И.В. Третьяк

МАТЕМАТИКА

Наглядные материалы, комментарии

Все темы ГИА, ЕГЭ в виде схем и таблиц

ВЕСЬ ШКОЛЬНЫЙ КУРС В СХЕМАХ И ТАБЛИЦАХ

Наглядно

Доступно

Информативно

Логично

Эффективно

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я7
Т 66

Третьяк, Ирина Владимировна.

Т 66 Математика / И. В. Третьяк. — Москва : Эксмо, 2014. — 256 с. — (Весь школьный курс в схемах и таблицах).

ISBN 978-5-699-71188-8

Весь школьный курс по математике представлен в виде логических схем и информативных таблиц. Наглядное, четкое и схематичное изложение материала позволяет быстро усвоить большой объем информации, облегчить понимание сложных явлений, понятий, определений, обобщить и систематизировать знания.

Издание поможет учащимся эффективно подготовиться к сдаче ЕГЭ по математике.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я7

ISBN 978-5-699-71188-8

СОДЕРЖАНИЕ

1. АЛГЕБРА

2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

3. ФУНКЦИИ

4. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

5. ГЕОМЕТРИЯ

6. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

АЛГЕБРА

1

1.1. Числа, корни и степени

Множество натуральных чисел

N	Используются для счёта предметов: 1; 2; 3; ...

Множество целых чисел

<table>
<tr><td rowspan="3">Z</td><td>N</td><td rowspan="3">Натуральные числа 1; 2; 3; ...; противоположные им числа: −1; −2; −3; ... и число 0 образуют множество целых чисел</td></tr>
<tr><td>0</td></tr>
<tr><td>N_-</td></tr>
</table>

Множество рациональных чисел

<table>
<tr><td rowspan="2">Q</td><td>Z</td><td rowspan="2">Числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.

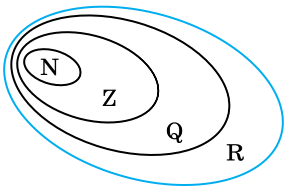
Рациональные числа — бесконечные периодические дроби. Если период состоит из одних нулей, дробь считается конечной десятичной</td></tr>
<tr><td>дроби</td></tr>
</table>

Множество действительных чисел

<table>
<tr><td rowspan="2">R</td><td>$\bar{Q}$</td><td rowspan="2">Иррациональные числа — бесконечные непериодические десятичные дроби.

Объединение рациональных и иррациональных чисел называют действительными числами</td></tr>
<tr><td>Q</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

	$5 \in \mathrm{N}$; $5 \in \mathrm{Z}$; $-7 \notin \mathrm{N}$; $-7 \in \mathrm{N}$; $0{,}37 \notin \mathrm{N}$; $0{,}37 \notin \mathrm{Z}$; $0{,}37 \in \mathrm{Q}$; $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathrm{R}$

Основные арифметические действия и их свойства

Сложение

$a+b=c$

a, b — слагаемые, c — сумма

Переместительное свойство	Сочетательное свойство	Распределительное свойство
$a+b=b+a$	$a+(b+c)=(a+b)+c$	—

Вычитание

$a-b=c$

a — уменьшаемое, b — вычитаемое, c — разность

Переместительное свойство	Сочетательное свойство	Распределительное свойство
$a-b=-(b-a)$	$a-(b-c)=a-b+c$ $(a-b)-c=a-b-c$	—

Умножение

$a \cdot b=c$

a, b — множители, c — произведение

Переместительное свойство	Сочетательное свойство	Распределительное свойство
$a \cdot b=b \cdot a$	$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$	$(a+b) \cdot c=ac+bc$ $(a-b) \cdot c=ac-bc$

Деление

$$a : b = c$$

a — делимое, b — делитель, c — частное

Переместительное свойство	Сочетательное свойство	Распределительное свойство
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\frac{b}{a}}$	Деление числа на произведение: $c:(a\cdot b) = (c:a):b = (c:b):a$ Деление произведения на число: $(a\cdot b):c = a\cdot(b:c) = (a:c)\cdot b$	Деление суммы (разности) на число: $\dfrac{a\pm b}{c} = \dfrac{a}{c} \pm \dfrac{b}{c}$

Свойства нуля и единицы

$a+0=a$; $a-0=a$; $0-a=-a$; $a+(-a)=0$; $a-a=0$ (a и $-a$ — противоположные числа). $a\cdot\dfrac{1}{a}=1$ (a и $\dfrac{1}{a}$ — взаимно обратные числа)	$a\cdot b=0$, если $a=0$ или $b=0$, или $a=b=0$. $\dfrac{a}{b}=0$ только при $a=0$, $b\neq 0$
Нуль делится на любое число; на нуль делить нельзя	

Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10

Делится на	Признак делимости
2	Число делится на 2, если его **последняя цифра** делится на 2

Окончание таблицы

3	Число делится на 3, если **сумма его цифр** делится на 3
5	Число делится на 5, если его **последняя цифра** 0 или 5
9	Число делится на 9, если **сумма его цифр** делится на 9
10	Число делится на 10, если его **последняя цифра** 0

Признаки делимости на 4, 25 и 11

Делится на	Признак делимости
4	Число делится на 4, если число, составленное из **двух его последних цифр**, делится на 4
25	Число делится на 25, если число, составленное из **двух его последних цифр**, делится на 25
11	Число делится на 11, если **алгебраическая сумма его цифр** $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_{n-1}$ делится на 11

Простые и составные числа

Простые числа имеют только два делителя: 1 и само число	делители числа 23: $23 \vdots 1$ и $23 \vdots 23$
Остальные числа имеют более двух делителей	число 12 имеет делители: 1, 2, 3, 4, 6, 12

Обыкновенные дроби

Основное свойство дроби	
Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число (выражение), не равное нулю	$\frac{a(b-c)}{m(b-c)} = \frac{a}{m}$ $\frac{25}{75} = \frac{1}{3}$; $\frac{22}{33} = \frac{2}{3}$
Сравнение дробей	
Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, числитель которой больше	$\frac{7}{13} < \frac{11}{13}$, т. к. $7 < 11$
Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше	$\frac{11}{21} < \frac{11}{15}$, т. к. $21 > 15$
Сложение и вычитание	
Если знаменатели равны, то числители складываются (вычитаются), а знаменатели сохраняются	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ $\frac{13}{21} - \frac{7}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$
Если знаменатели разные, то сначала дроби приводят к общему знаменателю, а потом складывают (вычитают) как дроби с одинаковыми знаменателями	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ $\frac{3}{7} + \frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 4 \cdot 7}{7 \cdot 9} =$ $= \frac{27 + 28}{63} = \frac{55}{63}$

Окончание таблицы

При сложении (вычитании) смешанных чисел можно сложить (вычесть) их целые и дробные части	$5\frac{1}{8}+1\frac{5}{6}=5+1+\frac{1}{8}+\frac{5}{6}=$ $=6+\frac{3+20}{24}=6\frac{23}{24}$
Умножение дробей	
При умножении дробей перемножают их числители и знаменатели	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 5}=\frac{6}{35}$
При умножении смешанных чисел их сначала превращают в неправильные дроби, а потом перемножают	$2\frac{2}{5}\cdot 7\frac{3}{8}=\frac{12}{5}\cdot\frac{59}{8}=$ $=\frac{177}{10}=17\frac{7}{10}$
Деление дробей	
При делении двух дробей деление заменяют умножением первой дроби на дробь, обратную второй	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc};$ $5\frac{1}{3}:1\frac{5}{9}=\frac{16}{3}:\frac{14}{9}=$ $=\frac{16\cdot 9}{3\cdot 14}=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}$
Возведение дроби в степень	
При возведении дроби в степень возводят числитель и знаменатель дроби в эту степень	$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{2^5}{3^5}=\frac{32}{243};$ $\left(1\frac{1}{5}\right)^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{36}{25}=1\frac{11}{25}$

Пропорции

Пропорция — равенство двух отношений $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ или $a:b=c:d$ ($a, b, c, d \neq 0$). Члены пропорции: a, d — крайние; c, b — средние	$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$; $2:4\frac{2}{3}=1:2\frac{1}{3}$
Основное свойство: произведение крайних членов пропорции равно произведению средних её членов: $ad=bc$	$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$; $8\cdot 3=12\cdot 2$; $2:4\frac{2}{3}=1:2\frac{1}{3}$; $4\frac{2}{3}\cdot 1=2\cdot 2\frac{1}{3}$
Каждый член пропорции — четвёртый пропорциональный член по отношению к трём другим	$a=\frac{bc}{d}$; $b=\frac{ad}{c}$; $c=\frac{ad}{b}$; $d=\frac{bc}{a}$

Проценты

Процент — это сотая часть некоторого числа (которое принимается за единицу)	$1\,\%=\frac{1}{100}$ $1\,\%$ от числа a — это $\frac{1}{100}a$
Преобразования процентов	
Чтобы выразить число в процентах, нужно его умножить на $100\,\%$	$0{,}23=0{,}23\cdot 100\,\%=23\,\%$; $0{,}07=0{,}07\cdot 100\,\%=7\,\%$; $5=5\cdot 100\,\%=500\,\%$
Чтобы записать проценты в виде числа, нужно число, стоящее перед знаком $\%$, разделить на 100	$13\,\%=13:100=0{,}13$; $2\,\%=2:100=0{,}02$; $123\,\%=123:100=1{,}23$

Продолжение таблицы

Нахождение процента от числа	
$p\,\%$ от числа a равно: $\dfrac{p}{100}\cdot a$	$20\,\%$ от числа 120 равно: $\dfrac{20\cdot 120}{100}=24$
Нахождение числа по данному проценту	
Если $p\,\%$ от некоторого числа равно m, то всё число a равно: $a=\dfrac{m\cdot 100}{p}$	Если $15\,\%$ от некоторого числа равно 45, то всё число равно: $\dfrac{45\cdot 100}{15}=300$
Нахождение процентного отношения двух чисел	
Число a составляет от числа b: $\dfrac{a}{b}\cdot 100\,\%$	Число 22 составляет от числа 88: $\dfrac{22}{88}\cdot 100\,\%=25\,\%$
Увеличение (уменьшение) на p %	
Число a увеличилось на $p\,\%$: $a+\dfrac{p\,\%}{100\,\%}=a\left(1+\dfrac{p\,\%}{100\,\%}\right)$	Число 110 увеличилось на $5\,\%$: $110\cdot\left(1+\dfrac{5}{100}\right)=$ $=110\cdot 1,05=115,5$
Число a уменьшилось на $p\,\%$: $a-\dfrac{p\,\%}{100\,\%}=a\left(1-\dfrac{p\,\%}{100\,\%}\right)$	Число 110 уменьшилось на $5\,\%$: $110\cdot\left(1-\dfrac{5}{100}\right)=$ $=110\cdot 0,95=104,5$

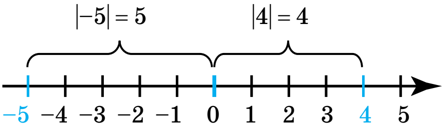
Окончание таблицы

Формула сложных процентов	
Если A_0 — начальный капитал (вклад), p — годовой процент, n — количество лет, то в конце n-го года капитал составит: $A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$	Если начальный капитал — 5 000 и годовой процент — 6, то в конце 3-го года капитал составит: $5000\cdot\left(1+\frac{6}{100}\right)^3 \approx 5955$

Модуль действительного числа

Модулем числа a называют расстояние от начала отсчёта до точки, которая изображает это число, на координатной прямой.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \\ 0, \text{ если } a = 0 \end{cases}$$



Степень

n-й степенью действительного числа a называется действительное число b, полученное в результате умножения числа a самого на себя n раз.

$$b = a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n},\quad n\in \mathrm{N}$$

a — основание степени, n — показатель степени

$0^n=0$ $(n>0)$; $1^n=1$; $a^1=a$; 0^0 — не определено

Степень с натуральным показателем $a^1 = a$; $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n}$, $a\in \mathrm{R}$, $n\in \mathrm{N}$	$2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$; $(-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27$; $0^7=0$; $1^{100}=1$; $(-1)^{99}=-1$; $(-1)^{100}=1$

Окончание таблицы

Степень с целым показателем $a^0 = 1,\ a \neq 0;\ 0^0$ — не определено; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},\ a \geq 0,\ n \in Z$	$(-3)^{-3} = \dfrac{1}{(-3)^3} = -\dfrac{1}{27}$; $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$; $1{,}3^{-2} = \left(\dfrac{13}{10}\right)^{-2} = \left(\dfrac{10}{13}\right)^2 = \dfrac{100}{169}$
Степень с рациональным показателем $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a \neq 0,\ m \in Z,\ n \in N,\ n > 2$	$36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$; $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = 3^2 = 9$; $(-8)^{\frac{1}{3}}$ — не определено; $32^{-\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{32^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{32^2}} = \dfrac{1}{4}$
Степень с иррациональным показателем a^k, где k — иррациональное число, $a \neq 0$	$10^{\sqrt{2}} \approx 10^{1{,}4142}\ldots \approx 25{,}9$

Основные свойства степени

Умножение степеней $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^2 = 4$; $8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)} = 8^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{1}{2}$; $5^{\sqrt{3}} \cdot 5^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
Деление степеней $a^m : a^n = a^{m-n}$	$5^{-2} : 5^{-5} = 5^{-2-(-5)} = 5^{-2+5} = 5^3 = 125$; $3^{2\sqrt{3}} : 3^{\sqrt{3}} = 3^{2\sqrt{3}-\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}}$

Окончание таблицы

Возведение степени в степень $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$	$((-2)^2)^{-3} = (-2)^{2\cdot(-3)} = (-2)^{-6} = = \frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{64}$; $\left(7^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{6}}$
Возведение в степень произведения $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$	$(-3ab^3c)^3 = -27a^3b^9c^3$; $0{,}5^7\cdot(-2)^7 = (0{,}5\cdot(-2))^7 = =(-1)^7 = -1$
Возведение в степень дроби $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$	$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$; $\frac{625^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{625}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = = (125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$

Корень степени n > 1 и его свойства

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число b, квадрат которого равен a: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^2 = a \end{cases}$	$\sqrt{36} = 6$, т. к. $6^2 = 36$, $6 > 0$; $\sqrt{25} \neq 5$, т. к. $8^2 \neq 25$; $\sqrt{25} \neq (-5)$, т. к. $-5 < 0$; $\sqrt{-3}$ — не определен
Тождества	
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $a \neq 0$	$\left(\sqrt{121}\right)^2 = 121$; $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$

Окончание таблицы

$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert, \ a \in \mathrm{R}$	$\sqrt{3^2} = \lvert 3 \rvert = 3;$ $\sqrt{(-21)^2} = \lvert -21 \rvert = 21;$ $\sqrt{\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2} = \left\lvert \sqrt{2} - \sqrt{3} \right\rvert =$ $= -\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Основные свойства корня степени *n* (*a* ≠ 0, *b* ≠ 0)

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ $\sqrt{ab} = \sqrt{\lvert a \rvert} \cdot \sqrt{\lvert b \rvert}$	$\sqrt{0,001} \cdot \sqrt{0,4} =$ $= \sqrt{0,001 \cdot 0,4} =$ $= \sqrt{0,0004} = 0,02;$ $\sqrt{121 \cdot 625 \cdot 100} =$ $= \sqrt{121} \cdot \sqrt{625} \cdot \sqrt{100} =$ $= 11 \cdot 25 \cdot 10 = 2\,750$
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}, \ b \neq 0$ $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \left\lvert \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right\rvert$	$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2;$ $\sqrt{\dfrac{144}{169}} = \dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}} = \dfrac{12}{13}$
$\left(\sqrt{a}\right)^p = \sqrt{a^p}$ $\sqrt{a^p} = \left(\sqrt{\lvert a \rvert}\right)^p$	$\sqrt{9^3} = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$
Если $a > 1$, то $a > \sqrt{a}$ и $\sqrt{a} > 1$; если $0 < a < 1$, то $a < \sqrt{a}$ и $0 < \sqrt{a} < 1$	$7 > \sqrt{7}$ и $\sqrt{7} > 1$; $\dfrac{1}{3} < \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ и $\sqrt{\dfrac{1}{3}} < 1$
Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$	$\sqrt{3} > \sqrt{2}$, т. к. $3 > 2$

Арифметические корни n-й степени при $n \geq 2$, $n \in N$

Арифметическим корнем n-й степени ($n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$) из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b, n-я степень которого равна a: $\left.\begin{matrix}\sqrt[n]{a} = b \\ n \in \mathrm{N},\ a \geq 0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^n = a \end{cases}$	$\sqrt[4]{81} = 3$; $\sqrt[5]{0,00001} = 0,1$; $\sqrt[5]{1024} = 4$; $\sqrt[3]{0,027} = 0,3$
Если $a < 0$, то $\sqrt[2n-1]{a} = -\sqrt[2n-1]{a}$	$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -3$; $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$; $\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-2\right)^3} = -\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{3}\right)^3} =$ $= -\left(2-\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 2$
Корень чётной степени из отрицательного числа не определён	
Тождества	
Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; $\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert$, $a \in \mathrm{R}$; $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}} = a$, $a \in \mathrm{R}$	$\left(\sqrt[4]{5}\right)^4 = 5$; $\left(\sqrt[5]{-2}\right)^5 = -2$; $\sqrt[6]{(-2)^6} = \lvert -2 \rvert = 2$; $\sqrt[7]{(-3)^7} = -3$

Основные свойства арифметического корня n-й степени

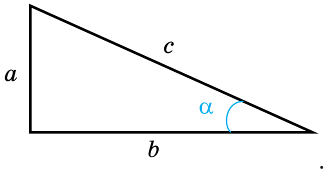
$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geq 0$, $m \in \mathrm{Z}$, $n \in \mathrm{N}$	$\sqrt[6]{8^8} = \sqrt[3]{8^4} = 2^4 = 16$; $\sqrt[12]{m^3} = \sqrt[4]{m}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $k \in \mathrm{N}$, $k \geq 2$, $a \geq 0$	$\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$

Окончание таблицы

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $k \in \mathrm{N}$, $k \geq 2$, $a \geq 0$	$\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$	$\sqrt[4]{16 \cdot 625} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{625} =$ $= 2 \cdot 5 = 10;$ $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$	$\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3};$ $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$
Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$; если $a > 1$, то $\sqrt[n]{a} > 1$ и $\sqrt[n]{a} < a$; если $0 < a < 1$, то $0 < \sqrt[n]{a} < 1$; $\sqrt[n]{a} > a$	$\sqrt[7]{5} > \sqrt[7]{3}$, т. к. $5 > 3$; $\sqrt[5]{2} > 1$, $\sqrt[5]{2} < 2$; $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < 1$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$

1.2. Основы тригонометрии

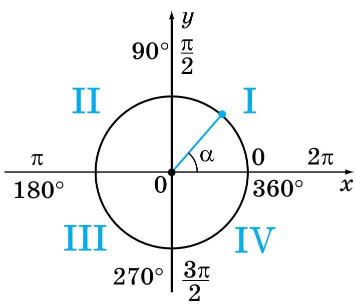
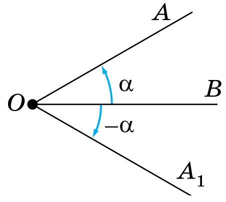
Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника

	a, b — катеты; c — гипотенуза; α — острый угол
Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

Окончание таблицы

Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$
Тангенсом угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$
Котангенсом угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$

Углы в тригонометрии

	Оси координат Ox и Oy разбивают окружность на четыре четверти: I четверть: $0° < \alpha < 90°$; II четверть: $90° < \alpha < 180°$; III четверть: $180° < \alpha < 270°$; IV четверть: $270° < \alpha < 360°$
 $\angle AOB = \alpha$; $\angle A_1OB = -\alpha$	В тригонометрии угол рассматривается как фигура, образованная вращением луча вокруг своей начальной точки O. Вращение **против** часовой стрелки — **положительное, по часовой — отрицательное**

Окончание таблицы

Углы измеряются в градусах и радианах

1° — это угол, который равен $\dfrac{1}{180}$ части развёрнутого угла.

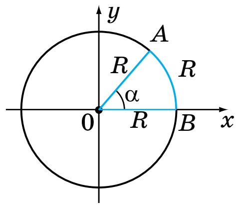
$1^\circ = 60'$ (60 минут)

$1' = 60''$ (60 секунд)

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$n^\circ = \frac{\pi \cdot n}{180^\circ}$$

$$135^\circ = \frac{\pi \cdot 135^\circ}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}$$



$\smile AB = R$, $\alpha = 1$

1 радиан — это центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная радиусу этой окружности.

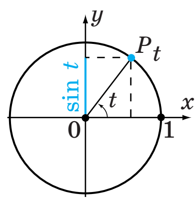
$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 150^\circ$$

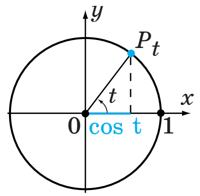
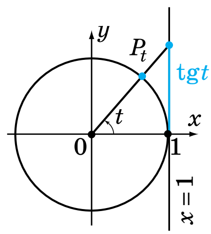
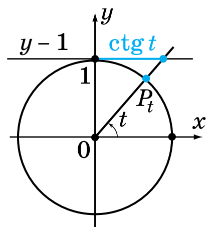
Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Синус, косинус, тангенс и котангенс числа

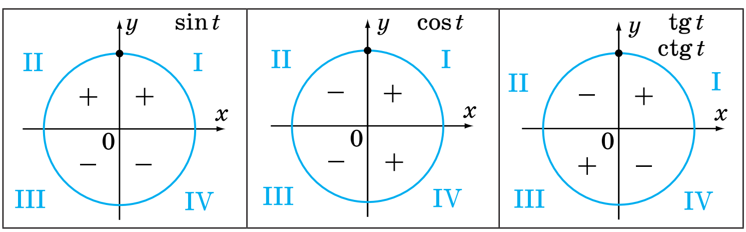
Синусом ($\sin t$) числа t называется ордината точки P_t единичной окружности.
Период $T = 2\pi$



Окончание таблицы

Косинусом ($\cos t$) числа t называется абсцисса точки P_t единичной окружности. Период $T = 2\pi$	
Тангенсом ($\operatorname{tg} t$) числа t называют отношение $\sin t$ и $\cos t$. Ось тангенсов — прямая $x = 1$. $\operatorname{tg} t$ — ордината соответствующей точки оси тангенсов: $\operatorname{tg} t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$. Период $T = \pi$	
Котангенсом ($\operatorname{ctg} t$) числа t называют отношение $\cos t$ и $\sin t$. Ось котангенсов — прямая $y = 1$. $\operatorname{ctg} t$ — абсцисса соответствующей точки оси котангенсов: $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$ Период $T = \pi$	

Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса



Значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

t, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t, градусы	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\mathrm{tg}\, t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0
$\mathrm{ctg}\, t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	0	—

Формулы приведения

t	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin t$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos t$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\, t$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, t$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$

Основные тригонометрические формулы

Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1;$ $\quad\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha;$ $\quad\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha,\ \alpha\in R$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq\pi n,\ n\in Z;$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha = 1,\quad n\neq\frac{\pi n}{2}$$

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\qquad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\quad \alpha\neq\pi n,\ n\in Z$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс суммы и разности двух углов	
$\sin(\alpha \pm \beta) =$ $= \sin\alpha\cos\alpha \pm \cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) =$ $= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$	$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, $\alpha, \beta, a \pm b \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}$, $\alpha, \beta, a \pm b \neq \pi n,\ n \in Z$

Формулы двойного и половинного углов

Формулы двойного угла	Формулы половинного угла
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ $\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$ $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$ $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$	$\left\lvert\sin\dfrac{\alpha}{2}\right\rvert = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$ $\left\lvert\cos\dfrac{\alpha}{2}\right\rvert = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$ $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi n,\ n \in Z$ $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$, $\alpha \neq \pi n,\ n \in Z$

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение
$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

$\alpha \ne \pi + 2\pi n,\ n \in Z$

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}};$$

$\alpha \ne \pi n,\ n \in Z$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \ne \pi n,\ n \in Z$$

Формула вспомогательного угла

$$a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\alpha),$$

где $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $a^2+b^2 \ne 0$

1.3. Логарифмы

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b

Обозначается: $\log_a b$	Читается: логарифм b по основанию a

$a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0$

Показательное равенство	**Логарифмическое равенство**
$a^x = b$	$x = \log_a b$
x — показатель степени; a — основание степени; b — степень числа a	x — логарифм числа a по основанию b; a — основание логарифма; b — число, стоящее под знаком логарифма

$2^7 = 128 \Leftrightarrow \log_2 128 = 7;$

$\log_3 = \dfrac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \dfrac{1}{9};$

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3} = 125 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$

Логарифмы по основанию 10 называют **десятичными**: $\log_{10} a = \lg a$	$\lg 10 = 1;\ \lg 0{,}1 = -1;$ $\lg 100 = 2;\ \lg 0{,}01 = -2;$ $\lg 1000 = 3;\ \lg 0{,}001 = -3$
Логарифмы по основанию e называют **натуральными**: $\log_e a = \ln a$. $e = 2{,}718281...$ — иррациональное число; $e \approx 2{,}7$	$\ln e = 1;\ \ln \dfrac{1}{e} = -1;$ $\ln e^2 = 2;\ \ln \dfrac{1}{e^2} = -2$

Свойства логарифмов

Основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$	$5^{\log_5 3} = 3;\ \ 3^{\log_3 5} = 5;$ $10^{\lg 7} = 7;\ \ e^{\ln 3} = 3$

Окончание таблицы

$\log_a 1 = 0,\ a > 0$ $\log_a a = 1,\ a \neq 1$	$\log_3 1 = 0;\ \lg 1 = 0;$ $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 1;\ \ln 1 = 0$
Логарифм произведения $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$ $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$	$\log_8 2 + \log_8 4 = \log_8 2 \cdot 4 =$ $= \log_8 8 = 1;$ $\log_3 18 = \log_3 (9 \cdot 2) =$ $= \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$
Логарифм частного $\log_c \dfrac{a}{b} = \log_c a - \log_c b,$ $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$	$\log_3 15 - \log_3 5 = \log_3 \dfrac{15}{5} =$ $= \log_3 3 = 1;$ $\log_2 \dfrac{2}{7} = \log_2 2 - \log_2 7 =$ $= 1 - \log_2 7$
Логарифм степени $\log_c a^k = k \log_c a$ $a > 0,\ c > 0,\ c \neq 1,\ k \in \mathrm{R}$	$\log_3 3^{10} = 10 \log_3 3 = 10;$ $\lg 10^p = p \lg 10 = p;$ $3 \log_8 4 = \log_8 4^3 = \log_8 64 = 2$
$\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$ $a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1,$ $m,\ n \in \mathrm{R},\ m \neq 0$	$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 =$ $= \dfrac{3}{2} \log_5 5 = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$
Переход к новому основанию $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b};$ $a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1$	$\log_a b = \dfrac{\lg b}{\lg a}$ $\log_3 7 = \dfrac{\ln 7}{\ln 3}$
$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a};$ $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1$	$\log_{36} 6 = \dfrac{1}{\log_6 36} = \dfrac{1}{2}$
$a^{\log_c b} = b^{\log_c a};$ $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,$ $c > 0,\ c \neq 1$	$8^{\log_2 5} = 5^{\log_2 8} = 5^3 = 125$

Сравнение логарифмов

Если $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$ (знак неравенства не меняется)	$2 < 3$, $\log 2 < \log 3$
Если $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$ (знак неравенства меняется)	$2 < 3$, $\log_{0,5} 2 > \log_{0,5} 3$

1.4. Преобразование выражений

Преобразование выражений, включающих арифметические операции

Числовые выражения. Действия с десятичными дробями	
Сложение и вычитание десятичных дробей: а) уравнять количество знаков после запятой, записать запятую под запятой; б) выполнить сложение, вычитание, не обращая внимания на запятую; в) поставить в ответе запятую под запятой	$0{,}37 + 26{,}5 = 26{,}87$ $\quad \begin{array}{r} 0{,}37 \\ +\ 26{,}50 \\ \hline 26{,}87 \end{array}$ $37 - 0{,}075 = 36{,}925$ $\begin{array}{r} 37{,}000 \\ -\ \ 0{,}075 \\ \hline 36{,}925 \end{array}$
Умножение десятичных дробей: а) выполнить действие, не обращая внимания на запятую; б) отделить в произведении столько знаков, сколько их имеется после запятой в обоих множителях вместе	$\begin{array}{r} 0{,}215 \\ \times\ 0{,}03 \\ \hline 0{,}00645 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times\ 0{,}003 \\ \hline 0{,}045 \end{array}$

Окончание таблицы

Деление десятичных дробей: 1. На натуральное число: а) разделить дробь на число, не обращая внимания на запятую; б) поставить в частном запятую после того, как закончено деление целой части; в) если целая часть меньше делителя, то частное начинается с нуля целых. 2. *На десятичную дробь*: в делимом и делителе запятую перенести на столько цифр, сколько их после запятой в делителе	$\begin{array}{r\|l} 30,6 & 9 \\ \underline{27} & \overline{3,4} \\ 36 & \\ \underline{36} & \\ 0 & \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 3,56 & 4 \\ \underline{32} & \overline{0,89} \\ 36 & \\ \underline{36} & \\ 0 & \end{array}$ $8{,}46:0{,}6 = 84{,}6:6 = 14{,}1;$ $0{,}00612:0{,}03 = 0{,}612:3 = 0{,}204;$ $27:0{,}15 = 2700:15 = 180$

Арифметические действия с рациональными числами

Сложение чисел с одинаковыми знаками: сложить модули данных чисел, перед суммой поставить общий знак	а) $(-6)+(-3{,}7) = -(6+3{,}7) = -9{,}7;$ б) $-5\frac{7}{8}+\left(-6\frac{3}{4}\right) = -\left(5\frac{7}{8}+6\frac{6}{8}\right) = -11\frac{13}{8} = -12\frac{5}{8}$
Сложение чисел с разными знаками: модуль суммы равен разности модулей слагаемых, знак суммы совпадает со знаком слагаемого, имеющего больший модуль	а) $4+(-10) = -(10-4) = -6;$ б) $5{,}6+(-4{,}1) = 5{,}6-4{,}1 = 1{,}5$
Вычитание чисел: чтобы вычесть из числа a число b, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому: $a-b = a+(-b)$	а) $-7-3 = -7+(-3) = -10;$ б) $-5-(-11{,}3) = -5+11{,}3 = 6{,}3;$ в) $10-25 = 10+(-25) = -15$

Окончание таблицы

Умножение и деление чисел: а) произведение (частное) чисел **одного знака** есть число **положительное;**	$-6\cdot(-2{,}1) = 12{,}6;$ $-22 : \left(-\dfrac{11}{17}\right) = \dfrac{22\cdot 17}{11} = 34;$
б) произведение (частное) двух чисел с **разными знаками** есть число **отрицательное**	$24:(-3) = -8;$ $-5 : 8 = -\dfrac{5}{8}$

Правила раскрытия скобок в числовых выражениях и выражениях с переменной

1. Если перед скобками стоит **знак «+»**, то, раскрывая скобки, можно: а) опустить скобки и знак «+»; б) записать слагаемые, стоящие в скобках, сохранив их знаки; в) если первое слагаемое, стоящее в скобках, записано без знака, то его нужно записать со знаком «+»	а) $-7{,}21+(3{,}5+7{,}21) =$ $= -7{,}21+3{,}5+7{,}21 = 3{,}5;$ б) $3{,}7+(-2{,}3+5) =$ $= 3{,}7-2{,}3+5 = 6{,}4;$ в) $a+(b-2a) = a+b-2a =$ $= b-a;$ г) $3x+(-x+2y) =$ $= 3x-x+2y = 2x+2y$
2. Если перед скобками стоит **знак «–»**, то, раскрывая скобки, можно: а) опустить скобки и знак «–»; б) записать слагаемые, стоящие в скобках, поменяв знаки всех слагаемых на противоположные; в) если первое слагаемое, стоящее в скобках, записано без знака, то его нужно записать со знаком «–»	а) $-2{,}5-(5{,}6+2{,}5) =$ $= -2{,}5-5{,}6-2{,}5 = -10{,}6;$ б) $-7{,}8-(-3{,}2-6{,}8) =$ $= -7{,}8+3{,}2+6{,}8 = 2{,}2;$ в) $a-(b-2a) = a-b+2a =$ $= 3a-b;$ г) $3x-(-x+2y) =$ $= 3x+x-2y = 4x-2y$

Одночлен

Одночлен — произведение чисел, переменных и их натуральных степеней, а также сами числа, переменные и их степени	$-3xy^2$; 8; $-ab$; 0; y^7; 5; $-a$

Действия с одночленами

Умножение одночлена на одночлен	$12a^2b\cdot(-5ab^7) = -60a^3b^8$
Деление одночлена на одночлен	$12x^7y^3z:(3xy^2z) = 4x^6y$

Многочлен

Многочлен — сумма нескольких одночленов	$2x^7-5x+1$; $5a+3b$
Подобные члены многочлена — одинаковые одночлены или одночлены, отличающиеся только коэффициентами	$\underline{3xy}+\underline{\underline{5x^2}}-\underline{5xy}+\underline{\underline{7x^2}}+5$

Действия с многочленами	
Сложение многочленов	$(a^2+ab-b^2)+(3a^2-2ab+b^2) =$ $= 4a^2-ab$
Вычитание многочленов	$(2a-b)-(-3a+b) =$ $= 2a-b-3a-b = a-2b$
Приведение подобных членов многочлена	$\underline{2ab}+\underline{\underline{3b^2}}-\utilde{2a^2}+\utilde{a^2}-\underline{5ab}+\underline{\underline{b^2}} =$ $= 4b^2-3ab-a^2$
Умножение одночлена на одночлен: $a(b+c) = ab+ac$	$-2x(3x^2-2x+3) =$ $= -6x^3+4x^2-6x$

Окончание таблицы

Деление многочлена на одночлен	$(6x^4-4x^2+6x^3-2x):(2x) =$ $= 3x^3-2x+3x^2-1$
Умножение многочлена на многочлен: $(a+b)(c+d) =$ $= ac+ad+bc+dc$	$(2x-5)(5y+1) =$ $= 10xy+2x-25y-5$

Формулы сокращённого умножения

Квадрат суммы	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
Куб суммы	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3a^2b+b^3$
Куб разности	$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
Сумма кубов	$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
Разность кубов	$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

Основные приёмы разложения многочлена на множители

Вынесение общего множителя за скобки	$15x^2y+5xy^2-10xy =$ $= 5xy(3x+y-2)$
Способ группировки	$ab+ac-b-c =$ $= a(b+c)-1(b+c) =$ $= (a-1)(b+c)$
Использование формул сокращённого умножения	$a^2+6ab+9b^2 = (a+3b)^2$ $a^4+4 = a^4+4a^2+4-4a^2 =$ $= (a^2+2)^2-(2a)^2 =$ $= (a^2-2a+2)(a^2+2a+2)$

Окончание таблицы

Дополнительные формулы: $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$ $a^{2m+1} + 1 = (a+1) \times (a^{2m} - a^{2m-1} + \ldots - a + 1)$ $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2n^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-2})$	$a^4 - 1 = (a-1)(a^3 + a^2 + a + 1)$ $x^5 - 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ $x^4 - a^4 = (x-a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3)$

Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень

Произведение степеней с одинаковыми основаниями	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$
Частное степеней с одинаковым показателем	$a^p : a^q = a^{p-q}$ $a^{p-q} = a^p : q^q = \dfrac{a^p}{a^q}$
Степень степени	$(a^p)^q = a^{pq}$ $a^{pq} = (a^p)^q = (a^q)^p$
Степень произведения и частного	$(ab)^p = a^p \cdot b^p;\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$ $a^p \cdot b^p = (ab)^p;\ \dfrac{a^p}{b^p} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^p$

Сравнение степеней

Основания различны	Основания одинаковы
Если $0 < a < b$, то $a^r < b^r$ при $r > 0$, $a^r > b^r$ при $r < 0$, r — рациональное число	Если $r > p$, то $a^r > a^p$ при $a > 1$ $a^r < a^p$ при $0 < a < 1$, r, p — рациональные числа

Преобразование выражений, включающих корни натуральной степени

Корень из произведения и произведение корней	Если $a \ge 0$, $b \ge 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
Корень из частного, частное корней	Если $a \ge 0$, $b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ и $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
Корень из степени и степень из корня	Если $a > 0$, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $n \in \mathrm{N}$, $n \ge 2$ $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \ge 0$, $n \in \mathrm{N}$, $n \ge 2$
Корень степени m из корня степени n	Если $a \ge 0$, то $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $m \ge 2$, $n \ge 2$

Тождественные преобразования иррациональных выражений

Вынесение множителя из-под знака корня	$\sqrt[n]{a^{n+m}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^m} =$ $= \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^m} = a\sqrt[n]{a^m}$, $n \in \mathrm{N}$, $n \ge 2$, $a \ge 0$
Внесение множителя под знак корня	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$, $a \ge 0$, $b \ge 0$, $n \in \mathrm{N}$, $n \ge 2$
Приведение подкоренного выражения к целому виду (иррациональность в знаменателе)	$\sqrt[n]{\frac{a}{b^k}} = \sqrt[n]{\frac{ab^{n-k}}{b^k b^{n-k}}} =$ $= \sqrt[n]{\frac{ab^{n-k}}{b^n}} = \frac{1}{b}\sqrt{ab^{n-k}}$, $a \ge 0$, $b > 0$

Окончание таблицы

Действия с корнями различных показателей	а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}=$ $=\sqrt[6]{2^3\cdot 2^2\cdot 2}=\sqrt[6]{2^6}=2;$ б) $\sqrt[3]{18}:\sqrt{6}=\sqrt[6]{18^2}:\sqrt[6]{6^3}=$ $=\sqrt[6]{\dfrac{3^4\cdot 2^2}{2^3\cdot 3^3}}=\sqrt[6]{\dfrac{3}{2}};$ в) $\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}=$ $=\sqrt[4]{\left(4+\sqrt{7}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{\left(23-8\sqrt{7}\right)}=$ $=\sqrt[4]{\left(16+8\sqrt{7}+7\right)\left(23-8\sqrt{7}\right)}=$ $=\sqrt[4]{\left(23+8\sqrt{7}\right)\left(23-8\sqrt{7}\right)}=$ $=\sqrt[4]{529-448}=$ $=\sqrt[4]{81}=3$
Формула двойного радикала	$\sqrt{a\pm b}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm$ $\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

Формулы	Примеры
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	**Упрощение выражений** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=$ $=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha}=$ $=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$

Окончание таблицы

Формулы	**Примеры**
	Доказательство тождества $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha.$ *Доказательство*: $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}=$ $=\dfrac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha}=$ $=\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha-1}{\dfrac{\cos\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}}=$ $=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha(1-\sin^2\alpha)}=$ $=\dfrac{2\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos^2\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$
Формулы сложения	
$\sin(\alpha\pm\beta)=$ $=\sin\alpha\cos\alpha\pm\cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha\pm\beta)=$ $=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	**Вычисление значений выражений** $\cos105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=$ $=\cos60^\circ\cos45^\circ-$ $-\sin60^\circ\sin45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$ **Упрощение выражений** $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=$ $=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta+$ $+\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta=$ $=2\ \cos\alpha\ \cos\beta$
Формулы двойного угла	
$\sin2\alpha=2\ \sin\alpha\ \cos\alpha$ $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	**Нахождение тригонометрических функций двойного угла** $\sin\alpha=-0{,}6;\ 180^\circ<\alpha<270^\circ;$ $\sin2\alpha$ — ?

Окончание таблицы

	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} =$ $= -\sqrt{1-0,36} = -\sqrt{0,64} = -0,8$, т. е. $\cos\alpha < 0$. $\sin 2\alpha = 2\cdot(-0,6)\cdot(-0,8) =$ $= 0,96$. **Упрощение выражений** а) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha =$ $= 2\cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$ $= 2\cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha =$ $= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$; б) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha} =$ $= \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha-(1-\operatorname{tg}\alpha)}{(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)} =$ $= \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha-1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} =$ $= \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}2\alpha$
Формулы приведения	
Для преобразования выражений вида: $\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)$; $\cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)$; $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)$; $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi n}{2}\pm\alpha\right)$, $n \in Z$ используются правила: а) перед приведённой функцией ставится знак исходной функции в этой четверти;	**Нахождение значений выражений** а) $\sin\dfrac{8\pi}{3} = \sin\left(2\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right) =$ $= \sin\dfrac{2\pi}{3} =$ $= \sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{6} = \operatorname{tg}\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right) =$ $= -\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

Окончание таблицы

б) функция меняется на кофункцию, если n — чётное; не меняется, если n — нечётное (кофункциями $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ являются $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ соответственно)	в) $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\operatorname{ctg} 330^\circ = \operatorname{ctg}(270^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$.
Упрощение выражений $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - \cos\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = 1$	

Сумма и разность тригонометрических функций

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	**Преобразование суммы в произведение** $\cos 40^\circ + \cos 10^\circ = 2\cos\frac{40^\circ + 10^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ - 10^\circ}{2} = 2\cos 25^\circ \cos 15^\circ$. **Упрощение выражений** $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$

Дополнительные тригонометрические формулы

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$ $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$
$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$ $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ $\sin\alpha + \cos\beta = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования

Логарифм произведения и сумма логарифмов	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$ $x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
Логарифм частного и разность логарифмов	$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$ $x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
Логарифм степени и произведение числа и логарифма	$\log_a x^n = n\log_a x$ $\log_a x = \dfrac{1}{k}\log_a x,\ \ x > 0,\ a > 0,$ $a \neq 1,\ k \neq 0$ $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n}\log_a x$ $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k}\log_a x,\ \ x > 0,\ a > 0,$ $a \neq 1,\ k \neq 0$

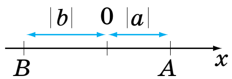
Окончание таблицы

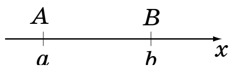
Формула перехода к новому основанию	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$ $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
Основное логарифмическое тождество	$a^{\log_a b} = b$ $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

Логарифмирование и потенцирование

Нахождение логарифмов чисел или выражений называется **логарифмированием**	$x = \dfrac{3x^7\sqrt{y}}{2b^3}$, $x > 0$, $y > 0$, $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ $\log_a x = \log_a \dfrac{3x^7\sqrt{y}}{2b^3} =$ $= \log_a 3 + \log_a x^7 + \log_a \sqrt{y} -$ $-(\log_a 2 + \log_a b^3) = \log_a 3 +$ $+ 7\log_a x + \dfrac{1}{2}\log_a y -$ $-\log_a 2 - 3\log_a b$.
Нахождение чисел или выражений по данным логарифмам называется **потенцированием**	$\lg x = \lg 5 - 3\lg 2 + \dfrac{1}{2}\lg 9$; $\lg x = \lg 5 - \lg 2^3 + \lg\sqrt{9}$; $\lg x = \lg \dfrac{5\cdot\sqrt{9}}{2^3}$; $\lg x = \lg \dfrac{15}{8}$; $x = \dfrac{15}{8}$

Модуль (абсолютная величина) числа и его свойства

<table>
<tr>
<td>$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \\ 0, \text{ если } a = 0 \end{cases}$</td>
<td>$|3{,}7| = 3{,}7;\ \left|-\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{2}{3};\ |0| = 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>




</td>
<td>Если точка A имеет на числовой прямой координату a, то расстояние от точки A до точки O равно $|a|$, т. е. $AO = |a|$.
Расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ на прямой равно $|a-b|$</td>
</tr>
<tr>
<th colspan="2">Свойства модуля</th>
</tr>
<tr>
<td>$|a| \geq 0$
$|-a| = |a|$
$a \leq |a|$
$|a+b| \leq |a|+|b|$
$|a+b| \geq |a|-|b|$
$|a-b| \geq ||a|-|b||$
$|a-b| \leq |a|+|b|$</td>
<td>$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|},\ b \neq 0$
$|ab| = |a|\cdot|b|$
$|a^n| = |a|^n,\ n \in \mathrm{N}$
$|a|^2 = a^2$
$|a|^{2k} = a^{2k}$
$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>По определению модуля
$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$</td>
<td>$|a-2| = \begin{cases} a-2, \text{ если } a-2 \geq 0 \\ -(a-2), \text{ если } a-2 < 0, \end{cases}$
т. е. $|a-2| = \begin{cases} a-2, \text{ если } a \geq 2 \\ -a+2, \text{ если } a < 2 \end{cases}$</td>
</tr>
</table>

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

2

2.1. Уравнения

Уравнение — равенство, содержащее переменную	$3x = 0$; $x^2+3 = 8$; $x(x-2) = 7$
Корень уравнения (решение) — значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство	$x^3+x = 0$ — один корень: $x = 0$; $(x-1)(x+2) = 0$ — два корня: $x = 1$ и $x = -2$; $\sin x = \frac{1}{2}$ — бесчисленное множество корней; $x^2+x+1 = 0$ — нет корней; $x^2+2x+1 = (x+1)^2$ — бесчисленное множество корней, $x \in R$
Решить уравнение — это значит найти все его корни или доказать, что их нет	$2x-7 = 3$; $x = 5$ $2x-1 = 2x$; корней нет
Равносильные уравнения — уравнения, имеющие одни и те же корни	$x-3 = 6$ и $\frac{x^2+81}{x+9} = 0$

Свойства уравнений

Если из одной части уравнения перенести слагаемые в другую часть и при этом изменить знак слагаемых на противоположный, получим уравнение, равносильное данному	$-2(2x-3)+3 = 17$; $-4x+6+3 = 17$; $-4x = 17-6-3$; $-4x = 8$ $x = 8:(-4)$; $x = -2$

Окончание таблицы

При делении (умножении) обеих частей уравнения на одно и то же число, неравное нулю, получим уравнение, равносильное данному	

Линейные уравнения $ax = b$ (приводимые к виду $ax = b$)

$a \neq 0$	$a = b = 0$	$a = 0,\ b \neq 0$
один корень $x = \frac{b}{a}$	бесчисленное множество корней $x \in R$	корней нет
$2x = -7$; $x = -\frac{7}{2}$; $x = -3{,}5$	$0 \cdot x = 0$; $x \in R$	$0 \cdot x = 7$; корней нет

Квадратные уравнения

Квадратное уравнение — это уравнение вида $ax^2+bx+c = 0,\ a \neq 0$, где x — переменная, a, b, c — коэффициенты	$2x^2+5x-4 = 0$ $a = 2$ — первый коэффициент; $b = 5$ — второй коэффициент; $c = -4$ — свободный член
Если $a = 1$, то уравнение $x^2+bx+c = 0$ называется **приведённым**	$x^2-6c+8 = 0$
Если в уравнении $b = 0$ и (или) $c = 0$, то уравнение называют **неполным.** $ax^2+bx = 0$; $ax^2+c = 0$; $ax^2 = 0$	$2x^2+3x = 0$; $x^2-4 = 0$; $-5x^2 = 0$

Решение неполных квадратных уравнений

Виды уравнений	Примеры
$\boxed{c = 0}$ $ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b) = 0$ $x_1 = 0;\ x_2 = -\dfrac{b}{a}$	$2x^2 - 7x = 0$ $x(2x - 7) = 0$ $x = 0$ или $2x - 7 = 0$ $x_1 = 0$ $x_2 = 3{,}5$
$\boxed{b = 0}$ $ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$: а) $c > 0$, корней нет; б) $c < 0$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$	а) $3x^2 - 9 = 0$ $3x^2 = 9$ $x^2 = 3$ $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$ б) $x^2 + 16 = 0$ $x^2 = -16$ корней нет
$\boxed{b = 0,\ c = 0}$ $ax^2 = 0$ $x = 0$	$7x^2 = 0$ $x^2 = 0$ $x = 0$

Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по формуле

$D = b^2 - 4ac$	Корни уравнения
$D > 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$D = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$
$D < 0$	корней нет
$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	

Частные формулы для решения квадратных уравнений

Квадратное уравнение **с чётным вторым коэффициентом**	$ax^2+2kx+c=0$ $(b=2k)$ $x_{1,2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$
Приведённое квадратное уравнение с чётным вторым коэффициентом	$x^2+2kx+c=0$ $(a=1,\ b=2k)$ $x_{1,2}=-k\pm\sqrt{k^2-c}$

Квадратный трёхчлен

Квадратный трёхчлен — это многочлен второй степени	ax^2+bc+c $(a\neq 0)$
Корень квадратного трёхчлена ax^2+bx+c	число x_0, для которого $ax_0^2+bx_0+c=0$
Корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Теорема Виета

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, то

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Если x_1 и x_2 — корни квадратного приведённого трёхчлена x^2+bx+c, то $x_1+x_2=-b$; $x_1\cdot x_2=c$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, то выполняется равенство $ax^2+bx+c=$ $=a(x-x_1)(x-x_2)$	$2x^2-x-3$ имеет корни $x_1=$ $=-1{,}5$; $x_2=1{,}5$ и $x_2=-1$, тогда $2x^2-x-3=$ $=2(x-1{,}5)(x+1)=$ $=(2x-3)(x+1)$

Уравнения, сводящиеся к квадратным

Рациональные уравнения —
уравнения, в которых левая и правая части представлены рациональными выражениями

⇓

Целые — левая и правая части — целые выражения.

$3(x-1) = x+3$; $\frac{1}{3}x = \frac{x-2}{2}$

⇓

Дробные — уравнения, у которых хотя бы одна часть — дробное выражение.

$\frac{2x+1}{x} = 4$ или $\frac{x}{x-1} = \frac{3}{x+1}$

Дробно-рациональные уравнения

Алгоритм решения	Пример
1. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение. 2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель. 3. Решить полученное целое уравнение. 4. Исключить из его корней те, которые обращают знаменатель в нуль	$\frac{x-2}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{-3}{x(x-3)}$ *Решение.* Общий знаменатель $x(x-3)$. Умножим на него обе части ($x \neq 0$ и $x \neq 3$): $\frac{(x-2)\cdot x(x-3)}{x-3} + \frac{1\cdot x(x-3)}{x} = -\frac{3x(x-3)}{x(x-3)}$; $(x-2)x + x - 3 = -3$; $x^2 - x = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; но $x \neq 0$. *Ответ*: 1.

Целые уравнения высших степеней, сводящиеся к квадратным

Метод решения	Пример
Разложение многочлена на множители	$x^3-x^2-9x+9=0$; $x^2(x-1)-9(x-1)=0$; $(x-1)(x^2-9)=0$; $(x-1)(x-3)(x+3)=0$; $x_1=1$; $x_2=3$; $x_3=-3$
Замена переменной	Биквадратное уравнение: $x^2+5x^2-36=0$. Сделаем замену: $x^2=t$. $t^2+5t-36=0$; $t_1=4$; $x^2=4$; $x_{1,2}=\pm2$; $t_2=-9$; $x^2=-9$; уравнение корней не имеет

Иррациональные уравнения

Уравнение, в котором переменная находится под знаком корня, называется **иррациональным**	$\sqrt{x+3}=4$; $\sqrt[3]{x}=\sqrt{x}+2$

Особенности решения иррациональных уравнений

1. У уравнения корни чётной степени — арифметические, поэтому значение корня и подкоренное выражение неотрицательно.
2. Решение уравнения начинают с нахождения области определения (**область определения** (или область допустимых значений) — это множество всех действительных чисел x, при которых одновременно имеют смысл выражения, входящие в уравнение)

Основные методы решения иррациональных уравнений

Возведение обеих частей уравнения в степень	$\sqrt{9-x} = x+3$ Область определения функции: $9-x \geq 0,\ x \leq 9.$ $\left(\sqrt{9-x}\right)^2 = (x+3)^2;\ 9-x =$ $= x^2+6x+9;\ x(x+7) = 0;\ x_1 = 0;$ $x_2 = -7.$ Проверка показала, что $x = -7$ — посторонний корень. *Ответ*: 0.
«Изоляция» корня	$\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3;$ ОДЗ: $\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 3-x \geq 0; \end{cases}$ $x \in [-2;\ 3].$ $\sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{3-x};$ $\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = \left(3-\sqrt{3-x}\right)^2;$ $x+2 = 9 - 6\sqrt{3-x} + 3 - x;$ $5 - x = 3\sqrt{3-x};$ $25-10x+x^2 = 9(3-x);\ x^2-x-2 = 0;$ $x_1 = -1;\ x_2 = 2.$ Проверка показала, что оба корня являются корнями уравнения. *Ответ*: −1; 2.
Уравнение вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[m]{g(x)}$ возводят в степень, k — наименьшее общее кратное чисел m и n	$\sqrt{x-1} = \sqrt[3]{x+1};$ ОДЗ: $x \geq 1.$ Возведём обе части уравнения в шестую степень: $\left(\sqrt{x-1}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^6;\ (x-1)^3 =$ $(x+3)^2;$ $x^3-4x^2-3x-10 = 0.$ Подбором находим $x = 5.$ $(x-5)(x^2+x+2) = 0;\ x^2+x+2 = 0$ — корней не имеет. Проверка показала, что $x = 5$ — корень уравнения. *Ответ*: 5.

Тригонометрические уравнения

Обратные тригонометрические функции

Определение	Свойства
Арксинусом числа a называется угол (число) из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a. $\boxed{\arcsin a = \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin\varphi = a \end{cases}$ $\lvert a \rvert \le 1$	$\arcsin(-a) = -\arcsin a$; $\sin(\arcsin a) = a$; $\arcsin(\sin\varphi) = \varphi$, если $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
Арккосинусом числа a называется угол (число) из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a. $\boxed{\arccos a = \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in [0; \pi] \\ \cos\varphi = a \end{cases}$ $\lvert a \rvert \le 1$	$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$; $\cos(\arccos a) = a$; $\arccos(\cos\varphi) = \varphi$, если $\varphi \in [0; \pi]$
Арктангенсом числа a называется угол (число) из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a. $\boxed{\mathrm{arctg}\, a = \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \mathrm{tg}\,\varphi = a \end{cases}$	$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a$; $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, a) = a$; $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\varphi) = \varphi$, если $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
Арккотангенсом числа a называется угол (число) из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a. $\boxed{\mathrm{arcctg}\, a = \varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \in (0; \pi) \\ \mathrm{ctg}\,\varphi = a \end{cases}$	$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$; $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, a) = a$; $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\,\varphi) = \varphi$, если $\varphi \in (0; \pi)$

Окончание таблицы

$\arcsin a + \arccos a = \dfrac{\pi}{2}$	$\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arctg}\, a = \dfrac{\pi}{2}$

Простейшие тригонометрические уравнения

$\boxed{\sin x = a}$ $\lvert a\rvert > 1$ — корней нет; $\lvert a\rvert \le 1$; $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$; $\boxed{\sin x = 0}$ $x = \pi k,\ k \in Z$; $\boxed{\sin x = 1}$ $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$; $\boxed{\sin x = -1}$ $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$	а) $\sin x = \sqrt{3}$; корней нет, т. к. $\sqrt{3} > 1$; б) $\sin x = \dfrac{1}{2}$; $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; в) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$; $x = (-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; г) $\sin x = \dfrac{1}{3}$; $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$; д) $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{7}$; $3x - \dfrac{\pi}{6} = (-1)^{n+1} \arcsin \dfrac{1}{7} + \pi n$; $3x = (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{7} + \dfrac{\pi}{6} + \pi n$; $x = (-1)^n \dfrac{1}{3} \arcsin \dfrac{1}{7} + \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$
$\boxed{\cos x = a}$ $\lvert a\rvert > 1$ — корней нет; $\lvert a\rvert \le 1$; $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$;	а) $\cos x = -15$; корней нет, т. к. $\lvert -15\rvert > 1$; б) $\cos x = \dfrac{1}{2}$;

Окончание таблицы

$\boxed{\cos x = 0}$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;$	$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$
$\boxed{\cos x = 1}$ $x = 2\pi k,\ k \in Z;$ $\boxed{\cos x = -1}$ $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$	в) $\cos x = -\frac{1}{2};$ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$ г) $\cos x = \frac{2}{3};$ $x = \pm\arccos\frac{2}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;$ д) $\cos x = -\frac{2}{3};$ $x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{2}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$ е) $\cos\frac{x}{3} = 1;\ \frac{x}{3} = 2\pi n;$ $x = 6\pi n,\ n \in Z$
$\boxed{\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}}$ $x = \mathrm{arctg}\,a + \pi k,\ k \in Z$	а) $\mathrm{tg}\,x = 3;\ x = \mathrm{arctg}\,3 + \pi n,\ n \in Z;$ б) $\mathrm{tg}\,x = -4;\ x = -\mathrm{arctg}\,4 + \pi n,$ $n \in Z;$ в) $\mathrm{tg}\,\frac{x}{4} = 1;\ \frac{x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n;$ $x = \pi + 4\pi n,\ n \in Z$
$\boxed{\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}}$ $x = \mathrm{arcctg}\,a + \pi k,\ k \in Z$	а) $\mathrm{ctg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}};\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z;$ б) $\mathrm{ctg}\,x = -3;\ x = \pi - \mathrm{arcctg}\,3 + \pi k,$ $k \in Z;$ в) $\mathrm{ctg}\,x = -1;\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

Основные методы решения тригонометрических уравнений

<table>
<tr><td colspan="2">Тригонометрические уравнения, приводимые к уравнениям от одной тригонометрической функции одной переменной, решаются (как правило) методом подстановки</td></tr>
<tr><td>$\sin^2 x+4\cos x=2{,}75$;
$1-\cos^2 x+4\cos^2 x=$
$2{,}75$; $\cos x=t$, $|t|\le 1$;
$t^2-4t+1{,}75=0$; $t=\frac{1}{2}$;
$t=\frac{7}{2}>1$;
$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$</td><td>$\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x=4$; $\operatorname{tg}x+\frac{3}{\operatorname{tg}x}=4$;
$\operatorname{tg}x=t$; $t^2-4g+3=0$; $t=1$,
$t=3$;
$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi n, \\ x=\operatorname{arctg}3+\pi k, \end{array}\right.\quad n,\ k\in Z$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Однородные тригонометрические уравнения
и сводящиеся к ним</td></tr>
<tr><td>$2\sin x\cos x-\cos^2 x=0$;
$\cos x(2\sin x-\cos x)=0$;
$\cos x=0\Rightarrow$
$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$;
$2\sin x-\cos x=0$.
Корни уравнения $\cos x=0$ не удовлетворяют этому уравнению. Делим на $\cos x\ne 0$.
$2\operatorname{tg}x-1=0$; $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$;
$x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z$</td><td>$5\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\cos^2 x=2$;
$5\sin^2 x+\frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x-2\cos^2 x=$
$2(\sin^2 x+\cos^2 x)$; $3\sin^2 x+\sin x$
$\cos x-4\cos^2 x=0$.
$\cos x\ne 0$. Делим на $\cos^2 x$.
$3\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}x-4=0$; $\operatorname{tg}x=1$
и $\operatorname{tg}x=-\frac{4}{3}$;
$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi n, \\ x=-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi k, \end{array}\right.\quad n,\ k\in Z$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Разложение на множители</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-2=\cos x-2\sqrt{2}\sin x$;
$\sqrt{2}\sin x\cos x-\cos x-2+2\sqrt{2}\sin x=0$;</td></tr>
</table>

$\cos x\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)-2\left(1-\sqrt{2}\sin x\right)=0;$ $\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)(\cos x+2)=0;$ $\sqrt{2}\sin x-1=0$	или $\cos x+2=0$
$\sin x=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$ $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$	$\cos x=-2$ корней нет

Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)}=b$, $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ (где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$) называются **простейшими показательными.**		
$a^{f(x)}=a^{g(x)},\ a>0,\ a\neq 1$ $\Updownarrow$ $f(x)=g(x)$	а) $3^{2x+4}=9$ $3^{2x+4}=3^2$ $2x+4=2$ $x=-1$	б) $2^{x+3}=-4$ корней нет, т. к. $-4<0$
$a^x=b,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0$ $\Updownarrow$ $x=\log_a b$	$3^x=9$ $x=2$	$2^x=7$ $x=\log_2 7$
	$2^x=-5$, корней нет	

Основные методы решения показательных уравнений

Сведение обеих частей уравнения к одному основанию	$2^{x-3}\cdot 4^x=\dfrac{\sqrt{2}}{16^x};\quad 2^{x-3}\cdot 2^{2x}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-4x};$ $2^{x-3+2x}=2^{\frac{1}{2}-4x};\quad 3x-3=\dfrac{1}{2}-4x;$ $x=\dfrac{1}{2}$
Вынесение за скобки общего множителя	$5^x-2\cdot 5^{x-2}=23;\ 5^{x-2}(5^2-2)=23;$ $5^{x-2}\cdot 23=23;\ 5^{x-2}=1;\ 5^{x-2}=5^0;$ $x-2=0;\ x=2$

Окончание таблицы

Замена переменной	$4^{x+1}-3\cdot2^x-10=0$; $4\cdot4^x-3\cdot2^x-10=$ $=0$; $2^x=t$, $t>0$; $4^x=2^{2x}=t^2$; $4t^2-3t-10=0$; $t=2$ и $t=-\frac{5}{4}$ — корней нет; $2^x=2$; $x=1$
Однородные уравнения и сводящиеся к ним	$4^x+3\cdot6^x-4\cdot9^x=0$; $2^{2x}+3\cdot2^x\cdot3^x-4\cdot3^{2x}=0$. Делим обе части уравнения на $3^{2x}\neq0$. $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-4=0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$, $t>0$; $t^2+3t-4=0$; $t_1=1$, $t_2=-4$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$; $x=0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x=-4$; корней нет

Логарифмические уравнения

Логарифмическими называются уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма	$\log_2(2x-3)=1$; $\log_5x^2=\log_5(x+7)$; $\lg\lg x=3$

Основные виды логарифмических уравнений и методы их решения

$\log_a f(x)=b \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)=a^b,\\ a>0,\\ a\neq1\end{cases}$	$\log_2(x-3)=4$; $\begin{cases}x-3=2^4,\\ x-3>0;\end{cases}$ $x=19$
$\log_{f(x)}g(x)=b \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)^b=g(x),\\ f(x)>0,\\ f(x)\neq1,\\ g(x)>0\end{cases}$	$\log_x(2x^2-3x-4)=2$; $\begin{cases}2x^2-3x-4=x^2,\\ x>0,\\ x\neq1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=-1,\end{array}\right.\\ x>0,\\ x\neq1\end{cases} \Rightarrow$ $x=4$

Продолжение таблицы

$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\log_3(x^2-4x-5) = \log_3(7-3x) \Rightarrow$ $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 7 - 3x, \\ 7 - 3x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0, \\ x < \dfrac{7}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -3, \end{array}\right. \\ x < \dfrac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow x = -3$
$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = h(x), \\ g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} g(x) = h(x), \\ h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$	$\log_x(3x-1) = \log_x(2x+5);$ $\begin{cases} 3x - 1 = 2x + 5, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ 3x - 1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ x > \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $x = 6$
$\log_a f(x) + \log_a g(x) =$ $= \log_a h(x) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) \cdot g(x) = h(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0 \end{cases}$	$\lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2;$ $\lg(x-9)(2x-1) = \lg 100;$ $\begin{cases} (x-9)(2x-1) = 100, \\ x - 9 > 0, \\ 2x - 1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 19x + 9 = 100, \\ x > 0, \\ x > \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 13, \\ x = -3{,}5, \end{array}\right. \\ x > 9; \end{cases}$ $x = 13$
$\log_a f(x) - \log_a g(x) =$ $\log_a h(x) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \log_a h(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0 \end{cases}$	$\log_2(x+1) = \log_3 27 - \log_2(x+3);$ $\log_2(x+1) = \log_3 \dfrac{27}{x+3};$ $\begin{cases} x + 1 = \dfrac{27}{x+3}, \\ x + 1 > 0, \\ x + 3 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 = 0, \\ x > -1; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -5, \end{array}\right. \\ x > -1; \end{cases}$ $x = 1$

Окончание таблицы

$n\log_a f(x) =$ $= \log_a h(x) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \log_a (f(x))^n = \log_a h(x), \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0 \end{cases}$	$\lg(x-2) = \frac{1}{2}\lg(3x-6) = \lg 2;$ $2\lg(x-2) - \lg(3x-6) = 2\lg 2;$ $\lg\frac{(x-2)^2}{3x-6} = \lg 4;$ $\begin{cases} \frac{(x-2)^2}{3x-6} = 4, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 16x + 28 = 0, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 14, \end{array}\right. \\ x > 2; \end{cases}$ $x = 14$
Логарифмирование обеих частей уравнения	$x^{\lg x - 2} = 1000;$ $\lg x^{\lg x - 2} = \lg 1000;$ $(\lg x - 2)\lg x = 3;$ $\lg x = t;$ $t^2 - 2t - 3 = 0;$ $t = -1$ и $t = 3;$ $\lg x = -1,$ $x = 0{,}1$ и $\lg x = 3,$ $x = 1000$

Равносильность уравнений, систем уравнений

Два уравнения называются **равносильными**, если они имеют одни и те же корни	$\frac{x}{2} = 4$ и $2x - 16 = 0$

Преобразования, при которых уравнение переходит в равносильное ему уравнение:

- перенос слагаемых из одной части уравнения в другую (при этом знак слагаемого меняется на противоположный);
- прибавление к обеим частям уравнения одного и того же числа или функции;
- умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же число или функцию, не равные нулю

Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными

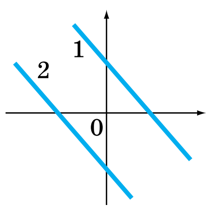
Определение	Примеры
Системой уравнений называют два или несколько уравнений, в которых необходимо найти все общие решения	$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x^2 + y = 1 \end{cases}$

Окончание таблицы

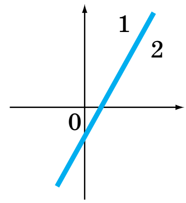
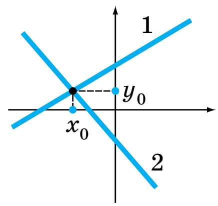
Определение	**Примеры**
Система уравнений называется **линейной**, если все уравнения, входящие в систему, являются линейными: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$ Решениями такой системы является упорядоченная пара чисел $(x; y)$	Пара чисел $(3; -1)$ является решением системы $\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$
Решить систему — значит найти все её решения или доказать, что их нет	
Две системы называются **равносильными**, если они имеют одинаковое множество решений	

Количество решений линейной системы двух уравнений с двумя переменными в зависимости от коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Зависимость коэффициентов	**Графическая интерпретация**
Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$, система решений не имеет	 1) $a_1x+b_1y = c_1$; 2) $a_2x+b_2y = c_2$. Прямые параллельны, точек пересечения нет

Окончание таблицы

Зависимость коэффициентов	Графическая интерпретация
Если $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$, система имеет бесчисленное множество решений (неопределённа)	 1) $a_1x + b_1y = c_1$; 2) $a_2x + b_2y = c_2$. Прямые совпадают, все точки прямых являются решениями
$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ — одно решение	 1) $a_1x + b_1y = c_1$; 2) $a_2x + b_2y = c_2$. Прямые пересекаются, точка пересечения $(x_0;\ y_0)$ — решение системы

Основные приёмы решения систем уравнений

Способ подстановки: 1) выразить одну переменную из какого-либо уравнения системы через другую;	а) $\begin{cases} 3x + 4y = -3, \\ y = 3x + 18. \end{cases}$ *Решение.* $\begin{cases} y = 3x + 18, \\ 3x + 4(3x + 18) = -3; \end{cases}$ $3x + 12x + 72 = -3$; $x = -5$; $y = 3 \cdot (-5) + 18 = 3$. *Ответ*: $(-5;\ 3)$.

Продолжение таблицы

2) подставить вместо этой переменной в другое уравнение полученное выражение; 3) решить полученное уравнение с одной переменной; 4) найти значение второй переменной; 5) записать ответ	б) $\begin{cases} 2x + y = \pi, \\ \cos(3x - 2y) = 0,5 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} y = \pi - 2x, \\ \cos(3x - 2\pi + 4x) = 0,5; \end{cases}$ $\cos 7x = 0,5;\ 7x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;$ $x = \pm\dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi k}{7},\ k \in Z;$ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi k}{7}, \\ y = \dfrac{19\pi}{21} - \dfrac{4\pi k}{7} \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi k}{7}, \\ y = \dfrac{23\pi}{21} - \dfrac{4\pi k}{7}; \end{cases}$ $n,\ k \in Z$
Метод алгебраического сложения	$\begin{cases} 7 - x + y - xy = 0, \\ 5 - y + x - xy = 0. \end{cases}$ *Решение*. Сложим почленно и вычтем уравнения: $+\begin{cases} 7 - x + y - xy = 0, \\ 5 - y + x - xy = 0; \end{cases}$ $12 - 2xy = 0;$ $xy = 6;$ $-\begin{cases} 7 - x + y - xy = 0, \\ 5 - y + x - xy = 0; \end{cases}$ $2 - 2x + 2y = 0;$ $x - y = 1.$ Получим равносильную систему уравнений $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 6. \end{cases}$ Решим её способом подстановки. *Ответ*: $(-2;\ -3)$ и $(3;\ 2)$.

Окончание таблицы

Метод замены переменной	$\begin{cases} 5^x - 3^y = 16, \\ 5^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{y}{2}} = 2. \end{cases}$ *Решение.* Обозначим $5^{\frac{x}{2}} = t$, $3^{\frac{y}{2}} = z$, получим систему алгебраических уравнений. $\begin{cases} t^2 - z^2 = 16, \\ t - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t-z)(t+z) = 16, \\ t - z = 2 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} 2(t+z) = 16, \\ t - z = 2; \end{cases}$ $t = 5;\ z = 3;\ 5^{\frac{x}{2}} = 5,\ x = 2;\ 3^{\frac{y}{2}} = 3,$ $y = 2.$ *Ответ*: (2; 2).

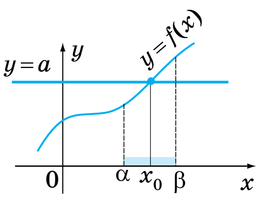
Использование свойств и графиков функций при решении уравнений

Ограниченность ОДЗ	
Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения, неравенства или системы состоит из ограниченного количества значений, то для решения уравнения достаточно проверить эти значения	$\sqrt{x^2 - 1} + x = 1 + \sqrt{2 - 2x^2}$; ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, \\ 2 - 2x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1;$ $x = \pm 1.$ Проверка показывает, что $x = 1$ — корень уравнения. *Ответ*: 1.
Оценка левой и правой частей уравнения	
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a; \end{cases}$ $f(x) \geq a$ $g(x) \leq a$	$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 + \lvert x \rvert}$; $f(x) = 1 - x^2 \leq 1,$ а $g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{\lvert x \rvert}} \geq 1.$

Окончание таблицы

Если при решении уравнения $f(x) = g(x)$ выяснилось, что $f(x) \geq a$ и $g(x) \leq a$, то равенство достигается тогда, когда $f(x) = g(x) = a$	Тогда уравнение равносильно системе $\begin{cases} 1 - x^2 = 1, \\ \sqrt{1 + \sqrt{\lvert x \rvert}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$ *Ответ*: 0.
$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = 0$ $\begin{cases} f_1(x) \geq 0 \\ f_2(x) \geq 0 \\ \ldots \\ f_n(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$	$\sqrt{x-2} + \lvert x^2 - 2x \rvert + (x^2 - 4)^2 = 0;$ $f_1(x) = \sqrt{x-2} \geq 0;$ $f_2(x) = \lvert x^2 - 2x \rvert \geq 0;$ $f_3(x) = (x^2 - 4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} \sqrt{x-2} = 0, \\ \lvert x^2 - 2x \rvert = 0, \\ (x^2 - 4)^2 = 0; \end{cases} x = 2.$ *Ответ*: 2.

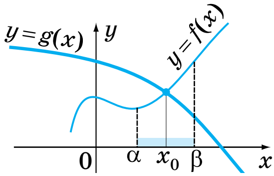
Использование возрастания и убывания функций

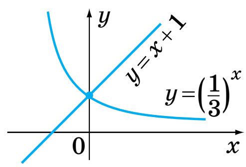


Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение имеет не более одного корня на этом промежутке

Уравнение $\sqrt{x} + 2x^3 = 3$ имеет один корень $x = 1$ ($\sqrt{1} + 2 \cdot 1^3 = 3$, т. е. $3 = 3$), поскольку функция $f(x) = \sqrt{x} + 2x^3$ возрастает на всей области определения $x \geq 0$

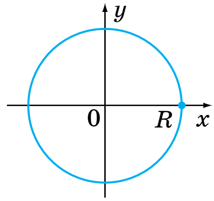
Окончание таблицы

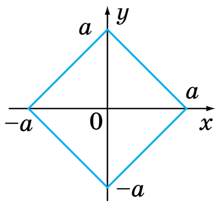
<table>
<tr>
<td colspan="2">


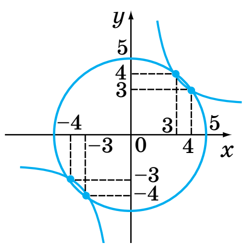
Если в уравнении $f(x) = g(x)$ одна из функций возрастает, а вторая убывает на некотором промежутке, то уравнение имеет на нём не более одного корня
</td>
<td>Уравнение $\sqrt{x} + x^3 = 3 - x$ имеет один корень $x = 1$ ($\sqrt{1} + 1^3 = 3 - 1$, т. е. $2 = 2$), поскольку $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ возрастает на всей области определения $x \geq 0$, а $g(x) = 3 - x$ убывает на множестве R и $x \geq 0$; $x = 1$</td>
</tr>
<tr>
<th colspan="3">Использование ограниченности функций</th>
</tr>
<tr>
<td>При решении тригонометрических уравнений используют ограниченность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$</td>
<td colspan="2">$\cos\frac{x}{2} + \cos 2x = 2$. $\cos\frac{x}{2}$ и $\cos 2x$ имеют наибольшее значение, равное 1, сумма $\cos\frac{x}{2}$ и $\cos 2x$ равна 2 тогда и только тогда, когда $\begin{cases} \cos\frac{x}{2} = 1, \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\pi n,\ n \in Z, \\ x = \pi k,\ k \in Z \end{cases} \Rightarrow$ $x = 4\pi n$, $n \in Z$</td>
</tr>
<tr>
<th colspan="3">Использование графиков функций</th>
</tr>
<tr>
<td>Для решения уравнения $g(x) =$ $= f(x)$ нужно построить графики функций $y = g(x)$ и $y = f(x)$ и найти точку их пересечения</td>
<td colspan="2">


Для решения уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$ построим графики функций $y = x + 1$ и $y = \frac{1}{3}x$. Они имеют одну общую точку (0; 1). Уравнение имеет один корень: $x = 0$
</td>
</tr>
</table>

Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем

<table>
<tr>
<td>Уравнения с двумя переменными — это уравнения вида $f(x; y) = 0$.
Упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, которая превращает уравнение в верное равенство, называется решением уравнения $f(x; y) = 0$</td>
<td>

$x^2 + y^2 = R^2$
Окружность с центром (0; 0) и радиусом R.</td>
</tr>
<tr>
<td>График уравнения с двумя переменными — это множество всех точек координатной плоскости $(x_0; y_0)$, где $(x_0; y_0)$ — решения уравнения</td>
<td>

$|x| + |y| = a$
Квадрат с центром (0; 0), диагонали квадрата лежат на осях Ox и Oy</td>
</tr>
<tr>
<td>Система двух уравнений с двумя переменными
$\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y), \\ f_2(x; y) = g_2(x; y). \end{cases}$
Чтобы изобразить множество решений системы уравнения с двумя переменными, нужно построить их графики в одной системе координат и найти точки пересечения графиков</td>
<td>

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12 \end{cases}$</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

	$x^2+y^2=25$ — окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом 5 $xy=12 \Rightarrow y=\dfrac{12}{x}$ — гипербола. Графики уравнений пересеклись в точках (4; 3), (3; 4), (−3; −4), (−4; −3)

Применение математических методов для решения практических задач. Интерпретация результата

Прикладные задачи — это задачи, условия которых содержат нематематические понятия. Для решения такой задачи математическими методами, составляют **математическую модель**	
Модель — это специально созданный объект, который отображает свойства исследуемого объекта. Математические модели создают, используя математические понятия и отношения: геометрические фигуры, числа, выражения, а также функции, уравнения, неравенства и их системы	
Решение прикладной задачи математическими методами осуществляется **в три этапа:** 1) создание математической модели данной задачи; 2) решение соответственной математической задачи; 3) анализ ответа, интерпретация результата, учёт реальных ограничений	**Схематично** этапы решения прикладной задачи выглядят так: $A \to B \to C \to D$ A — данная прикладная задача; B — её математическая модель; C — ответ для модели; D — ответ для данной прикладной задачи

Задача 1. Сколько досок потребуется для того, чтобы застелить пол в комнате размерами 7,5·5 м, если длина доски 6 м, а ширина 0,35 м?

Это прикладная задача, т. к. в ней говорится про поверхность пола — нематематическое понятие. Математическая модель — задача о нахождении площади прямоугольника. Анализ результата — нахождение целочисленного решения путём округления с избытком

Решение. Поверхность пола имеет форму прямоугольника. Найдём площадь этого прямоугольника: $7{,}5 \cdot 5 = 37{,}5$ (м^2).
Площадь одной доски, которая также представляет собой прямоугольник: $0{,}35 \cdot 6 = 2{,}1$ (м^2).
Значит, досок нужно: $37{,}5 : 2{,}1 = 17{,}86$.
Поскольку количество доски должно быть целым, очевидно, что досок потребуется 18 штук.
Ответ: 18.

Задача 2. 30 %-й раствор борной кислоты смешали с 15 %-м раствором и получили 450 г 20 %-го раствора. Сколько граммов исходного раствора взято?

Раствор борной кислоты — нематематическое понятие. Математическая модель — система линейных уравнений и двумя переменными

Решение. Взяли x г 30 %-го раствора, y г — 15 %-го раствора. Масса смеси: $x+y = 450$.
Чистой борной кислоты: $0{,}3x+0{,}15y$ или $450 \cdot 0{,}2$. Получили систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 450, \\ 0,3x + 0,15y = 450 \cdot 0,2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 150, \\ y = 300. \end{cases}$
Ответ: 15 %-го раствора 300 г, 30 %-го — 150 г.

При выполнении вычислений с реальными данными результат часто необходимо округлить и выполнить оценку результата

Округление чисел	
Если число округляют до какого-либо разряда, то все последующие цифры за этим разрядом заменяют нулями, а если они стоят после запятой — отбрасывают	• Если первая отброшенная или заменённая нулём цифра равна 5, 6, 7, 8, 9, то стоящую перед ним цифру увеличивают на 1. • Если первая отброшенная или заменённая нулём цифра равна 0, 1, 2, 3, 4, то стоящую перед ней цифру оставляют без изменений
Оценка результатов измерений	
Абсолютная погрешность вычислений — модуль разности между точным значением величины и её приближённым значением	$\lvert x - a\rvert$ x — точное значение, a — приближённое
При невозможности найти точное значение абсолютной погрешности можно дать **оценку абсолютной погрешности**	a — приближённое значение числа x. $\lvert x-a\rvert \le h$, т. е. число x равно числу a с точностью до h: $x = a \pm h.$ Например, запись $x = 3{,}42 \pm 0{,}01$ означает, что x равно 3,42 с точностью до 0,01, т. е. $3{,}41 \le x \le 3{,}43.$ Числа 3,41 и 3,43 — приближённые значения числа с недостатком и избытком
Относительная погрешность — частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближённого значения величины, умноженное на 100 %	

2.2. Неравенства

Основные свойства числовых неравенств

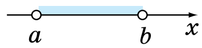
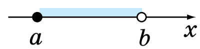
Свойства	Примеры
Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$	Если $10 > 2$, то $2 < 10$; если $-7 < -1$, то $-1 > -7$
Свойство транзитивности: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$	Если $10 > 1$ и $1 > -4$, то $10 > -4$
Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получим верное неравенство: если $a > b$, то $a + c > b + c$	Если $20 > 3$, то $20+1 > 3+1$, т. е. $21 > 4$ и $20-4 > 3-4$, т. е. $16 > -1$
Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство: если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$	Если $7 > -3{,}1$ и $5 > 0$, то $7 \cdot 5 > -3{,}1 \cdot 5$, т. е. $35 > -15{,}5$
Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и знак неравенства изменить на противоположный, то получим верное неравенство: если $a > b$, $c < 0$, то $ac < bc$ или $a < b$, $c < 0$, то $ac > bc$	Если $10 > 2$ и $-2 < 0$, то $-2 \cdot 10 < 2 \cdot (-2)$, $-20 < -4$
Если почленно сложить два верных неравенства одного знака, то получим верное неравенство: $+\begin{array}{r} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$	$+\begin{array}{r} -7 < 3 \\ 10 < 13 \\ \hline 3 < 16 \end{array}$

Окончание таблицы

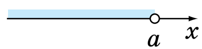
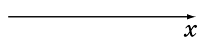
Свойства	Примеры
Если a, b, c и d — положительные числа, причём $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$, т. е. если почленно перемножить верные неравенства одного знака, все члены которых — положительные числа, то получим верное неравенство	$\times \begin{array}{r} 20 > 4 \\ \frac{2}{5} > \frac{1}{5} \\ \hline 20 \cdot \frac{2}{5} > 4 \cdot \frac{1}{5} \\ 8 > 0{,}8 \end{array}$
Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$	Если $20 > 3$ и $4 < 10$, то $20 - 4 > 3 - 10$; $16 > -6$
Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	Если $7 > 3$, то $\frac{1}{7} < \frac{1}{3}$
Если $a > b > 0$, то для любого натурального числа n верно неравенство $a^n > b^n$	Если $5 > 2$, $n = 6$, то $5^6 > 2^6$

Использование свойств неравенств для оценки суммы, разности, произведения и частного двух выражений	
Пусть $4 < a < 5$ и $10 < b < 12$	
Сумма $a + b$ $$+\begin{array}{rcccl} 4 &<& a &<& 5 \\ 10 &<& b &<& 12 \\ \hline 14 &<& a+b &<& 17 \end{array}$$	Разность $a - b = a + (-b)$ $$+\begin{array}{rcccl} 4 &<& a &<& 5 \\ -12 &<& -b &<& -10 \\ \hline -8 &<& a-b &<& -5 \end{array}$$
Произведение $a \cdot b$ $$\times\begin{array}{rcccl} 4 &<& a &<& 5 \\ 10 &<& b &<& 12 \\ \hline 40 &<& a \cdot b &<& 60 \end{array}$$	Частное $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ $$\times\begin{array}{rcccl} 4 &<& a &<& 5 \\ \frac{1}{12} &<& \frac{1}{b} &<& \frac{1}{10} \\ \hline \frac{4}{12} &<& \frac{a}{b} &<& \frac{5}{10} \end{array}$$ $$\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < \frac{1}{2}$$

Решения неравенств и их обозначения

Название числового промежутка	Изображение на координатной прямой	Обозначение	Запись в виде неравенства	Читается
Интервал		$(a; b)$	$a < x < b$	Интервал от a до b
Числовой отрезок		$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	Отрезок от a до b
Полуинтервал		$(a; b]$	$a < x \leq b$	Полуинтервал от a до b, включая b
Полуинтервал		$[a; b)$	$a \leq x < b$	Полуинтервал от a до b, включая a
Числовой луч		$[a; +\infty)$	$x \geq a$	Числовой луч от a до плюс бесконечности

Окончание таблицы

Название числового промежутка	**Изображение на координатной прямой**	**Обозначение**	**Запись в виде неравенства**	**Читается**
Числовой луч		$(-\infty; a]$	$x \le a$	Числовой луч от минус бесконечности до a
Открытый числовой луч		$(a; +\infty)$	$x > a$	Открытый числовой луч от a до плюс бесконечности
Открытый числовой луч		$(-\infty; a)$	$x < 0$	Открытый числовой луч от минус бесконечности до a
Числовая прямая		$(-\infty; +\infty)$	x — любое число	Числовая прямая

Линейные неравенства с одной переменной

Линейным неравенством называется неравенство вида $ax+b>0$ (или $ax+b<0$), где a и b — числа, x — переменная	$5x-4>0$; $7x-2\geq 0$ $2x+3<0$; $-5x+1\leq 0$
Решением линейного неравенства называется число, при подстановке которого неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство. **Решить неравенство** — значит найти все его решения или доказать, что их нет	$x=1$ — решение неравенства $5x-4>0$, поскольку $5\cdot 1-4>0$, т. е. $1>0$

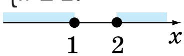
Свойства линейных неравенств

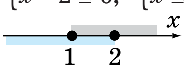
Свойства	Примеры
Если из одной части неравенства **перенести** в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство	$5(x-1)+3\geq 1-3(x+2)$ $5x-5+3\geq 1-3x-6$ $5x+3x\geq 5-3+1-6$ $8x\geq -3$
Если обе части неравенства **умножить** или **разделить** на одно и то же **положительное** число, то получится равносильное ему неравенство	$3x\geq 12 \,\vert :3$; $x\geq 4$; $\frac{1}{7}x<4 \,\vert\cdot 7$; $x<28$
Если обе части неравенства **умножить** или **разделить** на одно и то же **отрицательное** число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим равносильное ему неравенство	$-4x<3 \,\vert :(-4)$; $x>-\frac{3}{4}$; $-\frac{3}{5}\geq 9 \,\vert\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$; $x\leq -15$

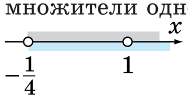
Квадратные неравенства

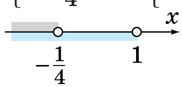
Квадратные неравенства — это неравенства, приводимые к виду: $ax^2+bx+c>0$; $ax^2+bx+c\geq 0$; $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, $a>0$	$3x^2-7x+1\geq 0$; $5x^2-1<0$ $2x^2+3x-7\leq 0$; $2x^2-3x>0$

Основные методы решения квадратных неравенств

<table>
<tr><th colspan="2">1. Сведения к решению систем линейных неравенств</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Разложить квадратный трёхчлен ax^2+bx+c на множители (x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена).
2. Решить совокупность соответствующих систем линейных неравенств</td></tr>
<tr><td>
$x^2-3x+2\leq 0$;
$(x-1)(x+2)\leq 0$.
Произведение двух множителей неположительно, значит, множители имеют разные знаки: $\begin{cases}x-1\leq 0,\\ x-2\geq 0;\end{cases}$
$\begin{cases}x\leq 1,\\ x\geq 2.\end{cases}$


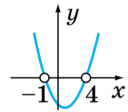
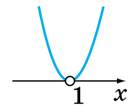
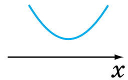
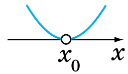
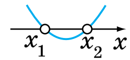
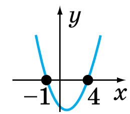
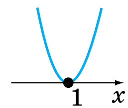
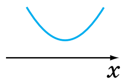
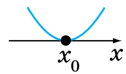
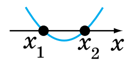
Система решений не имеет.
$\begin{cases}x-1\geq 0,\\ x-2\leq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 1,\\ x\leq 2.\end{cases}$


$1\leq x\leq 2$
</td><td>
$4x^2-3x-1>0$;
$4(x-1)\left(x+\frac{1}{4}\right)>0.$
Произведение множителей положительно, значит, множители одного знака.


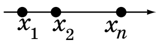
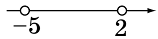
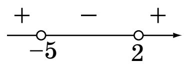
$\begin{cases}x-1>0,\\ x+\frac{1}{4}>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>1,\\ x>-\frac{1}{4}.\end{cases}$
$\begin{cases}x-1<0,\\ x+\frac{1}{4}<0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<1,\\ x<-\frac{1}{4};\end{cases}$


$\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$
</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы

2. Графический метод				
Для решения неравенства вычисляется дискриминант квадратного трёхчлена ax^2+bx+c $D = b^2-4ac$ и его корни x_1 и x_2				
	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$	а) $x^2-3x-4 > 0$; $D = 5 > 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. $x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$;  б) $x^2+5x+12 > 0$; $D = 17 < 0$; $x \in (-\infty; \infty)$; в) $x^2-2x+1 > 0$; $D = 0$; $x_0 = 1$; $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ 
				
$ax^2+bx+c < 0$	решений нет	решений нет	$x \in (x_1; x^2)$	
$ax^2+bx+c > 0$	$x \in$ R	$x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	
	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$	а) $x^2-3x-4 \le 0$; $D = 5 > 0$; $x \in [-1; 4]$;  б) $x^2+5x+12 \le 0$; $D = -17 < 0$; решений нет; в) $x^2-2x+1 \le 0$; $D = 0$; $x_0 = 1$. $x = 1$ 
				
$ax^2+bx+c \le 0$	решений нет	$x = x_0$	$x \in [x_1; x_2]$	
$ax^2+bx+c \ge 0$	$x \in$ R	$x \in$ R	$x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	

Окончание таблицы

3. Метод интервалов	
$f(x) \geq 0$	$x^2+7x+10 > 0$
1. Найти корни уравнения $f(x) = 0$: $x_1, x_2, ..., x_n$.	Найдем корни уравнения $x^2+7x+10 = 0$: $x_1 = -2,\ x_2 = -5$.
2. Нанести эти корни на числовую прямую, разбивая её на интервалы:  	Наносим корни на числовую прямую, получим три интервала: 
3. Если коэффициент при старшей степени $f(x)$ положителен, то на крайнем правом интервале функция сохраняет знак «+»; остальные знаки расставлены в порядке чередования.	 Коэффициент при x^2 равен $1 > 0$, поэтому на интервале $x > 2$ функция сохраняет знак «+», остальные знаки ставим в порядке чередования.
4. В ответ записать интервалы, соответствующие знаку неравенства	$x^2+7x+10 > 0$, поэтому в ответ пишем интервалы, где сохраняется знак «+». *Ответ*: $(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$.

Равносильность неравенств (систем неравенств)

Два неравенства с одной переменной (две системы неравенств) называются **равносильными**, если множество решений этих неравенств (систем неравенств) совпадают; в частности, неравенства равносильны, если оба не имеют решений

Область допустимых значений (ОДЗ) неравенства

Областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства называется общая область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$, которые стоят	Для неравенства $\sqrt{x+2} < x$ ОДЗ: $x+2 \geq 0$, то есть $x \geq -2$, поскольку область определения функции $f(x) =$ $= \sqrt{x+2}$ определена усло-

Окончание таблицы

в левой и правой частях неравенства $f(x) \overset{>}{\underset{<}{}} g(x)$	вием $x+2 \ge 0$, а областью определения функции $g(x)=x$ является множество всех действительных чисел

Основные теоремы о равносильности неравенств

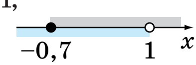
Если из одной части неравенства **перенести** в другую часть слагаемые с противоположным знаком, то получим неравенство, равносильное данному на любом множестве	$5x+3 \ge 2x-7;$ $5x-2x \ge -7-3;\ 3x \ge -10$
Если обе части неравенства **умножить или разделить** на одно и то же положительное число (функцию, которая определена и **положительна** на ОДЗ заданного неравенства), не меняя знак неравенства, то получим неравенство, равносильное данному (на ОДЗ данного)	$\dfrac{\sqrt{x-2}-4}{(x+1)^2} \ge 0.$ ОДЗ неравенства: $\begin{cases}\sqrt{x-2} \ge 0,\\ x+1 \ne 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x \ge 2,\\ x \ne -1;\end{cases}$ т. е. $x \ge 2.$ На заданном множестве $x \in [2;\ +\infty)$ функция $(x+1)^2 > 0$, поэтому данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x-2}-4 \ge 0$
Если обе части неравенства **умножить или разделить** на одно и то же отрицательное число (или на одну и ту же функцию, которая определена и **отрицательна** на ОДЗ заданного неравенства) и поменять знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному (на ОДЗ данного)	$\begin{cases}2x-4 \le 12x+3,\\ x+1 > 3x-1;\end{cases}$ $\begin{cases}2x-12x \le 3+4,\\ x-3x > -1-1;\end{cases}$ $\begin{cases}-10x \le 7 & \vert :(-10),\\ -2x > -2 & \vert :(-2);\end{cases}$ $\begin{cases}x \ge -0,7,\\ x < 1;\end{cases}$  $x \in [-0,7;\ 1)$

Схема поиска решения неравенства

С помощью равносильных преобразований

Учесть ОДЗ начального неравенства

исходное неравенство

$\Downarrow\ \Uparrow$

неравенство, полученное в результате преобразования начального

Сохранять на ОДЗ верное неравенство при прямых и обратных преобразованиях

С помощью метода интервалов

$f(x) \geq 0$

1. Найти ОДЗ.
2. Определить нули на ОДЗ и найти знак $f(x)$ на каждом из промежутков, на которые разбилось ОДЗ.
3. Записать ответ, учитывая знак заданного неравенства

Рациональные неравенства

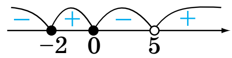
Неравенства вида $P_n(x) > 0$, $P_n(x) \geq 0$; $P_n(x) < 0$, $P_n(x) \leq 0$, а также неравенства $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$ и $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$, $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0$,

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно называются **рациональными.**

Основные методы решения рациональных неравенств

Метод интервалов 1. Найти область определения функции $F(x)$ и промежутки, на которых она непрерывна.	$\dfrac{x(x+2)}{x-5} \leq 0$. Рассмотрим функцию $F(x) = \dfrac{x(x+2)}{x-5}$.

Окончание таблицы

2. Найти нули функции $F(x)$. 3. Нанести на числовую ось найденные промежутки и нули. 4. Определить интервалы знакопостоянства. 5. Записать ответ	Область определения функции: $D(F) = (-\infty;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$. Нули: $x = 0$; $x = -2$.  *Ответ*: $(-\infty;\ -2] \cup [0;\ 5)$.
Метод замены переменной (метод подстановки)	$(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12 < 0$. *Замена*: $t = x^2-x$; $t^2-8t+12 < 0$. *Решение*: $2 < t < 6$. Получим систему: $\begin{cases} x^2 - x < 6, \\ x^2 - x > 2. \end{cases}$ Решением системы является объединение множества $x \in (-2;\ 1) \cup (2;\ 3)$. *Ответ*: $(-2;\ 1) \cup (2;\ 3)$.

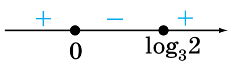
Показательные неравенства

Показательными называются неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Решение показательных неравенств

$\boxed{a^{f(x)} \underset{\geq}{>} a^{g(x)}}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a > 1, \\ f(x) > g(x); \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$ Аналогично для $a^{f(x)} \underset{\leq}{<} a^{g(x)}$.	а) $2^x < \dfrac{1}{8}$; $2^x < 2^{-3}$; $x < -3$, т. к. $2 > 1$; б) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \geq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, поэтому $x \leq \dfrac{1}{2}$

Продолжение таблицы

$\boxed{a^{f(x)} \overset{>}{\geq} b}$, $a>0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} b \le 0, \\ x \in D(f); \end{cases}$ $\begin{cases} b > 0,\ a > 1, \\ f(x) > \log_a b; \end{cases}$ $\begin{cases} b > 0,\ 0 < a < 1, \\ f(x) < \log_a b \end{cases}$	а) $2^x > 5;\ 2^x > 2^{\log_2 5};\ b = 5 > 0,\ a = 2 > 1;$ $x > \log_2 5;\ x \in (\log_2 5; +\infty)$ б) $\left(\frac{1}{7}\right)^x \ge 4;\ \left(\frac{1}{7}\right)^x \ge \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\frac{1}{7}} 4};\ b = 4 > 0,$ $a = \frac{1}{7} < 1;$ $x \le \log_{\frac{1}{7}} 4;\ \ x \le \log_{7^{-1}} 4;\ \ x \le -\log_7 4;$ $x \in (-\infty; -\log_7 4];$ в) $e^x > -3;\ x \in R;$ г) $2^x \le -2$; нет решений
$\boxed{a^{f(x)} \overset{>}{\geq} b^{\varphi(x)}}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a > 1, \\ f(x) > \phi(x) \log_a b; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < \phi(x) \log_a b \end{cases}$	$2^x \ge 3^{x^2};\ \ \log_2 2^x \ge \log_2 3^{x^2};$ $x \ge x^2 \log_2 3;\ \ x - x^2 \log_2 3 \ge 0;$ $x(1 - x\log_2 3) \ge 0;\ \ x(x\log_2 3 - 1) \le 0;$ $x(x - \log_3 2) \le 0;$  $x \in [0; \log_3 2]$
Замена переменной в показательном неравенстве	$9^x + 27 < 12 \cdot 3^x$. *Замена*: $3^x = t,\ t > 0,$ тогда $t^2 - 12t + 27 < 0 \Leftrightarrow 3 < t < 9.$ $3 < 3^x < 9;\ 1 < x < 2.\ x \in (1; 2)$
Показательные неравенства, содержащие **однородные функции**	$4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0;$ $2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} - 2^x \cdot 5^x > 0.$ Разделим почленно на $5^{2x} \ne 0.$ $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 > 0.$ *Замена*: $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t,\ t > 0.\ t^2 - t - 2 > 0;\ \left[\begin{array}{l} t < -1, \\ t > 2, \end{array}\right.$ но $t > 0 \Rightarrow t > 2;\ \left(\frac{2}{5}\right)^x > 2;\ \left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{4}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} 2};$

Окончание таблицы

	$x < \log_{\frac{2}{5}} 2$, т. к. $\frac{2}{5} < 1$. *Ответ*: $\left(-\infty; \log_{\frac{2}{5}} 2\right)$.
Разложение на множители (вынесение за скобку общего множителя)	$3^{x+1} + 3^{x-1} \geq 21 + 3^x$; $3^{x+1} + 3^{x-1} - 3^x \geq 21$; $3^{x-1}(3^2 + 1 - 3^1) \geq 21$; $3^{x-1} \cdot 7 \geq 21$; $3^{x-1} \geq 3$; $3 > 1$; $x - 1 \geq 1$; $x \geq 2$. *Ответ*: $x \in [2; +\infty)$.

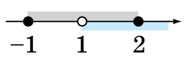
Логарифмические неравенства

Логарифмическими называют неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма.

Решение логарифмических неравенств

Использование определения логарифма при решении логарифмических неравенств	
$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 0 < f(x) < a^b, \\ 0 < a < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) > a^b, \\ a > 1. \end{cases}$ Аналогично $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) > a^b, \\ 0 < a < 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < f(x) < a^b, \\ a > 1 \end{cases}$	а) $\log_3(x-2) \geq 2$. Так как $3 > 1$, то $(x-2) \geq 3^2$; $x - 2 \geq 9$; $x \geq 11$. $x \in [11; +\infty)$; б) $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 0$. $\log_2 \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \log_2 1 \Rightarrow$ $0 < \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 1 \Rightarrow$ $\log_3 1 < \log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq \log_3 3 \Rightarrow$ $1 < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq 3 \Rightarrow$

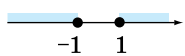
Продолжение таблицы

	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \le x-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \frac{1}{8} \le x-1 < \frac{1}{2};$ $\frac{9}{8} \le x < \frac{3}{2}; \quad x \in \left[\frac{9}{8}; \frac{3}{2}\right)$
Использование свойств логарифма при решении логарифмических неравенств	
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a > 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a > 1, \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases}$ или $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$	а) $\log_{0,5}(2x-4) \ge \log_{0,5}(x+1)$. $0 < 0{,}25 < 1$, поэтому $\begin{cases} 2x-4 \le x+1, \\ 2x-4 > 0, \\ x+1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 \le x+1, \\ 2x-4 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 5, \\ x > 2; \end{cases} \quad x \in (2; 5];$ б) $\log_2 x + \log_2(x-1) \le 1$. Применим правило: $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$, где $x > 0$, $y > 0$. $\log_2 x(x-1) \le 1 \Rightarrow \begin{cases} x(x-1) \le 2^1, \\ x > 0, \\ x-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} x^2 - x - 2 \le 0, \\ x > 1; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)(x-2) \le 0, \\ x > 1; \end{cases}$  $x \in (1; 2]$
Использование метода замены переменной	$\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 \le 0$. *Замена*: $\log_3 x = t$; $t^2 - 2t - 3 \le 0$; $-1 \le \log_3 x \le 3$; $\log_3 3^{-1} \le \log_3 x \le \log_3 3^3$, $3 > 1$; $\frac{1}{3} \le x \le 27$; $x \in \left[\frac{1}{3}; 27\right]$

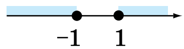
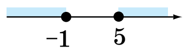
Окончание таблицы

Решение неравенств, содержащих переменную под знаком логарифма и в основании логарифма $\log_{j(x)} f(x) > A$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\phi(x) > 1,\\ f(x) > (\phi(x))^A > 0,\end{cases}\\ \begin{cases}0 < \phi(x) < 1,\\ 0 < f(x) < (\phi(x))^A\end{cases}\end{array}\right.$	$\log_x(x-2) \le 2.$ ОДЗ: $\begin{cases}x-2,\\ x>0,\\ x\ne 1\end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$ Значит, основание логарифма больше 1, тогда: $\log_x(x-2) \le 2;$ $\log_x(x-2) \le \log_x x^2 \Rightarrow$ $\begin{cases}x-2 \le x^2,\\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 - x + 2 \ge 0,\\ x > 2\end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases}x \in R,\\ x>2\end{cases} \Rightarrow x > 2.\ \ x \in (2; +\infty)$

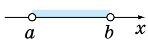
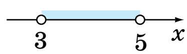
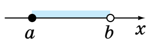
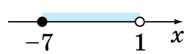
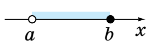
Системы и совокупности неравенств с одной переменной

Системы неравенств	
Несколько неравенств с одной переменной образуют **систему** неравенств, если ставится задача отыскать все значения переменной, удовлетворяющие **одновременно каждому** из этих неравенств. Чтобы **решить систему неравенств**, нужно: 1. Отдельно решить каждое неравенство. 2. Найти пересечение найденных решений	а) $\begin{cases}-3x+5>2,\\ 4x-5\le 15\end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases}-3x > 2-5,\\ 4x \le 15+5\end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases}-3x > -3,\\ 4x \le 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<1,\\ x\le 5;\end{cases}$  $x \in (-\infty; -1);$ б) $\begin{cases}5x+6\le 1,\\ 2x+1\ge 3\end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases}5x \le -5,\\ 2x \ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \le -1,\\ x \ge 1;\end{cases}$  $x = \varnothing$ (решений нет)
Две системы неравенств называют **равносильными**, если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам. Равносильность систем неравенств (как и уравнений) обозначается «$\Leftrightarrow$»	

Окончание таблицы

Совокупность неравенств	
Несколько неравенств с одной переменной образуют **совокупность**, если ставится задача отыскать все те значения переменной, каждое из которых удовлетворяет **по крайне мере одному** из этих неравенств. Чтобы **решить совокупность неравенств**, нужно: 1. Решить отдельно каждое неравенство. 2. Найти объединение найденных решений	а) $\left[\begin{array}{l}5x+6\le 1,\\ 2x+1\ge 3\end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}5x\le -5,\\ 2x\ge 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -1,\\ x\ge 1;\end{array}\right.$  $x \in (-\infty;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$; б) $\lvert x-3\rvert \ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3\ge 2,\\ x-3\le -2\end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}x\ge 5,\\ x\le -1;\end{array}\right.$  $x \in (-\infty;\ -1] \cup [5;\ +\infty)$

Системы неравенств и двойные неравенства

Системы неравенств	Двойные неравенства	Графические решения	Примеры
$\begin{cases}x>a,\\ x<b\end{cases}$	$a<x<b$		$\begin{cases}x>3,\\ x<5;\end{cases}$ $3<x<5$ 
$\begin{cases}x\ge a,\\ x<b\end{cases}$	$a\le x<b$		$-7\le x<1$; $\begin{cases}x<1,\\ x\ge -7\end{cases}$ 
$\begin{cases}x>a,\\ x\le b\end{cases}$	$a<x\le b$		$0<x\le 27$; $\begin{cases}x\le 27,\\ x>0\end{cases}$ 

Окончание таблицы

$\begin{cases} x \geq a, \\ x \leq b \end{cases}$	$a \leq x \leq b$		$-1 \leq x \leq 1;$ $\begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq -1 \end{cases}$ 

Решение систем неравенств и двойных неравенств

Решение **двойного неравенства** равносильно решению системы соответствующих неравенств

I способ:

$$-1 < \frac{2x-1}{3} < 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} < 1, \\ \dfrac{2x-1}{3} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x-1 < 3, \\ 2x-1 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x < 4, \\ 2x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < 2, \\ x > -1; \end{cases} \quad x \in (-1;\ 2)$$

II способ:

$$\begin{array}{l|l} -1 < \dfrac{2x-1}{3} < 1 & \times 3 \\ -3 < 2x-1 < 3 & +1 \\ -2 < 2x < 4 & :2 \\ -1 < x < 2 & \end{array}$$

$$x \in (-1;\ 2)$$

Решение систем нелинейных неравенств и неравенств трансцендентных (логарифмических, показательных и тригонометрических) происходит **методом равносильных преобразований** и (или) **методом интервалов**

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \geq 1, \\ \dfrac{1}{x+1} > 0. \end{cases}$$

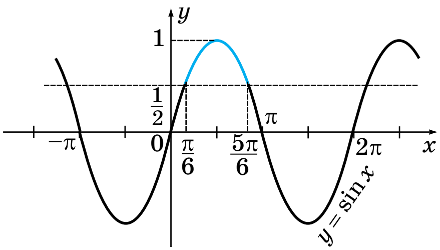
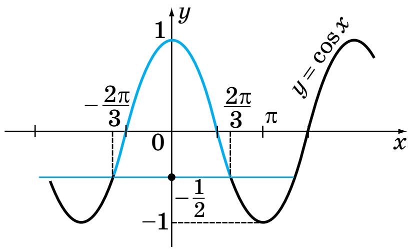
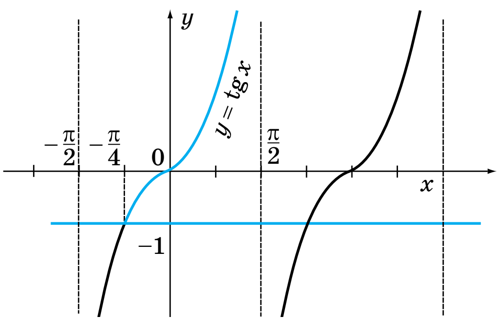
$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} - 1 \geq 0, \\ \dfrac{1}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x^2} \geq 0, \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (1-x)(1+x) \geq 0, \\ x \neq 0, \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

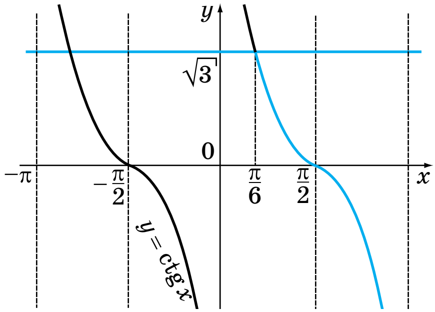
$$\begin{cases} x \in [-1;\ 1], \\ x \neq 0, \\ x > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [-1;\ 1], \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$$

Использование свойств и графиков функций при решении неравенств

Решение тригонометрических неравенств с помощью графиков	
$\sin x > \frac{1}{2}$	 $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$
$\cos x > -\frac{1}{2}$	 $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$
$\operatorname{tg} x \geq -1$	 $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

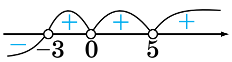
Окончание таблицы

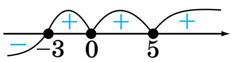
$\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$	 $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in Z$

Использование монотонности функций для решения неравенств	
1. Записать неравенство в виде: $f(x) > a$, $f(x) < a$, $\geq a$, $\leq a$ $f(x)$ — некоторая функция, $a \in R$. 2. Найти область определения функции $D(f)$ и характер её монотонности (возрастает, убывает). 3. Если a принадлежит области значений $f(x)$, то существует число $x_0 \in D(f)$, при котором $f(x_0) = a$. 4. Исходное неравенство записать в виде: $f(x) > f(x_0)$; $f(x) < f(x_0)$ $\geq$ $\leq$	а) $x^5 + x^3 + x \leq 42$. *Решение.* Обозначим $F(x) = x^5 + x^3 + x$. Функция определена и непрерывна на R, возрастающая, как сумма возрастающих функций: $42 = F(2)$, т. е. $F(x) \leq F(2)$. Тогда по свойству возрастающей функции из последнего неравенства следует, что $x \leq 2$. *Ответ*: $x \in (-\infty; 2]$. б) $\sqrt{7 + x} \geq 7 - 2x$. *Решение.* Пусть $f(x) \geq \sqrt{7 + x} + 2x$, тогда $f(x) \geq 7$.

Окончание таблицы

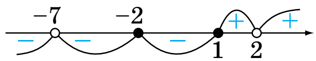
<table>
<tr>
<td>5. Решение исходного неравенства сводится к решению равносильной ему системы линейных неравенств:
$\begin{cases} x > x_0, \\ b < x < d, \end{cases}$ если $f(x)$ — возрастающая;
$\begin{cases} x < x_0, \\ b < x < d, \end{cases}$ если $f(x)$ — убывающая.
$(b;\ d)$ — область определения $f(x)$</td>
<td>Функция определена на $[-7;\ +\infty)$, монотонно возрастает.
$f(2) = 7$. Тогда $f(x) \geq f(2)$.
Получим систему:
$\begin{cases} x \geq -7, \\ f(x) \geq f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7, \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$x \geq 2$.
Ответ: $[2;\ +\infty)$.</td>
</tr>
</table>

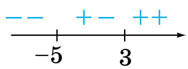
<table>
<tr>
<th colspan="2">Обобщённый метод интервалов</th>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Для решения неравенств вида $\varphi(x) > 0$, $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(x) < 0$ и $\varphi(x) \leq 0$, где $\phi(x) = (x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \cdot \ldots \langle (x - a_n)^{k_n}$, a_1, a_2, ..., a_n — действительные, неравные друг другу числа; k_1, ..., k_n — целые положительные числа используют обобщённый метод интервалов.</td>
</tr>
<tr>
<td>1. Нанести на числовую ось числа a_1, a_2, ..., a_n.
2. В промежутке справа от наибольшего из них поставить знак «+», а затем, двигаясь справа налево при переходе через очередное число a_i $(i = \overline{1, n})$:
• поменять знак, если k_i — нечётное число;
• сохранить знак, если k_i — чётное число</td>
<td rowspan="2">Пример 1
а) $x^2(x+3)^3(x-5)^4 < 0$.


$x \in (-\infty;\ -3)$;
б) $x^2(x+3)^3(x-4)^4 \leq 0$.


$x \in (-\infty;\ -3] \cup \{0\} \cup \{5\}$;
в) $x^2(x+3)^3(x-4)^4 > 0$.
$x \in (-3;\ 0) \cup (0;\ 5) \cup$
$\cup\ (5;\ +\infty)$;
г) $x^2(x+3)^3(x-4)^4 > 0$.
$x \in [-3;\ +\infty)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Приведённые рассуждения справедливы для неравенств вида</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

$g(x) > 0,\ g(x) \geq 0,\ g(x) < 0,\ g(x) \leq 0,$ где $g(x) =$ $= \dfrac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2},\ldots(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2},\ldots(x-b_p)^{m_p}}$	**Пример 2** а) $g(x) =$ $= \dfrac{(x-1)^3(x+2)^2(x-2)}{(x-2)^3(x+7)^6} \geq 0.$  $x \in \{-2\} \cup [1;\ 2);$ б) $g(x) \leq 0.$ $x \in (-\infty;\ -7) \cup (-7;\ 1]$

Метод интервалов для решения уравнений и неравенств с модулем	
1. Найти нули подмодульных выражений. 2. Разбить область допустимых значений переменных этими нулями на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак. 3. На каждом из найденных промежутков решить уравнение (неравенство) без знака модуля. Совокупность (объединение) решений на указанном промежутке является решением рассматриваемого уравнения (неравенства)	**Пример 1.** $\lvert x+5\rvert - \lvert x-3\rvert = 8.$ *Решение.* 1. Нули подмодульных выражений: $x = -5$ и $x = 3$. 2. Знаки подмодульных выражений:  3. Уравнение на каждом промежутке: а) $x < -5$; $-(x-5)-(-x-3) = 8$; $-8 = 8$; решений нет; б) $-5 \leq x < 3$; $x+5-(-x+3) = 8$; $x = 3$ — не входит в рассматриваемый промежуток; в) $x \geq 3$; $x+5-(x-3) = 8$; $8 = 8$. Получим верное равенство. Решением будет любое число из этого промежутка. *Ответ*: $x \in [3;\ +\infty)$.

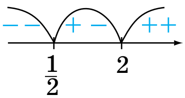
Окончание таблицы

Пример 2. $|2x-1|-|x-2| \geq 4.$

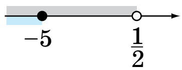
Решение.

1. Нули подмодульных выражений: $x = \dfrac{1}{2}$ и $x = 2$.

2. Знаки подмодульных выражений:

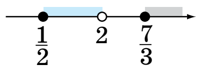


3. а) $x < \dfrac{1}{2}$; $-2x+1+x-2 \geq 4$; $x \leq -5$.



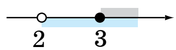
На этом промежутке решением является x их промежутка $x \leq -5$.

б) $\dfrac{1}{2} \leq x < 2$; $2x-1+x-2 \geq 4$; $x \geq \dfrac{7}{3}$.



На этом промежутке решений нет.

в) $x > 2$; $(2x-1)-(x-2) \geq 4$; $x \geq 3$.



Решением будут все значения из промежутка $x \geq 3$.

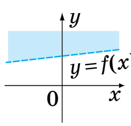
4. Объединяем полученные решения: $\left[\begin{array}{l} x \leq -5, \\ x \geq 3. \end{array}\right.$

$x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$

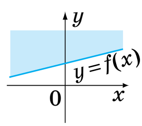
Изображение на координатной плоскости множеств решений неравенств с двумя переменными и их систем

Решение неравенств с двумя переменными

График неравенства $y > f(x)$ состоит из всех точек координатной плоскости, которые находятся **выше** точек графика $y = f(x)$.



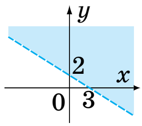
$y > f(x)$



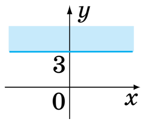
$y \geq f(x)$

Решением неравенства $y \geq f(x)$ являются все точки координатной плоскости, которые находятся **выше** точек графика $y = f(x)$, **включая** точки графика $y = f(x)$

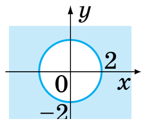
Окончание таблицы



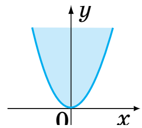
$2x+3y>6$



$y \geq 3$

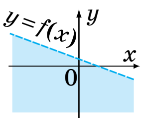


$x^2+y^2 \geq 4$

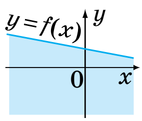


$y > x^2$

График неравенства $y < f(x)$ состоит из всех точек координатной плоскости, которые находятся **ниже** точек графика $y = f(x)$.

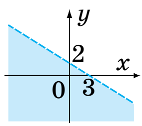


$y < f(x)$

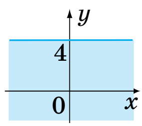


$y \leq f(x)$

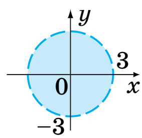
Решением неравенства $y \leq f(x)$ являются все точки координатной плоскости, которые находятся **ниже** точек графика $y = f(x)$, **включая** точки графика $y = f(x)$



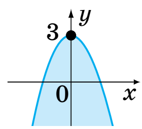
$2x+3y<6$



$y \leq 4$



$x^2+y^2<9$



$y \leq -x^2+3$

Решение систем неравенств с двумя переменными

Для решения систем неравенств $\begin{cases} F(x;\, y) \underset{\leq}{\geq} 0, \\ Q(x;\, y) \underset{\leq}{\geq} 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} F(x;\, y) \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 0 \end{smallmatrix}, \\ Q(x;\, y) \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 0 \end{smallmatrix} \end{cases}$

находим:

1) множество X_1 — точек плоскости, на котором выполняется первое неравенство;

2) множество X_2 — точек плоскости, на котором выполняется второе неравенство;

3) решение системы — пересечение множеств X_1 и X_2.

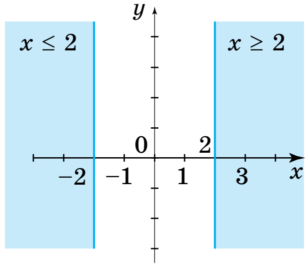
Изобразить на плоскости множество решений системы:

а) $\begin{cases} x^2 - 4 \ge 0, \\ y^2 - 4y + 3 < 0; \end{cases}$

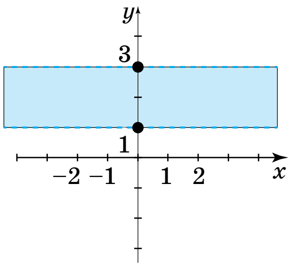
б) $\begin{cases} x^2 - 4 \le 0, \\ y^2 - 4y + 3 \le 0 \end{cases}$

Решение.

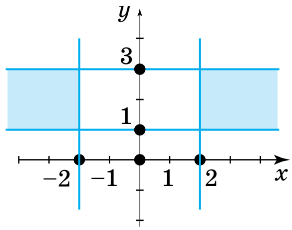
а) X_1: $x^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2, \\ x \le -2; \end{array}\right.$



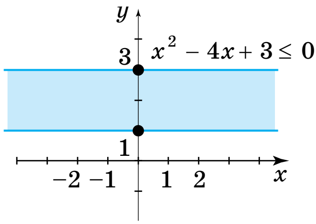
X_2: $y^2 - 4y + 3 < 0 \Leftrightarrow$
$1 < y < 3.$



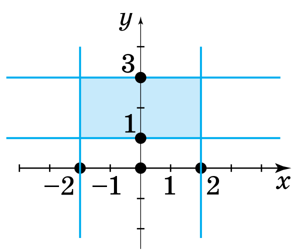
Пересечение множеств X_1 и X_2:



б) X_1: $x_2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$;
X_2: $y^2 - 4y + 3 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le 3$



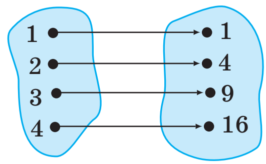
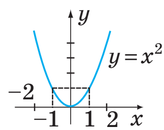
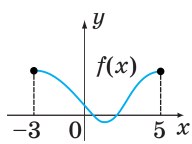
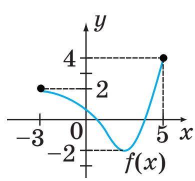
Пересечение множеств X_1 и X_2:



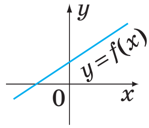
ФУНКЦИИ

3

3.1. Определение функции, её график

Числовая функция с областью определения D — это зависимость, при которой каждому числу x из множества D соответствует единственное число y: $y = f(x)$	 D — область определения; E — область значений
График функции $y = f(x)$ — это множество точек координатной плоскости с координатами $(x;\ y)$, где x пробегает всю область определения функции $f(x)$, а y — соответствующее значение функции. Независимая переменная x — аргумент, зависимая переменная y — функция	
Область определения функции $D(f)$ — множество значений, которые может принимать x	 $D(f) = [-3;\ 5]$
Область значений функции $E(f)$ — множество значений $f(x)$, которые она может принимать при $x \in D(f)$	 $E(f) = [-2;\ 4]$

Способы задания функции

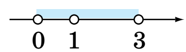
<table>
<tr><td>Аналитический, т. е. формулой: $y = f(x)$</td><td>$y = x^2$; $y = \dfrac{x-1}{x}$; $y = e^x$;
$y = \cos x - \sin x$</td></tr>
<tr><td>Графический, т. е. график $y = f(x)$ в системе координат xOy</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Табличный, т. е. соответствие между $D(f)$ и $E(f)$ задаётся с помощью таблицы:
<table>
<tr><td>x</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>...</td><td>x_{n-1}</td><td>x_n</td></tr>
<tr><td>y</td><td>y_1</td><td>y_2</td><td>...</td><td>y_{n-1}</td><td>y_n</td></tr>
</table></td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>y</td><td>9</td><td>4</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>y</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Область определения функции, заданной формулой

Областью определения функции $D(f)$, заданной формулой $y = f(x)$, называют множество значений x, при которых формула имеет смысл (все действия, заданные формулой, можно выполнить).

Функция	**$D(f)$**	**Пример нахождения $D(f)$**
Многочлен $y = a_n x^n +$ $+ a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$	R	$y = x^3 - 7x^2 + 5x - 1$; $x \in$ R
$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены	$f(x) \neq 0$	$y = \dfrac{x^2}{x(x-3)}$; $x(x-3) \neq 0$; $x \neq 0$; $x \neq 3$. $D(f) = (-\infty; 0) \cup$ $\cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$
$y = \sqrt[2n]{f(x)}$, $n \in$ N	$f(x) \geq 0$	$y = \sqrt[4]{4 - x^2}$; $4 - x^2 \geq 0$; $x^2 - 4 \leq 0$; $-2 \leq x \leq 2$; $D(f) = [-2; 2]$

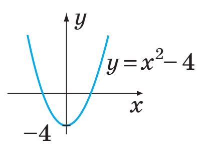
Продолжение таблицы

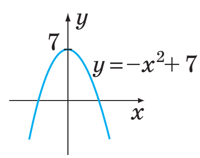
Функция	$D(f)$	Пример нахождения $D(f)$
$y = \dfrac{1}{f(x)}$	$f(x) \neq 0$	$y = \dfrac{1}{\lvert x\rvert - 3}$; $\lvert x\rvert - 3 \neq 0$; $\lvert x\rvert \neq 3$; $\left[\begin{array}{l} x \neq 3, \\ x \neq -3. \end{array}\right.$ $D(f) = (-\infty;\ -3) \cup$ $\cup\ (-3;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$
$y = \log_a f(x)$, $a > 0,\ a \neq 1$	$f(x) > 0$	$y = \log_3(2x-3)$; $2x - 3 > 0$; $x > 1{,}5$ $D(f) = (1{,}5;\ +\infty)$
$y = \log_{f(x)} g(x)$	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$y = \log_x(3-x)$; $\begin{cases} 3 - x > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 3, \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{cases}$  $D(f) = (0;\ 1) \cup (1;\ 3)$
$y = \operatorname{tg} f(x)$	$f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$	$y = \operatorname{tg}\dfrac{2x}{3}$; $\dfrac{2x}{3} \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{3\pi n}{2}$; $n \in Z$
$y = \operatorname{ctg} f(x)$	$f(x) \neq \pi n$, $n \in Z$	$y = \operatorname{ctg} 5x$; $5x \neq \pi n$, $x \neq \dfrac{\pi n}{5}$, $n \in Z$
$y = \arcsin f(x)$ $y = \arccos f(x)$	$-1 \leq f(x) \leq 1$ $-1 \leq f(x) \leq 1$	$y = \arcsin\dfrac{3-x}{2}$; $-1 \leq \dfrac{3-x}{2} \leq 1$; $-2 \leq 3 - x \leq 2$; $-5 \leq -x \leq -1$; $1 \leq x \leq 5$

Окончание таблицы

Функция	***D*(*f*)**	**Пример нахождения *D*(*f*)**
$y = x^a$, $\alpha \in Z$	$x \in R$	$y = x^5$, $x \in R$
$y = x^a$, α — целое отрицательное число или 0	$x \neq 0$	$y = x^{-3}$, $x \neq 0$
$y = x^a$, $\alpha > 0$, α — не целое число	$x \geq 0$	$y = x^{\frac{3}{4}}$, $x \geq 0$
$y = x^a$, $\alpha < 0$, α — не целое число	$x > 0$	$y = x^{-\frac{1}{2}}$, $x > 0$

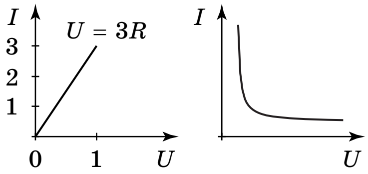
Область значения функции, заданной формулой

<table>
<tr><td colspan="2">Областью значений функции $E(f)$ называется множество тех значений, которые может принимать сама функция при всех значениях аргумента из области определения.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Чтобы найти $E(f)$, необходимо найти все значения a, для которых $f(x) = a$ имеет единственное решение</td></tr>
<tr><td>$E(f)$ многочлена чётной степени является:
а) промежуток $[m; +\infty)$, где m — наименьшее значение многочлена;</td><td>

$y = x^2 - 4$
$E(f) = [-4; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>б) промежуток $(-\infty; n]$, где n — наибольшее значение этой функции</td><td>

$y = -x^2 + 7$
$E(f) = (-\infty; 7]$</td></tr>
</table>

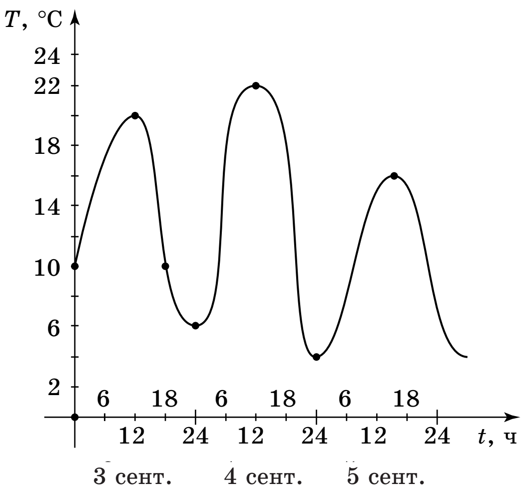
Примеры графических зависимостей, отражающих реальные процессы



а *б*

Закон Ома: сила тока I в цепи прямо пропорциональна напряжению U и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению участка цепи R (*а*)

Обратная зависимость, т. е. $I = \frac{U}{R}$ — гипербола (*б*)

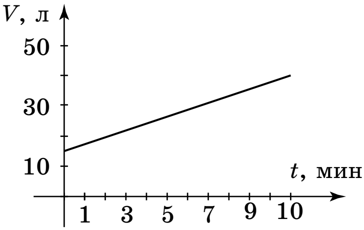


Изменение температуры воздуха на протяжении суток 3, 4 и 5 сентября.

По оси абсцисс — время суток в часах, t (ч).

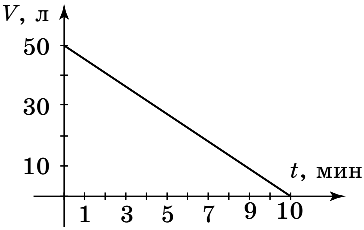
По оси ординат — значение температуры в градусах, T °С

Окончание таблицы



$V(t) = 15 + 2{,}5t$

а



$V(t) = 50 - 5t$

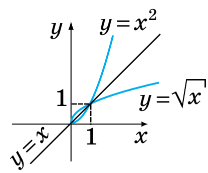
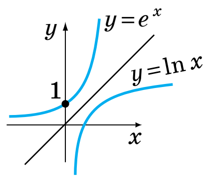
б

График, на котором изображён процесс наполнения бака водой (*а*). График, на котором изображён процесс вытекания воды из бака (*б*).
По оси абсцисс — время t в минутах, по оси ординат — объём бака в литрах

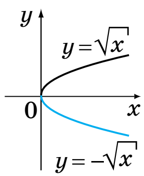
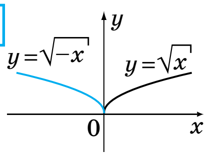
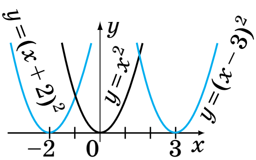
Обратная функция. График обратной функции

Обратная функция — это некоторая функция $y = g(x)$, которая получается из данной функции $y = f(x)$, если в отношении $x = f(x)$ выразить y через x	$y = x + 8$ и $y = x - 8$ $y = e^x$ и $y = \ln x$
Чтобы найти функцию, обратную для $f(x)$, нужно: 1) в соотношении $y = f(x)$ заменить x на y, а y на x; $x = f(y)$; 2) в выражении $x = f(y)$ выразить y через x. Функции $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны	Для функции $y = 11 - 5x$ найдём обратную: $x = 11 - 5y$; $5y = 11 - x$; $y = \dfrac{11 - x}{5}$. Функции $y = 11 - 5x$ и $y = \dfrac{11 - x}{5}$ взаимно обратные

Окончание таблицы

Условие обратимости функции — её монотонность (убывает или возрастает)	$y = x^2$, возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Обратная для неё: $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; +\infty)$ или $y = -\sqrt{x}$, $x \in (-\infty; 0]$
Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x^2$	 

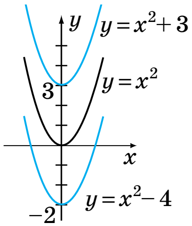
Преобразование графиков функций

$\boxed{y = -f(x)}$ 	Симметрия относительно оси абсцисс
$\boxed{y = f(x)}$ 	Симметрия относительно оси ординат
$\boxed{g = f(x+a)}$ 	Перенос графика $y = f(a)$ по оси абсцисс на $-a$ единиц

Продолжение таблицы

<table>
<tr>
<td>

$\boxed{y = f(x) + b}$

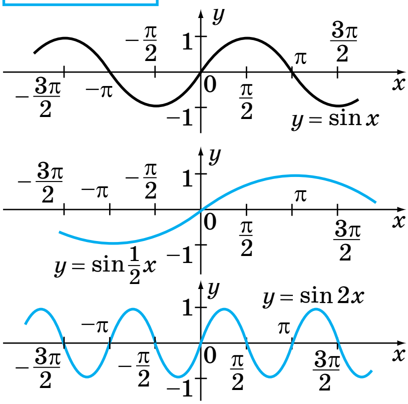


</td>
<td>

Перенос графика $y = f(a)$ по оси ординат на b единиц

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\boxed{f(kx),\ k > 0}$



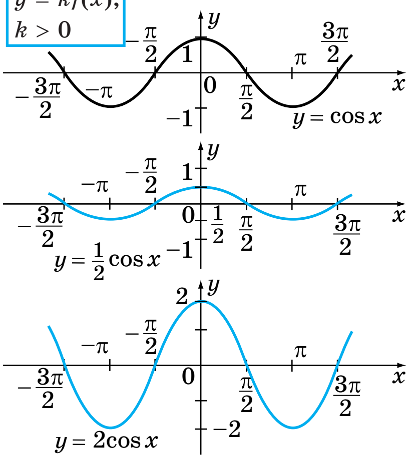
</td>
<td>

а) при $0 < k < 1$ — растяжение от точки $(0;\ 0)$ вдоль оси абсцисс в $\dfrac{1}{k}$ раз;

б) при $k > 1$ — сжатие к точке $(0;\ 0)$ вдоль оси абсцисс в k раз

</td>
</tr>
<tr>
<td>

$\boxed{y = kf(x),\ k > 0}$



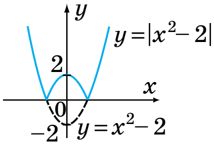
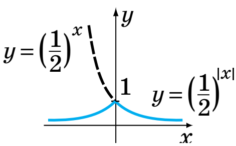
</td>
<td>

а) при $0 < k < 1$ сжатие к точке $(0;\ 0)$ вдоль оси ординат;

б) при $k > 1$ растяжение от точки $(0;\ 0)$ вдоль оси ординат

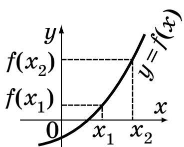
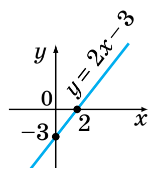
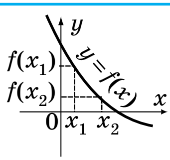
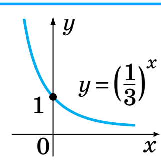
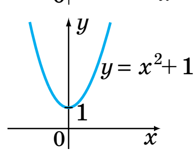
</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

$\boxed{y = \lvert f(x) \rvert}$ 	Часть графика в верхней полуплоскости и на оси абсцисс — без изменения; часть графика в нижней полуплоскости — **симметрия относительно** оси Ox
$\boxed{y = f(\lvert x \rvert)}$ 	Часть графика в правой полуплоскости и на оси ординат — без изменения; вместо части в левой полуплоскости строим симметричную правой относительно оси Oy

3.2. Элементарное исследование функций

Монотонность функции

 Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на числовом промежутке x, если для любых x_1 и x_2 из x: $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	
 Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на числовом промежутке x, если для любых x_1 и x_2 из x: $x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$	 

Если функция только возрастает или только убывает на данном числовом промежутке, то она называется **монотонной** на этом промежутке.

Чётность и нечётность функции

Функция $f(x)$ называется **чётной**, если для любого значения x из её области определения функции значение $-x$ тоже принадлежит области определения и выполняется $f(-x) = f(x)$

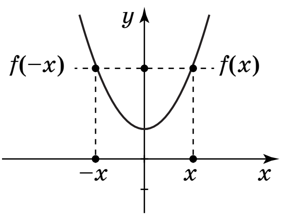
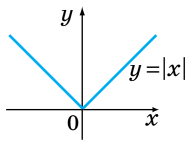
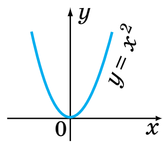
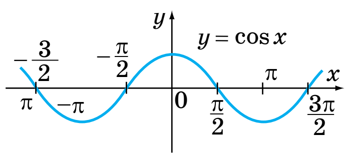


График симметричен относительно оси Oy







Функция $f(x)$ называется **нечётной**, если для любого значения x из её области определения значения $-x$ тоже принадлежит области определения и выполняется $f(-x) = -f(x)$

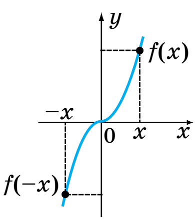
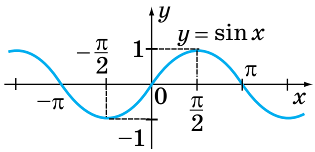
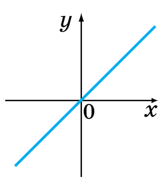
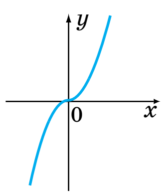


График симметричен относительно начала координат

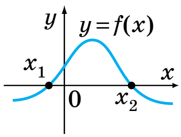




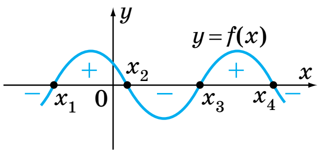


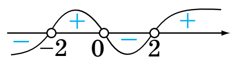
Нули функции. Промежутки знакопостоянства

Нули функции — это значения аргумента, при которых значение функции равно нулю: $f(x) = 0$



Промежутки знакопостоянства — промежутки, на которых все значения функции положительны (отрицательны). Чтобы их найти, достаточно решить неравенство $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$



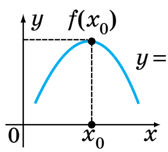


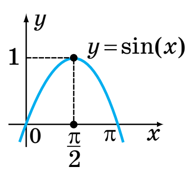
Экстремумы (минимумы и максимумы) функции

Точка x_0 — **точка максимума**, если для этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме точки x_0) выполняется неравенство: $f(x_0) \geq f(x)$, где

x_0 — точка максимума;

$f(x_0)$ — максимум функции



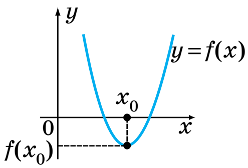


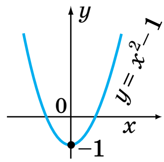
Окончание таблицы

Точка x_0 — **точка минимума**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме точки x_0), выполняется неравенство $f(x_0) < f(x)$

x_0 — точка минимума;

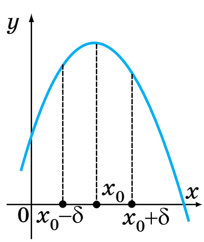
$f(x_0)$ — минимум функции

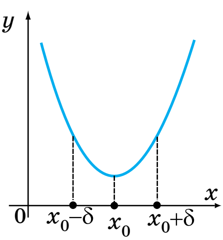




Точки экстремума — общий термин, объединяющий точки минимума и максимума.

Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке $(x_0 - \delta;\ x_0)$ и убывает (возрастает) на некотором промежутке $[x_0;\ x_0 + \delta)$, то точка x_0 является точкой максимума (минимума) функции $f(x)$





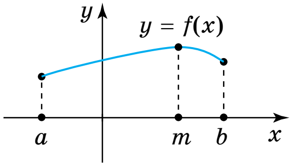
Нахождение экстремумов функции (максимума и минимума) для функции $y = f(x)$:

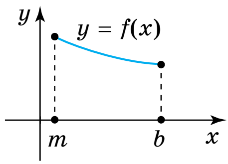
1. если x_{min} — точка минимума функции, то минимум этой функции $f_{min} = f(x_{min})$

2. если x_{max} — точка максимума функции, то максимум этой функции $f_{max} = f(x_{max})$

Наибольшее и наименьшее значения функции

<table>
<tr>
<td>

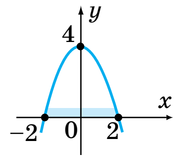


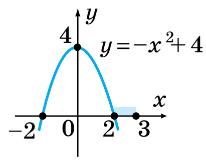


Функция $y = f(x)$, определённая на некотором промежутке, достигает своего **наибольшего значения**, если существует точка m из этого промежутка, что для всех x этого промежутка выполняется неравенство:

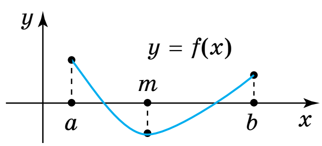
$$f(x) \leq f(m)$$

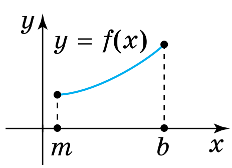
</td>
<td>





</td>
</tr>
<tr>
<td>

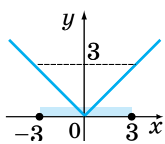


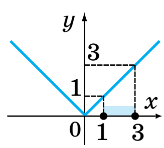


Функция $y = f(x)$, определённая на некотором промежутке, достигает своего **наименьшего значения**, если существует такая точка m из этого промежутка, что для всех x промежутка выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(m)$$

</td>
<td>





</td>
</tr>
</table>

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, нужно:
1) вычислить значение функции в каждой точке минимума (максимума) на этом отрезке;
2) вычислить значение функции на концах отрезка;
3) из полученных чисел выбрать наибольшее (наименьшее)

Ограниченность функции

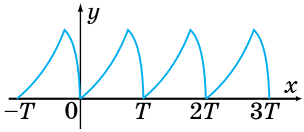
Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на всей области определения $D(f)$, если существует такое число C, что $|f(x)| \leq C$ для каждой точки $x \in D(f)$.
Функция, ограниченная на множестве $x \in D(f)$, может быть неограниченной на всей области определения

Периодичность функции

Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа $(x-T)$ и $(x+T)$ также принадлежит этой области и выполняется равенство

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x),$$

где T — период функции

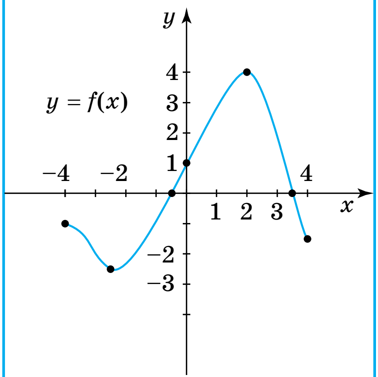


Если функция $y = f(x)$ имеет наименьший положительный период T, то функция $y = f(kx+b)$ имеет период

$$T_1 = \frac{T}{|k|}$$

Чтение графиков функций

Чтение графика функции — это описание свойств функции по её графику

План описания функции	**Пример**
1. Область определения функции $D(x)$ (множество допустимых значений переменной x) определяется на оси x	 $D(f) = [-4;\ 4]$
2. Множество значений функции $E(f)$ — определяется по оси y	$E(f) = [-2;\ 4]$
3. Чётность или нечётность функции	Функция не является ни чётной, ни нечётной
4. Наибольшее, наименьшее значение функции	Наибольшее значение функции $y = 4$ при $x = 2$. Наименьшее значение функции $y = -2{,}5$ при $x = -2{,}5$
5. Нули функции ($f(x) = 0$)	Нули: $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 3{,}5$
6. Промежутки знакопостоянства ($f(x) > 0$ и $f(x) < 0$)	$f(x) > 0$ при $x \in (-0{,}5;\ 3{,}5)$; $f(x) < 0$ при $x \in [-4;\ -0{,}5) \cup (3{,}5;\ 4]$
7. Промежутки возрастания и убывания функции	$f(x)$ возрастает при $x \in (-2{,}5;\ 2)$; убывает при $x \in (-4;\ -2{,}5)$ и $(2;\ 4]$

Окончание таблицы

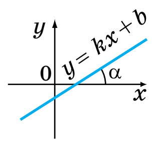
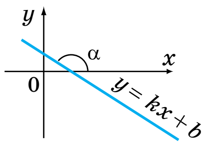
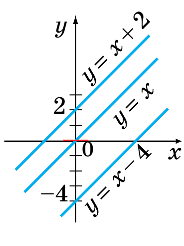
План описания функции	Пример
8. Экстремумы (минимум и максимум)	Максимум: $\max\limits_{[-4;\,4]} f(x) = f(2) = 4$; минимум: $\min\limits_{[-4;\,4]} f(x) = f(-2) = -2$

3.3. Основные элементарные функции

Линейная функция, её свойства и график

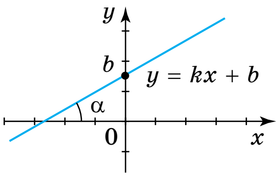
Функция вида $y = kx + b$, где k и b — числа, а x — переменная, называется **линейной.**
Графиком любой линейной функции является прямая.

Геометрический смысл коэффициентов *k* и *b*

Коэффициент k (угловой коэффициент) отвечает за наклон графика функции: а) $k > 0 \Leftrightarrow 0° < \alpha < 90°$ Функция возрастает; б) $k < 0 \Leftrightarrow 90° < \alpha < 180°$. Функция убывает	
Коэффициент b отвечает за сдвиг графика вдоль оси Oy: а) $b > 0$, $y = kx + b$ получается путём сдвига графика $y = kx$ **вверх** на b единиц вдоль оси Oy; б) $b < 0$, $y = kx + b$ получается путём сдвига графика $y = kx$ на $\lvert b\rvert$ единиц **вниз** вдоль оси Oy	

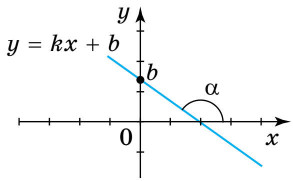
<table>
<tr><td colspan="2">Получаем четыре ситуации</td></tr>
<tr><td>

1. $\boldsymbol{k > 0,\ b > 0;\ 0^\circ < \alpha < 90^\circ}$



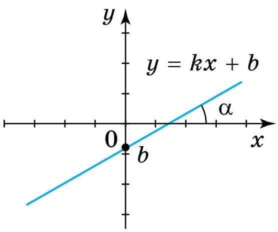
</td><td>

2. $\boldsymbol{k < 0,\ b > 0;\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ}$



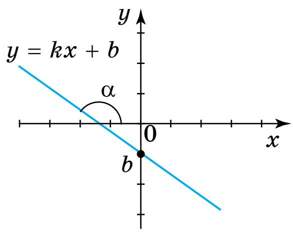
</td></tr>
<tr><td>

3. $\boldsymbol{k > 0,\ b < 0;\ 0^\circ < \alpha < 90^\circ}$



</td><td>

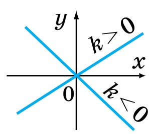
4. $\boldsymbol{k < 0,\ b < 0;\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ}$



</td></tr>
<tr><td>

$y = kx$
$y = kx+b;\ b = 0;\ k \neq 0$
График прямой пропорциональности. Прямая проходит через начало координат

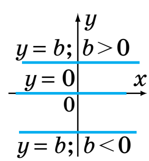
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

а) $y = b$
$y = kx+b;\ b \neq 0;\ k = 0.$
Прямая, параллельная оси Ox;
б) $y = kx+b;\ b = 0;\ k = 0;$
$y = 0.$
Прямая совпадает с осью Ox

</td><td>

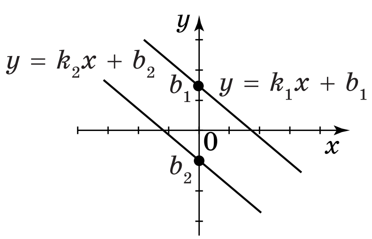
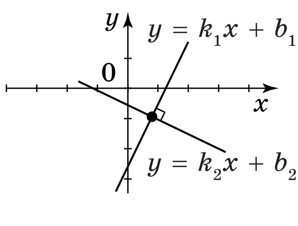


</td></tr>
</table>

Свойства графика линейной функции

<table>
<tr><th>Свойства</th><th>$k > 0$</th><th>$k < 0$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Область определения функции состоит из всех чисел</td><td>$y = 3x - 2$</td><td>$y = -2x + 3$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x \in \mathrm{R}$</td></tr>
<tr><td>2. Область значений ($k \neq 0$) состоит из всех чисел. Если $k = 0$, то $y = b$ — единственное значение</td><td colspan="2">$y \in \mathrm{R}$</td></tr>
<tr><td>3. $k > 0$ — возрастает; $k < 0$ — убывает</td><td>возрастает</td><td>убывает</td></tr>
<tr><td>4. Если $b = 0$, то $y = kx$ — функция нечётная</td><td colspan="2">экстремумов нет</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5. Пересекает ось Oy в точке $(0; b)$; ось Ox — в точке $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$, $k \neq 0$</td><td colspan="2">точки пересечения с осями:</td></tr>
<tr><td>$(0; 2)$; $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$</td><td>$(0; 3)$; $(1{,}5; 0)$</td></tr>
</table>

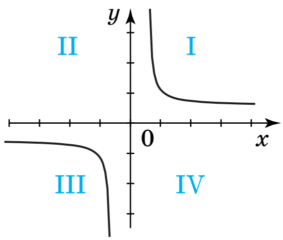
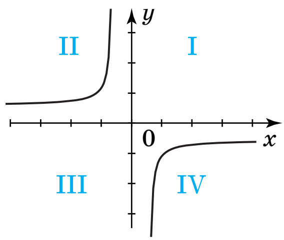
Взаимное расположение графиков линейных функций

<table>
<tr><td>Условие параллельности двух прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:
графики этих функций параллельны, если
$k_1 = k_2$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Условие перпендикулярности прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:
графики этих функций перпендикулярны, если
$k_1 \cdot k_2 = -1$ $\quad k_2 = -\frac{1}{k_1}$</td><td>
</td></tr>
</table>

Функция, описывающая обратно пропорциональную зависимость

Функция, которую можно задать формулой вида $y = \dfrac{k}{x}$, где x — независимая переменная, k — некоторое число, отличное от нуля, называется **обратной пропорциональностью**

Свойства функции $y = \dfrac{k}{x}$

<table>
<tr><th>$k > 0$</th><th>$k < 0$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Область определения — множество всех действительных чисел, кроме $x = 0$.
$D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Множество значений — множество всех действительных чисел, кроме $y = 0$.
$E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Нечётная. График симметричен относительно начала координат</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. График функции — гипербола. Состоит из двух ветвей.</td></tr>
<tr><td>5. График лежит в I и III координатных четвертях.
При $x > 0$ $y > 0$; при $x < 0$ $y < 0$</td><td>5. График лежит во II и IV координатных четвертях.
При $x > 0$ $y < 0$; при $x < 0$ $y > 0$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

$k > 0$	$k < 0$
6. Функция убывает на всей области определения, т. е. при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	6. Функция возрастает на всей области определения, т. е. при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Дробно-линейная функция, её свойства и график

Функция вида $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, где a, b, c, d — постоянные, причём $c \neq 0$, называется **дробно-линейной**.

Функция определена всюду, кроме $x = -\dfrac{d}{c}$.

Дробно-линейную функцию можно привести к виду:

$y = n + \dfrac{k}{x + m}$, где $m = \dfrac{d}{c}$, $n = \dfrac{a}{c}$.

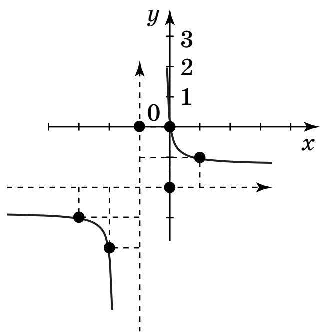
Таким образом, график дробно-линейной функции — это **гипербола**, которую можно получить **сдвигом** гиперболы $y = \dfrac{k}{x}$ на $-m$ единиц вдоль оси Ox и на n единиц вдоль оси Oy

График функции $y = \dfrac{-2x}{x+1}$ $(x \neq -1)$.

$\dfrac{-2x}{x+1} = \dfrac{-2x - 2 + 2}{x+1} =$

$= \dfrac{-2(x+1)}{x+1} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2}{x+1} - 2.$

То есть график $y = \dfrac{-2x}{x+1}$ или $y = \dfrac{2}{x+1} - 2$ получается из графика $y = \dfrac{2}{x}$ путем сдвига по оси Ox на 1 единицу влево и по оси Oy на 2 единицы вниз



$y = \dfrac{-2x}{x+1}$

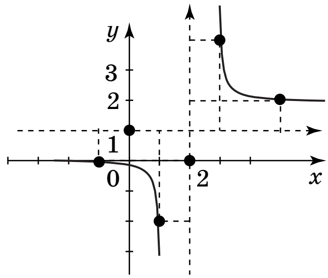
Окончание таблицы

$$y = \frac{x+1}{x-2} \quad (x \neq 2)$$

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2+2+1}{x-2} =$$

$$= \frac{x-2}{x-2} + \frac{3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1$$

График $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ или $y = \dfrac{3}{x-2} + 1$ получается путём сдвига на 2 единицы вправо вдоль оси Ox и на 1 единицу вверх вдоль оси Oy $(x \neq 2)$



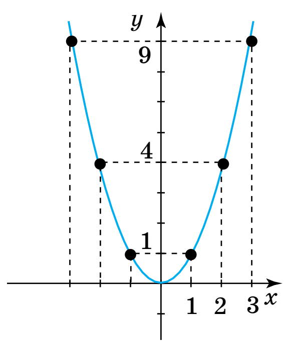
$$y = \frac{x+1}{x-2}$$

Квадратичная функция, её свойства и график

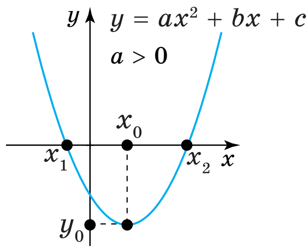
Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — некоторые числа $(a \neq 0)$, x — переменная, называется **квадратичной**

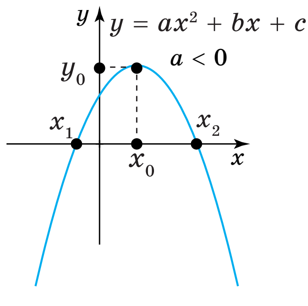
Свойства функции $y = x^2$

1. Область определения — все действительные числа: $D(f) = R$.
2. Множество значений $E(f) = [0; +\infty)$.
3. Графиком функции является парабола. Вершина параболы — $(0; 0)$.
4. $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; отрицательных значений нет.



Продолжение таблицы

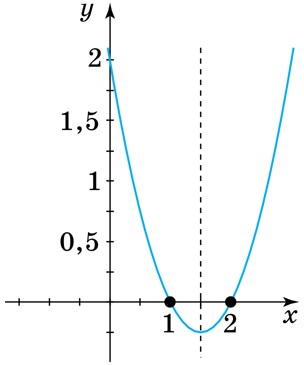
<table>
<tr>
<td>5. Чётная функция, график симметричен относительно оси Oy.
6. Возрастает при $x \in [0; +\infty)$; убывает при $x \in (-\infty; 0)$.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Свойства функции $y = ax^2+bx+c$</td>
</tr>
<tr>
<td>1. Область определения — все действительные числа: $D(f) = R$.
2. Область значений:
• если $a > 0$, то $E(f)$: $[y_0; +\infty)$;
• если $a < 0$, то $E(f)$: $(-\infty; y_0]$, где $(x_0; y_0)$ — координаты вершины параболы.
3. При $b = 0$ функция $y = ax^2 + c$ — чётная, $b \neq 0$ — общего вида.
4. Графиком функции является парабола. Вершина параболы — точка $(m; n)$, где $m = -\dfrac{b}{2a}$; $n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Координату точки n можно записать и так:
$$n = am^2+bm+c.$$
5. При $a>0$ функция убывает на $(-\infty; x_0]$ и возрастает на $[x_0; +\infty)$, где $x_0 = m = -\dfrac{b}{2a}$.</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

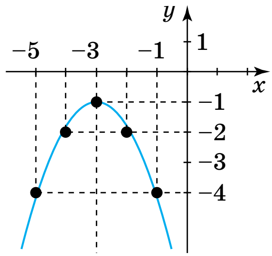
6. Ось симметрии параболы: $$x = m = -\frac{b}{2a}.$$ 7. Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, $a < 0$ — ветви параболы направлены вниз	

Основные способы построения параболы

Построение графика квадратичной функции по четырём характеристическим точкам (вершина, нули, точка пересечения с осью *Oy*)	
Алгоритм	**Пример**
1. Построить вершину параболы $(m;\ n)$, вычислив m и n по формулам: $m = -\frac{b}{2a}$ и $n = am^2 + bm + c$. 2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси Oy, ось симметрии параболы, $x = m$. 3. Нули функции: $ax^2 + bx + c = 0$. x_1 и x_2 — корни уравнения. 4. Точка пересечения с осью Oy: $(0;\ C)$. Отметить ее на оси Oy. 5. При необходимости найти дополнительные точки. 6. Построить график через найденные точки	Построить график $y = x^2 - 3x + 2$ 1. $m = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $n = 1{,}5^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 2 = -0{,}25$. 2. Ось симметрии: $x = 1{,}5$. 3. Нули фукнкции: $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$. 4. Точка пересечения с осью Oy: $(0;\ 2)$. 

Построение графика квадратичной функции методом выделения полного квадрата и параллельным переносом

Функцию $y = ax^2 + bx + c$ привести к виду $y = a(x - m)^2 + n$. Далее — параллельный перенос графика $y = ax^2$ на m единиц вдоль оси Ox, на n единиц по оси Oy



$y = -x^2 - 6x - 10$

$-x^2 - 6x - 10 =$

$= -(x^2 + 6x + 10) =$

$-(x^2 + 6x + 9 + 1) =$

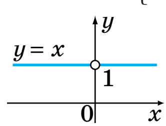
$-(x + 3)^2 - 1.$

Параллельный перенос графика $y = -x^2$ на -3 единицы вдоль оси Ox и на -1 по оси Oy

Степенная функция, её свойства и график

Функция вида $y = x^a$, где α — действительное число, называется **степенной**

Если $\alpha = 0$, то $y = \begin{cases} x^0 = 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$



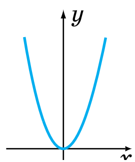
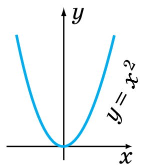
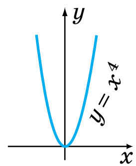
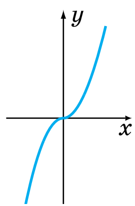
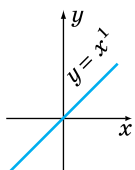
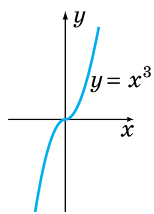
Для описаня свойств степенной функции рассматриваются характеристики:

1) область определения: $D(y)$;

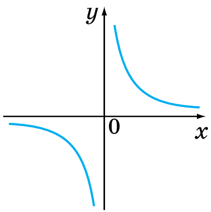
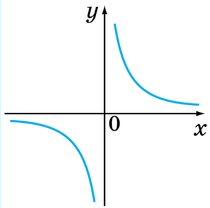
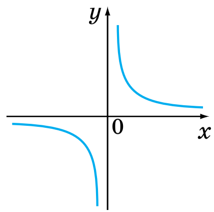
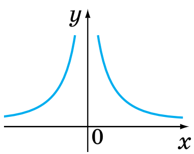
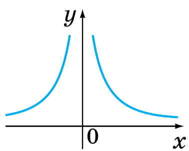
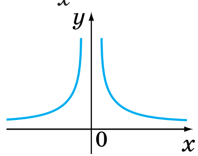
2) область значений: $E(y)$;

3) чётность или нечётность;

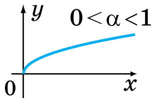
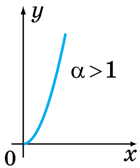
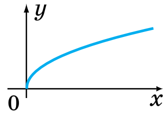
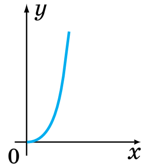
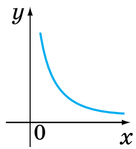
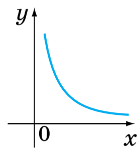
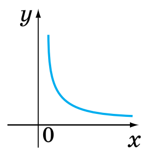
4) возрастание и убывание функции на области определения

Графики и свойства функции $y = x^{\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$						
График			**Свойства**			
			$D(y)$	$E(y$	**чётность и нечётность**	**возрастание, убывание**
1. $y = x^{\alpha}$, α — чётное натуральное число ($y = x^{2n}$, $n \in N$)						
$y = x^{2n}$, $n \in Z$ 	$y = x^2$ 	$y = x^4$ 	R	$[0; +\infty)$	Чётная	Возрастает $x \in (-\infty; 0]$; убывает $x \in [0; +\infty)$
2. $y = x^{\alpha}$, α — нечётное натуральное число ($y = x^{2n+1}$, $n \in N$)						
$y = x^{2n+1}$, $n \in N$ 	$n = 1$ $y = x^1$ 	$n = 3$ $y = x^3$ 	R	R	Нечётная	Возрастает

Продолжение таблицы

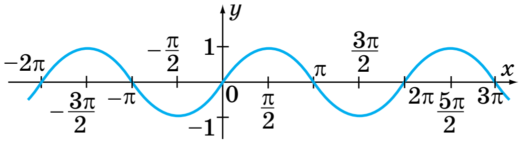
3. $y = x^{\alpha}$, α — нечётное целое отрицательное число $\left(y = x^{-(2n-1)} = \dfrac{1}{x^{2n-1}},\ n \in Z\right)$						
$y = x^{-(2n-1)} = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$ 	$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ 	$y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ 	$x \neq 0$	$y \neq 0$	Нечётная	Убывает на $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$
4. $y = x^{\alpha}$, α — чётное отрицательное число $\left(y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}},\ n \in Z\right)$						
$y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$ 	$y = \dfrac{1}{x^2}$ 	$y = \dfrac{1}{x^4}$ 	$x \neq 0$	$(0;\ +\infty)$	Чётная	Возрастает $x \in (-\infty;\ 0)$; убывает $x \in (0;\ +\infty)$

Окончание таблицы

5. $y = x^{\alpha}$, α — нецелое положительное число						
$0 < \alpha < 1$ $\alpha > 1$  	$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{\frac{3}{2}}$ 	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Ни чётная, ни нечётная	Возрастает
6. $y = x^{\alpha}$, α — нецелое отрицательное число						
$y = x^{\alpha}$, $\alpha < 0$ 	$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-\frac{3}{2}}$ 	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	Ни чётная, ни нечётная	Убывает

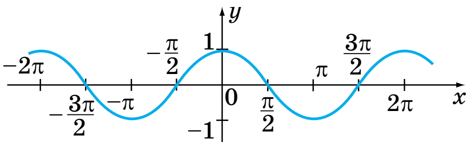
Тригонометрические функции, их свойства и графики

График функции $y = \sin x$ (синусоида)



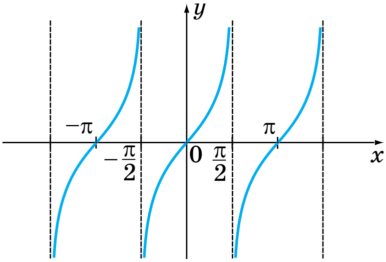
Свойства функции $y = \sin x$	
1. Область определения	$x \in R$ (x — любое число)
2. Область значений	$y \in [-1; 1]$
3. Функция нечётная	$\sin(-x) = -\sin x$
4. Периодическая функция	$T = 2\pi$
5. Точки пересечения с осями координат	$(\pi k; 0)$, $k \in Z$
6. Промежутки знакопостоянства	$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$; $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$
7. Промежутки возрастания и убывания $y = \sin x$	Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$; убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$
8. Наибольшее значение функции	1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$
9. Наименьшее значение функции	−1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$

График функции $y = \cos x$ (косинусоида)



Свойства функции $y = \cos x$	
1. Область определения	$x \in R$
2. Область значений	$y \in [-1; 1]$
3. Функция чётная	$\cos(-x) = \cos x$
4. Периодическая функция	$T = 2\pi$
5. Точки пересечения с осями координат	$(0; 1)$ и $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right)$, $k \in Z$
6. Промежутки знакопостоянства	$\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; $\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$
7. Промежутки возрастания и убывания	$\cos x$ возрастает на $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$; $\cos x$ убывает на $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$
8. Наибольшее значение функции	1 при $x = 2\pi k$, $k \in Z$
9. Наименьшее значение функции	-1 при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$

График и свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ (тангенсоида)



1. Область определения $D(\operatorname{tg} x)$: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.
2. Область значений: $y \in R$.
3. Функция нечётная, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
4. Периодическая, $T = \pi$.
5. Точки пересечения с осями координат: $(\pi k;\ 0)$, $k \in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства:

$\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$;

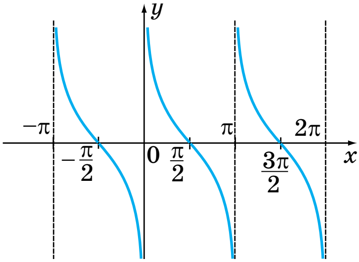
$\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right)$, $k \in Z$.

7. Промежутки возрастания и убывания:

$\operatorname{tg} x$ возрастает на каждом промежутке области определения $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

8. Наибольшего и наименьшего значения нет

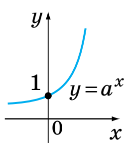
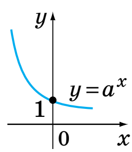
График и свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенсоида)



Окончание таблицы

1. Область определения: $x \neq \pi k,\ k \in \mathrm{Z}$. 2. Область значений: $y \in \mathrm{R}$. 3. Функция нечётная, $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\,x$. 4. Функция периодическая с периодом $T = \pi$. 5. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy — нет; с осью Ox: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ 0\right)$, $k \in \mathrm{Z}$. 6. Промежутки знакопостоянства: $\mathrm{ctg}\,x > 0$ при $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathrm{Z}$; $\mathrm{ctg}\,x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi + \pi k\right)$, $k \in \mathrm{Z}$. 7. Промежутки возрастания и убывания: функция $\mathrm{ctg}\,x$ убывает на каждом из промежутков своей области определения: $(\pi k;\ \pi + \pi k)$, $k \in \mathrm{Z}$. 8. Наибольшего и наименьшего значения нет

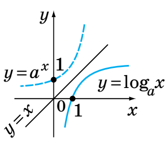
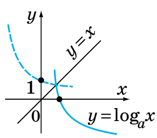
Показательная функция, её свойства и график

Показательной функцией называется функция вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$	
График показательной функции	
$a > 1$	$0 < a < 1$
	
Свойства показательной функции	
1. Область определения: $D(a^x) = \mathrm{R}$. 2. Область значений: $E(a^x)\ \ (0;\ +\infty)$, то есть $y > 0$. 3. Функция ни чётная, ни нечётная. 4. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy: $(0;\ 1)$; с осью Ox — нет. 5. Промежутки возрастания и убывания	

Окончание таблицы

$a > 1$	$0 < a < 1$
При $a > 1$ функция возрастает на всей области определения	При $0 < a < 1$ функция убывает на всей области определения
6. Для всех $x \in R$ $y > 0$. Наибольшего и наименьшего значения нет	

Логарифмическая функция, её свойства и график

<table>
<tr><td colspan="2">Логарифмической функцией называется функция вида
$y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">График логарифмической функции</td></tr>
<tr><td colspan="2">Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) взаимно обратные, поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Свойства логарифмической функции</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Область определения: $x > 0$; $D(\log_a x) = (0; +\infty)$.
2. Область значений: $y \in R$; $E(\log_a x) = R$.
3. Функция ни чётная, ни нечётная.
4. Точки пересечения с осями координат: с осью Oy — нет; с осью Ox — $(1; 0)$</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>Функция $\log_a x$ возрастает при $a > 1$ на всей области определения</td><td>Функция $\log_a x$ убывает при $0 < a < 1$ на всей области определения</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

5. Промежутки знакопостоянства	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x > 0$ при $x > 1$; $\log_a x < 0$ при $0 < x < 1$	$\log_a x > 0$ при $0 < x < 1$; $\log_a x < 0$ при $x > 0$
6. Наибольшего и наименьшего значения нет.	

Числовые последовательности. Прогрессии

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n, то говорят, что задана **числовая последовательность:** a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_n; ...	
Способы задания последовательности	
Формула *n*-го члена a_n $a_n = f(n)$ выражает член последовательности в зависимости от их номера	$a_n = n^2+1$ $a_5 = 5^2+1 = 26$
Рекуррентная формула — формула выражает любой член последовательности, начиная с некоторого, через предыдущие члены	$a_{n+1} = a_n - 1{,}5$ $a_1 = 17$; $a_2 = 17 - 1{,}5 = 15{,}5$; $a_3 = 15{,}5 - 1{,}5 = 14$; $a_4 = 14 - 1{,}5 = 12{,}5$ и т. д.
Числовая последовательность — функция натурального аргумента $f(x)$	
Некоторые числовые последовательности и их суммы	
$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ $1+3+5+\ldots+(2n-3)+(2n-1) = n^2$ $2+4+6+\ldots+(2n-2)+2n = n(n+1)$	

Окончание таблицы

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2 + 2^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

Арифметическая прогрессия (АП)

Арифметическая прогрессия (АП) — последовательность a_1; a_2; a_3; ..., каждый член которой, начиная со второго, получается путём прибавления к предыдущему постоянного числа d (*разность прогрессии*). $a_{n+1} = a_n + d,\ n \in N$	2; 4; 6; 8; ...; $a_1 = 2$, $d = 2$ — возрастающая прогрессия -10; $-10{,}5$; -11; $-11{,}5$; ...; $a_1 = -10$; $d = -0{,}5$ — убывающая прогрессия
Основные соотношения для АП	
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + (n-1)d,\ n \in N$
Характеристическое свойство	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$
Свойство двух членов АП	$a_k + a_l = a_n + a_m$, если $k + l = n + m$
Формула суммы n первых членов АП	$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ или $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрическая прогрессия (ГП)

Геометрическая прогрессия (ГП) — числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число, не равное нулю. Это постоянное число q — знаменатель последовательности	
Формула n-го члена ГП	$b_n = b_1 \cdot q_n,\ n \in N$ $q = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$
Признак ГП:	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+2},\ n \in \mathrm{N}$
Обобщённый признак ГП:	$a_n^2 = a_{k-n} \cdot a_{k+n},\ k \in \mathrm{N},\ n \in \mathrm{N}$
Свойство двух членов ГП:	$a_k \cdot a_l = a_n \cdot a_m$, если $k + l = n + m$
Формула суммы n первых членов ГП	$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q - 1}$ или $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ (удобно при $q > 1$) $S_n = \dfrac{b_1 - b_n q}{1 - q} = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ (удобно при $q < 1$)
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	
Бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой по модулю меньше единицы ($\lvert q \rvert < 1$), называется **бесконечно убывающей**	
Сумма бесконечно убывающей ГП	$S = \dfrac{b_1}{1 - q};\ \lvert q \rvert < 1$
Формулу $S = \dfrac{b}{1 - q}$ используют для записи бесконечной периодической дроби в виде десятичной	

НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4

4.1. Производная

Определение производной

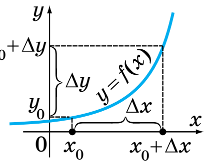
<table>
<tr>
<td>

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения функции Δy к приращению аргумента Δx, при условии, что Δx стремится к нулю.

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

</td>
<td>



x_0 — начальное значение аргумента;
Δx — приращение аргумента;
$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ — приращение функции

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Операция нахождения производной функции называется **дифференцированием.**

</td>
</tr>
</table>

Таблица производных

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
C (const)	0	$\cos x$	$-\sin x$
$kx+b$	k	$\operatorname{tg} x$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\operatorname{ctg} x$, $x \neq \pi n$, $n \in Z$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sqrt{x}$, $x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arcsin x$, $\|x\| \leq 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Окончание таблицы

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$
$\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$-\frac{1}{x^2}$	$\arccos x$, $\lvert x \rvert \leq 1$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{1}{x^n}$ $(x \neq 0)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Основные правила дифференцирования

Постоянный множитель можно выносить за знак производной	$C \cdot (u(x))' = C \cdot u'(x)$
Производная суммы функций равна сумме их производных	$(u+v)' = u'+v'$
Производная произведения	$(u \cdot v)' = u'v+v'u$
Производная дроби	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$; $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Производная сложной функции	$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

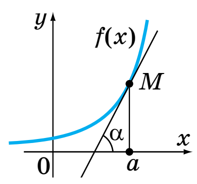
Способы вычисления производной

Постоянный множитель можно выносить за знак производной	$(7x^5)' = 7\cdot(x^5)' = 7\cdot 5x^4 = 35x^4$
$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$	$x^{25} = 25\cdot x^{25-1} = 25x^{24}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\left(\dfrac{1}{x^{10}}\right)' = -\dfrac{10}{x^{10+1}} = -\dfrac{10}{x^{11}}$
$(u+v)' = u'+v'$	$\left(\cos x + \sqrt{x}\right)' = (\cos x)' + \left(\sqrt{x}\right)' =$ $= -\sin x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$(u+v)' =$ $= u'v+v'u$	$(x^2\cdot\sin x)' = (x^2)'\cdot\sin x + (\sin x)'\cdot x^2 =$ $= 2x\ \sin x + x^2\ \cos x$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, $v \neq 0$	$\left(\dfrac{3x+2}{\sin x}\right)' =$ $= \dfrac{(3x+2)'\sin x - (\sin x)'(3x+2)}{\sin^2 x} =$ $= \dfrac{3\sin x - (3x+2)\cos x}{\sin^2 x}$
$(\sin u)' = \cos u\cdot u'$	$(\sin 17x)' = \cos 17x\cdot(17x)' = 17\ \cos 17x$ $\left(\sin\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\right)' = \left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)'\cos\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right) =$ $= \dfrac{3}{2}\cos\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$
$(\cos u)' =$ $= -\sin u\cdot u'$	$\left(\cos\dfrac{x}{3}\right)' = -\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}$

Окончание таблицы

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$; $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	$(\operatorname{tg} 4x)' = \dfrac{4}{\cos^2 4x}$; $\left(\operatorname{ctg} \dfrac{x}{2}\right)' = -\dfrac{1}{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}$
$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$	$\left(\dfrac{1}{x^2 + 2x}\right) = -\dfrac{(x^2 + 2x)'}{(x^2 + 2x)^2} = -\dfrac{2x + 2}{(x^2 + 2x)^2}$
$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\sqrt{x^2 + 2x + 5}\right)' = \dfrac{(x^2 + 2x + 5)'}{2\sqrt{x^2 + 2x + 5}} =$ $= \dfrac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$
$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{n \cdot u'}{u^{n+1}}$	$\left(\dfrac{1}{(3x + 7)^6}\right)' = \dfrac{-6 \cdot (3x + 7)'}{(3x + 7)^7} =$ $= \dfrac{-6 \cdot 3}{(3x + 7)^7} = -\dfrac{18}{(3x + 7)^7}$
$(a^{ux})' =$ $u'(x) \cdot a^{u(x)} \cdot \ln a$	$(a^{\cos x})' = a^{\cos x} \ln a \cdot (\cos x)' =$ $= a^{\cos x} \ln a \cdot (-\sin x)$
$(\log_a u(x))' =$ $= \dfrac{u'(x)}{u \cdot \ln a}$	$(\log_3(x^2 - 3x + 1))' = \dfrac{(x^2 - 3x + 1)'}{(x^2 - 3x + 1)\ln 3} =$ $= \dfrac{2x - 3}{(x^2 - 3x + 1)\ln 3}$

Геометрический смысл производной. Уравнение касательной

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ — угловой коэффициент касательной: $k = f'(a)$; $f'(a) = \operatorname{tg}\alpha$	

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$	
Уравнение прямой имеет вид: $y = kx + b$. $k = f'(a)$, тогда уравнение касательной в точке $x = a$ $y = f(a) + f'(a)(x - a)$	
Составление уравнения касательной	
$y = f(x)$. Составить уравнение касательной в точке $x_0 = a$	$y = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$
1. Вычислить $f(a)$	$f(a) = f(1) = \sqrt{1} = 1$
2. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$.	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(a) = f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$
3. Подставить найденные значения в формулу $y = f(a) + f'(a)(x - a)$	$y = 1 - \dfrac{1}{2}(x - 1)$; $y = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$; $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ или $y = -0{,}5x + 1{,}5$

Физический (механический) смысл производной

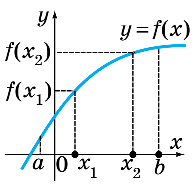
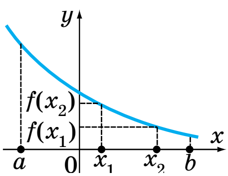
Производная характеризует **скорость изменения функций** при изменении аргумента. Если процесс протекает по закону $s = s(t)$, то $s'(t)$ — скорость протекания процесса в момент времени t	$s = s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени; $v = s'(t)$ — скорость прямолинейного движения; $a = v'(t)$ — ускорение прямолинейного движения

Окончание таблицы

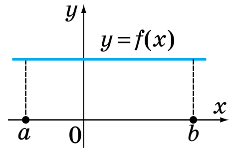
Вторая производная — это производная от производной	$y = f(x)$ $y' = f'(x)$ $y'' = (f'(x))' = (y')'$
Если уравнение движения задано функцией, то **первая производная** этой функции даст **скорость**, заданную функцией, а **вторая производная** даст **ускорение**, заданное функцией	$a = v'(t) = s''(t)$

4.2. Исследование функции с помощью производной

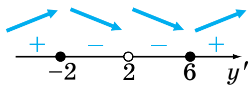
Исследование функции на монотонность

Возрастание и убывание функции на промежутке	
	Функция $y = f(x)$ **возрастает** на промежутке $(a;\ b) \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ для всех $x_1,\ x_2 \in (a;\ b)$
	Функция $y = f(x)$ **убывает** на промежутке $(a;\ b) \Rightarrow$ $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > fx_2)$ для всех $x_1,\ x_2 \in (a;\ b)$
Достаточное условие возрастания (убывания) функции	Если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a;\ b) \Rightarrow$ функция $f(x)$ **возрастает** на промежутке $(a;\ b)$. Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a;\ b) \Rightarrow$ функция $f(x)$ **убывает** на промежутке $(a;\ b)$

Окончание таблицы

Возрастание и убывание функции на промежутке	
Необходимое и достаточное условие постоянства функции	 Если $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a;\ b) \Rightarrow$ функция $f(x)$ **постоянна** на промежутке $(a;\ b)$

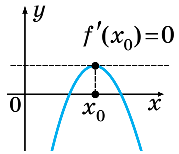
Нахождение промежутков возрастания и убывания функции

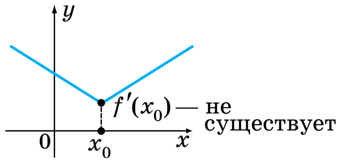
$y = \dfrac{x^2 + 6x}{x - 2}$	
1. Найти область определения функции	$D(y) = (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$
2. Найти производную, разложить на множители (если возможно)	$y' = \dfrac{(2x+6)(x-2) - (x^2+6x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x - 12}{(x-2)^2} = \dfrac{(x+2)(x-6)}{(x-2)^2}$
3. Исследовать знак производной методом интервалов	
4. Выбрать промежутки, где $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;\ -2) \cup (6;\ +\infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-2;\ 2) \cup (2;\ 6)$
5. Если функция непрерывна на концах промежутка, их можно присоединить к промежутку возрастания (убывания)	Возрастает на $(-\infty;\ -2]$ и $[6;\ +\infty)$; убывает на $[-2;\ 2)$ и $(2;\ 6]$

Экстремумы функции

Критические точки функции

Если $y = f(x)$ непрерывна, а точка $x_0 \in D(y)$, то если $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует, x_0 — критическая точка



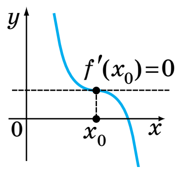


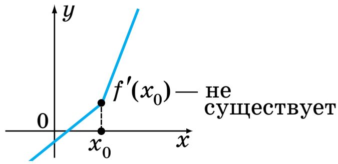
Необходимые условия экстремума

Если $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то x_0 — **критическая точка.**

Однако не каждая критическая точка является точкой экстремума.

$f'(x_0) = 0$ и $f'(x_0)$ — не существует, но x_0 не является точкой экстремума



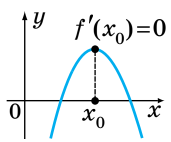


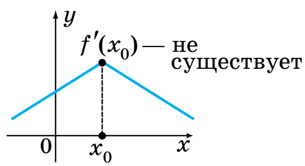
Достаточное условие экстремума

Первый признак экстремума

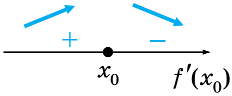
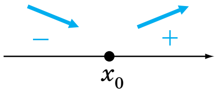
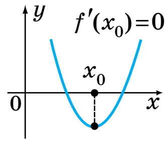
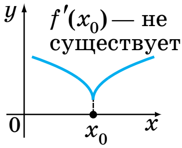
Если x_0 — критическая точка функции $y = f(x)$ ($f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует) и

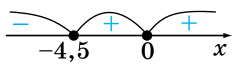
а) при переходе через x_0 производная $f'(x_0)$ меняет знак с «+» на «−», то x_0 — точка максимума





Окончание таблицы

 б) при переходе через x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+», то x_0 — точка минимума.  **Второй признак экстремума** Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ x_0 — точка максимума. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ x_0 — точка минимума	 

Нахождение точек экстремума и экстремумов функций	
$f(x) = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$	
1. Найти область определения функции	$2x^3 + 9x^2 \geq 0$; $x^2(2x + 9) \geq 0$; $D(f) = [-4{,}5;\ +\infty)$ 
2. Найти производную	$f'(x) = \dfrac{6x^2 + 18x}{2\sqrt{2x^3 + 9x^2}} =$ $= \dfrac{6x(x+3)}{\sqrt{x^2(2x+9)}}$
3. Найти критические точки	$f'(x)$ не существует, если $x = 0$. $x = -4{,}5$ не является внутренней точкой области определения. $f'(x) = 0$ при $x = -3$

Окончание таблицы

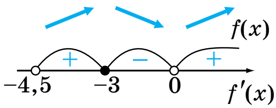
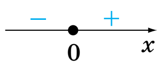
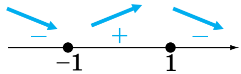
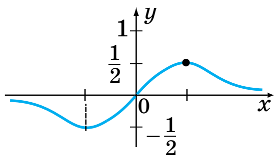
Нахождение точек экстремума и экстремумов функций	
4. Определить знак производной на каждом из интервалов, на которые критические точки разбивают область определения	
5. Найти точки экстремума	$x = -3$ — точка максимума; $x = 0$ — точка минимума
6. Найти экстремумы	$f_{\max} = f(-3) = 3\sqrt{3}$; $f_{\min} = f(0) = 0$

Схема исследования функции

$y = \dfrac{x}{x^2+1}$	
1. Область определения функции $D(f)$	$D(f) = \mathrm{R}$
2. Точки пересечения с осями координат $(x_0;\ 0)$ и $(0;\ y_0)$. Промежутки знакопостоянства	С осью Ox (нули): (0; 0); с осью Oy: (0; 0)  $f(x) > 0$ при $x \in (0;\ +\infty)$; $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty;\ 0)$
3. Чётность/нечётность, периодичность	Нечётная, $f(x) = -f(x)$ $\dfrac{(-x)}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x}{x^2+1}$, непериодическая
4. Производная и критические точки	$y' = \dfrac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ y' существует при $x \in \mathrm{R}$; $y' = 0$ при $x \neq \pm1$

Окончание таблицы

5. Промежутки монотонности, точки экстремума	 Возрастает при $x \in [-1;\ 1]$; убывает при $x \in (-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$
6. Поведение функции на концах области определения. Построение графика	

Использование производной для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах

Понятие производной используется для изучения изменяющихся величин, быстроты происходящих изменений	Физические производные величины
	$v(t) = x'(t)$ — скорость; $a(t) = v'(t)$ — ускорение; $I(t) = q'(t)$ — сила тока; $C(t) = Q'(t)$ — теплоёмкость; $d(l) = m'(l)$ — линейная плотность; $k(t) = l'(t)$ — коэффициент линейного расширения; $w(t) = \varphi'(t)$ — угловая скорость; $a(t) = w'(t)$ — угловое ускорение; $N(t) = A'(t)$ — мощность

4.3. Первообразная и интеграл

Первообразная. Основные свойства первообразной

Первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке называется функция $F(x)$, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x)$$

$f(x)$	$F(x)$	Доказать, что $F(x)$ — первообразная $f(x)$
$2x$	x^2, $x \in R$	$F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$, $x \in R$
x	$\frac{x^2}{2}$	$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = f(x)$, $x \in R$
x^a, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$F'(x) = \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) \cdot x^{\alpha} = f(x)$, $x \in R$, $\alpha \neq -1$

Операция нахождения

⇓ ⇓

производной функции — **дифференцирование**	первообразной функции — **интегрирование**

Интегрирование — операция, обратная к дифференцированию.

Основное свойство первообразной

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$	то $\Leftrightarrow$	$F(x)+C$ — первообразная для $f(x)$, C — произвольная постоянная

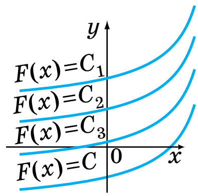
<table>
<tr><td>Геометрическая интерпретация основного свойства первообразной:
графики всех первообразных можно получить из любого графика путём параллельного переноса вдоль оси Oy</td><td>
$F(x)+C$ — общий вид первообразных для $f(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на промежутке называется неопределённым интегралом от функции f на этом промежутке</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правила вычисления первообразной (неопределённого интеграла)</td></tr>
<tr><td>1. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$; $G(x)$ — первообразная для функции $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ — первообразная для $f(x)+g(x)$</td><td>$\int (f(x) \pm g(x))dx =$
$= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$</td></tr>
<tr><td>2. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $CF(x)$ — первообразная для функции $Cf(x)$</td><td>$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$</td></tr>
<tr><td>3. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ и $k \neq 0$, $b \in R$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$</td><td>$\int f(kx+b)dx =$
$= \frac{1}{k}F(kx+b)+C,$
$k \neq 0,\ b \in R$</td></tr>
</table>

Таблица первообразных (неопределённых интегралов)

Функция $f(x)$	**Первообразная** $F(x)$	$\int f(x)dx$
0	C	$\int 0dx = C$

Окончание таблицы

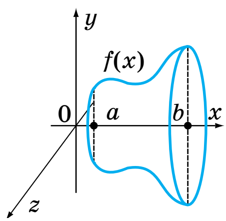
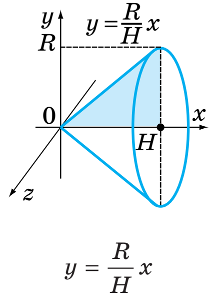
Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$	$\int f(x)dx$
1	$x+C$	$\int dx = x + C$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$ $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Определённый интеграл. Основные свойства определённого интеграла

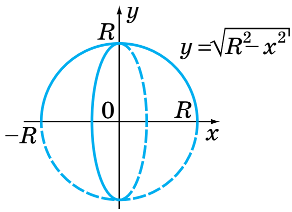
Определённым интегралом от a до b непрерывной функции $y = f(x)$, определённой на интервале $[a;\ b]$, называется прирост первообразной $F(x)$ для этой функции	Формула Ньютона — Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big\rvert_a^b$ $f(x)$ — подынтегральная функция a и b — верхние и нижние пределы интегрирования

Основные правила и свойства определённого интеграла		
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$	$\int_a^a f(x)dx = 0$	$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$
$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$	$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c \in [a;\ b]$	$\int_a^b f(kx+t)dx = \frac{1}{k}\int_{ka+l}^{kb+l} f(t)dt$	

Геометрический смысл определённого интеграла

Криволинейная трапеция (вокруг оси Ox): $V_{Ox} = \pi\int_a^b f^2(x)dxy = \frac{R}{H}x$	
Конус $V_к = \pi\int_0^H \left(\frac{Rx}{H}\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^H$ $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$	 $y = \frac{R}{H}x$

Окончание таблицы

Шар $V_ш = \pi \int\limits_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx =$ $= 2\pi \int\limits_{0}^{R} (R^2 - x^2) dx =$ $= 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Big\|_0^R$ $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$	 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

Физический (механический) смысл определённого интеграла

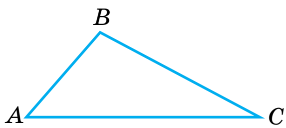
Если функция $v = f(t)$ обозначает **мгновенную скорость** движения тела в каждый момент времени t на $[a; b]$, то **определённый интеграл** $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен **пути**, пройденному за отрезок времени $t = b - a$

ГЕОМЕТРИЯ

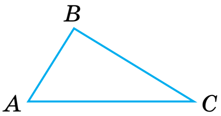
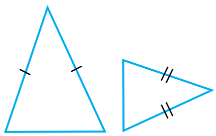
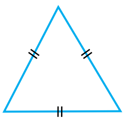
5

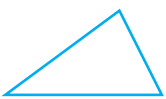
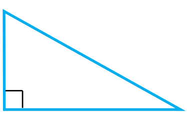
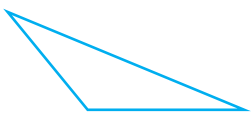
5.1. Планиметрия

Треугольник

<table>
<tr><td>Треугольник — фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, которые их попарно соединяют</td><td>

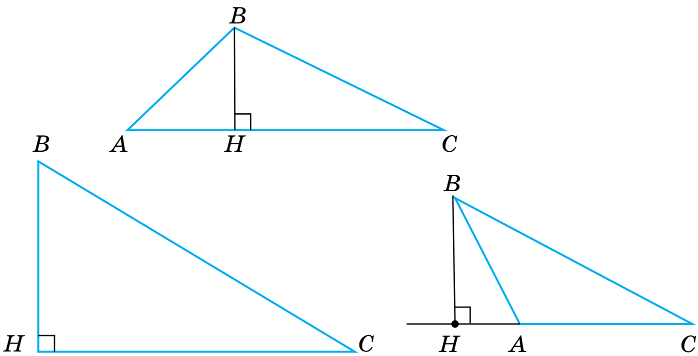
ΔABC, A, B, C — вершины;
AB, BC, AC — стороны</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">В зависимости от соотношения сторон выделяют такие виды треугольников:</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>разносторонний — все его стороны разные</td><td>равнобедренный — равны две стороны</td><td>равносторонний (правильный) — все стороны равны</td></tr>
</table>

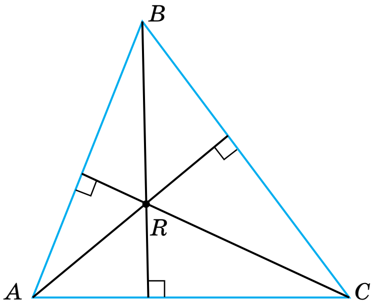
<table>
<tr><td colspan="3">В зависимости от соотношения углов выделяют такие виды треугольников:</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>остроугольный</td><td>прямоугольный</td><td>тупоугольный</td></tr>
</table>

Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника, серединный перпендикуляр к сторонам

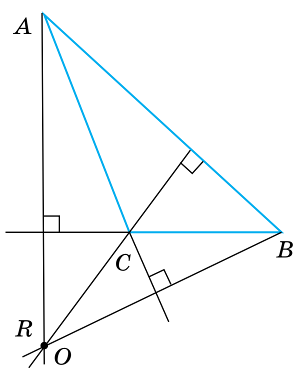
Высота треугольника — перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону



Высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **ортоцентром.**
Положение ортоцентра R зависит от вида треугольника:

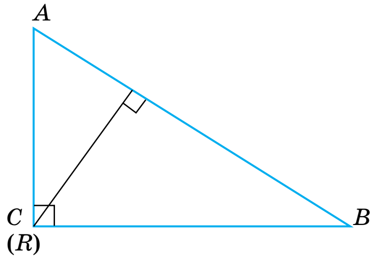


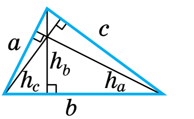
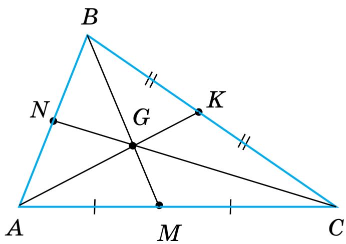
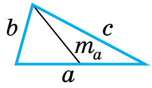
остроугольный
(внутри области треугольника)



тупоугольный
(вне области треугольника)

Окончание таблицы


прямоугольный (R совпадает с C)

Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам. То есть **наибольшая** высота проведена к **наименьшей** стороне, а **наименьшая** высота — к **наибольшей** стороне	 $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}$
Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершины с **серединой** противоположной стороны. **Свойство медианы треугольника:** Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника	 $BG : GM = 2 : 1;$ $GC : GN = 2 : 1;$ $AG : GK = 2 : 1$
Медианы пересекаются в одной точке, она называется **центром** или **центром масс**	
Медиану можно вычислить по формуле: $m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$	

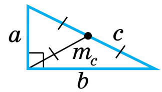
Продолжение таблицы

<table>
<tr>
<td>

$m_c = \dfrac{1}{2}c$

Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна его половине

</td>
<td>



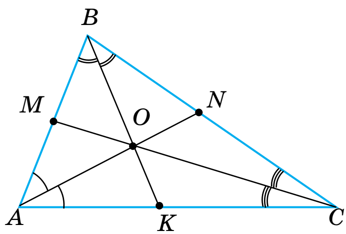
</td>
</tr>
<tr>
<td>

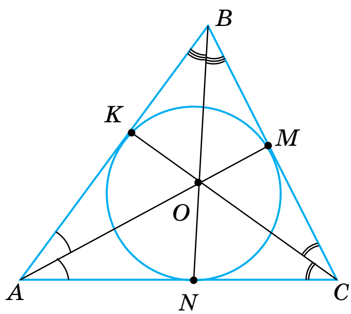
Биссектриса угла треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны и **делящий угол пополам.**

Эта точка является центром вписанной в треугольник окружности.

Точка O — центр вписанной окружности, AM, CK и BN — биссектрисы

</td>
<td>



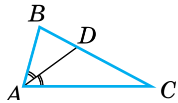


</td>
</tr>
<tr>
<td>

Свойство биссектрисы треугольника

Биссектриса угла треугольника делит его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам

</td>
<td>



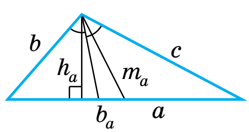
$\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$;

AD — биссектриса

</td>
</tr>
<tr>
<td>

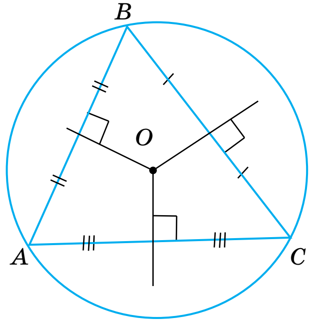
$m_a \geq b_a \geq h_a$

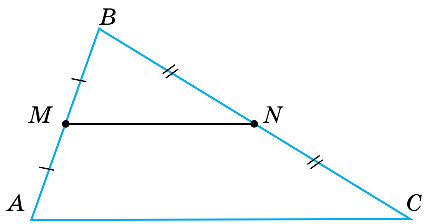
</td>
<td>



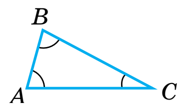
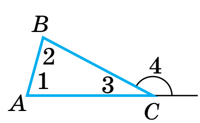
</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

Серединный перпендикуляр — прямая, проходящая через середину отрезка, перпендикулярно к нему. Три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке. Эта точка — **центр окружности, описанной около данного треугольника**	

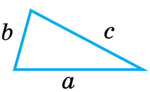
Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон. **Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне, и её длина равна половине третьей стороны**	 $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$

Свойства сторон и углов треугольника

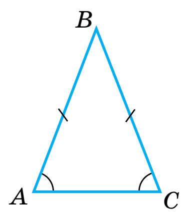
Сумма углов треугольника равна 180° $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$	
Внешний угол треугольника	
Внешний угол треугольника при данной вершине — это угол, смежный с внутренним углом треугольника. $\angle 4$ — внешний (при вершине C)	

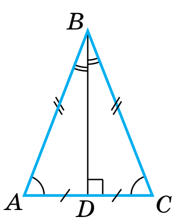
Свойства внешнего угла треугольника	
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним	$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$
Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним	$\angle 4 > \angle 1$, $\angle 4 > \angle 2$

Неравенство треугольника

<table>
<tr>
<td>$a < b + c$
$a > |b - c|$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Равнобедренный треугольник

<table>
<tr>
<td>ΔABC — равнобедренный ($AB = BC$)
AC — основание, AB и BC — боковые стороны</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">
</td>
<td>Свойства</td>
<td>Признаки</td>
</tr>
<tr>
<td>Если в ΔABC $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$ (углы при основании равны)</td>
<td>Если в ΔABC $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$ (равнобедренный треугольник)</td>
</tr>
</table>

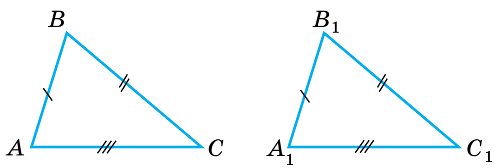
Если ΔABC — равнобедренный и BD — медиана, проведенная к основанию, то BD — высота и биссектриса	Если в треугольнике совпадают: а) высота и медиана или

Окончание таблицы

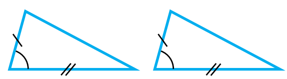
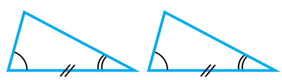
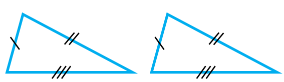
	б) высота и биссектриса или в) медиана и биссектриса, то **треугольник равнобедренный**

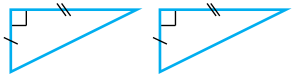
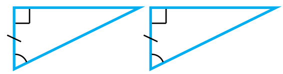
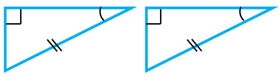
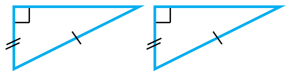
Равенство треугольников

$$\boxed{\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline AB = A_1B_1 & \angle A = \angle A_1 \\ AC = A_1C_1 & \angle B = \angle B_1 \\ BC = B_1C_1 & \angle C = \angle C_1 \\ \hline\end{array}$$

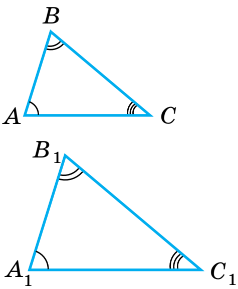


Свойства равных треугольников
1. У равных треугольников равны соответствующие элементы (стороны, углы, медианы, высоты и др.). 2. У равных треугольников против равных сторон лежат равные углы, против равных углов — равные стороны

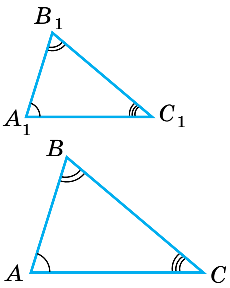
Признаки равенства треугольников	
По двум сторонам и углу между ними	
По стороне и двум прилежащим углам	
По трём сторонам	

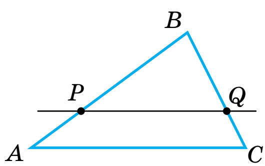
Признаки равенства прямоугольных треугольников	
По двум катетам 	По катету и острому углу 
По гипотенузе и острому углу 	По гипотенузе и катету 

Подобие треугольников

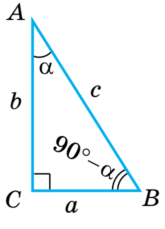
Подобные треугольники — это треугольники, у которых соответствующие **углы равны**, а соответствующие **стороны пропорциональны.** $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$; $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} \Leftrightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$	

Свойства подобных треугольников	
$\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = k$	**Отношение периметров** равно отношению соответственных сторон и равно коэффициенту подобия
$\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \left(\dfrac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2$	**Отношение площадей** подобных треугольников равно **квадрату** коэффициента подобия

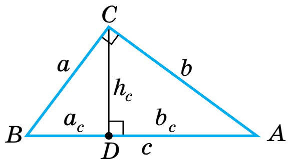
<table>
<tr><th colspan="2">Признаки подобия треугольников</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Если $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ — по двум равным углам</td></tr>
<tr><td>Если $\angle A = \angle A_1$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ — по двум пропорциональным сторонам и углу между ними</td></tr>
<tr><td>Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ — по трём пропорциональным сторонам</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Если $PQ \parallel AC$, то $\Delta PBQ \sim \Delta ABC$. Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному</td></tr>
</table>

Соотношение между элементами прямоугольного треугольника

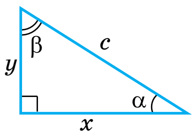
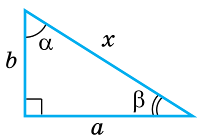
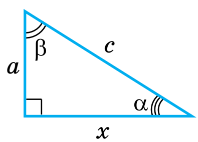
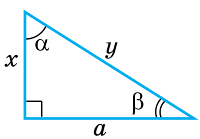
<table>
<tr><td></td><td colspan="3">$\angle C = 90°$, a, b — катеты, c — гипотенуза, $\angle A = \alpha$
$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ — теорема Пифагора
$\boxed{\angle B = 90° - \alpha;\ c > a;\ c > b}$</td></tr>
<tr><td>$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$</td><td>$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$</td><td>$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a}{b}$</td><td>$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{b}{c}$</td></tr>
<tr><td>$a = c\sin\alpha$</td><td>$b = c\cos\alpha$</td><td>$a = b\,\mathrm{tg}\alpha$</td><td>$b = a\,\mathrm{ctg}\alpha$</td></tr>
</table>

$\Delta ACD \sim \Delta ABC$
$\Delta CBD \sim \Delta ABC$
$\Delta ACD \sim$
ΔCBD
CD — высота



$h^2 = a_c \cdot b_c$
$a^2 = c \cdot a_c$
$b^2 = c \cdot b_c$

Решение прямоугольных треугольников

Дано	Найти	Решение
 c — гипотенуза; α — острый угол	x, y, β	$\beta = 90° - \alpha$; $x = c\cos\alpha$; $y = c\sin\alpha$
 a — катет; b — катет	x, α, β	$x = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$ или $\beta = 90° - \alpha$
 c — гипотенуза; a — катет	x, α, β	$x = \sqrt{c^2 - a^2}$; $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\beta = \frac{a}{c}$ или $\beta = 90° - \alpha$
 a — катет; α — острый угол, противолежащий a	x, y, β	$\beta = 90° - \alpha$; $x = a\operatorname{ctg}\alpha$; $y = \frac{a}{\sin\alpha}$

Соотношения между сторонами и углами в произвольном треугольнике

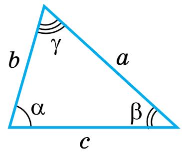
Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\beta} = 2R}$$

Теорема косинусов

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$



R — радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b, c

Следствия из теоремы косинусов:

1. Косинус угла можно вычислить по формуле:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

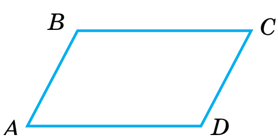
2. Определение **вида треугольника** по теореме косинусов:
   - если $a^2 + b^2 < c^2$, γ — тупой угол, то треугольник тупоугольный;
   - если $a^2 + b^2 > c^2$, γ — острый угол, то треугольник остроугольный;
   - если $a^2 + b^2 = c^2$, $\gamma = 90°$, то треугольник прямоугольный.

3. Если a, b и c — стороны треугольника, то медиана, проведённая к стороне a, равна:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

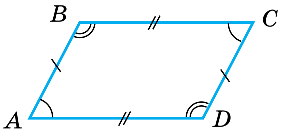
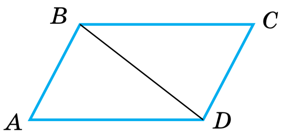
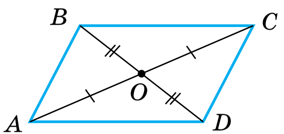
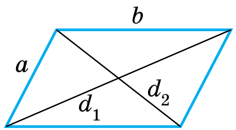
Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

Параллелограмм

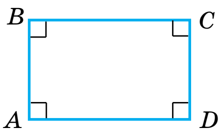


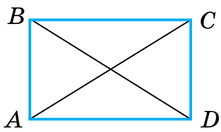
Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

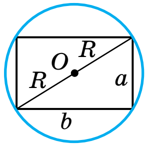
$AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD \Leftrightarrow ABCD$ — параллелограмм

	Свойства	Признаки
	Если $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = BC$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$	Если $ABCD$ — четырёхугольник и $BC \parallel AD$; $BC = AD$, то $ABCD$ — параллелограмм Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AB = DC$ и $AD = BC$, то $ABCD$ — параллелограмм
	Если $ABCD$ — параллелограмм, BD — диагональ, то $\Delta ABD = \Delta CDB$	—
	Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle A + \angle B = 180°$ (сумма соседних углов равна 180°)	—
	Если $ABCD$ — параллелограмм, AC и BD — диагонали, то $AO = OC$; $BO = OD$	Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AO = OC$, $BO = OD$, то $ABCD$ — параллелограмм
	Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$	

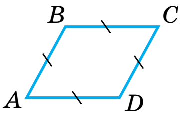
Прямоугольник

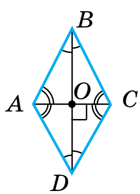
	**Прямоугольник** — параллелограмм, у которого все углы прямые



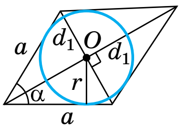
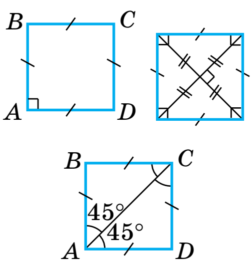
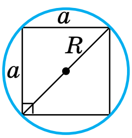
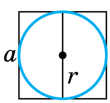
Свойства	Признаки
1. Все свойства параллелограмма. 2. Если $ABCD$ — прямоугольник, то $AC = BD$ (диагонали равны).	1. Если $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90°$, то $ABCD$ — прямоугольник. 2. Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, то $ABCD$ — прямоугольник.
	Вокруг любого прямоугольника можно описать окружность: $R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

Ромб

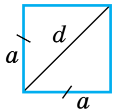
	**Ромб** — параллелограмм, у которого все стороны равны



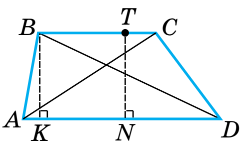
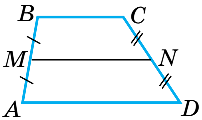
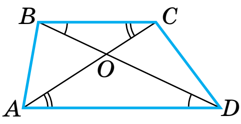
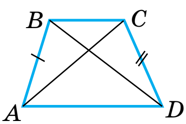
Продолжение таблицы

<table>
<tr><th>Свойства</th><th>Признаки</th></tr>
<tr><td>1. Все свойства параллелограмма:
2. Если $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали, то:
а) $AC \perp BD$;
б) диагонали являются биссектрисами углов</td><td>Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AB = AD = BC = CD$, то $ABCD$ — ромб</td></tr>
<tr><td>
</td><td>В любой ромб можно вписать окружность:
$r = \frac{h}{2} = \frac{a \sin \alpha}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Квадрат</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны
($AB = BC = CD = AD$)
или
Квадрат — ромб, у которого все углы прямые ($\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Свойства квадрата</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Вокруг квадрата можно описать окружность
$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{2}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>В квадрат можно вписать окружность
$r = \frac{a}{2}$</td></tr>
</table>

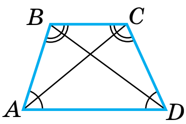
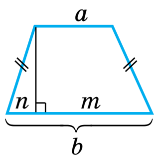
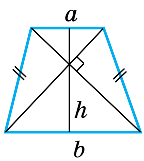
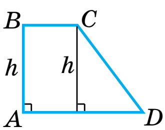
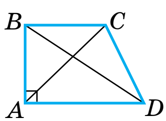
Окончание таблицы

	Диагональ в $\sqrt{2}$ раз больше стороны, т. е. $d = a\sqrt{2}$ и $a = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$

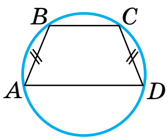
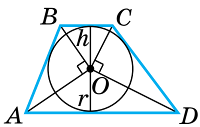
Трапеция

	**Трапеция** — четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. $AD \parallel BC$, AD и BC — основания; AB и CD — боковые стороны; AC и BD — диагонали; BK и TN — высоты
Средняя линия трапеции	
	**Средняя линия трапеции** — отрезок, соединяющий середины боковых сторон. MN — средняя линия **Свойства:** $MN \quad BC$ $MN \quad AD$ $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$
	$\Delta BOC \sim \Delta DOA$; $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{OC}{AO} = \dfrac{BC}{AD}$
Равнобокая трапеция	
	**Равнобокая трапеция** — трапеция с равными боковыми сторонами

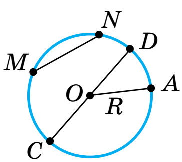
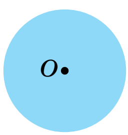
Продолжение таблицы

Свойства	
	1. $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$; углы при основании равны. 2. $AC = BD$.
	Высота, проведённая из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки m и n длиной $m = \dfrac{a+b}{2}$ (равен средней линии) $n = \dfrac{b-a}{2}$
	Если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то высота равна средней линии: $h = \dfrac{a+b}{2}$
Прямоугольная трапеция	
	**Прямоугольная трапеция** — это трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям: $AB \perp AD$; $AB \perp BC$; $AB = h$
Свойства	
	
Разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований: $BD^2 - AC^2 = AD^2 - BC^2$	**Сумма квадратов диагоналей** равна сумме квадратов оснований и удвоенного квадрата высоты: $AC^2 + BD^2 =$ $AD^2 + BC^2 + 2AB^2$

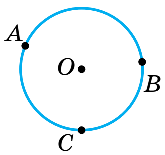
Окончание таблицы

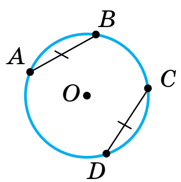
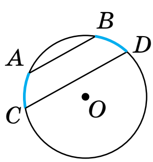
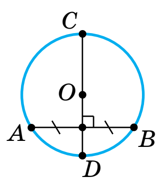
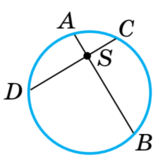
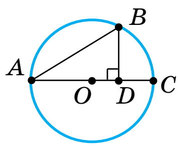
Трапеция и окружность	
	Если около трапеции **описана окружность,** эта трапеция — **равнобокая.** Обратно: около равнобокой трапеции **можно описать окружность**
 $\angle AOB = \angle COD =$ $= 90°$ ΔAOB и ΔCOD — прямоугольные	Если в трапецию **вписана окружность,** то: 1) сумма оснований равна сумме боковых сторон: $AB + CD = BC + AD$; 2) радиус окружности равен половине высоты: $r = \frac{h}{2}$; 3) если соединить центр окружности с вершинами трапеции, треугольники, прилежащие к боковым сторонам, будут прямоугольными

Окружность и круг

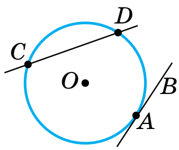
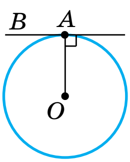
	**Окружность** — множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки (центра окружности) одинаково. O — центр окружности. **Радиус окружности** — расстояние от центра до точки на окружности. OA, OC, OD — радиусы. Обозначается R или r. **Хорда** — отрезок, соединяющий две точки на окружности. MN, CD — хорды. **Диаметр** — хорда, проходящая через центр (обозначается D или d). $D = 2R$, $CD = 2OA$
	**Круг** — множество точек плоскости, расстояние до которых от данной точки (центра круга) не превышает данного расстояния (радиуса круга)

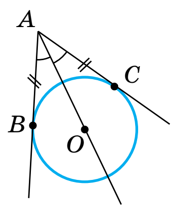
Окружность, хорды и дуги

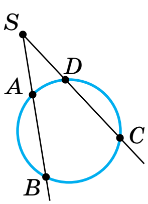
	**Дуга окружности** — часть окружности, ограниченная двумя её точками. $\cup AB$, $\cup BC$, $\cup AC$

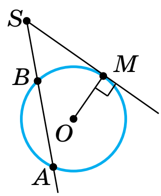
Свойства	
	Равные дуги стягивают равные хорды. Если $\cup AB = \cup CD$, то $AB = CD$ Равные хорды стягивают равные дуги. Если $AB = CD$, то $\cup AB = \cup CD$
 Параллельные хорды отсекают от окружности равные дуги. Если $AB \parallel CD$, то $\cup AC = \cup BD$	 CD — диаметр, AB — хорда. Если $CD \perp AB$, то $AM = MB$; если $AM = MB$, то $CD \perp AB$
 Если хорды AB и CD пересекаются в точке S, то $AS \cdot SB = CS \cdot SD$	 Если AB — хорда, AC — диаметр, $BD \perp AC$, то $AB^2 = AD \cdot AC$ $BD^2 = AD \cdot DC$

Окружность, касательные и секущие

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Касательная — прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку.
AB — касательная.
Секущая — прямая, имеющая с окружностью две общие точки.
CD — секущая</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Свойства</td>
</tr>
<tr>
<td>

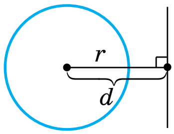
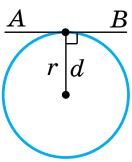
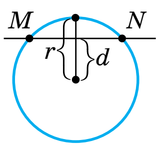
$OA \perp AB$
Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания</td>
<td>

$AB = AC$
OA — биссектриса $\angle BAC$.
Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то:
а) отрезки касательных равны;
б) биссектриса угла между касательными проходит через центр окружности</td>
</tr>
<tr>
<td>

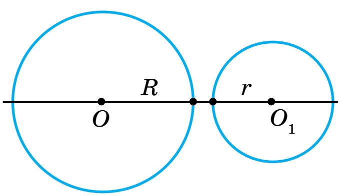
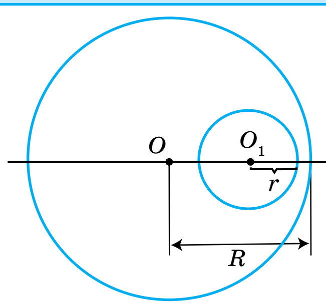
Если SB и SC — секущие, то $SA \cdot SB = SD \cdot SC$</td>
<td>

Если SM — касательная, SA — секущая, то $SM^2 = SB \cdot SA$</td>
</tr>
</table>

Взаимное расположение прямой и окружности

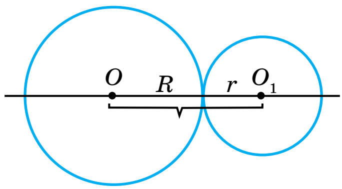
d — расстояние от центра окружности до прямой, r — радиус окружности	
	$d > r$ Общих точек нет
	$d = r$ Одна общая точка AB — касательная
	$d < r$ Две общие точки MN — секущая

Взаимное расположение двух окружностей

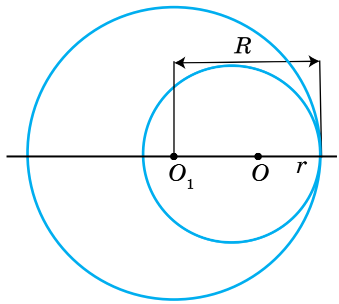
OO_1 — расстояние между центрами, R и r — радиусы окружностей ($R > r$)	
Окружности не имеют общих точек	
 Окружности лежат одна вне другой $R + r < OO_1$	 Одна окружность лежит внутри другой $OO_1 < R - r$

Окончание таблицы

Окружности касаются (одна общая точка)



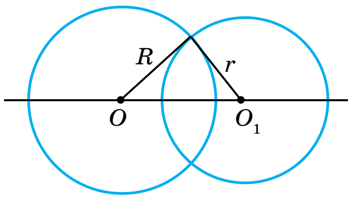
Касаются внешне
$OO_1 = R + r$

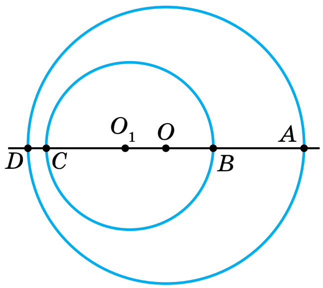


Касаются внутренне
$OO_1 = R - r$

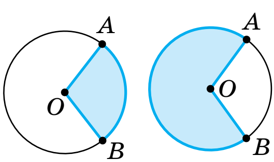
Окружности пересекаются (две общие точки)

$R - r < OO_1 < R + r$



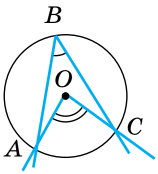
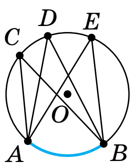
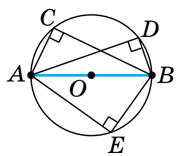
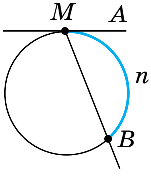
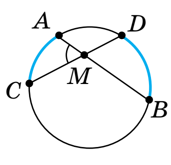


Углы в окружности

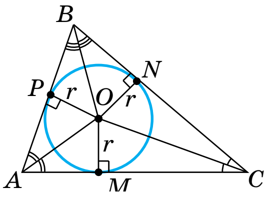


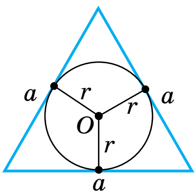
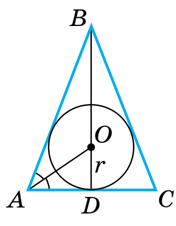
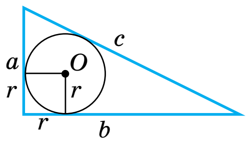
Центральный угол — плоский угол с вершиной в центре окружности.
$\angle AOB$ — центральный угол.
$\angle AOB = \cup AB$.
Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается

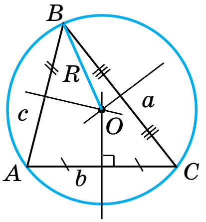
Окончание таблицы

	**Вписанный угол** — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают ее. $\angle ABC$ — вписанный Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, и половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$ $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$
 Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой. $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$	 Вписанные углы, которые опираются на диаметр, прямые. $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90°$
Угол между касательной и секущей  MA — касательная; MB — секущая $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$	**Угол между хордами**  AB и CD — хорды $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$

Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника

<table>
<tr><th colspan="2">Вписанная окружность</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.
Центр этой окружности — точка пересечения биссектрис углов треугольника.
$r = \dfrac{2S}{a+b+c}$ или $r = \dfrac{S}{p}$, где
$p = \dfrac{a+b+c}{2}$,
S — площадь треугольника, p — полупериметр, a, b, c — длины сторон</td>
</tr>
</table>

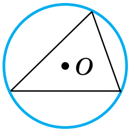
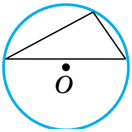
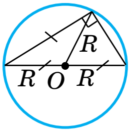
<table>
<tr><th>Равносторонний треугольник</th><th>Равнобедренный треугольник</th><th>Прямоугольный треугольник</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>$r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$
Точка O — центр вписанной и описанной окружности, точка пересечения биссектрис, медиан, высот</td>
<td>$AB = BC$
BD — высота, медиана, биссектриса, высота.
$OD = r$</td>
<td>a и b — катеты, c — гипотенуза
$r = \dfrac{a+b-c}{2}$
$a+b = 2R+2r$,
R — радиус описанной окружности</td>
</tr>
</table>

Описанная окружность	
	Окружность называется **описанной** около треугольника, если она проходит через все **его вершины.** Центр этой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. $OA = OB = OC = R$.

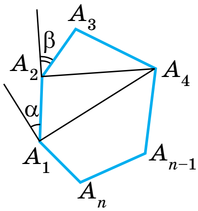
В произвольном треугольнике: $R = \dfrac{abc}{4S}$; $R = \dfrac{a}{2\sin A}$

В равностороннем треугольнике: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

В прямоугольном треугольнике: $R = \dfrac{c}{2}$, где c — гипотенуза треугольника

Положение точек описанной окружности в зависимости от вида треугольника	
Остроугольный	
	Центр — во внутренней области треугольника
Тупоугольный	
	Центр — вне области треугольника
Прямоугольный	
	$R = \dfrac{c}{2} = m_c$ Центр — совпадает с серединой гипотенузы

Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника



Многоугольник — простая замкнутая ломаная. Соседние звенья не лежат на одной прямой.

A_1, A_2, ... A_{n-1}, A_n — вершины;

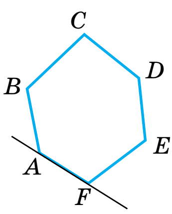
A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ — стороны;

A_2A_4, ... A_1A_4 — диагонали;

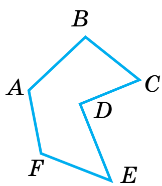
$\angle A_1$, $\angle A_2$, ..., $\angle A_n$ — внутренние углы;

α, β, ... — внешние углы многоугольника

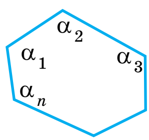
Выпуклый многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно любой стороны



Невыпуклый многоугольник

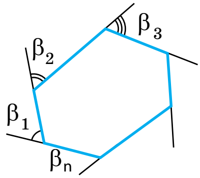


Сумма углов выпуклого n-угольника

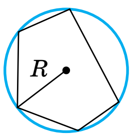


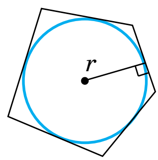
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = \sum\nolimits_n = 180^\circ \cdot (n-2)$$

Окончание таблицы

<table>
<tr><td>Сумма внешних углов n-угольника (по одному при вершине)</td><td>

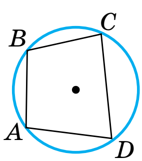
$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_n = 360°$</td></tr>
</table>

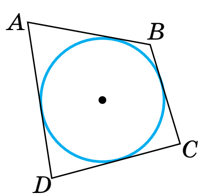
<table>
<tr><th colspan="2">Вписанные и описанные многоугольники</th></tr>
<tr><td>Вписанный многоугольник


Все вершины лежат на окружности</td><td>Описанный многоугольник


Все стороны — касательные к окружности.

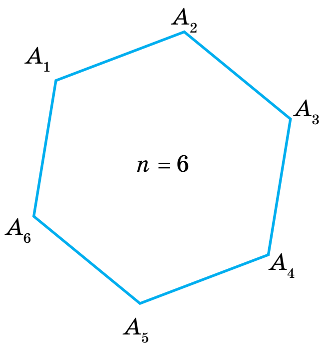
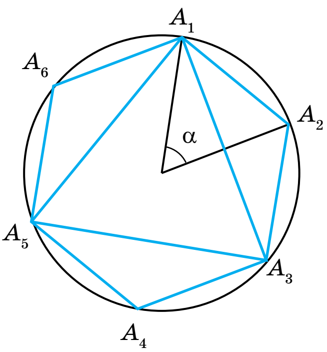
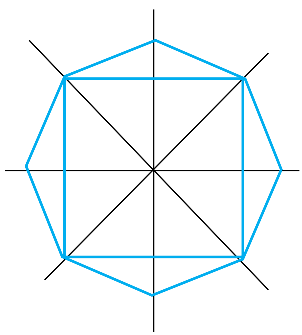
$$S = \frac{P \cdot r}{2},$$

P — периметр, r — радиус окружности</td></tr>
<tr><th colspan="2">Вписанные и описанные четырёхугольники</th></tr>
<tr><td>

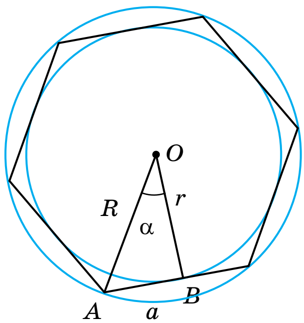
$ABCD$ — вписанный четырёхугольник $\Leftrightarrow$
$\angle A + \angle C = 180°$
$\angle B + \angle D = 180°$</td><td>

$ABCD$ — описанный четырёхугольник $\Leftrightarrow$
$AB + CD = AD + BC$</td></tr>
</table>

Правильные многоугольники

	Выпуклый многоугольник называется **правильным,** если у него все стороны и углы равны. Каждый угол правильного n-угольника равен: $\alpha_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$
 $n = 6$ и $n = 3$	Внешний угол правильного n-угольника равен $\beta_n = \dfrac{360°}{n}$ Периметр правильного n-угольника со стороной a: $P_n = a \cdot n$ Площадь правильного n-угольника со стороной a: $S_n = \dfrac{na^2}{4\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{180°}{n}\right)}$
 $n = 4$ и $n = 8$	Площадь правильных: а) треугольника: $S_3 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ б) четырёхугольника (квадрата): $S_4 = a^2$ в) шестиугольника: $S_6 = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника



Вписанная окружность — касается всех **сторон** правильного многоугольника.
Описанная окружность — проходит через все **вершины** правильного треугольника

R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, a — сторона правильного многоугольника, S_n — площадь, P_n — периметр

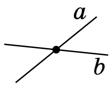
Связь между P_n, R, r, S_n и a

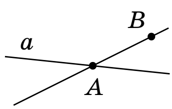
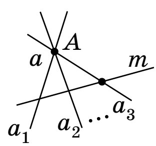
Количество сторон многоугольника	R	r	S
n	$\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$\dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$	$\dfrac{1}{2}P_n r$
3	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{a}{2}$	a^2
6	a	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Зависимость стороны a_n правильного n-угольника от R и r		
Кол-во сторон многоугольника	**Зависимость a_n от R и n**	**Зависимость a_n от r и n**
n	$a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$	$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180^\circ}{n}$
3	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$
4	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = 2r$
6	$a_6 = R$	$a_6 = \dfrac{2}{3}r\sqrt{3}$

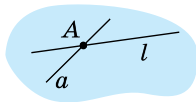
5.2. Прямые и плоскости в пространстве

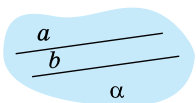
Взаимное размещение двух прямых в пространстве

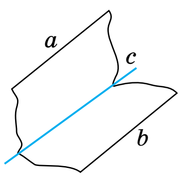
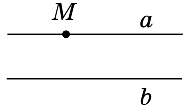
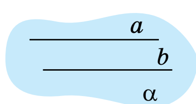
Пересекающиеся прямые	
	**Пересекающиеся прямые** — две прямые, имеющие только одну общую точку

Признаки	**Свойства**
Если одна точка принадлежит данной прямой, а другая — ей не принадлежит, то данная прямая и прямая, проходящая через эти точки **пересекаются** 	Через точку вне данной прямой можно провести бесконечно много прямых, пересекающих данную прямую. 

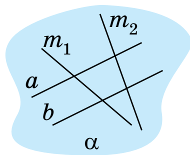
Окончание таблицы

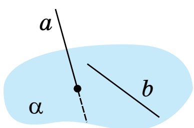
Признаки	Свойства
	 Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и только одну

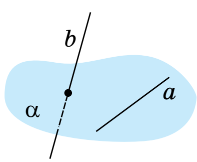
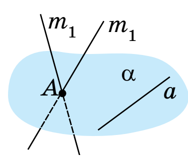
Параллельные прямые	
 $a \parallel b$	**Параллельные прямые** — две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек

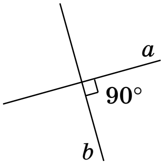
Признаки	Свойства
Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны друг другу. Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$. 	Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и только одну 
	Через две параллельные прямые можно провести плоскость и только одну 

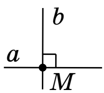
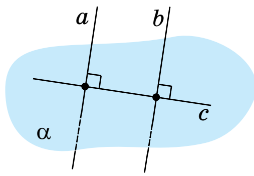
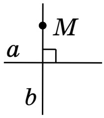
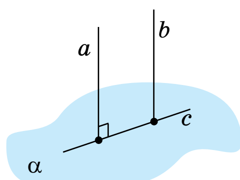
Окончание таблицы

Признаки	Свойства
	Все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат с ними в одной плоскости  $a \parallel b$

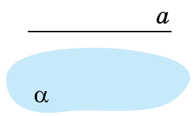
Скрещивающиеся прямые	
	**Скрещивающиеся прямые** — две прямые, не лежащие в одной плоскости

Признаки	Свойства
Если одна прямая лежит в плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся 	1. Через точку вне данной прямой можно провести бесконечно много скрещивающихся прямых. 2. Для любых двух скрещивающихся прямых в пространстве существует третья прямая, которая является скрещивающейся для каждой из данных двух прямых 

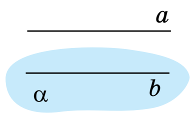
Перпендикулярные прямые	
	**Перпендикулярные прямые** — две прямые, которые пересекаются под углом 90°

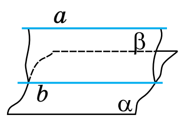
Существование и единственность	Перпендикулярность и параллельность
Через каждую **точку прямой** можно провести перпендикулярную ей прямую, и при этом только одну. 	Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.  $a \perp c,\ b \perp c \Rightarrow a \parallel b$
Через каждую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести перпендикулярную ей прямую и при этом только одну 	Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой  $a \perp c,\ a \parallel b \Rightarrow b \perp c$

Параллельность прямой и плоскости

<table>
<tr><td>

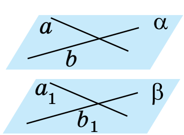
$a \parallel \alpha$</td><td>Прямая и плоскость **параллельны**, если они не имеют общих точек</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Признак</th><th>Свойство</th></tr>
<tr><td>

Если $a \parallel b$ и $b \subset \alpha$, то $a \parallel b$.
Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой в этой плоскости, то она параллельна всей плоскости</td><td>

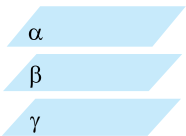
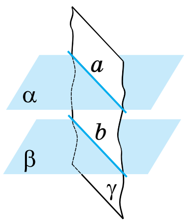
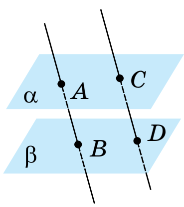
Если $a \parallel \alpha$, β проходит через a, β пересекает α по b, то $a \parallel b$.
Если через прямую, параллельную плоскости, провести вторую плоскость, которая пересекает первую, то прямая пересечения плоскостей параллельна первой прямой</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Параллельность плоскостей</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.
$\alpha \parallel \beta$</td></tr>
</table>

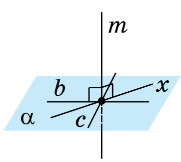
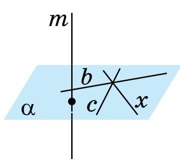
<table>
<tr><th colspan="2">Признак</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Если две пересекающееся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.</td></tr>
</table>

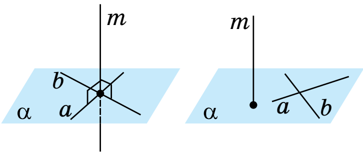
Окончание таблицы

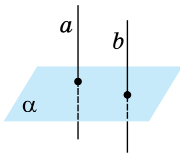
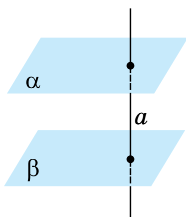
	Если $a \parallel a_1$; $b \parallel b_1$ ($a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$), то $\alpha \parallel \beta$

Свойства	
	Если две различные плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой. Если $\alpha \parallel \beta$ и $\gamma \parallel \beta$, то $\alpha \parallel \gamma$
	Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны. Если $\alpha \parallel \beta$ и γ пересекает α по a, γ пересекает β по b, то $a \parallel b$
	Отрезки параллельных прямых, заключённых между параллельными плоскостями, равны. Если $AB \parallel CD$ и $\alpha \parallel \beta$ ($A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$), то $AB = CD$

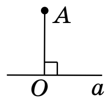
Перпендикулярность прямой и плоскости

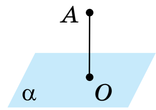
 	Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна **любой** прямой, лежащей в этой плоскости. $a \perp \alpha \Leftrightarrow a \perp x$, x — любая прямая плоскости α

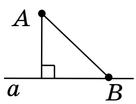
<table>
<tr><th colspan="2">Признак перпендикулярности прямой и плоскости</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Если $a \perp m$ и $b \perp m$ (a и b в плоскости α), то $a \perp \alpha$.
Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости</td></tr>
</table>

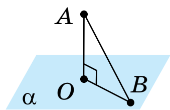
<table>
<tr><th colspan="2">Свойства перпендикулярных прямой и плоскости</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. 
</td></tr>
<tr><td>Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и второй прямой.
Если $a \parallel b$ и $a \perp \alpha$, то $a \perp b$</td><td>Если прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.
Если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. 
</td></tr>
<tr><td>Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и второй.
Если $\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha$, то $a \perp \beta$</td><td>Две различные плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.
Если $\alpha \perp a$ и $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$</td></tr>
</table>

Перпендикуляр и наклонная

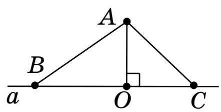
<table>
<tr><th colspan="2">На плоскости</th><th colspan="2">В пространстве</th></tr>
<tr><td colspan="2">

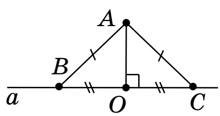
$AO \perp a$, $O \in \alpha$
AO — перпендикуляр из точки A к прямой a</td><td colspan="2">

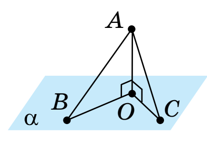
$AO \perp \alpha$, $O \in \alpha$
AO — перпендикуляр из точки O на плоскость α</td></tr>
<tr><td colspan="2">

AO — расстояние от точки A до прямой a;
AB — наклонная</td><td colspan="2">

AO — расстояние от точки A до плоскости α;
AB — наклонная</td></tr>
<tr><td colspan="4">Перпендикуляр короче наклонной.
$AO < AB$</td></tr>
</table>

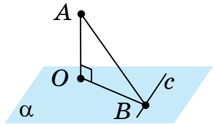
<table>
<tr><td colspan="2">OB — проекция наклонной AB на прямую a</td><td colspan="2">OB — проекция наклонной AB на плоскость α</td></tr>
<tr><td>


</td><td colspan="2">$AB = AC \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow BO = OC$

$AB > AC \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow BO > OC$</td><td>
</td></tr>
</table>

Если из одной точки к одной прямой (плоскости) проведены две наклонные, то:
равные наклонные имеют равные проекции;
если проекции наклонных равны, то равны и сами наклонные;
бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию;
из двух наклонных больше та, у которой проекция больше

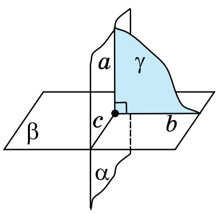
Теорема о трёх перпендикулярах



OB — проекция AB на плоскость α, c — прямая на плоскости α, $OB \perp c$	$\Leftrightarrow$	$AB \perp c$

Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и наклонной.
Обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции прямой

Перпендикулярность плоскостей



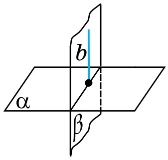
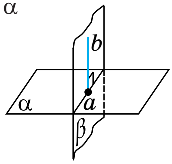
$\boxed{\alpha \perp \beta}$ $\Leftrightarrow$

α пересекает β по прямой c
γ пересекает α по прямой a
γ пересекает β по прямой b
$a \perp b$, $\gamma \perp c$

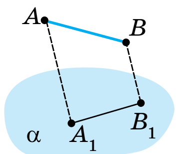
Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой их пересечения, пересекает эти плоскости по перпендикулярным прямым

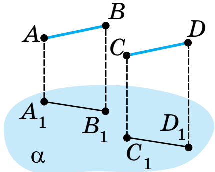
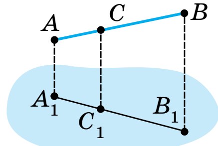
Признак перпендикулярности плоскостей	Свойство
Если прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.	Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.

Окончание таблицы

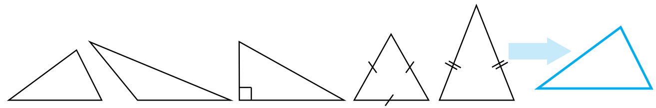
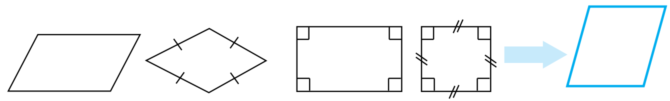
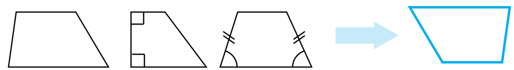
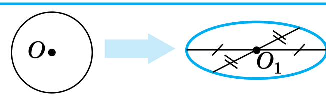
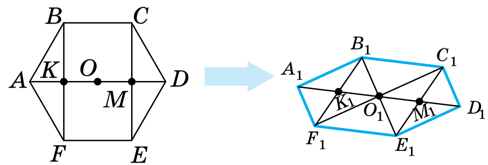
<table>
<tr><th>Признак перпендикулярности плоскостей</th><th>Свойство</th></tr>
<tr><td>Если $b \perp \alpha$ и β проходит через b, то $\beta \perp \alpha$
</td><td>Если $\beta \perp \alpha$, β пересекает α по a и $b \perp a$ (b лежит в β), то $b \perp \alpha$
</td></tr>
</table>

Параллельное проектирование.
Изображение пространственных фигур на плоскости

<table>
<tr><td></td><td>$AA_1 \parallel BB_1$. Прямая AA_1 пересекает α в точке A_1, т. е. точка A проектируется в точку A_1 на плоскости α.
$A \to A_1$; $B \to B_1$; $AB \to A_1B_1$
Отрезок проектируется в отрезок
$(AB \,/\, A_1B_2)$</td></tr>
</table>

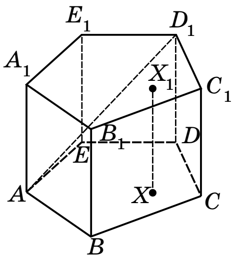
<table>
<tr><td>При параллельном проектировании параллельность отрезков сохраняется.
Если $AB \parallel CD$ ($AB \to A_1B_1$; $CD \to C_1D_1$), то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$
</td><td>При параллельном проектировании отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется.
$\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{A_1C_1}{C_1B_1}$
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Следствие</th></tr>
<tr><td colspan="2">Если C — середина AB, $AB \to A_1C_1$; $C \to C_1$, то C_1 — середина A_1B_1.
Середина отрезка проектируется в середину отрезка</td></tr>
</table>

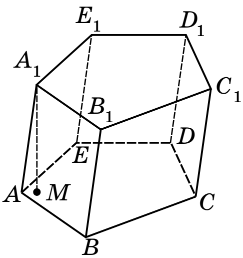
Параллельные проекции некоторых плоских фигур (плоскость фигуры не параллельна направлению проектирования)

Треугольник Проекция — треугольник любой формы	
Параллелограмм и его виды Проекция — параллелограмм любой формы	
Трапеция Проекция — трапеция любой формы	
Окружность Проекция — эллипс (центр окружности на изображении — точка пересечения сопряжённых диаметров)	
Правильный шестиугольник Проекция — шестиугольник, две вершины — концы диаметра эллипса, а другие четыре — концы хорд, проведённых параллельно сопряжённому диаметру и делящих диаметр в отношении 1 : 2 : 1	

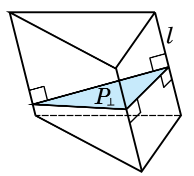
5.3. Многогранники

Призма

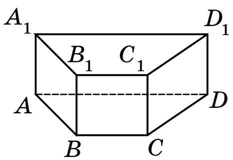


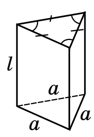
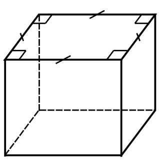
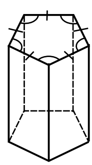
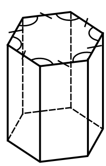


Призма — многогранник, состоящий из плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.
$ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ — основания призмы;
AA_1, BB_1, CC_1, ... — боковые рёбра;
ABB_1A_1, BB_1C_1C, ... — боковые грани;
AD_1 — диагональ призмы (отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани;
$A_1M \perp (ABC)$, $A_1M = H$ — высота, т. е. расстояние)

Свойства	Формулы
1. Основания призмы равны. 2. Основания призмы лежат в параллельных плоскостях. 3. Боковые рёбра параллельны и равны. 4. Боковые грани — параллелограммы	 **Боковая поверхность** — сумма площадей боковых граней или $S_{бок} = P_{\perp} \cdot l,$ где l — длина бокового ребра; $P_{\perp}$ — сечение плоскостью, перпендикулярно боковым граням

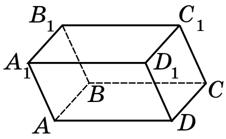
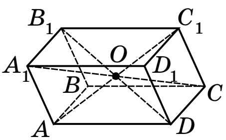
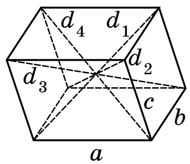
Окончание таблицы

Свойства	Формулы
	Полная поверхность — сумма боковой поверхности и площадей оснований: $S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$. **Объём призмы** $V = S_{\text{осн}} \cdot H_{\text{призмы}}$
Прямая призма	
	Призма называется **прямой,** если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям. $AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, ...
Свойства	**Формулы**
1. Высота равна боковому ребру. 2. Боковые грани — прямоугольники	**Боковая поверхность** $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot H$, где $P_{\text{осн}}$ — периметр основания; $H = AA_1$ — высота. **Полная поверхность** $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$ **Объём** $V = S_{\text{осн}} \cdot H = S_{\text{осн}} \cdot AA_1$

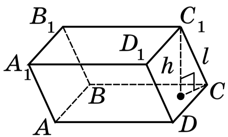
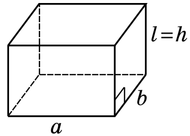
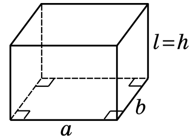
Правильная призма			
Прямая призма называется **правильной,** если её основания — правильные многоугольники			
треугольная	четырёхугольная	пятиугольная	шестиугольная

Площадь боковой поверхности правильной призмы	
$S_{бок} = S_{гр} \cdot n = aln$	$S_{гр}$ — площадь грани; n — количество граней; a — сторона основания; l — длина бокового ребра

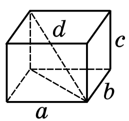
Параллелепипед

<table>
<tr><td>
</td><td>Параллелепипед — призма, в основании которой лежит параллелограмм</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Свойства:
1. Все грани — параллелограммы.
2. Противолежащие грани параллельны и равны.
3. Диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
O — середина A_1C, BD_1, AC_1 и B_1D.
4. Точка O — центр симметрии параллелепипеда</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов его рёбер.
$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=4a^2+4b^2+4c^2$$
Существует три вида параллелепипедов:
1. Прямой — все боковые грани перпендикулярны плоскостям оснований, основания — параллелограммы.
2. Прямоугольный — все боковые грани и основания — прямоугольники.
3. Наклонный — боковые грани не перпендикулярны основаниям, все шесть граней — параллелограммы.</td></tr>
</table>

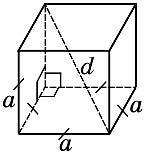
Виды параллелепипедов

Наклонный	**Прямой**	**Прямоугольный**
 1. Боковые рёбра **не перпендикулярны** плоскостям основания. 2. Высота **не совпадает** с боковым ребром. 3. Все боковые грани — **параллелограммы**	 1. Боковые рёбра **перпендикулярны** основаниям. 2. Боковое ребро **совпадает** с высотой. 3. В основаниях — **параллелограммы.** 4. Все боковые грани — **прямоугольники**	 1. Боковые рёбра **перпендикулярны** основаниям. 2. Боковое ребро **совпадает** с высотой. 3. Оба основания и боковые грани — **прямоугольники**
Площадь боковой поверхности параллелепипеда		
$S_{\text{бок}} = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{AA_1B_1B})$	$S_{\text{бок}} = 2(a+b)\cdot l$	$S_{\text{бок}} = 2(a+b)\cdot l$

Окончание таблицы

Наклонный	Прямой	Прямоугольный
Площадь полной поверхности параллелепипеда		
$S_{\text{полн}} = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{AA_1B_1B} + S_{ABCD})$	$S_{\text{полн}} = 2(a+b)\cdot l + 2S_{\text{осн}}$	$S_{\text{полн}} = 2(ab+al+bl)$
Объём параллелепипеда		
1. Произведение площади основания $S_{\text{осн}}$ на высоту h: $V = S_{\text{осн}}\cdot h$ 2. Произведение площади перпендикулярного сечения $S_{\perp}$ на длину бокового ребра l: $V = S_{\perp}\cdot l$	Произведение площади основания $S_{\text{осн}}$ на длину бокового ребра l: $V = S_{\text{осн}}\cdot l$	Произведение трёх измерений прямоугольного параллелепипеда: $V = abl$
	В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений: $d^2 = a^2+b^2+c^2$	

Куб



Куб — прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны.

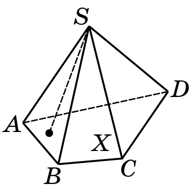
Свойство

Все боковые грани — квадраты.

Формулы

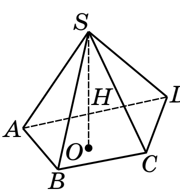
1. Диагональ: $d = a\sqrt{3}$
2. Площадь: $S_{\text{бок}} = 4a^2$; $S_{\text{полн}} = 6a^2$
3. Объём: $V = a^3$ или $V = \dfrac{d^3}{3\sqrt{3}}$

Пирамида



Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания пирамиды), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания

$ABCD$ — основание пирамиды;
S — вершина пирамиды;
SA, SB, SC, SD — боковые рёбра.
ΔASB, ΔBSC, ΔCSD, ΔASD — боковые грани



Высота пирамиды — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

SO — высота пирамиды;
$SO = H$ $(SO \perp (ABCD))$.

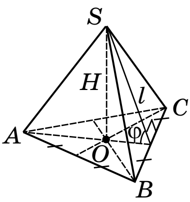
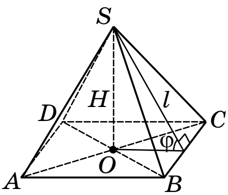
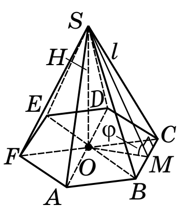
$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

$$S_{\text{бок. пир.}} = S_{\Delta DASB} + S_{\Delta DBSC} + S_{\Delta DCSD} + S_{\Delta DASD}$$

$$S_{\text{полн. пир.}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

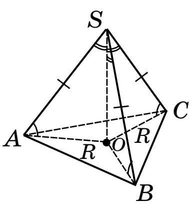
Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной**, если её основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника

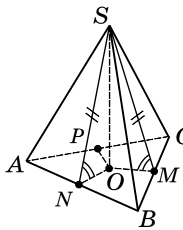
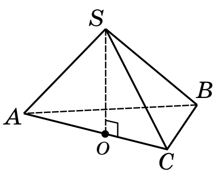
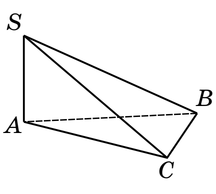
<table>
<tr><th colspan="2">Некоторые виды правильных пирамид</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Треугольная
ΔABC — правильный;
O — точка пересечения медиан (высот и биссектрис), центр вписанной и описанной окружностей</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Четырёхугольная
$ABCD$ — квадрат;
O — точка пересечения диагоналей</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Шестиугольная
$ABCDEF$ — правильный шестиугольник;
O — точка пересечения диагоналей AD, BE и FC</td></tr>
<tr><td colspan="2">SO — высота правильной пирамиды ($SO \perp (ABC)$;
O — центр основания).
SM — апофема правильной пирамиды ($SM \perp BC$) (высота боковой грани)</td></tr>
</table>

Свойства	Формулы
1. Боковые рёбра равны, одинаково наклонены к плоскости основания. $SA = SB = SC = \ldots$; $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \ldots$ 2. Боковые грани — равные друг другу равнобедренные треугольники. $\Delta ASB = \Delta BSC = \ldots$ Апофемы равны и наклонены к плоскости основания под одним углом	**Площадь боковой поверхности** $S_{бок} = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot SM = \frac{1}{2}P_{осн} \cdot l$, где l — апофема или $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}$, где φ — угол наклона боковой грани к плоскости основания, $\varphi = \angle SMO$ **Площадь полной поверхности** $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$ **Объём** $V_{пир} = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, $H = SO$, H — высота пирамиды

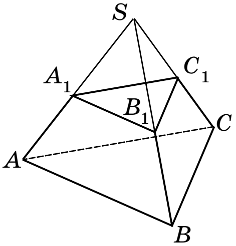
Положение высоты в некоторых видах пирамид

	1. Если в пирамиде: а) все **боковые рёбра** равны или б) все **боковые рёбра** составляют одинаковые углы с плоскостью основания или в) **боковые рёбра** составляют одинаковые углы с высотой пирамиды, то **высота проходит через центр окружности, описанной около основания**
Примечание: высота пирамиды может располагаться в середине пирамиды, на боковой грани или за пирамидой, в зависимости от размещения центра описанной окружности. Около такой пирамиды можно описать конус	

Окончание таблицы

	2. Если в пирамиде: а) все **двугранные углы** при основании равны или б) все **высоты боковых граней** равны или в) высота составляет одинаковые углы с плоскостями боковых граней, то **высота проходит через центр окружности, вписанной в основание**
В такую пирамиду можно вписать конус. Площадь боковой поверхности пирамиды, в которой все **двугранные углы при основании равны** α, можно вычислять по формуле: $S_{бок} = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$	
	3. Если **одна боковая грань** пирамиды перпендикулярна **плоскости основания**, то **высотой пирамиды будет высота этой грани.** Если в $SABC$ $(SAC) \perp (ABC)$ и $SO \perp AC$ $(O \in AC)$, то SO — высота пирамиды, $SO \perp (ABC)$
	4. Если **две смежные боковые** грани перпендикулярны плоскости основания, то **высотой пирамиды будет их общее боковое ребро.** Если $(SAB) \perp (ABC)$ и $(SAC) \perp (ABC)$, то SA — высота пирамиды $(SA \perp (ABC))$

Усечённая пирамида

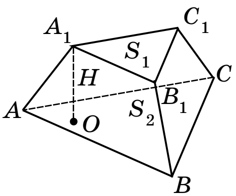


Образование усечённой пирамиды

Если задана пирамида $SABC$ и проведена плоскость $A_1B_1C_1$, параллельная основанию пирамиды $((A_1B_1C_1) \parallel (ABC))$, то эта плоскость отсекает от заданной пирамиды пирамиду $SA_1B_1C_1$, подобную данной. (С коэффициентом подобия

$$k = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB}.)$$

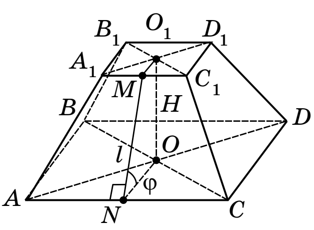
Другая часть заданной пирамиды — многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — называется **усечённой пирамидой.**
Грани ABC и $A_1B_1C_1$ — **основания** $((ABC) \parallel (A_1B_1C_1))$.
Трапеции ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1 — **боковые грани**.



Высотой усечённой пирамиды называется расстояние между плоскостями её оснований.
$A_1O \perp (ABC)$;
$A_1O = H$ — высота

$$V_{\text{усеч. пир.}} = \frac{1}{3}H\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right),$$

где S_1, S_2 — площади оснований



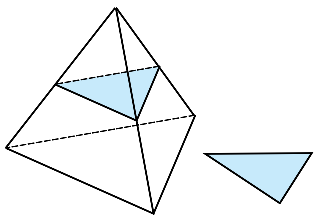
Площадь поверхности усечённой пирамиды равна сумме площадей оснований и боковой поверхности:

$$S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}}.$$

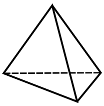
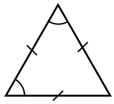
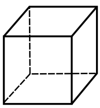
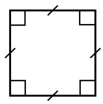
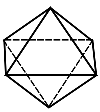
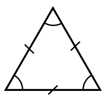
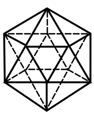
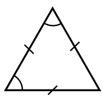
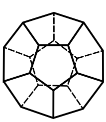
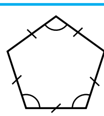
Правильная усечённая пирамида — усечённая пирамида, являющаяся частью правильной пирамиды.
Апофема — высота боковой грани.
$MN \perp AD$ и $MN \perp A_1D_1$.
MN — апофема

<table>
<tr><th colspan="2">Площадь боковой поверхности
правильной усечённой пирамиды</th></tr>
<tr><td>$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot l$,
P_1 и P_2 — периметры оснований;
l — апофема</td><td>$S_{бок} = \frac{S_1 - S_2}{\cos\varphi}$,
S_1 и S_2 — площади оснований;
φ — угол наклона боковой грани к большему основанию</td></tr>
</table>

Сечения куба, призмы, пирамиды

<table>
<tr><td></td><td>Секущая плоскость геометрического тела — это любая плоскость, по обе стороны от которой — точки данного тела.
Сечение геометрического тела — фигура, составленная общими точками секущей плоскости и данного тела</td></tr>
<tr><td>Методы построения сечений:
а) метод следов;
б) метод внутреннего проектирования;
в) метод переноса секущей плоскости</td><td>Секущая плоскость может быть задана:
а) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
б) прямой и точкой, не лежащей на ней;
в) двумя пересекающимися прямыми</td></tr>
<tr><th colspan="2">Метод следов</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. В плоскости нижнего основания (иногда в некоторой другой) построить следы (линии и точки пересечения секущей плоскости).
2. С помощью этих следов выполнить построение точек пересечения секущей плоскости с ребром многогранника и линией пересечения секущей плоскости с гранями многогранника</td></tr>
</table>

Правильные многогранники

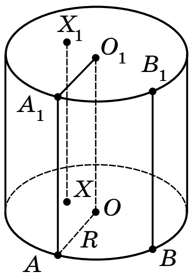
<table>
<tr><td colspan="6">Правильный выпуклый многогранник — выпуклый многогранник, грани которого — правильные многоугольники с одинаковым количеством сторон и к каждой вершине сходится одинаковое количество рёбер</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Правильный тетраэдр (четырёхгранник)
</td><td></td><td>4</td><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Гексаэдр (шестигранник), куб
</td><td></td><td>6</td><td>8</td><td>12</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Октаэдр (восьмигранник)
</td><td></td><td>8</td><td>6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Икосаэдр (двадцатигранник)
</td><td></td><td>20</td><td>12</td><td>30</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Додекаэдр (двенадцатигранник)
</td><td></td><td>12</td><td>20</td><td>30</td></tr>
</table>

Площадь поверхности, объём, радиусы вписанной и описанной сфер

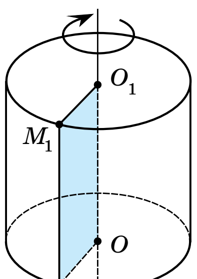
Тип многогранника	Площадь поверхности	Объём	Радиус описанной сферы	Радиус вписанной сферы
Правильный тетраэдр	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$\frac{3}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{1}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{12}$
Правильный октаэдр	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$
Правильный икосаэдр	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$	$\frac{a\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$
Правильный гексаэдр	$4a^2$	a^3	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$
Правильный додекаэдр	$3a^2\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}$	$\frac{a^3\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}$	$\frac{a\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$	$\frac{a\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}$

5.4. Тела и поверхности вращения

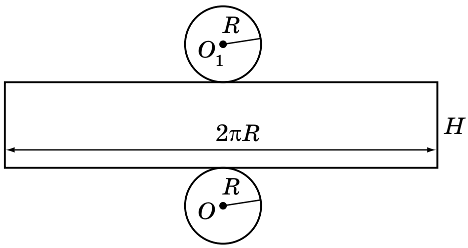
Цилиндр

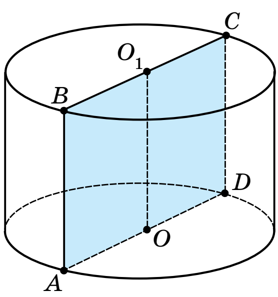


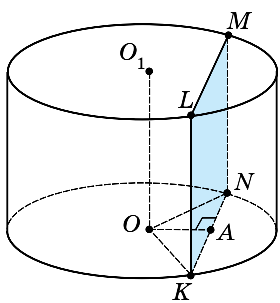
Цилиндр (круговой цилиндр) — тело, состоящее из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих цилиндров.
Основания цилиндра — круги.
Образующие — отрезки, соединяющие точки окружностей.
AA_1, BB_1 — образующие

Свойства	Формулы
1. Основания цилиндра равны и параллельны. $AO = O_1A_1 = R$ $(AOB) \parallel (A_1O_1B_1)$ 2. Образующие цилиндра равны и параллельны. $AA_1 \parallel BB_1$; $AA_1 = BB_1$ 3. Высота цилиндра равна образующей. $H_{осн} = AA_1 = OO_1$  При вращении прямоугольника около его стороны как оси образуется цилиндр.	**Площадь основания** $S_{осн.} = \pi R^2$ **Площадь боковой поверхности** $S_{бок} = 2\pi RH$ **Площадь полной поверхности** $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$ $S_{полн} = 2\pi R(H+R)$ **Объем** $V = S_{осн} \cdot H$ $V = \pi R^2 H$ OMM_1O_1 — прямоугольник OO_1 — ось цилиндра. $R_{цил} = OM = O_1M_1$ $H_{цил} = MM_1 = OO_1$

Продолжение таблицы

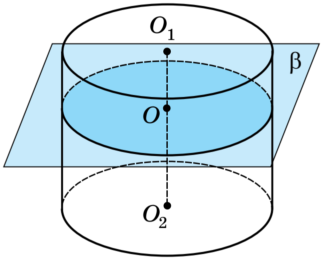
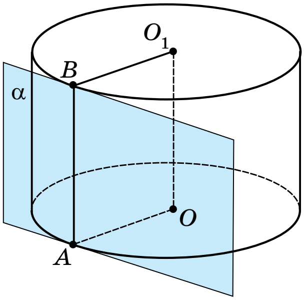
<table>
<tr><th>Свойства</th><th>Формулы</th></tr>
<tr><td colspan="2">Развёртка цилиндра</td></tr>
<tr><td colspan="2">


Развёртка цилиндра — прямоугольник со сторонами $2\pi R$ и H (боковая поверхность) и два круга радиусами R (основания цилиндра)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Сечение цилиндра плоскостями</td></tr>
<tr><td>Осевое сечение</td><td>Сечение плоскостью, параллельной оси</td></tr>
<tr><td>


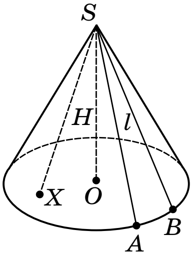
$ABCD$ — осевое сечение (сечение, проходящее через ось OO_1).
$ABCD$ — прямоугольник.
$AD = d_{\text{осн}} = 2R$
$AB = CD = H_{\text{цил}}$
AB и CD — образующие</td>
<td>


$(KLMN) \parallel OO_1$
$KLMN$ — прямоугольник.
KL и MN — образующие.
$KL = H_{\text{цил}}$
KN — хорда.
OA — расстояние от основания высоты до хорды NK</td></tr>
</table>

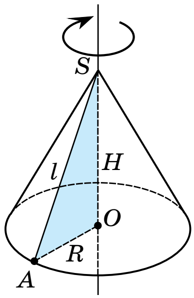
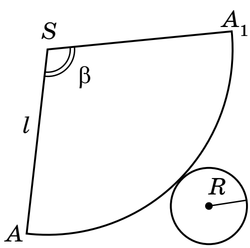
Окончание таблицы

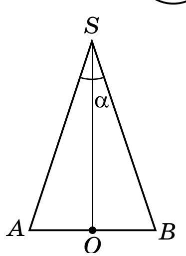
Сечение плоскостью, параллельной основанию	**Касательная плоскость**
 Плоскость, параллельная основанию, пересекает боковую поверхность цилиндра по окружности, равной окружности основания:^ $R_{\text{сеч}} = R_{\text{осн}}$	 **Касательная плоскость** — плоскость, проходящая через образующую и перпендикулярная плоскости осевого сечения, проходящего через эту образующую. α — касательная плоскость. AB — образующая, α проходит через AB. $\alpha \perp (AOO_1B)$

Конус

	**Конус** (круговой конус) — тело, состоящее из круга, точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих заданную точку с точками круга. Основание конуса — круг, т. S — вершина конуса. SA и SB — образующие (отрезки, соединяющие вершину с точками окружности основания)

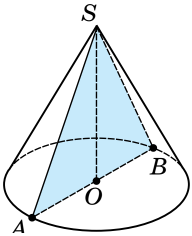
Продолжение таблицы

<table>
<tr><th>Свойства</th><th>Формулы</th></tr>
<tr><td>1. Образующие конуса равны:
$SA = SB = \ldots$
2. $H_{\text{кон}} = SO$ $SO \perp (AOB)$

</td><td>Площадь основания
$S_{\text{осн}} = \pi R^2$
Площадь боковой поверхности
$S_{\text{бок}} = \pi R l$
Площадь полной поверхности
$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$
$S_{\text{полн}} = \pi R(l + R)$
Объем
$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$
$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$</td></tr>
<tr><td colspan="2">При вращении прямоугольного треугольника около его катета как оси образуется конус.
ΔAOS — прямоугольный.
SO — ось симметрии, AS — образующая.
$R_{\text{кон}} = AO$; $H_{\text{кон}} = SO$; $AS = l$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Развёртка конуса</th></tr>
<tr><td>


</td><td>Развёртка конуса состоит из сектора SAA_1, радиус которого равен образующей конуса, длина дуги — длине окружности основания.
$SA = SA_1 = l$; $\cup AA_1 = 2\pi R$
$\angle ASB = \alpha$ — угол при вершине осевого сечения,
$\angle ASA_1 = \beta$ — угол в развёртке конуса.
$\beta = 2\pi \sin \frac{\alpha}{2}$;
$\alpha = 2 \arcsin \frac{\beta}{2\pi}$</td></tr>
</table>

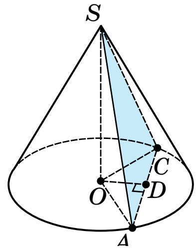
Окончание таблицы

<table>
<tr><th colspan="2">Сечение конуса плоскостями</th></tr>
<tr><th>Осевое сечение</th><th>Сечение, проходящее через вершину</th></tr>
<tr><td>



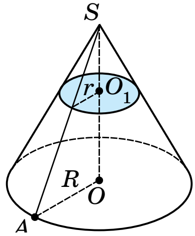
ΔSAB — осевое сечение (проходит через ось SO).
ΔSAB — равнобедренный.
$SA = SB = d$ — образующие

</td><td>



ΔASC — равнобедренный.
$AS = SC = l$ — образующие.
AC — хорда, $OA = OC = R$
OD — расстояние от основания высоты до хорды AC.
$OD^2 = AO^2 - AD^2$

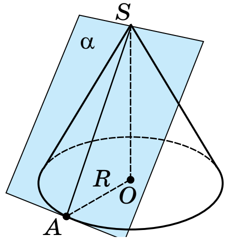
</td></tr>
<tr><th>Сечение плоскостью, параллельной основанию</th><th>Касательная плоскость</th></tr>
<tr><td>



Плоскость, параллельная основанию, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.

$$\frac{r_{\text{сеч}}}{R_{\text{кон}}} = \frac{SO_1}{SO}$$

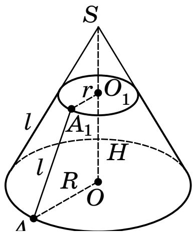
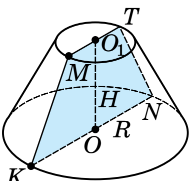
</td><td>

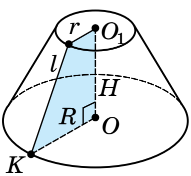


Касательная плоскость — это плоскость, проходящая через образующую конуса перпендикулярно осевому сечению, содержащему эту образующую.
α — касательная плоскость.
SA — образующая, α проходит через SA
$\alpha \perp (SAO)$

</td></tr>
</table>

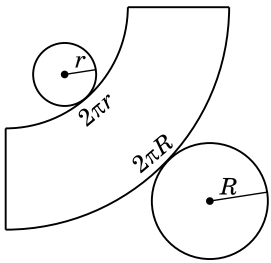
Усечённый конус

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Усечённый конус — часть конуса, заключённая между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.
Основания — круги с центрами O и O_1.
l — образующая, $AA_1 = l$.
$OA = R$ и $O_1A_1 = r$ — радиусы оснований</td>
</tr>
<tr>
<th>Свойства</th>
<th>Формулы</th>
</tr>
<tr>
<td>

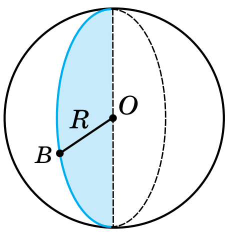
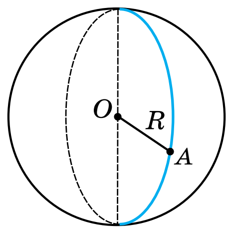
Осевое сечение — равнобокая трапеция.
$MKNT$ — осевое сечение.
$MT \parallel KN$ и $MK = TN$
$MT = 2r$; $KN = 2R$
$OO_1 \perp KN$
$OO_1 = H$</td>
<td rowspan="2">Площадь боковой поверхности
$$S_{\text{бок}} = \pi(R+r)l$$
Площадь полной поверхности
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{1\text{осн}} + S_{2\text{осн}}$$
Объем
$$V_{\text{у.к.}} = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$$
R и r — радиусы нижнего и верхнего оснований;
l — образующая.</td>
</tr>
<tr>
<td>

При вращении прямоугольной трапеции около оси, проходящей через меньшую боковую сторону, перпендикулярную основаниям, образуется усечённый конус</td>
</tr>
</table>

Окончание таблицы

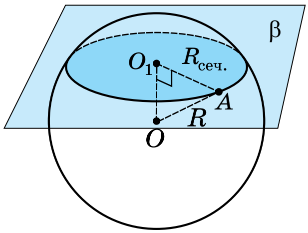
<table>
<tr><th colspan="2">Развёртка усечённого конуса</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Два круга — верхнее и нижнее основания радиусами r и R; часть кольца — боковая поверхность</td></tr>
</table>

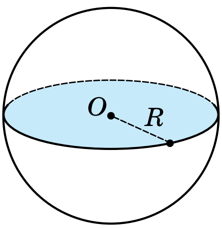
Шар и сфера

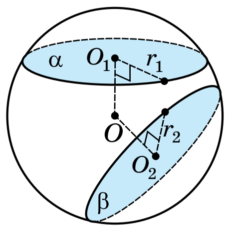
<table>
<tr><th>Шар</th><th>Сфера</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Шар — тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного (R) от данной точки (O).
O — центр шара; OB — радиус шара:
$OB = R$.
Шар получается при вращении полукруга вокруг его диаметра.
Объём шара
$$V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3$$</td><td>Сфера — тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии (R) от данной точки (O).
O — центр сферы.
OA — радиус сферы, $AO = R$
При вращении полуокружности вокруг её диаметра получаем сферу.

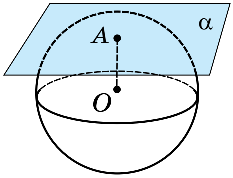
Площадь поверхности сферы
$$S_{сф} = 4\pi R^2$$</td></tr>
</table>

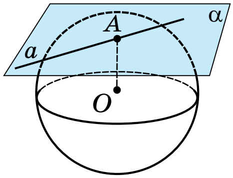
Окончание таблицы

<table>
<tr><th colspan="2">Сечение шара плоскостью</th></tr>
<tr><td>


O — центр шара,
O_1 — центр круга сечения:
$OO_1 \perp \beta$
</td><td>
Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга — основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.
Из ΔOO_1A:
$$R_{сеч} = \sqrt{R_{шара}^2 - OO_1^2}$$
</td></tr>
<tr><th>Большой круг</th><th>Сечение двумя плоскостями</th></tr>
<tr><td>


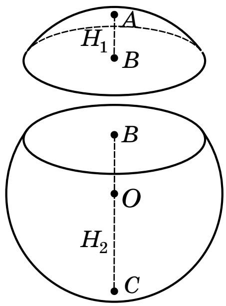
Большой круг — сечение шара, проходящее через центр.
$$R_{сеч} = R_{шара}$$
</td><td>


$OO_1 \perp \alpha$ и $OO_2 \perp \beta$
r_1 и r_2 — радиусы кругов сечения.
$OO_1 = OO_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$
$OO_1 < OO_2 \Leftrightarrow r_1 > r_2$
$OO_1 > OO_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2$
</td></tr>
<tr><td>


$OA \perp \alpha$
Касательная плоскость к шару — это плоскость, проходящая через точку сферы, перпендикулярная к радиусу, проведённому в эту точку.
</td><td>


Касательная к шару — это прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку касания.
$OA \perp \alpha$; $OA \perp a$
</td></tr>
</table>

Части шара



Шаровой сегмент — часть шара, которую отсекает секущая плоскость.

Плоскость делит шар на два сегмента.

$AB = H_1$ — высота меньшего сегмента.

$BC = H_2$ — высота большего сегмента.

Основные формулы

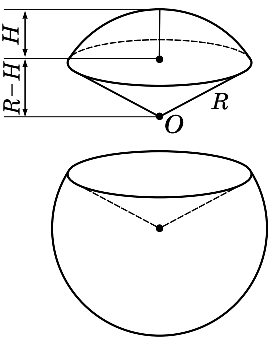
Площадь боковой поверхности:

$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$.

Площадь полной поверхности:

$S_{\text{полн}} = \pi H(4R - H)$

Объём: $V_{\text{сегм}} = \pi H^2\left(R - \dfrac{H}{3}\right)$



Шаровой сектор — тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, которое имеет общее основание с сегментом и вершину в центре конуса.

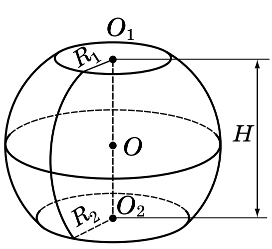
Основные формулы

Площадь полной поверхности:

$S_{\text{полн}} = \pi R\left(2H + \sqrt{H(2R - H)}\right)$

Объём: $V_{\text{сек}} = \dfrac{2}{3}\pi R^2 H$

Примечание: если шаровой сегмент меньше полушара, то для получения шарового сектора его дополняют конусом, а если больше полушара, то конус удаляют.



Шаровой слой — часть шара между двумя параллельными секущими плоскостями.

H — расстояние между секущими плоскостями;

R_1 и R_2 — радиусы оснований

Окончание таблицы

Основные формулы

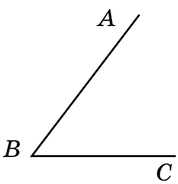
Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi RH$; R — радиус шара.

Площадь полной поверхности: $S_{полн} = \pi(2RH + R_1^2 + R_2^2)$.

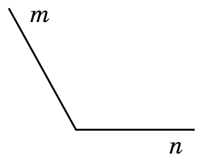
Объём: $V = \dfrac{\pi H}{6}(3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2)$

5.5. Измерение геометрических величин

Угол. Величина угла, градусная мера угла



$\angle ABC$

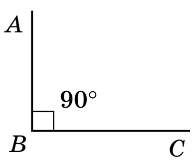


$\angle(m, n)$

Угол — фигура, состоящая из точки — вершины угла, и двух различных лучей, исходящих из этой точки

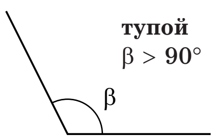
Углы измеряют в градусах. $1^\circ = \dfrac{1}{180}$ развёрнутого угла

Виды углов



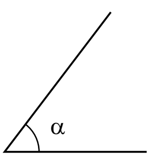
прямой

$\angle ABC = 90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$ рад



тупой

$\beta > 90^\circ$

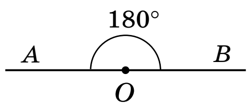


острый

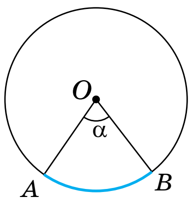
$\alpha < 90^\circ$

развёрнутый

$\angle AOB = 180^\circ$



Дуга



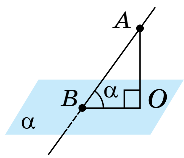
Дуга — часть окружности между двумя точками.
Градусная мера дуги — градусная мера соответствующего центрального угла.

Длина дуги 1°: $l_{1^\circ} = \dfrac{\pi R}{180^\circ}$

Длина дуги n°: $l_{n^\circ} = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$

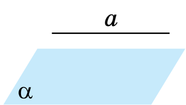
Углы в пространстве

Угол между прямой и плоскостью

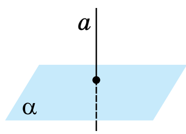


Угол между прямой и пересекающей её плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость.
$\angle ABO$ — угол между прямой AB и плоскостью α
(BO — проекция AB на α, $AO \perp \alpha$)

Особые случаи

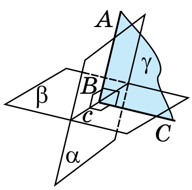


$a \parallel \alpha \Leftrightarrow \angle(a;\ \alpha) = 0$



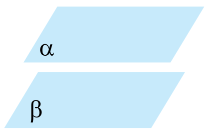
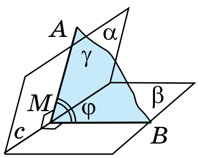
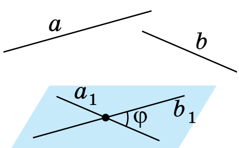
$a \perp \alpha \Leftrightarrow \angle(a;\ \alpha) = 90^\circ$

Угол между плоскостями (двугранный угол)



Угол между плоскостями α и β, пересекающимися по прямой c, называется угол между прямыми, по которым третья плоскость γ, перпендикулярная их линии пересечения, пересекает плоскости α и β.
$\angle ABC$ — угол между плоскостями α и β, т. е. $AB \perp c$; $BC \perp c$, $AB \subset \alpha$; $BC \subset \beta$

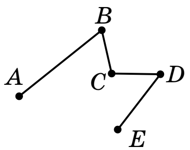
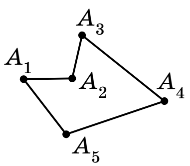
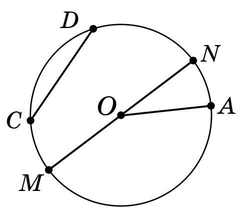
Окончание таблицы

	**Угол между параллельными плоскостями** равен 0°. $\angle(\alpha;\ \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$
	**Двугранный угол** — фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой. α и β — грани двугранного угла, c — ребро двугранного угла $AM \perp c$, $BM \perp c$, $AM \subset \alpha$, $MB \subset \beta$. $\angle AMB = \varphi$ — линейный угол двугранного угла
Свойства Плоскость линейного угла перпендикулярна каждой грани двугранного угла. $(AMB) \perp \alpha$ и $(AMB) \perp \beta$	
Угол между скрещивающимися прямыми	
	**Угол между скрещивающимися прямыми** — это угол между прямыми, которые пересекаются и параллельны данным скрещивающимся. $a \parallel a_1$; $b \parallel b_1$; $\angle(a;\ b) = \angle(a_1;\ b_1) = \varphi$ $0° < \varphi < 90°$
Если угол между скрещивающимися прямыми равен 90°, то они называются **перпендикулярными**	

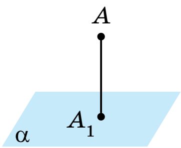
Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника

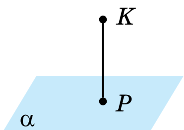
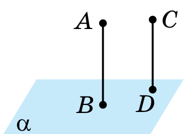
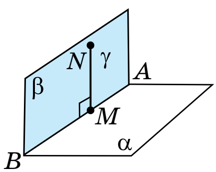
	**Отрезок** — часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя её точками — концами отрезка

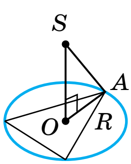
Окончание таблицы

<table>
<tr><td colspan="2">Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые отрезок разбивается любой его точкой:
$$AB = AK + KB$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Ломаная — геометрическая фигура, состоящая из точек, не лежащих на одной прямой (вершин), соединённых отрезками (звеньями).
Длина ломаной равна сумме длин её звеньев</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Многоугольник — замкнутая ломаная.
Многоугольник называется выпуклым, если диагональ лежит внутри многоугольника</td></tr>
<tr><td colspan="2">Число диагоналей выпуклого многоугольника:
$$n_d = \frac{n(n-3)}{2},$$
n — число сторон многоугольника.
Периметр многоугольника равен сумме длин его сторон:
$$P_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Окружность — фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки (центра).
$OA = R$ — радиус.
$MN = D = 2R$ — диаметр.
CD — хорда.
$\cup AN$, $\cup AM$ — дуги</td></tr>
<tr><td colspan="2">Длина окружности:
$$C = 2\pi R,$$
где R — радиус; число π — отношение длины окружности к диаметру:
$$\pi = \frac{C}{2R} \approx 3,14$$</td></tr>
</table>

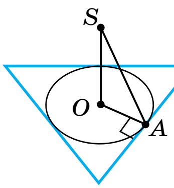
Расстояние в пространстве

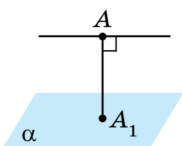
Расстояние от точки до плоскости (ρ — расстояние)	
	**Расстояние от точки до плоскости** — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость

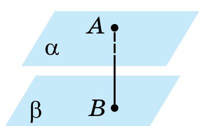
Способы построения	
	Провести $KP \perp \alpha$ $(P \in \alpha)$. $KP = \rho(K;\ \alpha)$
	$AB \perp \alpha$ Провести $CD \parallel AB \Rightarrow CD \perp \alpha$. $CD = \rho(c;\ \alpha)$
	Провести $\beta \perp \alpha$ через точку M (β пересекает α по AB). Провести $MN \perp AB \Rightarrow MN \perp \alpha$ $MN = \rho(M;\ \alpha)$

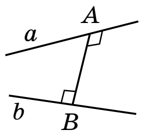
Частные случае нахождения расстояния от точки до плоскости (до прямой)	
 SO — расстояние от точки до плоскости многоугольника;	**Свойство точки, равноудалённой от всех вершин многоугольника** Если точка вне плоскости многоугольника **равноудалена от всех его вершин**, то основание перпендикуляра, проведённого из этой точки

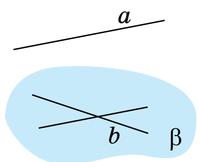
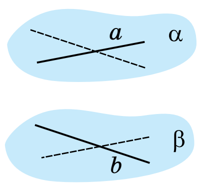
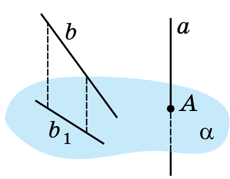
Окончание таблицы

$OA = R$ — радиус описанной окружности; SA — расстояние от точки до вершины многоугольника	к плоскости многоугольника, является центром **окружности, описанной** около многоугольника.
 SO — расстояние от точки до плоскости многоугольника; $AO = r$ — радиус окружности, вписанной в многоугольник	**Свойство точки, равноудалённой от сторон многоугольника** Если точка вне плоскости многоугольника **равноудалена от его сторон**, то основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости многоугольника, является центром **окружности, вписанной** в многоугольник. SA — расстояние от точки до стороны многоугольника

Расстояние между параллельными прямой и плоскостью	
	Выбрать на прямой a произвольную точку A и найти расстояние от этой точки до плоскости α. $a \parallel \alpha$ $A \in a$ $\rho(a;\ \alpha) = \rho(A;\ \alpha) = AA_1$

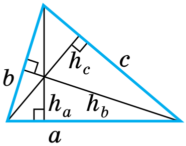
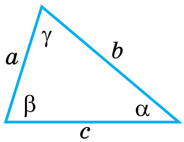
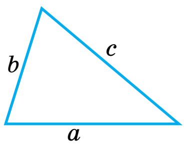
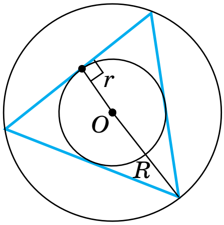
Расстояние между параллельными плоскостями	
	Выбрать в плоскости произвольную точку A и найти расстояние от точки A до плоскости β. $\alpha \parallel \beta$ $A \in \alpha$ $\rho(\alpha;\ \beta) = \rho(A;\ \beta) = AB$

Расстояние между скрещивающимися прямыми	
	**Расстояние между скрещивающимися прямыми** — это длина **общего перпендикуляра** к этим прямым. $AB \perp a$; $AB \perp b$ $\rho(a; b) = AB$ прямые a и b скрещиваются

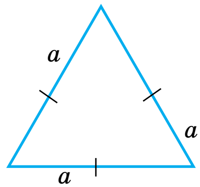
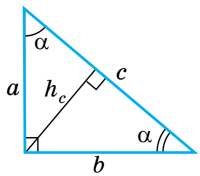
Способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми	
 $\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta)$	Провести через прямую b плоскость $\beta \parallel a$
 $\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta)$	Провести через a и b параллельные плоскости α и β
 $\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$	Провести $\alpha \perp a$, спроектировать a и b на эту плоскость: $a \to A$, $b \to b_1$

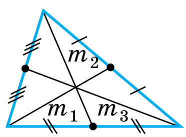
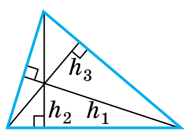
Площади треугольника, четырёхугольника, круга и его частей

Площадь треугольника

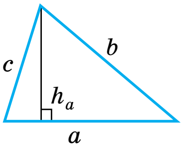
	$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
	$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$
	Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$ или $S = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$
	Нахождение площади через радиусы вписанной и описанной окружностей: r и R. $S = p \cdot r$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$. $S = \frac{a+b+c}{2r}$, где r — радиус вписанной окружности. $S = \frac{abc}{4R}$ или $S = 2R^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, где R — радиус описанной окружности

Окончание таблицы

	Площадь равностороннего треугольника: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
	Площадь прямоугольного треугольника: $S = \dfrac{1}{2}ab$ $S = \dfrac{1}{2}ch_c$ $S = \dfrac{1}{2}ac\sin\alpha = \dfrac{1}{2}bc\sin\beta$ Следствие: $h_c = \dfrac{ab}{c}$

Дополнительные формулы для площади треугольника
Через медианы треугольника m_1, m_2, m_2: $S = \dfrac{1}{3}\sqrt{(m_1+m_2+m_3)(-m_1+m_2+m_3)(m_1-m_2+m_3)(m_1+m_2-m_3)}$ 
Через высоты треугольника h_1, h_2, h_3: $S = \sqrt{\left(\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}+\dfrac{1}{h_3}\right)\left(-\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}+\dfrac{1}{h_3}\right)\left(\dfrac{1}{h_1}-\dfrac{1}{h_2}+\dfrac{1}{h_3}\right)\left(\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}-\dfrac{1}{h_3}\right)}$ 

Нахождение высоты произвольного треугольника методом площадей

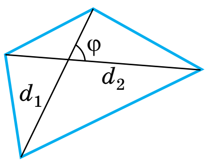


Метод площадей заключается в нахождении площади различными способами, далее из этого равенства находят различные элементы треугольника, например высоту

$S = \frac{1}{2} a h_a$ или

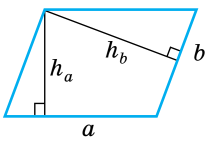
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$

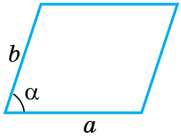
Площадь четырёхугольника

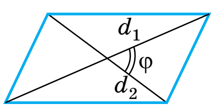


Площадь любого выпуклого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$







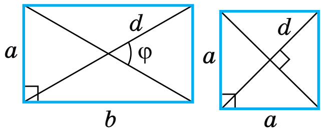
Площадь параллелограмма

$S = ah_a = ah_b$

$S = ab\sin\alpha$

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\phi$

Окончание таблицы



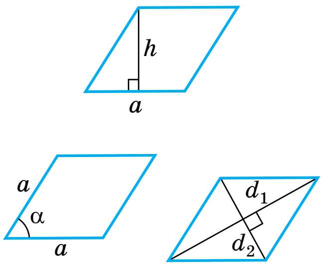
Площадь прямоугольника и квадрата

$S_{пр} = ab$

$S_{пр} = \frac{1}{2} d^2 \sin \phi$

$S_{кв} = a^2$

$S_{кв} = \frac{d^2}{2}$

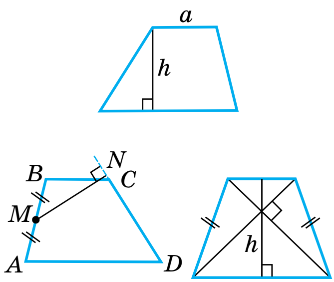


Площадь ромба

$S_р = ah$

$S_р = a^2 \sin\alpha$

$S_р = \frac{1}{2} d_1 d_2$



Площадь трапеции

$$S_{тр} = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

или

$$S_{тр} = m \cdot h,$$

где $m = \frac{a+b}{2}$ — средняя линия трапеции.

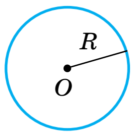
$$S_{тр} = CD \cdot MN,$$

CD — боковая сторона; MN — перпендикуляр, проведённый из середины другой боковой стороны

В равнобокой трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями площадь равна квадрату высоты:

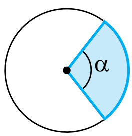
$$S_{тр} = h_2$$

Площадь круга и его частей



Круг — фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного.
Точка O — центр круга, данное расстояние R — радиус круга

Площадь круга: $S = \pi R^2$ или $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$, где D — диаметр

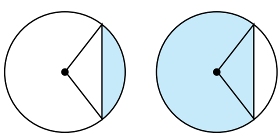


Круговой сектор — часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла

Площадь кругового сектора:

$S_{\text{сект}} = \dfrac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ}$, где n° — градусная мера соответствующего центрального угла.

$S_{\text{сект}} = \dfrac{\alpha R^2}{2}$, где α — радианная мера соответствующего центрального угла



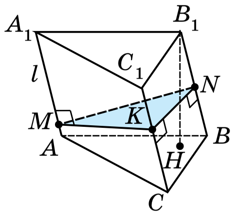
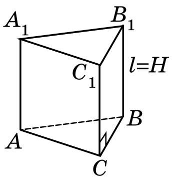
Круговой сегмент — общая часть круга и полуплоскости

Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле:

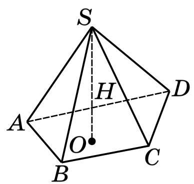
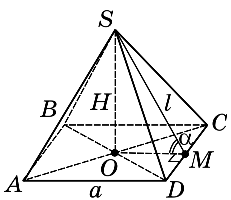
$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ \pm S_\Delta,$$

где n° — градусная мера соответствующего центрального угла;
S_Δ — площадь треугольника с вершиной в центре круга;
«+», если $n^\circ > 180^\circ$; «−», если $n^\circ < 180^\circ$

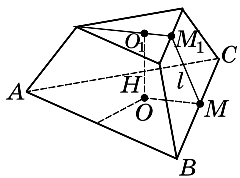
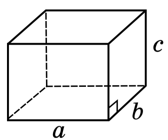
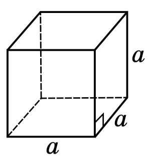
Площадь поверхности и объём многогранников

<table>
<tr><th>Вид многогранника</th><th>Боковая поверхность</th><th>Полная поверхность</th><th>Объём</th></tr>
<tr><td rowspan="1">Наклонная призма
</td><td rowspan="1">$S_{бок} = P_{\perp} \cdot l$,
где $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения;
l — длина бокового ребра
или
$S_{бок} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} + \ldots$</td><td>$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$</td><td>$V_{н.п} = S_{\perp} \cdot l$,
или
$V_{н.п.} = S_{осн} \cdot H$</td></tr>
<tr><td colspan="2">MNK — перпендикулярное сечение;
l — боковое ребро; H — высота</td><td colspan="2">$S_{\perp}$ — площадь перпендикулярного сечения;
l — длина бокового ребра;
$S_{осн}$ — площадь основания;
H — высота</td></tr>
<tr><td>Прямая призма
</td><td>$S_{бок} = P_{осн} \cdot H$
или
$S_{бок} = P_{осн} \cdot l$</td><td rowspan="2">$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$</td><td rowspan="2">$V = S_{осн} \cdot H$
или
$V = S_{осн} \cdot l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Длина высоты совпадает с длиной бокового ребра</td></tr>
</table>

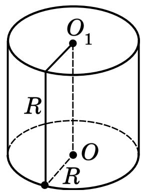
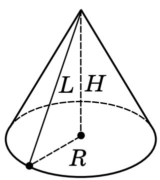
Продолжение таблицы

Вид многогранника	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
Пирамида 	$S_{бок} = S_{ASB} + S_{BSC} + S_{CSD} + \ldots$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$
Правильная пирамида 	$S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l$ $S_{бок} = \frac{n}{2} a \cdot l$ или $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\alpha}$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} =$ $= \frac{aln}{2} + S_{осн}$	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$
	$S_{осн}$ — площадь основания; H — высота; l — апофема; a — сторона основания; α — угол наклона боковой грани		

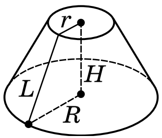
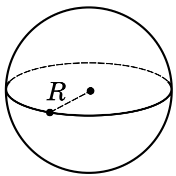
Окончание таблицы

Вид многогранника	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
Правильная усечённая пирамида 	$S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2}$	$V = \frac{1}{3} H \left(S_{\text{осн}_1} + \sqrt{S_{\text{осн}_1} \cdot S_{\text{осн}_2}} + S_{\text{осн}_2} \right)$
Прямоугольный параллелепипед 	$S_{\text{бок}} = 2(a+b)c$	$S_{\text{полн}} = 2(ab+bc+ac)$	$V = abc$
Куб 	$S_{\text{бок}} = 4a^2$	$S_{\text{полн}} = 6a^2$	$V = a^3$

Площадь поверхности и объём тел вращения

Вид тела вращения	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
Цилиндр 	$S_{бок} = 2\pi RH$	$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$ $S_{полн} = 2\pi R(H+R)$	$V = \pi R^2 H$
	R — радиус основания; L — образующая; H — высота; $L = H$		
Конус 	$S_{бок} = \pi RL$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$ $S_{полн} = \pi R(L+R)$	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$
	R — радиус основания; L — образующая; H — высота		

Окончание таблицы

<table>
<tr><th>Вид тела вращения</th><th>Боковая поверхность</th><th>Полная поверхность</th><th>Объём</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Усечённый конус

</td><td>$S_{бок} = \pi(R+r)L$</td><td>$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн_1} + S_{осн_2}$</td><td>$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">R и r — радиусы большего и меньшего оснований; L — образующая; H — высота</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Шар и сфера

</td><td colspan="2">Площадь сферы
$S_{сф} = 4\pi R^2$</td><td>Объём шара
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$</td></tr>
<tr><td colspan="3">R — радиус шара</td></tr>
</table>

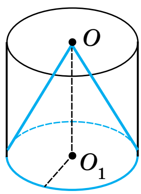
Комбинации тел

Комбинации многогранников

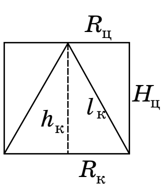
> Многогранник называется **вписанным во второй многогранник,** если вершины первого лежат на поверхности (рёбрах, гранях) второго. Второй многогранник называется **описанным около первого.**

Комбинации тел вращения

Цилиндр — конус



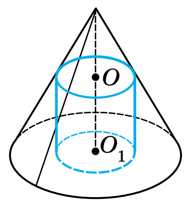
Конус называется **вписанным в цилиндр,** если основание конуса совпадает с основанием цилиндра, а вершина конуса лежит на втором основании цилиндра.
При этом цилиндр называется **описанным около** конуса.



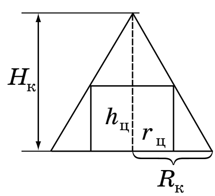
Осевое сечение, свойства

$$h_к = H_ц;\ R_к = R_ц,$$

$h_к$ и $H_ц$ — высоты конуса и цилиндра;
$R_к$ и $R_ц$ — радиусы конуса и цилиндра



Цилиндр называется **вписанным в конус,** если одно основание цилиндра лежит в основании конуса, а окружность второго основания лежит на боковой поверхности конуса.
При этом конус называется **описанным около** цилиндра.

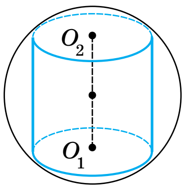


Осевое сечение, свойства

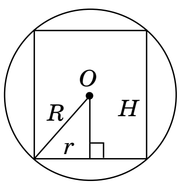
$$\frac{R_к}{r_ц} = \frac{H_к}{H_к - h_ц},$$

$H_к$ и $h_ц$ — высоты конуса и цилиндра;
$R_к$ и $r_ц$ — радиусы конуса и цилиндра

Шар — цилиндр



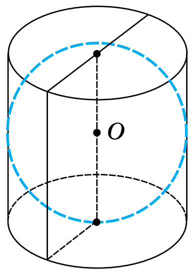
Цилиндр называется **вписанным в шар**, если его основания являются сечениями шара.
При этом **шар описан около** цилиндра.



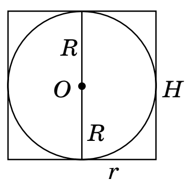
Осевое сечение, свойства

1. Центр шара лежит на середине высоты цилиндра.
2. Основания цилиндра — равные параллельные сечения шара.
3. Радиус шара R, радиус цилиндра r и высота цилиндра H связаны соотношением:

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2$$



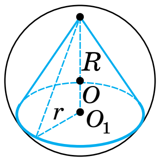
Цилиндр называется **описанным около шара**, если шар касается всех образующих цилиндра и его оснований.
При этом шар **вписан** в цилиндр.



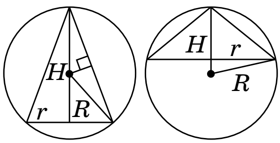
Осевое сечение, свойства

1. Шар можно вписать только в равносторонний цилиндр.
2. $R = r = \dfrac{H}{2}$, где R — радиус шара, H — высота цилиндра, r — радиус цилиндра

Шар — конус



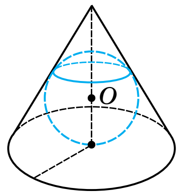
Конус называется **вписанным в шар**, если вершина конуса лежит на поверхности шара, а его основание — сечение шара.
Шар при этом **описан около конуса**.



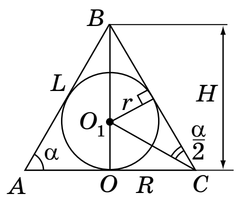
Осевое сечение, свойства

1. Шар можно описать около любого конуса.
2. Центр шара — на оси конуса и является центром окружности, описанной около осевого сечения конуса.
3. Если R — радиус шара, r — радиус основания конуса, H — высота конуса, то

$$R^2 = (H - R)^2 + r^2$$



Конус называется **описанным около шара**, если шар касается всех образующих конуса и его оснований.
Шар при этом вписан в конус.



Осевое сечение, свойства

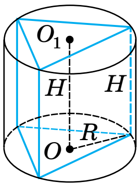
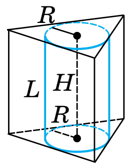
1. Шар можно вписать в любой конус.
2. Центр шара — на оси конуса.
3. Если r — радиус шара, R — радиус основания конуса, H — его высота, то:

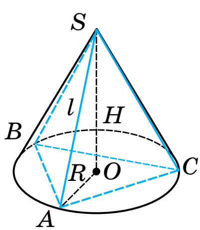
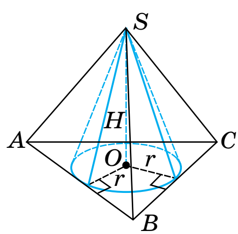
$$\frac{r}{H - r} = \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}};$$

$$r = R\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{S_{\Delta ABC}}{R + L},$$

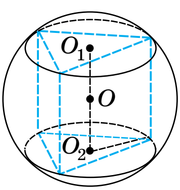
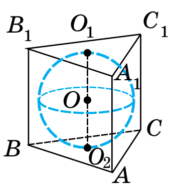
L — образующая конуса;
α — угол между образующей и плоскостью основания конуса

Комбинации многогранников и тел вращения

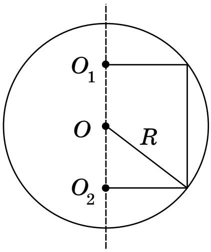
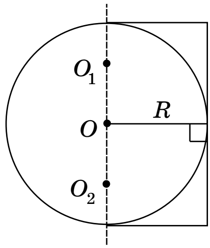
Цилиндр — призма	
 Призма называется **вписанной в цилиндр**, если её основания вписаны в основания цилиндра, а боковые рёбра — образующие цилиндра. При этом цилиндр **описан около призмы.** **Свойства призмы, вписанной в цилиндр** 1. Цилиндр можно описать около прямой призмы, если её основание — многоугольник, около которого можно описать окружность. 2. Ось цилиндра лежит на одной прямой с высотой H призмы. 3. Боковые рёбра призмы являются образующими цилиндра и равны H	 Призма называется **описанной около цилиндра**, если её основания описаны около оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра (лежат в касательных областях). Цилиндр при этом **вписан в призму.** **Свойства призмы, описанной около цилиндра** 1. Цилиндр можно вписать в прямую призму, если в её основании лежит многоугольник, в который можно вписать окружность. 2. Боковые грани призмы касаются поверхности цилиндра. 3. Боковые рёбра призмы равны образующим цилиндра и высоте цилиндра

Конус — пирамида	
 	

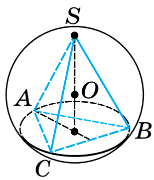
Продолжение таблицы

Пирамида называется **вписанной в конус**, если её основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус **описан около пирамиды.** **Свойства пирамиды, вписанной в конус** 1. Конус можно описать около пирамиды, если её основание — многоугольник, вокруг которого можно описать окружность. 2. Высота пирамиды равна высоте конуса и проходит через центр описанной около основания окружности. 3. Боковые рёбра пирамиды являются образующими конуса	Пирамида называется **описанной около конуса**, если её основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус **вписан в пирамиду**. **Свойства пирамиды, описанной около конуса** 1. Конус можно вписать в пирамиду, если её основание — многоугольник, в который можно вписать окружность, высота проходит через центр этой окружности. 2. Радиус основания конуса равен радиусу окружности, вписанной в основание. Высоты конуса и пирамиды совпадают. 3. Высоты боковых граней пирамиды являются образующими конуса
Шар — призма	
 	
Призма называется **вписанной в шар**, если все её вершины лежат на поверхности шара. При этом шар **описан около призмы.**	Призма называется **описанной около шара**, если все её грани касаются поверхности шара. При этом шар **вписан в призму**.

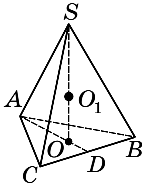
Продолжение таблицы

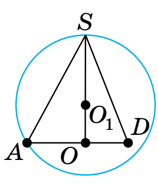
Свойства призмы, вписанной в шар	**Свойства призмы, описанной около шара**
 	
1. Шар можно описать около прямой призмы, если около оснований можно описать окружность. Центр шара лежит на середине высоты призмы, которая соединяет центры этих окружностей. 2. Основания призмы вписаны в равные и параллельные сечения шара. 3. При решении задач целесообразно рассматривать сечение полуплоскостью, которая проходит через центр шара и боковое ребро призмы. 4. $R^2 = \frac{H^2}{4} + r^2$, где R — радиус конуса; r — радиус окружности, описанной около основания, H — высота призмы	1. Шар можно вписать в прямую призму, если в её основание можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметрам этих окружностей. Центр шара — на середине высоты призмы, соединяющей центры этих окружностей. 2. При решении задач целесообразно рассматривать сечение полуплоскостью, которая проходит через центр шара перпендикулярно боковой грани призмы. $R = r = \frac{H}{2}$, где R — радиус шара; r — радиус окружности, вписанной в основание; H — высота призмы. 3. Чтобы в призму можно было вписать шар, необходимо и достаточно, чтобы в её перпендикулярное сечение можно было вписать окружность, и чтобы высота призмы равнялась диаметру этой окружности

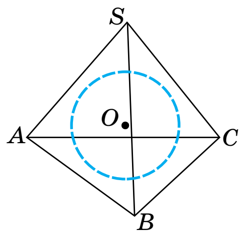
Продолжение таблицы

<table>
<tr><th colspan="2">Шар — пирамида</th></tr>
<tr><td>


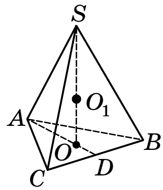
Пирамида называется **вписанной в шар**, если все её вершины лежат на поверхности шара.
При этом **шар описан около пирамиды.**
Свойства правильной пирамиды, вписанной в шар
1. Шар можно описать около любой правильной пирамиды.
2. Центр шара лежит на прямой, которая содержит высоту пирамиды.
3. Решая задачи, обычно рассматривают сечения:
• **в треугольной пирамиде** (в основании правильный треугольник)

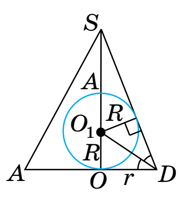




</td><td>


Пирамида называется **описанной около шара**, если все её грани касаются поверхности шара.
Шар при этом **вписан в пирамиду.**
Свойства пирамиды, описанной около шара
1. Шар можно вписать в любую правильную пирамиду.
2. Центр шара лежит на высоте пирамиды.
3. Решая задачи, обычно рассматривают сечения:
• **в треугольной пирамиде** (в основании — правильный треугольник)





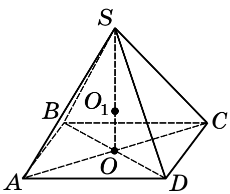
</td></tr>
</table>

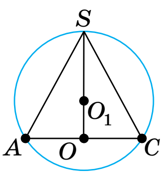
Окончание таблицы

<table>
<tr>
<td>

Целесообразно провести сечение через медиану основания и вершину пирамиды;

- **в четырёхугольной пирамиде** (в основании — квадрат).





Рассматривают сечение, проходящее через одну из диагоналей основания и вершину пирамиды

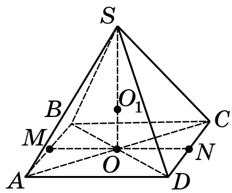
4. Радиус шара R и радиус окружности r, описанной около основания пирамиды, и высота пирамиды H связаны соотношением:

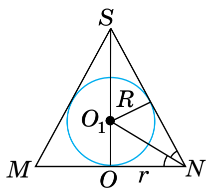
$$R^2 = (H - R^2) + r^2$$

</td>
<td>

Целесообразно провести сечение через медиану основания и вершину пирамиды;

- **в четырёхугольной пирамиде.**





Рассматривают сечение, проходящее через вершину пирамиды и апофемы противолежащих боковых граней

4. Если R — радиус шара, H — высота пирамиды, r — радиус окружности, вписанной в основание, то:

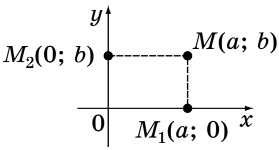
$$\frac{R}{H - R} = \frac{r}{\sqrt{H^2 + r^2}}$$

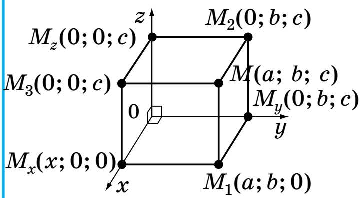
5. Центр вписанного шара лежит на пересечении высоты пирамиды с биссектрисой угла между апофемой и её проекцией на основание

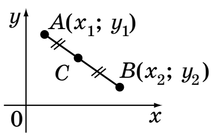
</td>
</tr>
</table>

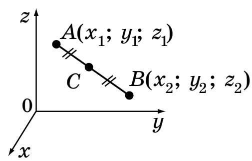
5.6. Координаты и векторы

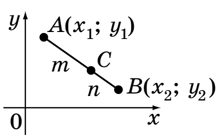
Декартовы координаты

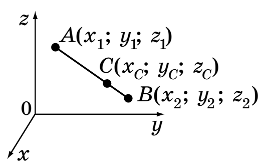
<table>
<tr><th>Декартовы координаты на плоскости</th><th>Декартовы координаты в пространстве</th></tr>
<tr><td>


O — начало координат;
Ox — ось абсцисс;
Oy — ось ординат
</td><td>


O — начало координат;
Ox — ось абсцисс;
Oy — ось ординат;
Oz — ось аппликат
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Координаты середины отрезка</th></tr>
<tr><td>
$C(x_C;\ y_C)$ — середина отрезка AB


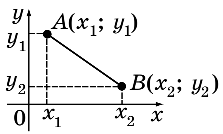
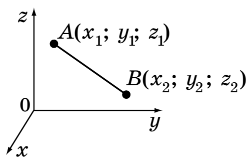
$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$
</td><td>
$C(x_C;\ y_C;\ z_C)$ — середина отрезка AB


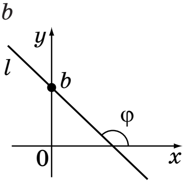
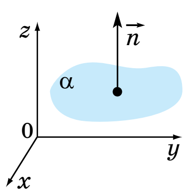
$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$;
$z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}$
</td></tr>
<tr><th colspan="2">Координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении</th></tr>
<tr><td>


</td><td>


</td></tr>
</table>

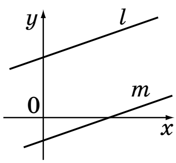
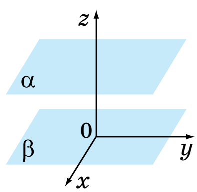
Окончание таблицы

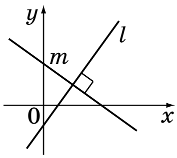
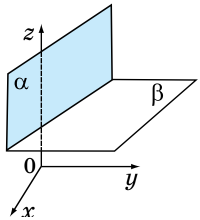
Даны точки $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$. Точка $C(x_C;\ y_C)$ делит отрезок AB в отношении $m:n$, считая от точки A. Тогда координаты точки C: $x_C = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n}$; $y_C = \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n}$	$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $C(x_C;\ y_C;\ z_C)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ Точка $C(x_C;\ y_C;\ z_C)$ делит отрезок AB в отношении $m:n$, считая от точки A. $x_C = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n}$; $y_C = \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n}$; $z_C = \dfrac{nz_1 + mz_2}{m+n}$
Формула расстояния между точками	
$A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$  Расстояние d между точками A и B: $d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$  Расстояние d между точками A и B: $d_{AB} =$ $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

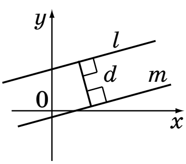
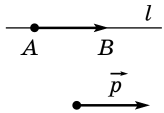
Уравнение прямой на плоскости	**Уравнение плоскости в пространстве**
В общем виде: $ax + by + c = 0$ С угловым коэффициентом $k = -\dfrac{a}{b}\ (b \neq 0)$  	**В общем виде:** $ax + by + cz + d = 0$ 

Окончание таблицы

$y = kx + b$ прямая l, где $(0;\ b)$ — точка пересечения прямой с осью Oy; $k = \operatorname{tg}\varphi$ Угловой коэффициент прямой: $$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$ если прямая проходит через точки $A(x_A;\ y_A)$ и $B(x_B;\ y_B)$	$\overline{n}(a;\ b;\ c)$ — *нормаль* (*нормальный вектор*) — ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости. Если плоскость проходит через точки $M(x_O;\ y_O;\ z_O)$ и $\overline{n}(a;\ b;\ c)$, $\overline{n} \perp \alpha$, то уравнение плоскости α: $a(x-x_O)+b(y-y_O)+c(z-z_O) = 0.$

Условие параллельности прямых на плоскости	**Условие параллельности плоскостей в пространстве**
 1. Если прямые заданы уравнениями: l: $a_1x+b_1y+c_1 = 0$; m: $a_2x+b_2y+c_2 = 0$, то $l \parallel m$ при $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$ 2. Если прямые заданы уравнениями: l: $y = k_1x+b_1$; m: $y = k_2x+b_2$, то $l \parallel m$ при $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.	 Две различные плоскости α_1 и α_2, заданные уравнениями: α_1: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$; α_2: $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ параллельны тогда и только тогда, если $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}.$$ **Следствие:** если $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2},$$ то плоскости совпадают

Условие перпендикулярности прямых на плоскости	Условие перпендикулярности плоскостей в пространстве
 1. Если прямые заданы уравнениями: l: $a_1x+b_1y+c_1=0$; m: $a_2x+b_2y+c_2=0$, то $l \perp m$ при $a_1b_2+a_2b_1=0$. 2. Если прямые заданы уравнениями: l: $y=k_1x+b_1$; m: $y=k_2x+b_2$, то $l \perp m$ при $k_1 \cdot k_2=-1$ или $k_1=-\frac{1}{k_2}$	 Если плоскости заданы уравнениями: α: $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$; β: $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$, то они перпендикулярны тогда и только тогда, если $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

Расстояния и углы между прямыми	Расстояния и углы между прямыми и плоскостями
Расстояние между параллельными прямыми 	**Угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися)** 

Продолжение таблицы

<table>
<tr><th>Расстояния и углы между прямыми</th><th>Расстояния и углы между прямыми и плоскостями</th></tr>
<tr><td>

Если прямые заданы уравнениями
l: $ax + by = c_1$
m: $ax + by = c_2$, то

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

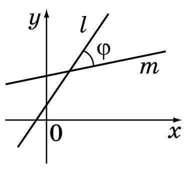
</td><td>

Направляющий вектор прямой — вектор, лежащий на прямой или на прямой, ей параллельной.
Вычисляется по координатам двух точек прямой $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$.
$\overline{p} = \overline{AB}$.
Угол между прямыми с направляющими векторами $\overline{p}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\overline{q}(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\cos\phi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\cdot(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}$$

</td></tr>
<tr><td>

Угол между прямыми

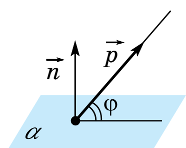


Если прямые заданы уравнениями
l: $y = k_1 c + b_1$
m: $y = k_2 x + b_2$
и $k_1 \neq k_2$, то

$$\operatorname{tg}\phi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$$

</td><td>

Угол между прямой и плоскостью



Угол между направляющим вектором $\overline{p}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и плоскостью $ax + by + cz + d = 0$:

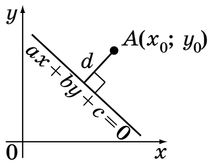
$$\cos\phi = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1|}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\cdot(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

<table>
<tr><th>Расстояния и углы между прямыми</th><th>Расстояния и углы между прямыми и плоскостями</th></tr>
<tr><td>

Расстояние от точки до прямой

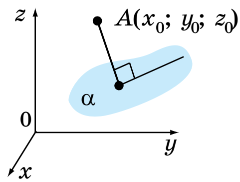


Расстояние от точки $A(x_0;\ y_0)$ до прямой $ax+by+c=0$:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

</td><td>

Расстояние от точки до плоскости



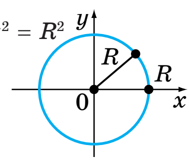
Расстояние от точки $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости $ax+by+cz+d=0$:

$$d=\left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Уравнение окружности</th><th>Уравнение сферы</th></tr>
<tr><td colspan="2">с центром в начале координат</td></tr>
<tr><td>

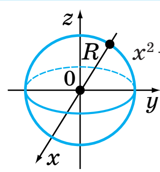
$x^2+y^2=R^2$



Центр окружности $O(0;\ 0)$

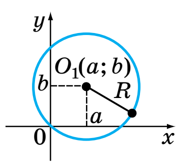
</td><td>

$x^2+y^2+z^2=R^2$



Центр окружности $O(0;\ 0;\ 0)$

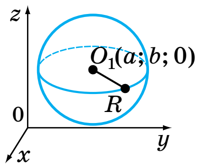
</td></tr>
<tr><td colspan="2">с центром в произвольной точке</td></tr>
<tr><td>



$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

Центр $O_1(a;\ b)$, радиус R

</td><td>

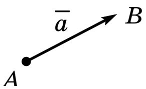
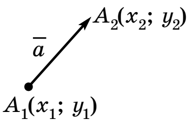
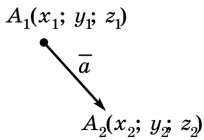


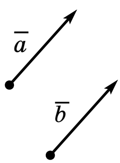
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

Центр сферы $O_1(a;\ b;\ c)$, радиус R

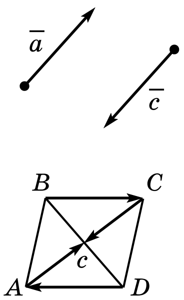
</td></tr>
</table>

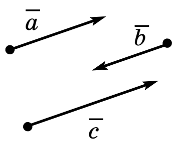
Векторы

Векторы на плоскости	**Векторы в пространстве**
	**Вектором** называется направленный отрезок: $\overline{AB} = \overline{a}$ Длина этого отрезка называется **длиной (модулем, абсолютной величиной)** вектора: $\lvert\overline{a}\rvert = AB$
Координаты вектора на плоскости	**Координаты вектора в пространстве**
 $\overline{a}(a_1; a_2)$ где $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$ $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	 $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$, где $a_1 = x_2 - x_1$ $a_2 = y_2 - y_1$ $a_3 = z_2 - z_1$ $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Равные векторы	
	$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \lvert\overline{a}\rvert = \lvert\overline{b}\rvert \\ \text{векторы } \overline{a} \text{ и } \overline{b} \text{ одинаково напралены} \end{cases}$

В координатах	
$\overline{a}(a_1; a_2) = \overline{b}(b_1; b_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{matrix} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{matrix}$	$\overline{a}(a_1; a_2; a_3) = \overline{b}(b_1; b_2; b_3) \Leftrightarrow \begin{matrix} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{matrix}$

Противоположные векторы	
	**Противоположные векторы** — векторы, имеющие одинаковую длину и противоположное направление. Векторы $\overline{AO}$ и $\overline{CO}$ — противоположные; $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ — противоположные. $\lvert\overline{a}\rvert = \lvert\overline{c}\rvert$ $\overline{a} = -\overline{c}$

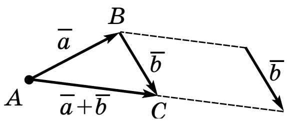
Коллинеарные векторы	
	Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы направлены одинаково или противоположно

Условие коллинеарности векторов	
$\overline{a}$ коллинеарно $\overline{b}$ $\overline{a}(a_1;\ a_2);\ \ \overline{b}(b_1;\ b_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$	$\overline{a}$ коллинеарно $\overline{b}$ $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3);\ \ \overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

Операции над векторами

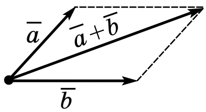
Сумма векторов	
На плоскости	**В пространстве**
$\overline{a}(a_1;\ a_2) + \overline{b}(b_1;\ b_2) =$ $= \overline{c}(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$	$\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3) + \overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3) =$ $= \overline{c}(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)$

Правило треугольника

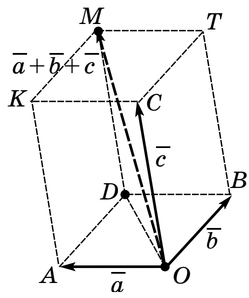


$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Правило параллелограмма



Правило параллелепипеда



$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

Правило многоугольника:

Пусть даны векторы $\overline{a}$; $\overline{b}$; $\overline{c}$; $\overline{d}$.

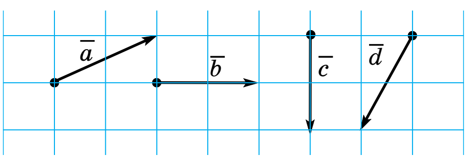
а) от произвольной точки строим вектор $\overline{a}$;

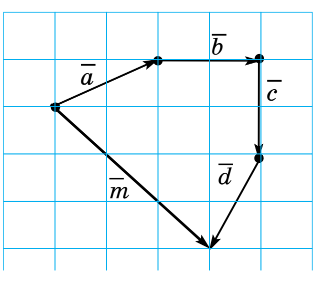
б) от конца вектора $\overline{a}$ строим вектор $\overline{b}$;

в) от конца вектора $\overline{b}$ строим вектор $\overline{c}$;

г) от конца вектора $\overline{c}$ строим вектор $\overline{d}$;

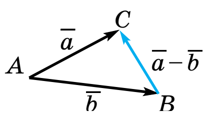
д) вектор-сумма $\overline{m}$ — его начало совпадает с началом вектора $\overline{a}$, конец — с концом вектора $\overline{d}$

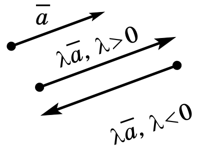




$$+\begin{array}{l} \overline{a}(2;\ 1) \\ \overline{b}(2;\ 0) \\ \overline{c}(0;\ -2) \\ \overline{d}(-1;\ -2) \\ \hline \overline{m}(3;\ -3) \end{array}$$

Разность векторов	
$\overline{a}(a_1;\ a_2) - \overline{b}(b_1;\ b_2) =$ $= \overline{c}(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2)$	$\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3) - \overline{b}(b_1;\ b_2;\ b_3) =$ $= \overline{c}(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)$

	$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$

Умножение вектора на число	
$\lambda \cdot \overline{(a_1;\ a_2)} = \overline{(\lambda a_1;\ \lambda a_2)}$	$\lambda \cdot \overline{(a_1;\ a_2;\ a_3)} = \overline{(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)}$
	При $\lambda < 0$ вектор $\lambda\overline{a}$ одинаково направлен с вектором $\overline{a}$. При $\lambda < 0$ вектор $\lambda\overline{a}$ противоположно направлен с вектором $\overline{a}$. $\lvert\lambda\overline{a}\rvert = \lvert\lambda\rvert \cdot \lvert\overline{a}\rvert$

Векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ коллинеарны

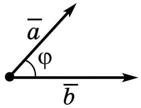
Если $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, то $\overline{b} = \lambda\overline{a}$	$\Leftrightarrow$	Если $\overline{b} = \lambda\overline{a}$, то $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — коллинеарны

Свойства действий над векторами

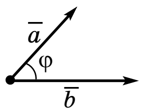
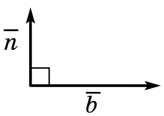
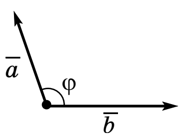
Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ и любых чисел γ и μ:

1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$;
2) $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$;
3) $\overline{a} + 0 = \overline{a}$;
4) $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-1) \cdot \overline{b}$;
5) $(\lambda + \mu)\overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a}$;
6) $\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$;
7) $0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$;
8) $\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$;
9) $\lvert\lambda\overline{a}\rvert = \lvert\lambda\rvert \cdot \lvert\overline{a}\rvert$;
10) $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{a}$;
11) $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{a}$

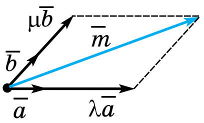
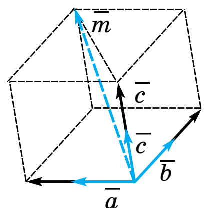
Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов на плоскости	Скалярное произведение векторов в пространстве
$\overline{a}(a_1; a_2)$; $\overline{b}(b_1; b_2)$ $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$	$\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$; $\overline{b}(b_1; b_2; b_3)$ $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
	**Теорема о скалярном произведении векторов** $\overline{a} \cdot \overline{b} = \lvert\overline{a}\rvert \cdot \lvert\overline{b}\rvert \cos\phi$, где φ — угол между векторами

Следствия из теоремы о скалярном произведении

Численное значение скалярного произведения характеризует величину угла между векторами:	
	$\overline{a} \cdot \overline{b} > 0 \Leftrightarrow 0° \le \varphi < 90°$ Угол между векторами — **острый**
	**Условие перпендикулярности векторов** $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$ Угол между векторами 90° (векторы перпендикулярны)
	$\overline{a} \cdot \overline{b} < 0 \Leftrightarrow 90° < \varphi < 180°$ Угол между векторами — **тупой**
Косинус угла между векторами вычисляется по формуле: $\cos\phi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert \cdot \lvert\overline{b}\rvert}$	

Разложение вектора

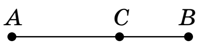
<table>
<tr>
<td>На плоскости: по двум неколлинеарным векторам</td>
<td>В пространстве: по трём неколлинеарным векторам</td>
</tr>
<tr>
<td>$\overline{m}$ — произвольный вектор плоскости;
$\overline{a}$ и $\overline{b}$ — неколлинеарные векторы.
Всегда существует разложение:
$$\overline{m} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b},$$
где λ и μ — единственные числа

</td>
<td>$\overline{m}$ — произвольный вектор пространства;
$\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — некомпланарные (т. е. не параллельные одной плоскости) векторы.
Всегда существует разложение:
$$\overline{m} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c},$$
где λ, μ и ν — единственные числа

</td>
</tr>
<tr>
<td>Векторы $\overline{a}(a_1; a_2)$ и $\overline{b}(b_1; b_2)$ неколлинеарны, если
$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$$</td>
<td>Условие компланарности векторов
Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ — компланарны, если
$\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$, где $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$</td>
</tr>
</table>

Векторный метод для решения геометрических задач

Этапы векторного метода:
1) сформулировать задачу на языке векторов;
2) преобразовать составленные равенства на основании векторных соотношений;
3) перевести полученные результаты на язык геометрии.

Рассмотрим примеры использования векторного языка для формулирования некоторых геометрических утверждений

Окончание таблицы

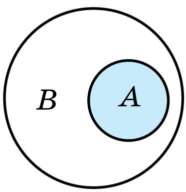
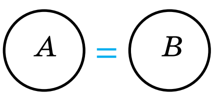
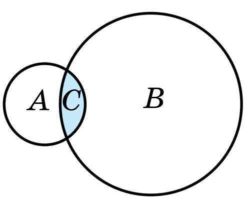
На геометрическом языке	На векторном языке
$a \parallel b$	$\overline{AB} = k\overline{CD}$, где отрезки AB и CD принадлежат соответственно прямым a и b, k — число
Точки A, B и C принадлежат прямой a	Установить справедливость равенства: $\overline{AB} = k\overline{BC}$ или $\overline{AC} = k\overline{BC}$, или $\overline{AC} = k\overline{AB}$
 $AC:AB = m:n$	$\overline{AC} = \frac{m}{n}\overline{CB}$ или $\overline{QC} = \frac{n}{m+n}\overline{QA} + \frac{m}{m+n}\overline{QB}$ для некоторой точки Q
$a \perp b$	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$, где точки A и B принадлежат прямой a, а точки C и D — прямой b
Вычислить длину отрезка	а) выбрать два неколлинеарных вектора, у которых известны длины и угол между ними; б) разложить по ним вектор, длина которого вычисляется; в) найти скалярный квадрат этого вектора: $\overline{a}^2 = \lvert\overline{a}\rvert^2$
Вычислить величину угла	а) выбрать два неколлинеарных вектора, для которых известно отношение длин и углы между ними; б) выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам; в) вычислить $\cos(\overline{a}; \overline{b}) = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert \cdot \lvert\overline{b}\rvert}$

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

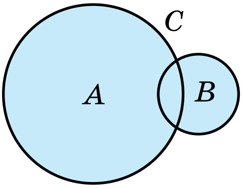
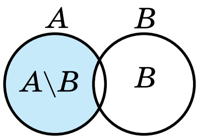
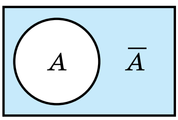
6

6.1. Элементы комбинаторики

Понятие множества и его элементов

<table>
<tr><td>Множество — совокупность некоторых объектов, объединённых по определённому признаку.</td><td>Элемент a принадлежит множеству $A \Leftrightarrow a \in A$.
Элемент b не принадлежит множеству $A \Leftrightarrow b \notin A$.
В множестве нет элементов $\Leftrightarrow \varnothing$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Подмножество ($\subset$)</td></tr>
<tr><td></td><td>$A \subset B \Leftrightarrow$ Если $x \in A$, то $x \in B$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Равенство множеств (=)</td></tr>
<tr><td></td><td>Если $x \in A$, то $x \in B$
Если $x \in B$, то $x \in A$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Пересечение множеств ($\cap$)</td></tr>
<tr><td></td><td>$C = A \cap B$
$x \in C \Rightarrow x \in A$ и $x \in B$</td></tr>
</table>

Окончание таблицы

Объединение множеств (∪)	
	$A \cup B = C$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$
Разность множеств (\\)	
	$C = A \setminus B$ $x \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$
Дополнение множеств	
	$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$

Простейшие комбинаторные задачи: перебор вариантов, правило суммы и произведения	
В простейших комбинаторных задачах осуществляют перебор всех возможных комбинаций и строится **дерево возможных вариантов**	
Поочерёдный и одновременный выбор	
Правило суммы (одновременный выбор)	**Правило произведения (поочерёдный выбор)**
Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами, то A или B можно выбрать $m+n$ способами	Если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то A и B можно выбрать $m \cdot n$ способами

Окончание таблицы

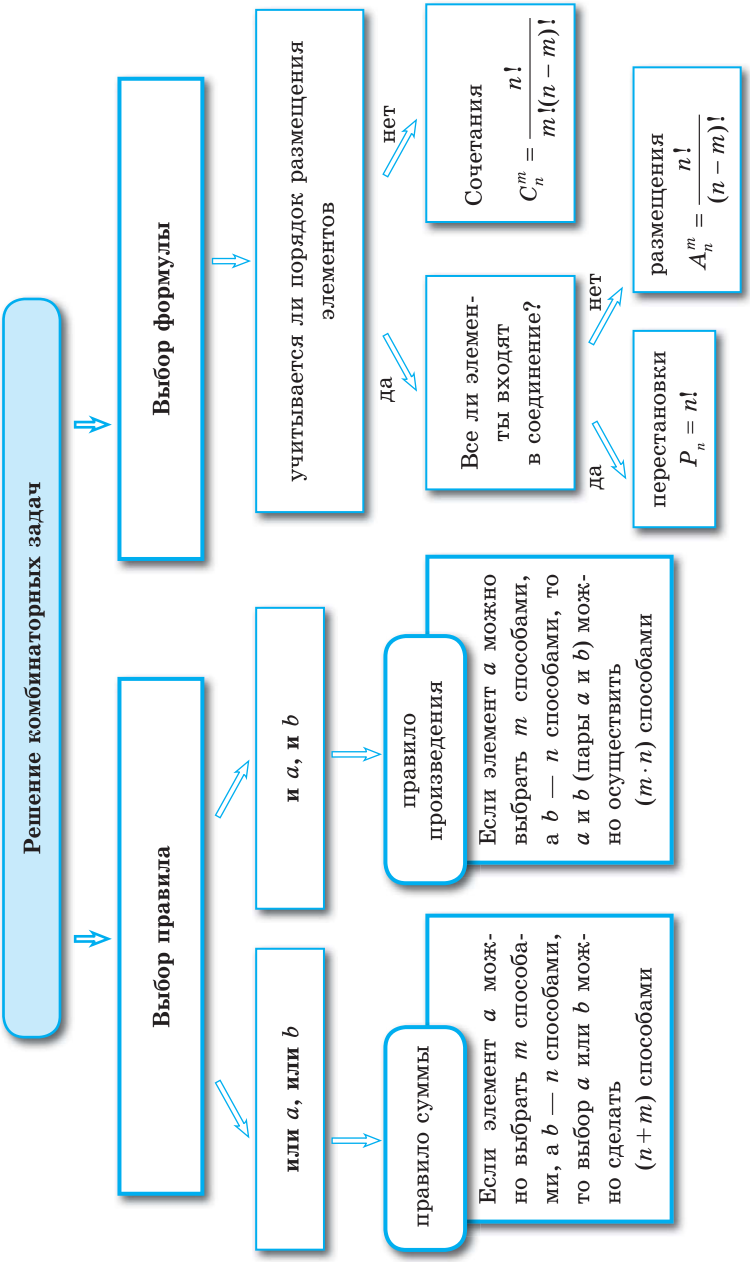
В комбинаторных задачах изучаются способы выбора и размещения элементов конечного множества. Такие группы элементов называют **соединениями**

Соединения

⇓ ⇓

Все элементы полученного множества разные	Элементы полученного множества повторяются
⇓	⇓
Соединения без повторений	Соединения с повторениями

Основные виды соединений без повторений	
Перестановка из n элементов (различают порядком следования элементов)	$P_n = n!$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ факториал $0! = 1$
Размещения из n элементов по m (различаются или порядком, или элементами)	$A_n^m = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
Сочетания из n элементов по m (отличаются лишь элементами)	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{A_n^m}{P_m}$; $C_n^0 = 1$. **Свойство сочетания** $C_n^m = C_n^{n-m}$


Решение комбинаторных задач
Выбор правила
Выбор формулы
или a, или b
и a, и b
правило суммы
Если элемент a можно выбрать m способами, а b — n способами, то выбор a или b можно сделать $(n+m)$ способами
правило произведения
Если элемент a можно выбрать m способами, а b — n способами, то a и b (пары a и b) можно осуществить $(m \cdot n)$ способами
учитывается ли порядок размещения элементов
да
нет
Все ли элементы входят в соединение?
да
нет
Сочетания $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
перестановки $P_n = n!$
размещения $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Бином Ньютона

Двучлен вида $a+x$ называют биномом	**Треугольник Паскаля**
$(a+x)^0 = 1;\ (a+x) \neq 0$	1
$(a+x)^1 = a+x$	1 1
$(a+x)^2 = a^2+2ax+x^2$	1 2 1
$(a+x)^3 = a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$	1 3 3 1
$(a+x)^4 = a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4$	1 4 6 4 1
$(a+x)^5 = a^5+5a^4x+10a^3x^2+$ $+10a^2x^3+5ax^4+x^5$	1 5 10 10 5 1

Общая формула бинома Ньютона

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}x + C_n^2a^{n-2}x^2 + C_n^3a^{n-3}x^3 + \ldots +$$
$$+ \ldots + C_n^ka^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1}ax^{n-1} + x^n$$

Общий член разложения

$T_{n+1} = C_n^ka^{n-k}x^k$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n)$.

C_n^k называют **биномиальными коэффициентами**

Свойства биномиальных коэффициентов

Число биномиальных коэффициентов (a равно n слагаемых в разложении) равно $n+1$	Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$
Коэффициенты членов, равноудалённых от начала и конца разложения, равны между собой: $C_n^k = C_n^{k-1}$	Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на чётных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечётных местах

6.2. Элементы статистики

Табличное и графическое представление данных (схема)

Основные статистические характеристики (числовые характеристики рядов данных)

Ранжирование ряда чисел. Чтобы вычислять статистические характеристики, ряд чисел, полученных в результате сбора данных, надо ранжировать, т. е. расположить числа в порядке **неубывания** (каждое следующее число не меньше предыдущего)	
Числовые характеристики рядов данных	
Размах (R) — разница между наибольшим и наименьшим значением ряда чисел. Размах находят, если необходимо определить, как велик разброс данных в ряду	**Среднее значение ряда чисел** (среднее арифметическое) — частное от деления суммы этих чисел на количество слагаемых. **Среднее значение** — это значение величины, которое получается, если сумма всех наблюдаемых значений распределяется поровну между единицами наблюдения
Мода (Mo) — число, которое встречается в данном ряду чаще всего	**Медиана** — так называемое серединное значение ранжированного ряда чисел:
Ряд чисел может иметь более одной моды или не иметь её совсем. Моду ряда чисел находят, когда хотят выяснить некоторый типичный показатель	а) если количество чисел в ряду **нечётное**, то медиана — это число, записанное посередине; б) если количество чисел в ряду **чётное**, то медиана — это среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине

6.3. Элементы теории вероятностей

Виды событий

Событие	Определение	Обозначение
Случайное	Событие, которое может случиться или не случиться в результате эксперимента	A, B, C, ...
Достоверное	Событие, которое вследствие эксперимента обязательно случится	V
Невозможное	Событие, которое вследствие эксперимента не может случиться	$\varnothing$

События	Определение
Совместимые	Появление одного из них не исключает появление другого
Несовместимые	Появление одного из них исключает появление другого
Равновозможные	События, каждое из которых не имеет никакого преимущества в появлении чаще других во многократных испытаниях, проводящихся в одинаковых условиях
Полная группа	Результатом испытаний обязательно становится одно и только одно из этих событий
Элементарные	Равновозможные события, попарно несовместимые и образующие полную группу событий

Вероятность случайного события

Классическое определение вероятности

Вероятность $P(A)$ случайного события A — это **отношение** числа событий, которые способствуют событию A, к общему количеству пространства элементарных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

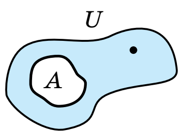
n — число всех событий пространства;
m — число событий пространства, способствующих событию A

Событие	Его вероятность $P(A)$
Невозможно	$P(A) = 0$
Случайно	$0 < P(A) < 1$
Вероятно	$P(A) = 1$

Статистическое определение вероятности

Статистическая вероятность P(A)
Событие A — предел, к которому приближается относительная частота $\frac{m}{n}$ (n — количество всех испытаний серии, m — количество испытаний, в которых происходит событие A).
Появление события A при неограниченном увеличении числа всех испытаний:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$$

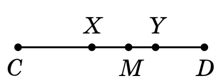


U — площадь фигуры на плоскость; $S(U)$ — площадь фигуры U;
A — часть фигуры U ($A \subset U$); $S(A)$ — площадь фигуры A. Событие A — попадание точек U в фигуру A

Геометрическое определение вероятности

Геометрической вероятностью события A называется отношение площади фигуры, благоприятствующей событию A, к площади всей заданной фигуры:

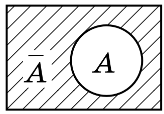
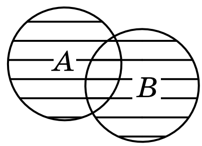
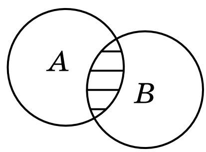
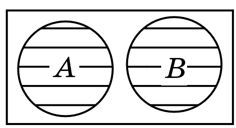
$$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}$$



Если событие A — попадание точки M на отрезок XY при бросании её наугад на отрезок CD ($XY \subset CD$), то

$$P(A) = \frac{xy}{CD}$$

Операции над событиями

Определение	Теоретико-множественная иллюстрация
Противоположное событие	
Событие $\overline{A}$ называется **противоположным** событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A. Вероятность противоположного события: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	U — достоверное событие $P(U) = 1$ 
Сумма событий	
Суммой (или объединением) событий A **и** B называется событие $A+B$ (или $A \cup B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходит событие A или событие B	 $A+B$ или $A \cup B$
Произведение событий	
Произведением (или пересечением) событий A **и** B называется событие $A \cdot B$ (или $A \cap B$), которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B	 $A \cdot B$ или $A \cap B$
Несовместные события	
Два события A и B называются **несовместными**, если их произведение является невозможным событием, т. е. $A \cdot B = \varnothing$ (или $A \cap B = \varnothing$)	 $A \cdot B = \varnothing$
Вероятность суммы двух несовместных событий	
Если события A и B несовместные, то $P(A+B) = P(A)+P(B)$	

Вероятность сложных событий

Теоремы сложения вероятностей

Событие A и B совместимы

нет ⇓

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

⇓ да

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

Следствия сложения вероятностей

Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n, которые образуют полную группу и попарно несовместимы, равна 1: $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) = 1$	Сумма вероятностей **противоположных** событий равна 1: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Теоремы умножения вероятностей

Два события **зависимы**, если вероятность одного из них зависит от появления или непоявления другого.

События A и B зависимы

нет ⇓

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B)$$

⇓ да

$$P(AB) = P(A)\cdot P(BA)$$

Следствия теоремы умножения

Вероятность осуществления по крайней мере одного из n независимых событий A_1, A_2, ..., A_n можно вычислить по формуле: $P(A) = 1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))\ldots(1-P(A_n))$	Если события A_1, A_2, ..., A_n имеют одинаковую вероятность, которая равна p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна: $P(A) = 1-q^n$, где $q = 1-p$

Справочное издание
анықтамалық баспа

Для старшего школьного возраста
мектеп жасындағы ересек балаларға арналған

ВЕСЬ ШКОЛЬНЫЙ КУРС В СХЕМАХ И ТАБЛИЦАХ

Третьяк Ирина Владимировна

МАТЕМАТИКА
(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова.* Художественный редактор *Е. Брынчик*

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел. 8 (495) 411-68-86, 8 (495) 956-39-21.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел. 8 (495) 411-68-86, 8 (495) 956-39-21
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды қабылдаушының өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8(727) 2 51 59 89,90,91,92, факс: 8 (727) 251 58 12 вн. 107; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Оптовая торговля книгами «Эксмо»:
ООО «ТД «Эксмо». 142700, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное,
Белокаменное ш., д. 1, многоканальный тел. 411-50-74.
E-mail: **reception@eksmo-sale.ru**
По вопросам приобретения книг «Эксмо» зарубежными оптовыми покупателями *обращаться в отдел зарубежных продаж ТД «Эксмо»*
E-mail: **international@eksmo-sale.ru**
International Sales: International wholesale customers should contact Foreign Sales Department of Trading House «Eksmo» for their orders.
international@eksmo-sale.ru
По вопросам заказа книг корпоративным клиентам, в том числе в специальном оформлении, *обращаться по тел. +7(495) 411-68-59, доб. 2261, 1257.*
E-mail: **vipzakaz@eksmo.ru**
Оптовая торговля бумажно-беловыми и канцелярскими товарами для школы и офиса «Канц-Эксмо»: Компания «Канц-Эксмо»: 142702, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное-2,
Белокаменное ш., д. 1, а/я 5. Тел./факс +7 (495) 745-28-87 (многоканальный).
e-mail: **kanc@eksmo-sale.ru**, сайт: www.**kanc-eksmo.ru**

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ о техническом регулировании можно получить по адресу: http://eksmo.ru/certification/

Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылмаған

Подписано в печать 26.05.2014. Произведено 02.06.2014.
Формат 84х108 $^{1}/_{32}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,44.
Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-699-71188-8

12+

ВЕСЬ ШКОЛЬНЫЙ КУРС В СХЕМАХ И ТАБЛИЦАХ

Вся школьная программа по математике представлена в виде структурно-логических схем и таблиц. Это позволит быстро усвоить большой объем информации и значительно сэкономить силы и время при подготовке к урокам и экзаменам.

ИЗДАНИЕ ПОДГОТОВЛЕНО В СООТВЕТСТВИИ С СОВРЕМЕННЫМИ ТРЕБОВАНИЯМИ ШКОЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ.

ИЗДАНИЕ ПОМОЖЕТ:

- облегчить понимание сложных формул, понятий, определений;
- повторить изученный материал;
- обобщить и систематизировать знания;
- эффективно подготовиться к ГИА, ЕГЭ.

ISBN 978-5-699-71188-8