$\hat{u}(\lambda, 0) = \hat{f}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbf{R}. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь преобразование Фурье равенства (8), учитывая формулу $\widehat{\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}} = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda, t)$. Получим следующее равенство

$$\frac{\partial \hat{u}(\lambda, t)}{\partial t} = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda, t), \quad t > 0, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

которое, в силу формулы (10), можно при каждом $\lambda \in \mathbf{R}$ рассматривать как дифференциальное уравнение относительно функции $\hat{u}(\lambda, \cdot)$ на

$[0,+\infty)$. Решение этого уравнения имеет вид $\hat{u}(\lambda,t) = \hat{f}(\lambda)e^{-\lambda^2 t}$, $t \geq 0$; $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Заметим теперь, что для $t > 0$, $x \in \boldsymbol{R}$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x}e^{-\lambda^2 t}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda x\,d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/(4t)}.$$

Последнее равенство можно получить следующим образом. Пусть $J(x) := \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda x\,d\lambda$, $x \in \boldsymbol{R}$, $t > 0$. Тогда

$$J'(x) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t}\lambda\sin\lambda x\,d\lambda = -\sin\lambda x\left(-\tfrac{1}{2t}\right)e^{-\lambda^2 t}\Big|_{\lambda=0}^{\lambda\to+\infty} - \frac{x}{2t}J(x),$$

откуда $J(x) = ce^{-x^2/(4t)}$, $x \in \boldsymbol{R}$, $c \in \boldsymbol{R}$. Заметим, что при $x = 0$ $c = J(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t}\,d\lambda = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$, $t > 0$.

В силу свойства 4^0 находим

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}}\,du, \quad t > 0, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

(ф. Пуасс.)

Упражнение 34. Пусть дополнительно к условиям (9) $f \in C(\boldsymbol{R})$. Доказать, что $\lim\limits_{t\to 0+} u(x,t) = f(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$.

16.4.6 Историческая справка

Фурье Жан Батист Жозеф (1768 — 1830) — французский математик. Его математические работы с новыми оригинальными методами посвящены математическому анализу, дифференциальным уравнениям, теории теплоты и численным методам. Эти работы послужили основой создания теории тригонометрических рядов и разработки ряда других современных проблем математики. И хотя Фурье предполагал, что всякая функция может быть представлена тригонометрическим рядом, его результаты и новые методы оказались исключительно плодотворными для многих разделов математики и её приложений. Точные условия сходимости тригонометрических рядов были получены затем Дирихле. Связанные с исследованием рядов Фурье работы Дирихле, а затем и Римана. оказали большое влияние на анализ многих понятий математики (непрерывность, дифференцируемость, понятие функции и др.) и разработку теории интеграла. Фурье участвовал в военном походе Наполеона в Египет, был губернатором Нижнего Египта и секретарём института, организованного Наполеоном в Каире. В 1827 г. занял место П. Лапласа в должности ректора Политехнической школы.

Парсевалъ М. А. (1755 — 1836) — французский математик, автор работ по теории дифференциальных уравнений и теории функций.

Равенство Парсеваля было установлено им чисто формально для тригонометрической последовательности ещё в 1799 г. Из этого равенства следует неравенство Бесселя. Идеи Парсеваля позже привели Гильберта к введению пространств, названных позже именем Гильберта.

Бессель Фридрих Вильгельм (1784 — 1846) — немецкий математик и астроном. Неравенство Бесселя было сформулировано им для тригонометрических рядов. Его именем назван класс цилиндрических функций и ряд других результатов.

Дини Улисс (1845 — 1918) — итальянский математик, автор работ по теории функций, специальным функциям, теории поверхностей, теории дифференциальных уравнений и алгебре.

Чезаро Эрнесто (1859 — 1906) — итальянский математик, автор работ по теории расходящихся рядов и геометрии. Предложил метод суммирования, названный его именем.

Фейер Липот (1880 — 1959) — венгерский математик, автор работ по теории функций, теории тригонометрических рядов, теории интерполяции и специальным функциям.

16.5 Дополнительные задачи к главам 13 — 16

1. Пусть $F(\alpha) = \int\limits_0^1 e^{-\alpha^2 x^2}\,dx$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Доказать, что $F \in C(\boldsymbol{R})$.

2. Пусть $F(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x)\,dx$, $\alpha > 1$. Доказать, что функция $F \in C^1((1,+\infty))$, и найти F'.

3. Пусть $F(\alpha) = \int\limits_\alpha^{\alpha^2} \sin(x^2 + 2^\alpha)\,dx$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Доказать, что $F \in C^1(\boldsymbol{R})$ и найти F'.

4. Определить те значения $\alpha \in \boldsymbol{R}$, для которых сходится интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^\alpha + 1} - \sqrt[3]{|x^\alpha - 1|}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Ответ. $\alpha < -\dfrac{1}{2}$, $\alpha > \dfrac{3}{4}$.

5. Доказать сходимость интеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{(-1)^{[1/x]}}{x}\,dx$.

6. При каких значениях $\alpha \in \boldsymbol{R}$ сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{(-1)^{[x]}}{x^\alpha}\,dx$?

Ответ. Сходится абсолютно при $\alpha > 1$ и условно при $0 < \alpha \le 1$.

7. Доказать сходимость интегралов:

a) $\int\limits_0^{+\infty} \exp(-x^4 \sin^2 x)\,dx$; b) $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \exp(-x^8 \sin^2 x)\,dx$.

8. Доказать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x+\sin x} e^{\cos x}\,dx$.

9. При каких значениях $\alpha \in \boldsymbol{R}$ сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^\alpha} \sin x\,dx$?

Ответ. Сходится абсолютно при $\alpha > 2$ и условно при $1 < \alpha \le 2$.

10. Доказать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\pi^2 - x^2}\,dx$.

11. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Ответ. Сходится при $\alpha < 1$ и $\beta < 1$.

12. Доказать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} x|\sin x|^{x^5}\,dx$.

13. Доказать сходимость интегралов:

a) $\int\limits_0^{+\infty} \cos(x+x^3)\,dx$; b) $\int\limits_0^{+\infty} \cos(x^2+\sin 2x)\,dx$; c) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2+\sin x)\,dx$.

14. Доказать условную сходимость интегралов:

a) $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^3\,dx$; b) $\int\limits_0^{+\infty} e^x \sin e^{2x}\,dx$; c) $\int\limits_0^{+\infty} e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x}\,dx$.

15. Вычислить следующие пределы: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \int\limits_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2}\,du \right)$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \int\limits_x^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du \right)$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{x} \frac{\sin u}{u}\,du \right)^{\sqrt{x}}$.

Ответ. a) 0, b) $\frac{1}{2}$, c) 1.

16. Для функции $f \in C^1(\boldsymbol{R})$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,dx$ сходится. Доказать существование пределов $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

17. Для функции $f \in C^1(\boldsymbol{R})$ интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,dx$ сходятся. Доказать, что $f(x) \to 0$, $|x| \to +\infty$.

18. Для функции $f \in C([0,+\infty))$ $f(0) = 0$ и $\sup\limits_{x\ge 0} |f(x)| < +\infty$, а для функции g сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |g(x)|\,dx$. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to 0+}\int\limits_0^{+\infty} f\left(\frac{\alpha}{x}\right)g(x)\,dx = 0.$$

19. Для функции $f \in C([0,+\infty))$ сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$, а функция $g \in C([0,+\infty))$ и ограничена на $[0,+\infty)$. Доказать, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} f(x+\lambda)g(x)\,dx = 0.$$

20. Функция f абсолютно интегрируема по $[0,+\infty)$ и при каждом $\lambda > 0$ отрезок $[a(\lambda), b(\lambda)] \subset [0,+\infty)$. Доказать: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int\limits_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$.

21. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}(\alpha^3 + x)\,dx$, $\alpha > 0$, сходится равномерно на отрезке $[1, 10]$.

22. Доказать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha^2 - x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}\,dx$, $\alpha \in R$, сходится равномерно на R.

23. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x^3}{x}\,dx$, $\alpha \in R$, сходится равномерно на множестве $[1,+\infty)$.

24. Доказать, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \cos(\alpha x^3)\,dx$, $\alpha \neq 0$, сходится равномерно на множестве $\{\alpha \mid |\alpha| \geq 1\}$.

25. Исследовать на равномерную сходимость интегралы:

a) $\int\limits_0^{+\infty} \sin x \cdot \sin\frac{\alpha}{x}\,dx$, $\alpha \in [0,1]$; b) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(\alpha e^x)\,dx$, $|\alpha| \geq 1$.

Ответ. a), b) сходится равномерно.

26. Доказать, что функция $F(\alpha) := \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha < 2$, непрерывна на множестве $[0,2)$.

27. Пусть $F(\alpha) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\,dx$, $\alpha < 1$. Доказать, что $F \in C((0,1))$.

28. Пусть $F(\alpha) := \int\limits_0^1 \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{|x-\alpha|}}$, $\alpha \in [0,1]$. Доказать, что $F \in C([0,1])$.

29. Доказать равенства:

a) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}dx}{x^\alpha} = 0$; b) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^\alpha}\,dx = 1$.

30. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^{n+1}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2x^2}\right) dx$, $\alpha > 0$, $n > 0$.

Ответ. $2^{(n-2)/2}\alpha^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$.

31. Вычислить пределы:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(x+1)}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^\alpha \mathrm{B}(\alpha, n))$, $\alpha > 0$.

Ответ. a) $\sqrt{e}$, b) $\Gamma(\alpha)$.

32. Пусть $A = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \le 1\}$. Рассмотрим множества $B_n = \left\{(x_1, x_2) \,\middle|\, \left(x_1 - \frac{1}{n}\right)^2 + x_2^2 \le \frac{1}{4^{2n}}\right\}$, $n \ge 1$. Доказать, что множество $A \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ измеримо и определить его площадь.

33. Пусть $f \in C([0,1]^2)$. Доказать, что равномерно по $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ справедливо утверждение

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\tfrac{k}{n}, x_2\right) x_1^k (1 - x_1)^{n-k} \to f(x_1, x_2), \quad n \to \infty.$$

34. Пусть M — компактное измеримое множество в R^m такое, что для любых $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из M существуют точки $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ из M такие, что отрезки, соединяющие точки $\vec{x}_k$ и $\vec{x}_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $\vec{x}_0 = \vec{x}$, $\vec{x}_{n+1} = \vec{y}$, лежат в M. Пусть $f \in C(M)$. Доказать, что справедливо следующее утверждение: $\exists\, \vec{\theta} \in M : \int\limits_M f(\vec{x})\, d\vec{x} = f(\vec{\theta})\, m(M)$.

35. Вычислить интегралы:

a) $\int\limits_{[0,1]^2} \min(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$; b) $\int\limits_{[0,1]^2} \max(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$.

Ответ. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{2}{3}$.

36. Доказать, что для $f \in R([0,1])$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{x_1} \left(\int_0^{x_2} f(x_1) f(x_2) f(x_3)\, dx_3\right) dx_2\right) dx_1 = \frac{1}{6} \left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^3.$$

37. Вычислить интеграл $\int\limits_A x_1 x_2^2\, dx_1\, dx_2$, где $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ x_1 \ge 0\}$.

Ответ. $\frac{2^6}{15}$.

38. Найти интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2m}(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_m.$$

Указание. Сделать замену $x_k = 1 - y_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Ответ. $1/2$.

39. Для функции $f \in C([0,1])$ вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{(j,k)\in Z^2,\\ j^2+k^2\le n^2}} f\left(\frac{j^2+k^2}{n^2}\right)\right).$$

Ответ. $\pi\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

40. Вычислить интеграл $\int\limits_A \frac{e^z}{2-\bar z}\,dx_1\,dx_2,\ z = x_1 + ix_2,\ A = \{z \mid |z| \le 1\}$.

Ответ. $\pi(e^{1/2}-1)$.

41. Пусть $f \in C(R)$, $f(x) \ge 0$ для $x \in R$ и $\int\limits_R f(x)\,dx = 1$. Для фиксированного $a > 0$ вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\cdots\int\limits_{\sum_{k=1}^n x_k^2\le a^2}\prod\limits_{k=1}^n f(x_k)\,dx_k$.

Ответ. 0.

42. Для функции $f \in C([0,1]^2)$ положим $F(t) := \int\limits_{A_t} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$ с множеством $A_t = \{(x_1,x_2) \mid 0 \le x_1 \le t,\ 0 \le x_2 \le t\}$, $t \in [0,1]$. Определить F'.

Ответ. $F'(t) = \int\limits_0^t f(t,x_2)\,dx_2 + \int\limits_0^t f(x_1,t)\,dx_1,\ t \in [0,1]$.

43. Для функции $f \in C([0,+\infty)^2)$ положим $F(t) := \int\limits_{A_t} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2$ с множеством $A_t = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le t\}$, $t \ge 0$. Определить F'.

Ответ. $F'(t) = \int\limits_0^t f(x_1, t - x_1)\,dx_1,\ t \ge 0$.

44. Для функции $f \in C(R^3)$ положим $F(t) := \int\limits_{A_t} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1\,dx_2\,dx_3$ с множеством $A_t = \{(x_1,x_2,x_3) \mid t^2 \le x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4t^2\}$, $t > 0$. Определить F'.

Ответ.

$$F'(t) = 8t^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(2t\cos\varphi\cos\psi, 2t\sin\varphi\cos\psi, 2t\sin\psi)\cos\psi\,d\varphi\,d\psi -$$

$$-t^2\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t\cos\varphi\cos\psi, t\sin\varphi\cos\psi, t\sin\psi)\cos\psi\,d\varphi\,d\psi.$$

45. Вычислить для $\alpha > -1, \beta > -1$ интегралы:

a) $\int\limits_A x_1^\alpha x_2^\beta\, dx_1\, dx_2, A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_2 \le 1 - x_1,\ x_1 \ge 0\}$;

b) $\int\limits_A e^{-x_1} x_2^\alpha\, dx_1\, dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_2 \le x_1\}$;

c) $\int\limits_A (1 - x_1)^\alpha x_2^\beta\, dx_1\, dx_2,\ A = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_2 \le x_1 \le 1\}$.

Ответ. a) $\dfrac{\mathrm{B}(\alpha + 1, \beta + 1)}{\alpha + \beta + 2}$; b) $\Gamma(\alpha + 1)$; c) $\dfrac{\mathrm{B}(\alpha + 1, \beta + 1)}{\alpha + \beta + 2}$.

46. Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma ((x_1 - x_2)\, dx_1 + dx_2)$, где Γ — граница множества $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 2x_1,\ x_2 \ge 0\}$, пробегаемая против часовой стрелки.

47. С помощью криволинейного интеграла вычислить:

a) площадь, ограниченную эллипсом; b) площадь множества, ограниченного кривыми $x_1 x_2 = 1,\ x_1 x_2 = 2,\ x_2 = x_1^2,\ x_2 = 2x_1^2$.

48. Вычислить интеграл $\int\limits_\Gamma (x_1 + x_2^2 + x_3^3)\, dl$, где Γ — граница треугольника с вершинами $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 2)$, $(0, 1, 1)$.

49. Пусть S – граница симплекса с вершинами $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Вычислить интегралы:

a) $\int\limits_S (x_1\, dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2\, dx_2 \wedge dx_3 + x_2 x_3\, dx_3 \wedge dx_1)$ по внешней стороне поверхности S;

b) $\int\limits_S (x_1 + x_2^2 + x_3^2)\, d\sigma$.

50. Найти ряд Фурье для функции $f(x) = -\pi/4,\ -\pi \le x < 0,\ f(x) = \pi/4,\ 0 \le x < \pi$ и исследовать его сходимость. Доказать, что

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\quad .$$

51. Найти ряд Фурье для функции $f(x) = |x|,\ x \in (-\pi, \pi]$, и исследовать его сходимость. Доказать, что

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots\quad .$$

52. Доказать равенство

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots = \frac{\pi}{4},\quad x \in (0, \pi).$$

53. Найти суммы рядов:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos(2n + 2)x}{2n + 1},\quad x \in (0, \pi)$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n},\quad x \in (0, 2\pi)$.

54. Доказать, что: a) $\int\limits_0^1 \dfrac{\ln(1 - x)}{x}\, dx = -\dfrac{\pi^2}{6}$; b) $\int\limits_0^1 \dfrac{1}{x} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}\, dx = \dfrac{\pi^2}{4}$.

55. Пусть $f \in C([0,1])$. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \overset{n}{\dots} \int_0^1 \frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{x_1+x_2+\ldots+x_n} \prod_{j=1}^n f(x_j)\,dx_j, \quad 1 \le k \le n, \quad n \ge 1.$$

Ответ. $\dfrac{k}{n}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^n$.

56. Пусть $f \in C([0,1])$. Доказать равенство

$$\int_0^1 \overset{n}{\dots} \int_0^1 \min(x_1,\ldots,x_n) \prod_{j=1}^n f(x_j)\,dx_j = \int_0^1 \left(\int_x^1 f(u)\,du\right)^n dx.$$

57. Доказать равенство

$$\int_0^1 \overset{n}{\dots} \int_0^1 (x_1x_2\ldots x_n)^{x_1x_2\ldots x_n} \prod_{j=1}^n dx_j = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 x^x \ln^{n-1}\frac{1}{x}\,dx, \; n \ge 1.$$

58. Доказать равенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\frac{1}{\alpha}e^x} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)^{3/2}}, \quad \alpha > 0$$

(асимптотическое разложение интеграла при $\alpha \to 0$).

59. Доказать равенство

$$\min_{\{a_1,\ldots,a_n\}\subset R} \int_0^{+\infty} e^{-x}(1+a_1x+\ldots+a_nx^n)^2\,dx = \frac{1}{n+1}, \quad n \ge 1.$$

60. Пусть $f \in C([0,+\infty))$ и $V(f,[0,+\infty)) < +\infty$. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

61. Пусть $f \in R([0,1])$ и $f(x) \to 0$, $x \to 0+$. Доказать, что

$$\lim_{\alpha\to 0+}\left(\alpha\int_\alpha^1 \frac{f(x)}{x^2}\,dx\right) = 0.$$

62. Доказать равенство

$$xy + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = \pi\min(x,y), \quad 0 \le x, y \le \pi.$$

Список основных обозначений

$\forall$ – для всех, для каждого

$\exists$ – существует

$\exists\,!$ – существует точно один

$:=$ – равно по определению

N – множество всех натуральных чисел

Z – множество всех целых чисел

Q – множество всех рациональных чисел

R – множество всех действительных чисел

C – множество всех комплексных чисел

R^m – m-мерное векторное пространство

$C_\alpha^0 := 1, \quad C_\alpha^k := \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}, \ k \in N$

A^t для матрицы (в частности, вектора) A обозначает транспонированную матрицу

$f : A \to B$ – функция (отображение, преобразование), определёная на множестве A и принимающая значения во множестве B

$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$

$f^{-1}(B) := \{x \mid f(x) \in B\}$

$\max\limits_A f$ $(\min\limits_A f)$ – наибольшее (наименьшее) значение функции f на множестве A

$\sup A$ $(\inf A)$ – точная верхняя (нижняя) грань множества A действительных чисел

$$\operatorname{sign} a := \begin{cases} 1, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

$[a]$ – целая часть числа a

$$1_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$f(a-) = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$ – предел функции f слева в точке a

$f(a+) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$ – предел функции f справа в точке a

O – отношение подчинённости

o – отношение пренебрежимости

$f \sim g$, $x \to x_0$ – отношение эквивалентности функций f и g при $x \to x_0$

$C(A)$ – множество всех функций $f : A \to \boldsymbol{R}$, непрерывных на множестве A

$C_b(A)$ – множество всех функций $f : A \to \boldsymbol{R}$, непрерывных и ограниченных на множестве A

$C(A, B)$ – множество всех функций $f : A \to B$, непрерывных на множестве A

$f'_-(a)$ $(f'_+(a))$ – производная слева (справа) действительной функции f в точке a

$C^n(A)$ $(C^n(A, \boldsymbol{R}^m))$ – множество всех функций $f : A \to \boldsymbol{R}$ $(f : A \to \boldsymbol{R}^m)$, имеющих непрерывные на A производные порядка n (компоненты которых имеют непрерывные на A производные порядка n)

$C^\infty(A) := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C^n(A)$

$\boldsymbol{Lip}_\alpha([a, b])$ – класс всех функций $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$, удовлетворяющих на отрезке $[a, b]$ условию Липшица с показателем α

$\boldsymbol{R}([a, b])$ – множество всех действительных функций, интегрируемых по Риману по отрезку $[a, b]$

$\boldsymbol{RS}(\alpha, [a, b])$ – множество всех действительных функций, интегрируемых по отрезку $[a, b]$ относительно функции α

$\boldsymbol{BV}([a, b])$ – множество всех функций ограниченной вариации на $[a, b]$

$V(f, [a, b])$ – вариация функции f на отрезке $[a, b]$

$\{a_n(x),\ x \in A \mid n \geq 1\}$ – последовательность действительных функций, заданных на множестве A

(X, ρ) – метрическое пространство с метрикой (расстоянием) ρ

$B(x_0, r) := \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}$

$\overline{B}(x_0, r) := \{x \in X \mid \rho(x, x_0) \leq r\}$

$S(x_0, r) := \{x \in X \mid \rho(x, x_0) = r\}$

$x_n \to x$, $n \to \infty$ в (X, ρ) – последовательность элементов $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset X$ сходится к элементу $x \in X$ при $n \to \infty$ в метрике ρ

$f'_{\vec{a}}(\vec{x})$ – производная по направлению $\vec{a}$ действительной функции нескольких переменных в точке $\vec{x}$

$f'_k(\vec{x}) := \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}$

$f''_{kj}(\vec{x}) := \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_k \partial x_j}$

$\nabla f(\vec{x}) := \mathrm{grad} f(\vec{x}) = \left(\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_m}\right)$ – градиент действительной функции от m переменных в точке $\vec{x}$

Указатели

Дороговцев А. Я.

Д 69 Математический анализ. Краткий курс в современном изложе нии. — Издание второе. — К.: Факт, 2004. — 560 с.

ISBN 966-8408-44-6

Книга содержит краткое и вместе с тем достаточно полное по охвату териала изложение современного курса математического анализа. (рассчитана в первую очередь на студентов университетов и техни ких вузов и предназначена для первоначального изучения курса. П ведено модернизированное изложение ряда разделов: функции мно переменных, кратные интегралы, интегралы по многообразиям, об формула Стокса и др. Теоретический материал иллюстрируется бс шим числом упражнений и примеров. Всего книга содержит около 1 примеров и упражнений.

Для студентов вузов, преподавателей математики, инженерно-тех ческих работников.

УДК 517(
ББК 22.16

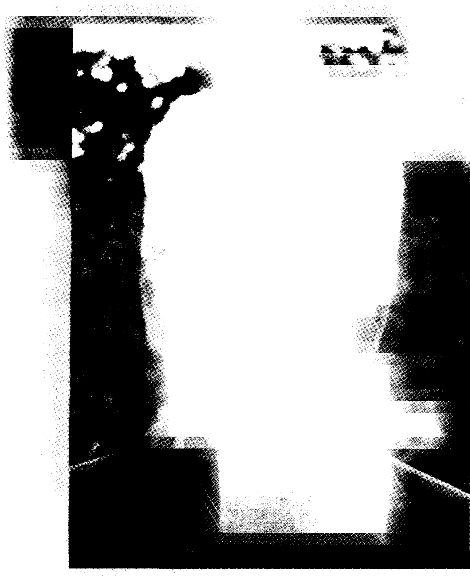
ДОРОГОВЦЕВ Анатолий Яковлевич
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Краткий курс в современном изложении
Киев, «Факт», 2004, 560 с.

Редактор *Анатолий Чуприн*
Корректор *Евгения Колодко*
Технический редактор *Оксана Кравченко*
Компьютерное макетирование *Александр Скопко*

ООО «Издательство „Факт"»
Регистрационное свидетельство
ДК №1284 от 19.03.2003
04080, Украина, Киев-80, а/я 76
Тел./факс: (044) 417 1366, 416 8754
E-mail: office@fact.kiev.ua
Отдел сбыта: (044) 468 6887
E-mail: sbyt@fact.kiev.ua
www.fact.kiev.ua

Зак. № 4-1168 Тираж 2 000
Сдано в набор 02.05.2004. Подписано в печать 16.05.2004. Формат 60x90/¹
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 26,8

ЗАО "ВИПОЛ", ДК № 15
03151, г. Киев, ул. Волынская, 60



Анатолий Яковлевич Дороговцев

Математический анализ

Краткий курс
в современном изложении

«...Книга является эффективным введением в математический анализ»

Zentralblatt MATH

Дорогой читатель!

Автора книги, которую ты держишь в своих руках, сегодня уже нет в живых. Мой отец, Дороговцев Анатолий Яковлевич, немного не дожил до семидесятилетия и до выхода в свет второго издания своего учебника по математическому анализу. 40 лет отец проработал в Киевском университете им. Т. Г. Шеченко, где с 1973 по 1998 г. г. заведовал кафедрой математического анализа. Анатолий Яковлевич является автором 24 учебных пособий для студентов вузов, учителей и учащихся средних школ, двух монографий, более 200 научных работ. Главными своими учебниками он всегда считал курс математического анализа и задачник к этому курсу. Отец самостоятельно разработал программу курса, который читался им на протяжении многих лет. Будучи членом бюро секции математики Научно-методического совета при Минвузе СССР, он использовал и обобщил традиционные подходы к изложению материала, а также учел современные тенденции. Некоторые разделы были включены им в нормативный курс впервые. Стремление к современному изложению, соответствию сегодняшнему развитию математики привело отца к переработке и подготовке настоящего переиздания, работа над которым была завершена в 2003 году. Книга во многом сохраняет дух лекций Анатолия Яковлевича. Он всегда стремился не только ясно и четко изложить необходимый материал, но и передать собственное отношение к предмету, который он страстно любил всю жизнь. До конца своих дней отец работал как профессиональный математик, и его последняя статья датирована 2004 г.

Я думаю, что настоящая книга будет полезна любому студенту, изучающему математический анализ, преподавателю, ведущему такой курс, каждому, кто хочет серьезно познакомиться с математикой.

Доктор физ.-мат. наук, профессор
Андрей Анатольевич Дороговцев