РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

С. В. Мациевский

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ

Учебное пособие

Издательство
Российского государственного университета им. И. Канта
2010

УДК 51(075)
ББК 22.11я73
М 367

Рецензенты:
доцент кафедры высшей математики КГТУ
канд. физ.-мат. наук *А. А. Юрова*

Мациевский С. В.
М 367 Высшая математика для гуманитариев: учебное пособие.— Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2010.— 299 с.: ил., табл.

ISBN 978-5-9971-0040-7

Это учебное пособие по математике для нематематиков, особенно для тех, кому трудно дается математика.

Материал книги принципиально ограничен; читателю предложены только двенадцать базовых тем высшей математики, образующих не только часто цитируемую часть мировой культуры, но и встречающихся в математических курсах высшей школы для гуманитариев, в частности, в виде Интернет-экзамена. Кроме того, затронуты такие важные области, как искусственный интеллект в виде логического резолютивного вывода (на примере задач Льюиса Кэрролла) и теория графов с топологией.

Сведения, почерпнутые из этого издания, способствуют не только росту в математической и любой профессиональной области, но и расширению кругозора, увеличению точек соприкосновения с другими людьми.

Не только жесткая структура книги и ограничения материала, но и подбор материала являются следствием многолетнего опыта, вкуса и образования автора.

Издание будет интересно и даже необходимо студентам гуманитарных специальностей и их преподавателям, в основном тех, кто считается наименее подготовленными к математическому курсу, поскольку математический материал адаптирован специально для них. Кроме того, оно полностью представляет государственную программу по математике для таких гуманитарных специальностей, а также Интернет-экзамен, по которому имеется практикум.

Книга адресована, кроме того, всем, кто интересуется основами математики.

Рецензии, замечания и предложения просьба направлять по электронному адресу автора matsievsky@newmail.ru.

УДК 51(075)
ББК 22.11я73

ISBN 978-5-9971-0040-7

Оглавление

Предисловие iv

Методические указания v

Глава 1. Числовая система и теория вероятностей 1
§ 1. Числовая система 3
§ 2. Комбинаторика 23
§ 3. Теория вероятностей 41
§ 4. Случайная величина 55

Глава 2. Теория множеств и математическая логика 69
§ 5. Множества и подмножества 71
§ 6. Операции на множествах, логические связки 85
§ 7. Логические модели утверждений 101
§ 8. Логический резолютивный вывод 117

Глава 3. Теория графов и топология 131
§ 9. Теория графов 133
§ 10. Планарные, раскрашенные и ориентированные графы 149
§ 11. Правильные многогранники 165
§ 12. Топология 181

Приложение. 2500 случайных чисел 199

Практикум по Интернет-экзамену 201

Литература 261

Указатели 285

Часть учебы, которую люди ценят,— это именно та часть, которая не приносит им никакой пользы, подобно сладостям — масса удовольствия, но не заменит еды.

Именно потому, что ученик столь низкого качества, учителю приходится повторять, расширять и увеличивать в размере то, что иначе ученик не заметил бы вовсе.

Идрис Шах. Наблюдения за покровом

Предисловие

Текст учебника не загроможден историческими и другими вербальными комиксами: ненужные экскурсы не только отвлекают от понимания материала, но и могут вызвать нежелательные на начальном этапе обучения ассоциации. Излагаемый материал не только чрезвычайно интересен сам по себе, но и, несмотря на предпринятые усилия, занимает достаточно большой объем.

Это теоретическое издание составлено из тех соображений, что его содержание не знакомо для большинства обучающихся. А так как для усвоения нового материала, как известно, требуется время, то автор не вправе рассчитывать, что читатель усвоит что-либо, кроме первоначальных понятий. Поэтому изложение ограничено исключительно основными понятиями без каких-либо расширений и углублений. Надо сказать, что соблюдение указанных ограничений и доставило автору наибольшие трудности.

Поскольку материалы книги могут быть использованы как для самостоятельного освоения математической грамотности, так и для работы с преподавателем, ответы на тесты и решения упражнений не приведены.

В каждом параграфе присутствуют упражнения, которые распределены между 16 вариантами. Это сделано для того, чтобы занятия можно было проводить в группах.

В тексте все определяемые понятия набраны курсивом, хорошо проиллюстрированы и имеют заголовок. Кроме того, имеется подробный указатель терминов. Поэтому вопрос о глоссарии не актуален.

Нумерация в тексте сплошная: рисунки, таблицы и теоремы нумеруются подряд одной сплошной нумерацией. В каждом параграфе своя нумерация. Параграф представляет собой законченную тему и занимает при изложении в неторопливой интерпретации от двух до четырех академических часов. В каждом параграфе имеются упражнения на шестнадцать вариантов.

Идея принципиальной важности состоит в том, *что* мы включаем в наше изучение и *что* из него исключаем.

Идрис Шах. Знать как знать

Методические указания

Содержание курса

Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС)

Содержание курса практически покрывает математическую часть государственной программы по математике и информатике для гуманитариев. Приведем полностью ту часть государственной программы, которая регламентирует курс математики и информатики. Федеральные государственные образовательные стандарты (ФГОС) можно получить на сайте Министерства образования и науки Российской Федерации mon.gov.ru в меню Проекты.

> **ЕН.Ф. Федеральный компонент**
>
> ЕН.Ф.01. Математика и информатика
>
> *Аксиоматический метод, основные структуры, составные структуры, вероятности, языки и программирование, алгоритмы, компьютерный практикум.*

Математической части этой программы отвечает первая половина учебного пособия, первые шесть параграфов, занимающих страницы с 1 по 100.

Следующие шесть параграфов включают материал, не включенный в государственный стандарт, но, по мнению автора, необходимый для создания полной картины основ современной математики.

Очевидно, что федеральный государственный образовательный стандарт носит весьма расплывчатый характер, что до недавнего времени являлось благом: каждый преподаватель математики мог объяснять студентам тот материал, который считал нужным. Но в последние годы ситуация изменилась, появился Интернет-экзамен.

Федеральный экзамен в сфере высшего профессионального образования (ФЭПО)

В целях оказания помощи вузам при создании систем управления качеством подготовки специалистов на основе независимой внешней оценки Национальное аккредитационное агентство в сфере образования проводит Федеральный экзамен в сфере высшего профессионального образования (ФЭПО) в форме компьютерного Интернет-тестирования в части внешней оценки уровня подготовки студентов на соответствие требованиям ГОС.

ФЭПО не только существенно уточняет содержание учебной программы по математике для гуманитариев, но и вынуждает преподавателей тех вузов, которые участвуют в ФЭПО, готовить студентов к выполнению конкретных тестов Интернет-экзамена.

Приведем ту часть ФЭПО, которая регламентирует только математическую половину курса математики и информатики и содержит две дидактические единицы (ДЕ). Аккредитационные педагогические измерительные материалы (АПИМ) находятся на сайте федерального Интернет-экзамена в сфере профессионального образования www.fepo.ru в меню Методическая поддержка. Тестовые материалы.

Тематическая структура АПИМ

№ ДЕ	Наименование ДЕ ГОС	№ задания	Тема задания
1	Основания математики	1	Основные понятия теории множеств
		2	Основные операции над множествами. Диаграммы Эйлера — Венна
		3	Бинарные отношения
		4	Перестановки
		5	Основные операции над множествами
		6	Декартово произведение множеств
		7	Числовые множества. Принадлежность
		8	Высказывания. Основные операции над высказываниями. Повествовательные предложения
2	Теория вероятностей	9	Теоремы умножения вероятностей
		10	Дискретные случайные величины
		11	Нормальный закон распределения вероятностей
		12	Основные понятия теории вероятностей
		13	Свойства вероятностей
		14	Элементы теории вероятностей. Математика случайного

Аккредитационные педагогические измерительные материалы (АПИМ)

Тематическая структура АПИМ, конечно, гораздо более подробна, чем ФГОС. Однако она снова недостаточна для составления конкретной учебной программы. По названиям заданий невозможно догадаться о конкретном содержании тестовых заданий, которые могут быть предложены на Интернет-экзамене.

Разберем две первые математические ДЕ из тематической структуры АПИМ по темам их 14 заданий, учитывая конкретные тестовые задания. Варианты Интернет-тестов приведены в разделе Практикум по Интернет-экзамену в конце этого учебного пособия. По некоторым заданиям может наблюдаться некоторое разнообразие вопросов, а по некоторым заданиям не только нет разнообразия, но и само единственное задание выглядит натянутым.

1. Основные понятия теории множеств

1) Несколько конечных числовых множества заданы перечислением. Оценить принадлежность множеств друг другу.

2) Несколько конечных числовых множества заданы перечислением. Их элементами могут являться множества. Определить принадлежность множествам элементов.

3) Найти истинное высказывание на принадлежность элементов множествам.

4) Найти конечное множество среди заданных.

2. Основные операции над множествами. Диаграммы Эйлера — Венна

1) Одно конечное числовое множество задано перечислением, другое бесконечное числовое — описанием. Найти их пересечение.

2) Заданы два множества на числовой оси. Найти их объединение или пересечение.

3) Два произвольных множества обозначены буквами. Расположить в порядке включения множества, образованные пересечением и объединением данных множеств.

3. Бинарные отношения

Под бинарным отношением понимается неравенство. Требуется выбрать решение предложенного числового неравенства с двумя переменными.

4. Перестановки

1) Оценить количество перестановок разных букв, заданных в виде слова. Некоторые буквы могут фиксироваться на своих местах.

2) Оценить количество комбинаций букв, взятых из заданного слова. Количество букв в комбинациях меньше количества букв в слове.

3) Оценить количество перестановок букв, заданных в виде слова. Некоторые буквы совпадают.

4) Оценить количество множеств букв, взятых из заданного слова.

5. Основные операции над множествами

1) Заданы перечислением несколько конечных буквенных множества. Определить пересечение, объединение и разность этих множеств.

2) Найти таблицу истинности для заданного выражения из нескольких логических операций (конъюнкция, дизъюнкция и отрицание).

6. Декартово произведение множеств

Два конечных числовых множества определяются перечислением. Выбрать их декартово произведение из предложенных.

7. Числовые множества. Принадлежность

Простой вопрос на знание натуральных, целых, рациональных и действительных чисел.

8. Высказывания. Основные операции над высказываниями. Повествовательные предложения

Составление конъюнкции или дизъюнкции двух заданных высказываний.

9. Теоремы умножения вероятностей

1) Найти вероятность одновременного наступления двух вероятностных событий.

2) Если это задание на умножение вероятностей, то тогда и на сложение тоже. Игральная кость бросается два раза. Определить вероятность достаточно сложного события.

10. Дискретные случайные величины

1) Дан закон распределения. Найти математическое ожидание.

2) Выбрать правильную формулу дисперсии.

11. Нормальный закон распределения вероятностей

Из предложенных графиков выбрать график нормального распределения.

12. Основные понятия теории вероятностей

1) Выбрать случайную величину из предложенных. Остальные величины не случайные.

2) Расположить случайные события в порядке возрастания вероятностей.

3) Найти несовместные события.

13. Свойства вероятностей

Выбрать, чему не может быть равна вероятность.

14. Элементы теории вероятностей. Математика случайного

Восстановить одну вероятность в статистическом ряду.

Преподавание курса

Лекции

Для гуманитариев лекции по математике, конечно, лучше вычитывать в аудитории. Каждый параграф посвящен изложению одной темы, одной дидактической единицы и рассчитан на 2—4 академических часа. Параграфы разбиты на разделы, а разделы, в свою очередь — на пункты.

При желании часть материала можно опустить без нежелательных последствий. Если можно опустить весь пункт или даже раздел, то он помечен звездочкой. Если можно опустить часть пункта, то эта часть отделена от остального материала тремя звездочками. Обычно можно опускать часть материала, которая следует за тремя звездочками, но иногда бывает и наоборот. У преподавателя не возникнет трудностей, какую из двух частей пункта, разделенного тремя звездочками, можно опустить.

Рекомендуется проверять написание лекций студентами, сделав это одной из форм отчетности по курсу. Если лекция плохо законспектирована, то студент должен переписать лекцию. Поэтому рекомендуется все картинки и таблицы, которые студенты должны иметь в конспекте, рисовать на доске даже при наличии проектора.

При нехватке аудиторного времени часть лекций можно оставить на домашнее переписывание. Это будет вторая форма отчетности. Однако для лекций по математике это делать нежелательно. При домашнем переписывании необходимо требовать дословного переписывания без сокращений и перерисовыванием всех рисунков и всех таблиц.

Запись лекции должна быть также правильно оформлена. Вот основные правила записи лекций:

1) разборчивый почерк;

2) при домашнем конспектировании сокращать слова нельзя;

3) наличие полей со всех четырех сторон. Отводить поля необязательно, главное наличие пустого пространства;

4) заголовки не пишутся в низу страницы;

5) рисунки и таблицы, как и весь текст, должны быть аккуратными;

6) рисунки и таблицы рисовать обязательно, причем они не должны переноситься на другую страницу.

Упражнения

Решение студентами упражнений, расположенных в конце параграфов и большей частью распределенных по вариантам, является еще одной формой отчетности по курсу. Студентам необходимо переписать условие своего варианта и, если это необходимо, подробно расписать ход решения.

Желательно решать упражнения в аудитории на практических занятиях. Если это невозможно, то упражнения решаются студентами дома, преподаватель обеспечивает консультации. Разумеется, ответов на упражнения нет.

Практикум

В связи с наличием Интернет-экзамена, который проводится по остаточным знаниям на следующем курсе, необходим практикум по тем заданиям, которые могут встретиться при тестировании. Варианты для практикума находятся в конце учебного пособия. Практикум является еще одной — разовой — формой отчетности студентов по курсу.

Один из вариантов практикума приведен с решениями для его разбора в аудитории при наличии практических занятий. Если практические занятия не предусмотрены учебной программой, то студенты разбирают решения самостоятельно дома, при этом преподаватель обеспечивает их консультациями.

Задания практикума студенты выполняют самостоятельно либо в аудитории на практических занятиях, либо дома.

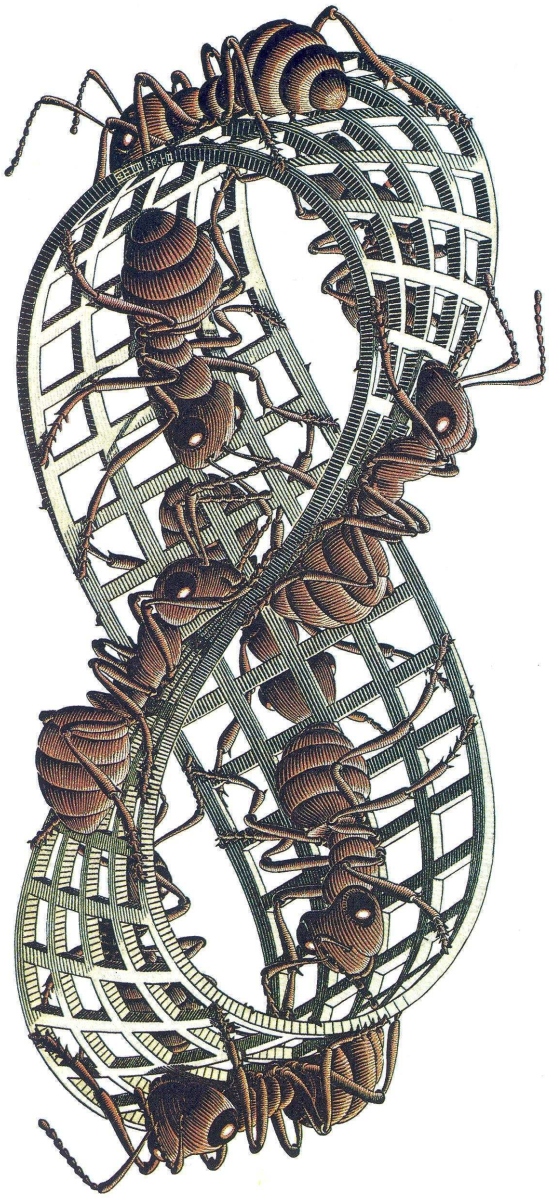
Разумеется, в связи с тестовым характером практикума ответы на задания отсутствуют.

За основу берем цифру, равную 3
(С 3 удобней всего начинать),
Приплюсуем сперва 842
И умножим на 75.
Разделив результат на 650
(Ничего в этом трудного нет),
Вычтем 100 без 5 и получим почти
Безошибочно точный ответ.

Льюис Кэрролл. Охота на Снарка
Перевод Григория Кружкова

Глава 1
Числовая система и теория вероятностей

n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6	C_n^7	C_n^8	C_n^9	C_n^{10}
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1



За экспериментом наблюдают три профессора: физики, биологии и математики. В пустой дом на холме заходят два человека, а выходят три.

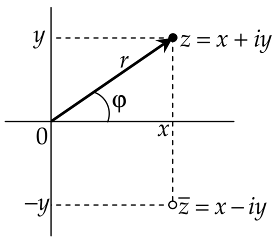
— Этого не может быть, поэтому это ошибка эксперимента,— сказал профессор физики.

— Напротив, коллега, это естественно,— возразил профессор биологии,— где двое, там и третий.

— Вы оба абсолютно ничего не понимаете,— объяснил профессор математики.— Сейчас в дом зайдет один человек, и там снова никого не будет.

Научный анекдот

§ 1. Числовая система



Оглавление

1. Дискретные числа 5
1°. Натуральные числа 5
2°. Целые числа 6
2. Всюду плотные счетные числа 9
1°. Рациональные числа 9
2°. Алгебраические числа 11
3°*. Биномиальные коэффициенты 13
3. Несчетные числа 14
1°. Действительные числа 14
2°. Комплексные числа 16
Тесты 19
Упражнения 22

Литература

Основная

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов / Пер. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова.— Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

Дополнительная

Азимов Айзек. В мире чисел. От арифметики до высшей математики.— М.: ЗАО Центрполиграф, 2004.

Гарднер М. Математические новеллы: 2-е изд., испр. и доп. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2000.

Гарднер М. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам / Пер. с англ.— М.: Мир, 1993.

Ключевые слова

Натуральное, целое, положительное, отрицательное, рациональное, дробное, алгебраическое, иррациональное, действительное, трансцендентное и комплексное число, дискретная, недискретная и непрерывная математика, свойства операций над числами, счетная бесконечность, бесконечность, биномиальный коэффициент, линейный, квадратичный и кубический бином, треугольник Паскаля, континуум, диагональный метод Кантора, мнимая единица, комплексная плоскость, сопряженное комплексное число, модуль комплексного числа.

1. Дискретные числа

1°. Натуральные числа

Один математик сказал, что целые числа создал господь бог, а всю остальную математику придумал человек.

Поэтому начнем изучение числовой системы с натуральных чисел. Просто определим натуральные числа.

Натуральное число.
Натуральные числа — это числа

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Натуральные числа обозначаются буквой $\mathbb{N}$, которую обычно пишут с двойными линиями.

Числа принято обозначать на числовой оси. На числовой оси натуральные числа рисуются следующим образом.

Рис. 1. Натуральные числа на числовой оси

Ясно виден *дискретный* характер натуральных чисел: они стоят далеко друг от друга на числовой оси. Другими словами, между соседними натуральными числами какие-либо натуральные числа отсутствуют. Собственно, именно благодаря дискретному характеру натуральных чисел можно говорить о соседних натуральных числах.

Математика бывает не только *дискретная*. Бывает также математика не дискретная и даже *непрерывная*.

Дискретная, недискретная и непрерывная математика.
Дискретная математика занимается изучением и моделированием дискретных объектов и дискретных свойств объектов, то есть свойств, связанных с целыми числами.

Недискретная математика занимается изучением и моделированием недискретных объектов и недискретных свойств объектов, геометрически состоящих из точек, между которыми всегда находятся другие точки.

Непрерывная математика изучает и моделирует непрерывные объекты и непрерывные свойства объектов, геометрически состоящих из точек, любая бесконечная последовательность которых сходится к некоторой точке объекта.

Недискретные и непрерывные числа будут рассмотрены далее.

Вернемся к натуральным числам.

Натуральные числа обладают тремя важными свойствами.

1. Следующее натуральное число больше предыдущего на 1.
2. Натуральных чисел бесконечно много.
3. Не существует самого большого натурального числа.

Самого большого натурального числа не существует, потому что к любому натуральному числу можно прибавить единицу и получить еще большее натуральное число. В дальнейшем свойства бесконечности, которую составляют натуральные числа, будут рассмотрены более подробно.

Рассмотрим, какие арифметические операции допускаются нал натуральными числами.

Над *любыми* натуральными числами можно производить только две операции: сложение и умножение. Математически это означает, что при сложении и умножении *любых* натуральных чисел получается снова натуральное число.

* * *

Эти две операции обладают следующими алгебраическими свойствами.

Свойства операций над числами.

1. *Ассоциативность* сложения и умножения чисел:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \ (ab)c = a(bc).$$

2. *Коммутативность* сложения и умножения чисел:

$$a + b = b + a, \ ab = ba.$$

3. Наличие *нуля* и *единицы*:

$$a + 0 = a, \ a\cdot 1 = a.$$

4. *Дистрибутивность* умножения относительно сложения чисел:

$$a(b + c) = ab + ac, \ (b + c)a = ba + ca.$$

Примеры.

1. Ассоциативность.

$$(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3) = 1 + 2 + 3 = 6, \ (2\cdot 3)4 = 2(3\cdot 4) = 2\cdot 3\cdot 4 = 23.$$

2. Коммутативность.

$$2 + 3 = 3 + 2 = 5, \ 2\cdot 3 = 3\cdot 2 = 6.$$

3. Нуль и единица.

$$2 + 0 = 2, \ 2\cdot 1 = 2.$$

4. Дистрибутивность.

$$2(3 + 4) = 2\cdot 3 + 2\cdot 4 = 14, \ (2 + 3)4 = 2\cdot 4 + 3\cdot 4 = 20.$$

Чтобы снова получить натуральные числа при двух остальных арифметических операциях, вычитании и делении, приходится:

1) при вычитании — вычитать из большего числа меньшее;

2) при делении — производить деление с остатком.

2°. Целые числа

Добавим новые числа таким образом, чтобы операция вычитания выполнялась над любыми новыми числами.

Для того, чтобы операцию вычитания можно было производить над *любыми* числами, добавим нуль и отрицательные числа.

Следует заметить, что понятие отрицательного числа совсем не очевидно: исторически в математике сначала появились дроби и даже вещественные положительные числа, и только потом — отрицательные.

Целое число.
Целые числа — это числа

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Целые числа обозначаются буквой $\mathbb{Z}$ с двойными линиями.

На числовой оси целые числа рисуются следующим образом:

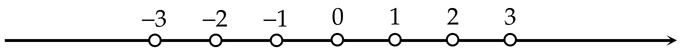


Рис. 2. Целые числа на числовой оси

Положительное и отрицательное число.
Целые числа распадаются на три части:
1) натуральные, то есть *положительные, числа*: 1, 2, 3, 4, …;
2) *нуль* 0;
3) *отрицательные числа*: –1, –2, –3, –4, ….

Натуральные числа входят в целые.
Изобразим три части целых чисел на рисунке 3.

Отрицательные числа	Нуль	Натуральные числа

Рис. 3. Три составные части целых чисел

То, что натуральные числа являются частью целых, можно изобразить так, как на рисунке 4.

Рис. 4. Натуральные числа как часть целых чисел

Целые числа, точно также как и натуральные, дискретны. В частности, существует понятие соседних целых чисел, и между соседними целыми числами целых чисел нет.

Возникает интересный вопрос: каких чисел больше: натуральных или целых? Ясно, что и тех, и тех бесконечно много. Но эти две бесконечности одинаковые или разные?

Определим ту бесконечность, которую образуют натуральные числа.

Счетная бесконечность.

Числа образуют *счетную бесконечность*, если их можно пересчитать натуральными числами. *Счетная бесконечность* обозначается $\aleph_0$ (первой буквой еврейского алфавита «áлеф» с нулем, читается «алеф-нуль»).

Ясно, что натуральные числа счетны, ведь они пересчитывают сами себя.

Теорема 5. Счетность целых чисел.

Целые числа счетны.

Доказательство. Целые числа пересчитываются, как показано на рисунке 6.

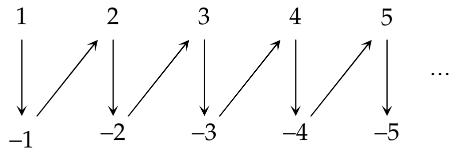


Рис. 6. Пересчет целых чисел

Другими словами, целые числа пересчитываются натуральными по следующей схеме:

Натуральные числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Целые числа	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4	5	–5	…

Итак, бесконечный набор целых чисел можно поставить во взаимно однозначное соответствие с бесконечным набором натуральных чисел. Бесконечности натуральных и целых чисел одинаковые.

Кроме того, получаем, что, в отличие от конечного набора, бесконечный набор может быть равновелик своей части, которая не совпадает со всем набором. Это свойство бесконечности может быть взято за ее определение.

Бесконечность.

Бесконечность равновелика своей части.

* * *

Над *любыми* целыми числами можно производить уже три операции: сложение, умножение и вычитание, то есть при сложении, умножении и вычитании *любых* целых чисел снова получается целое число. Поэтому, кроме четырех вышеперечисленных алгебраических свойств операции над целыми числами обладают пятым алгебраическим свойством.

Свойства операций над числами.

5. Наличие *противоположного числа*:

$$a + (-a) = 0.$$

Пример.

Противоположное число. $2 + (-2) = 0$.

2. Всюду плотные счетные числа

1°. Рациональные числа

Целые числа допускают только три операции сложения, умножения и вычитания и не допускают деления. Расширим множество целых чисел так, чтобы можно было делить числа.

Чтобы на числах выполнялась оставшаяся арифметическая операция деления, исключая, конечно, деление на нуль, к целым числам добавляют дробные.

Рациональное число.

Рациональны числа — это числа

$$\ldots, -3, -\frac{1}{2}, -2, -1, 0, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \ldots$$

Рациональны числа обозначаются буквой $\mathbb{Q}$, которую чаще пишут с двойными палочками.

Рациональное число записывают также десятичной дробью, у которой количество десятичных цифр либо конечно, либо бесконечно с периодичностью цифр:

$$0 \equiv 0,\ 1 \equiv 1,\ 2 \equiv 2,\ \frac{1}{2} \equiv 0{,}5,\ \ 3 \equiv 3,\ \frac{1}{3} \equiv 0{,}3(3),\ \ \frac{2}{3} \equiv 0{,}6(6),\ \ \frac{3}{2} \equiv 1{,}5.$$

На числовой оси рациональные числа рисуются как на рисунке 7.

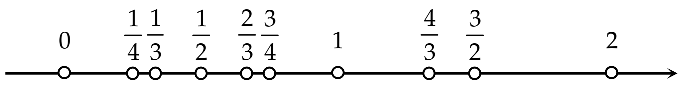


Рис. 7. Рациональные числа на числовой оси

Целые числа являются частью рациональных. Поэтому рациональные числа распадаются на две части:

1) целые числа;

2) *дробные числа*.

Дадим определение дробного числа.

Дробное числа.

Дробное число — это нецелое рациональное число.

Изобразим две части рациональных чисел на рисунке 8.

Дробные числа	Целые числа

Рис. 8. Две составные части рациональных чисел

То, что целые числа являются частью рациональных, можно изобразить также и так, как показано на рисунке 9.

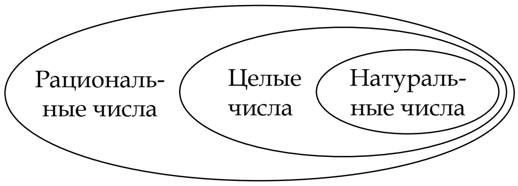


Рис. 9. Натуральные числа как часть целых как часть рациональных чисел

Разумеется, рациональных чисел также бесконечно много. Но больше ли, чем натуральных?

Теорема 10. Счетность рациональных чисел.

Набор рациональных чисел счетен.

Доказательство. Запишем любое рациональное число в виде отношения целого и целого положительного чисел, как это показано на рисунке 12. Так записанные рациональные числа легко пересчитать.

В итоге пересчитаем даже больше, чем все рациональные числа, поскольку на рисунке 11 каждое рациональное число присутствует бесконечное количество раз.

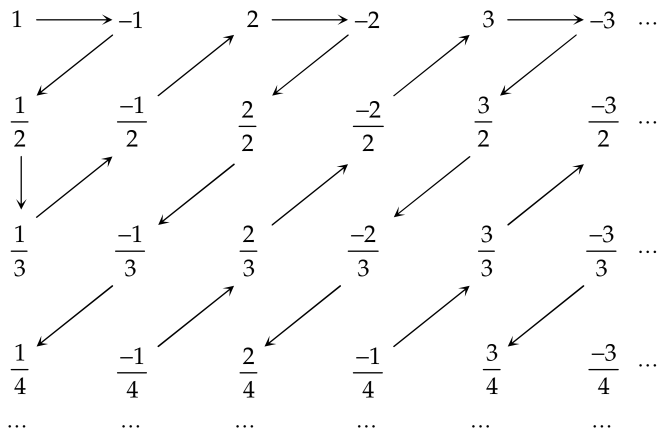


Рис. 11. Пересчет рациональных чисел

Рациональные числа существенно отличаются от целых одним свойством. Рациональные числа, в отличие от целых, *не дискретны*.

Теорема 12. Плотность рациональных чисел.

Рациональные точки расположены на числовой оси всюду плотно.

Доказательство. Между любыми двумя рациональными числами a и b всегда содержится среднее арифметическое a и b — рациональное число $\dfrac{a+b}{2}$.

Рациональные числа всюду плотны, но бесконечная последовательность этих чисел далеко не всегда сходится к рациональному числу.

Примеры.

1. Бесконечная последовательность рациональных чисел, сходящаяся к рациональному числу (количество девяток после нуля неограниченно увеличивается).

$$0;\ 0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ 0{,}9999;\ \ldots \to 1.$$

2. Бесконечная последовательность рациональных чисел, не сходящаяся к рациональному числу (количество знаков числа π неограниченно увеличивается).

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots \to \pi.$$

* * *

Операции над рациональными числами обладают, кроме вышеназванных пяти, следующим шестым свойством.

Свойства операций над числами.

6. Наличие *обратного числа* при $a \neq 0$:

$$aa^{-1} = 1.$$

Пример.

Обратное число. $2 \cdot 2^{-1} = 1$.

2°. Алгебраические числа

Получили, что рациональные числа замкнуты относительно четырех арифметических операций. Результатом арифметической операции над *любыми* рациональными числами снова является рациональное число (кроме деления на 0).

Расширим набор используемых операций. Рассмотрим нахождение корней многочленов с целыми коэффициентами.

Какими свойствами обладают корни многочленов? Только у многочленов первой степени все корни являются рациональными числами.

Теорема 13. Корень многочлена 1-й степени рационален. Многочлен первой степени с целыми коэффициентами имеет один рациональный корень.

Доказательство. Многочлен первой степени с целыми коэффициентами $ax + b$, причем обязательно $a \neq 0$, имеет один рациональный корень $-b/a$.

У многочленов 2-й степени и выше бывают не рациональные корни.

Примеры.

Многочлен 1-й степени $x - 1$ имеет рациональный корень 1.

Многочлен 2-й степени $x^2 - 2$ имеет не рациональный корень $\sqrt{2}$.

Теорема 14. Иррациональность корня из двух.

Число $\sqrt{2}$ иррационально.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть $\sqrt{2}$ рационален. Тогда $\sqrt{2} = n/m$, причем целые числа n и m являются *несократимыми*.

Следовательно, $2m^2 = n^2$, и тогда n делится на 2. Поэтому n можно записать в виде $n = 2k$, где k — целое число.

Но тогда из $2m^2 = n^2$ следует $2m^2 = 4k^2$, или $m^2 = 2k^2$. Но отсюда следует, что и m, как и n, делится на 2.

Получили противоречие: несократимая дробь n/m сократима на 2.

Алгебраическое число.

Алгебраическим числом называется корень многочлена любой степени с целыми коэффициентами.

Рациональные числа являются частью алгебраических, которые распадаются на две части:

1) рациональные числа;

2) *иррациональные числа*.

Изобразим две части алгебраических чисел на рисунке 15.

Иррациональные числа	Рациональные числа

Рис. 15. Две составные части алгебраических чисел

То, что рациональные числа являются частью алгебраических, можно изобразить также и так, как показано на рисунке 16.

Рис. 16. Натуральные числа как часть целых как часть рациональных как часть алгебраических чисел

Иррациональное число.

Любые числа, которые не являются рациональными, называются *иррациональными*.

Примеры.

Примеры иррациональных алгебраических чисел: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}$.

Нарисуем на числовой оси алгебраические числа.

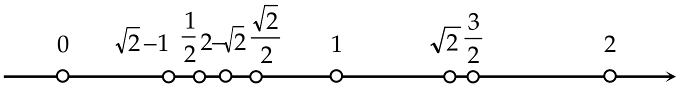


Рис. 17. Алгебраические числа на числовой оси

Алгебраические числа, также как и рациональные, замкнуты относительно четырех арифметических операций и для них выполняются все шесть свойств этих операций.

Если рациональные числа всюду плотны, то алгебраические тем более, поскольку рациональные числа являются частью алгебраических.

Следующую теорему примем без доказательства, хотя пересчитать все корни всех многочленов не составляет особого труда.

Теорема 18. Счетность алгебраических чисел.
Множество алгебраических чисел счетно.

3°*. Биномиальные коэффициенты

Раз уж речь зашла о многочленах, изучим один важный случай их построения, пи котором получаются *биномиальные коэффициенты*.

Биномиальный коэффициент.
Биномиальные коэффициенты — это коэффициенты многочлена, который получается после возведения *бинома* $x + y$ в целую положительную степень n и приведения подобных: $(x + y)^n$.

Линейный, квадратичный и кубический бином.

1. Возведем наш бином в первую степень, имеем два следующих коэффициента *линейного бинома*: 1 и 1.

$$(x + y)^1 = x + y = 1x^1y^0 + 1x^0y^1.$$

2. Возведем наш бином во вторую степень, получим три коэффициента *квадратичного бинома*: 1, 2 и 1.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2.$$

3. Возведем наш бином в третью степень, это даст четыре коэффициента *кубического бинома*: 1, 3, 3 и 1.

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3.$$

4. В четвертой степени получаются следующие пять коэффициентов бинома четвертой степени: 1, 4, 6, 4 и 1:

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4.$$

Биномиальные коэффициенты для более высоких степеней бинома легко находятся, если воспользоваться следующей их простой закономерностью, которая является основой *треугольника Паскаля*.

Треугольник Паскаля.

Первые два числа *треугольника Паскаля* равны 1, крайние числа *треугольника Паскаля* равны 1, а внутренние числа *треугольника Паскаля* равны сумме ближайших двух чисел из предыдущего ряда, как изображено на рисунке 19.

n-й ряд треугольника Паскаля состоит из биномиальных коэффициентов для степени n, в которую возводится бином $x + y$: 1-й ряд — из коэффициентов линейного бинома, 2-й ряд — квадратичного, 3-й — кубического и т. д.

1-й ряд	1 1	1 1 — слагаемые
2-й ряд	1 2 1	2 — сумма
3-й ряд	1 3 3 1	…
4-й ряд	1 4 6 4 1	4 6 — слагаемые
5-й ряд	1 5 10 10 5 1	10 — сумма
6-й ряд	1 6 15 20 15 6 1	…
7-й ряд	1 7 21 35 35 21 7 1	21 35 — слагаемые
8-й ряд	1 8 28 56 70 56 28 8 1	56 — сумма
9-й ряд	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	…
10-й ряд	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1	
	…	

Рис. 19. Треугольник Паскаля

3. Несчетные числа

1°. Действительные числа

Действительное число.

Действительные, или вещественные, числа — это числа, соответствующие точкам вещественной координатной прямой (рис. 21).

Действительные числа обозначаются буквой $\mathbb{R}$ с двойными палочками.

Рис. 20. Действительные числа на числовой оси

Действительные числа замкнуты относительно всех четырех арифметических операций и для них выполняются все шесть свойств этих операций (кроме деления на 0).

Действительные числа распадаются на рациональные и иррациональные, а также на алгебраические и *трансцендентные*.

Трансцендентное число.

Трансцендентное число — действительное не алгебраическое число.

Примеры.

Примеры трансцендентных чисел: π, e, $\sin 1$, $\ln 2$, $2^{\sqrt{2}}$.

Изобразим на рисунке 21 две части действительных чисел, а на рисунке 22 — две другие части действительных чисел.

Иррациональные числа	Рациональные числа

Рис. 21. Две составные части действительных чисел

Трансцендентные числа	Алгебраические числа

Рис. 22. Две другие составные части действительных чисел

Ясно, что трансцендентное число иррационально. Разобьем действительные числа на три части, как на рисунке 23.

Трансцендентные числа (иррациональные)	Иррациональные алгебраические числа	Рациональные числа

Рис. 23. Три составные части действительных чисел

То, что алгебраические числа являются частью действительных, можно изобразить также и так, как показано на рисунке 24.

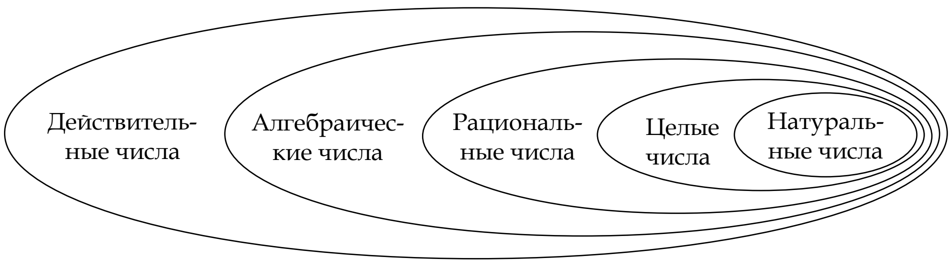


Рис. 24. Натуральные числа как часть целых как часть рациональных как часть алгебраических как часть действительных чисел

Континуум. Диагональный метод Кантора.

Множество действительных чисел *несчетно*, другими словами, является *континуумом*. *Несчетная бесконечность* обозначается $\aleph$.

Докажем несчетность действительных чисел знаменитым *диагональным методом Кантора*.

Разумеется, несчетны также иррациональных и трансцендентных числа, поскольку рациональные и алгебраические числа счетны.

Теорема 25. Несчетность действительных чисел.

Множество действительных чисел несчетно.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что оно счетно. Тогда множество действительных чисел в интервале (0, 1) тоже счетно как часть счетного, то есть можно составить их пересчитывающий список. Например, какой-нибудь такой:

Натуральные числа		Действительные числа
1	$\leftrightarrow$	0,**1**0357627183…
2	$\leftrightarrow$	0,1**4**329806115…
3	$\leftrightarrow$	0,02**1**66095213…
4	$\leftrightarrow$	0,430**0**5357779…
…	…	…

Жирным шрифтом выделены диагональные десятичные знаки. В данном примере это 1, 4, 1, 0, 0, … . Диагональный метод состоит в построении действительного числа в интервале (0, 1), отличающегося от всех чисел приведенной выше последовательности, что ведет к противоречию.

Пусть цифра разряда нового числа равна 1, если цифра соответствующего разряда на диагонали не равна 1, и равна 2, если равна 1. Получаем число

$$0{,}2121\ldots .$$

Это число отличается от первого числа в списке в 1-м десятичном разряде после запятой, от 2-го — во 2-м десятичном разряде, от 3-го — в 3-м и так далее. Это число отличается от всех чисел в списке и поэтому в список не входит. Противоречие с тем, что в список входят все действительные числа.

2°. Комплексные числа

Введем новое обозначение. Предположим, что двучлен $x^2 + 1$ имеет корень и обозначим корень этого двучлена через i.

Мнимая единица.

Число i называется *мнимой единицей*.

В итоге получаем квадратное уравнение $i^2 + 1 = 0$. Поэтому $i^2 = -1$.

С помощью мнимой единицы можно получить все комплексные числа.

Комплексное число.

Комплексные числа — действительные числа, к которым добавлены мнимая единица, а также все числа, полученные в результате всевозможных арифметических операций над ней и всеми действительными числами.

Комплексные числа обозначают $\mathbb{C}$, чаще записываемой с двойной дугой.

Любое комплексное число всегда можно представить в следующем *стандартном виде* $z = x + iy$, где x и y — действительные числа.

В этой записи число $x \equiv \operatorname{Re} z$ называется *действительной, или вещественной, частью* комплексного числа z, а $y \equiv \operatorname{Im} z$ — его *мнимой частью*.

Числа вида iy, когда $x = 0$, называются *чисто мнимыми*.

Получается, что действительные числа являются частным случаем комплексных при $y = 0$.

Интересно, что число 0 одновременно и действительное, и чисто мнимое.

Изобразим две части комплексных чисел на рисунке 26.

То, что действительные числа являются частью комплексных, можно изобразить также и так, как показано на рисунке 27.

Недействительные числа	Действительные числа

Рис. 26. Две составные части комплексных чисел

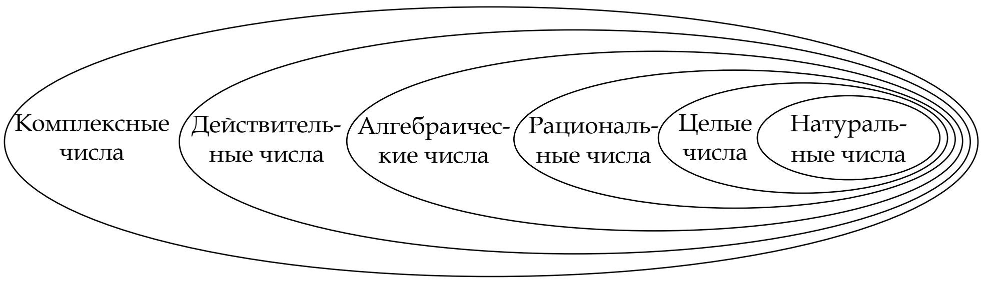


Рис. 27. Натуральные числа как часть целых как часть рациональных как часть алгебраических как часть действительных как часть комплексных чисел

Комплексные числа обладают еще одним замечательным и чрезвычайно важным свойством, которые мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 28. О с н о в н а я т е о р е м а а л г е б р ы.

Любой многочлен степени $n > 0$ с комплексными коэффициентами всегда имеет n комплексных (возможно совпадающих) корней.

Как эти числа представить геометрически?

К о м п л е к с н а я п л о с к о с т ь.

Комплексные числа суть точки плоскости $\mathbb{R}^2$ — *комплексной плоскости, или плоскости Аргана*. Действительные числа составляют *действительную, или вещественную, ось*, а чисто мнимые числа — *мнимую ось*.

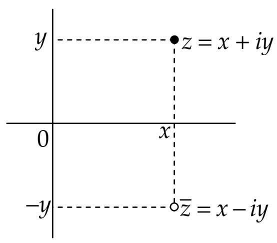


Рис. 29. Комплексная плоскость

Комплексная плоскость изображена на рисунке 29 вместе с точками $z = x + iy$ и $z = x - iy$.

Сопряженное комплексное число.
Сопряженные комплексные числа — это числа $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$ (рис. 29).

Замечательно, что сумма и произведение сопряженных чисел действительны:

$$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\operatorname{Re} z,$$

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2.$$

Мы получили в результате произведения действительное число $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$. Изобразим это число на комплексной плоскости на рисунке 30.

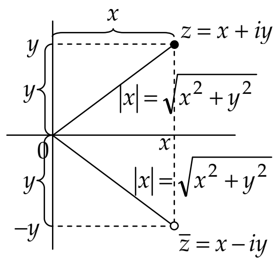


Рис. 30. Модуль комплексного числа

Модуль комплексного числа.
Квадратный корень из этого действительного числа $\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ называется *модулем, или абсолютной величиной, комплексного числа z*.

Обозначение: $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$.

Комплексные числа являются последним расширением чисел в следующем смысле:

1) выполняются все четыре арифметических операции над комплексными числами;

2) сохраняются все шесть свойств арифметических операций;

3) дальнейшее расширение комплексных чисел приводит к утрате отдельных свойств арифметических операций.

Примеры.
Пусть даны два комплексных числа $1 + i$ и $1 - i$.
Их единственная сумма $(1 + i) + (1 - i) = 1 + i + 1 - i = 2$.
Из этих двух чисел можно составить две разности:

$$(1 + i) - (1 - i) = 1 + i - 1 + i = 2i; \quad (1 - i) - (1 + i) = 1 - i - 1 - i = -2i.$$

Их единственное произведение $(1 + i) \times (1 - i) = 1 - i^2 = 1 - (-1) = 2$.

Из двух чисел составим два разных частных. Чтобы получить в знаменателе действительное число, используем число, сопряженное знаменателю.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i+i^2}{1-(-1)} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i;$$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{1-i^2} = \frac{1-2i+i^2}{1-(-1)} = \frac{1-2i-1}{2} = \frac{-2i}{2} = -i.$$

Тесты

1. Натуральные числа

1.1. Какое из следующих чисел минимально?

1) 2. 2) 4. 3) 6. 4) 12. 5) 13.

1.2. Какое из следующих чисел максимально?

1) 2. 2) 4. 3) 6. 4) 12. 5) 13.

1.3. Какое из следующих чисел в натуральной степени равно другому числу?

1) 2. 2) 4. 3) 8. 4) 12. 5) 13.

1.4. Какое число равно среднему арифметическому двух других ($c = \dfrac{a+b}{2}$)?

1) 2. 2) 4. 3) 8. 4) 12. 5) 13.

1.5. Какое число равно среднему геометрическому двух других ($c = \sqrt{ab}$)?

1) 2. 2) 4. 3) 8. 4) 12. 5) 13.

2. Целые числа

2.1. Какое число является отрицательным?

1) 1. 2) –3. 3) 5. 4) 7. 5) 35.

2.2. Какое из следующих чисел равно сумме трех других?

1) 1. 2) –3. 3) 5. 4) 7. 5) 35.

2.3. Какое из следующих чисел равно произведению двух других?

1) 1. 2) –3. 3) 5. 4) 7. 5) 35.

2.4. Какое число равно среднему гармоническому двух других ($c = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$)?

1) 1. 2) –3. 3) 5. 4) 7. 5) 35.

2.5. Какое число равно среднему квадратичному двух других ($c = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$)?

1) 1. 2) –3. 3) 5. 4) 7. 5) 35.

3. Рациональные числа

3.1. Какая последовательность рациональных чисел постоянна (состоит из одного и того же числа)?

1) 0,1; –0,01; 0,001; –0,0001; …

2) 2,7; 2,71; 2,718; 2,7182; 2,71828; …, где цифры берутся из бесконечного десятичного представления числа *e*.

3) –1; –1; –1; –1; –1; …

4) 1; 0; 0; 0; 0; …

5) 0; 1; 1; 1; 1; …

3.2. Какая последовательность рациональных чисел отрицательна (состоит только из отрицательных чисел)?

1) 0,1; –0,01; 0,001; –0,0001; …

2) 2,7; 2,71; 2,718; 2,7182; 2,71828; …, где цифры берутся из бесконечного десятичного представления числа *e*.

3) –1; –1; –1; –1; –1; …

4) 1; 0; 0; 0; 0; …

5) 0; 1; 1; 1; 1; …

3.3. Какая последовательность рациональных чисел знакопеременна (после положительного идет отрицательное число, после отрицательного — положительное)?

1) 0,1; –0,01; 0,001; –0,0001; …

2) 2,7; 2,71; 2,718; 2,7182; 2,71828; …, где цифры берутся из бесконечного десятичного представления числа *e*.

3) –1; –1; –1; –1; –1; …

4) 1; 0; 0; 0; 0; …

5) 0; 1; 1; 1; 1; …

3.4. Какая последовательность рациональных чисел, в которой нет двух одинаковых чисел, сходится к рациональному числу?

1) 0,1; –0,01; 0,001; –0,0001; …

2) 2,7; 2,71; 2,718; 2,7182; 2,71828; …, где цифры берутся из бесконечного десятичного представления числа *e*.

3) –1; –1; –1; –1; –1; …

4) 1; 0; 0; 0; 0; …

5) 0; 1; 1; 1; 1; …

3.5. Какая последовательность рациональных чисел не сходится к рациональному числу?

1) 0,1; –0,01; 0,001; –0,0001; 0,00001; …

2) 2,7; 2,71; 2,718; 2,7182; 2,71828; …, где цифры берутся последовательно из бесконечного десятичного представления числа *e*.

3) –1; –1; –1; –1; –1; …

4) 1; 0; 0; 0; 0; …

5) 0; 1; 1; 1; 1; …

4. Алгебраические числа

4.1. Какое число является натуральным?

1) –2. 2) 1/2. 3) $\sqrt{2}$. 4) 2. 5) π.

4.2. Какое число является отрицательным?

1) –2. 2) 1/2. 3) $\sqrt{2}$. 4) 2. 5) π.

4.3. Какое число является рациональным, но не целым?

1) –2. 2) 1/2. 3) $\sqrt{2}$. 4) 2. 5) π.

4.4. Какое число является алгебраическим, но не рациональным?

1) –2. 2) 1/2. 3) $\sqrt{2}$. 4) 2. 5) π.

4.5. Какое число не является алгебраическим?

1) –2. 2) 1/2. 3) $\sqrt{2}$. 4) 2. 5) π.

5. Биномиальные коэффициенты

5.1. Сколько чисел стоит во втором ряду треугольника Паскаля?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

5.2. Чему равно второй число в пятом ряду треугольника Паскаля?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

5.3. Какое число стоит на левой границе треугольника Паскаля?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

5.4. Какое число стоит на правой границе треугольника Паскаля?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

5.5. Чему равна сумма чисел первого ряда треугольника Паскаля?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

6. Действительные числа

6.1. Какое число является натуральным?

1) –2. 2) 1/2. 3) $\sqrt{2}$. 4) 2. 5) π.

6.2. Какое число является целым, но не натуральным?

1) –2. 2) 1/2. 3) $\sqrt{2}$. 4) 2. 5) π.

6.3. Какое число является рациональным, но не целым?

1) –2. 2) 1/2. 3) $\sqrt{2}$. 4) 2. 5) π.

6.4. Какое число является алгебраическим, но не рациональным?

1) –2. 2) 1/2. 3) $\sqrt{2}$. 4) 2. 5) π.

6.5. Какое число является трансцендентным?

1) –2. 2) 1/2. 3) $\sqrt{2}$. 4) 2. 5) π.

7. Комплексные числа

7.1. Какое число равно 1?

1) $-1 - 0i$. 2) $1 - 0i$. 3) $\sqrt{2}$. 4) $1 - 1i$. 5) $0 + 1i$.

7.2. Какое число равно –1?

1) $-1 - 0i$. 2) $1 - 0i$. 3) $\sqrt{2}$. 4) $1 - 1i$. 5) $0 + 1i$.

7.3. Какое число равно i?

1) $-1 - 0i$. 2) $1 - 0i$. 3) $\sqrt{2}$. 4) $1 - 1i$. 5) $0 + 1i$.

7.4. Какое число сопряжено с 1 +1i?

1) $-1 - 0i$. 2) $1 - 0i$. 3) $\sqrt{2}$. 4) $1 - 1i$. 5) $0 + 1i$.

7.5. Чему равен модуль 1 +1i?

1) $-1 - 0i$. 2) $1 - 0i$. 3) $\sqrt{2}$. 4) $1 - 1i$. 5) $0 + 1i$.

Упражнения

Даны три комплексных числа, n — номер варианта (от 1 до 16):

$$n + (n + 1)i,\ (n + 1) + ni,\ n - (n + 1)i.$$

Произведите указанные арифметические действия над комплексными числами. В результате следует получить комплексное число в стандартной записи $z = x + iy$.

1. Найдите все 3 разных сумм этих чисел.
2. Найдите все 6 разных разностей этих чисел.
3. Найдите все 3 разных произведений этих чисел.
4. Найдите все 6 разных частных этих чисел. Подсказка: чтобы избавиться от комплексного знаменателя, умножьте числитель и знаменатель дроби на число, комплексно сопряженное знаменателю. Не забудьте, что в результате следует получить комплексное число в стандартной записи $z = x + iy$.

§ 2. Комбинаторика

n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6	C_n^7	C_n^8	C_n^9	C_n^{10}
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Оглавление

1. Введение 25
1°. Прямое произведение 25
2°. Виды расстановок 26
2. Перестановки 28
1°. Перестановки без повторений 28
2°. Перестановки с повторениями 29
3. Размещения 31
1°. Размещения без повторений 31
2°. Размещения с повторениями 32
4. Сочетания 33
1°. Сочетания без повторений 33
2°*. Треугольник Паскаля 34
3°*. Связь перестановок с повторением и сочетаний 35
Тесты 37
Упражнения 40

Литература

Основная

Иванов Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы.— М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

Дополнительная

Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика.— М.: ФИМА, МЦНМО, 2006.

Болтянский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты.— М.: ФИМА, МЦНМО, 2002.

Ключевые слова

Прямое произведение, декартово произведение, координатная плоскость, комбинаторика, расстановка, перестановка, выборка, перестановка с повторением, перестановка без повторения, размещение с повторением, размещение без повторения, сочетание с повторением, сочетание без повторения, факториал, треугольник Паскаля.

1. Введение

1°. Прямое произведение

Пусть у нас есть два набора предметов: набор A и набор B.

Прямое, или декартово, произведение.

Прямым произведением двух наборов A и B называется набор всевозможных пар (a, b) такой, что a — это предмет из набора A, а b — предмет из набора B.

Прямое произведение называют также *декартовым произведением*.

Обозначение прямого произведения: $A \times B$.

Примеры.

1. Пусть набор A включает 4 конечности: I) левая рука; II) правая рука; III) левая нога; IV) правая нога, а набор B — 5 пальцев: 1) большой; 2) указательный; 3) средний; 4) безымянный; 5) мизинец.

Тогда в прямое произведение $A \times B$ входит 20 пар, как показано в таблице 1.

Таблица 1

Прямое произведение конечностей и пальцев

Конечности	Пальцы:				
	1) большой	2) указательный	3) средний	4) безымянный	5) мизинец
I) Левая рука	(I, 1)	(I, 2)	(I, 3)	(I, 4)	(I, 5)
II) Правая рука	(II, 1)	(II, 2)	(II, 3)	(II, 4)	(II, 5)
III) Левая нога	(III, 1)	(III, 2)	(III, 3)	(III, 4)	(III, 5)
IV) Правая нога	(IV, 1)	(IV, 2)	(IV, 3)	(IV, 4)	(IV, 5)

2. Посчитаем количество двузначных чисел.

Десятки двузначного числа берутся из набора 9 цифр 1, 2, …, 9, а единицы — из набора 10 цифр 0, 1, …, 9. Двузначные числа удобно рассматривать как прямое произведение этих наборов.

Получаем 90 двузначных чисел: 10, 11, 12, …, 98, 99.

3. Координатная плоскость.

Координатная плоскость, показанная на рисунке 2, является примером прямого произведения двух числовых осей. Другими словами, это произведение двух наборов вещественных чисел.

Координатная плоскость называется также *декартовой плоскостью*.

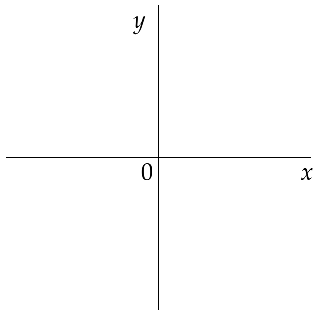


Рис. 2. Координатная плоскость

Достаточно очевидна следующая теорема, которая иллюстрируется первым примером.

Теорема 3. Если набор A состоит из n предметов, а набор B — из m предметов, то их прямое произведение $A \times B$ содержит $n \cdot m$ предметов.

2°. Виды расстановок

Комбинаторика.

Комбинаторика — вычисление количества комбинаций и закономерностей этого вычисления.

Терминология этого параграфа весьма условна в обычном, бытовом понимании. Другими словами, практически одинаковыми словами обозначаются совершено разные математические понятия. Разберемся с этой терминологией.

В этом параграфе будут рассмотрены только две области комбинаторики, связанные с перестановкой имеющихся предметов и выбором предметов из предложенного набора.

Назовем *расстановкой* все, чем мы будем заниматься в этом параграфе.

Расстановка.

Расстановка — расположение предметов в разном порядке.

Естественным образом расстановки распадаются на два вида: *перестановки* и *выборки*.

Перестановка. Выборка.

Перестановка — расстановка набора предметов в разном порядке.

Выборка — выбор нескольких образцов из набора предметов.

Переставлять можно набор предметов, в котором либо все предметы разные, либо могут попадаться одинаковые.

Перестановка с повторением и без.

Перестановка без повторения — расстановка набора предметов в разном порядке, причем все предметы разные.

Перестановка без повторения традиционно называется просто *перестановкой*.

Перестановка с повторением — расстановка набора предметов в разном порядке, причем могут попадаться одинаковые предметы.

Выборки можно разбить на два вида двумя разными способами:

1) при выборе предметов их можно располагать в определенном порядке, а можно рассматривать просто кучей;

2) при выборе из набора предметов каждый предмет может быть только в единственном экземпляре, а может быть в неограниченном количестве.

Итак, после прямого произведения двух пар выборок получаем четыре вида выборки.

Размещение и сочетание с повторением и без.
Выборка предметов с учетом порядка, причем каждый предмет имеется в единственном экземпляре, называется *размещением (без повторения)*.

Выборка предметов без учета порядка, причем каждый предмет имеется в единственном экземпляре, называется *сочетанием (без повторения)*.

Выборка предметов с учетом порядка, причем каждый предмет имеется в неограниченном количестве, называется *размещением с повторением*.

Выборка предметов без учета порядка, причем каждый предмет имеется в неограниченном количестве, называется *сочетанием с повторением*.

Сводя к одной схеме рассмотренные виды расстановок, получаем следующий алгоритм решения задачи. Схематично алгоритм показан на рисунке 5.

Алгоритм 4. Определение вида расстановки
1. Если предметы переставляются, переходим на 2, если выбираются — на 3.

2. Если предметы повторяются, подсчитываем количество перестановок, если не повторяются — количество перестановок с повторением.

3. Если порядок есть, переходим на 4, если нет — на 5.

4. Если предметы повторяются, подсчитываем количество размещений, если не повторяются — количество размещений с повторением.

5. Если предметы повторяются, подсчитываем количество сочетаний, если не повторяются — количество сочетаний с повторением.

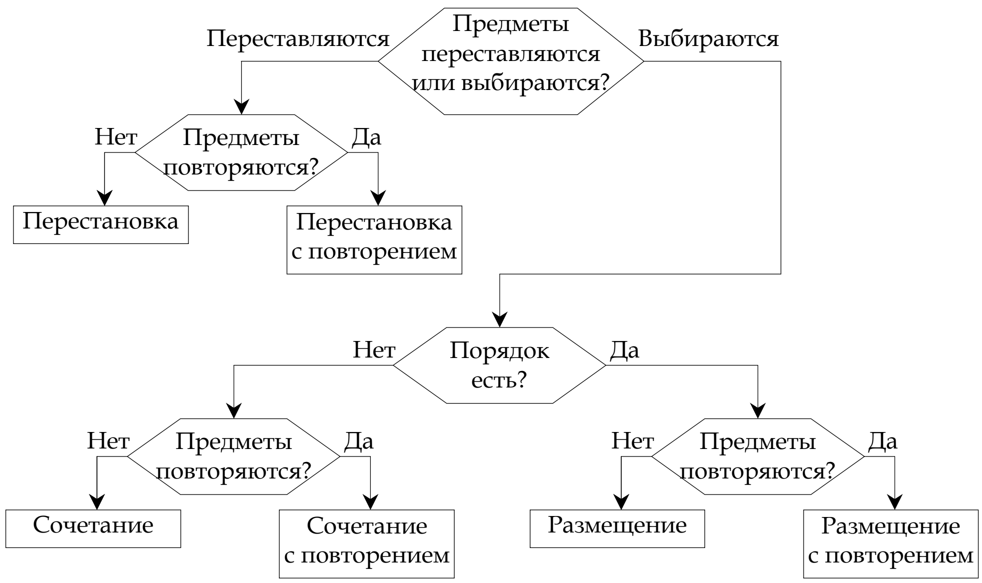


Рис. 5. Алгоритм определения вида расстановки, к которой сводится предложенная задача

2. Перестановки

1°. Перестановки без повторений

Рассмотрим перестановки из n неповторяющихся предметов.

Перестановка.

Перестановки из неповторяющихся предметов будем называть просто *перестановками*.

Количество перестановок также называется *перестановкой*.

Перестановки из n предметов, а точнее, количество перестановок из n предметов, обозначается P_n.

Порядок предметов учитывать необходимо, потому что в перестановке всегда задействованы все n предметов. Перестановки отличаются друг от друга только порядком расположения предметов.

Без учета порядка перестановки n предметов рассматривать бессмысленно, поскольку получается так называемый вырожденный случай: всегда имеется только 1 куча, сложенная из n предметов.

Итак, у нас есть n различных предметов. Сколькими способами их можно расположить по порядку?

Примеры.

1. Сколькими способами можно расположить по порядку 3 буквы А, Б и В?

Решение. На первое место можно поставить одну из 3 букв, имеем 3 способа:

А**, Б**, В**,

где звездочками обозначены неизвестные буквы. В каждом из этих трех случаев на второе место можно поставить одну из двух оставшихся букв, имеем *по теореме 4 о прямом произведении* $3 \times 2 = 6$ способов:

АБ*, АВ*, БА*, БВ*, ВА*, ВБ*.

Наконец, в каждом из этих 6 случаев на оставшееся место можно поставить только одну букву, имеем *для прямого произведения* $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ способов:

АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА.

2. Сколько пятизначных чисел можно составить из 5 цифр 1, 2, 3, 4 и 5?

Решение. На первое место можно поставить одну из 5 цифр, имеем 5 чисел:

1****, 2****, 3****, 4****, 5****.

В каждом из этих 5 случаев на второе место можно поставить одну из четырех оставшихся цифр, имеем *для прямого произведения* $5 \times 4 = 20$ чисел.

В каждом из этих 20 случаев на третье место можно поставить одну из трех оставшихся цифр, имеем *для прямого произведения* $5 \times 4 \times 3 = 60$ чисел.

И так далее.

Всего получаем $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ чисел.

Осталось обобщить полученные результаты.

Введем новый важный термин и новое важное обозначение.

Факториал.

Факториал натурального числа n — произведение первых n натуральных чисел от 1 до n.

Короче можно записать так:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n.$$

Обозначение факториала числа n: $n!$.

Кроме того, для удобства наиболее часто используемых вычислений полагают, что всегда $0! = 1$.

Теперь можно сформулировать теорему, которая обобщает полученные в примерах результаты.

Теорема 6. Количество перестановок P_n из n предметов равно $n!$:

$$P_n = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n.$$

2°. Перестановки с повторениями

Рассмотрим перестановки из n повторяющихся предметов, которые могут повторяться.

Перестановка с повторением.

Перестановки из повторяющихся предметов называются *перестановками с повторением*. Количество перестановок с повторением также называется *перестановкой с повторением*.

Количество перестановок с повторениями из n предметов обозначаются $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, где k — количество видов различных предметов, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — количество предметов вида $1, 2, \ldots, k$, причем, разумеется, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Ясно, что когда все предметы разные, то получаем частный случай: перестановки без повторений, то есть просто перестановки:

Также очевидно, что порядок одинаковых предметов учесть невозможно, чем мы и воспользуемся при подсчете числа перестановок.

Итак, у нас есть n предметов, некоторые из которых повторяются. Сколькими способами их можно расположить по порядку?

Примеры.

1. Сколькими способами располагаются по порядку 6 букв А, Б, Б и В, В, В?

Решение. Нам нужно подсчитать количество перестановок с повторением $P(1, 2, 3)$. Общее количество букв $n = 1 + 2 + 3 = 6$.

Если бы все буквы были разными, то получили бы просто перестановки в количестве

$$P_6 = 6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6.$$

Но у нас три одинаковые буквы В. Возникает вопрос, сколько набегает лишних перестановок, когда эти три буквы расположены на одних и тех же местах? Поскольку при подсчете мы предполагали, что эти три буквы В различны, то, когда они на одних и тех же местах, их можно упорядочить

$$P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3$$

способами. Это количество лишних перестановок для буквы В *для всех случаев их размещения!* Чтобы учесть одинаковость букв В, нужно P_6 поделить на P_3.

Аналогично получаем для буквы Б $P_2 = 2! = 1 \times 2$ лишних перестановок. Чтобы учесть одинаковость букв Б, нужно P_6 поделить на P_2.

Для буквы А получаем одну лишнюю перестановку,— лишних перестановок нет.

Итак, количество разных упорядочений 6 букв А, Б, Б и В, В, В, то есть их перестановок с повторениями, равно

$$P(1, 2, 3) = \frac{P_6}{P_3 P_2 P_1} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60.$$

2. Сколько различных 9-значных чисел можно составить из 9 цифр 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3?

Решение. Всего у нас 9 чисел. Поэтому без учета повторений предметов получаем 9! чисел.

Но в наборе имеются три числа, каждое из которых повторяется три раза. Следовательно, для получения правильного ответа задачи необходимо полученное ранее количество перестановок без повторений 9! поделить три раза на 3!:

$$P(3, 3, 3) = \frac{P_9}{P_3 P_3 P_3} = \frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 1680.$$

Теперь можно сформулировать теорему, которая обобщает полученные в примерах результаты.

Теорема 7. Количество перестановок с повторениями из n предметов, где количество различных предметов k, а одинаковых предметов $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, равно $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{P_n}{P_{n_1} P_{n_2} \ldots P_{n_k}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

3. Размещения

1°. Размещения без повторений

Рассмотрим размещения из k предметов, которые выбираются из n неповторяющихся предметов. Другими словами, разместим n неповторяющихся предметов по k местам. Ясно, что при этом всегда $k \leqslant n$.

Размещение.

Размещения без повторений называются просто *размещениями*. Количество размещений без повторений также называется *размещением*.

Количество размещений из n предметов по k обозначается A_n^k, $k \leqslant n$.

Примеры.

1. Сколькими способами размещаются по порядку 3 буквы из 5: А, Б, В, Г, Д?

Решение. Алгоритм подсчета числа размещений совпадает с алгоритмом подсчета числа перестановок без повторений, только обрывается раньше.

На первое место можно поставить одну из пяти букв, имеем 5 способов:

А∗∗, Б∗∗, В∗∗, Г∗∗, Д∗∗,

где звездочками обозначены неизвестные буквы. В каждом из этих пяти случаев на второе место можно поставить одну из четырех оставшихся букв, имеем по теореме о прямом произведении $5 \times 4 = 20$ способов:

АБ∗, АВ∗, АГ∗, АД∗,
БА∗, БВ∗, БГ∗, БД∗,
ВА∗, ВБ∗, ВГ∗, ВД∗,
ГА∗, ГБ∗, ГВ∗, ГД∗,
ДА∗, ДБ∗, ДВ∗, ДГ∗.

Наконец, в каждом из этих 20 случаев на оставшееся место можно поставить одну из трех оставшихся букв, имеем $5 \times 4 \times 3 = 60$ способов:

АБВ, АБГ, АБД, АВБ, АВГ, АВД, АГБ, АГВ, АГД, АДБ, АДВ, АДГ,
БАВ, БАГ, БАД, БВА, БВГ, БВД, БГА, БГВ, БГД, БДА, БДВ, БДГ,
ВАБ, ВАГ, ВАД, ВБА, ВБГ, ВБД, ВГА, ВГБ, ВГД, ВДА, ВДБ, ВДГ,
ГАБ, ГАВ, ГАД, ГБА, ГБВ, ГБД, ГВА, ГВБ, ГВД, ГДА, ГДБ, ГДВ,
ДАБ, ДАВ, ДАГ, ДБА, ДБВ, ДБГ, ДВА, ДВБ, ДВГ, ДГА, ДГБ, ДГВ.

2. Сколько 4-значных чисел можно составить из 7 цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7?

Решение. Получаем $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ чисел.

Теорема 8. Количество размещений из n по k равно

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Для расчетов следует использовать только начало формулы, где нет факториалов!

В частности, размещения из n по n — просто перестановки из n: $A_n^n = P_n = n!$. А размещения из n по 1 всегда равно n: $A_n^1 = n$.

2°. Размещения с повторениями

Ранее величина нашей выборки k, то есть количество выбранных предметов, *не превосходило* числа самих предметов n. Рассмотрим размещения из n различных предметов, при которых количество предметов любого из n видов *неограничено*. Другими словами, из n предметов выбирается произвольное количество k предметов, естественно, что при этом предметы могут повторяться.

Размещение с повторением.

Размещение с повторением — это выбор k предметов из n, причем количество предметов любого из n видов неограничено. Количество размещений с повторением также называется *размещением с повторением*.

Количество различных размещений с повторением из n предметов по k никак не обозначается.

Следует иметь в виду, что размещение с повторением стоит особняком в рассматриваемых расстановках: *при его вычислении используется степенная функция, а не факториал!*

Примеры.

1. Сколько существует семизначных чисел?

Решение. На 1-е место можно поставить одну из 10 цифр.

При каждой из них на 2-м месте может оказаться любая из 10 цифр.

И так далее до 7 цифр в числе.

Имеем $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7 = 10\,000\,000$ различных чисел.

2. Сколько существует 20-значных чисел?

Решение. Количество различных 20-значных чисел равно 10^{20}.

Приведем теорему, которая обобщает полученные в примерах результаты.

Теорема 9.

Количество размещений с повторениями из n по k равно n^k.

Однако задачи, приведенные в примерах выше, обычно трактуются в более сложной интерпретации. А именно.

Пример.

1. Сколько существует семизначных чисел, не начинающихся с нулей?

Заметим, что вторая часть условия задачи может опускаться! В этом случае имеет смысл решить сразу две задачи:

1) найти все числа, которые могут начинаться с нуля;

2) найти все числа, которые не могут начинаться с нуля.

Решение. Очевидно, что требование к числу не начинаться с нулей эквивалентно условию, чтобы число не начиналось с одного 0. В этом случае на 1-м месте может быть только одна из 9 цифр, отличных от 0. А уже на остальных 6 местах могут находиться все 10 цифр. Ясно, что по правилу прямого произведения следует умножить 9 на количество 6-значных чисел. Получается $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^6$ различных чисел.

---

4. Сочетания

1°. Сочетания без повторений

У нас есть n различных предметов. Сколькими способами их можно разместить по k местам без учета порядка? Или, что то же самое, выбрать из них k предметов?

Сочетание.

Сочетания без повторений называются просто *сочетаниями*. Количество сочетаний без повторений также называется *сочетанием*.

Количество сочетаний из n предметов по k обозначается C_n^k, или $\binom{n}{k}$, $k \leqslant n$.

Примеры.

1. Найти количество сочетаний 3 букв из 5: А, Б, В, Г, Д?

Решение. Алгоритм подсчета числа сочетаний аналогичен алгоритму подсчета числа перестановок с повторениями.

Если бы порядок учитывался, то имели бы размещения из 5 по 3: A_5^3.

Но порядок не учитывается. Возникает вопрос, сколько набегает лишних размещений при перестановке одних и тех же трех букв? Три буквы можно упорядочить P_3 способами.

Итак, количество разных сочетаний 3 букв из 5 равно

$$\frac{A_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 2 = 10.$$

2. Сколькими способами 4 цифры можно выбрать из 7 цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7?

Решение. С учетом порядка 4 цифры из 7 можно выбрать A_7^4 способами, а без учета порядка, что и имеется, конечно, в виду в условии данной задачи, $\frac{A_7^4}{P_4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 5 = 35$ способами.

Теорема 10. Количество сочетаний из n по k равно

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Для расчетов следует использовать только начало формулы, где нет факториалов!

Наиболее трудное в подобных задачах — определить, нужно ли учитывать порядок размещений. Другими словами, что нужно подсчитывать — размещения или сочетания?

Сочетания с повторениями в этой книге не рассматриваются.

2°*. Треугольник Паскаля

Пожалуй, сочетания — одни из наиболее важных *чисел*.

Можно показать, что при вычислении биномиальных коэффициентов, рассмотренных в предыдущем параграфе, получаются сочетания. Вместо доказательства этого факта проиллюстрируем его. Для этого просто выпишем сочетания для первых n.

Примеры.

1. При $n = 1$ получаем 2 сочетания. Поскольку числа маленькие, просто выпишем наиболее короткие формулы:

$$C_1^0 = \frac{1!}{1!\cdot 0!} = 1,\ C_1^1 = \frac{1!}{1!\cdot 1!} = 1.$$

2. При $n = 2$ получаем 3 сочетания:

$$C_2^0 = \frac{2!}{2!\cdot 0!} = 1,\ C_2^1 = \frac{2!}{1!\cdot 1!} = 2,\ C_2^2 = \frac{2!}{0!\cdot 2!} = 1.$$

3. При $n = 3$ получаем 4 сочетания:

$$C_3^0 = \frac{3!}{3!\cdot 0!} = 1,\ C_3^1 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3,\ C_3^2 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3,\ C_3^3 = \frac{3!}{0!\cdot 3!} = 1.$$

4. При $n = 4$ получаем 5 сочетаний:

$$C_4^0 = \frac{4!}{4!\cdot 0!} = 1,\ C_4^1 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4,\ C_4^2 = \frac{4!}{3!\cdot 2!} = 6,\ C_4^3 = \frac{4!}{1!\cdot 3!} = 4,\ C_4^4 = \frac{4!}{0!\cdot 4!} = 1.$$

Сочетания для больших n легко находятся, если воспользоваться следующей их простой закономерностью, лежащей в основе *треугольника Паскаля*:

n-й ряд треугольника Паскаля состоит из сочетаний для n.

Треугольник Паскаля.

Первые числа *треугольника Паскаля* равны 1, крайние числа равны 1, а внутренние числа равны сумме ближайших двух чисел сверху и сверху слева из предыдущего ряда, как изображено на рисунке 11.

---

n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6	C_n^7	C_n^8	C_n^9	C_n^{10}
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Рис. 11. Треугольник Паскаля

3°*. Связь перестановок с повторением и сочетаний

Как связаны перестановки $P_n = n!$ и размещения A_n^k, мы уже знаем:

$$A_n^n = P_n = n!.$$

Теперь посмотрим, как связаны перестановки с повторением и сочетания. Для этого решим примеры, рассмотренные для перестановок с повторением, другим способом.

Примеры.

1. Сколькими способами располагаются по порядку 6 букв А, Б, Б и В, В, В?

Решение. Нам нужно подсчитать количество перестановок с повторением $P(1, 2, 3)$. Общее количество букв $n = 1 + 2 + 3 = 6$.

На 6 мест букву А можно поставить 6 способами. Заметим, что число 6 можно удобно перевести в сочетания формулой $C_6^1 = 6$.

Из оставшихся 5 мест две буквы Б занимают 2 места, которые можно выбрать $C_5^2 = 10$ способами (см. треугольник Паскаля).

Наконец, из оставшихся 3 мест три буквы В занимают 3 места, которые можно выбрать 1 способом. Заметим, что число 1 можно в нашем контексте удобно перевести в сочетания формулой $C_3^3 = 1$.

Итак, количество разных упорядочений 6 букв А, Б, Б и В, В, В равно произведению трех полученных чисел:

$$P(1, 2, 3) = 6 \cdot 10 \cdot 1 = 60,$$

что совпадает с предыдущим результатом.

2. Сколько различных 9-значных чисел можно составить из 9 цифр 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3?

Решение. На 9 мест три цифры 1 можно поставить $C_9^3 = 84$ способами (см. треугольник Паскаля).

На оставшиеся 6 мест три цифры 2 можно поставить $C_6^3 = 20$ способами (см. треугольник Паскаля).

Наконец, на оставшиеся 3 места три цифры 3 можно поставить единственным способом. Заметим, что число 1 можно в нашем контексте удобно перевести в сочетания формулой $C_3^3 = 1$.

Итак, количество разных упорядочений 9 цифр 1, 1, 1, 2, 2, 2 и 3, 3, 3 равно произведению трех полученных чисел:

$$P(3, 3, 3) = 84 \cdot 20 \cdot 1 = 1680,$$

что совпадает с предыдущим результатом.

Теперь можно сформулировать теорему, которая обобщает полученные в примерах результаты.

Теорема 12. Количество перестановок с повторениями из n предметов, где количество различных предметов k, а одинаковых предметов $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, равно $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \ldots C_{n-n_1-n_2\ldots n_{k-1}}^{n_k} = \frac{P_n}{P_{n_1} P_{n_2} \ldots P_{n_k}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Доказательство. Посмотрим, чему равно произведение сочетаний, которое присутствует в формуле:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$
$$= \frac{P_n}{P_{n_1} P_{n-n_1}} \cdot \frac{P_{n-n_1}}{P_{n_2} P_{n-n_1-n_2}} \cdot \frac{P_{n-n_1-n_2}}{P_{n_3} P_{n-n_1-n_2-n_3}} \cdot \ldots \cdot \frac{P_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}}{P_{n_k} P_{n-n_1-n_2-n_3-\ldots-n_k}}.$$

Теперь учтем, что первая и вторая дроби сокращаются на P_{n-n_1}, вторая и третья — на $P_{n-n_1-n_2}$, и так далее. Кроме того, $P_{n-n_1-n_2-n_3-\ldots-n_k} = P_{n-n} = 1$. Получим:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$
$$= \frac{P_n}{P_{n_1} P_{n-n_1}} \cdot \frac{P_{n-n_1}}{P_{n_2} P_{n-n_1-n_2}} \cdot \frac{P_{n-n_1-n_2}}{P_{n_3} P_{n-n_1-n_2-n_3}} \cdot \ldots \cdot \frac{P_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}}{P_{n_k} P_{n-n_1-n_2-n_3-\ldots-n_k}} =$$
$$= \frac{P_n}{P_{n_1}} \cdot \frac{1}{P_{n_2}} \cdot \frac{1}{P_{n_3}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{P_{n_k}} = \frac{P_n}{P_{n_1} P_{n_2} \ldots P_{n_k}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Итак, мы получили нашу старую формулу.

Тесты

1. Прямое произведение

1.1. Сколько наборов участвует в прямом произведении?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 5. 5) 6.

1.2. Сколько предметов содержит прямое произведение, если наборы, участвующие в произведении, имеют 2 и 4 предмета?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 6. 5) 8.

1.3. Какой пары нет в прямом произведении (0, 1)×(0, 1, 2)?

1) (0, 1). 2) (1, 0). 3) (1, 1). 4) (1, 2). 5) (2, 1).

1.4. Какая пара есть в прямом произведении (1, 2)×(2, 3, 4)?

1) (0, 1). 2) (1, 0). 3) (1, 1). 4) (1, 2). 5) (2, 1).

1.5. Какая пара является координатами какой-нибудь точки на координатной плоскости на прямой $y = x$ (биссектриса первого квадранта)?

1) (0, 1). 2) (1, 0). 3) (1, 1). 4) (1, 2). 5) (2, 1).

2. Виды расстановок

2.1. Как называется выбор нескольких образцов из набора предметов?

1) Расстановка. 2) Выборка. 2) Перестановка. 3) Размещение. 4) Сочетание.

2.2. Как называется выборка предметов без учета порядка, причем каждый предмет имеется в единственном экземпляре?

1) Расстановка. 2) Выборка. 2) Перестановка. 3) Размещение. 4) Сочетание.

2.3. Как называется выборка предметов с учетом порядка, причем каждый предмет имеется в единственном экземпляре?

1) Расстановка. 2) Выборка. 2) Перестановка. 3) Размещение. 4) Сочетание.

2.4. Как называется расстановка набора предметов в разном порядке, причем все предметы разные?

1) Расстановка. 2) Выборка. 2) Перестановка. 3) Размещение. 4) Сочетание.

2.5. Как называется расположение предметов в разном порядке?

1) Расстановка. 2) Выборка. 2) Перестановка. 3) Размещение. 4) Сочетание.

3. Перестановки без повторений

3.1. Чему равно 3!?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 6. 5) 24.

3.2. Чему равно 0!?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 6. 5) 24.

3.3. Чему равно 4!?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 6. 5) 24.

3.4. Чему равно 1!?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 6. 5) 24.

3.5. Чему равно 2!?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 6. 5) 24.

4. Перестановки с повторениями

4.1. Чему равно P(2, 3)?

1) 1. 2) 3. 3) 4. 4) 6. 5) 10.

4.2. Чему равно P(1, 2)?

1) 1. 2) 3. 3) 4. 4) 6. 5) 10.

4.3. Чему равно P(2, 2)?

1) 1. 2) 3. 3) 4. 4) 6. 5) 10.

4.4. Чему равно P(2)?

1) 1. 2) 3. 3) 4. 4) 6. 5) 10.

4.5. Чему равно P(1, 3)?

1) 1. 2) 3. 3) 4. 4) 6. 5) 10.

5. Размещения без повторений

5.1. Чему равно A_2^1 *?*

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 6.

5.2. Чему равно A_2^2 *?*

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 6.

5.3. Чему равно A_3^1 *?*

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 6.

5.4. Чему равно A_3^2 *?*

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 6.

5.5. Чему равно A_3^3 *?*

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 6.

6. Размещения с повторениями

6.1. Чему равно 2^8*?*

1) 4. 2) 16. 3) 64. 4) 256. 5) 1024.

6.2. Чему равно 2^4*?*

1) 4. 2) 16. 3) 64. 4) 256. 5) 1024.

6.3. Чему равно 2^{10}*?*

1) 4. 2) 16. 3) 64. 4) 256. 5) 1024.

6.4. Чему равно 2^2*?*

1) 4. 2) 16. 3) 64. 4) 256. 5) 1024.

6.5. Чему равно 2^6*?*

1) 4. 2) 16. 3) 64. 4) 256. 5) 1024.

7. Сочетания без повторений

7.1. Чему равно C_2^1*?*

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 6.

7.2. Чему равно C_2^2*?*

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 6.

7.3. Чему равно C_3^1*?*

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 6.

7.4. Чему равно C_3^2*?*

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 6.

7.5. Чему равно C_3^3*?*

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 6.

Упражнения

Пусть n — номер варианта от 1 до 16.

1. Сколько различных «слов» можно составить из букв русского алфавита с номерами от 1 до $n + 5$, если их можно использовать только по одному разу?

2. Сколько различных чисел можно составить, переставляя местами цифры числа $1\underbrace{00\ldots00}_{n+5\text{ раза}}1 \cdot n$?

3. Сколько различных шеренг длиной 3 можно составить из $n + 5$ студентов?

4. Сколько имеется $(n + 5)$-значных чисел?

5. Сколькими способами можно выбрать 3 студентов из $n + 5$?

А Банкир, положение дел оценя,
Предложил то, что именно надо:
Договор страхованья квартир от огня
И на случай ущерба от града.

Льюис Кэрролл. Охота на Снарка
Перевод Григория Кружкова

§ 3. Теория вероятностей

Оглавление

1. Вероятность 43
1°. Испытания и вероятности 43
2°. Свойства вероятности 45
2. Действия с вероятностями 45
1°. Произведение вероятностей 45
2°. Сумма вероятностей 47
3°. Сложные события 49
3*. Случайные числа 50
1°. Метод Монте-Карло 50
2°. Определение случайных чисел 51
Тесты 52
Упражнения 54

Литература

Основная

Болтянский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты.— М.: ФИМА, МЦНМО, 2002.

Дополнительная

Романовский И. В. Дискретный анализ.— СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2003.

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения: 2-е изд., испр. и дополн. / Пер. с англ.— М.: Мир, 1999.

Кордемский Б. А. Математика изучает случайности. Пособие для учащихся.— М.: Просвещение, 1975.

Ключевые слова

Испытание, исход, вероятность, подкидывание монеты, бросание кости, выбор карты из колоды, событие, свойства вероятности, невозможное и достоверное события, произведение и сумма событий, независимые и несовместные события, метод Монте-Карло, случайные числа.

1. Вероятность

1°. Испытания и вероятности

Игра в кости, карточные и другие азартные игры издавна привлекали интерес некоторого круга людей. Естественно, основной вопрос состоял в том, как делать ставки в игре, какой сделать ход, чтобы выигрыш был наиболее вероятен.

Именно поэтому развитие теории вероятности было связано, в первую очередь, с азартными играми, и в качестве иллюстраций использовались игровые ситуации. В середине XVII столетия Блез Паскаль, Пьер Ферма и другие математики заложили научные основы этой теории, не сомневаясь, что она найдет важные приложения во многих сферах человеческой деятельности.

Однако и сейчас при изложении основных понятий теории вероятности ситуации с бросанием костей, подбрасыванием монет или выбором нескольких карт из колоды служат удобным материалом для примеров и иллюстраций.

Теория вероятностей основывается на базовых модельных примерах. В качестве модельных примеров рассматриваются типовые *испытания*.

Испытание. Исход. Вероятность.

Испытание, или опыт — в теории вероятностей это — действие, которое можно повторять многократно.

Исход — результат испытания.

Вероятность исхода — доля исхода среди всех возможных исходов испытания.

Рассмотрим три типичных модельных испытания теории вероятностей.

Примеры.

1. Подкидывание монеты.

Рассмотрим следующее испытание: *подкидывание монеты*. Оно имеет два *исхода*: монета может упасть одной из двух сторон вверх: *орлом* (*гербом, аверсом*) или *решкой* (*решеткой, реверсом, цифрой*). При многократном подкидывании монеты орел и решка выпадают примерно одинаковое число раз.

Построим математическую модель подкидывания монеты: монета идеальная, причем в половине случаев выпадает орел, а в половине — решка, тогда *вероятности P* выпадения орла и решки одинаковы и равны $\frac{1}{2}$.

На рисунке 1 показана русская монета с изображением математика Леонарда Эйлера.

Рис. 1. Решка и орел русской монеты в честь 300-летия русского математика

2. Бросание кости.

Возьмем *игральную кость* — кубик, на гранях которого изображены шесть чисел от 1 до 6. Опыт *бросание игральной кости*, когда кубик падает одной из сторон вверх, имеет шесть исходов, обозначаемых числами от 1 до 6.

Если игральная кость идеальна, то выпадение любого из шести чисел равновероятно с *вероятностью* $P = \frac{1}{6}$.

На рисунке 2 показан стаканчик с шестью игральными костями.

Рис. 2. Стаканчик с игральными костями

3. Выбор карты из колоды.

Наконец, классическое испытание *выбор карты из колоды* в 52 карты имеет 52 равновероятных исходов, каждый с *вероятностью* $P = \frac{1}{52}$.

На рисунке 3 показаны карты из одной из национальных русских колод.

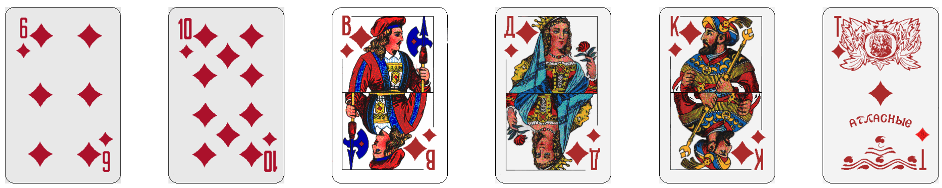


Рис. 3. Некоторые бубновые *атласные карты* (автор неизвестен)

Рассмотрим более сложные испытания.

Примеры.

1. Пусть монета подкидывается два раза подряд. Этот опыт имеет $2 \times 2 = 4$ исхода: 4 пары (О, О), (О, Р), (Р, О), (Р, Р), где буквой О обозначено выпадение орла, а буквой Р — решки. В этом случае в математической модели вероятность каждого исхода P равна $\frac{1}{4}$.

2. При бросании игральной кости два раза подряд имеем $6 \times 6 = 36$ исходов (1, 1), (1, 2), …, (1, 6), (2, 1), (2, 2), …, (2, 6), …, (6, 1), (6, 2), …, (6, 6). Поэтому вероятность P каждого исхода в идеальном случае составляет $\frac{1}{36}$.

3. Выберем две карты из колоды в 52 карты. Здесь нужно внимательно следить за количеством карт. Первая карта выбирается из колоды в 52 карты, а вторая — уже из колоды в 51 карту. Поэтому количество исходов считается по формуле 52×51, и вероятность каждого исхода P равна $\frac{1}{52 \times 51}$.

2°. Свойства вероятности

Изучим некоторые простейшие свойства вероятностей.

Событие. Вероятность.

Событие — предполагаемый результат одного испытания или комбинации нескольких испытаний.

Вероятность события — доля события среди всех возможных событий.

Обозначение вероятности: P.

Таким образом, событие — это обобщение понятия исхода, а исход является частным случаем события, когда событие состоит из одного исхода.

Свойства вероятности.

1. Вероятность события больше или равна 0 и меньше или равна 1:

$$0 \leqslant P \leqslant 1.$$

Это свойство с достаточной очевидностью следует из рассмотренных примеров. Вероятность какого-нибудь события не может быть никогда равна, например, 2 или –1.

2. Вероятность невозможного события равна 0:

$$P_{\text{невозможное}} = 0.$$

Невозможное событие.

Событие, которое никогда не может произойти, называется *невозможным*. Вероятность такого события равна 0.

Например, вероятность при бросании кости получить 1,5 или 7, равна 0.

3. Вероятность достоверного события равна 1:

$$P_{\text{достоверное}} = 1.$$

Достоверное событие.

События, которое происходит всегда, называется *достоверным*. Вероятность такого события равна 1.

Например, вероятность того, что при бросании кости выпадет число 1 или 2 или 3 или 4 или 5 или 6, равна 1.

---

2. Действия с вероятностями

1°. Произведение вероятностей

Выше мы вычисляли вероятность сложных событий напрямую, оценивая долю этих событий среди всех событий. Рассмотрим в этом разделе другие способы вычисления вероятностей событий.

Рассмотрим события с двух точек зрения:

1) как это было сделано в предыдущем разделе;

2) используя *произведение вероятностей*.

Примеры.

1. Подкинем две монеты и посчитаем вероятность события A выпадения одного конкретного исхода. Сделать это можно двумя способами.

1) Непосредственно выборкой, как это делалось выше. Имеем 4 независимых исхода: A_{11} = «исход (О, О)», A_{12} = «исход (О, Р)», A_{21} = «исход (Р, О)», A_{22} = «исход (Р, Р)». Поэтому вероятность события один к четырем: $\frac{1}{4}$. Например, вероятность выпадения на 1-й монете орла, а на 2-й решки равна $\frac{1}{4}$.

2) Использованием *произведения вероятностей*. Разобьем наше событие A, состоящее из двух конкретных исходов подкидывания 2 монет, на эти два исхода: A_1 = «конкретный исход падения 1-й монеты», A_2 = «конкретный исход падения 2-й монеты». Ясно, что событие A подкидывания 2 монет произойдет тогда и только тогда, когда случатся A_1 *и* A_2.

Произведение событий.

Событие A — это *пересечение, или произведение, событий* A_1 и A_2: $A = A_1 \cap A_2$.

Так как при этом события A_1 и A_2 *независимы*, то есть происшествие одного события не влияет на вероятность другого, то вероятность A равна произведению вероятностей A_1 и A_2: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Снова $\frac{1}{4}$. Например, вероятность выпадения на первой монете орла, а на второй решки равна $\frac{1}{4}$.

2. Подкинем три монеты и посчитаем вероятность события выпадения одного конкретного исхода. Сделать это можно двумя способами.

1) Непосредственно выборкой. При этом выбор производим из всех возможных 8 независимых исходов: A_{111} = (О, О, О), A_{112} = (О, О, Р), A_{121} = (О, Р, О), …, A_{221} = (Р, Р, О), A_{222} = (Р, Р, Р). Поэтому вероятность нашего события $\frac{1}{8}$.

Например, вероятность выпадения тройки (О, Р, О) равна $\frac{1}{8}$.

2) Вычислением произведения вероятностей. Вероятность каждого из трех отдельных исходов по подкидыванию одной монеты равны $\frac{1}{2}$. Эти события независимы, поэтому вероятность конкретного исхода при подкидывания трех монет равна произведению их вероятностей — снова $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Например, вероятность выпадения тройки (О, Р, О) равна $\frac{1}{8}$.

3. Бросим две кости и посчитаем вероятность события выпадения одного конкретного исхода. Сделать это можно двумя способами.

1) Непосредственно выборкой. Выбираем из 36 независимых исходов: $A_{11} = (1, 1)$, $A_{12} = (1, 2)$, $A_{13} = (1, 3)$, …, $A_{65} = (6, 5)$, $A_{66} = (6, 6)$. Поэтому вероятность события $\frac{1}{36}$. Например, вероятность выпадения пары (1, 3) равна $\frac{1}{36}$.

2) Вычислением произведения вероятностей. Вероятность каждого из 2 отдельных исходов по бросанию одной кости равны $\frac{1}{6}$. Эти события независимы, поэтому вероятность конкретного исхода при бросании 2 костей равна произведению их вероятностей — снова $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. Например, вероятность выпадения пары (1, 3) равна $\frac{1}{36}$.

Независимые события.

Итак, *независимыми событиями* называются события, вероятности которых не зависят друг от друга.

Кроме того, проиллюстрирована следующая теорема.

Теорема 1. Произведение вероятностей.

Вероятность нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, взятых по отдельности.

2°. Сумма вероятностей

Итак, зная вероятности исходов, можно посчитать вероятности *событий*., которые состоят из этих исходов.

Рассмотрим такие исходы, которые не могут произойти одновременно.

Пример.

Бросим кость и пусть событие A = «выпало четное количество очков».

1) Вероятность события A можно посчитать непосредственно, заметив, что оно достигается при 3 исходах из 6, поэтому его вероятность $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

2) С другой стороны, рассмотрим 6 событий A_1 = «выпало 1», A_2 = «выпало 2», …, A_6 = «выпало 6». Очевидно, что A случится тогда и только тогда, когда случится A_2 *или* A_4 *или* A_6.

Сумма событий.

Событие A — это *объединение, или сумма, событий* A_2, A_4 и A_6: $A = A_2 \cup A_4 \cup A_6$.

Так как при этом события A_2, A_4 и A_6 *несовместны*, то есть они не могут произойти одновременно, то вероятность A равна сумме вероятностей A_2, A_4 и A_6: $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Снова получили $\frac{1}{2}$.

Разложить событие по сумме других удается не всегда: другие события должны быть *несовместными*.

Несовместные события.

Итак, *несовместными событиями* называются такие события, что любые два из них не могут произойти одновременно.

Очевидно, что наши события $A_1, \ldots, A_6$ — несовместные, поэтому событие A удалось представить в виде суммы трех из них.

Кроме того, проиллюстрирована следующая теорема.

Теорема 2. Сумма вероятностей.

Вероятность нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, взятых по отдельности.

Возможно ли при суммировании несовместных событий получить сумму, большую 1?

Нет, это невозможно. Дело в том, что несовместные события так устроены, что при суммировании их вероятностей невозможно получить число, большее 1. Поэтому свойство вероятности быть в пределах от 0 до 1 эта теорема не нарушает.

Примеры.

1. Пусть есть колода в 52 карты и событие A = «выбрана красная масть».

1) Вероятность события A можно посчитать непосредственно, заметив, что оно достигается при 26 исходах из 52, поэтому его вероятность $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

2) С другой стороны, рассмотрим 52 события A_1 = «выбран бубновый туз», A_2 = «выбрана бубновая двойка», A_3 = «выбрана бубновая тройка», …, A_{25} = «выбрана червовая дама», A_{26} = «выбран червовый король», …, A_{51} = «выбрана крестовая дама», A_{52} = «выбран крестовый король».

Очевидно, что A случится тогда и только тогда, когда случится A_1 *или* A_2 *или* A_3 *или* … *или* A_{25} *или* A_{26}. Другими словами, событие A — это объединение, или сумма, 26 событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{25}$ и A_{26}: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_{25} \cup A_{26}$.

В этом случае вероятность A равна сумме 26 вероятностей $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{25}$ и A_{26}: $\frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$. Снова получили $\frac{1}{2}$.

2. Рассмотрим бросание двух игральных костей. Посчитаем вероятность события B = «на первой кости выпало 1».

1) Первый способ. В качестве элементарных здесь удобно взять 36 событий B_{11} = «исход (1, 1)», B_{12} = «исход (1, 2)», …, B_{66} = «исход (6, 6)». Наше событие достигается при 6 исходах из 36, поэтому его вероятность $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

2) Ясно, что $B = B_{11} \cup B_{12} \cup \ldots \cup B_{16}$, поэтому вероятность события B равна $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Заметим, что эта вероятность просто совпадает с вероятностью выпадения 1 при бросании кости, как и должно быть.

3°. Сложные события

В более сложных задачах для вычисления вероятности события используются и сумма, и произведение вероятностей.

Примеры.

Бросили 2 кости. Какова вероятность того, что выпало четное число очков?

1) Первый способ решения заключается в непосредственном подсчете всех случаев четности очков на двух костях.

Всего различных случаев выпадения очков на 2 костях $6 \times 6 = 36$: (1, 1), (1, 2), …, (1, 6), (2, 1), (2, 2), …, (2, 6), …, (6, 1), (6, 2), …, (6, 6). Из них очки четны в 18 случаях: (1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), …, (6, 2), (6, 4), (6, 6).

Искомая вероятность снова равна $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

2) Второй способ.

Пусть равновероятные события следующие: $Ч_1$ = «на 1-й кости очки четны», $Н_1$ = «на 1-й кости очки нечетны», $Ч_2$ = «на 2-й кости очки четны» и $Н_2$ = «на 2-й кости очки нечетны». События имеют, очевидно, вероятности $\frac{1}{2}$.

Событие $Ч$ = «на каждой кости очки четны» получается при одновременном появлении *независимых* событий $Ч_1$ и $Ч_2$, поэтому вероятность $Ч$ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Аналогично вероятность события $Н$ = «на каждой кости очки нечетны» равна $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Наконец, событие $С$ = «сумма очков на костях четна» происходит, когда имеют место *несовместные* события $Ч$ или $Н$, поэтому вероятность события $С$ равна сумме вероятностей событий $Ч$ и $Н$: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

2. Вероятность выбрать из колоды туза равна $\frac{1}{13}$, так как из 52 карт 4 — тузы. А какова вероятность того, что при выборе 2 карт 2-я — туз?

1) Рассмотрим две выбранных карты. Всего имеем 52×51 случаев. Из них туз находится на 2-м месте в 51×4 случаях. Искомая вероятность $\frac{51 \cdot 4}{52 \cdot 51} = \frac{1}{13}$.

2) Возможны только два случая выбора 2 карт.

В первом случае 1-я карта является тузом, тогда вероятность 2-го туза — $\frac{1}{13} \cdot \frac{3}{51}$, так как один туз уже выбран, и вероятность 2-й карты быть тузом $\frac{3}{51}$.

Во втором случае 1-я карта — не туз, но тогда 2-й туз выбирается с вероятностью $\frac{12}{13} \cdot \frac{4}{51}$.

Рассмотрены оба *несовместных* события, поэтому вероятность 2-й карте быть тузом равна сумме их вероятностей: $\frac{1}{13} \cdot \frac{3}{51} + \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{51} = \frac{3+48}{13 \cdot 51} = \frac{51}{13 \cdot 51} = \frac{1}{13}$.

3*. Случайные числа

1°. Метод Монте-Карло

При решении некоторых вероятностных задач проще провести тысячи повторений эксперимента, чем получить ответ теоретическим путем. Обычно для этой цели используют компьютер. Ответ получается усреднением полученных результатов. Этот метод используется и при решении обычных задач, в которых нужно накопить какую-то величину, например, при вычислении площадей. Измерение проводится случайным образом, а ответ получается также усреднением полученных данных.

Метод Монте-Карло.

Метод вычисления неслучайной величины с использованием случайных испытаний называют *методом Монте-Карло*.

Примеры.

1. Найдем площадь области A внутри сложной замкнутой кривой, показанной на рисунке 3а.

Поместим область A в квадрат известной площади S и будем «бросать» наугад на него точки, как показано на рисунке 3а. «Наугад» означает, что попадания точки на любые равновеликие участки квадрата равновероятны. При этом бросании некоторые точки попадут внутрь A, а другие нет.

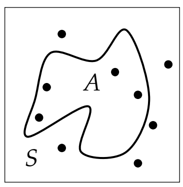
Доля точек, попавших в A, и есть приближение к площади A, то есть площадь области A равна

$$S\times\frac{\text{число точек в } A}{\text{число точек в } E}.$$

2. Найдем площадь под графиком функции $f(x)$ на отрезке от x_1 до x_2, как показано на рисунке 3б.

На отрезок $[x_1, x_2]$ случайным образом бросим n точек, координаты которых $a_1, a_2, \ldots, a_n$, тогда площадь под графиком $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ равна

$$\frac{x_2-x_1}{n}(f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)).$$

а


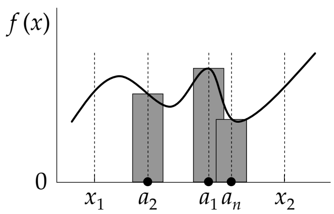
б


Рис. 31. а) Нахождение площади внутри замкнутой кривой.
б) Нахождение площади под графиком функции

2°. Определение случайных чисел

Для проведения подобных экспериментов используют случайные числа.

Случайные числа.

Случайные числа — упорядоченный список цифр, полученный в результате какого-либо случайного процесса.

Последовательности случайных чисел могут быть любой конечной длины. Опубликованы таблицы с миллионом случайных чисел. Сейчас случайные числа получают на компьютере сразу при решении задач.

Одну из небольших таблиц случайных чисел можно найти в приложениях к этой книге.

Большинство таблиц случайных чисел строится случайной выборкой из цифр {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. В приложении приведена таблица из 2500 случайных чисел.

Пример.

Четверо юношей приобрели доску и костюмы для виндсерфинга, причем Саша внес 10% стоимости комплекта, Боря —20%, Витя — 30% и Гена — 40%. 8 марта каждый из них хотел бы воспользоваться комплектом. Как им бросить жребий так, чтобы их шансы были равны внесенной ими части стоимости комплекта?

Решение. Для решения этой задачи они строят 4 события с вероятностями 0,1, 0,2, 0,3 и 0,4 следующим образом: один из них с завязанными глазами ставит точку в таблицу случайных чисел.

Если теперь число, расположенное ближе всех к этой точке, равно 0, то комплект получит Саша, если равно 1 или 2 — то Боря, если 3, 4 или 5 — Витя и если 6, 7, 8 или 9 — Гена.

Тесты

1. Испытания и вероятность

1.1. Сколько исходов имеет бросание монеты и кости?

1) 2. 2) 4. 3) 6. 4) 8. 5) 12.

1.2. Сколько исходов имеет подкидывание двух монет?

1) 2. 2) 4. 3) 6. 4) 8. 5) 12.

1.3. Сколько исходов имеет подкидывание трех монет?

1) 2. 2) 4. 3) 6. 4) 8. 5) 12.

1.4. Сколько исходов имеет подкидывание монеты?

1) 2. 2) 4. 3) 6. 4) 8. 5) 12.

1.5. Сколько исходов имеет бросание кости?

1) 2. 2) 4. 3) 6. 4) 8. 5) 12.

2. Свойства вероятностей

2.1. Чему равна вероятность достоверного события?

1) 0. 2) $\frac{1}{3}$. 3) $\frac{1}{2}$. 4) 1. 5) 2.

2.2. Чему не может быть равна вероятность?

1) 0. 2) $\frac{1}{3}$. 3) $\frac{1}{2}$. 4) 1. 5) 2.

2.3. Чему не может быть равно произведение двух вероятностей?

1) 0. 2) $\frac{1}{3}$. 3) $\frac{1}{2}$. 4) 1. 5) 2.

2.4. Чему не может быть равно произведение трех вероятностей?

1) 0. 2) $\frac{1}{3}$. 3) $\frac{1}{2}$. 4) 1. 5) 2.

2.5. Чему равна вероятность невозможного события?

1) 0. 2) $\frac{1}{3}$. 3) $\frac{1}{2}$. 4) 1. 5) 2.

3. Произведение вероятностей

3.1. Чему равна вероятность выпадения орла и 1 при бросании монеты и кости?

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{16}$. 3) $\frac{1}{12}$. 4) $\frac{1}{8}$. 5) $\frac{1}{4}$.

3.2. Чему равна вероятность выпадения 2 орлов при подкидывании 2 монет?

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{16}$. 3) $\frac{1}{12}$. 4) $\frac{1}{8}$. 5) $\frac{1}{4}$.

3.3. Чему равна вероятность выпадения 3 орлов при подкидывании 3 монет?

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{16}$. 3) $\frac{1}{12}$. 4) $\frac{1}{8}$. 5) $\frac{1}{4}$.

3.4. Чему равна вероятность выпадения 4 орлов при подкидывании 4 монет?

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{16}$. 3) $\frac{1}{12}$. 4) $\frac{1}{8}$. 5) $\frac{1}{4}$.

3.5. Чему равна вероятность выпадения 2 при бросании 2 костей?

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{16}$. 3) $\frac{1}{12}$. 4) $\frac{1}{8}$. 5) $\frac{1}{4}$.

4. Сумма вероятностей

4.1. Чему равна вероятность выпадения либо 2 орлов, либо орла и решки, либо решки и орла при подкидывании 2 монет?

1) $\frac{1}{18}$. 2) $\frac{1}{12}$. 3) $\frac{1}{4}$. 4) $\frac{1}{2}$. 5) $\frac{3}{4}$.

4.2. Чему равна вероятность выпадения либо орла и решки, либо решки и орла при подкидывании 2 монет?

1) $\frac{1}{18}$. 2) $\frac{1}{12}$. 3) $\frac{1}{4}$. 4) $\frac{1}{2}$. 5) $\frac{3}{4}$.

4.3. Чему равна вероятность выпадения 2 орлов или 2 решек при подкидывании 2 монет?

1) $\frac{1}{18}$. 2) $\frac{1}{12}$. 3) $\frac{1}{4}$. 4) $\frac{1}{2}$. 5) $\frac{3}{4}$.

4.4. Чему равна вероятность выпадения 2 или 12 при бросании 2 костей?

1) $\frac{1}{18}$. 2) $\frac{1}{12}$. 3) $\frac{1}{4}$. 4) $\frac{1}{2}$. 5) $\frac{3}{4}$.

4.5. Чему равна вероятность выпадения 2 или 3 при бросании 2 костей?

1) $\frac{1}{18}$. 2) $\frac{1}{12}$. 3) $\frac{1}{4}$. 4) $\frac{1}{2}$. 5) $\frac{3}{4}$.

Упражнения

Пусть n — номер варианта от 1 до 16.

1. Найти двумя способами вероятность того, что при подбрасывании $n+2$ монет случится событие «Все монеты упали одинаково».

2. На экзамене $5(n+2)$ билетов, из них $n+2$ «счастливые». Очевидно, что вероятность 1-му студенту вытянуть счастливый билет равна 0,2. Найти двумя способами вероятность того, что 2-й студент вытянет счастливый билет, если неизвестно, что вытянул 1-й.

§ 4. Случайная величина

Число орлов	0	1	2	3
Вероятность числа орлов	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Оглавление

1. Распределение . . . 57
1°. Определение случайной величины . . . 57
2°. Распределение случайной величины . . . 57
3°*. Дополнительные примеры распределения . . . 59
4°. Свойства распределения . . . 61
2. Математическое ожидание . . . 63
1°. Определение математического ожидания . . . 63
2°. Треугольник Паскаля . . . 65
3°*. Закон больших чисел . . . 65
Тесты . . . 66
Упражнения . . . 68

Литература

Основная

Болтянский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты.— М.: ФИМА, МЦНМО, 2002.

Дополнительная

Романовский И. В. Дискретный анализ.— СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2003.

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения: 2-е изд., испр. и дополн. / Пер. с англ.— М.: Мир, 1999.

Кордемский Б. А. Математика изучает случайности. Пособие для учащихся.— М.: Просвещение, 1975.

Ключевые слова

Случайная величина, распределение случайной величины, свойства распределения случайной величины, достоверное событие, нормальной распределение, математическое ожидание, треугольник Паскаля, закон больших чисел.

1. Распределение

1°. Определение случайной величины

При большом количестве испытаний неудобно и не нужно записывать все данные. Сам процесс снятия измерений можно упростить, а количество сохраняемой информации существенно уменьшить. Например, при многократном бросании 1000 монет проще регистрировать одно число — количество орлов, а не положение каждой из 1000 монет.

Случайная величина.

Случайная величина — это *любое* числовое значение, которое можно вычислить при случайных испытаниях.

Примеры.

1. Рассмотрим подкидывание 2 монет.

Число выпавших орлов является случайной величиной, причем ее значениями могут быть числа 0, 1 и 2.

Случайными величинами являются также число выпавших решек, разность между числом выпавших орлов и решек, и так далее.

2. Рассмотрим бросание 2 костей.

Число выпавших очков является случайной величиной, причем ее значениями могут быть числа от 2 до 12.

Равно как и квадрат числа выпавших очков является случайной величиной, как и разность между числом выпавших очков на первой и второй костях, и так далее.

3. Рассмотрим выбор двух карт из колоды. Число выбранных карт красной масти является случайной величиной, причем ее значениями могут быть числа 0, 1 и 2.

Равно как и число карт черной масти, как и число тузов, двоек, и т. д.

2°. Распределение случайной величины

Ясно, что одни значения случайной величины случаются чаще, другие — гораздо реже.

Более того, можно вычислить вероятность значений случайной величины, вероятность, с которой случайная величина может принять какое-нибудь свое значение.

Распределение случайной величины.

Распределением случайной величины и называется соответствие, то есть *функция*, между значениями случайной величины и их вероятностями.

Распределение случайной величины также называют ее *статистическим рядом*.

Примеры.

1. Перечислим все случаи, которые могут возникнуть при подкидывании 2 монет: (О, О), (О, Р), (Р, О), (Р, Р). Видно, что 0 орлов приходится на 1 случай из 4, 1 орел — на 2 случая и 2 орла — на 1.

Полученные результаты сведем в удобную таблицу 1.

Также построим график этой функции распределения на рисунке 2.

Таблица 1

Распределение числа орлов при подкидывании двух монет

Число орлов	0	1	2
Вероятность числа орлов	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

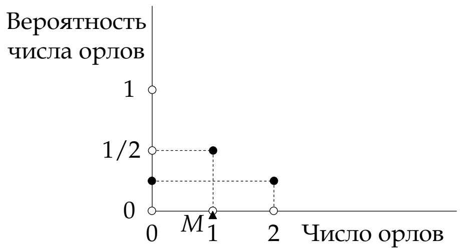


Рис. 2. Функция распределения для числа орлов при подкидывании 2 монет

2. Перечислим все восемь случаев, которые могут возникнуть при подкидывании 3 монет: (О, О, О), (О, О, Р), (О, Р, О), (О, Р, Р), (Р, О, О), (Р, О, Р), (Р, Р, О), (Р, Р, Р). Получаем, что 0 орлов приходится на 1 случай, 1 орел — на 3 случая, 2 орла — также на 3 и, наконец, 3 орла — на 1 случай.

Теперь можно построить распределение для числа выпавших орлов и график этой функции.

Таблица 3

Распределение числа орлов при подкидывании трех монет

Число орлов	0	1	2	3
Вероятность числа орлов	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

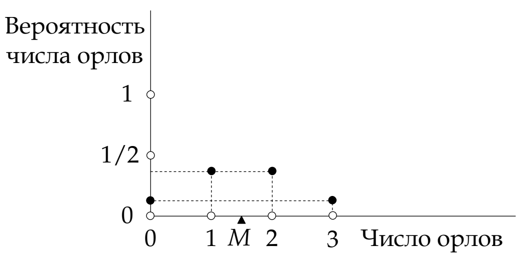


Рис. 4. Функция распределения для числа орлов при подкидывании 3 монет

3. При подкидывании 4 монет имеем 16 случаев. Распределение для числа выпавших орлов показано в таблице 7. График этой функции показан на рисунке 8.

Таблица 5

Распределение числа орлов при подкидывании четырех монет

Число орлов	0	1	2	3	3
Вероятность числа орлов	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

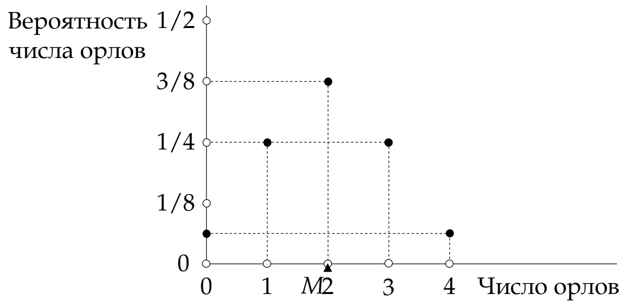


Рис. 6. Функция распределения для числа орлов при подкидывании 4 монет

3°*. Дополнительные примеры распределения

Разберем примеры из другой серии.

Примеры.

1. Перечислим все случаи, возникающие при бросании 2 костей:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6); (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6);
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6); (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6);
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6); (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6).

Видно, что 2 очка приходится на 1 случай из 36, 3 очка — на 2 случая, 4 очка — на 3 случая, …, 10 очков — на 3 случая, 11 очков — на 2 случая и 12 очков — на 1 случай из 36.

Полученные результаты сведем в удобную таблицу 7.

Таблица 7

Распределение числа очков при бросании двух костей

Число очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность числа очков	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Также построим график этой функции распределения на рисунке 8.

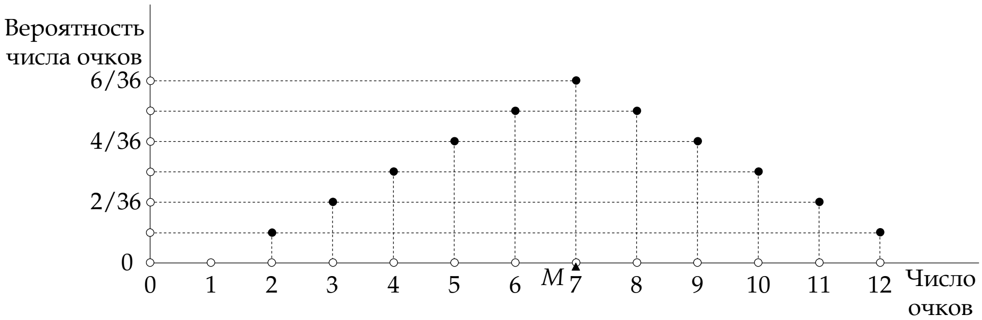


Рис. 8. Функция распределения для числа очков при бросании 2 костей

2. Перечислим все 216 случаев, которые могут возникнуть при бросании 3 костей:

(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 1, 6);
(1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6);
…
(1, 6, 1), (1, 6, 2), (1, 6, 3), (1, 6, 4), (1, 6, 5), (1, 6, 6);
…
(6, 6, 1), (6, 6, 2), (6, 6, 3), (6, 6, 4), (6, 6, 5), (6, 6, 6).

Получаем, что 3 очка приходится на 1 случай из 216, 4 очка — на 3 случая, 5 очков — на 6 случаев, …, 16 очков — на 6 случаев, 17 очков — на 3 случая и 18 очков — на 1 случай из 216.

Теперь можно построить распределение для числа выпавших очков и график этой функции.

Таблица 9

Распределение числа очков при бросании трех костей

Число очков	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Вероятность числа очков	$\frac{1}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{10}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{3}{216}$	$\frac{1}{216}$

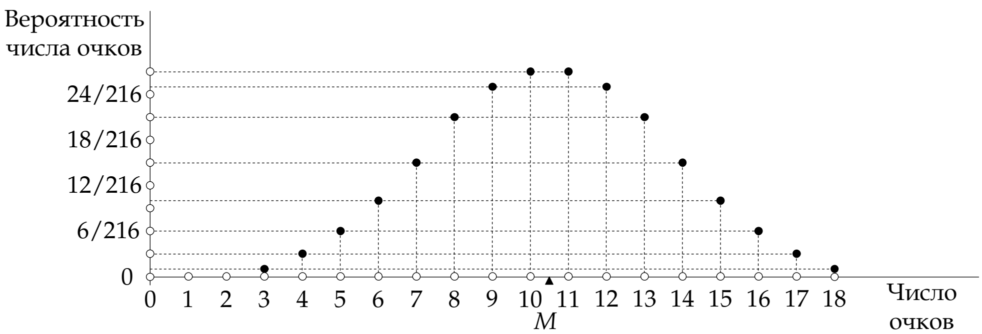


Рис. 10. Функция распределения для числа очков при бросании 3 костей

3°. Свойства распределения

Свойства распределения.

1. Рассмотрим подкидывание 2 монет. Событие X = «выпадет 0 или 1 или 2 орла» обязательно произойдет в любом случае. Поэтому вероятность события X равна 1.

Достоверное событие.

Событие, вероятность которого равна 1, называется *достоверным*.

Действительно, события «выпало 0 орлов», «выпал 1 орел» и «выпало 2 орла» несовместны, а вместе они составляют событие X. Поэтому вероятность X равна сумме вероятностей этих трех событий: $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1.$ Получаем, что событие X достоверно.

Рассмотрим подкидывание 3 монет. Событие X = «выпадет 0 или 1 или 2 или 3 орла» достоверно и имеет вероятность 1. Снова сумма всех вероятностей равна 1: $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1.$

При подкидывании 4 монет сумма всех вероятностей из таблицы распределения, другими словами, сумма его статистического ряда также равна 1: $\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=1.$

Свойство распределения случайной величины.

Обобщая полученную закономерность, получаем первое *свойство* распределения случайной величины:

сумма статистического ряда случайной величины равна 1.

---

2. Можно сказать, что графики распределений на рисунках 2, 4 и 6 имеют некоторый «колоколообразный» вид. При увеличении числа монет характерный колоколообразный вид функции распределения не только будет сохраняться, но все больше и больше будет приближаться к идеальной непрерывной колоколообразной функции, показанной на рисунке 11.

Нормальное распределение.

Идеальное распределение в виде непрерывной колоколообразной функции называется *нормальным*.

Свойство распределения случайной величины.

Получаем второе *свойство* распределения случайной величины:

график вероятности числа выпадения орлов имеет колоколообразный вид.

Приведем функцию, графиком которой является колоколообразная функция, где p — вероятность на вершине функции, M — координата вершины, оно же математическое ожидание (см. рис. 11):

$$y = pe^{-|x-M|}.$$

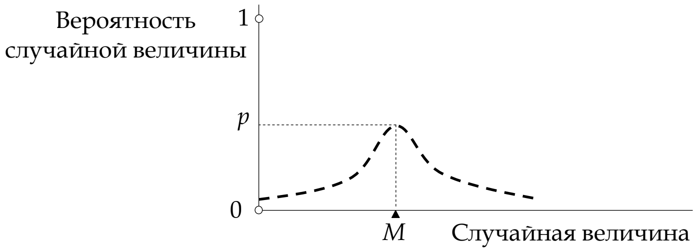


Рис. 11. Колоколообразная функция нормального распределения случайной величины

Следует иметь в виду, что в других экспериментах может быть совсем иной вид графика случайной величины.

Однако нормальное распределение случайной величины занимает значительное место в применении методов теории вероятностей к решению самых разнообразных прикладных задач. Если значения случайной величины возникают в результате большого числа независимых воздействий, ни одно из которых существенно не превалирует над остальными, то почти всегда оправдывается предположение о том, что такая случайная величина подчинена нормальному закону распределения.

Например, случайные ошибки измерения, линейные размеры деталей при массовом производстве, отклонения в результатах химических, спектральных и других анализов и так далее.

* * *

Разберем примеры из другой серии.

Примеры.

1. При бросании 2 костей сумма всех вероятностей из таблицы распределения, другими словами, сумма его статистического ряда также равна 1:

$$\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=1.$$

2. При бросании 3 костей сумма всех вероятностей из таблицы распределения, другими словами, сумма его статистического ряда также равна 1:

$$\frac{1}{216}+\frac{3}{216}+\frac{6}{216}+\frac{10}{216}+\frac{15}{216}+\frac{21}{216}+\frac{25}{216}+\frac{27}{216}+$$
$$+\frac{27}{216}+\frac{25}{216}+\frac{21}{216}+\frac{15}{216}+\frac{10}{216}+\frac{6}{216}+\frac{3}{216}+\frac{1}{216}=1.$$

3. График функция распределения для числа очков при бросании костей также имеет колоколообразный вид (см. рис. 10 и 11).

2. Математическое ожидание

1°. Определение математического ожидания

Хотя редукция к случайной величине позволяет при каждом опыте регистрировать 1 число, но при многократных испытаниях все равно получается много чисел.

Однако существует удобный метод, который позволяет и в этом случае охарактеризовать все многочисленные испытания только 1 числом! Это единственный экспериментальный параметр, конечно, является некоторым *средним*.

Примеры.

1. При подкидывании 2 монет найдем среднее следующим образом: умножим каждое значение случайной величины на ее вероятность, а затем полученные произведения сложим.

Получим среднее, которое обозначим M:

$$M = 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{2}{4} + 2\times\frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

2. При подкидывании 3 монет найдем такое же среднее:

$$M = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{3}{8} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1\frac{1}{2}.$$

3. Теперь при подкидывании 4 монет:

$$M = 0\times\frac{1}{16} + 1\times\frac{4}{16} + 2\times\frac{6}{16} + 3\times\frac{4}{16} + 4\times\frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2.$$

Теперь можно сформулировать понятие математического ожидания.

Математическое ожидание.

Число, равное сумме произведений каждого значения случайной величины на ее вероятность, называется *средним значением, или математическим ожиданием*, случайной величины. Обозначение: M.

Это действительно среднее.

Действительно, вероятность выпадения орла равна $\frac{1}{2}$, и матожидание для 2 монет равно $2\cdot\frac{1}{2} = 1$, для 3 монет — $3\cdot\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$, для 4 монет — $4\cdot\frac{1}{2} - 2$, и так далее. Эти математические ожидания отмечены на рисунках 2, 4 и 6.

Снова напомним, что в приложениях результаты эксперимента очень удобно представлять одним числом — матожиданием измеряемой случайной величины.

Если отметить матожидание на графиках функции распределения, то в случае равновероятных исходов, например, бросании монет или игральных костей, получим место оси симметрии функции распределения (значение матожидания отмечено треугольником на рисунках 2, 4 и 6).

Приведем пример, как на практике, в конкретной бизнес-ситуации, используется матожидание.

Задача.

По данным статистики в США вероятность 25-летнему человеку прожить 1 год составляет 0,992. Страховая компания страхует жизнь такого человека на год на сумму \$1000, страховой взнос составляет всего \$10.

Какую прибыль ожидает получить компания?

Решение. Ясно, что величина прибыли, которую нужно оценить в среднем, является случайной величиной. Причем она имеет два значения: \$+10, если застрахованный не умрет, и \$–990, если умрет.

Вероятность первого исхода равна, по условию, 0,992. Кроме этого случая, возможен еще только противоположный случай, вероятность которого в сумме с первой вероятностью равна 1. Поэтому вероятность второго исхода равна 0,008. Получаем следующее распределение нашей случайной величины:

$$\begin{pmatrix} +10 & -990 \\ 0{,}992 & 0{,}008 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно легко посчитать ожидаемую прибыль, равную матожиданию прибыли. Получаем \$2:

$$M = 10\times0{,}992 + (-990)\times0{,}008 = 9{,}92 - 7{,}92 = 2.$$

* * *

Разберем примеры из другой серии.

Примеры.

1. При бросании 2 костей найдем среднее следующим образом: умножим каждое значение случайной величины на ее вероятность, а затем полученные произведения сложим.

Получим среднее, которое обозначим M:

$$M = 2\times\frac{1}{36} + 3\times\frac{2}{36} + 4\times\frac{3}{36} + 5\times\frac{4}{36} + 6\times\frac{5}{36} + 7\times\frac{6}{36} +$$
$$+8\times\frac{5}{36} + 9\times\frac{4}{36} + 10\times\frac{3}{36} + 11\times\frac{2}{36} + 12\times\frac{1}{36} =$$
$$= \frac{1}{18} + \frac{3}{18} + \frac{6}{18} + \frac{10}{18} + \frac{15}{18} + \frac{21}{18} + \frac{20}{18} + \frac{18}{18} + \frac{15}{18} + \frac{11}{18} + \frac{6}{18} = \frac{126}{18} = 7.$$

2. При бросании 3 костей найдем такое же среднее:

$$M = 3\times\frac{1}{216} + 4\times\frac{3}{216} + 5\times\frac{6}{216} + 6\times\frac{10}{216} + 7\times\frac{15}{216} + 8\times\frac{21}{216} + 9\times\frac{25}{216} + 10\times\frac{27}{216} +$$
$$+11\times\frac{27}{216} + 12\times\frac{25}{216} + 13\times\frac{21}{216} + 14\times\frac{15}{216} + 15\times\frac{10}{216} + 16\times\frac{6}{216} + 17\times\frac{3}{216} + 18\times\frac{1}{216} =$$
$$= \frac{1}{72} + \frac{4}{72} + \frac{10}{72} + \frac{20}{72} + \frac{35}{72} + \frac{56}{72} + \frac{75}{72} + \frac{90}{72} + \frac{99}{72} + \frac{100}{72} + \frac{91}{72} + \frac{70}{72} + \frac{50}{72} + \frac{32}{72} + \frac{17}{72} + \frac{6}{72} =$$
$$= \frac{756}{72} = 10{,}5.$$

2°. Треугольник Паскаля

Для вычисления числителей вероятностей случайных величин можно воспользоваться *треугольником Паскаля*, который изображен на рисунке 8.

Треугольник Паскаля.

Треугольник Паскаля начинается с двух единиц.

Крайние числа *треугольника Паскаля* равны 1.

Внутренние числа *треугольника Паскаля* равны сумме ближайших двух чисел сверху и сверху слева из предыдущего ряда.

---

n-й ряд треугольника Паскаля состоит из нужных *числителей* для вероятностей количества выпадения m орлов для n монет, а *знаменатели* равны 2^n.

n	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$	$m=10$
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Рис. 8. Треугольник Паскаля

3°*. Закон больших чисел

Продуктивно рассматривать не одно событие или случайную величину, а много. Случайные величины возникают в приложениях как результаты измерений, причем либо сами измерения подвержены случайным ошибкам, либо объекты измерения выбираются случайным образом.

Закон больших чисел.

Тем не менее справедливо следующее правило:

даже когда результаты отдельных измерений сильно колеблются,
их средние арифметические очень устойчивы.

Это явление устойчивости средних и отражает *закон больших чисел*.

Пример.

В литературе можно найти сведения, что при подкидывании монеты герб выпадал следующие количества раз:

1) в десяти сериях по 1000 подкидываний (бросал один заключенный) — 502, 511, 497, 529, 504, 476, 507, 528, 504, 529;

2) в серии 24 000 раз (бросал *Пирсон*) — 12 012;

3) в серии 4040 раз (бросал *Бюффон*) — 2048.

Следовательно, частоты выпадений герба группируются около 0,5, хотя и не равны никогда этому числу.

Тесты

1. Определение случайной величины

1.1. Какие значения принимает случайная величина — количество орлов при подкидывании 5 монет?

1) 0—2. 2) 0—3. 3) 0—4. 4) 0—5. 5) 2—12.

1.2. Какие значения принимает случайная величина — количество очков при подкидывании 2 костей?

1) 0—2. 2) 0—3. 3) 0—4. 4) 0—5. 5) 2—12.

1.3. Какие значения принимает случайная величина — количество орлов при подкидывании 3 монет?

1) 0—2. 2) 0—3. 3) 0—4. 4) 0—5. 5) 2—12.

1.4. Какие значения принимает случайная величина — количество орлов при подкидывании 4 монет?

1) 0—2. 2) 0—3. 3) 0—4. 4) 0—5. 5) 2—12.

1.5. Какие значения принимает случайная величина — количество орлов при подкидывании 2 монет?

1) 0—2. 2) 0—3. 3) 0—4. 4) 0—5. 5) 2—12.

2. Распределение случайной величины

2.1. Сколько случаев выпадения 2 орлов при подкидывании 4 монет?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 6. 5) 27.

2.2. Сколько случаев выпадения 10 очков при подкидывании 3 костей?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 6. 5) 27.

2.3. Сколько случаев выпадения 3 орлов при подкидывании 4 монет?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 6. 5) 27.

2.4. Сколько случаев выпадения 2 орлов при подкидывании 3 монет?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 6. 5) 27.

2.5. Сколько случаев выпадения 7 очков при подкидывании 2 костей?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 6. 5) 27.

3. Определение математического ожидания

3.1. Чему равно математическое ожидание количества орлов при подкидывании 3 монет?

1) 1. 2) 1,5. 3) 2. 4) 7. 5) 10,5.

3.2. Чему равно математическое ожидание количества очков при подкидывании 2 костей?

1) 1. 2) 1,5. 3) 2. 4) 7. 5) 10,5.

3.3. Чему равно математическое ожидание количества орлов при подкидывании 4 монет?

1) 1. 2) 1,5. 3) 2. 4) 7. 5) 10,5.

3.4. Чему равно математическое ожидание количества орлов при подкидывании 2 монет?

1) 1. 2) 1,5. 3) 2. 4) 7. 5) 10,5.

3.5. Чему равно математическое ожидание количества очков при подкидывании 3 костей?

1) 1. 2) 1,5. 3) 2. 4) 7. 5) 10,5.

4. Треугольник Паскаля

4.1. Чему равно в треугольнике Паскаля 2-е число в 10-й строке?

1) 10. 2) 15. 3) 20. 4) 35. 5) 45.

4.2. Чему равно в треугольнике Паскаля 3-е число в 5-й строке?

1) 10. 2) 15. 3) 20. 4) 35. 5) 45.

4.3. Чему равно в треугольнике Паскаля 3-е число в 6-й строке?

1) 10. 2) 15. 3) 20. 4) 35. 5) 45.

4.4. Чему равно в треугольнике Паскаля 3-е число в 10-й строке?

1) 10. 2) 15. 3) 20. 4) 35. 5) 45.

4.5. Чему равно в треугольнике Паскаля 4-е число в 6-й строке?

1) 10. 2) 15. 3) 20. 4) 35. 5) 45.

Упражнения

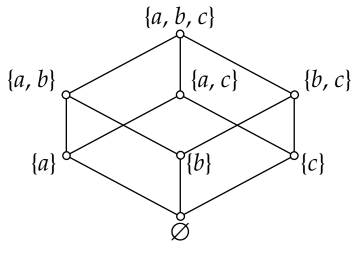
1. Пусть n — номер варианта от 1 до 8. Построить распределение, нарисовать график функции распределения и найти математическое ожидание для числа орлов на $n + 4$ монетах.

2. Пусть n — номер варианта от 9 до 16. Построить распределение, нарисовать график функции распределения и найти математическое ожидание для числа орлов на $n - 4$ монетах.

Глава 2
Теория множеств и математическая логика

$$(x), (x \to y) \Rightarrow (y)$$

§ 5. Множества и подмножества



Оглавление

1. Множество 73
1°. Множество. Множество как элемент другого множества 73
2°. Подмножество 74
3°. Диаграмма Эйлера — Венна 75
2. Множества, составленные из других множеств 77
1°. Булеан множества 77
2°. Решетка 78
3°. Декартово произведение множеств 79
3*. Парадоксы теории множеств 80
1°. Парадоксы конечных множеств 80
2°. Парадоксы бесконечных множеств 81
Тесты 83
Упражнения 84

Литература

Основная

Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы.— М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003.

Дополнительная

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов / Пер. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова.— Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

Болтянский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты.— М.: ФИМА, МЦНМО, 2002.

Гарднер М. Математические новеллы: 2-е изд., испр. и доп. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2000.

Ключевые слова

Множество, n-элементное, пустое, конечное и бесконечное множество, подмножество, надмножество, универсальное множество, диаграмма Эйлера — Венна, полная диаграммы Эйлера — Венна, булеан, решетка, упорядоченная пара, декартово произведение, парадоксы парикмахера, определения натуральных чисел, Рассела, рефлексивности, Деда Мороза, Тристрама Шенди.

1. Множество

1°. Множество. Множество как элемент другого множества

Основные, базовые математические понятия лежат в основе всех других определений и потому определению не поддаются. Тем не менее определим или, точнее, опишем понятие *множества*.

Множество.

Множество — набор любых объектов. Объекты, входящие в множество, называются его *элементами* и образуют *состав* множества.

Ни повторяемость, ни порядок элементов не влияет на состав множества. Кроме того, множество — это *один объект*!

Множества обозначают прописными латинскими буквами $A, \ldots, Z$, а их абстрактные элементы — строчными латинскими буквами $a, \ldots, z$. Множества задают с помощью перечисления их элементов в фигурных скобках: $\{\ldots\}$.

Для обозначения принадлежности элемента множеству используется значок $\in$, для обозначения не принадлежности — значок $\notin$.

Примеры.

Запишем три множества по три элемента:

$$A = \{\text{улица, фонарь, аптека}\},$$
$$B = \{\text{a, b, c}\},$$
$$C = \{1, 2, 3\}.$$

Множество A состоит из трех слов-элементов *улица*, *фонарь* и *аптека*.

Множество B состоит из трех букв-элементов a, b и c.

Множество C состоит из трех чисел-элементов 1, 2 и 3.

Обозначим принадлежность элементов нашим трем множествам:

$$\text{улица} \in A, \text{фонарь} \in A, \text{аптека} \in A;$$
$$a \notin A, b \notin A, c \notin A; 1 \notin A, 2 \notin A, 3 \notin A;$$

$$a \in B, b \in B, c \in B;$$
$$\text{улица} \notin B, \text{фонарь} \notin B, \text{аптека} \notin B; 1 \notin B, 2 \notin B, 3 \notin B;$$

$$1 \in C, 2 \in C, 3 \in C;$$
$$\text{улица} \notin C, \text{фонарь} \notin C, \text{аптека} \notin C; a \notin C, b \notin C, c \notin C.$$

Рассмотрим интересное понятие количества элементов множества.

n-элементное, пустое, конечное и бесконечное множество.

Множество, состоящее только из одного элемента, называется *одноэлементным*, из двух элементов — *двухэлементным*, из трех — *трехэлементным* и так далее. Множество, состоящее из n элементов, называется *n-элементным*.

Множество, совсем не имеющее никаких элементов, называется *нульэлементным, или пустым*, и имеет специальное обозначение: $\{\} \equiv \varnothing$.

Множество называется *конечным*, если оно содержит конечное количество элементов, и *бесконечным*, если содержит бесконечное количество элементов.

Примеры.

Запишем три новых множества:

$$D = \{\varnothing\} \equiv \{\{\}\};$$
$$E = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\},$$
$$F = \{\varnothing, \{a\}\}.$$

Важно то обстоятельство, что элементами множества могут быть другими множествами, как показано в последних примерах.

Обратит внимание, что множества $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$ — разные. Множество $\varnothing$ — пустое и не содержит никаких элементов, а множество $\{\varnothing\}$ — одноэлементное и содержит один элемент — другое множество.

Поэтому множество D состоит из одного элемента — пустого множества $\varnothing$.

Множество E содержит два элемента: множества $\{a, b\}$ и $\{a, b, c\}$.

Множество F содержит тоже два элемента: множества $\varnothing$ и $\{a\}$.

В заключении приведем серию множеств, отличающихся друг от друга:

$$\varnothing \neq \{\varnothing\} \neq \{\{\varnothing\}\} \neq \{\{\{\varnothing\}\}\} \neq \{\{\{\{\varnothing\}\}\}\} \neq \{\{\{\{\{\varnothing\}\}\}\}\}.$$

Первое множество в серии не содержит элементов, второе имеет один элемент — пустое множество, единственный элемент третьего — множество, которое содержит пустое множество, четвертого — множество, которое содержит множество, которое содержит пустое множество, и так далее.

Фигурные скобки — это не круглые. Двойные фигурные скобки нельзя заменить на одинарные, как это можно сделать с круглыми.

2°. Подмножество

Теперь, основываясь на понятии множества, определим *подмножество*.

Подмножество. Надмножество.

Подмножество некоторого данного множества — это любое множество, состоящее из произвольного количества элементов данного множества. Данное множество по отношению к своим подмножествам называется *надмножеством*.

Для обозначения включения подмножества в множество используется значок $\subset$, для обозначения не включения — значок $\not\subset$.

Пример.

Рассмотрим множество U, состоящее из двенадцати студентов, пронумерованных числами от 1 до 12: $U = \{1, 2, \ldots, 12\}$.

Предположим, что студенты с номерами 1, 2, 3 и 4 не достигли 18 лет, а студенты 1, 5 и 6 являются отличниками.

Обозначим множество студентов, не достигших 18 лет, буквой A, а отличников — буквой B. Тогда $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 5, 6\}$.

Итак, множество U включает два *подмножества*: A и B, а множества A и B, в свою очередь, включены в множество U. Обозначение: $A \subset U$, $B \subset U$.

Множество U по отношению к множествам A и B называется *универсальным*, поскольку элементы для A и B берутся только из U.

Отметим, что, по определению, любое подмножество — это тоже какое-то множество.

Универсальное множество.

Универсальное множество — это множество, которое включает все остальные рассматриваемые множества. Обозначение: U.

Пример.

Присмотримся к полученной в последнем примере конструкции: множеству U и двум его подмножествам A и B. Очевидно, что имеются еще четыре готовых подмножества универсального множества U:

1) $C_0 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ — студенты, которые не обладают ни одним из названных свойств;

2) $C_1 = \{2, 3, 4\}$ — студенты, которые обладают только свойством A;

3) $C_2 = \{5, 6\}$ — студенты, которые обладают только свойством B;

4) $C_3 = \{1\}$ — студенты, которые обладают сразу обоими свойством A и B.

Эти множества — подмножества не только универсального множества U, но и подмножества его подмножеств A и B. Выпишем цепочки принадлежности множеств друг другу:

$$C_0 \subset U;\ C_1 \subset A \subset U;\ C_2 \subset B \subset U;$$
$$C_3 \subset A \subset U,\ C_3 \subset B \subset U.$$

3°. Диаграмма Эйлера — Венна

Диаграмма Эйлера — Венна.

Диаграмма Эйлера — Венна — это графическое изображение множеств в виде плоских пересекающихся фигур.

Пример.

Изобразим все наши множества U, A, B, C_0, C_1, C_2 и C_3 графически на диаграмме Эйлера — Венна, где универсальное множество U представлено в виде прямоугольника, а множества A и B — в виде пересекающихся кругов (см. рис. 1).

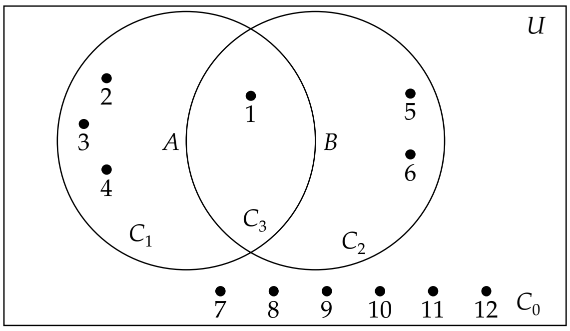


Рис. 1. Полная диаграмма Эйлера — Венна

На рисунке 1 в качестве примера показано то, что называется *полной диаграммой Эйлера — Венна*. На этой диаграмме универсальное множество разбито двумя множествами на 4 части.

Полная диаграмма Эйлера — Венна

Полная диаграмма Эйлера — Венна — диаграмма Эйлера — Венна, на которой показаны все возможные случаи пересечения множеств.

Говорят, что полная диаграмма Эйлера — Венна имеет всю полноту общности, поскольку на ней представлены элементы, принадлежащие всем возможным случаям пересечения множеств. Неполная же диаграмма Эйлера — Венна не представляет всей полноты общности.

Примеры.

1. Пусть множество $A = \{1, 5\} \subset B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset U = \{1, 2, \ldots, 12\}$, как показано на рисунке 2. Говорят, что это не общий, а частный случай взаимного расположения множеств A и B: множество A включено в множество B. Здесь универсальное множество двумя разными подмножествами разбито на 3 части.

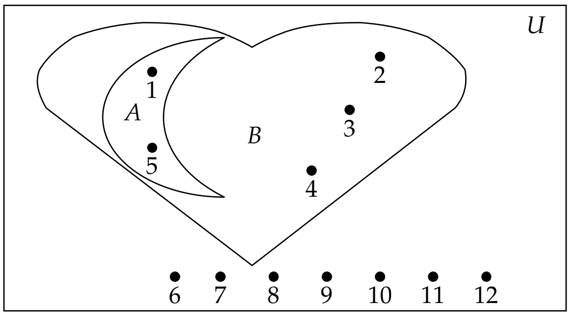


Рис. 2. Неполная диаграмма Эйлера — Венна

2. Пусть $A = \{1, 5\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$ не имеют общих элементов, $A \subset U$, $B \subset U$, $U = \{1, 2, \ldots, 12\}$. И в этом частном случае взаимного расположения различных множеств A и B они разбивают универсальное множество на 3 части.

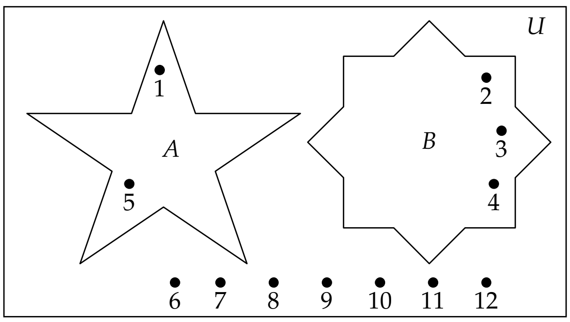


Рис. 3. Неполная диаграмма Эйлера — Венна

2. Множества, составленные из других множеств

1°. Булеан множества

Подмножество. Надмножество.

Итак, *подмножество* — это множество, все элементы которого принадлежат также другому множеству — *надмножеству*.

Конечно, в надмножестве могут быть элементы, которых нет в подмножестве.

В математике считается по определению, что пустое множество $\varnothing$ является подмножеством любого множества A: $\varnothing \subset$ A.

Интересные конструкции получаются в том случае, если выписать все возможные разные подмножества какого-нибудь множества.

Булеан.

Булеан — это множество, составленное из всех подмножеств некоторого множества.

Другими словами, *булеан* — это множество всех подмножеств некоторого множества.

Обозначение булеана множества A: $\wp(A)$.

Примеры.

1. Рассмотрим следующий простейший абстрактный пример. Выпишем булеан, то есть множество всех подмножества, одноэлементного множества $A = \{a\}$, которое имеет всего два подмножества:

$$\varnothing \subset \{a\},\ \{a\} \subset \{a\},$$

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{a\}\}.$$

2. Выпишем булеан, то есть все подмножества двухэлементного множества $B = \{a, b\}$, их всего четыре:

$$\varnothing \subset \{a, b\},\ \{a\} \subset \{a, b\},\ \{b\} \subset \{a, b\},\ \{a, b\} \subset \{a, b\},$$

$$\wp(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

3. Выпишем булеан, то есть все подмножества трехэлементного множества $C = \{a, b, c\}$, их всего восемь:

$$\varnothing \subset \{a, b, c\},\ \{a\} \subset \{a, b, c\},\ \{b\} \subset \{a, b, c\},\ \{c\} \subset \{a, b, c\},$$

$$\{a, b\} \subset \{a, b, c\},\ \{a, c\} \subset \{a, b, c\},\ \{b, c\} \subset \{a, b, c\},\ \{a, b, c\} \subset \{a, b, c\},$$

$$\wp(C) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Теперь можно сформулировать теорему, доказательство которой слишком просто, чтобы его здесь приводить.

Теорема 4. Множество из n элементами имеет 2^n подмножеств.

2°. Решетка

Все подмножества конечного множества, то есть булеан, удобно рисовать в виде *решетки*.

Решетка.

Решетка — диаграмма, на которой линией соединены подмножества, отличающиеся ровно на один элемент, причем подмножества с одинаковым количеством элементов располагаются на одном уровне.

Примеры.

1. Сначала на рисунке 5 нарисуем решетку булеана одноэлементного множества $\{a\}$: $\varnothing \subset \{a\}$.

2-элементное множество:

0-элементное множество:

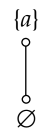


Рис. 5. Решетка булеана одноэлементного множества $\{a\}$

2. Теперь на рисунке 6 изобразим решетку булеана двухэлементного множества $\{a, b\}$:

$\varnothing \subset \{a\}$, $\varnothing \subset \{b\}$;

$\{a\} \subset \{a, b\}$, $\{b\} \subset \{a, b\}$.

2-элементное множество:

1-элементные множества:

0-элементное множество:

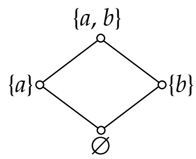


Рис. 6. Решетка булеана двухэлементного множества $\{a, b\}$

3. Наконец, на рисунке 7 представим решетку булеана трехэлементного множества $\{a, b, c\}$

$\varnothing \subset \{a\}$, $\varnothing \subset \{b\}$, $\varnothing \subset \{c\}$;

$\{a\} \subset \{a, b\}$, $\{a\} \subset \{a, c\}$, $\{b\} \subset \{a, b\}$, $\{b\} \subset \{b, c\}$, $\{c\} \subset \{a, c\}$, $\{c\} \subset \{b, c\}$;

$\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$, $\{a, c\} \subset \{a, b, c\}$, $\{b, c\} \subset \{a, b, c\}$.

3-элементное множество:

2-элементные множества:

1-элементные множества:

0-элементное множество:

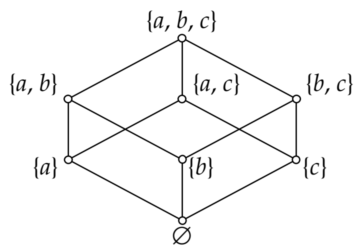


Рис. 7. Решетка булеана трехэлементного множества $\{a, b, c\}$

3°. Декартово произведение множеств

Перед определением декартового произведения необходимо ввести понятие упорядоченной пары элементов двух множеств: первый член пары — это элемент одного множества, второй — другого.

Упорядоченная пара.

Пара объектов (a, b) называется *упорядоченной*, если положение объектов в паре фиксировано, их нельзя менять местами.

Обратите внимание, что пары (a, b) и (b, a) — разные.

Декартово произведение.

Декартовым, или прямым, произведением множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар элементов A и B:

$$A \times B = \{(x, y): x \in A \text{ и } y \in B\}.$$

Примеры.

1. Найдем $\{a, b\} \times \{c, d, e\}$: $\{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$.

Изобразим это декартово произведение графически:

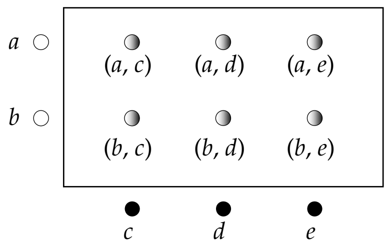


Рис. 8. Декартово, или прямое, произведение множеств

Таким образом, элементами декартового произведения двух множеств являются пары элементов исходных множеств. Причем упорядочены элементы в парах, а не сами пары!

2. Система прямоугольных координат — это декартово произведение множества действительных чисел $\mathbb{R}$ на себя: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (рис. 9).

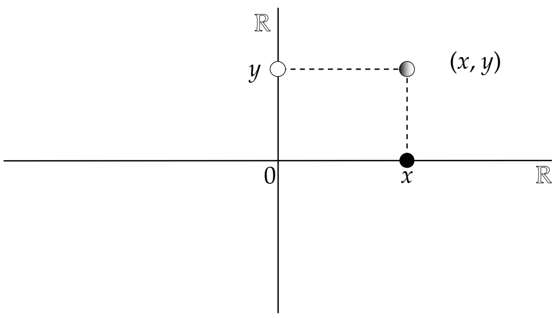


Рис. 9. Прямоугольные координаты $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

3*. Парадоксы теории множеств

1°. Парадоксы конечных множеств

Не делается никаких априорных предположений ни о природе элементов множества, ни о способе их включения во множество. Предметом теории множеств является изучение таких свойств множеств, которые не зависят от природы составляющих их элементов.

Именно поэтому с заданием множества следует быть осторожным. Например, множество всех молекул жидкости, налитой в стакан, не является точно определенным вследствие процессов испарения и конденсации.

Парадоксы конечных множеств показывают, что иногда «задание» множества, кажущееся четким, может оказаться некорректным.

1. Парадокс парикмахера.

В одном взводе был взводный парикмахер (парикмахеры в армии раньше назывались брадобреями). Командир приказал ему (видимо, взвод был большой и брадобрей не справлялся) брить *тех и только тех солдат, которые не бреются сами*.

Принадлежит ли этому множеству сам парикмахер?

Если да, то он *не бреется сам*. Но тогда его должен брить парикмахер, то есть он сам. Выходит, что он все же *бреется сам*, то есть не принадлежит множеству.

Если нет, то он *бреется сам*. Поэтому парикмахер не должен его брить, то есть он *не бреется сам*. Но тогда он принадлежит этому множеству.

Получающийся парадокс показывает, что это множество не определено корректно.

2. Парадокс определения натуральных чисел.

Зададим множество всех натуральных чисел, которые можно определить при помощи не более двадцати слов русского языка. Это множество конечно потому, что множество всех слов русского языка конечно.

Рассмотрим *сумму всех натуральных чисел, каждое из которых определяется не более чем двадцатью словами русского языка*.

Вопрос: принадлежит ли число, заданное этой суммой, нашему множеству?

Эта сумма — число, описанное не более чем двадцатью словами русского языка, поэтому оно должно принадлежать нашему множеству, то есть совпадать с одним из его чисел.

Но это невозможно, так как эта сумма больше каждого из слагаемых — больше каждого элемента нашего множества.

3. Парадокс Рассела.

Обычно множества, с которыми приходится иметь дело, и все далее рассматриваемые множества в этой книге, не содержат себя в качестве элемента. Вот и рассмотрим множество, состоящее их всех тех множеств, которые не содержат самое себя в качестве своего элемента.

Но возникает следующий вопрос: содержит ли это множество себя в качестве элемента?

Если это множество содержит себя в качестве элемента, то это противоречит определению этого множества.

А если это множество не содержит себя, то получается снова противоречие: тогда это множество по определению должно быть своим элементом.

4. Парадокс рефлексивности.

Прилагательное русского языка назовем *рефлексивным*, если оно обладает свойством, которое определяет.

Например, прилагательное «русский» — рефлексивное, а прилагательное «английский» — нерефлексивное, прилагательное «трехсложный» — рефлексивное (это слово состоит из трех слогов), а прилагательное «четырехсложный»—нерефлексивное (состоит из пяти слогов).

Зададим множество всех рефлексивных прилагательных.

Рассмотрим прилагательное «нерефлексивный». Оно рефлексивное или нет?

Если оно рефлексивно, следовательно, оно нерефлексивно по своему значению.

Если же оно нерефлексивно, значит, оно обладает свойством, которое определяет, то есть рефлексивно.

Эти парадоксы говорят о том, что нельзя создавать множества произвольными словосочетаниями.

Эти парадоксы возникают по той причине, что в них на одном уровне размещены предметы с разных структурных уровней, которые по отношению друг к другу являются объектом и субъектом.

Самый простой способ избежать подобных некорректных обращений с объектами и субъектами — рассматривать используемые множества только как подмножества одного всеобъемлющего конкретно заданного универсального множества.

2°. Парадоксы бесконечных множеств

Следующие парадоксы демонстрируют нарушение принципа «часть меньше целого» для бесконечных множеств. Нарушение этого принципа может быть использовано для определения бесконечных множеств и для того, чтобы отличать бесконечные множества от конечных.

1. Парадокс Деда Мороза.

На Новый год к детишкам пришел математический Дед Мороз с мешком конфет. Конфет в мешке бесконечно много, и они занумерованы натуральными числами. На каждой конфете написан ее номер, и для каждого натурального числа есть ровно одна конфета с этим номером.

За одну минуту до полночи Дед Мороз взял конфету № 1 и подарил детям. Через полминуты он дал детям конфеты № 2 и № 3 (наверно, подумал, что мало дал), но при этом конфету №1 забрал (видимо, дети не успели ее съесть). Еще через четверть минуты он дал детям конфеты № 4, № 5, № 6 и № 7, но забрал конфеты № 2 и № 3. И так далее: щедрый Дед Мороз каждый раз дает вдвое больше конфет, чем на предыдущем шаге.

При этом количество конфет у детей стремительно возрастает (но начинает закрадываться подозрение…).

Вопрос: сколько конфет будет у детей в полночь?

Давайте разбираться последовательно.

У кого будет в полночь первая конфета? У Деда Мороза.

А вторая конфета? У Деда Мороза: он забрал ее себе за четверть минуты до полночи.

У кого будет n-я конфета? Хитрый математический Дед Мороз ее тоже забрал.

Итак, каждая конкретная конфета в полночь окажется у Деда Мороза. Что же получается? После каждого шага у детей становится в два раза больше конфет, а в полночь происходит катастрофа!

---

2. Парадокс Тристрама Шенди.

В романе Стерна «Жизнь и мнения Тристрама Шенди, джентльмена» герой обнаруживает, что ему потребовался целый год, чтобы изложить события первого дня его жизни, и еще один год понадобился, чтобы описать второй день. В связи с этим герой сетует, что материал его биографии будет накапливаться быстрее, чем он сможет его обработать, и он никогда не сможет ее завершить.

«Теперь я утверждаю,— возражает на это математик Рассел,— что если бы он жил вечно и его работа не стала бы ему в тягость, даже если бы его жизнь продолжала быть столь же богатой событиями, как вначале, то ни одна из частей его биографии не осталась бы ненаписанной».

Действительно, события n-го дня Шенди мог бы описать за n-й год и, таким образом, в его автобиографии каждый день оказался бы запечатленным. Иначе говоря, если бы жизнь длилась бесконечно, то она насчитывала бы столько же лет, сколько дней.

На самом деле парадоксов тут никаких нет. Все дело в том, что бесконечные множества устроены существенно сложнее конечных, и интуиция тут не всегда срабатывает правильно.

Тесты

1. Множество. Множество как элемент другого множества

1.1. Сколько элементов содержит множество $A = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

1.2. Сколько элементов содержит множество $A = \{\{1, 2\}, 3, 4\}$?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

1.3. Сколько элементов содержит множество $A = \{1, 2, 3, 4\}$?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

1.4. Сколько элементов содержит множество $A = \{\varnothing\}$?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

1.5. Сколько элементов содержит множество $A = \{\{\varnothing\}\}$?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

2. Подмножество

2.1. Какие отношения сравнения верны, если $A = \{1, 2, 3\}$ *и* $B = \{2, 3, 4\}$?

1) $A = B$. 2) $A \neq B$ и $A \subset B$. 3) $A \neq B$ и $B \subset A$. 4) $A \not\subset B$ и $B \not\subset A$. 5) $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$.

2.2. Какие отношения сравнения верны, если $A = \{1, 2, 3\}$ *и* $B = \{4, 5, 6\}$?

1) $A = B$. 2) $A \neq B$ и $A \subset B$. 3) $A \neq B$ и $B \subset A$. 4) $A \not\subset B$ и $B \not\subset A$. 5) $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$.

2.3. Какие отношения сравнения верны, если $A = \{3, 2, 3\}$ *и* $B = \{2, 3, 4\}$?

1) $A = B$. 2) $A \neq B$ и $A \subset B$. 3) $A \neq B$ и $B \subset A$. 4) $A \not\subset B$ и $B \not\subset A$. 5) $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$.

2.4. Какие отношения сравнения верны, если $A = \{3, 2, 3\}$ *и* $B = \{3, 2, 3\}$?

1) $A = B$. 2) $A \neq B$ и $A \subset B$. 3) $A \neq B$ и $B \subset A$. 4) $A \not\subset B$ и $B \not\subset A$. 5) $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$.

2.5. Какие отношения сравнения верны, если $A = \{3, 2, 3\}$ *и* $B = \{2, 2, 2\}$?

1) $A = B$. 2) $A \neq B$ и $A \subset B$. 3) $A \neq B$ и $B \subset A$. 4) $A \not\subset B$ и $B \not\subset A$. 5) $A = \varnothing$ и $B = \varnothing$.

3. Диаграмма Эйлера — Венна

3.1. Сколько частей на полной диаграмме с 2 множествами?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 8. 5) 16.

3.2. Сколько частей на полной диаграмме с 3 множествами?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 8. 5) 16.

3.3. Сколько частей на полной диаграмме с 4 множествами?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 8. 5) 16.

3.4. Сколько частей на полной диаграмме с 1 множеством?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 8. 5) 16.

3.5. Сколько частей на неполной диаграмме с 2 разными множествами?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 8. 5) 16.

4. Булеан множества

1) Сколько элементов содержит булеан $\wp(\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\})$?

1) 1. 2) 2. 3) 4. 4) 8. 5) 16.

2) Сколько элементов содержит булеан $\wp(\varnothing)$?

1) 1. 2) 2. 3) 4. 4) 8. 5) 16.

3) Сколько элементов содержит булеан $\wp(\{\varnothing, \{a\}\})$?

1) 1. 2) 2. 3) 4. 4) 8. 5) 16.

4) Сколько элементов содержит булеан $\wp(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$?

1) 1. 2) 2. 3) 4. 4) 8. 5) 16.

5) Сколько элементов содержит булеан $\wp(\{\varnothing\})$?

1) 1. 2) 2. 3) 4. 4) 8. 5) 16.

4. Декартово произведение множеств

1.1. Сколько множеств участвует в прямом произведении?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 5. 5) 6.

1.2. Сколько элементов содержит прямое произведение, если множества, участвующие в произведении, имеют 2 и 3 предмета?

1) 2. 2) 3. 3) 4. 4) 6. 5) 8.

1.3. Какой пары нет в прямом произведении $(1, 0)\times(2, 1, 0)$?

1) (0, 1). 2) (1, 0). 3) (1, 1). 4) (1, 2). 5) (2, 1).

1.4. Какая пара есть в прямом произведении $(2, 1)\times(4, 3, 2)$?

1) (0, 1). 2) (1, 0). 3) (1, 2). 4) (2, 1). 5) (3, 3).

1.5. Какая пара является координатами какой-нибудь точки на координатной плоскости на прямой $y = x$ *(биссектриса первого квадранта)?*

1) (0, 1). 2) (1, 0). 3) (1, 2). 4) (2, 1). 5) (3, 3).

Упражнения

Пусть n — номер варианта от 1 до 16.

1. Выпишите все 16 подмножеств 4-элементного булеана множества

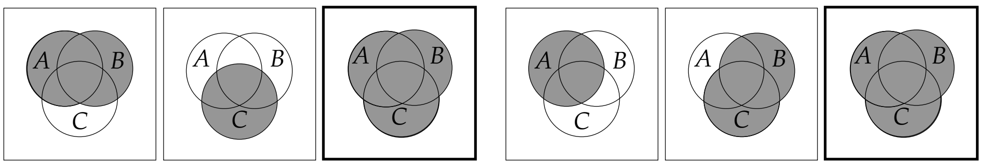
$$\{n, n+1\}$$

и нарисуйте решетку из этих 16 подмножеств.

2. Нарисуйте в виде таблицы, как на рисунке 8, декартово произведение двух множеств

$$\{n, n+1, n+2, n+3\} \times \{a, b, c, d, e\}.$$

§ 6. Операции на множествах, логические связки



$A \cup B$ $\quad$ C $\quad$ $(A \cup B) \cup C$ $\quad$ A $\quad$ $B \cup C$ $\quad$ $(A \cup B) \cup C$

Оглавление

1. Основные операции на множествах. Логические переменные 87
1°. Операция объединения множеств 87
2°. Логические переменные. Таблица истинности 87
3°. Операция пересечения множеств 89
4°. Операция дополнения множества 90
2*. Другие операции на множествах и логические связки 91
1°. Операция разности множеств 91
2°. Операция симметрической разности множеств 91
3°. Операция эквивалентности множеств 92
4°. Операция импликации множеств 93
3. Некоторые законы теоретико-множественных и логических операций 94
1°. Основные законы 94
2°*. Дополнительные соотношения 95
3°. Доказательство законов 95
Тесты 97
Упражнения 100

Литература

Основная

Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы.— М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003.

Дополнительная

Карпов Ю. Г. Теория автоматов.— СПб.: Питер, 2002.

Гарднер М. Математические новеллы: 2-е изд., испр. и доп. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2000.

Ключевые слова

Объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, эквивалентность и импликация множеств, логическая связка, логическая связка «или», «и», «не», «исключающее или», «тогда и только тогда», «*если…, то*», дизъюнкция, логическая переменная, логическое значение, логическая операция, таблица истинности, конъюнкция, дополнение множества, отрицание, разность, эквивалентность, импликация, законы идемпотентности, коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности, нуля и единицы, де Моргана, обобщенные де Моргана.

1. Основные операции на множествах. Логические переменные

1°. Операция объединения множеств

Операции на множествах начнем изучать с помощью универсального множества $U = \{1, 2, \ldots, 12\}$.

Объединение множеств.

На примере универсального множества $U = \{1, 2, \ldots, 12\}$ *объединением множеств* $A = \{1, 2, 3, 4\} \subset U$ и $B = \{1, 5, 6\} \subset U$ называется множество (см. рис. 1)

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

где $\cup$ — символ объединения множеств.

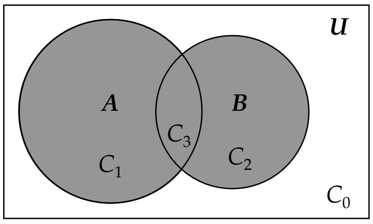


Рис. 1. Объединение множеств $A \cup B$

Таким образом, объединением охватываются три множества C_1, C_2 и C_3, которые на диаграмме (рис. 1) закрашены.

Сформулируем определение объединения множеств для общего абстрактного случая.

Объединение множеств.

Объединение множеств содержит элементы обоих множеств, причем общие элементы входят по одному разу.

Обозначение объединения множеств A и B: $A \cup B$.

Рассмотрим объединение множеств с логической точки зрения.

Логическая связка «или». Дизъюнкция.

Логически операция объединения двух множеств характеризуется так: элемент принадлежит 1-му множеству *или* 2-му множеству.

То, что x принадлежит A или B или им обоим, выражается формулой

$$x \in A \cup B \text{ то же самое, что } (x \in A) \vee (x \in B),$$

где $\vee$ — символ нашей логической операции, которая называется *логической связкой «или»*, которая также называется *дизъюнкцией*.

Обратите внимание, что логическая связка «*или*» относится именно к *свойствам* какого-то объекта x: объект x обладает свойствами A *или* B.

2°. Логические переменные. Таблица истинности

С точки зрения логики вместо одной *предметной переменной* x, принимающей значения 1, 2, …, 12 на универсуме U, удобно для элементов множеств A и B ввести две *логические переменные* a и b.

Логическая переменная. Логическое значение.

Областью определения *логической переменной* являются два *логических значения*: 1 для *истины* и 0 для *лжи*.

Примеры.

Элементы множества C_0 не принадлежат ни множеству A, ни множеству B, поэтому логические значения для элементов множества C_0 будут $a = 0$ и $b = 0$.

Элементы C_1 принадлежат A и не принадлежат B, поэтому $a = 1$ и $b = 0$.

Элементы C_2 не принадлежат A и принадлежат B, для них $a = 0$ и $b = 1$.

Элементы C_3 принадлежат как A, так и B, для них $a = 1$ и $b = 1$.

Теперь объединение множеств можно рассматривать как *логическую операцию, или логическую функцию*, от двух логических аргументов.

Логическая операция.

Логическая операция, или логическая функция, она же логическая связка,— это функция логических переменных, значением которой является логическое значение.

Логическая функция — это самая простая функция. Логические функции удобно задавать в обычном табличном виде значения аргументов — значение функции.

Учитывая, что объединение множеств $A \cup B$ состоит из трех множеств C_1, C_2 и C_3, запишем операцию объединения множеств в табличном виде (см. табл. 2).

Таблица истинности.

Табличный вид логической функции называется *таблицей истинности*.

Таблица 2

Таблица истинности дизъюнкции

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Итак, дизъюнкция — это логическая функция от двух аргументов.

Эту таблицу очень легко запомнить: *дизъюнкция* равна 0 тогда и только тогда, когда оба логических аргумента равны 0.

Обратите внимание, что между таблицей истинности и диаграммой Эйлера — Венна существует взаимно однозначное соответствие (сравните табл. 2 и рис. 1):

1) число единиц в последнем столбце совпадает с числом закрашенных областей на диаграмме;

2) четыре комбинации логических переменных a и b отвечают четырем областям C_0, C_1, C_2 и C_3.

3°. Операция пересечения множеств

Пересечение множеств.

На примере универсального множества $U = \{1, 2, \ldots, 12\}$ *пересечением множеств* A и B называется множество $A \cap B$, содержащее элементы, входящие сразу в оба множества (см. рис. 3):

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 5, 6\} = \{1\} = C_3,$$

где $\cap$ — символ пересечения множеств.

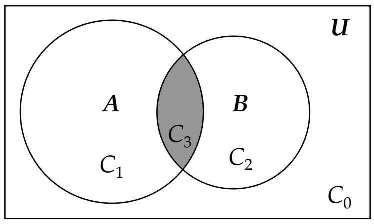


Рис. 3. Пересечение множеств $A \cap B$

Пересечение охватывает множество C_3, закрашенное на диаграмме (рис. 3).

Пересечение множеств.

Пересечение множеств содержит элементы, общие для обоих множеств.

Обозначение пересечения множеств A и B: $A \cap B$.

Значки объединения и пересечения множеств легко запомнить. Объединение $\cup$ напоминает чашку, в которой все накапливается, и латинскую букву U (по-английски чашка — CUP). А пересечение $\cap$ напоминает шапку, с которой почти все скатывается, и латинскую букву А (по-английски шапка — CAP).

Логическая связка «и». Конъюнкция.

Логически операция пересечения двух множеств характеризуется так: элемент принадлежит 1-му множеству *и* 2-му множеству, то есть

$$x \in A \cap B \text{ то же самое, что } (x \in A) \wedge (x \in B), \text{ или } (x \in A) \,\&\, (x \in B),$$

где $\wedge$ или & — символ *логической связки «и»*, которая называется *конъюнкцией*.

Обратите внимание, что логическая связка «*и*» относится именно к *свойствам* какого-то объекта x: объект x обладает свойствами A *и* B.

Конъюнкция — логическая функция двух аргументов с таблицей истинности 4. Эту таблицу очень легко запомнить: *конъюнкция* равна 1 тогда и только тогда, когда обе логические переменные равны 1.

Между таблицей истинности и диаграммой Эйлера — Венна существует взаимно однозначное соответствие (сравните табл. 4 и рис. 3):

1) число единиц в последнем столбце равно числу закрашенных областей;

2) четыре комбинации логических переменных a и b отвечают четырем областям C_0, C_1, C_2 и C_3.

Таблица 4

Таблица истинности конъюнкции

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4°. Операция дополнения множества

Дополнение множества.

На примере универсального множества $U = \{1, 2, \ldots, 12\}$ *дополнением множества* A называется множество $\overline{A}$, содержащее элементы, не входящие во множество A (см. рис. 5):

$$\overline{A} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} = C_0 \cup C_2.$$

где $\overline{}$ — символ дополнения множества.

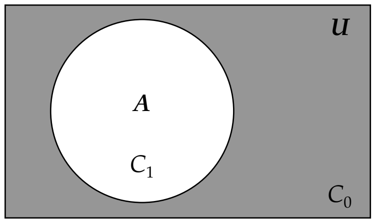


Рис. 5. Дополнение множества A

Дополнение состоит из множеств C_0 и C_2, закрашенных на диаграмме (рис. 5).

Дополнение множества.

Дополнение множества A обозначается $\overline{A}$ и содержит те и только те элементы универсального множества U, которых нет в A.

Рассмотрим операцию дополнения множеств с логической точки зрения.

Логическая связка «не». Отрицание.

Логически операция дополнения множества характеризуется так: элемент *не* принадлежит множеству.

То, что x не принадлежит множеству A, записывается так:

$$x \in \overline{A} \text{ то же самое, что } \neg(x \in A),$$

где $\neg$ — символ *логической связки «не»*, которая называется *отрицанием*.

Логическая связка *«не»* относится именно к *свойствам* какого-то объекта x: объект x *не* обладает свойством A.

Отрицание — логическая функция одного аргумента с таблицей истинности 6. Эту таблицу очень легко запомнить: значение функции противоположно значению аргумента.

Таблица 6

Таблица истинности отрицания

a	$\neg a$
0	1
1	0

Между таблицей истинности и диаграммой Эйлера — Венна существует взаимно однозначное соответствие (сравните табл. 6 и рис. 5):

1) число единиц в последнем столбце совпадает с числом закрашенных областей на диаграмме;

2) две комбинации логической переменной a отвечают двум областям C_0 и C_1.

Очевидно, что точно так же можно определить дополнение множества B (или отрицание свойства B), но математики считают, что это то же самое в смысле определение понятий.

2*. Другие операции на множествах и логические связки

1°. Операция разности множеств

Разность множеств.

Разность множеств A и B — множество $A \setminus B$, содержащее элементы, входящие в A и не входящие в B (см. рис. 7):

$$A \setminus B = \{1, 2, 3, 4\} - \{1, 5, 6\} = \{2, 3, 4\} = C_1.$$

Другими словами, *разность множеств* A и B содержит элементы A без элементов B.

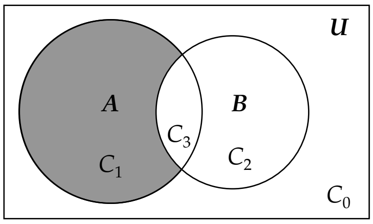


Рис. 7. Разность множеств $A - B$

Рассмотрим операцию разности множеств с логической точки зрения.

Разность.

Логически операция разности множеств характеризуется так: элемент принадлежит 1-му множеству *и не* принадлежит 2-му множеству:

$$x \in A \setminus B \text{ то же самое, что } (x \in A) \setminus (x \in B).$$

Разность — логическая функция двух аргументов с таблицей истинности 8, которую легко запомнить: разность равна 1 тогда и только тогда, когда 1-я логическая переменная равна 1, а 2-я — 0.

Таблица 8

Таблица истинности разности

a	b	$a \setminus b$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

2°. Операция симметрической разности множеств

Симметрическая разность.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B$, содержащее элементы, входящие в A и не входящие в B, и элементы, входящие в B и не входящие в A, то есть объединение обоих разностей (см. рис. 9):

$$A \Delta B = \{1, 2, 3, 4\} + \{1, 5, 6\} =$$
$$= \{2, 3, 4, 5, 6\} = C_1 \cup C_2.$$

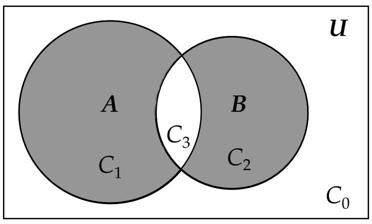


Рис. 9. Симметрическая разность множеств $A \Delta B$

Рассмотрим операцию симметрической разности множеств с логической точки зрения.

Логическая связка «исключающее или».

Логически операция симметрической разности множеств характеризуется так: элемент принадлежит или только 1-му множеству или только 2-му множеству:

$$x \in A \,\Delta\, B \text{ то же самое, что } (x \in A)\,\Delta\,(x \in B).$$

где Δ — символ *логической связки исключающее «или»*, или *разделяющее «или»*.

Исключающее «или» — логическая функция двух аргументов с таблицей истинности 10, которую легко запомнить: исключающее или равно 1 тогда и только тогда, когда логические переменные имеют разные значения.

Логическая связка *исключающее «или»* относится к *свойствам* какого-то объекта x: объект x обладает свойствами *либо* A, *либо* B. Но не теми и другими. В этом состоит отличие исключающего «или» от обычного, или включающего, или соединяющего «или».

Таблица 10

Таблица истинности исключающего «или»

a	b	$a\,\Delta\,b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3°. Операция эквивалентности множеств

Эквивалентность множеств.

Эквивалентностью множеств A и B называется множество $A \sim B$, содержащее элементы, входящие либо и в A, и в B, либо ни в A, ни в B, то есть эквивалентность множеств совпадает с дополнением симметрической разности (см. рис. 11):

$$A \sim B = \{1, 2, 3, 4\} \sim \{1, 5, 6\} =$$
$$\{1, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} = C_0 \cup C_3.$$

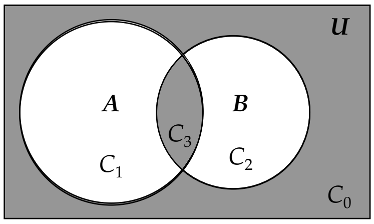


Рис. 11. Эквивалентность множеств $A \sim B$

Изучим операцию эквивалентности множеств с логической точки зрения.

Логическая связка «тогда и только тогда». Эквивалентность.

Логически операция эквивалентности множеств характеризуется так: элемент или принадлежит обоим множествам, или не принадлежит им:

$$x \in A \sim B \text{ то же самое, что } (x \in A) \sim (x \in B) \text{ или } (x \in A) \leftrightarrow (x \in B).$$

где $\sim$ или $\leftrightarrow$ — символ *логической связки «тогда и только тогда»*, или *«если и только если»*, которая называется *эквивалентностью*.

Эквивалентность — логическая функция двух аргументов с таблицей истинности 12, которую легко запомнить: эквивалентность равна 1 тогда и только тогда, когда логические переменные имеют равные значения.

Эквивалентность противоположна исключающему или: там, где одна связка равна 1, другая — 0, и наоборот.

Таблица 12

Таблица истинности эквивалентности

a	b	$a \sim b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4°. Операция импликации множеств

Импликация множеств.

Импликацией множеств A и B называется множество $A \to B$, содержащее все элементы, входящие в B и не входящие в A, то есть импликация множеств совпадает с дополнением разности (см. рис. 13):

$$A \to B = \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 5, 6\} =$$
$$= \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} = C_2 \cup C_3 \cup C_4.$$

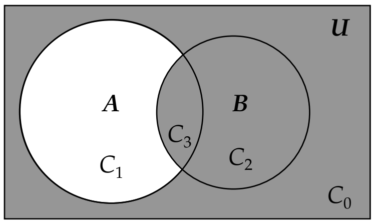


Рис. 13. Импликация множеств $A \to B$

Изучим операцию импликации множеств с логической точки зрения.

Импликация.

Логически операция эквивалентности множеств характеризуется так: элемент не принадлежит только 1-му множеству A без 2-го множества:

$$x \in A \to B \text{ то же самое, что } (x \in A) \to (x \in B).$$

где $\to$ — символ *логической связки «если…, то»*, которая называется *импликацией*.

Импликация — логическая функция двух аргументов с таблицей истинности 14, которую легко запомнить: импликация равна 0 тогда и только тогда, когда 1-я логическая переменная равна 1, а 2-я — 0 (см. табл. 14).

Импликация противоположна разности: там, где одна связка равна 1, другая равна 0, и наоборот.

Таблица 14

Таблица истинности импликации

a	b	$a \sim b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

3. Некоторые законы теоретико-множественных и логических операций

1°. Основные законы

Выпишем основные теоретико-множественные и логические законы и соотношения. В этом пункте приведены законы, в следующем — соотношения. Образцы доказательств приведем в последнем пункте.

Основные теоретико-множественные и логические законы будем записывать сразу на двух языках: сначала на языке теории множеств, затем на языке логики.

1. Законы идемпотентности.

$$A \cup A = A,\ A \cap A = A;$$

$$a \vee a = a,\ a \wedge a = a.$$

---

2. Законы коммутативности.

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A;$$

$$a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a.$$

---

3. Законы ассоциативности.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),\ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

---

4. Законы дистрибутивности.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),\ a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

---

5. Законы нуля и единицы.

$$A \cup \overline{A} = U,\ A \cap \overline{A} = \varnothing,\ A \cap U = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cup U = U,\ A \cup \varnothing = A;$$

$$a \vee \neg a = 1,\ a \wedge \neg a = 0,\ a \wedge 1 = a,\ a \wedge 0 = 0,\ a \vee 1 = 1,\ a \vee 0 = a.$$

---

6. Законы де Моргана.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b,\ \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b.$$

---

7. Обобщенные законы де Моргана.

$$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C},\ \overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C};$$

$$\neg(a \vee b \vee c) = \neg a \wedge \neg b \wedge \neg c,\ \neg(a \wedge b \wedge c) = \neg a \vee \neg b \vee \neg c.$$

2°*. Дополнительные соотношения

Теоретико-множественные и логические соотношения также запишем сразу на двух языках: сначала на языке теории множеств, затем на языке логики.

1. Разность выражается через пересечение и дополнение, или конъюнкцию и отрицание:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B};$$

$$a \setminus b = a \wedge \neg b.$$

2. Симметрическая разность выражается через объединение и разность, а исключающее или — через дизъюнкцию и разность:

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A);$$

$$a \,\Delta\, b = (a \setminus b) \vee (b \setminus a).$$

3. Эквивалентность выражается через дополнение и симметрическую разность, или отрицание и симметрическую разность:

$$A \sim B = \overline{(A \,\Delta\, B)};$$

$$a \sim b = \neg(a \,\Delta\, b).$$

4. Эквивалентность выражается через пересечение и импликацию, или через конъюнкцию и импликацию:

$$A \sim B = (A \to B) \cap (B \to A);$$

$$a \sim b = (a \to b) \wedge (b \to a).$$

5. Импликация выражается через дополнение и разность, или отрицание и разность:

$$A \to B = \overline{(A \setminus B)};$$

$$a \to b = \neg(a \setminus b).$$

6. Импликация выражается через объединение и дополнение, или дизъюнкцию и отрицание:

$$A \to B = \overline{A} \cup B;$$

$$a \to b = \neg a \vee b.$$

3°. Доказательство законов

С помощью *полных* диаграмм Эйлера — Венна доказывают законы теоретико-множественных операций.

Докажем первый закон ассоциативности (рис. 15)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Сначала нарисуем множество $A \cup B$, затем — множество C, в итоге *объединим* две картинки вместе и получим множество $(A \cup B) \cup C$.

Затем нарисуем множество A, затем — множество $B \cup C$, в итоге *объединим* две картинки вместе и получим множество $A \cup (B \cup C)$.

Полученные множества одинаковы, поскольку картинки совпадают.

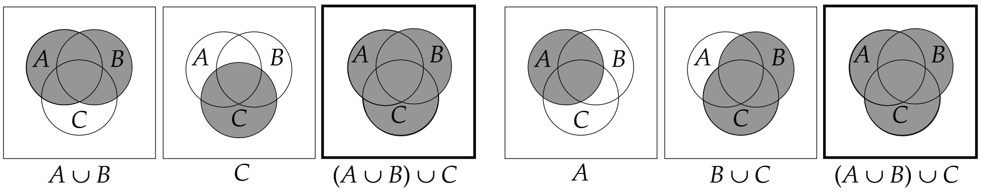


Рис. 15. Слева — множества $A \cup B$, C и $(A \cup B) \cup C$.
Справа — множества A, $B \cup C$ и $(A \cup B) \cup C$.
Ясно видно, что множества $(A \cup B) \cup C$ и $(A \cup B) \cup C$ равны

С помощью таблиц истинности также доказывают законы теоретико-множественных операций.

Снова докажем первый закон ассоциативности

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c).$$

Сначала в первых трех столбцах выпишем все восемь различных комбинаций значений логических переменных a, b и c. В четвертом столбце выпишем значение логической функции $a \vee b$, используя значения первых двух столбцов с переменными a и b. В итоге в пятом столбце выпишем значение логической функции $(a \vee b) \vee c$, используя значения четвертого и третьего столбцов.

Затем в шестом столбце выпишем значение логической функции $b \vee c$, используя значения второго и третьего столбцов с переменными b и c. В итоге в седьмом столбце выпишем значение логической функции $a \vee (b \vee c)$, используя значения первого и шестого столбцов.

Ясно видно, что в таблице 16 закрашенные столбцы — четвертый и шестой — совпадают.

Таблица 16

Таблица истинности закона ассоциативности
$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

a	b	c	$a \vee b$	$(a \vee b) \vee c$	$b \vee c$	$a \vee (b \vee c)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Тесты

1. Операция объединения множеств

1.1. Чему равно $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\}$?

1) {1}. 2) {1, 2}. 3) {1, 2, 3}. 4) {1, 2, 3, 4}. 5) {1, 2, 3, 4, 5}.

1.2. Чему равно $\{1, 2, 2\} \cup \{3, 3, 3\}$?

1) {1}. 2) {1, 2}. 3) {1, 2, 3}. 4) {1, 2, 3, 4}. 5) {1, 2, 3, 4, 5}.

1.3. Чему равно $\{1, 2, 2\} \cup \{3, 4, 5\}$?

1) {1}. 2) {1, 2}. 3) {1, 2, 3}. 4) {1, 2, 3, 4}. 5) {1, 2, 3, 4, 5}.

1.4. Чему равно $\{1, 2, 2\} \cup \{2, 2, 2\}$?

1) {1}. 2) {1, 2}. 3) {1, 2, 3}. 4) {1, 2, 3, 4}. 5) {1, 2, 3, 4, 5}.

1.5. Чему равно $\{1, 1, 1\} \cup \{1, 1, 1\}$?

1) {1}. 2) {1, 2}. 3) {1, 2, 3}. 4) {1, 2, 3, 4}. 5) {1, 2, 3, 4, 5}.

2. Операция пересечения множеств

2.1. Чему равно $\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6\}$?

1) $\varnothing$. 2) {1}. 3) {1, 2}. 4) {1, 2, 3}. 5) {1, 2, 3, 4}.

2.2. Чему равно $\{1, 2, 2\} \cap \{1, 1, 2\}$?

1) $\varnothing$. 2) {1}. 3) {1, 2}. 4) {1, 2, 3}. 5) {1, 2, 3, 4}.

2.3. Чему равно $\{1, 2, 2\} \cap \{3, 4, 5\}$?

1) $\varnothing$. 2) {1}. 3) {1, 2}. 4) {1, 2, 3}. 5) {1, 2, 3, 4}.

2.4. Чему равно $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3\}$?

1) $\varnothing$. 2) {1}. 3) {1, 2}. 4) {1, 2, 3}. 5) {1, 2, 3, 4}.

2.5. Чему равно $\{1, 1, 1\} \cap \{1, 1, 1\}$?

1) $\varnothing$. 2) {1}. 3) {1, 2}. 4) {1, 2, 3}. 5) {1, 2, 3, 4}.

3. Операция дополнения множества

3.1. Чему равно дополнение {5, 5, 6} до {1, 2, 3, 4, 5, 6}?

1) $\varnothing$. 2) {1}. 3) {1, 2}. 4) {1, 2, 3}. 5) {1, 2, 3, 4}.

3.2. Чему равно дополнение {3, 4, 5, 6} до {1, 2, 3, 4, 5, 6}?

1) $\varnothing$. 2) {1}. 3) {1, 2}. 4) {1, 2, 3}. 5) {1, 2, 3, 4}.

3.3. Чему равно дополнение {6, 5, 4} до {1, 2, 3, 4, 5, 6}?

1) $\varnothing$. 2) {1}. 3) {1, 2}. 4) {1, 2, 3}. 5) {1, 2, 3, 4}.

3.4. Чему равно дополнение {6, 5, 5} до {1, 2, 3, 4, 5, 6}?

1) $\varnothing$. 2) {1}. 3) {1, 2}. 4) {1, 2, 3}. 5) {1, 2, 3, 4}.

3.5. Чему равно дополнение {5, 5, 6, 4} до {1, 2, 3, 4, 5, 6}?

1) $\varnothing$. 2) {1}. 3) {1, 2}. 4) {1, 2, 3}. 5) {1, 2, 3, 4}.

4. Операция разности множеств

4.1. Чему равно $\{1, 2, 3\} \setminus \{4, 5, 6\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

4.2. Чему равно $\{1, 2, 2\} \setminus \{1, 1, 2\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

4.3. Чему равно $\{1, 2, 2\} \setminus \{3, 4, 5\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

4.4. Чему равно $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 2, 3\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

4.5. Чему равно $\{1, 1, 1\} \setminus \{1, 1, 1\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

5. Операция симметрической разности множеств

5.1. Чему равно $\{1, 2, 3\}\ \Delta\ \{4, 4, 4\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

5.2. Чему равно $\{1, 4, 4\}\ \Delta\ \{2, 3, 4\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

5.3. Чему равно $\{1, 2, 2\}\ \Delta\ \{2, 2, 2\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

5.4. Чему равно $\{1, 2, 3\}\ \Delta\ \{1, 2, 3\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

5.5. Чему равно $\{1, 1, 1\}\ \Delta\ \{1, 1, 1\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

6. Операция эквивалентности множеств

6.1. Чему равно $\{1, 2, 3\} \sim \{4, 4, 4\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

6.2. Чему равно $\{1, 4, 4\} \sim \{2, 3, 1\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

6.3. Чему равно $\{1, 2, 2\} \sim \{2, 2, 1\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

6.4. Чему равно $\{1, 2, 3\} \sim \{1, 2, 3\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

6.5. Чему равно $\{1, 1, 1\} \sim \{1, 1, 1\}$?

1) $\varnothing$. 2) $\{1\}$. 3) $\{1, 2\}$. 4) $\{1, 2, 3\}$. 5) $\{1, 2, 3, 4\}$.

7. Операция импликации множеств

2.1. Чему равно $A \cup B$, если $A = \{1, 2, 3, 3\}$, $B = \{2, 2, 3, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
1) {2, 2, 3, 3}. 2) {1, 2, 3, 4}. 3) {4, 4, 5, 5}. 4) {1, 2, 3, 3}. 5) {2, 3, 4, 5}.

2.2. Чему равно $A \cap B$, если $A = \{1, 2, 3, 3\}$, $B = \{2, 2, 3, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
1) {2, 2, 3, 3}. 2) {1, 2, 3, 4}. 3) {4, 4, 5, 5}. 4) {1, 2, 3, 3}. 5) {2, 3, 4, 5}.

2.3. Чему равно $\neg A$, если $A = \{1, 2, 3, 3\}$, $B = \{2, 2, 3, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
1) {2, 2, 3, 3}. 2) {1, 2, 3, 4}. 3) {4, 4, 5, 5}. 4) {1, 2, 3, 3}. 5) {2, 3, 4, 5}.

2.4. Чему равно $A \to B$, если $A = \{1, 2, 3, 3\}$, $B = \{2, 2, 3, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
1) {2, 2, 3, 3}. 2) {1, 2, 3, 4}. 3) {4, 4, 5, 5}. 4) {1, 2, 3, 3}. 5) {2, 3, 4, 5}.

2.5. Чему равно $B \to A$, если $A = \{1, 2, 3, 3\}$, $B = \{2, 2, 3, 4\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?
1) {2, 2, 3, 3}. 2) {1, 2, 3, 4}. 3) {4, 4, 5, 5}. 4) {1, 2, 3, 3}. 5) {2, 3, 4, 5}.

8. Основные законы

8.1. Какой закон является законом идемпотентности?
1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. 2) $A \cup B = B \cup A$. 3) $A \cup A = A$.
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. 5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8.2. Какой закон является законом коммутативности?
1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. 2) $A \cup B = B \cup A$. 3) $A \cup A = A$.
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. 5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8.3. Какой закон является законом ассоциативности?
1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. 2) $A \cup B = B \cup A$. 3) $A \cup A = A$.
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. 5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8.4. Какой закон является законом дистрибутивности?
1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. 2) $A \cup B = B \cup A$. 3) $A \cup A = A$.
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. 5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8.5. Какой закон является законом де Моргана?
1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. 2) $A \cup B = B \cup A$. 3) $A \cup A = A$.
4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. 5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

9. Дополнительные соотношения

98.1. Какой соотношение связывает разность с пересечением и дополнением?

1) $A \to B = \overline{A} \cup B$ 2) $A \sim B = \overline{(A \Delta B)}$. 3) $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
4) $A \sim B = (A \to B) \cap (B \to A)$. 5) $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

9.2. Какой соотношение связывает симметрическую разность с объединением и разностью?

1) $A \to B = \overline{A} \cup B$ 2) $A \sim B = \overline{(A \Delta B)}$. 3) $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
4) $A \sim B = (A \to B) \cap (B \to A)$. 5) $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

9.3. Какой соотношение связывает эквивалентность с дополнением и симметрической разностью?

1) $A \to B = \overline{A} \cup B$ 2) $A \sim B = \overline{(A \Delta B)}$. 3) $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
4) $A \sim B = (A \to B) \cap (B \to A)$. 5) $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

9.4. Какой соотношение связывает эквивалентность с пересечением и импликацией?

1) $A \to B = \overline{A} \cup B$ 2) $A \sim B = \overline{(A \Delta B)}$. 3) $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
4) $A \sim B = (A \to B) \cap (B \to A)$. 5) $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

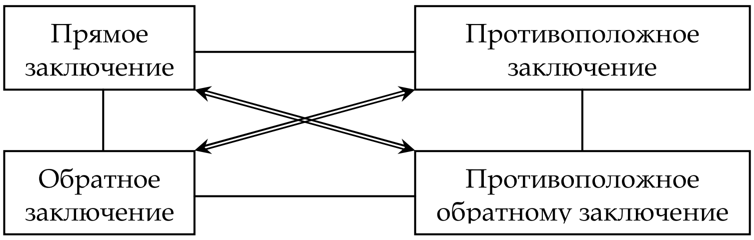
9.5. Какой соотношение связывает импликацию с объединением и дополнением?

1) $A \to B = \overline{A} \cup B$ 2) $A \sim B = \overline{(A \Delta B)}$. 3) $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
4) $A \sim B = (A \to B) \cap (B \to A)$. 5) $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Упражнения

Пусть n — номер варианта от 1 до 16. Докажите двумя способами:
а) с помощью диаграмм Эйлера — Венна;
б) с помощью таблиц истинности.
Для вариантов 1 и 9: второй закон ассоциативности.
Для вариантов 2 и 10: первый закон дистрибутивности.
Для вариантов 3 и 11: второй закон дистрибутивности.
Для вариантов 4 и 12: первый закон де Моргана.
Для вариантов 5 и 13 второй закон де Моргана.
Для вариантов 6, 14 и 15: первый обобщенный закон де Моргана.
Для вариантов 7, 8 и 16: второй обобщенный закон де Моргана.

§ 7. Логические модели утверждений



Оглавление

1. Моделирование союзов «или» и «и» и отрицания 103
1°. Моделирование множеств 103
2°. Моделирование свойств множеств 104
3°. Моделирование отрицания 105
2. Прямое, противоположное и обратное заключение 106
1°. Прямое, противоположное и обратное заключения 106
2°. Доказательство от противного. Равносильность 107
3. Необходимые и достаточные условия. Равносильность 108
1°. Достаточные и необходимые условия 108
2°. Эквивалентность 111
Тесты 112
Упражнения 115

Литература

Основная

Косовский Н. К., Тишков А. В. Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств.— СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000.

Дополнительная

Мендельсон Э. Введение в математическую логику.— М.: Наука, 1976.

Адаменко А. Н., Кучуков А. М. Логическое программирование и Visual Prolog.— СПб.: БХВ-Петербург, 2003.

Бизам Д., Герцег Я. Многоцветная логика. 175 логических задач.— М.: Мир, 1978.

Ключевые слова

Заключение, посылка, вывод, прямое заключение, противоположное заключение, обратное заключение, противоположное обратному заключение, доказательство от противного, эквивалентные заключения, эквивалентные утверждения, необходимое условие, достаточное условие

1. Моделирование союзов «или» и «и» и отрицания

1°. Моделирование множеств

Разумеется, будем рассматривать не все возможные утверждения, а только те, которые моделируются с помощью множеств и логических связок.

Математическая логика используется для моделирования свойств множеств. Моделирование самих множеств осуществляется с помощью понятия «множество».

При описании множеств используется союз «и», а также запятая, его заменяющая. Например, рассмотрим утверждение:

За экспериментом наблюдают три профессора:
физики, биологии и математики.

Данное утверждение описывает множество, состоящее из трех элементов: профессора физики, профессора биологии и профессора математики.

Интересен случай, когда в качестве элемента множества используется сам союз «и». Рассмотрим такое утверждение:

А и Б сидели на трубе.

Здесь описывается множество, состоящее из двух элементов: А и Б.

Но последнее модельное утверждение можно записать несколько по-другому, изменив его синтаксис:

А, И, Б сидели на трубе.

Здесь уже описывается множество трех элементов: А, Б и И.

Поскольку при произнесении эти утверждения звучат примерно одинаково, этим пользуются, задавая следующий вопрос, синтаксис которого записан в некотором «усредненном» виде:

А И Б сидели на трубе.

Любой конкретный ответ на такой вопрос, трактуя его как одну из рассмотренных ранее двух утверждений, можно всегда признать неправильным.

При описании множеств точно так же, как и союз «и», может использоваться союз «или», а также запятая, его заменяющая. Например, рассмотрим утверждение:

Эти интереснейшие задачи могут быть предложены людям,
компьютерам или даже представителям внеземных цивилизаций.

Данное утверждение описывает множество, состоящее из трех элементов: люди, компьютеры и представители внеземных цивилизаций.

Интересен случай, когда в качестве элементов множества используется один и тот же объект, как это сделано, например, в следующем утверждении:

Во времена социализма наука работала или на военных,
или на военных, или на военных.

Здесь описано множество, состоящее из одного элемента.

2°. Моделирование свойств множеств

Как множества, так и их свойства с помощью союза «или» моделируются одними и те ми же средствами. Например, рассмотрим уже встречавшееся ранее утверждение:

Эти интереснейшие задачи могут быть предложены людям, компьютерам или даже представителям внеземных цивилизаций.

Можно сказать, что данное утверждение описывает множество, состоящее из трех элементов: люди, компьютеры и представители внеземных цивилизаций. А можно сказать и то, что здесь описывается тот факт, что задачи могут быть предложены трем объектам множества как по отдельности, так и в любом сочетании, хоть всем трем сразу.

Итак, союз «или» может описывать *дизъюнкцию* свойств множеств объектов. Точно также и по поводу союза «и» в описаниях множеств можно сказать, что союз «и» описывает *дизъюнкцию* свойств множеств объектов. Однако на практике при использовании технических устройств дизъюнкция передается исключительно только союзом «или».

Наиболее часто такое использование союза «или» применяется при поиске информации, например, в Интернете. Следует иметь в виду, что в поисковых машинах Интернета *дизъюнкция, или операция «или»*, часто обозначается вертикальной палочкой |. Например, следующая строка поиска в поисковой машине

математика | информатика

заставит поисковую машину найти все веб-страницы, на которых речь идет о математике или информатике или о том и о другом.

Совершенно аналогично на практике при использовании технических устройств *конъюнкция, или операция «и»*, передается исключительно только союзом «и», который часто обозначается амперсандом &. Например, следующая строка поиска в поисковой машине

математика & информатика

заставит поисковую машину найти все веб-страницы, на которых речь идет о математике и информатике одновременно.

При передаче в обыденной речи операций логического «или» и логического «и» может использоваться как союз «или», так и союз «и». Но имеется логическая операция, которая передается только союзом «или».

Возможно, наиболее часто в обыденной речи союз «или» используется для передачи *логической операции «исключающее или»*. Например, в утверждении

Клиент жив или мертв.
Если клиент мертв, то его либо можно оживить, либо нельзя

союз «или» моделируется логической операцией «исключающее или»: клиент может быть либо жив, либо мертв, но не одновременно. Кстати, связка «либо … либо» тоже моделируется логической операцией «исключающее или».

3°. Моделирование отрицания

Рассмотрим, как отрицание передается в естественном языке. Проще всего это сделать на конкретных примерах.

Примеры.

1. Возьмем утверждение

Четырехугольник является квадратом.

Посмотрим, как можно построить отрицания этого утверждения.

Наиболее простой и безошибочный способ — применить отрицание сразу ко всему утверждению:

Неверно, что четырехугольник является квадратом.

Каким образом можно упростить это отрицание? Рассмотрим два способа.

1) Если в утверждении имеется глагол, то отрицание можно перенести со всего утверждения на этот глагол при условии, что получается осмысленное утверждение:

Четырехугольник не является квадратом.

2) Если в утверждении имеется прилагательное или дополнение, то отрицание можно перенести со всего утверждения на это прилагательное или дополнение при условии, что получается осмысленное утверждение:

Четырехугольник является не квадратом.

2. Возьмем утверждение

Треугольник является прямоугольным.

Применим отрицание сразу ко всему утверждению:

Неверно, что треугольник является прямоугольным.

Применим отрицание к глаголу:

Треугольник не является прямоугольным.

Применим отрицание к прилагательному:

Треугольник является непрямоугольным.

Рассмотрим, как используется закон двойного отрицания. Проще всего это сделать на конкретных примерах.

Пример.

1. Возьмем утверждение

Четырехугольник является квадратом.

Посмотрим, как можно построить двойное отрицание этого утверждения, которое, разумеется, равносильно исходному утверждению. Имеем 4 способа:

Неверно, что неверно, что четырехугольник является квадратом.

Неверно, что четырехугольник не является квадратом.

Неверно, что четырехугольник является не квадратом.

Четырехугольник не является не квадратом.

---

2. Прямое, противоположное и обратное заключение

1°. Прямое, противоположное и обратное заключения
Утверждение. Заключение, посылка и вывод.

Утверждение — высказывание, которое либо истинно, либо ложно.

Рассмотрим утверждения, которые моделируются *импликацией, то есть следованием*. Схема таких утверждений такова: из *посылки* следует *вывод*. Подобные утверждения также называются *заключением*. Но посылка и вывод — это тоже утверждения. Таким образом, *заключение* — это утверждение, которое связывает следованием два утверждения: *посылку* и *вывод*.

Приведем известное утверждение, которое является заключением:

У квадрата все углы равны.

Перепишем это утверждение так, чтобы было явно видно, что это *заключение*, в виде *посылка* $\to$ *вывод*, то есть по схеме «если…, то»:

Если четырехугольник квадрат, то все его углы равны.

Очевидно, что это истинное заключение. Это будет наше *прямое заключение*. Из прямого заключения можно легко получить противоположное, обратное и противоположное обратному заключения.

Прямое и противоположное заключения.

Противоположным заключением называется утверждение, полученное из произвольного *прямого заключения* отрицанием как посылки, так и вывода.

Выпишем заключение, противоположное прямому.

Если четырехугольник не является квадратом, то его углы не равны.

Ясно, что получилось ложное заключение. Истинное будет таким:

Если четырехугольник не является прямоугольником, то его углы не равны.

Обратное заключение.

Обратным заключением называется утверждение, полученное из произвольного *прямого заключения* перестановкой местами посылки и вывода.

Сформулируем заключение, обратное прямому.

Если у четырехугольника все углы равны, то это квадрат.

И это заключение ложно. Вот истинное:

Если у четырехугольника все углы равны, то это прямоугольник.

Заключение, противоположное обратному.

Заключением, противоположным обратному (или обратным противоположному), называется утверждение, полученное из произвольного *прямого заключения* перестановкой местами посылки и вывода, взятых с отрицанием.

Другими словами, заключение, противоположное обратному:
1) либо получается из противоположного построением обратного;
2) либо получается из обратного построением противоположного.

Заключение, противоположное обратному, имеет вид:

Если у четырехугольника углы не равны, то это не квадрат.

А вот это заключение снова истинно! И это не случайно.

2°. Доказательство от противного. Равносильность

Имеет место следующее правило: заключение, противоположное обратному истинному, всегда истинно. Аналогично заключение, противоположное обратному ложному, всегда ложно. Другими словами, *прямое заключение* и заключение, *противоположное обратному*, либо оба истинны, либо оба ложны.

Доказательство от противного.

На этом основано *доказательство от противного*, когда вместо прямого доказывается заключение, противоположное обратному: берется *отрицание вывода* прямого заключения и доказывается его *отрицание посылки*.

Также не случайно, что противоположное и обратное заключения были оба ложны: противоположное и обратное заключения также либо оба истинны, либо оба ложны, поскольку если одно из них взять за прямое, то другое будет противоположным обратному.

Эквивалентные заключения.

Такие *заключения*, которые либо оба истинны, либо оба ложны независимо от того, какие посылки и выводы в них входят, называются *логически равносильными, или эквивалентными*.

Логически эквивалентные *заключения* равносильны в силу своей логической структуры. Получаем следующую схему.

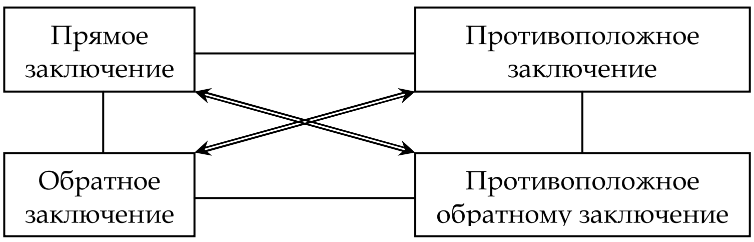


Рис. 1. Связь прямых, противоположных и обратных заключений. Двойными стрелками соединены логически равносильные заключения

Эквивалентные утверждения.

Если у истинного заключения обратное тоже истинно (или, что то же самок, противоположное истинно), то у таких заключений посылка и заключение являются *эквивалентными утверждениями*.

Например, теорема *Пифагора*

Если треугольник прямоугольный, то $c^2 = a^2 + b^2$*, где* a, b, c *— длины сторон*

имеет истинные противоположную и обратную теоремы соответственно:

Если треугольник не прямоугольный, то $c^2 \neq a^2 + b^2$*, где* a, b, c *— длины сторон;*

Если $c^2 = a^2 + b^2$*, где* a, b, c *— длины сторон, то треугольник прямоугольный.*

Поэтому утверждения «$c^2 = a^2 + b^2$, где a, b, c — длины сторон треугольника», и «треугольник прямоугольный» равносильны.

3. Необходимые и достаточные условия. Равносильность

1°. Достаточные и необходимые условия

Необходимые и достаточные условия получаются при следовании одних утверждений из других.

Необходимое и достаточное условие.

Если из одного утверждения следует другое, то первое утверждение называется *достаточным условием* для второго, а второе — *необходимым условием* для первого.

Другими словами, для выполнения, для истинности второго утверждения *достаточно* выполнения, истинности первого, а из истинности первого утверждения *необходимо* следует истинность второго.

Перепишем это определение в терминах теории множеств. Для этого достаточно увидеть, что множество, описываемое достаточным условием, является подмножеством условия, описываемым необходимым условием.

Необходимое и достаточное условия.

Если множество объектов, задаваемых одним утверждением, является подмножеством объектов, задаваемых другим утверждением, то первое утверждение называется *достаточным условием* для второго, а второе — *необходимым условием* для первого.

Другими словами, для того, чтобы элементу принадлежать надмножеству, ему *достаточно* принадлежать подмножеству (но не наоборот!), и если элемент принадлежит подмножеству, то тем самым он *необходимо* принадлежит и надмножеству (но не наоборот!).

Рассмотрим эти тесно связанные понятия на примере конкретных случаев, чтобы лучше в них разобраться.

Примеры.

1. Из истинности заключения

Если четырехугольник квадрат, то все его углы равны.

следует, что истинность утверждения «четырехугольник квадрат» достаточна для того, чтобы утверждение «все углы четырехугольника равны» тоже было истинно.

Окончательно получаем:

«четырехугольник квадрат» достаточно для «все углы четырехугольника равны».

В более формальном виде с использованием логических связок это заключение можно записать следующим образом:

Четырехугольник квадрат $\rightarrow$ *все углы четырехугольника равны.*

Учитывая принадлежность множества, описываемого посылкой, множеству, описываемому выводом, это заключение можно записать так:

Четырехугольник квадрат $\subset$ *все углы четырехугольника равны.*

На диаграмме Эйлера — Венна это заключение можно изобразить так, как показано на рисунке 2.

Рис. 2. Четырехугольник квадрат $\subset$ все углы четырехугольника равны

А если наоборот?

Истинность «четырехугольник квадрат» не следует из истинности «все углы четырехугольника равны», поэтому второе утверждение недостаточно для первого. Ведь если «все углы четырехугольника равны», то четырехугольник может быть не квадратом, а прямоугольником с разными сторонами.

Достаточным условием для «четырехугольник квадрат» будет «все углы и все стороны четырехугольника равны»:

Все углы и все стороны четырехугольника равны $\to$ *четырехугольник квадрат,*

или

Все углы и все стороны четырехугольника равны $\subset$ *четырехугольник квадрат.*

2. Из истинности того же заключения

Если четырехугольник квадрат, то все его углы равны.

следует, что из истинности утверждения «четырехугольник квадрат» необходимо следует, что утверждение «все углы четырехугольника равны» истинно.

Окончательно получаем:

«все углы четырехугольника равны» необходимо для «четырехугольник квадрат».

А если наоборот?

Истинность «четырехугольник квадрат» не следует из истинности «все углы четырехугольника равны», поэтому первое утверждение не является необходимым для второго. Ведь если «все углы четырехугольника равны», то четырехугольник может быть не квадратом, а прямоугольником с разными сторонами.

Необходимым условием для «все углы четырехугольника равны» будет «четырехугольник прямоугольник»:

Все углы четырехугольника равны $\to$ *четырехугольник прямоугольник,*

или

Все углы четырехугольника равны $\subset$ *четырехугольник прямоугольник.*

* * *

Рассмотрим еще два примера.

П р и м е р ы.

1. Заключение

Если четырехугольник квадрат, то все его стороны равны.

истинно, поэтому:

1) «четырехугольник квадрат» достаточно для «все стороны четырехугольника равны»;

2) «все стороны четырехугольника равны» необходимо для «четырехугольник квадрат».

Другими словами,

Четырехугольник квадрат $\rightarrow$ *все стороны четырехугольника равны.*

Учитывая принадлежность множества, описываемого посылкой, множеству, описываемому выводом, это заключение можно записать так:

Четырехугольник квадрат $\subset$ *все стороны четырехугольника равны.*

На диаграмме Эйлера — Венна это заключение можно изобразить так, как показано на рисунке 3.

Рис. 3. Четырехугольник квадрат $\subset$ все стороны четырехугольника равны

2. Заключение

Если все стороны четырехугольника равны, то это квадрат

ложно, поэтому:

1) «все стороны четырехугольника равны» недостаточно для «четырехугольник квадрат». Достаточным будет «все углы и все стороны четырехугольника равны»:

Все углы и все стороны четырехугольника равны $\rightarrow$ *четырехугольник квадрат,*

Все углы и все стороны четырехугольника равны $\subset$ *четырехугольник квадрат;*

2) «четырехугольник квадрат» не является необходимым для «все стороны четырехугольника равны». Необходимым будет «четырехугольник ромб»:

Все углы четырехугольника равны $\rightarrow$ *четырехугольник ромб,*

Все углы четырехугольника равны $\subset$ *четырехугольник ромб.*

2°. Эквивалентность

Итак, из заключения

Если четырехугольник квадрат, то все его углы равны

следует, что утверждение «четырехугольник квадрат» является достаточным для утверждения «все углы четырехугольника равны», а второе утверждение является необходимым для первого.

А наоборот неверно.

Наоборот получается, если посылка и вывод *эквивалентны*. Эквивалентность называют еще *равносильностью*.

Равносильность.
Равносильность — другое название для эквивалентности.

Например, из верного заключения

Если в четырехугольнике равны все стороны и все углы, то это квадрат

следует, что равенство сторон и углов в четырехугольнике достаточно для квадрата, и наоборот, утверждение

Если четырехугольник квадрат, то в нем равны все стороны и все углы

истинно, поэтому являться четырехугольнику квадратом достаточно для равенства всех его сторон и всех углов.

Точно так же для квадрата необходимо, чтобы у него были равны и стороны, и углы, и наоборот, для равенства сразу и сторон, и углов необходимо, чтобы был квадрат.

Так получается потому, что утверждения «четырехугольник квадрат» и «все стороны и все углы четырехугольника равны» равносильны.

В более формальном виде с использованием логических связок это заключение можно записать следующим образом:

Четырехугольник квадрат $\leftrightarrow$ *все углы и все стороны четырехугольника равны.*

Учитывая равенство множеств, описываемых посылкой и выводом, это заключение можно записать так:

Четырехугольник квадрат $=$ *все углы и все стороны четырехугольника равны.*

На диаграмме Эйлера — Венна это заключение можно изобразить так, как показано на рисунке 4.

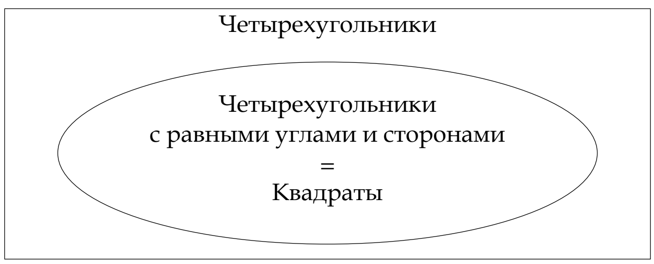


Рис. 4. Четырехугольник квадрат = все углы и все стороны четырехугольника равны

Тесты

1. Моделирование союзов «или» и «и» и отрицания

1.1. Пусть высказывание А =«На улице идет дождь» , В =«Над моей головой раскрыт зонтик». Тогда дизъюнкция этих высказываний равна:

1) «На улице не идет дождь».
2) «Над моей головой не раскрыт зонтик».
3) «На улице идет дождь и над моей головой раскрыт зонтик».
4) «На улице идет дождь или над моей головой раскрыт зонтик».
5) «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик».

1.2. Пусть высказывание А =«На улице идет дождь» , В =«Над моей головой раскрыт зонтик». Тогда конъюнкция этих высказываний равна:

1) «На улице не идет дождь».
2) «Над моей головой не раскрыт зонтик».
3) «На улице идет дождь и над моей головой раскрыт зонтик».
4) «На улице идет дождь или над моей головой раскрыт зонтик».
5) «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик».

1.3. Пусть высказывание А =«На улице идет дождь» , В =«Над моей головой раскрыт зонтик». Тогда отрицание высказывания А равна:

1) «На улице не идет дождь».
2) «Над моей головой не раскрыт зонтик».
3) «На улице идет дождь и над моей головой раскрыт зонтик».
4) «На улице идет дождь или над моей головой раскрыт зонтик».
5) «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик».

1.4. Пусть высказывание А =«На улице идет дождь» , В =«Над моей головой раскрыт зонтик». Тогда отрицание высказывания В равна:

1) «На улице не идет дождь».
2) «Над моей головой не раскрыт зонтик».
3) «На улице идет дождь и над моей головой раскрыт зонтик».
4) «На улице идет дождь или над моей головой раскрыт зонтик».
5) «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик».

1.5. Пусть высказывание А =«На улице идет дождь» , В =«Над моей головой раскрыт зонтик». Тогда импликация высказываний А и В равна:

1) «На улице не идет дождь».
2) «Над моей головой не раскрыт зонтик».
3) «На улице идет дождь и над моей головой раскрыт зонтик».
4) «На улице идет дождь или над моей головой раскрыт зонтик».
5) «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик».

2. Прямое, противоположное и обратное заключение

2.1. Что является отрицанием заключения «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик»?

1) «Над моей головой раскрыт зонтик, если на улице идет дождь».

2) «Если на улице не идет дождь, то над моей головой не раскрыт зонтик».

3) «Если над моей головой раскрыт зонтик, то на улице идет дождь».

4) «Если над моей головой не раскрыт зонтик, то на улице не идет дождь».

5) «Неверно, что если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик».

2.2. Что является перефразировкой заключения «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик»?

1) «Над моей головой раскрыт зонтик, если на улице идет дождь».

2) «Если на улице не идет дождь, то над моей головой не раскрыт зонтик».

3) «Если над моей головой раскрыт зонтик, то на улице идет дождь».

4) «Если над моей головой не раскрыт зонтик, то на улице не идет дождь».

5) «Неверно, что если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик».

2.3. Что является обратным заключением заключения «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик»?

1) «Над моей головой раскрыт зонтик, если на улице идет дождь».

2) «Если на улице не идет дождь, то над моей головой не раскрыт зонтик».

3) «Если над моей головой раскрыт зонтик, то на улице идет дождь».

4) «Если над моей головой не раскрыт зонтик, то на улице не идет дождь».

5) «Неверно, что если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик».

2.4. Что является противоположным заключением заключения «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик»?

1) «Над моей головой раскрыт зонтик, если на улице идет дождь».

2) «Если на улице не идет дождь, то над моей головой не раскрыт зонтик».

3) «Если над моей головой раскрыт зонтик, то на улице идет дождь».

4) «Если над моей головой не раскрыт зонтик, то на улице не идет дождь».

5) «Неверно, что если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик».

2.5. Что является заключением, противоположным обратному, заключения «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик»?

1) «Над моей головой раскрыт зонтик, если на улице идет дождь».

2) «Если на улице не идет дождь, то над моей головой не раскрыт зонтик».

3) «Если над моей головой раскрыт зонтик, то на улице идет дождь».

4) «Если над моей головой не раскрыт зонтик, то на улице не идет дождь».

5) «Неверно, что если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик».

3. Необходимые и достаточные условия

3.1. Что является противоположным заключением заключения «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик»?

1) «На улице идет дождь».
2) «Над моей головой раскрыт зонтик».
3) «Если над моей головой не раскрыт зонтик, то на улице не идет дождь».
4) «На улице не идет дождь».
5) «Над моей головой не раскрыт зонтик».

3.2. Что является необходимым утверждением заключения «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик»?

1) «На улице идет дождь».
2) «Над моей головой раскрыт зонтик».
3) «Если над моей головой не раскрыт зонтик, то на улице не идет дождь».
4) «На улице не идет дождь».
5) «Над моей головой не раскрыт зонтик».

3.3. Что является достаточным утверждением заключения «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик»?

1) «На улице идет дождь».
2) «Над моей головой раскрыт зонтик».
3) «Если над моей головой не раскрыт зонтик, то на улице не идет дождь».
4) «На улице не идет дождь».
5) «Над моей головой не раскрыт зонтик».

3.4. Что является необходимым утверждением заключения, которое противоположно обратному заключения «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик»?

1) «На улице идет дождь».
2) «Над моей головой раскрыт зонтик».
3) «Если над моей головой не раскрыт зонтик, то на улице не идет дождь».
4) «На улице не идет дождь».
5) «Над моей головой не раскрыт зонтик».

3.5. Что является достаточным утверждением заключения, которое противоположно обратному заключения «Если на улице идет дождь, то над моей головой раскрыт зонтик»?

1) «На улице идет дождь».
2) «Над моей головой раскрыт зонтик».
3) «Если над моей головой не раскрыт зонтик, то на улице не идет дождь».
4) «На улице не идет дождь».
5) «Над моей головой не раскрыт зонтик».

Упражнения

Пусть n — номер варианта от 1 до 16.

1. Ниже приведены 16 пар истинных заключений. Напишите для каждого из четырех утверждений, составляющих заключения с номером Вашего варианта, их отрицания всеми возможными способами при условии, что получается осмысленное утверждение: отрицание всего утверждения, отрицание глагола, отрицание прилагательного или дополнения.

2. Ниже приведены 16 пар истинных заключений. Напишите для каждого заключения с номером Вашего варианта противоположное, обратное и обратное противоположному заключения. Ответьте на вопрос, какие из четырех заключений истинны, а какие ложны?

3. Ниже приведены 16 пар истинных заключений. Напишите для каждого заключения с номером Вашего варианта полными предложениями, какое из двух утверждений, составляющих заключение, достаточно для другого, а также какое утверждение необходимо для другого.

1. Если человек еще ребенок, то этот человек неразумен. Если человек еще ребенок, то этот человек не может укрощать крокодилов.

2. Если моя вещь сделана из олова, то эта вещь — кастрюля. Если моя вещь — ваш подарок, то эта вещь сделана не из олова.

3. Если картофелина молодая, то эта картофелина не была поджарена. Если картофелины на этом блюде, то эта картофелина старая.

4. Если живое существо является уткой, то это живое существо не танцует вальс. Если живое существо является моей домашней птицей, то это живое существо — не офицер.

5. Если человек находится в здравом уме, то этот человек может заниматься логикой. Если человек — ваш сын, то этот человек не годится в присяжные заседатели.

6. Если моя вещь является карандашом, то этой вещи нет в этой коробке. Если моя вещь является карандашом, то эта вещь — не леденец.

7. Если человек — опытный, то этого человека нельзя считать некомпетентным. Если человек — Дженкинс, то этого человек неопытен.

8. Если объект — терьер, то этот объект не блуждает среди знаков Зодиака. Если объект — комета, то у этого объекта нет хвоста колечком.

9. Если живое существо не получило хорошего образования, то это живое существо не станет выписывать газету «Таймс». Если живое существо — дикобраз, то это живое существо не выписывает газету «Таймс».

10. Если блюдо — пудинг, то это блюдо вкусно. Если блюдо приготовлено, то это блюдо не полезно.

11. Если человек является моим садовником, то этого человека стоит послушать. Если человек является моим садовником, то этот человек очень стар.

12. Если птица — колибри, то эта птица имеет яркое оперение. Если птица — колибри, то эта птица очень мала.

13. Если утка из этой деревни имеет метку «Б», то эта утка принадлежат миссис Бонди. Если утка из этой деревни серая, то эта утка не носит кружевных воротничков.

14. Если посуда на этой полке является старой, то эта посуда имеет трещины. Если посуда на этой полке — горшок, то эта посуда не пригодна для хранения воды.

15. Если фрукты являются незрелыми, то эти фрукты неполезны. Если фрукты — яблоки, то эти фрукты выросли на солнце.

16. Если щенку, не желающему лежать спокойно, вы предложите скакалку, то этот щенок всегда будет вам благодарен. Если щенок не может лежать спокойно, то этот щенок не станет ткать.

Мы все знаем, что мнения бывают ложными, а вот удовольствия — нет.
Александр Шевцов. Основы науки думать. Сократическое воображение.

§ 8. Логический резолютивный вывод

$$(x), (x \to y) \Rightarrow (y)$$

Оглавление

1. Теория логического резолютивного вывода 119
   1°. Основные виды логических утверждений 119
   2°. Виды логических истин 120
   3°. Логический резолютивный вывод 121
2. Примеры 122
   1°. Формализация задачи 122
   2°. Первая унификация 122
   3°. Окончание вывода 123
   4°. Схема резолютивного вывода 124
   5°. Пример второй 126

Тесты 127

Упражнения 129

Литература

Основная

Адаменко А. Н., Кучуков А. М. Логическое программирование и Visual Prolog.— СПб.: БХВ-Петербург, 2003.

Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы.— М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003.

Дополнительная

Кэрролл Л. История с узелками.— М.: «Мир», 2000.

Мендельсон Э. Введение в математическую логику.— М.: Наука, 1976.

Ключевые слова

Высказывание, факт, правило, элементарное высказывание, логическая истина, логическая связка второго уровня, доказательство от противного, закон двойного отрицания, modus ponens, стандартизация цели, резолютивный вывод, хорновское высказывание, унификация, обработка неудач.

1. Теория логического резолютивного вывода

1°. Основные виды логических утверждений

Утверждение.

1. Как известно, в математической логике предполагается, что *утверждение* как утвердительное предложение естественного языка может быть либо истинным, либо ложным. Третьего при этом не дано, что и составляет суть и основу логических рассуждений.

Однако причина истинности или ложности утверждения бывает разной! Рассмотрим три примера трех различных видов истинных утверждений.

1. *Курица является птицей.*

2. *Любой человек жив до тех пор, пока не умер.*

3. **Если** из того, что *был снегопад*, **следует**, что *крыша белая*, **то** из того, что *крыша* **не** *белая*, **следует**, что *снегопада* **не** *было.*

Факт и правило.

Первое приведенное утверждение выражает некоторый не зависящий от способа выражения *факт*. Такое утверждение — это *фактическая истина*.

Второе утверждение — *правило*, другими словами, *истиной языка*. Его истинность следует из самого языка, то есть из смысла слов, составляющих язык.

Два первых вида истинных утверждений — факты и правила — формулирует эксперт. Только человек формулирует истинные факты и правила.

2. Внимательно изучим третье утверждение. Оно содержит в себе два элементарных утверждения «*был снегопад*» и «*крыша белая*», а также *логические связки* «**если … то**», «**следует**» и «**не**». (Обратите внимание, что «**если … то**» и «**следует**» — одна и та же логическая связка.)

Элементарное утверждение.

Элементарным утверждением называется утверждение, которое нельзя разбить на более простые.

Очень важно, что если заменить эти элементарные утверждения другими элементарными утверждениями, например, «*волков надо бояться*» и «*в лес нельзя ходить*», то получим снова истинное утверждение:

если из того, что *волков надо бояться*, **следует**, что *в лес* **нельзя** *ходить*, **то** из того, что *в лес ходить можно*, **следует**, что *волков* **не** *надо бояться*.

Логическая истина.

Такое утверждение называют *логической истиной*, поскольку его истинность заключена исключительно в его логической структуре и не зависит от истинности элементарных утверждений, входящих в его состав.

2°. Виды логических истин

Переведем наши утверждения в форму логических формул.

1. Если в утверждении

если из того, что *был снегопад*, **следует**, что *крыша белая*,
то из того, что *крыша* **не** *белая*, **следует**, что *снегопада* **не** *было*.

элементарные утверждения заменить переменными x и y, то получим логически истинное утверждение, не зависящее от смысла x и y:

из того, что «*из x* ***следует*** *y*», **следует**, что «*из* ***не*** *y* ***следует не*** *x*».

Заменим логические связки на значки: $\boxed{\text{из } (x \to y) \textbf{ следует}, \text{ что } (\neg y \to \neg x)}$.

Логическая связка второго уровня.

Логическая связка второго уровня — логическая связка, используемая при логических выводах одних утверждений их других.

Логическую связку второго уровня «*если…, то*» обозначим $\Rightarrow$. Логическую связку второго уровня «*тогда и только тогда*» обозначим $\Leftrightarrow$. Логическую связку второго уровня «*и*» обозначим запятой ,.

Заменим логическую связку второго уровня на значок: $\boxed{(x \to y) \Rightarrow (\neg y \to \neg x)}$.

В данном случае истинно и обратное утверждение $\boxed{(\neg y \to \neg x) \Rightarrow (x \to y)}$.

Доказательство от противного.

Эти два логически истинных утверждения заменим одним, которое называется *доказательством от противного*: $\boxed{(x \to y) \textbf{ то же самое, что } (\neg y \to \neg x)}$.

Заменим логическую связку второго уровня значком:

$$(x \to y) \Leftrightarrow (\neg y \to \neg x). \tag{A}$$

---

2. Приведем еще четыре очевидных логических истины, которые понадобятся в дальнейшем при разборе примера по логическому выводу.

Закон двойного отрицания.

Закон двойного отрицания дважды использует логическую связку «*не*»:

$$(x) \Leftrightarrow (\neg(\neg x)). \tag{B}$$

Заменим логическую связку *или* двумя связками «*не*» и «*если… то*»:

$$(x \vee y) \Leftrightarrow (\neg x \to y). \tag{C}$$

Заменим логическую связку «*и*» двумя связками «*не*» и «*если… то*»:

$$(x \wedge y) \Leftrightarrow (\neg(x \to \neg y)). \tag{D}$$

Modus ponens.

Приведем знаменитое правило вывода *modus ponens*:

$$(x), (x \to y) \Rightarrow (y). \tag{E}$$

Modus ponens позволяет из двух истинных высказываний получить третье!

Это правило достаточно естественно. Приведем пример вывода по нему:

«*Люди смертны*», «*Сократ — человек*» $\Rightarrow$ «*Сократ смертен*».

3°. Логический резолютивный вывод

Рассмотрим этапы логического резолютивного вывода.

1. Множество утверждений истинно, если оно истинно при всех возможных значениях переменных. Обычно перебрать все значения переменных очень трудно или даже невозможно, если их бесконечно много. Однако противоречивость множества утверждений сразу следует из его противоречивости хотя бы на одном наборе значений переменных! Поэтому чтобы доказать, что пробное утверждение логически следует из данного множества утверждений, пользуются *доказательством от противного*: доказывают, что *противоречиво* множество утверждений вместе с *отрицанием* пробного утверждения.

Цель, или запрос. Стандартизация цели или запроса.

Отрицание пробного утверждения называется *стандартизацией цели*, а само пробное утверждение называется *целью, или запросом*.

---

2. Резолютивный вывод.

Резолютивный вывод — последовательность утверждений, каждое из которых либо принадлежит исходным, либо выведено из имеющихся по правилу *modus ponens*. Утверждение *выводимо* из других, если имеется конечный резолютивный вывод, в котором данное утверждение — последнее.

Резолютивный вывод применяется после стандартизацией цели.

В резолютивном выводе используются только *хорновских утверждения*. Для поиска вывода в такой системе достаточно на каждом шаге делать вывод только из двух утверждений: исходного и цели (или их наследников). Сочетаний исходных утверждений между собой использовать не нужно!

Хорновское утверждение. Правило, факт, цель (запрос).

Хорновское утверждение имеет вид $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow (y)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и y — *элементарные* утверждения.

Полное хорновские утверждение $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow (y)$ — это *правило*.

Хорновское утверждение без левой части $\Rightarrow (y)$ — *факт* (всегда истинен).

Хорновское утверждение без правой части $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow$ — *цель (запрос)*.

Исходное множество высказываний (*логическая задача*) — множество правил и фактов. *Задача резолютивного вывода* — резолютивный логический вывод цели.

В резолютивном выводе поочередно используется два логических метода: 1) *унификация*; 2) правило вывода *modus ponens*, описанное выше.

Унификация.

Унификация — подстановка в два утверждения вместо переменных их конкретных значений так, чтобы утверждения имели совпадающие части.

---

3. Обработки неудачи.

Обработка неудачи — если вывод заходит в тупик, нет следующей унификации, то последняя унификация отменяется и ищется другая. И так далее Если все унификации отменены или их и не было, то вывод невозможен.

---

2. Примеры

1°. Формализация задачи

Рассмотрим механизм резолютивного вывода на конкретном примере.

Решим следующую задачу (Адаменко, Кучуков):

Аня любит своего сына. Сын Ани любит Машу. Маше нравятся цветы. Нам нравится все, что нравится человеку, которого мы любим. Нравятся ли Ане цветы?

Сначала как можно более формально выпишем исходное множество утверждений. В него входят четыре первых утверждения задачи. Труднее всего будет формализовать четвертое утверждение.

Три первых из них конкретные, четвертое абстрактное, в нем нет конкретных имен. Поэтому в четвертом утверждении заменим общие слова переменными. Получим следующее описание логической задачи.

Аня любит сына. (*)

Сын любит Машу. (**)

Маше нравятся цветы. (***)

x нравится z, что нравится y, которого x любит.

Три первых утверждения — это факты, а четвертое — правило. Перепишем правило в виде хорновского высказывания.

$$(x \text{ любит } y) \wedge (y \text{ нравится } z) \to (x \text{ нравится } z). \qquad (****)$$

В утверждениях вида «*x любит y*» будем записывать всегда в стандартном виде, а именно: «*x любит y*» всегда означает, что переменная x любит переменную y (а не наоборот: переменная y любит переменную x).

Осталось формализовать запрос к базе высказываний

Ане нравятся цветы.

После формализации описания логической задачи и запроса можно переходить к решению задачи методом логического резолютивного вывода.

2°. Первая унификация

Выполним все шаги резолютивного вывода.

1. *Стандартизация цели.*

Запишем отрицание запроса.

$$\neg(\text{Ане нравятся цветы}). \qquad (*****)$$

2. *Резолютивный вывод.*

Чтобы можно было применить правило *modus ponens*, нужно применить унификацию. Посмотрим, с чем можно унифицировать отрицание запроса. При этом нужно примерять к отрицанию запроса не только утверждения, входящие в задачу, но также и те утверждения, которые могут быть получены их них применением *логических истин* (A), (B), (C) и (D).

Будем перебирать по очереди все утверждения из базы задачи и пытаться унифицировать их с утверждением (*****).

Отрицание запроса нельзя унифицировать с фактом (*). А логические истины неприменимы к фактам.

Отрицание запроса также нельзя унифицировать с фактом (**).

И с фактом (***).

Отрицание запроса нельзя унифицировать с правилом (****).

Но к правилам можно применять логические истины. К правилу (****) можно примепнить только логическую истину (A):

$$\neg(x \text{ нравится } z) \rightarrow \neg((x \text{ любит } y) \wedge (y \text{ нравится } z)).$$

С этим утверждением можно унифицировать утверждение (*****). В утверждении (*****) отсутствуют переменные, а в правиле они есть. Найдем такую подстановку констант вместо переменных, которая унифицирует утверждение (*****) и правило.

Для унификации положим $x = \text{Аня}$ и $z = \text{цветы}$. Теперь унифицируем два согласованных утверждения:

$$\neg(\text{Ане нравятся цветы}),$$
$$\neg(\text{Ане нравится цветы}) \rightarrow \neg((\text{Аня любит } y) \wedge (y \text{ нравится цветы})).$$

Для ясности их можно переписать в виде

$$(\alpha), (\alpha \rightarrow \beta),$$

где $\alpha = \neg(\text{Ане нравятся цветы})$ и $\beta = \neg((\text{Аня любит } y) \wedge (y \text{ нравится цветы}))$.

Теперь по правилу вывода *modus ponens* (E) получаем новое утверждение

$$\neg((\text{Аня любит } y) \wedge (y \text{ нравится цветы})).$$

3°. Окончание вывода

1. Посмотрим, с чем можно унифицировать последнее полученное утверждение. При этом будем использовать не только само это утверждение, но и все утверждения, которые можно получить из него применением логических истин (A)—(D). К этому утверждению можно применить только логическую истину (D), чтобы избавиться от дизъюнкции:

$$\neg\neg((\text{Аня любит } y) \rightarrow \neg(y \text{ нравится цветы})).$$

Удалив двойное отрицание применением логической истины (B), Получим два эквивалентных утверждения, второе из которых и будем пытаться унифицировать с другими утверждениями:

$$\neg((\text{Аня любит } y) \wedge (y \text{ нравится цветы})),$$
$$(\text{Аня любит } y) \rightarrow \neg(y \text{ нравится цветы}).$$

Второе из этих утверждений можно унифицировать с фактом (*), положив $y = \text{сын}$. Получаем два следующих согласованных при унификации утверждения:

$$\text{Аня любит сына},$$
$$(\text{Аня любит сына}) \rightarrow \neg(\text{сыну нравятся цветы}).$$

По правилу вывода *modus ponens* (E) из двух последних утверждений снова получаем новое утверждение:

$$\neg(\textit{сыну нравятся цветы}).$$

2. Унифицируем последнее утверждение. Очевидно, что оно с фактами не может унифицироваться, а унифицируется только с правилом, причем переписанным в эквивалентной форме

$$\neg(x\ \textit{нравится}\ z) \to \neg((x\ \textit{любит}\ y) \wedge (y\ \textit{нравится}\ z)).$$

Унификация происходит при $x = \textit{сын}$ и $z = \textit{цветы}$. Имеем два утверждения, согласованные для дальнейшего логического вывода:

$$\neg(\textit{сыну нравятся цветы}),$$
$$\neg(\textit{сыну нравится цветы}) \to \neg((\textit{сын любит}\ y) \wedge (y\ \textit{нравится цветы})).$$

По правилу логического вывода *modus ponens* из двух последних утверждений получаем новое:

$$\neg((\textit{сын любит}\ y) \wedge (y\ \textit{нравятся цветы})).$$

3. По логической истинам (D) и (B) это утверждение эквивалентно следующему:

$$(\textit{сын любит}\ y) \to \neg(y\ \textit{нравятся цветы}).$$

Очевидно, что последнее утверждение унифицируется с фактом (**) при значении переменной $y = \textit{Маша}$:

$$\textit{сын любит Машу},$$
$$(\textit{сын любит Машу}) \to \neg(\textit{Маше нравятся цветы}).$$

В итоге получаем по *modus ponens* последнее утверждение в нашей цепочке новых утверждений:

$$\neg(\textit{Маше нравятся цветы}).$$

4. Это утверждение вступает в противоречие с фактом (***)

Маше нравятся цветы.

Итак, наконец получено противоречие. Следовательно, ответ на запрос однозначно утвердительный:

Ане нравятся цветы.

4°. Схема резолютивного вывода

Проделанный логический резолютивный вывод проиллюстрируем графическим наглядным изображением в виде схемы. При этом получаемое противоречие будем обозначать значком квадратика □. Унификацию и вывод по правилу будем обозначать двойными стрелками, а эквивалентные преобразования — простыми. Полная схема логического резолютивного вывода показана на рисунке 9.

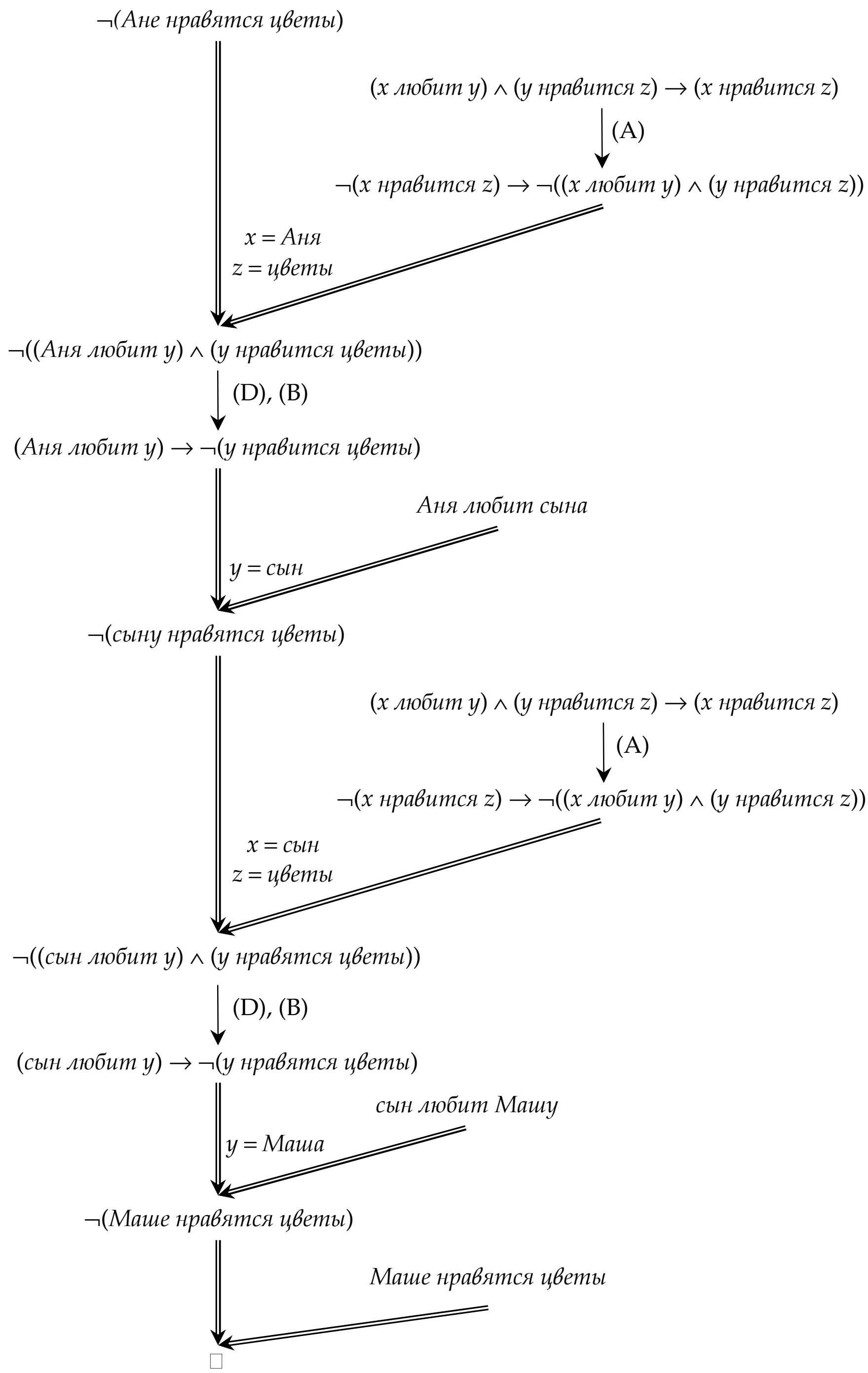


Рис. 9. Схема логического резолютивного вывода
для примера из трех фактов, одного правила и одного запроса

5°. Пример второй

Решим задачу, взятую из известного учебника логики (Мендельсон):

Всякий, кто находится в здравом уме, может понимать математику. Ни один из сыновей Гегеля не может понимать математику. Сумасшедшие не допускаются к голосованию. Верно ли, что никто из сыновей Гегеля не допускается к голосованию?

Выберем пространство логической переменной x: x — это любой человек.

Перепишем предложения, встречающиеся в тексте задачи, в формальном виде, представив их в виде правил в пространстве логической переменной x.

$$(x \textit{ в здравом уме}) \to (x \textit{ понимает математику}),$$
$$(x \textit{ — сын Гегеля}) \to (x \textit{ не понимает математику}),$$
$$(x \textit{ сумасшедший}) \to (x \textit{ не допускается к голосованию}),$$

Осталось формализовать запрос в виде факта. При этом логическую переменную, естественно, использовать не будем:

сын Гегеля не допускается к голосованию.

Сразу нарисуем полную схему резолютивного вывода, не забывая, что первый этап — стандартизация, то есть отрицание, запроса (см. рис. 10).

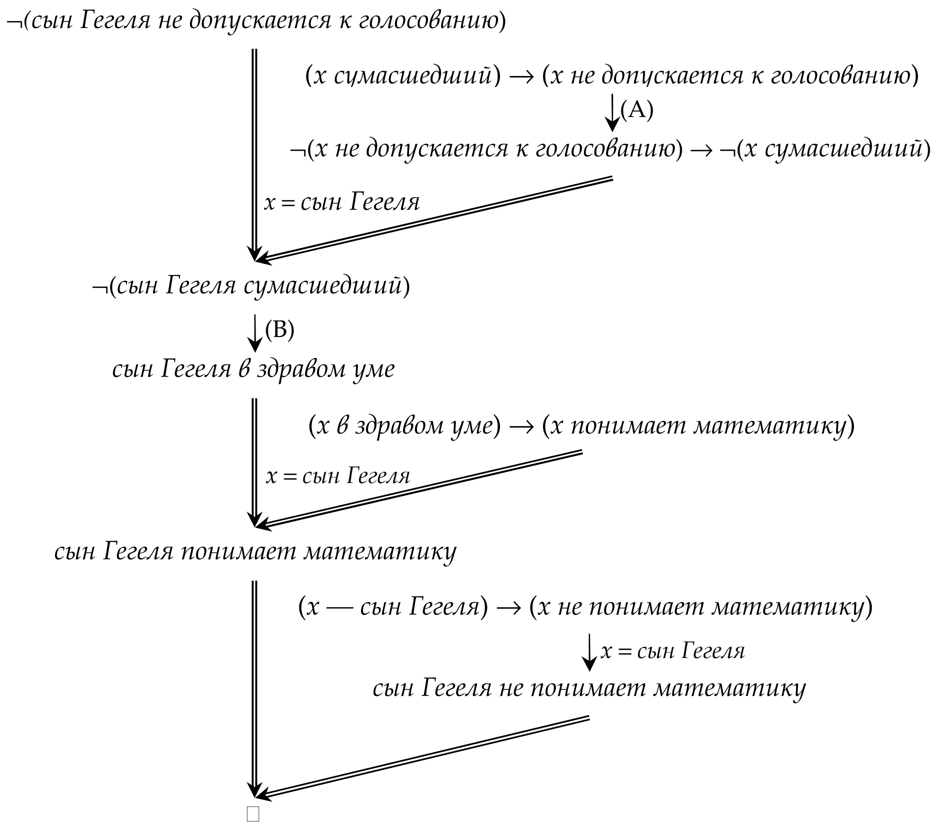


Рис. 10. Схема логического резолютивного вывода второй задачи

Тесты

1. Основные виды логических высказываний

1.1. Какой из следующих высказываний является фактом?

1) Сократ — человек, люди смертны. Следовательно, Сократ смертен.

2) Если из того, что был снегопад, следует, что крыша белая, то из того, что крыша не белая, следует, что снегопада не было.

3) Никто не обнимет необъятного.

4) Щелкни кобылу в нос — она махнет хвостом.

5) Минус на минус дает плюс.

1.2. Какой из следующих высказываний является правилом «если…, то»?

1) Сократ — человек, люди смертны. Следовательно, Сократ смертен.

2) Если из того, что был снегопад, следует, что крыша белая, то из того, что крыша не белая, следует, что снегопада не было.

3) Никто не обнимет необъятного.

4) Щелкни кобылу в нос — она махнет хвостом.

5) Минус на минус дает плюс.

1.3. Какой из следующих высказываний является законом двойного отрицания?

1) Сократ — человек, люди смертны. Следовательно, Сократ смертен.

2) Если из того, что был снегопад, следует, что крыша белая, то из того, что крыша не белая, следует, что снегопада не было.

3) Никто не обнимет необъятного.

4) Щелкни кобылу в нос — она махнет хвостом.

5) Минус на минус дает плюс.

1.4. Какой из следующих высказываний является правилом, которое использкется при доказательством от противного?

1) Сократ — человек, люди смертны. Следовательно, Сократ смертен.

2) Если из того, что был снегопад, следует, что крыша белая, то из того, что крыша не белая, следует, что снегопада не было.

3) Никто не обнимет необъятного.

4) Щелкни кобылу в нос — она махнет хвостом.

5) Минус на минус дает плюс.

1.5. Какой из следующих высказываний является правилом modus ponens?

1) Сократ — человек, люди смертны. Следовательно, Сократ смертен.

2) Если из того, что был снегопад, следует, что крыша белая, то из того, что крыша не белая, следует, что снегопада не было.

3) Никто не обнимет необъятного.

4) Щелкни кобылу в нос — она махнет хвостом.

5) Минус на минус дает плюс.

2. Виды логических истин

2.1. Какое из следующих правил является законом modus ponens?

1) $(x \wedge y) \Leftrightarrow (\neg(x \to \neg y))$.
2) $(x \vee y) \Leftrightarrow (\neg x \to y)$.
3) $(x) \Leftrightarrow (\neg(\neg x))$.
4) $(x \to y) \Leftrightarrow (\neg y \to \neg x)$.
5) $(x), (x \to y) \Rightarrow (y)$.

2.2. Какое из следующих правил позволяет заменить связку «или»?

1) $(x \wedge y) \Leftrightarrow (\neg(x \to \neg y))$.
2) $(x \vee y) \Leftrightarrow (\neg x \to y)$.
3) $(x) \Leftrightarrow (\neg(\neg x))$.
4) $(x \to y) \Leftrightarrow (\neg y \to \neg x)$.
5) $(x), (x \to y) \Rightarrow (y)$.

2.3. Какое из следующих правил позволяет заменить связку «и»?

1) $(x \wedge y) \Leftrightarrow (\neg(x \to \neg y))$.
2) $(x \vee y) \Leftrightarrow (\neg x \to y)$.
3) $(x) \Leftrightarrow (\neg(\neg x))$.
4) $(x \to y) \Leftrightarrow (\neg y \to \neg x)$.
5) $(x), (x \to y) \Rightarrow (y)$.

2.4. Какое из следующих правил используется при доказательстве от противного?

1) $(x \wedge y) \Leftrightarrow (\neg(x \to \neg y))$.
2) $(x \vee y) \Leftrightarrow (\neg x \to y)$.
3) $(x) \Leftrightarrow (\neg(\neg x))$.
4) $(x \to y) \Leftrightarrow (\neg y \to \neg x)$.
5) $(x), (x \to y) \Rightarrow (y)$.

2.5. Какое из следующих правил является законом двойного отрицания?

1) $(x \wedge y) \Leftrightarrow (\neg(x \to \neg y))$.
2) $(x \vee y) \Leftrightarrow (\neg x \to y)$.
3) $(x) \Leftrightarrow (\neg(\neg x))$.
4) $(x \to y) \Leftrightarrow (\neg y \to \neg x)$.
5) $(x), (x \to y) \Rightarrow (y)$.

Упражнения

Пусть n — номер варианта от 1 до 16.

Выполните упражнение с номером Вашего варианта с помощью резолютивного вывода. Все упражнения Льюиса Кэрролла. Образцы доказательства приведены в разделе 2.

(При подготовке текстов этих задач автору пришлось исправлять многочисленные ошибки, содержащиеся в русском издании.)

1. Малые дети неразумны. Тот, кто может укрощать крокодилов, заслуживает уважения. Неразумные люди не заслуживают уважения. Верно ли, что малые дети не могут укрощать крокодилов?

2. Мои кастрюли — единственные из принадлежащих мне вещей, которые сделаны из олова. Все ваши подарки чрезвычайно полезны. Ни от одной из моих кастрюль нет никакой пользы. Верно ли, что ваши подарки сделаны не из олова?

3. Ни одна из молодых картофелин не была поджарена. Все картофелины на этой тарелке съедобны. Ни одна не жареная картофелина не съедобна. Верно ли, что все картофелины на этом блюде старые?

4. Ни одна утка не танцует вальс. Ни один офицер не откажется протанцевать вальс. У меня нет другой птицы, кроме уток. Верно ли, что среди моей домашней птицы нет офицеров?

5. Всякий, кто находится в здравом уме, может заниматься логикой. Ни один лунатик не может быть присяжным заседателем. Ни один из ваших сыновей не может заниматься логикой. Верно ли, что ни один из ваших сыновей не годится в присяжные заседатели?

6. В этой коробке нет моих карандашей. Ни один из моих леденцов — не сигара. Вся моя собственность, не находящаяся в этой коробке, состоит из сигар. Верно ли, что ни один из моих карандашей не леденец?

7. Ни одного опытного человека нельзя считать некомпетентным. Дженкинс всегда допускает грубые ошибки в работе. Ни один компетентный человек не допустит грубых ошибок в работе. Верно ли, что Дженкинс неопытен?

8. Ни один терьер не блуждает среди знаков Зодиака. То, что не блуждает среди знаков Зодиака, не может быть кометой. Только у терьера хвост колечком. Верно ли, что ни у одной кометы нет хвоста колечком?

9. Никто не станет выписывать газету «Таймс», если он не получил хорошего образования. Ни один дикобраз не умеет читать. Те, кто не умеют читать, не получили хорошего образования. Верно ли, что ни один дикобраз не выписывает газету «Таймс»?

10. Все пудинги вкусны. Приготовленное блюдо — пудинг. Ни одно вкусное блюдо не полезно. Верно ли, что приготовленное блюдо не полезно?

11. Когда мой садовник рассуждает на военные темы, его стоит послушать. Никто не может помнить битву при Ватерлоо, если он не очень стар. Того,

кто не помнит битвы при Ватерлоо, не стоит слушать, когда он рассуждает на военные темы. Верно ли, что мой садовник очень стар?

12. Все колибри имеют яркое оперение. Ни одна крупная птица не питается нектаром. Птицы, которые не питаются нектаром, имеют неяркое оперение. Верно ли, что все колибри очень малы?

13. Все утки в этой деревне, имеющие метку «Б», принадлежат миссис Бонди. Утки в этой деревне не носят кружевных воротничков, если не имеют метки «Б». У миссис Бонди в этой деревне нет серых уток. Верно ли, что ни одна серая утка в этой деревне не носит кружевных воротничков?

14. Вся старая посуда на этой полке имеет трещины. Ни один горшок на этой полке не новый. Все, что стоит на этой полке и имеет трещины, не пригодно для хранения воды. Верно ли, что ни один горшок на этой полке не пригоден для хранения воды?

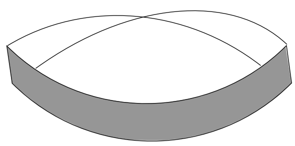
15. Все незрелые фрукты неполезны. Все эти яблоки полезны. Ни один фрукт, выросший в тени, не зрелый. Верно ли, что эти яблоки выросли на солнце?

16. Щенок, не желающий лежать спокойно, всегда будет вам благодарен, если предложите ему скакалку. Хромой щенок не скажет вам спасибо, если вы предложите ему скакалку. Никто, кроме хромых щенят, не станет ткать. Верно ли, что щенки, которые не могут лежать спокойно, не станут ткать?

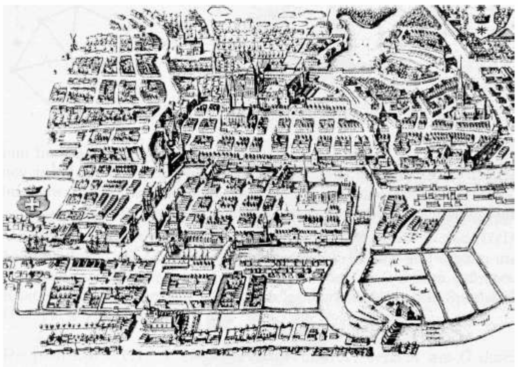
Для чего, в самом деле, полюса, параллели,
Зоны, тропики и зодиаки?
И команда в ответ: «В жизни этого нет,
Это — чисто условные знаки».
…
Но все уже тропа становилась, и мрак
Постепенно окутал округу,
Так что сами они не заметили как
Их притерло вплотную друг к другу.

Льюис Кэрролл. Охота на Снарка
Перевод Григория Кружкова

Глава 3
Теория графов и топология



§ 9. Теория графов



Оглавление

1. Граф . . . 135
1°. Определение графа. Изоморфизм графов . . . 135
2°. Изображения всех графов . . . 136
3°. Закономерности на графах . . . 137
2. Дерево . . . 139
1°. Связность. Маршрут . . . 139
2°. Цикл. Дерево . . . 140
3. Задача о кёнигсбергских мостах . . . 141
1°*. Статья Эйлера 1736 года . . . 141
2°. Определение задачи о кёнигсбергских мостах . . . 142
3°. Теорема Эйлера . . . 143
Тесты . . . 145
Упражнения . . . 148

Литература

Основная

Болтянский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты.— М.: ФИМА, МЦНМО, 2002.

Дополнительная

Романовский И. В. Дискретный анализ.— СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2003.

Харари Ф. Теория графов. М.: Едиториал УРСС, 2003.

Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы.— М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003.

Гарднер М. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам / Пер. с англ.— М.: Мир, 1993.

Ключевые слова

Граф, вершина, ребро, изоморфизм графов, порядок графа, степень вершины, (p, q)-граф, инвариант графа, четная и нечетная вершины, связность графа, компонента связности, маршрут, замкнутый и открытый маршруты, цепь, цикл, дерево, задача о кёнигсбергских мостах, абстрагирование, мультиграф, эйлеров граф.

1. Граф

1°. Определение графа. Изоморфизм графов

Граф определить очень просто.

Граф.

Граф — это точки, некоторые пары из которых соединены одной линией.

Графы рисуют на плоскости.

Примеры.

Некоторые графы изображены на рисунке 1.

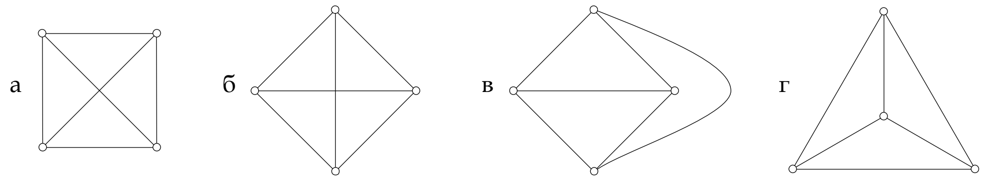


Рис. 1. Примеры изоморфных графов: все графы изоморфны друг другу

Точки и линии, из которых состоит граф, носят специальные названия.

Вершина, ребро.

Точки, из которых состоит граф, называются *вершинами* графа, а линии — *ребрами* графа.

В теории графов не различают *одинаковых, то есть изоморфных*, графов. В каком бы виде ни рисовали граф на плоскости, это будет один и тот же граф.

Изоморфизм графов.

Два графа *изоморфны*, если их можно наложить друг на друга до полного совпадения вершин и ребер. При этом, конечно, можно и нужно передвигать их вершины и растягивать и сжимать их ребра.

Все четыре графа на рисунке 1 изоморфные друг другу!

Действительно, изображение графа 1б получается из изображения 1а поворотом на 90°, изображение 1в — из изображения 1б изгибанием вправо вертикального ребра, изображение 1г — из 1б поднятием нижней вершины вверх до центра треугольника (или из 1в сдвигом влево правой вершины и выпрямлением обратно в вертикаль изогнутого ребра).

Разумеется, у всех графов на рисунке 1 по 4 вершины, а из каждой вершины выходит по 3 ребра.

Порядок графа, степень вершины.

Порядок графа — это количество его вершин, а *степень вершины* — это количество ребер, выходящих (или входящих) из нее.

Итак, на рисунке 1 изображен граф порядка 4, все вершины которого имеют степень 3.

2°. Изображения всех графов

(*p*, *q*)-граф.

Граф, имеющий *p* вершин и *q* ребер, называется (*p*, *q*)-графом.

Чем могут отличаться разные, неизоморфные графы одного порядка? Естественно, количеством ребер. Нарисуем все графы низших порядков.

1. Очевидно, что существует только один граф порядка 1: это точка (рис. 2).

Рис. 2. Единственный граф порядка 1: (1, 0)-граф

У графа порядка 1 количество ребер равно 0, сумма степеней вершин равна 0, количество вершин четной степени равно 1, а нечетной степени — 0.

2. Графов порядка 2 уже больше: их два (рис. 3). Первый граф порядка 2 не имеет ни одного ребра, второй — имеет единственное ребро. Таким образом, изображения графов порядка 2 можно упорядочить по количеству ребер (рис. 3).

Рис. 3. Два графа порядка 2: (2, 0)-граф (слева) и (2, 1)-граф (справа)

У первого графа порядка 2 (рис. 3 слева) количество ребер равно 0, сумма степеней вершин равна 0, количество вершин четной степени равно 2, а нечетной степени — 0.

У второго графа порядка 2 (рис. 3 справа) количество ребер равно 1, сумма степеней вершин равна 2, количество вершин четной степени равно 0, а нечетной степени — 2.

3. Если графы одного порядка различаются только по количеству ребер, то графов порядка 3 должно быть четыре. Так оно и есть, и снова графы порядка 3 легко упорядочить по количеству ребер (рис. 4).

Рис. 4. Все четыре графа порядка 3: слева направо: (3, 0)-, (3, 1)-, (3, 2)- и (3, 3)-графы

У первого графа порядка 3 количество ребер равно 0, сумма степеней вершин равна 0, количество вершин четной степени равно 3, а нечетной степени — 0.

Второй граф порядка 3 имеет 1 ребро, сумму степеней вершин 2, а также 1 вершину четной степени и 2 — нечетной.

Третий граф имеет 2 ребра, сумму степеней вершин 4, а также 1 вершину четной степени и 2 — нечетной.

Наконец, у четвертого 3 ребра, сумма степеней вершин 6, 3 вершины четной степени и 0 — нечетной.

3°. Закономерности на графах

Составим таблицу 5 из полученных нами данных о всех графах первых трех порядков.

Таблица 5

Параметры графов первых трех порядков

Граф	Сумма степеней вершин	Количество вершин четной степени	Количество вершин нечетной степени
(1, 0)	0	1	0
(2, 0)	0	2	0
(2, 1)	2	0	2
(3, 0)	0	3	0
(3, 1)	2	1	2
(3, 2)	4	1	2
(3, 3)	6	3	0

Инвариант графа.

Инвариант графа — это число, связанное с графом и одинаковое для всех изоморфных графов

Ясно, что порядок графа, количество его ребер, количество его вершин четной степени и количество его вершин нечетной степени не меняются, как бы граф ни нарисовали на плоскости. Поэтому эти числа являются инвариантами любого графа.

Кроме того, порядок графа и количество ребер однозначно определяют графы порядков 1, 2 и 3. Действительно, из таблицы 5 ясно видно, что у всех семи графов, описанных в таблице, разное количество вершин и ребер.

Внимательно рассмотрим таблицу 5 и сравним количество ребер графов с сумой степеней его вершин. Выявленная закономерность иллюстрирует следующую теорему.

Теорема 6. Сумма степеней вершин графа.

Сумма степеней вершин графа всегда четна и равна удвоенному количеству ребер.

Доказательство. Каждое ребро графа соединяет две вершины и поэтому считается в сумме степеней вершин два раза.

Четная и нечетная вершины.

Назовем *четной вершиной* вершину графа, имеющую четную степень, а *нечетной вершиной* — вершину графа, имеющую нечетную степень.

Рассмотрим таблицу 5 и изучим количество нечетных вершин, то есть количество вершин нечетной степени.

Теорема 7. Количество нечетных вершин.

Количество нечетных вершин графа четно.

*Доказательство**. Сумма степеней вершин графа разбивается на две части: на сумму степеней четных вершин и на сумму степеней нечетных вершин.

Вся сумма четна по теореме 6. Сумма степеней четных вершин тоже четна как сумма четных чисел. Следовательно, должна быть четна и вторая сумма: сумма степеней нечетных вершин,— как разность четных чисел.

Чтобы последняя сумма нечетных чисел была четна, необходимо, чтобы количество нечетных чисел было четно, то есть количество нечетных вершин всегда четно.

Теорема 8. Теорема Рамсея.

Среди любых шести человек всегда найдутся либо три попарно знакомых, либо три попарно незнакомых.

*Доказательство**. Построим модель задачи в виде графа, шесть вершин которого соответствуют шести людям. Тогда требуется доказать, что в любом графе порядка 6 найдутся либо три вершины, попарно соединенные ребрами, либо три вершины, попарно не соединенные ребрами.

Возьмем любую вершину X. Она либо соединена не менее чем с тремя вершинами из пяти других вершин, либо не соединена не менее чем с тремя вершинами из пяти других вершин. Не умаляя общности предположим для простоты, что выбранная вершина соединена по крайней мере с тремя вершинами A, B и C (см. рис. 9) (если не соединена с тремя вершинами, то доказательство то же самое, только надо слово «соединены» заменять на «не соединены» и наоборот,— это и означают слова «не умаляя общности»).

На рисунке 9 показано, как выбранная вершина X соединена с тремя вершинами A, B и C. Пунктиром соединены пары вершин, про которые неизвестно, соединены ли они ребром.

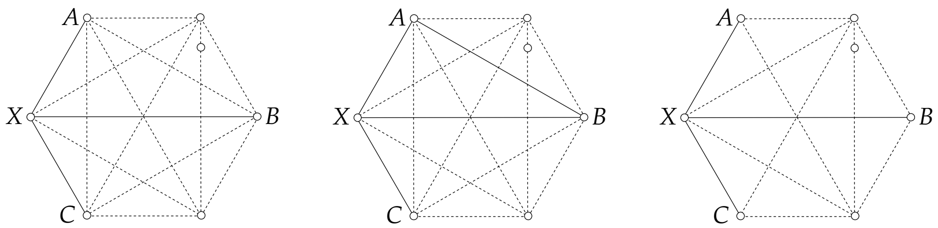


Рис. 9. Решение задачи Рамсея

Возможны два случая.

1. Какая-нибудь пара из трех вершин A, B и C соединена ребром. Не умаляя общности, пусть это вершины A и B (см. рис. 9 в центре). Тогда имеем три вершины X, A и B, попарно соединенные ребрами.

2. Никакие две вершины из A, B и C не соединены ребром (см. рис. 9 справа). Тогда получаем три вершины A, B и C, попарно не соединенные ребрами.

2. Дерево

1°. Связность. Маршрут

На графах просто ввести универсальное понятие *связности*.

Связность графа.

Граф *связен*, если с любой его вершины на любую другую можно перейти по ребрам.

Примеры.

Посмотрим, какие из семи графов порядка 1—3 связны, а какие нет.

Очевидно, что (1, 0)-граф порядка 1 связен (см. рис. 2).

(2, 0)-граф несвязен, а (2, 1)-граф связен (см. рис. 3).

(3, 0)- и (3, 1)-графы несвязны, а (3, 2)- и (3, 3)-графы связны (см. рис. 4).

Компонента связности.

Любой граф состоит из *связных подграфов, или компонент связности*.

Ясно, что связный граф имеет одну компоненту связности.

Примеры.

Несвязный (2, 0)-граф имеет две компоненты связности — два графа порядка 1 (см. рис. 3).

Несвязный (3, 0)-граф имеет три компоненты связности — три графа порядка 1 (см. рис. 4).

Несвязный (3, 1)-граф имеет две компоненты связности — один графа порядка 1 и один граф порядка 2(см. рис. 4).

Уточним понятие связности.

Маршрут.

Маршрут на графе — цепочка ребер, соединяющая две вершины так, что окончание предыдущего ребра совпадает с началом следующего.

Примеры.

Нарисуем какой-нибудь граф и обозначим буквами его вершины (рис. 10). Тогда маршруты просто обозначать метками вершин.

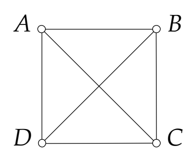


Рис. 10. Граф с помеченными вершинами

Некоторые маршруты, которыми можно соединить вершины A и B:

$A—B,\ A—C—B,\ A—D—B,\ A—D—C—B,\ A—C—D—B.$

Некоторые маршруты, которыми можно вернуться в вершину A:

$A—B—A,\ A—B—C—A,\ A—C—B—A,\ A—B—C—D—A,\ A—B—D—C—A.$

Теперь можно дать более правильное определение связного графа.

Связность графа.

Граф *связен*, если любые две его вершины можно соединить маршрутом.

2°. Цикл. Дерево

Рассмотрим различные виды маршрутов.

Замкнутый и открытый маршруты.

Маршрут *замкнут*, если его начальная вершина совпадает с коечной, и *открыт* в противном случае.

Примеры.

Маршруты на графе на рисунке 10, которые приведены как примеры соединения вершины A с самой собой, замкнуты:

$$A—B—A,\ A—B—C—A,\ A—C—B—A,\ A—B—C—D—A,\ A—B—D—C—A.$$

Маршруты на графе на рисунке 10, которые приведены как примеры соединения вершин A и B, открыты:

$$A—B,\ A—C—B,\ A—D—B,\ A—D—C—B,\ A—C—D—B.$$

Маршрут может проходить по разным ребрам, а может по одинаковым. Для замкнутого маршрута все равно, где его начальная вершина, а где — конечная.

Цепь, цикл.

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны.

Если в *замкнутой цепи* все вершины различны, то это *цикл*.

Примеры.

В предыдущем примере все маршруты — цепи, кроме маршрута $A—B—A$.

В предыдущем примере из девяти цепей четыре являются циклами:

$$A—B—C—A,\ A—C—B—A,\ A—B—C—D—A,\ A—B—D—C—A.$$

На рисунке 10 можно насчитать семь различных циклов. Насчитайте.

Приведем понятие, которое часто встречается в разных разделах математики и информатики.

Дерево.

Дерево — это связный граф без циклов.

Очевидна следующая теорема.

Теорема 11. Количество ребер дерева.

Дерево порядка n имеет $n - 1$ ребро.

Перечислим все деревья порядков 1—5 (рис. 12):

Рис. 12. Все восемь деревьев порядков 1—5

3. Задача о кёнигсбергских мостах

1°*. Статья Эйлера 1736 года

Впервые решение задачи о кёнигсбергских мостах опубликовал великий математик Леонард Эйлер в Санкт-Петербурге в 1736 году. Приведем перевод начала этой статьи. Кстати, Эйлер никогда не был в Кёнигсберге.

1. В дополнение к той части геометрии, которая имеет дело с количествами и которая всегда возбуждала особый интерес, существует другая — фактически все еще неизвестная — часть, которую впервые упомянул Лейбниц и которую он назвал *геометрией положения*. Эта часть геометрии занимается именно тем, что может быть определено только положением, а также исследованием свойств положения; в этом смысле она не будет касаться ни количеств, ни их вычисления. Однако виды задач, относящихся к этой геометрии положения, и методы, используемые для их решения, были недостаточно точно определены. Из-за этого в последнее время, когда возникала задача, которая казалась в основе своей геометрической, но по своей природе не требовала определения количеств и не допускала решения с помощью вычисления количеств, я был убежден, что она принадлежит геометрии положения главным образом из-за того, что только положение можно было использовать для ее решения, в то время как вычисления были совсем бесполезны. Поэтому я решил объяснить здесь метод, который разработал для решения задач подобного вида, как пример геометрии положения.

2. Эта задача, как мне сказали, довольно хорошо известна и связана вот с чем.

В городе Кёнигсберге, в Пруссии, есть остров, называемый *Кнайпхоф*; река, окружающая его, делится на два рукава, что можно увидеть на рисунке (фиг. 1). Рукава этой реки пересекают семь мостов *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* и *g*. В связи с этими мостами был поставлен вопрос, можно совершить по ним прогулку так, чтобы пройти по каждому из этих мостов, причем ровно по одному разу.

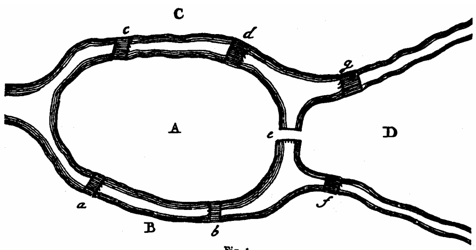


Fig. 1.

Как я слышал, некоторые отрицают, что это можно сделать, другие сомневаются, но никто не подтверждает такой возможности. Исходя из этого, я сформулировал для себя следующую общую задачу: какой ни была форма реки и деление ее на рукава и каково бы ни было число мостов, пересекающих их, выяснить, можно ли пройти по всем этим мостам, причем по каждому только один раз.

3. Конечно, можно решить кёнигсбергскую задачу о семи мостах, составив полный список всех маршрутов, какие только можно себе представить, и тогда станет ясно, годится ли некоторый маршрут или подходящего маршрута нет. Однако из-за большого числа комбинаций этот способ решения задачи представляется слишком трудным и громоздким. Кроме того, его нельзя было бы применить к другим задачам со значительно большим числом мостов. И даже если при таком способе решения работу можно было бы довести до конца, возникли бы многие не относящиеся к делу обстоятельства; здесь, без сомнения, лежит основная причина трудностей. Поэтому, отказавшись от этого метода, я стал искать другой, который позволил бы только решить, возможен ли маршрут, который удовлетворяет нашим требованиям; я подозревал, что такой метод был бы значительно проще.

Для любознательных приведем также начало этой статьи Эйлера на том языке, на котором она была опубликована — на латинском.

1. Praeter illam geometriae partem, quae circa quantitates versatur et omni tempore summo studio est exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit LEIBNITZIUS, quam *Geometriam situs* vocavit.

2°. Определение задачи о кёнигсбергских мостах

Рассмотрим задачу, с которой начиналась теория графов.

Задача о кёнигсбергских мостах.

Задача о кёнигсбергских мостах — задача о прохождении по одному разу по мостам города Кёнигсберга XVIII века.

На гравюре на рисунке 13 показан город Кёнигсберг в 1736 году.

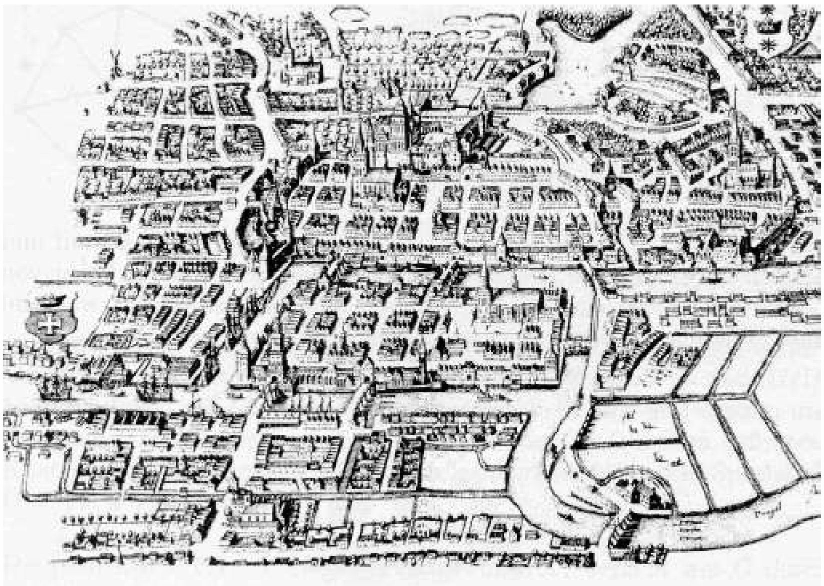


Рис. 13. Город Кёнигсберг в 1736 г. и схема его частей и мостов

Так и будем понимать эту задачу в дальнейшем.

Однако за границей задача о кёнигсбергских мостах — это родовое имя целого класса задач.

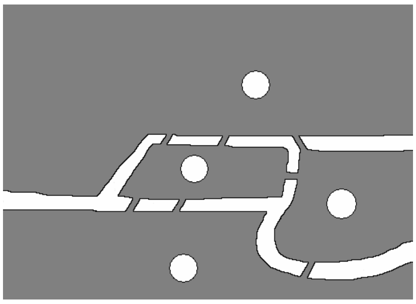
Задача о кёнигсбергских мостах.

На Западе *задача о кёнигсбергских мостах* — любая задача о прохождении по одному разу по мостам любой конфигурации, или об обводе рисунка, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одной линии дважды, или об обходе по одному разу ребер любого связного графа.

Абстрагирование.

Смоделируем русскую задачу о кёнигсбергских мостах с помощью графа. Мосты ведут в четыре разных части города, разделенных рекой Преголя, которые *абстрагируем* вершинами. Получаем четыре вершины, как показано на рисунке 14 слева.

Абстрагируя мосты ребрами, окончательно получаем граф задачи о кёнигсбергских мостах, изображенный на рисунке 14 справа. Но получился не совсем граф: некоторые вершины соединены более чем одним ребром.



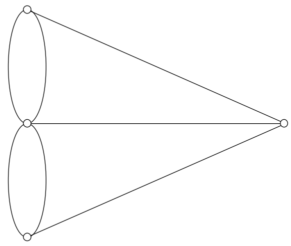


Рис. 14. Схема города Кёнигсберга в 1736 г. (слева)
и граф задачи о кёнигсбергских мостах (справа)

Теперь наша *задача о кёнигсбергских мостах* формулируется так.

Задача о кёнигсбергских мостах.

Можно ли обойти граф задачи о кёнигсбергских мостах, пройдя по его ребрам по одному разу?

3°. Теорема Эйлера

Граф, у которого две вершины могут соединять несколько ребер, носит специальное название.

Мультиграф.

Мультиграф — это граф, у которого вершины могут соединяться более чем одним ребром.

В дальнейшем мультиграф будем для краткости называть просто графом. Тем более что развиваемая теория верна и для мультиграфов, и для обычных графов как их частного случая.

Теорема 15. Теорема Эйлера.

Связный граф можно обойти по одному разу по ребрам тогда и только тогда, когда он имеет либо две нечетные вершины, либо ни одной.

При двух нечетных вершинах эти вершины — конечные вершины маршрута обхода. Когда нет нечетных вершин, то граф можно обойти, начиная с любой вершины, на той же вершине маршрут и закончится.

Доказательство. Докажем только необходимость.

Пусть граф уже обойден по какому-то маршруту. Докажем, что тогда он либо имеет две нечетные вершины, либо не имеет ни одной.

Маршрут, которым обойден граф, имеет конечные вершины и не конечные, промежуточные.

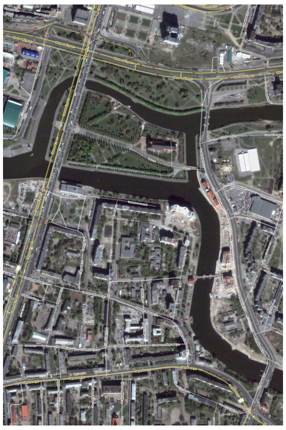
Рассмотрим степени промежуточных вершин. В каждую из них наш маршрут входит и сразу выходит, поэтому промежуточные вершины — четные.

Итак, только конечные вершины могут быть нечетными, то есть количество нечетных вершин не более двух. Следовательно, по теореме 7, всего нечетных вершин либо две, либо ни одной.

Посмотрим на граф кёнигсбергских мостов на рисунке 14. Он имеет четыре нечетные вершины, поэтому его обойти нельзя.

В настоящее время от 7 Кёнигсбергских мостов осталось только 3. Но построены еще 3 моста. На рисунке 16 слева показана спутниковая съемка современного Калининграда, которую можно найти на поисковике Google.

На рисунке 16 справа представлена схема центра города Калининграда.



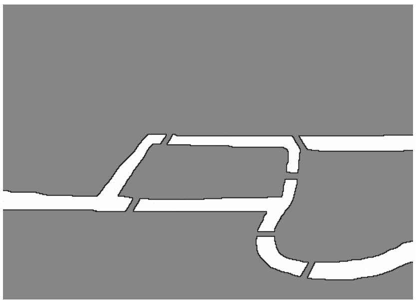


Рис. 16. Спутниковая съемка мостов города Калининграда в 2009 году (слева) и схема центра города Калининграда в 2009 году (справа)

Следующий вид графов назвали в честь Эйлера.

Эйлеров граф.
Связный граф *эйлеров*, если все его вершины четные.

Нарисуем все эйлеровы графы порядков 1—4.

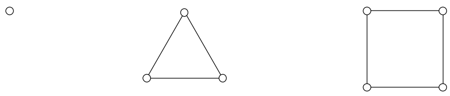
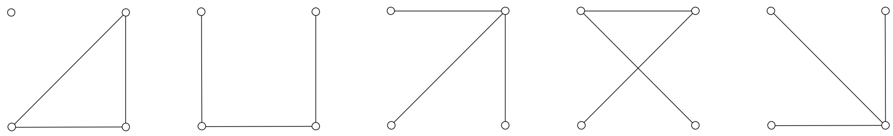


Рис. 17. Все три эйлеровых графов порядков 1—4

Тесты

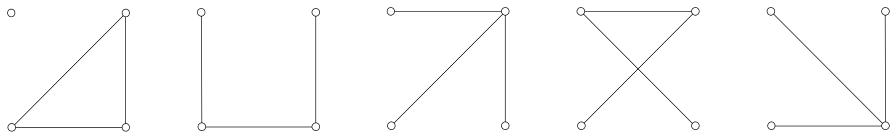
1. Граф

1.1. Сколько вершин у всех представленных графов?



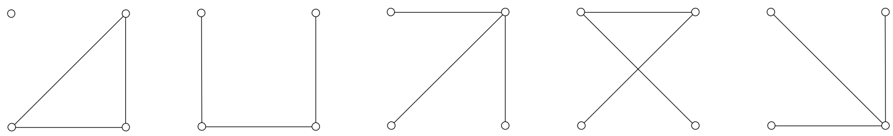
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

1.2. Сколько ребер у всех представленных графов?



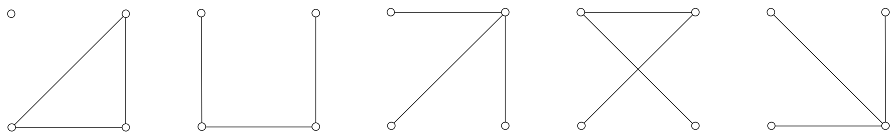
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

1.3. Какой по порядку граф не имеет изоморфного графа среди представленных графов?



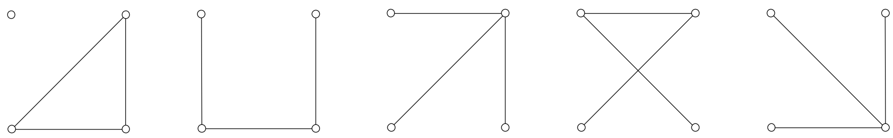
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

1.4. Сколько компонент имеет несвязный граф, представленный на рисунке?



1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

1.5. Какая минимальная степень вершины у несвязного графа, представленного на рисунке?



1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

2. Дерево

2.1. Сколько ребер имеют деревья порядка 4?

1) 0.
2) 1.
3) 2.
4) 3.
5) 4.

2.2. Сколько всего деревьев порядка 3?

1) 0.
2) 1.
3) 2.
4) 3.
5) 4.

2.3. Сколько циклов может иметь дерево?

1) 0.
2) 1.
3) 2.
4) 3.
5) 4.

2.4. Сколько всего деревьев порядка 4?

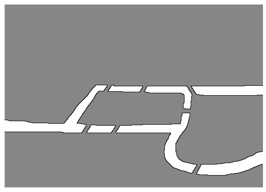
1) 0.
2) 1.
3) 2.
4) 3.
5) 4.

2.5. Сколько ребер имеют деревья порядка 5?

1) 0.
2) 1.
3) 2.
4) 3.
5) 4.

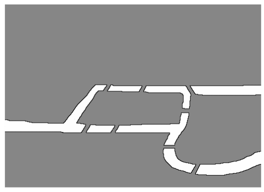
3. Задача о кёнигсбергских мостах

3.1. Можно ли обойти мосты центра Кёнигсберга 1736 г., а если можно, то как (см. рис. справа)?



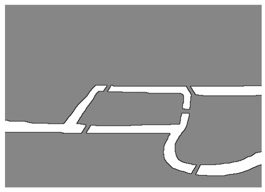
1) Нельзя обойти.
2) Можно обойти, начиная только из одного места.
3) Можно обойти, начиная только из двух мест.
4) Можно обойти, начиная только из трех мест.
5) Можно обойти, начиная из всех четырех мест.

3.2. Можно ли обойти мосты центра Кёнигсберга 1910 г., а если можно, то как (см. рис. справа)?



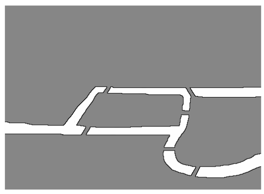
1) Нельзя обойти.
2) Можно обойти, начиная только из одного места.
3) Можно обойти, начиная только из двух мест.
4) Можно обойти, начиная только из трех мест.
5) Можно обойти, начиная из всех четырех мест.

3.3. Можно ли обойти мосты центра послевоенного Кёнигсберга, а если можно, то как (см. рис. справа)?



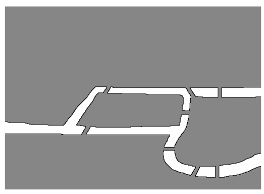
1) Нельзя обойти.
2) Можно обойти, начиная только из одного места.
3) Можно обойти, начиная только из двух мест.
4) Можно обойти, начиная только из трех мест.
5) Можно обойти, начиная из всех четырех мест.

3.4. Можно ли обойти мосты центра Кёнигсберга начала XXI века, а если можно, то как (см. рис. справа)?



1) Нельзя обойти.
2) Можно обойти, начиная только из одного места.
3) Можно обойти, начиная только из двух мест.
4) Можно обойти, начиная только из трех мест.
5) Можно обойти, начиная из всех четырех мест.

3.5. Можно ли обойти мосты центра Кёнигсберга недалекого будущего, а если можно, то как (см. рис. справа)?



1) Нельзя обойти.
2) Можно обойти, начиная только из одного места.
3) Можно обойти, начиная только из двух мест.
4) Можно обойти, начиная только из трех мест.
5) Можно обойти, начиная из всех четырех мест.

Упражнения

Пусть n — номер варианта от 1 до 16. Выполните упражнение с номером Вашего варианта.

1. Нарисуйте все одиннадцать графов порядка 4 с метками вершин, упорядочив их по количеству ребер. Для каждого графа выпишите количество ребер.

2. Нарисуйте все одиннадцать графов порядка 4 с метками вершин, упорядочив их по количеству ребер. Для каждого графа выпишите сумму степеней вершин.

3. Нарисуйте все одиннадцать графов порядка 4 с метками вершин, упорядочив их по количеству ребер. Для каждого графа выпишите количества и метки четных вершин.

4. Нарисуйте все одиннадцать графов порядка 4 с метками вершин, упорядочив их по количеству ребер. Для каждого графа выпишите количества и метки нечетных вершин.

5. Нарисуйте все одиннадцать графов порядка 4 с метками вершин, упорядочив их по количеству ребер. Для каждого графа выпишите количество компонент связности.

6. Нарисуйте все одиннадцать графов порядка 4 с метками вершин, упорядочив их по количеству ребер. Для каждого графа выпишите все его различные циклы, если они есть.

7. Нарисуйте все одиннадцать графов порядка 4 с метками вершин, упорядочив их по количеству ребер. Определяются ли полностью графы порядка 4 количеством ребер и почему?

8. Нарисуйте все одиннадцать графов порядка 4 с метками вершин, упорядочив их по количеству ребер. Определяются ли полностью графы порядка 4 количеством ребер и связностью и почему?

9. Выпишите все тринадцать цепей, соединяющих в графе на рисунке 10 вершины A и B.

10. Нарисуйте все шесть деревьев порядка 6.

11. Нарисуйте все четыре эйлерова графа порядка 5.

12. Можно ли обойти по одному разу мосты современного г. Калининграда? Если можно, нарисуйте один из обходов.

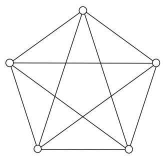
13. Исключите из обхода один из мостов старого Кёнигсберга так, чтобы по оставшимся шести можно было пройти по одному разу. Сделайте это всеми возможными семью способами.

14. Нарисуйте все шесть связных графов порядка 4 с метками вершин, упорядочив их по количеству ребер. Можно ли обойти по одному разу их ребра? Если можно, нарисуйте по одному из обходов.

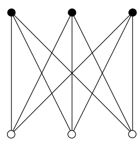
15. Нарисуйте все шесть деревьев порядка 6 с метками вершин. Можно ли обойти по одному разу их ребра? Если можно, нарисуйте по одному из обходов.

16. Нарисуйте все четыре эйлерова графа порядка 5 с метками вершин. Можно ли обойти по одному разу их ребра? Если можно, нарисуйте по одному из обходов.

§ 10. Планарные, раскрашенные и ориентированные графы



K_5



$K_{3,3}$

Оглавление

1. Планарные графы 151
1°. Плоский и планарный граф. Полный граф 151
2°. Двудольный граф. Теорема Понтрягина — Куратовского 153
2. Раскрашенные графы 156
1°. Хроматическое число графа 156
2°*. История задачи о четырех красах 157
3°. Задача о четырех красках 157
3. Ориентированные графы 159
1°. Определение орграфа. Изоморфизм орграфов 159
2°. Слабая и сильная связности орграфа 160
Тесты 162
Упражнения 164

Литература

Основная

Болтянский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты.— М.: ФИМА, МЦНМО, 2002.

Дополнительная

Романовский И. В. Дискретный анализ.— СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2003.

Харари Ф. Теория графов. М.: Едиториал УРСС, 2003.

Акимов О. Е. Дискретная математика: логика, группы, графы.— М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003.

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения: 2-е изд., испр. и дополн. / Пер. с англ.— М.: Мир, 1999.

Гарднер М. Математические досуги: 2-е изд., испр. и доп. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2000.

Ключевые слова

Плоский граф, планарный граф, полный граф, двудольный граф, изоморфизм двудольных графов, полный двудольный граф, теорема Понтрягина — Куратовского, задача об электро-, газо- и водоснабжении, правильная раскраска графа, хроматическое число графа, карта стран, страна, соседние страны, задача о четырех красках, теорема о двуцветных картах, ориентированный граф, орграф, ориентированное ребро, орребро, дуга, исход, заход, (p, q)-орграф, антипараллельные дуги, изоморфизм орграфов, остовный граф, слабая связность орграфа, ормаршрут, сильная связность орграфа, замкнутый ормаршрут, орцикл, эйлеров орграф.

1. Планарные графы

1°. Плоский и планарный граф. Полный граф

В предыдущем параграфе мы рисовали графы на плоскости, и физически, и мысленно. И не задумывались, а на чем еще можно рисовать графы?

Например, графы можно размещать в трехмерном пространстве. Например, трехмерная модель химической молекулы — это граф. Трехмерная реберная модель многогранника — это граф. Представлять графы в трехмерном пространстве можно также мысленно.

Некоторые графы можно нарисовать на плоскости так, что их ребра не будут пересекаться.

Плоский граф.

Плоский граф — изображение графа, нарисованное на плоскости без пересечения ребер.

Ясно, что любой граф, имеющий хотя бы два ребра, можно нарисовать с пересечением ребер. Но не каждый граф можно нарисовать на плоскости без пересечения ребер.

Примеры.

На рисунке 1 показаны:

1) (3, 2)-граф, который нарисован без пересечения ребер и с пересечением двух своих ребер;

2) (4, 6)-граф, который нарисован с пересечением своих шести ребер и без их пересечения;

3) (5, 10)-граф, который можно нарисовать только с пересечением ребер.

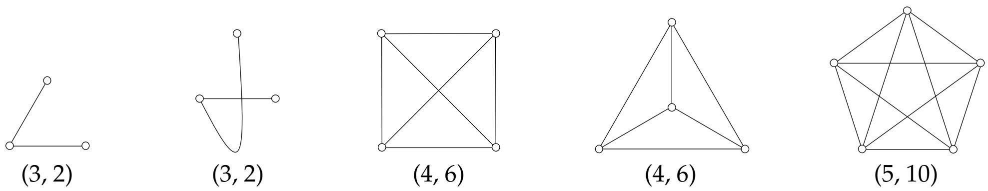


Рис. 1. Слева направо: (3, 2)-граф без пересечения ребер; (3, 2)-граф с пересечением; (4, 6)-граф с пересечением ребер; (4, 6)-граф без пересечения; (5, 10)-граф

Быть нарисованным на плоскости без пересечения ребер — это важное свойство, которым может обладать или не обладать конкретный граф.

Планарный граф.

Если граф можно нарисовать на плоскости без пересечения ребер, то он *планарный*.

Другими словами, *планарный граф* — граф, изоморфный плоскому.

Безусловно, графы маленьких порядков все являются планарными.

Теорема 2. Планарность маленьких графов.

Все графы до четвертого порядка включительно — планарные.

Доказательство. Для доказательства достаточно нарисовать все эти графы. Это легко. Некоторая трудность может возникнуть только с графом порядка 4 с самым большим числом ребер 6. На рисунке 3 показан этот граф, нарисованный слева в виде двух неплоских графов, а справа — двух плоских.

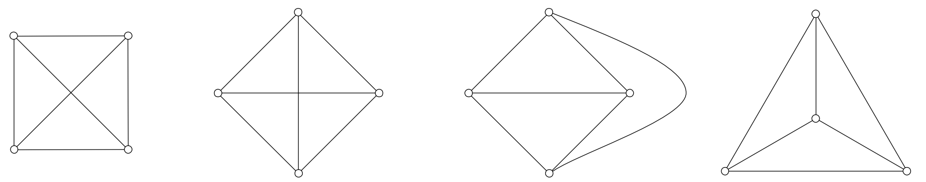


Рис. 3. (4, 6)-граф: слева — два неплоских его изображения; справа — два плоских

Среди графов порядка 5 все плоские, кроме (5, 10)-графа — самого большого с максимальным количеством вершин (см. рис. 3).

Для графов каждого порядка имеется только один граф с максимальным количеством ребер.

Полный граф.

Граф с максимальным количеством ребер называется *полным*.

Другими словами, в *полном графе* каждая пара вершин соединена ребром.

Обозначение полного графа: K_n, где n — порядок графа.

Как уже было сказано, имеется только один полный граф для любого фиксированного количества вершин n. Поэтому полный граф полностью определяется одним инвариантом — количеством вершин, и ему можно присвоить такое простое обозначение — K_n.

Графы K_1 — K_4 планарны.

Граф K_5 непланарен.

Граф K_6 содержит K_5, поэтому он тоже *непланарен* (см. рис. 4 справа).

Примеры.

На рисунке 4 нарисованы полные графы порядков от 1 до 6.

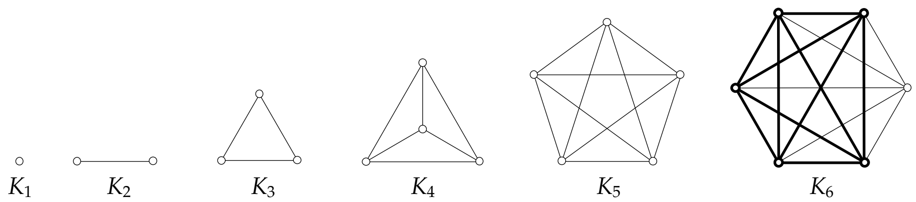


Рис. 4. Полные графы, слева направо: K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6

2°. Двудольный граф. Теорема Понтрягина — Куратовского

Двудольный граф.

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно разбить на два класса таким образом, чтобы вершины каждого класса не соединялись ребрами друг с другом.

Понятно, что минимальный порядок двудольного графа таков, чтобы были хотя бы две вершины, то есть 2.

Примеры.

Нарисуем все двудольные графы порядков 2 и 3 (см. рис. 5). Вершины одного класс обозначим белыми точками, второго — черными.

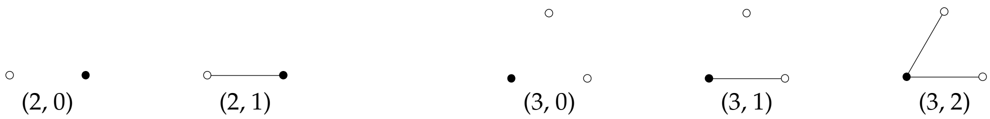


Рис. 5. Двудольные графы: слева — все два двудольных графа порядка 2; справа — все три двудольных графа порядка 3

В теории графов не различают *одинаковых, то есть изоморфных*, двудольных графов. В каком бы виде ни рисовали двудольный граф на плоскости, это будет один и тот же двудольный граф.

Изоморфизм двудольных графов.

Два двудольных графа *изоморфны*, если их можно наложить друг на друга до полного совпадения вершин и ребер. При этом, конечно, можно и нужно передвигать их вершины и растягивать и сжимать их ребра.

Примеры.

Нарисуем на рисунке 6 графы, изоморфные двудольному (3, 2)-графу.

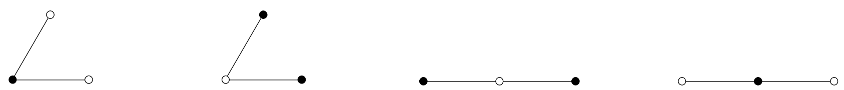


Рис. 6. Изоморфные модификации двудольного (3, 2)-графа

Важен случай двудольного графа с максимальным количеством ребер.

Полный двудольный граф.

Если в двудольном графе каждая вершина одного класса соединена ребром с каждой вершиной другого, то это *полный двудольный граф*.

Обозначение: $K_{n,m}$, где n — количество вершин в одном классе двудольного графа, m — количество вершин в другом.

Достаточно очевидно, что порядок полного двудольного графа $K_{n,m}$ равен $n + m$.

П р и м е р ы.

Нарисуем все полные двудольные графы до порядка 6 включительно. Как и раньше, вершины одного класс обозначим белыми точками, второго — черными. Для каждого двудольного графа указано количество вершин в каждом классе, а также количество вершин и ребер.

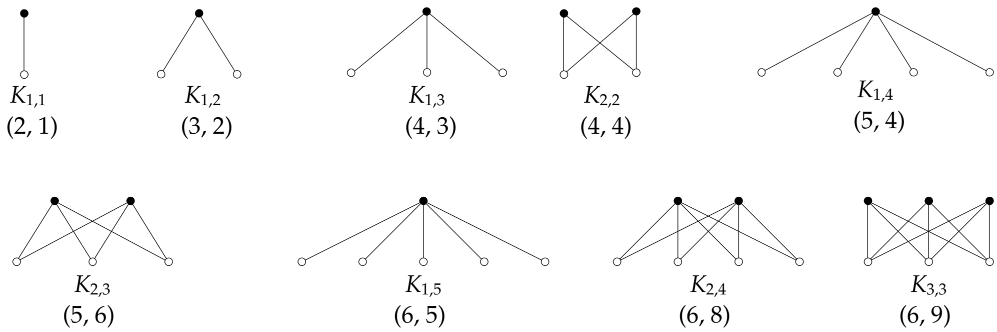


Рис. 7. Все полные двудольные графы от порядка 2 до порядка 6:
порядка 2: $K_{1,1}$; порядка 3: $K_{1,2}$; порядка 4: $K_{1,3}$, $K_{2,2}$;
порядка 5: $K_{1,4}$, $K_{2,3}$; порядка 6: $K_{1,5}$, $K_{2,4}$, $K_{3,3}$

Все графы рисунка 7, кроме $K_{3,3}$, планарные. *Граф $K_{3,3}$ непланарен.*

Т е о р е м а 8. Ч и с л о р е б е р п о л н ы х г р а ф о в.

Количество ребер полного графа K_n порядка n равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Количество ребер полного двудольного графа $K_{n,m}$ равно nm.

Доказательство. В каждую из n вершин полного графа K_n входит ровно $n-1$ ребро. Перемножим количество вершин на количество входящих в них ребер, получим $n(n-1)$. Но этом произведении каждое ребро подсчитано дважды, поэтому количество ребер графа K_n равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Из каждой из n вершин одного класса полного двудольного графа $K_{n,m}$ выходит по m ребер, равное числу вершин второго класса. Следовательно, Поэтому число ребер графа $K_{n,m}$ равно nm.

Следующую теорему 11 доказал, но не опубликовал, в 1927 г. русский математик *Лев Семёнович Понтрягин*. Первым опубликовал эту теорему польский математик *Казимир Куратовский* в 1930 г.

Т е о р е м а 9. Т е о р е м а П о н т р я г и н а — К у р а т о в с к о г о.

Граф планарен тогда и только тогда, когда он ни в каком смысле не содержит ни K_5, ни $K_{3,3}$ (обсуждение, в каким смыслах не содержит, выходит за рамки этой книги).

На рисунке 4 справа показано, как граф K_6 содержит граф K_5.

Не всегда просто понять, является ли данный граф плоским. Обратимся к одной из самых старых топологических задач, которая особенно долго не поддавалась решению и будоражила умы. Мы сохраним ту же формулировку этой задачи, которую ей дал в 1917 году *Генри Э. Дьюдени*.

Задача об электро-, газо- и водоснабжении.

В каждый из трех домов, изображенных на рисунке 10, необходимо провести свет, газ и воду. Можно ли так проложить коммуникации, чтобы они, нигде не пересекаясь друг с другом, соединяли каждый дом с источниками электричества, газа и воды?

Другими словами, можно ли построить плоский граф с вершинами в указанных точках?

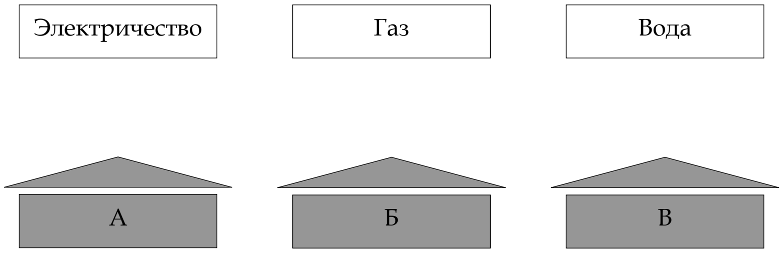


Рис. 10. Задача об электро-, газо- и водоснабжении

Решение. Предположим, что коммуникации надо подвести лишь к домам А и Б. Чтобы коммуникации нигде не пересекались, придется разделить плоскость на три области X, Y и Z, например так, как показано на рисунке 11.

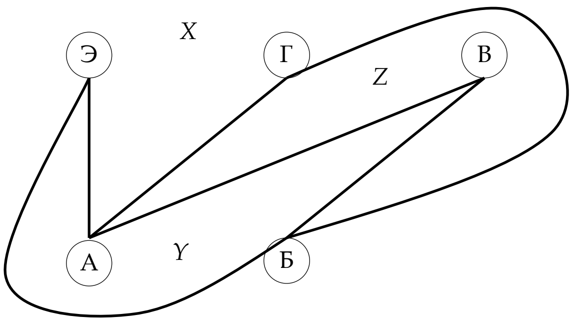


Рис. 11. Доказательство неразрешимости задачи об электро-, газо- и водоснабжении

Рисовать точно такую же схему совершенно необязательно, но, как бы мы ни соединяли вершины, получившийся граф всегда будет изоморфен графу, изображенному на рисунке 9. Дом В, таким образом, попадает в одну из трех областей X, Y или Z. Попав в область X, он окажется без воды. Находясь в области Y, он будет отрезан от газа. В области Z в него прекратится подача электричества.

2. Раскрашенные графы

1°. Хроматическое число графа

Будем окрашивать вершины графов в разные цвета. Цвета обозначим греческими буквами. Будем использовать только *правильную раскраску*.

Правильная раскраска графа.

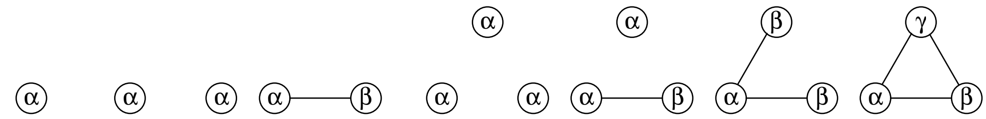
При *правильной раскраске графа* выполнены два условия:

1) смежные вершины имеют разные цвета;

2) используется минимальное возможное количество цветов (см. рис. 12).

Примеры.

Раскрасим все графы порядков 1—3 *правильно*.



(1, 0)	(2, 0)	(2, 1)	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
$\chi = 1$	$\chi = 1$	$\chi = 2$	$\chi = 1$	$\chi = 2$	$\chi = 2$	$\chi = 3$

Рис. 12. Раскраска графов порядка 1—3 и их хроматические числа

Хроматическое число графа.

Хроматическое число графа — число цветов правильной раскраски графа.

Обозначение хроматического числа графа: χ.

На рисунке 12 приведена одна из возможных раскрасок вершин графов. Нужно иметь в виду, что хроматическое число не зависит от того, как раскрашивать граф: при любой правильной раскраске потребуется одно и то же количество красок. Хроматическое число — это инвариант графа, не зависящий от правильной раскраски.

Теорема 13. Хроматические числа графов.

Хроматическое число полного графа K_n порядка n равно n.

Хроматическое число полного двудольного графа $K_{n,m}$ равно 2.

Хроматическое число любого дерева, имеющего хотя бы одно ребро, равно 2.

Доказательство. Каждая из n вершин полного графа K_n смежна всем остальным $n - 1$ вершинам. Поэтому хроматическое число полного графа K_n порядка n равно n.

Поскольку вершины каждого из двух классов любого двудольного графа попарно не смежны, то вершины одного класса красим в один цвет. В полном двудольном графе $K_{n,m}$ есть хотя бы одно ребро, поэтому цвета вершин разных классов различны, имеем 2 цвета.

В дереве нет циклов, поэтому три цвета для его окраски не понадобятся.

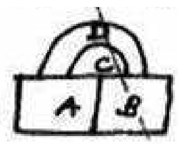
2°*. История задачи о четырех красах

В XIX веке в Англии хотя и изучали математику, но специалистам математического профиля было сложно устроиться на работу. Так, будущие профессора математики в процессе учебы дополнительно получали юридическое образование и сначала работали адвокатами.

Одному из них, *Фрэнсису Гутри*, позже профессору математики в Южной Африке, во время его адвокатской деятельности понадобилось раскрасить графства на карте Англии. Поскольку графств было больше, чем цветов для раскраски, некоторые графства должны были иметь одинаковый цвет. При этом каждые два графства, которые имеют общую границу, должны были быть раскрашены в разные цвета. Гутри замечает, что это удается сделать, используя 4 цвета, и ставит вопрос, выполняется ли это для любой возможной карты?

С этим вопросом он посылает 23 октября 1852 года своего младшего брата, тогда еще студента, *Фредерика Гутри*, позже известного физика, к их общему учителю математики *Августу де Моргану*, чьим именем в логике и алгебре множеств названы законы *де Моргана*.

Де Морган не отвечает на этот вопрос, но с помощью примера, показанного справа, констатирует, что существуют карты стран, для которых потребуется не менее четырех красок. Это является доказательством того, что трех красок недостаточно.



Первая важная публикация, относящаяся к проблеме, принадлежит известному математику *Артуру Кэли*, в которой он объясняет задачу. В связи с этим проблема приобретает бóльшую известность, и уже год спустя церковный юрист и любитель математики *Альфред Брей Кемпе* предлагает доказательство, которое печатается после тщательной проверки. Но через 11 лет, в 1890 году, известный математик *Персей Джон Хивуд* находит ошибку в доказательстве *Кемпе*, при этом ему удается показать, что пяти цветов для раскраски хватит в любом случае.

В 1976 году группа американских математиков из университета Иллинойса нашли первое компьютерное доказательство теоремы о четырех красках. Это доказательство было упрощено другой группой американских математиков в конце XX века, но оно также основано на компьютерных вычислениях.

3°. Задача о четырех красах

Карты стран возникают после нанесения линий границ этих стран. Ясно, что такие линии всегда образуют плоский граф как показано на рисунке 14.

Карта стран. Страна. Соседние страны.

Картой стран называется планарный граф. *Страны* на карте являются вершинами графа. Две страны являются *соседними*, если они соединены ребром, как показано на рисунке 14.

Рассматриваются только связные страны. Так, например, Российская Федерация вместе с эксклавной территорией Калининградской области — это несвязная территория.

Для несвязных стран легко можно построить карту, в которой для допустимой раскраски потребуется произвольно заданное большое число цветов.

Столицы соседних стран соединяются линией (дорогой), которая единожды пересекает общую границу каждой из этих двух стран и полностью проходит по внутренней территории этих стран. Дороги выбираются таким образом, чтобы они не пересекались (см. рис. 14).

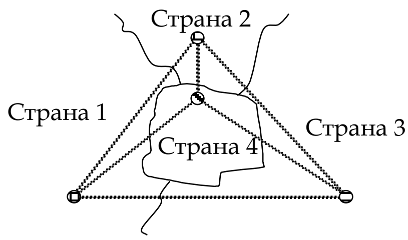


Рис. 14. Карта стран и ее граф

Теперь можно сформулировать *задачу о четырех красках*.

Задача о четырех красках.
Достаточно ли для раскраски карты стран четырех красок?

Рассмотрим также боле простую задачу.

Теорема 15. Теорема о двуцветных картах.
Любую карту на плоскости можно раскрасить в два цвета тогда и только тогда, когда все ее вершины четны.

Более широко эта теорема известна для случая, когда плоскость разбивается прямыми линиями.

Теорема 16.
Любую карту на плоскости, которая образована прямыми, всегда можно раскрасить в два цвета.

На рисунке 17а показан простейший пример такой карты — шахматная доска.

Менее правильный узор изображен на рисунке 17б

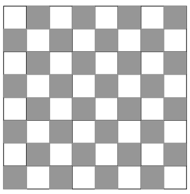
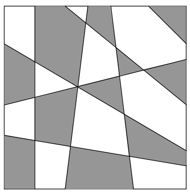
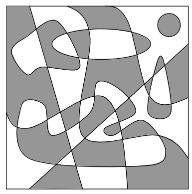
а  б  в 

Рис. 17.

Последнюю теорему можно обобщить на случай более разнообразных карт, образованных либо кривыми без, не имеющими границ, либо замкнутыми кривыми. Пример такой карты приведен на рисунке 17в.

3. Ориентированные графы

1°. Определение орграфа. Изоморфизм орграфов

Выше, до этого раздела мы рассматривали только графы без ориентации ребер.

Ориентированный граф — орграф.

Ориентированным графом, или орграфом, называется граф с ориентированными ребрами.

Ориентированное ребро — орребро, дуга. Исход. Заход.

Ориентированное ребро, или орребро, или дуга — ребро графа, концы которого неравноценны. Ориентированное ребро начинается на одной вершине орграфа, называемой *исходом*, и заканчивается на другой вершине — *заходе*.

Обозначение: дуга обозначается стрелкой, идущей от исхода к заходу.

Примеры.

Нарисуем все орграфы низших порядков 1—2, упорядочив их по количеству дуг, как показано на рисунке 18.

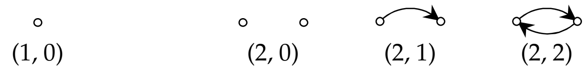


Рис. 18. Единственный орграф порядка 1 и все три орграфа порядка 2

Как Вы уже заметили, орграфы обозначаются числами так же, как и обычные графы.

(p, q)-орграф.

Орграф с p вершинами и q дугами называется (p, q)-*орграфом*.

Дуги орграфов можно обозначать и по-другому, с помощью прямых, а не изогнутых дуг.

Антипараллельные дуги.

Две противоположные дуги, соединяющие одни и те же две вершины, называются *антипараллельными*. Такие две дуги называют также *двунаправленной дугой*.

Обозначение: антипараллельные дуги для экономии места можно обозначать одной двунаправленной дугой, а не двумя однонаправленными дугами.

Примеры.

Нарисуем все орграфы низших порядков 1—2 с помощью прямых дуг, упорядочив их по количеству дуг (см. рис. 19).

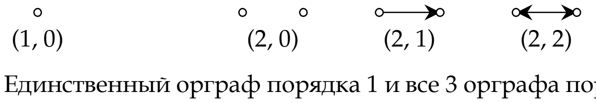


Рис. 19. Единственный орграф порядка 1 и все 3 орграфа порядка 2

Еще одно отличие орграфа от графа состоит в том, что в графе две вершины могут соединяться только одним ребром, а в орграфе — двумя антипараллельными ребрами.

В принципе, обычное ребро обычного графа можно рассматривать как две антипараллельные дуги!

В теории орграфов, как и в теории графов, не различают *одинаковых, то есть изоморфных*, орграфов. В каком бы виде ни рисовали орграф на плоскости, это будет один и тот же орграф.

Изоморфизм орграфов.

Орграфы изоморфны, если их можно наложить друг на друга до полного совпадения вершин и дуг.

При этом, разумеется, можно и нужно растягивать и сжимать их дуги.

Примеры.

На рисунке 20 показаны изоморфные и неизоморфные (3, 4)-орграфы.

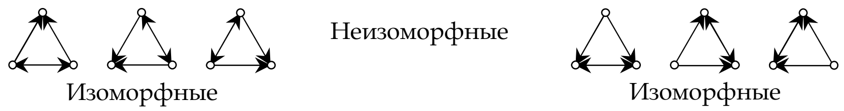


Рис. 20. (3, 4)-орграфы двух конфигураций. Слева — три изоморфных (3, 4)-орграфа. Справа — три изоморфных (3, 4)-орграфа. Орграфы слева и справа неизоморфны

2°. Слабая и сильная связности орграфа

Из любого орграфа всегда можно получить обычный граф с неориентированными ребрами, и наоборот.

Остовный граф.

Остовным графом орграфа называется граф, полученный из орграфа заменой всех дуг на ребра (двунаправленная дуга заменяется одним ребром).

Обратите внимание, что неизоморфные орграфы могут иметь один остов.

Примеры.

Все орграфы с рисунка 20 имеют остовом один и тот же (3, 3)-граф.

Понятия маршрута и связности для орграфов усложняются по сравнению с обычными графами. В частности, возникает два типа связности.

Слабая связность орграфа.

Орграф *слабо связен*, если связен его остовный граф.

Итак, слабая связность не учитывает направления дуг орграфа.

Примеры.

(2, 0)-орграф на рисунках 18 и 19 слабо несвязен.

Остальные орграфы на рисунках 18, 19 и 20 слабо связны.

Рассмотрим понятие маршрута на орграфе.

Ормаршрут.

Ориентированный маршрут, или ормаршрут, на орграфе — последовательность дуг, соединяющая две вершины так, что заход предыдущей дуги совпадает с исходом следующей.

Примеры.

Нарисуем какой-нибудь орграф и обозначим буквами его вершины (рис. 21). Тогда ормаршруты просто обозначать метками вершин.

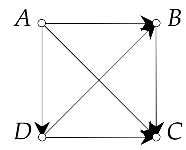


Рис. 21. Граф с помеченными вершинами

Некоторые ормаршруты, которыми можно соединить вершины A и B:

$$A—B, \ A—D—B.$$

Маршрутов, которыми можно вернуться в вершину A, здесь нет.

В случае с орграфами понятие связности углубляется.

Сильная связность орграфа.

Орграф *сильно связен*, если любые две его вершины соединяются ормаршрутами в обе стороны.

Только (2, 2)-орграф на рисунке 18 сильно связен. Остальные орграфы на рисунках 18, 19 и 20 сильно несвязны.

Совершенно очевидно, что сильно связный орграф слабо связен, а обратное неверно. Поэтому, в частности, сильно связным может быть только слабо связный орграф.

Рассмотрим различные виды ормаршрутов.

Замкнутый ормаршрут. Орцикл.

Ормаршрут *замкнут*, если он соединяет вершину саму с собой, и *открыт* в противном случае.

Ормаршрут называется *орциклом*, если все его дуги различны, а также различны все его вершины, кроме, быть может, конечных.

(2, 2)-орграф на рисунках 18 и 19 имеет только один орцикл, соединяющий две вершины антипараллельными дугами. Остальные орграфы на рисунках 18, 19 и 20 орциклов не имеют.

Эйлеров орграф.

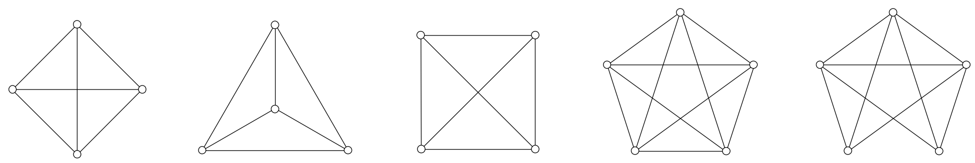
Слабо связный орграф *эйлеров*, если имеется замкнутый ормаршрут, проходящий по всем дугам ровно по одному разу.

На рисунках 18, 19 и 20 сильно связные графы эйлеровы, и наоборот.

Тесты

1. Плоский и планарный граф. Полный граф

Нарисуем пять графов.



1.1. Какой по порядку граф неполный?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

1.2. Какой по порядку граф непланарный?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

1.3. Какой по порядку граф плоский?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

1.4. Какой по порядку граф эйлеров?

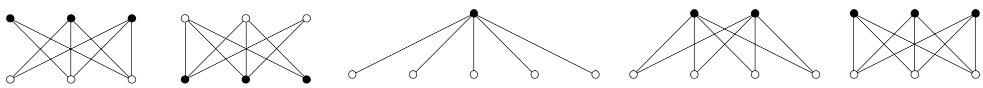
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

1.5. Сколько здесь разных, то есть неизоморфных друг другу, графов?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

2. Двудольный граф

Нарисуем пять графов.



2.1. Какой по порядку граф неполный?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

2.2. Какой по порядку граф непланарный?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

2.3. Какой по порядку граф плоский?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

2.4. Какой по порядку граф эйлеров?

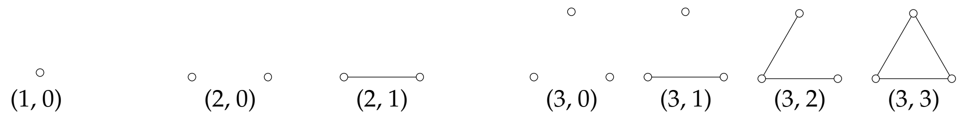
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

2.5. Сколько здесь разных, то есть неизоморфных друг другу, графов?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

3. Хроматическое число графа

Нарисуем все семь графа порядков 1—3.



3.1. Чему равно хроматическое число графа (3, 3)?
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

3.2. Чему равно хроматическое число графа (3, 2)?
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

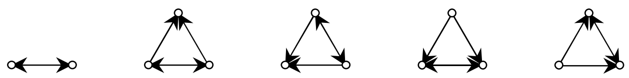
3.3. Чему равно хроматическое число графа (3, 1)?
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

3.4. Чему равно хроматическое число графа (3, 0)?
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

3.5. Чему равно хроматическое число графа (2, 1)?
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

4. Определение орграфа. Изоморфизм орграфов

Нарисуем несколько орграфов.



4.1. Какой по порядку орграф не имеет изоморфного орграфа?
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

4.2. Сколько двунаправленных дуг у орграфов?
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

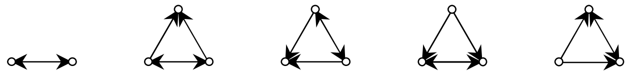
4.3. Сколько простых дуг у тех орграфов, у которых они есть?
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

4.4. Сколько дуг имеет орграф, который не имеет изоморфного орграфа среди представленных орграфов?
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

4.5. Сколько вершин имеют орграфы, имеющие более 2 дуг?
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

5. Слабая и сильная связность орграфа

Нарисуем несколько орграфов.



4.1. Сколько орграфов из представленных либо слабо, либо сильно связны?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

4.2. Сколько орграфов из представленных слабо связны?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

4.3. Сколько орграфов из представленных сильно связны?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

4.4. Сколько дуг имеют сильно связные орграфы?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

4.5. Сколько дуг имеют слабо связные орграфы?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

Упражнения

Пусть n — номер варианта от 1 до 16. Выполните упражнение с номером Вашего варианта.

1, 9. Перерисуйте графы с рисунка 7, если это возможно, в плоском виде, причем все ребра должны быть отрезками прямых линий.

2, 10. Нарисуйте все 10 двудольных графов порядка 4, упорядочив их сначала по количеству вершин в одном из классов, а затем по количеству ребер.

3, 11. Нарисуйте, упорядочив их по количеству ребер, правильно раскрасьте и определите хроматические числа всех 11 графов порядка 4.

4, 12. Нарисуйте все 6 деревьев порядка 6, правильно раскрасив их в два цвета.

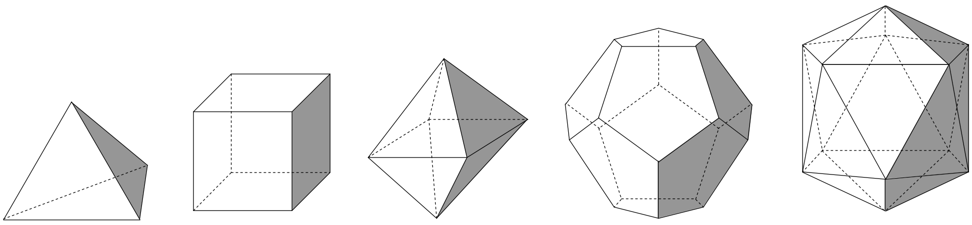
5, 13. Нарисовать все 16 орграфов порядка 3 с метками вершин, упорядочив их сначала по количеству дуг, а затем по количеству двунаправленных дуг. Для каждого графа выпишите количество компонентов слабой связности.

6, 14. Нарисовать все 16 орграфов порядка 3 с метками вершин, упорядочив их сначала по количеству дуг, а затем по количеству двунаправленных дуг. Для каждого графа выпишите количество компонентов сильной связности.

7, 15. Нарисовать все 16 орграфов порядка 3 с метками вершин, упорядочив их сначала по количеству дуг, а затем по количеству двунаправленных дуг. Для каждого графа выпишите количество орциклов, причем орциклы следует перечислить.

8, 16. Нарисуйте все 3 эйлеровых орграфов порядка 3.

§ 11. Правильные многогранники



Оглавление

1. Трехмерные правильные многогранники . . . 167
1°. Определение правильного многогранника . . . 167
2°. Пять правильных многогранников . . . 168
3°. Полуправильные многогранники . . . 170
4°. Формула Декарта — Эйлера . . . 171
5°*. Проекции правильных многогранников . . . 173
2. Многомерные правильные многогранники . . . 173
1°. Куб . . . 173
2°*. Тетраэдр . . . 175
3°*. Октаэдр . . . 176
Тесты . . . 177
Упражнения . . . 180

Литература

Основная

Болтянский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты.— М.: ФИМА, МЦНМО, 2002.

Дополнительная

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения: 2-е изд., испр. и дополн. / Пер. с англ.— М.: Мир, 1999.

Гарднер М. Этот правый, левый мир: 2-е изд., испр. и дополн. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2007.

Гарднер М. Математические новеллы: 2-е изд., испр. и доп. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2000.

Ключевые слова

Многоугольник, правильный многоугольник, многогранник, правильный многогранник, грань, ребро, вершина, тетраэдр, октаэдр, куб, додекаэдр, икосаэдр, полуправильный многогранник, призма, антипризма, инвариант, двойственность правильных многогранников, формула Декарта — Эйлера, четырехмерный куб, гиперкуб, четырехмерный тетраэдр, четырехмерный октаэдр.

1. Трехмерные правильные многогранники

1°. Определение правильного многогранника

Как всегда, начнем с определений.

Многоугольник. Правильный многоугольник.

Начнем с *многоугольников, или полигонов,*— фигур на плоскости, составленных из отрезков.

Правильный многоугольник — выпуклый многоугольник, у которого все стороны и все углы равны.

Условие выпуклости в этом определении существенно. В доказательство приведем пример невыпуклого многоугольника, у которого все стороны и все углы равны — правильную звезду (см. рис. 1).

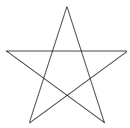


Рис. 1. Пример невыпуклого многоугольника с равными сторонами и углами

Теперь приведем примеры правильных многоугольников — треугольник, квадрат, правильные пятиугольник и шестиугольник(см. рис. 2).

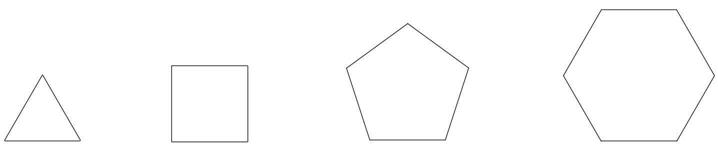


Рис. 2. Примеры правильных многоугольников

Очевидно, что правильные многоугольники однозначно определяются количеством сторон, и количество правильных многоугольников бесконечно.

Многогранник (полиэдр). Правильный многогранник. Платоново тело.

Перейдем к *многогранникам, или полиэдрам,*— фигурам в пространстве, составленным из многоугольников.

Правильный многогранник, или платоново тело,— выпуклый многогранник, составленный из одинаковых правильных многоугольников.

Условия выпуклости и одинаковости многоугольников существенны.

Приведем на рисунке 3 слева пример невыпуклого многогранника, составленного из одинаковых правильных многоугольников — квадратов.

Приведем на рисунке 3 справа пример выпуклого многогранника, составленного из разных правильных многоугольников, квадратов и правильных треугольников — призму.

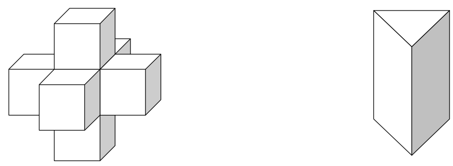


Рис. 3. Пример невыпуклого многогранника, составленного из квадратов, и выпуклого многогранника, составленного из квадратов и правильных треугольников

2°. Пять правильных многогранников

Назовем составные части многогранника.

Грань. Ребро. Вершина.

Грань многогранника — многоугольник, которым многогранник ограничен в пространстве.

Ребро многогранника — отрезок, которым ограничена грань.

Вершина многогранника — точка, которой ограничено ребро.

Сколько всего имеется правильных многогранников?

Теорема 4. Количество правильных многогранников.

Правильных многогранников ровно пять.

Доказательство. Телесный угол при вершине должен быть меньше 360°. Кроме того, в вершине сходится не менее 3 граней. Отсюда следует, что в вершине может сходиться 3, 4 или 5 правильных треугольника, поскольку 6 треугольников уже образуют телесный угол в 360° и не могут сходиться в вершине многогранника

Аналогично в вершине может сходиться 3 квадрата или 3 пятиугольника: 4 квадрата дадут угол 360°, а 4 пятиугольника — более 360°.

Наконец, 3 шестиугольника дают угол в 360°, 3 семиугольника и так далее — более 360°.

Итак, правильных многогранников не более пяти. Существуют ровно пять правильных многогранника: они показаны на рисунке 5.

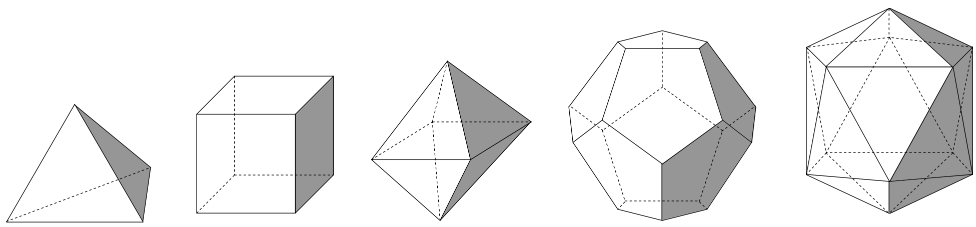


Рис. 5. Пять платоновых тел: тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр

В названиях многоугольников присутствуют обычные русские числительные: треугольник, четырехугольник и так далее. Названия же многогранников происходят от греческих числительных (см. табл. 6).

Тетраэдр (правильная треугольная пирамида). Октаэдр. Куб (гексаэдр). Додекаэдр. Икосаэдр.

Тетраэдр, или правильная треугольная пирамида, имеет при всех вершинах по 3 правильных треугольника.

Гексаэдр, или куб, имеет при всех вершинах по 3 квадрата.

Октаэдр имеет при всех вершинах по 4 правильных треугольника.

Додекаэдр имеет при всех вершинах по 3 правильных пятиугольника.

Икосаэдр имеет при всех вершинах по 5 правильных треугольников.

Таблица 6

Приставки — названия первых чисел в математике

Число	Название	Число	Название
1	Моно-, уни-	11	Гендека-
2	До-, би-, ди-	12	Додека-
3	Три-	13	Тридека-
4	Тетра-	14	Тетрадека-
5	Пента-	15	Пентадека-
6	Гекса-	16	Гексадека-
7	Гепта-	17	Гептадека-
8	Окта-	18	Октадека-
9	Нано-	19	Нанодека-
10	Дека-	20	Икоса-
		Много	Поли-, мульти

Дадим рекомендации, как можно быстро и правильно нарисовать пять правильных многогранников. Тетраэдр удобно начать рисовать с треугольника (рис. 7), а гексаэдр — с квадрата (рис. 7). Октаэдр рисуется с квадрата, нарисованного горизонтально показанного на рисунке 7 внутри октаэдра.

Додекаэдр рисуется, начиная с *пятиугольной антипризмы*, показанной внутри додекаэдра (рис. 7). Эта антипризма состоит из 2 параллельных пятиугольников, повернутых друг относительно друга и соединенных 10 треугольниками. Затем стороны пятиугольников стираются. Икосаэдр рисуется, тоже начиная с *пятиугольной антипризмы*, показанной внутри икосаэдра (рис. 7). Здесь стороны пятиугольников не стираются.

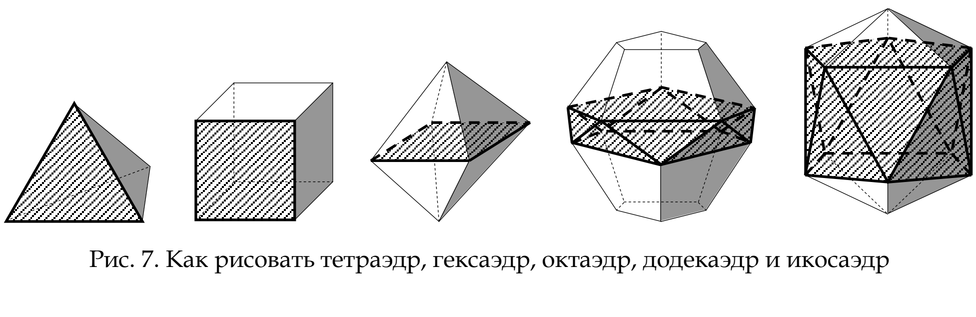


Рис. 7. Как рисовать тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр

3°. Полуправильные многогранники

В предыдущем пункте уже использовалась пятиугольная антипризма. Рассмотрим более подробно такие многогранники, которые называются *полуправильными*.

Полуправильный многогранник.

Полуправильный многогранник, или архимедово тело — выпуклый многогранник, составленный из двух разных правильных многоугольников.

Здесь мы не будем рассматривать все полуправильные многогранники, и приведем только две их бесконечные серии — *призмы* и *антипризмы*. Описания оставшихся без рассмотрения 12 полуправильных многогранников можно найти в литературе.

Призма и антипризма.

Правильной n-угольной призмой называются два *основания* — параллельные правильные n-угольника, соединенные *боковыми сторонами* — n квадратами.

Правильной n-угольной антипризмой называются два *основания* — параллельные правильные n-угольника, соединенные *боковыми сторонами* — $2n$ правильными треугольниками.

Изобразим на рисунке 8 первые четыре призмы из бесконечной серии призм.

Отметим, что четырехугольная призма — это правильный многогранник куб, а остальные призмы — треугольная, пятиугольная и шестиугольная — полуправильные многогранники.

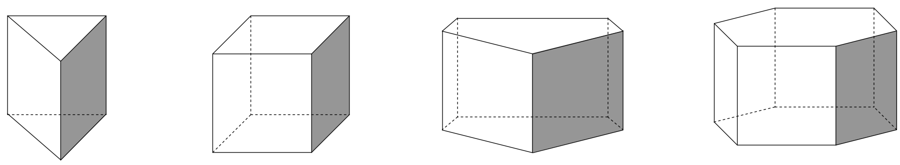


Рис. 8. Призмы. Слева направо:
треугольная, четырехугольная, пятиугольная и шестиугольная призма

На рисунке 9 показаны первые четыре антипризмы из бесконечной серии антипризм.

Отметим, что треугольная антипризма — это правильный многогранник октаэдр, а остальные антипризмы — четырехугольная, пятиугольная и шестиугольная — полуправильные многогранники.

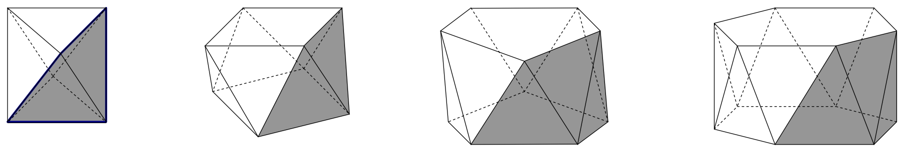


Рис. 9. Антипризмы: треугольная, четырехугольная, пятиугольная и шестиугольная

4°. Формула Декарта — Эйлера

Найдем закономерность между количеством граней, ребер и вершин правильных многогранников. Сначала выработаем гипотезу, попробуем получить формулу, которая связывает эти числа.

Посмотрим, как изменится количество граней, ребер и вершин, если добавить одно ребро.

Возьмем сначала какой-нибудь простую грань, например, треугольник, показанный на рисунке 10 слева, и добавим в треугольник одно ребро между двумя ребрами треугольника, как показано на рисунке 10 справа). Получим, что при добавлении такого ребра количество граней увеличивается на 1, количество ребер — на 3 и количество вершин — на 2.

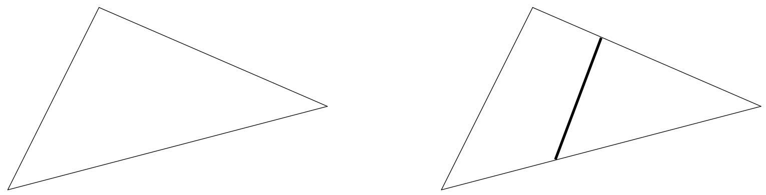


Рис. 10. Добавление ребра между двух ребер

Теперь добавим в треугольник (см. рис. 11 слева) одно ребро между вершиной и ребром треугольника (см. рис. 11 справа). Получим, что при добавлении такого ребра количество граней увеличивается на 1, количество ребер — на 2 и количество вершин — на 1.

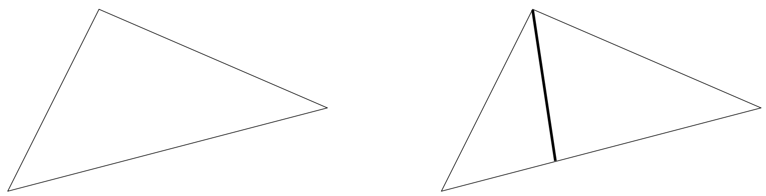


Рис. 11. Добавление ребра между вершиной и ребром

В обоих случаях количество добавившихся ребер равно сумме добавившихся граней и вершин.

* * *

Инвариант.

Предположим, что разность между количеством ребер многогранников и суммой их граней и вершин является *инвариантом*, то есть одним и тем же постоянным числом для всех многогранников.

Теперь проверим эту гипотезу сначала на правильных многогранниках, а затем и на полуправильных.

Тетраэдр имеет 4 грани, 6 ребер и 4 вершины, что позволяет определить наш инвариант: $4 + 4 - 6 = 2$. Посмотрим, получим ли тот же инвариант для других правильных многогранников.

У гексаэдра 6 граней, 12 ребер и 8 вершин, получаем: $6 + 8 - 12 = 2$.

У октаэдра 8 граней, 12 ребер и 6 вершин, получаем: $8 + 6 - 12 = 2$.

У додекаэдра 12 граней, 30 ребер и 20 вершин, получаем: $12 + 20 - 30 = 2$.

У икосаэдра 20 граней, 30 ребер и 12 вершин, получаем: $20 + 12 - 30 = 2$.

Двойственность правильных многогранников.

Правильные многогранники *двойственны*:

1) гексаэдр и октаэдр двойственны, так как количество граней гексаэдра равно количеству граней октаэдра, и наоборот;

2) додекаэдр и икосаэдр двойственны аналогично;

3) тетраэдр двойствен сам себе: он *самодвойственный*.

Наше утверждение верно не только для правильных многогранников!

Проверим его для призм и антипризм.

У треугольной призмы 5 граней, 9 ребер и 6 вершин, получаем: $5 + 6 - 9 = 2$.

У пятиугольной призмы 7 граней, 15 ребер и 10 вершин, получаем: $7 + 10 - 15 = 2$.

У шестиугольной призмы 8 граней, 18 ребер и 12 вершин, получаем: $8 + 12 - 18 = 2$.

У четырехугольной антипризмы 10 граней, 16 ребер и 8 вершин, получаем: $10 + 8 - 16 = 2$.

У пятиугольной антипризмы 12 граней, 20 ребер и 10 вершин, получаем: $12 + 10 - 20 = 2$.

У шестиугольной антипризмы 14 граней, 24 ребра и 12 вершин, получаем: $14 + 12 - 24 = 2$.

Итак, получаем теорему.

Теорема 12. Формула Декарта — Эйлера.

Для любого выпуклого многогранника верна формула

$$Г + В - Р = 2,$$

где $Г$ — количество граней многогранника, $В$ — количество его вершин и $Р$ — количество его ребер.

Кроме того, выявленные выше закономерности количества граней, ребер и вершин у призм и антипризм позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 13. Призмы и антипризмы.

n-угольная призма, $n \geqslant 3$, имеет $n + 2$ грани, $3n$ ребер и $2n$ вершин.

n-угольная антипризма, $n \geqslant 3$, имеет $2n + 2$ грани, $4n$ ребер и $2n$ вершин.

5°*. Проекции правильных многогранников

Пять правильных многогранников легко спроектировать на плоскость так, чтобы получились красивые плоские графы.

Поместим точку, из которой будет производиться проектирование, снаружи от правильного многогранника на небольшом расстоянии от центра любой грани, как это показано на рисунке 14. В результате проектирования на плоскость, которая находится снаружи от правильного многогранника по другую сторону от точки центра проекции, получим плоские графы, показанные на том же рисунке 14.

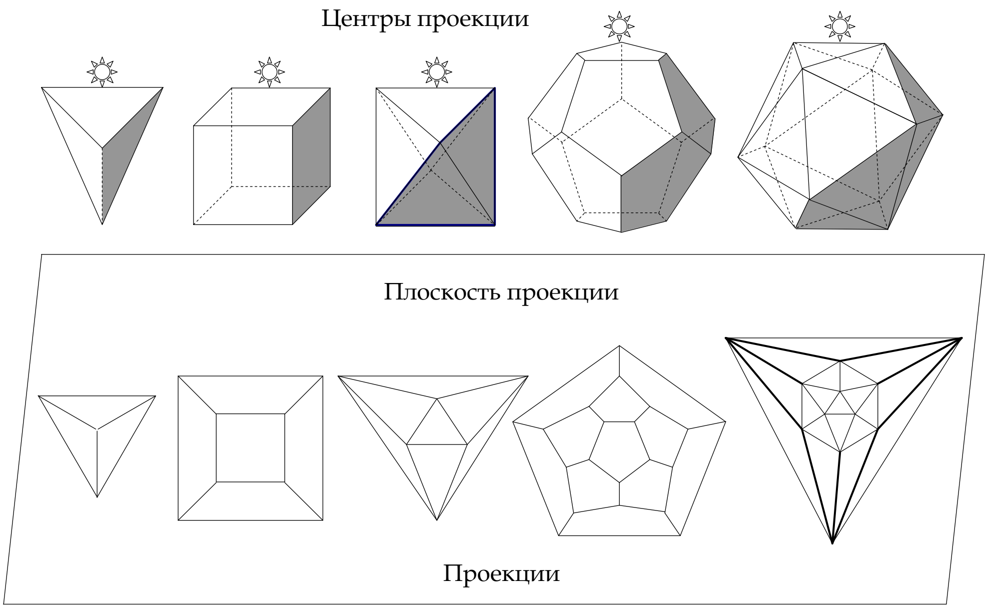


Рис. 14. Проекции правильных многогранников на плоскость.
Слева направо: тетраэдр, октаэдр, куб, додекаэдр, икосаэдр

2. Многомерные правильные многогранники

1°. Куб

Построим последовательно нульмерный, одномерный, двумерный, трехмерный и так далее куб. Для этого придумаем единый алгоритм получения из куба меньшей размерности куб большей размерности.

Этот алгоритм — параллельный перенос. Процесс получения из нульмерного куба, то есть просто точки, одномерного куба, то есть отрезка, и так далее до четырехмерного куба показан на рисунке 15. Каждый раз количество вершин удваивается, и добавляются две новые грани.

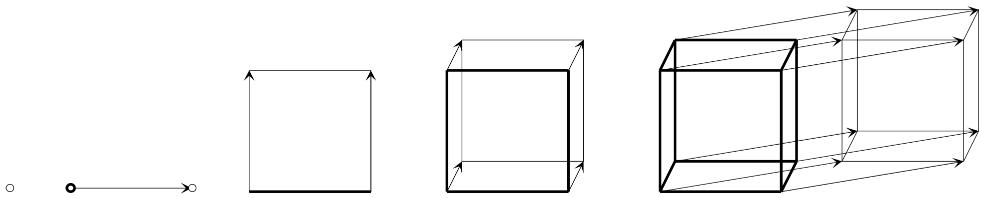


Рис. 15. Получение параллельным переносом из нульмерного куба — точки — одномерного куба, затем двумерного куба — квадрата, трехмерного куба — просто куба и, наконец, четырехмерного куба

Рассмотрим количественные закономерности, получающиеся при таком построении.

1. Отрезок имеет 2 конца.
2. Квадрат имеет 4 вершины и 4 стороны.
3. Куб имеет 8 вершин и 6 граней.
4. Четырехмерный куб имеет 16 вершин и 8 трехмерных граней (тоже кубов), которые заштрихованы парами противоположных граней на рисунке 16.

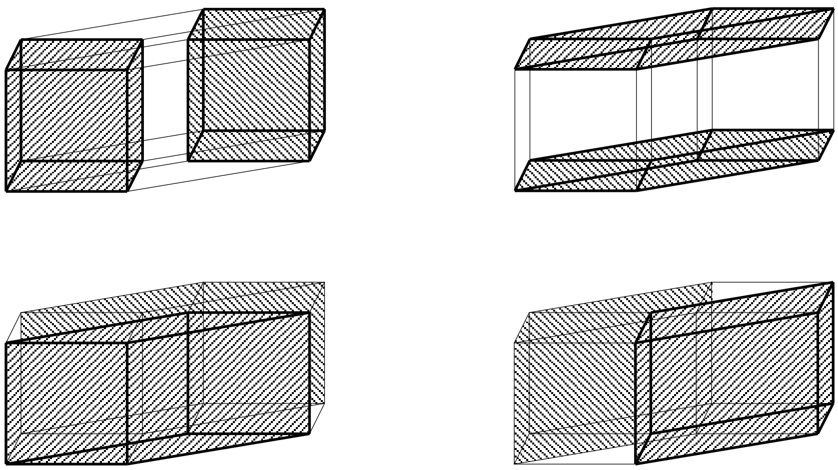


Рис. 16. Восемь заштрихованных трехмерных граней — кубов — четырехмерного куба, Один из них является исходным кубом, второй — образом исходного куба при параллельном переносе, а шесть остальных построены на шести гранях исходного куба (а также и куба-образа)

Итак, мы построили четырехмерный куб. Далее мы построим также четырехмерные тетраэдр и октаэдр. Но сначала дадим определения этим четырехмерным правильным фигурам.

Четырехмерные куб (гиперкуб), тетраэдр и октаэдр.

Четырехмерный куб, или гиперкуб — правильный многогранник в четырехмерном пространстве, у которого в каждой вершине сходится четыре трехмерных куба.

Четырехмерный тетраэдр — правильный многогранник в четырехмерном пространстве, у которого в каждой вершине сходится четыре трехмерных тетраэдра.

Четырехмерный октаэдр — правильный многогранник в четырехмерном пространстве, у которого в каждой вершине сходится восемь трехмерных тетраэдров.

2°*. Тетраэдр

Алгоритм построения тетраэдров — добавление точки. Процесс получения из нульмерного тетраэдра, то есть просто точки, одномерного тетраэдра, то есть отрезка, и так далее до четырехмерного тетраэдра показан на рисунке 17. Каждый раз добавляются одна новая вершина, которая образует со старым гранями новые грани размерностью на 1 больше. Количество граней также увеличивается на 1 за счет исходного многогранника.

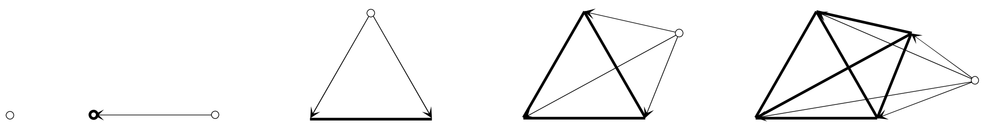


Рис. 17. Получение добавлением точки из нульмерного тетраэдра — точки — одномерного тетраэдра, затем двумерного тетраэдра — правильного треугольника, трехмерного тетраэдра — просто тетраэдра и, наконец, четырехмерного тетраэдра

Рассмотрим количественные закономерности, получающиеся при этом.

1. Отрезок имеет 2 конца.

2. Треугольник имеет 3 вершины и 3 стороны.

3. Тетраэдр имеет 4 вершины и 4 грани.

4. Четырехмерный тетраэдр имеет 5 вершин и 5 трехмерных граней (тоже тетраэдров), как показано на рисунке 18.

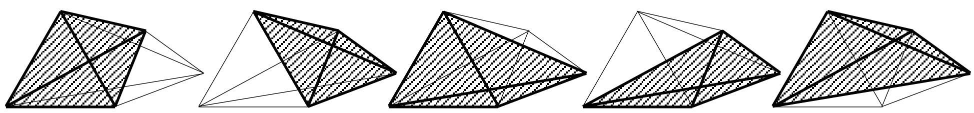


Рис. 18. Пять заштрихованных трехмерных граней — тетраэдров — четырехмерного тетраэдра. Один из них является исходным тетраэдром, а четыре остальные построены на четырех гранях исходного тетраэдра

3°*. Октаэдр

Рассмотрено два способа порождения отрезка из точки: параллельный перенос и добавление точки. Остался один способ: распространение из центра.

Процесс получения из нульмерного октаэдра, то есть просто точки, одномерного октаэдра, то есть отрезка, и так далее до четырехмерного октаэдра показан на рисунке 19. Каждый раз добавляются две новые вершины, которые образуют со старыми гранями новые грани размерностью на 1 больше. То есть количество граней удваивается.

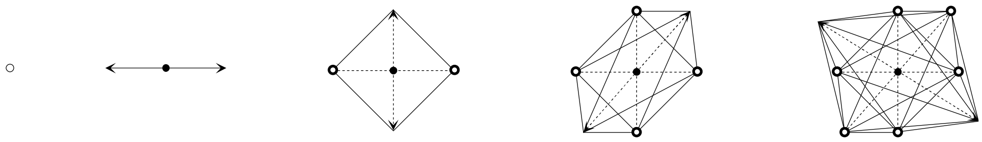


Рис. 19. Получение добавлением точки из нульмерного октаэдра — точки — одномерного октаэдра, затем двумерного октаэдра — квадрата, трехмерного октаэдра — просто октаэдра и, наконец, четырехмерного октаэдра

Рассмотрим количественные закономерности, получающиеся при этом.

1. Отрезок имеет 2 конца.

2. Квадрат имеет 4 вершины и 4 стороны.

3. Октаэдр имеет 6 вершин и 8 граней.

4. Четырехмерный октаэдр имеет 8 вершин и 16 трехмерных граней (тетраэдров!), как показано на рисунке 20, где заштрихованы пары противоположных граней.

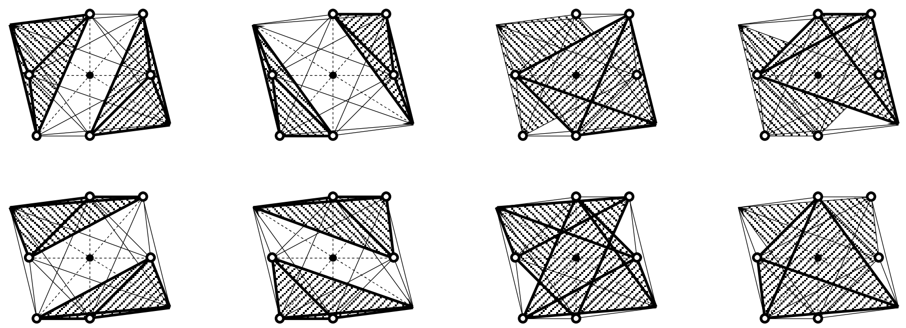


Рис. 20. Шестнадцать заштрихованных трехмерных граней — тетраэдров — четырехмерного октаэдра. Восемь из них образованы восемью гранями исходного октаэдра и одной новой вершиной, восемь остальных — восемью гранями исходного октаэдра и другой новой вершиной

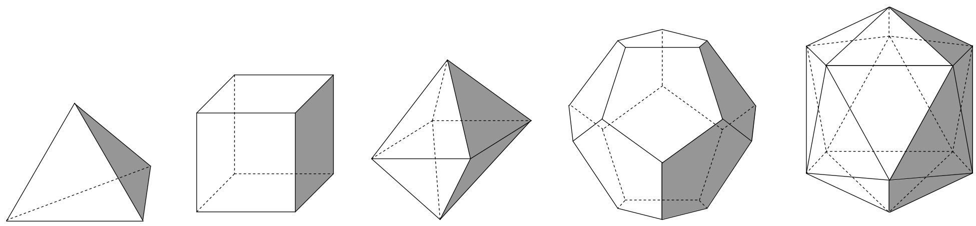
Изучая количество вершин и сторон четырехмерных гексаэдра и октаэдра, легко установить, что они двойственны друг другу точно так же, как и трехмерные.

Четырехмерный тетраэдр по-прежнему двойственен сам себе, о чем говорит равенство количеств его вершин и граней.

Тесты

1. Определение трехмерных правильных многогранников

Приведем все пять правильных многогранника:



1.1. Каким по счету из приведенных правильных многогранников является додекаэдр?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

1.2. Каким по счету из приведенных правильных многогранников является куб?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

1.3. Каким по счету из приведенных правильных многогранников является икосаэдр?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

1.4. Каким по счету из приведенных правильных многогранников является тетраэдр?

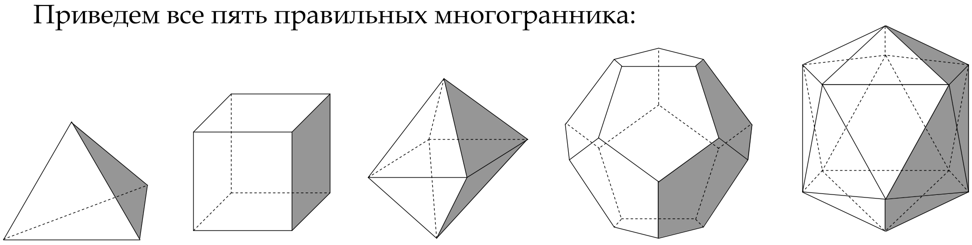
1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

1.5. Каким по счету из приведенных правильных многогранников является октаэдр?

1) 1. 2) 2. 3) 3. 4) 4. 5) 5.

2. Вершины трехмерных правильных многогранников

Приведем все пять правильных многогранника:



2.1. Сколько вершин у додекаэдра?

1) 4. 2) 6. 3) 8. 4) 12. 5) 20.

2.2. Сколько вершин у куба?

1) 4. 2) 6. 3) 8. 4) 12. 5) 20.

2.3. Сколько вершин у икосаэдра?

1) 4. 2) 6. 3) 8. 4) 12. 5) 20.

2.4. Сколько вершин у тетраэдра?

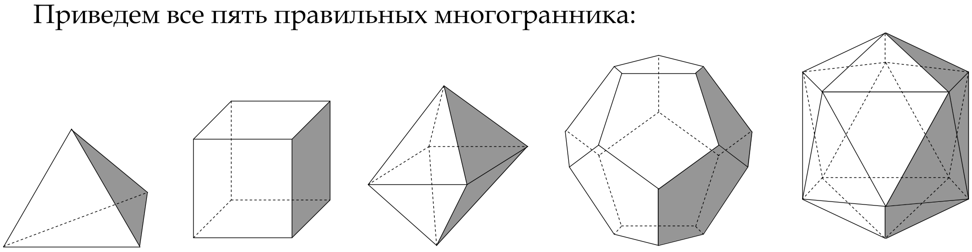
1) 4. 2) 6. 3) 8. 4) 12. 5) 20.

2.5. Сколько вершин у октаэдра?

1) 4. 2) 6. 3) 8. 4) 12. 5) 20.

3. Грани трехмерных правильных многогранников

Приведем все пять правильных многогранника:



3.1. Сколько граней у додекаэдра?

1) 4. 2) 6. 3) 8. 4) 12. 5) 20.

3.2. Сколько граней у куба?

1) 4. 2) 6. 3) 8. 4) 12. 5) 20.

3.3. Сколько граней у икосаэдра?

1) 4. 2) 6. 3) 8. 4) 12. 5) 20.

3.4. Сколько граней у тетраэдра?

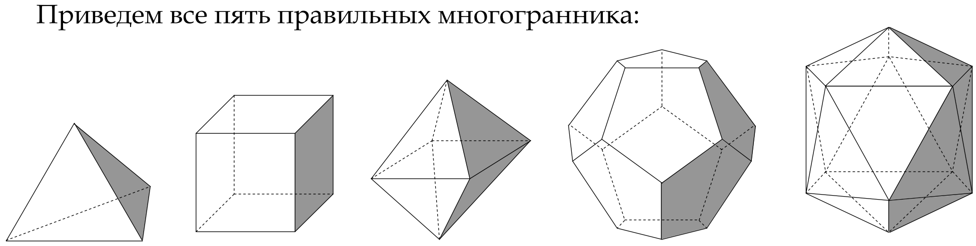
1) 4. 2) 6. 3) 8. 4) 12. 5) 20.

3.5. Сколько граней у октаэдра?

1) 4. 2) 6. 3) 8. 4) 12. 5) 20.

4. Ребра трехмерных правильных многогранников

Приведем все пять правильных многогранника:



4.1. Сколько ребер у додекаэдра?

1) 6. 2) 8. 3) 12. 4) 20. 5) 30.

4.2. Сколько ребер у куба?

1) 6. 2) 8. 3) 12. 4) 20. 5) 30.

4.3. Сколько ребер у икосаэдра?

1) 6. 2) 8. 3) 12. 4) 20. 5) 30.

4.4. Сколько ребер у тетраэдра?

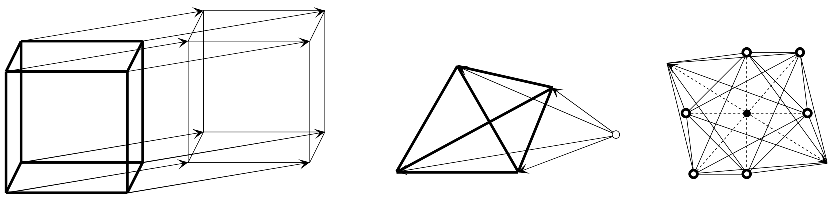
1) 6. 2) 8. 3) 12. 4) 20. 5) 30.

4.5. Сколько ребер у октаэдра?

1) 6. 2) 8. 3) 12. 4) 20. 5) 30.

5. Многомерные правильные многогранники

Приведем три правильных четырехмерных многогранника:



5.1. Сколько трехмерных граней у четырехмерного куба?

1) 4. 2) 5. 3) 8. 4) 16. 5) 20.

5.2. Сколько трехмерных граней и вершин у четырехмерного тетраэдра?

1) 4. 2) 5. 3) 8. 4) 16. 5) 20.

5.3. Сколько трехмерных граней у четырехмерного октаэдра?

1) 4. 2) 5. 3) 8. 4) 16. 5) 20.

5.4. Сколько вершин у четырехмерного куба?

1) 4. 2) 5. 3) 8. 4) 16. 5) 20.

5.5. Сколько вершин у четырехмерного октаэдра?

1) 4. 2) 5. 3) 8. 4) 16. 5) 20.

Упражнения

Пусть n — номер варианта от 1 до 16. Выполните упражнение с номером Вашего варианта.

1, 9. Напишите математические названия треугольника, четырехугольника и так далее до десятиугольника с использованием греческих числительных.

2, 10. Нарисуйте тетраэдр, куб и октаэдр.

3, 11. Нарисуйте додекаэдр.

4, 12. Нарисуйте икосаэдр.

5, 13. Нарисуйте треугольную, четырехугольную, пятиугольную и шестиугольную призмы.

6, 14. Нарисуйте треугольную, четырехугольную, пятиугольную и шестиугольную антипризмы.

7, 15. Нарисуйте четырехмерный куб.

8, 16. Посчитайте, сколько ребер имеет четырехмерные куб.

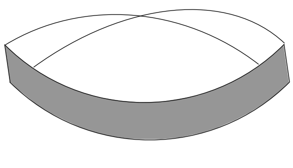
Если вести кончиком пальца по наружной стороне кольца, палец со временем оказывался в той же точке, но с внутренней стороны, а если продолжить движение, вновь возвращался на наружную. У кольца, хоть это и казалось невозможным, был только один край.

Роберт Джордан. Восходящая тень

Пустились по морю втроем
Но не в тазу — была у них
Бутылка Клейна на троих.
Три моряка в бутылку сели —
В ней не страшны ни шторм, ни мели.
Но оказалось им на горе
И судно в море, и в судне море.

Фредерик Уинзор

§ 12. Топология



Оглавление

1. Гомеоморфизм 183
1°. Определение фигуры. Гомеоморфизм 183
2°. Пример гомеоморфных фигур 184
2. Двусторонние поверхности 184
1°. Открытые поверхности 184
2°. Замкнутые поверхности 186
3°. Степень связности поверхности 189
3. Односторонние поверхности 190
1°. Лента Мёбиуса 190
2°. Бутылка Клейна 190
3°*. Проективная плоскость 192
Тесты 194
Упражнения 198

Литература

Основная

Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия.

Дополнительная

Болтянский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты.— М.: ФИМА, МЦНМО, 2002.

Прасолов В. В. Наглядная топология.— М.: МЦНМО, 2006.

Гарднер М. Математические досуги: 2-е изд., испр. и доп. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2000.

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения: 2-е изд., испр. и дополн. / Пер. с англ.— М.: Мир, 1999.

Гарднер М. Математические новеллы: 2-е изд., испр. и доп. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2000.

Ключевые слова

Топология, фигура, кривая, поверхность, непрерывная деформация, гомеоморфизм, сторона, связность, край, замкнутая поверхность, открытая поверхность, инвариант, сфера, тор, крендель, степень связности, разрез, лента Мёбиуса, бутылка Клейна, проективная плоскость.

1. Гомеоморфизм

1°. Определение фигуры. Гомеоморфизм

Математика держится на двух китах: алгебре и топологии. Алгебра хорошо известна со школы. Дадим определение *топологии*.

Топология.

Топология — раздел математики, исследующий идею непрерывности.

Топология имеет дело с объектами, которые называют *фигурами*.

Фигура.

Фигура, или топологическое пространство — подмножество нашего однородного евклидового пространства, между точками которого задано некоторое отношение близости.

Будем рассматривать фигуры не как жесткие тела, а как объекты, сделанные как бы из очень эластичной резины, допускающие непрерывную деформацию, сохраняющую их качественные свойства. Одним словом, фигуры можно растягивать и сжимать, но нельзя разрезать.

Будем рассматривать только одномерные и двумерные фигуры.

Кривая и поверхность.

Одномерная фигура называется *кривой*, двумерная — *поверхностью*.

В топологии очень важно следующее обстоятельство.

Топология не различает фигуры, которые можно перевести одна в другую растяжением и сжатием без разрезов. Другими словами, фигуры, полученные в результате *непрерывной деформации*, не различаются.

Непрерывная деформация.

Деформация фигуры *непрерывна*, если соседние точки фигуры переходят при деформации тоже в соседние точки.

Можно представлять, что фигуры сделаны из пластилина, которые нельзя разрывать, или из очень-очень мягкой резины, или нарисованы на поверхности воздушного шарика.

Дадим математическое определение топологического равенства фигур.

Гомеоморфизм.

Две фигуры *гомеоморфны, или топологически эквивалентны*, если одну можно перевести в другую непрерывной деформацией. Такая взаимно-однозначная непрерывная деформация фигур называется *гомеоморфизмом*.

Как видите, в разных областях математики равенство объектов называется по-разному. В одних математических науках объекты *равны*, в других — *эквивалентны*, в третьих — *изоморфны*, в топологии — *гомеоморфны*.

2°. Пример гомеоморфных фигур

Рассмотрим простейший пример гомеоморфных фигур, то есть фигур, которые получаются одна из другой непрерывной деформацией.

Пример.

Возьмем квадрат вместе с его внутренностью (см. рис. 1) и посмотрим, в какие фигуры его можно непрерывно деформировать.

Если квадрат хорошо «надуть» так, чтобы пропали его углы, то получим *круг* (см. рис. 1).

Если квадрат просто растянуть или сжать вдоль одной стороны, то получим *полосу, или ленту* (см. рис. 1).

Если полосу изогнуть, то получим *подкову* (см. рис. 1).

Если подкову изогнуть еще раз, то получим букву S (см. рис. 1).

Рис. 1. Квадрат и фигуры, ему гомеоморфные: круг, лента, подкова, буква S

2. Двусторонние поверхности

1°. Открытые поверхности

Квадрат — двумерная фигура, поскольку для задания положения точки на нем требуются две координаты. Квадрат — это поверхность. Рассмотрим другие поверхности и их свойства.

Сначала введем определения некоторых понятий.

Сторона, связность, край.

Сторона — часть поверхность, по которой может ползать муравей; при этом он не должен переползать через край поверхности, если он есть.

Другими словами, сторона обладает свойством обычной *связности* — любые две точки на стороне можно соединить кривой, принадлежащей этой же стороне.

Край — кривая, разделяющая стороны поверхности.

На основе этих простейших понятий мы уже можем классифицировать фигуры.

Замкнутая и открытая поверхности.

Поверхность называется *замкнутой*, если она не имеет ни одного края, и *открытой*, если есть хотя бы один край.

Приведем примеры.

П р и м е р ы.

У квадрата две стороны и один край (см. рис. 1). Запишем это в таблицу 21. Поэтому квадрат — открытая поверхность.

Еще две открытые поверхности и поверхности, им гомеоморфные, показаны на рисунках 2 и 3.

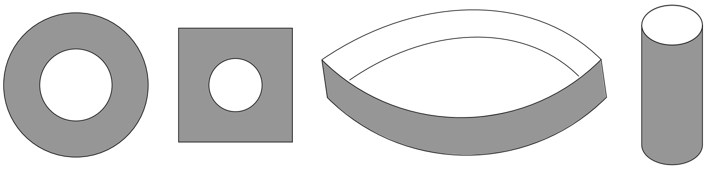


Рис. 2. Кольцо и фигуры, ему гомеоморфные:
квадрат с дыркой, кольцо на боку, поверхность цилиндра

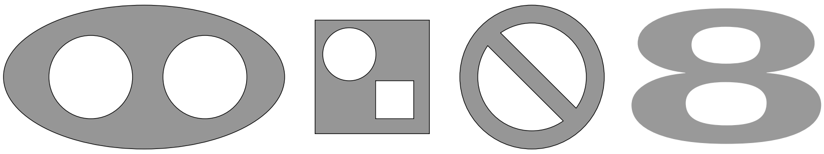


Рис. 3. Восьмерка и фигуры, ей гомеоморфные:
квадрат с двумя дырками, знак «стоянка запрещена», цифра 8

У кольца две стороны и два края, а у восьмерки две стороны и три края (см. рис. 2 и 3). Запишем это в таблицу 21. Кольцо и восьмерка — открытые поверхности.

Итак, наши фигуры вполне можно различить по количеству краев.

И н в а р и а н т.

Топологический инвариант фигуры, или просто инвариант — число, которое характеризует фигуру и не изменяется при гомеоморфизме.

Количество сторон поверхности и количество ее краев являются инвариантами, они полностью характеризуют открытые поверхности.

Квадрат, кольцо и восьмерка отличаются друг от друга только количеством краев: кольцо — это квадрат с дыркой, а восьмерка — это квадрат с двумя дырками.

* * *

Посмотрим, как можно преобразовать квадрат в кольцо.

На рисунке 4 показан первый способ преобразования квадрата в кольцо. При этом требуется одна склейка. На рисунке 5 показан второй способ преобразования квадрата в поверхность цилиндра. При этом также требуется одна склейка.

Если прокрутить эти преобразования задом наперед, то получится преобразование кольца в квадрат с помощью одного разреза.

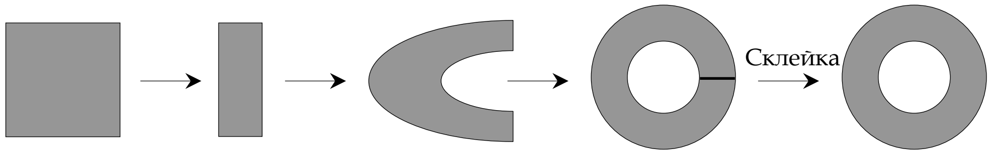


Рис. 4. Преобразование квадрата в кольцо при помощи одной склейки

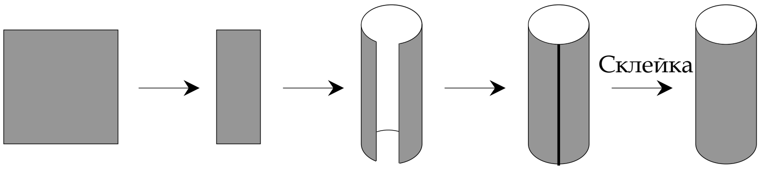


Рис. 5. Преобразование квадрата в поверхность цилиндра при помощи одной склейки

П р и м е р ы .

Приведем еще две открытые поверхности и поверхности, им гомеоморфные, на рисунках 6 и 7.

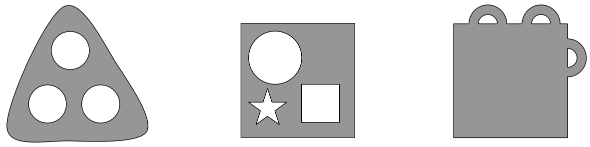


Рис. 6. Плашка с тремя дырками и фигуры, ей гомеоморфные:
квадрат с тремя дырками, квадрат с тремя ручками

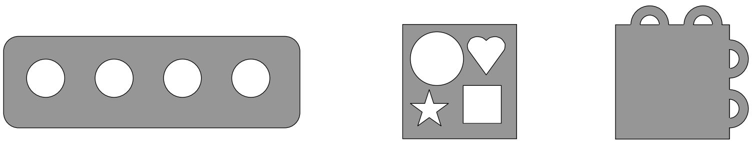


Рис. 7. Плашка с четырьмя дырками и фигуры, ей гомеоморфные:
квадрат с четырьмя дырками, квадрат с четырьмя ручками

2°. З а м к н у т ы е п о в е р х н о с т и

В этом пункте приведем некоторые примеры гомеоморфных замкнутых поверхностей.

П р и м е р ы .

Три замкнутые поверхности и поверхности, им гомеоморфные, показаны на рисунках 8, 9 и 10.

С ф е р а .

Сфера — поверхность шара (см. рис. 8).

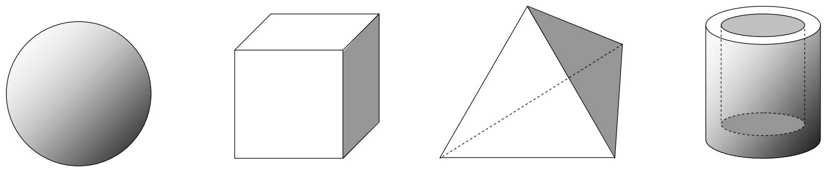


Рис. 8. Сфера и фигуры, ей гомеоморфные:
поверхность куба, поверхность пирамиды, поверхность стакана

Тор.

Тор — поверхность бублика (см. рис. 9).

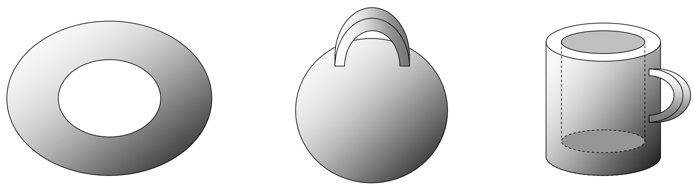


Рис. 9. Тор и фигуры, ему гомеоморфные: сфера с ручкой, поверхность кружки

Крендель.

Крендель — тор с двумя дырками (см. рис. 10).

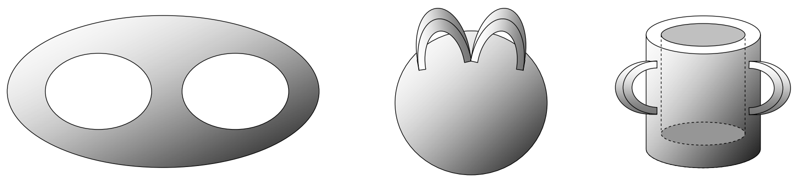


Рис. 10. Крендель и фигуры, ему гомеоморфные:
сфера с двумя ручками, поверхность кружки с двумя ручками

Сфера, тор и крендель имеют по две стороны и не имеют краев (см. рис. 8, 9 и 10). Запишем это в таблицу 21. Сфера, тор и крендель — замкнутые поверхности.

Получается, что по количеству краев сферу, тор и крендель не различить. Для их различения нужен новый инвариант.

* * *

Посмотрим, как можно преобразовать квадрат в тор.

На рисунке 11 показан первый способ преобразования квадрата в тор. При этом требуется две склейки. На рисунке 12 показан второй способ преобразования квадрата в тор. При этом также требуется две склейки.

Если прокрутить эти преобразования задом наперед, то получится преобразование тора в квадрат с помощью двух разрезов.

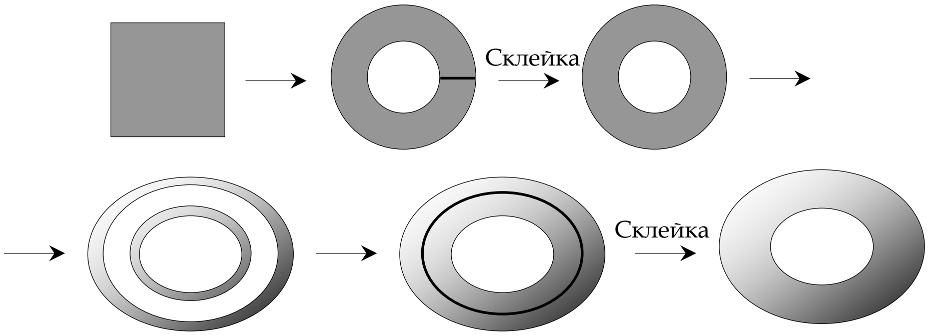


Рис. 11. Преобразование квадрата в тор при помощи двух склеек

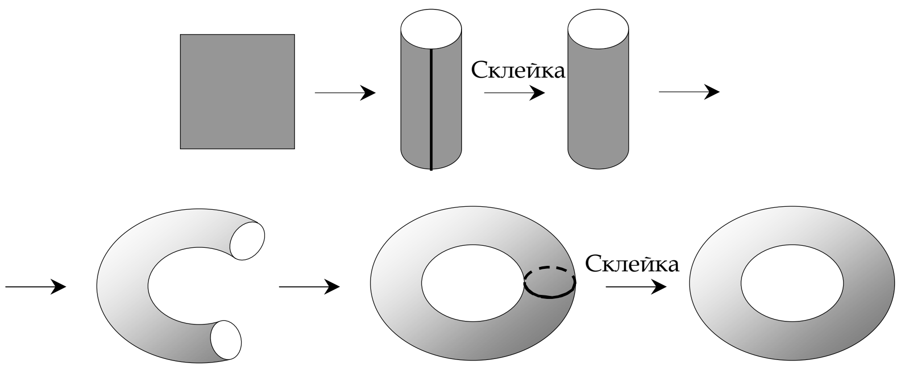


Рис. 12. Преобразование квадрата в тор при помощи двух склеек

Примеры.

Приведем еще две замкнутые поверхности и поверхности, им гомеоморфные, на рисунках 13 и 14.

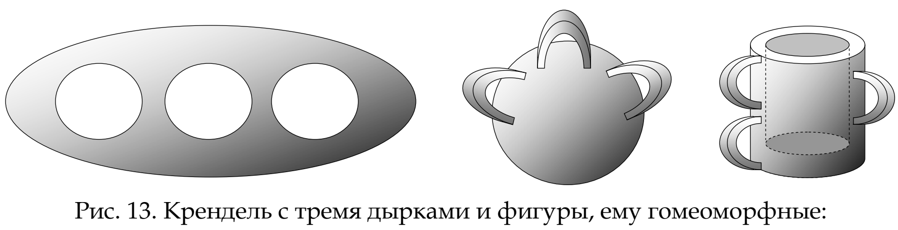


Рис. 13. Крендель с тремя дырками и фигуры, ему гомеоморфные: сфера с тремя ручками, поверхность кружки с тремя ручками

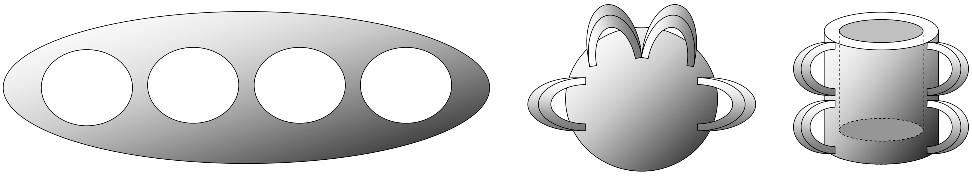


Рис. 14. Крендель с четырьмя дырками и фигуры, ему гомеоморфные: сфера с четырьмя ручками, поверхность кружки с четырьмя ручками

3°. Степень связности поверхности

Степень связности, разрез.

Степень связности — максимальное число разрезов, которые можно провести на поверхности так, чтобы она не распалась на два отдельных куска, перестав быть связной.

Разрез — кривая на поверхности либо замкнутая, либо обязательно от края до края поверхности.

Примеры.

Квадрат любым разрезом от края до края распадается на две части, поэтому степень связности квадрата 0 (рис. 15). Кольцо одним разрезом поперек превращается в квадрат, поэтому степень связности кольца 1 (рис. 15).

Восьмерка одним разрезом поперек превращается в кольцо со степенью связности 1, степень связности восьмерки 2 (рис. 16). Сфера любым разрезом по замкнутой линии распадается на две части, степень связности сферы 0 (рис. 16).

Тор одним разрезом по замкнутой линии вокруг дырки превращается в кольцо со степенью связности 1, степень связности тора 2 (рис. 17). Крендель двумя разрезами по замкнутым линиям вокруг дырок превращается в восьмерку со степенью связности 2, степень связности кренделя 4 (рис. 17).

Все эти инварианты можно свести в одну таблицу (см. табл. 21).

Теперь видно, что сфера, тор и крендель отличаются друг от друга степенью связности: у сферы степень связности 0, у тора — 2 и у кренделя — 4.

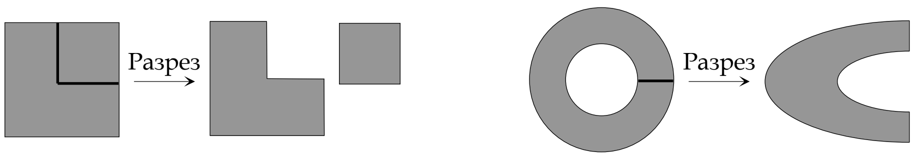


Рис. 15. В квадрате нельзя провести ни одного разреза, чтобы квадрат не распался, а в кольце можно провести один разрез, и кольцо превращается в квадрат

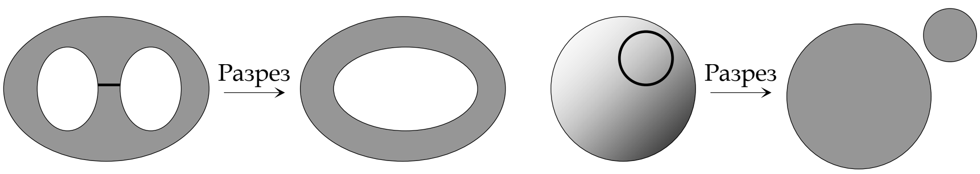


Рис. 16. В восьмерке можно провести один разрез, и восьмерка превращается в кольцо, а сфера любым замкнутым разрезом распадается на две части

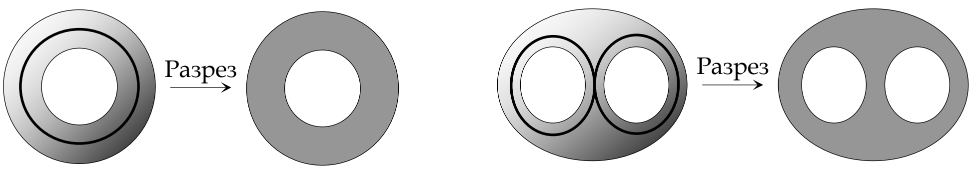


Рис. 17. В торе можно провести один разрез, и тор превращается в кольцо, а в кренделе можно провести два разреза, и крендель превращается в восьмерку

3. Односторонние поверхности

1°. Лента Мёбиуса

Рассмотрим поверхности, у которых не краев — замкнутые поверхности.

Лента Мёбиуса была обнаружена немецким математиком *Августом Фердинандом Мёбиусом* в 1858 г.

Лента Мёбиуса (лист Мёбиуса).

Лента Мёбиуса, или лист Мёбиуса,— лента, перекрученная на пол-оборота (см. рис. 18 слева).

До этого года математики не знали о существовании поверхностей с одной стороной. Одна сторона понимается, конечно, не локально, а глобально: муравей может ползать по всей ленте Мёбиуса, не переползая через ее край.

У ленты Мёбиуса 1 сторона и 1 край, в чем можно убедиться, выполнив упражнения в конце параграфа. Степень связности у ленты Мёбиуса 1, такая же, как и у обычной ленты: после разрезания поперек лента Мёбиуса превращается в квадрат.

2°. Бутылка Клейна

Бутылка Клейна была открыта в 1882 г. немецким математиком *Феликсом Клейном*.

Бутылка Клейна.

Бутылка Клейна — бутылка, имеющая одну сторону, как показано на рисунке 18 справа.

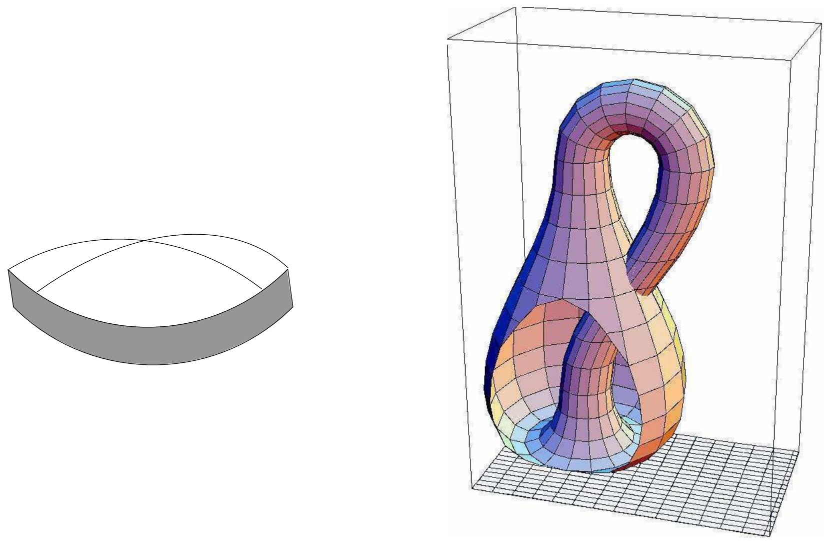


Рис. 18. Лента Мёбиуса (слева) и бутылка Клейна (справа)

Бутылка Клейна имеет одну строну и не имеет краев.

На рисунке 19 слева направо показано, как лента Мёбиуса получается из обычной ленты.

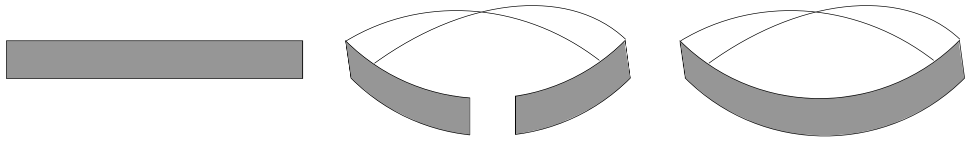


Рис. 19. Склеивание ленты Мёбиуса из обычной ленты

На рисунке 20 слева направо показано, как бутылка Клейна получается из поверхности цилиндра.

Изучив этот рисунок справа налево, в обратную сторону, можно понять, как после одного разреза бутылка Клейна превращается в поверхность цилиндра, то есть в кольцо. Поэтому степень связности бутылки Клейна 2.

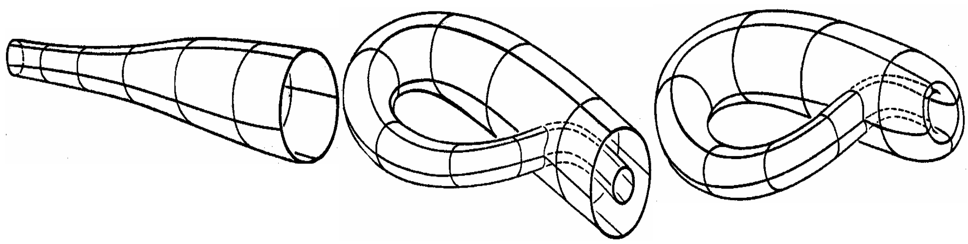


Рис. 20. Склеивание бутылки Клейна из поверхности цилиндра

Сведем все инварианты рассмотренных поверхностей в одну таблицу.

Таблица 21

Инварианты поверхностей

Поверхность	Сторон	Краев	Степень связности
Квадрат	2	1	0
Кольцо	2	2	1
Восьмерка	2	3	2
Квадрат с 3 дырками	2	4	3
Квадрат с 4 дырками	2	5	4
Сфера	2	0	0
Тор	2	0	2
Крендель	2	0	4
Крендель с 3 дырками	2	0	6
Крендель с 4 дырками	2	0	8
Лента Мёбиуса	1	1	1
Бутылка Клейна	1	0	2

3°*. Проективная плоскость

При проектировании одной плоскости на другую точки плоскости могут уйти в бесконечность.

Проективная плоскость.

Проективная плоскость получается из обычной эвклидовой дополнением последней бесконечно удаленными точками, образующими *бесконечно удаленную прямую*.

Итак, проективная плоскость — замкнутая односторонняя поверхность. При разрезе проективная плоскость превращается в лист Мёбиуса, поэтому ее степень связности равна 2.

Проективную плоскость можно склеить из квадрата, как тор и бутылку Клейна. Сначала деформируем квадрат, превратив его в сферу без квадрата, как показано на рисунке 22.

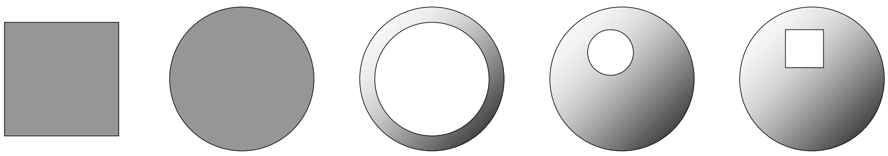


Рис. 22. Превращение квадрата в сферу без квадрата непрерывной деформацией

Теперь возьмем сферу без квадрата $ABCD$ склеим AB с CD и DA с BC так, чтобы совпали точки A с C и B с D, как показано на рисунке 23. Для этого приподнимем точки A и C и опустим точки B и D. Получим замкнутую поверхность с линией самопересечения в виде отрезка AB, топологическую эквивалентную проективной плоскости.

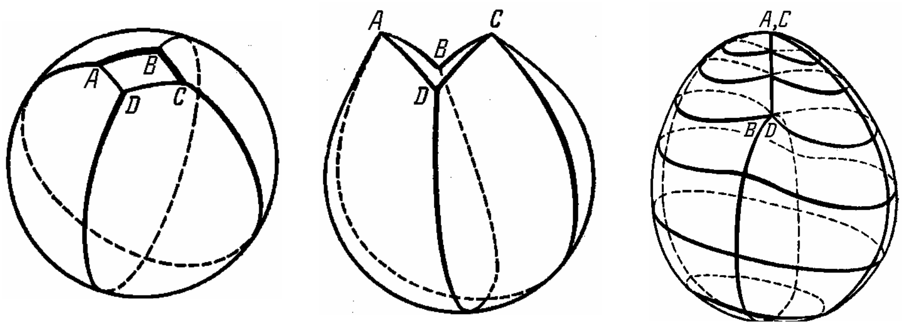


Рис. 23. Превращение сферы без квадрата склеиванием в проективную плоскость

Подведем итоги нашим склеиванием. Получается, что основные поверхности можно склеивать из квадрата. Перепишем таблицу 21, нарисовав основные поверхности и способ их склеивания из квадрата.

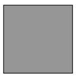
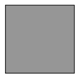
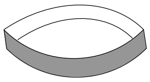
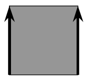
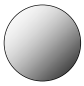
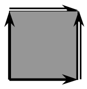
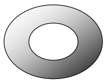
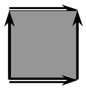
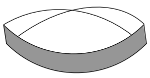
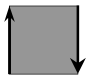
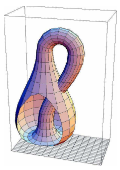
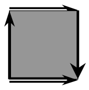
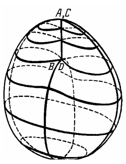
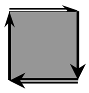
Склеивание сторон квадрата в таблице 20 обозначено следующим образом:

1) склеиваются только те стороны, которые обозначенные стрéлками;

2) стрéлки склеиваются таким образом, чтобы одинаковые стрелки точно наложились друг на друга.

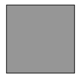
Таблица 24

Инварианты поверхностей и склеивание их из квадрата

Поверхность	Изображение	Сторон	Краев	Степень связности	Склеивание из квадрата
Квадрат		2	1	0	
Кольцо		2	2	1	
Сфера		2	0	0	
Тор		2	0	2	
Лента Мёбиуса		1	1	1	
Бутылка Клейна		1	0	2	
Проективная плоскость		1	0	1	

Тесты

1. Квадрат



Квадрат показан справа.

1.1. Сколько краев у квадрата?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

1.2. Сколько сторон у квадрата?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

1.3. При скольких разрезах от края до края квадрат не распадается на две части?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

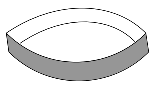
1.4. Сколько требуется склеек, чтобы сделать из квадрата кольцо?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

1.5. Сколько требуется склеек, чтобы сделать из квадрата тор?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

2. Кольцо



Кольцо показан справа.

2.1. Сколько краев у кольца?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

2.2. Сколько сторон у кольца?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

2.3. При скольких разрезах от края до края кольцо не распадается на две части?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

2.4. Сколько требуется разрезов, чтобы сделать из кольца квадрат?

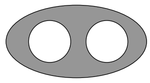
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

2.5. Сколько требуется склеек, чтобы сделать из кольца тор?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

3. Восьмерка

Восьмерка показана справа.



3.1. Сколько краев у восьмерки?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

3.2. Сколько сторон у восьмерки?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

3.3. При скольких разрезах от края до края восьмерка не распадается на две части?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

3.4. Сколько требуется разрезов, чтобы сделать из восьмерки квадрат?

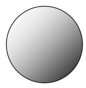
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

3.5. Сколько требуется разрезов, чтобы сделать из восьмерки кольцо?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

4. Сфера

Сфера показана справа.



4.1. Сколько краев у сферы?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

4.2. Сколько сторон у сферы?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

4.3. При скольких замкнутых разрезах сфера не распадается на две части?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

4.4. Сколько требуется замкнутых разрезов, чтобы сделать из сферы квадрат?

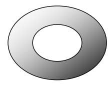
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

4.5. При скольких замкнутых разрезах сфера распадается на две части?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

5. Тор

Тор показан справа.



5.1. Сколько краев у тора?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

5.2. Сколько сторон у тора?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

5.3. При скольких замкнутых разрезах тор не распадается на две части?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

5.4. Сколько требуется замкнутых разрезов, чтобы сделать из тора квадрат?

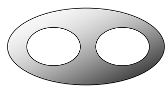
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

5.5. Сколько требуется замкнутых разрезов, чтобы сделать из тора кольцо?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

6. Крендель

Крендель показан справа.



6.1. Сколько краев у кренделя?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

6.2. Сколько сторон у кренделя?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

6.3. При скольких замкнутых разрезах крендель не распадается на две части?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

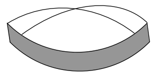
6.4. Сколько требуется замкнутых разрезов, чтобы сделать из кренделя квадрат?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

6.5. Сколько требуется замкнутых разрезов, чтобы сделать из кренделя кольцо?

1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

7. Лента Мёбиуса



Лента Мёбиуса показана справа.

7.1. Сколько краев у ленты Мёбиуса?
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

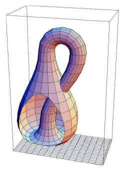
7.2. Сколько сторон у ленты Мёбиуса?
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

7.3. При скольких замкнутых разрезах лента Мёбиуса не распадается на две части?
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

7.4. Сколько требуется замкнутых разрезов, чтобы сделать из ленты Мёбиуса квадрат?
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

7.5. При скольких замкнутых разрезах лента Мёбиуса распадается на две части?
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

8. Бутылка Клейна



Бутылка Клейна показана справа.

8.1. Сколько краев у ленты бутылки Клейна?
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

8.2. Сколько сторон у бутылки Клейна?
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

8.3. При скольких замкнутых разрезах бутылка Клейна не распадается на две части?
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

8.4. Сколько требуется замкнутых разрезов, чтобы сделать из бутылки Клейна квадрат?
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

8.5. Сколько требуется замкнутых разрезов, чтобы сделать из бутылки Клейна кольцо?
1) 0. 2) 1. 3) 2. 4) 3. 5) 4.

Упражнения

1. Склейте достаточно широкий и длинный лист Мёбиуса.

2. Проведите *точно по середине* листа Мёбиуса замкнутую *красную* линию. Ответьте на вопрос: по какому количеству «сторон» прошла эта линия? Этот опыт убеждает, что у листа Мёбиуса одна сторона.

Проведите между красной линией на середине листа Мёбиуса и его краем замкнутую *синюю* линию. Ответьте на вопрос: вдоль какого количества «краев» прошла эта линия? Этот опыт убеждает, что у листа Мёбиуса один край.

3. Выполните предыдущие два упражнения три раза.

Первый лист Мёбиуса с красной и синей линиями разрежьте вдоль по всей *красной* линии. Ответьте на вопрос: на какое количество лент распался лист Мёбиуса после полного разреза и сколько раз эти ленты перекручены? Этот опыт убеждает, что у листа Мёбиуса одна сторона.

Второй лист Мёбиуса с красной и синей линиями разрежьте вдоль по всей *синей* линии. Ответьте на вопрос: на какое количество лент распался лист Мёбиуса после полного разреза и на скольких лентах имеется синяя линия? Этот опыт убеждает, что у листа Мёбиуса один край.

Третий лист Мёбиуса с красной и синей линиями разрежьте сначала вдоль по всей *красной* линии, а затем вдоль по всей *синей* линии. Ответьте на вопрос: на какое количество лент распался лист Мёбиуса?

Это был хозяин кукольного театра, доктор кукольных наук синьор Карабас Барабас.

— Га-га-га, гу-гу-гу! — заревел он на Буратино.— Так это ты помешал представлению моей прекрасной комедии?

Он схватил Буратино, отнес в кладовую театра и повесил на гвоздь. Вернувшись, погрозил куклам семихвостой плеткой, чтобы они продолжали представление.

А. Толстой. Золотой ключик

Приложение. 2500 случайных чисел

00	49487	52802	28667	62058	87822	14704	18519	17889	45869	14454
01	29480	91539	46317	84803	86056	62812	33584	70391	77749	64906
02	25252	97738	23901	11106	86864	55808	22557	23214	15021	54268
03	02431	42193	96960	19620	29188	05863	92900	06836	13433	21709
04	69414	89353	70724	67893	23218	72452	03095	68333	13751	37260
05	77285	35179	92042	67581	67673	68374	71115	98166	43352	06414
06	52852	11444	71868	34534	69124	02760	06406	95234	87995	78560
07	98740	98054	30195	09891	18453	79464	01156	95522	06884	55073
08	85022	58736	12138	35146	62085	36170	25433	80787	96496	40579
09	17778	03840	21636	56269	08149	19001	67367	13138	02400	89515
10	81833	93449	57781	94621	90998	37561	59688	93299	27726	82167
11	63789	54958	33167	10909	40343	81023	61590	44474	39810	10305
12	61840	81740	60986	12498	71546	42249	13812	59902	27864	21809
13	42243	10153	20891	90883	15782	98167	86837	99166	92143	82441
14	45236	09129	53031	12260	01278	14404	40969	33419	14188	69557
15	40338	42477	78804	36272	72053	07958	67158	60979	79891	92409
16	54040	71253	88789	98203	54999	96564	00789	68879	47134	83941
17	49158	20908	44859	29089	76130	51442	34453	98590	37353	61137
18	80958	03808	83655	18415	96563	43582	82207	53322	30419	64435
19	07636	04876	61063	57571	69434	14965	20911	73162	33576	52839
20	37227	80750	08261	97048	60438	75053	05939	34414	16685	32103
21	99460	45915	45637	41353	35335	69087	57536	68418	10247	93253
22	60248	75845	37296	33783	42393	28185	31880	00241	31642	37526
23	95076	79089	87380	28982	97750	82221	35584	27444	85793	69755
24	20944	97852	26586	32796	51513	47475	48621	20067	88975	39506
25	30458	49207	62358	41532	30057	53017	10375	97204	98675	77634
26	38905	91282	79309	49022	17405	18830	09186	07629	01785	78317
27	96545	15638	90114	93730	13741	70177	49175	42113	21600	69625
28	21944	28328	00692	89164	96025	01383	50252	67044	70596	58266
29	36910	71928	63327	00980	32154	46006	62289	28079	03076	15619
30	48745	47626	28856	28382	60639	51370	70091	58261	70135	88259
31	32519	91993	59374	83994	59873	51217	62806	20028	26545	16820
32	75757	12965	29285	11481	31744	41754	24428	81819	02354	37895
33	07911	97756	89561	27464	25133	50026	16436	75846	83718	08533
34	89887	03328	76911	93168	56236	39056	67905	94933	05456	52347
35	30543	99488	75363	94187	32885	23887	10872	22793	26232	87356
36	68442	55201	33946	42495	28384	89889	50278	91985	58185	19124
37	22403	56698	88524	13692	55012	25343	76391	48029	72278	58586
38	70701	36907	51242	52083	43126	90379	60380	98513	85596	16528
39	69804	96122	42342	28467	79037	13218	63510	09071	52438	25840
40	65806	22398	19470	63653	27055	02606	43347	65384	02613	81668
41	43902	53070	54319	19347	59506	75440	90826	53652	92382	67623
42	49145	71587	14273	62440	15770	03281	58124	09533	43722	03856
43	47363	36295	62126	42358	20322	82000	52830	93540	13284	96496
44	26244	87033	90247	79131	38773	67687	45541	54976	17508	18367
45	72875	39496	06385	48458	30545	74383	22814	36752	10707	48774
46	09065	16283	61398	08288	00708	21816	39615	03102	02834	04116
47	68256	51225	92645	77747	33104	81206	00112	53445	04212	58476
48	38744	81018	41909	70458	72459	66136	97266	26490	10877	45022
49	44375	19619	35750	59924	82429	90288	61064	26489	87001	84273

Практикум по Интернет-экзамену

Решение задач

1. Заданы множества $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Верным для них будет утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

Решение. Изучим состав множеств. Все элементы множества A являются также и элементами множества B, но не наоборот. Поэтому множество A есть подмножество множества B.

2. Задано множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$. Истинными высказываниями являются…

□ **М**ножество $\{4, 6\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ Множество $\{4, 6\}$ является элементом множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ Множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ состоит из 6 элементов.
□ Множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ состоит из 5 элементов.
□ **М**ножество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ пустое.
□ **М**ножество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ не пустое.
□ **М**ножество $\{4\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ Множество $\{4\}$ является элементом множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ **М**ножество $\{2, \{4, 6\}\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ Множество $\{2, \{4, 6\}\}$ является элементом множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ **М**ножество $\{\{4, 6\}\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ Множество $\{\{4, 6\}\}$ является элементом множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.

Решение. Изучим состав множества. Заданное множество {2, {4, 6}, 4, 6, 8} имеет ровно 5 элементов 2, {4, 6}, 4, 6, 8, из которых 4 числа 2, 4, 6, 8 и 1 множество {4, 6}. Поэтому истинными высказываниями являются:

□ Множество {4, 6} является элементом множества {2, {4, 6}, 4, 6, 8}.
□ Множество {2, {4, 6}, 4, 6, 8} состоит из 5 элементов.
□ **М**ножество {2, {4, 6}, 4, 6, 8} не пустое.
□ **М**ножество {4} является подмножеством множества {2, {4, 6}, 4, 6, 8}.
□ **М**ножество {2, {4, 6}} является подмножеством множества {2, {4, 6}, 4, 6, 8}.
□ **М**ножество {{4, 6}} является подмножеством множества {2, {4, 6}, 4, 6, 8}.

3. Для множеств $A = \{1, 2, 6, 18\}$; $B = \{6, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…

□ $A = B$	□ $A = C$	□ $B = C$	□ $A \subset B$	□ $A \subset C$
□ $B \subset C$	□ $B \subset A$	□ $C \subset A$	□ $C \subset B$	

Решение. Изучим состав множеств A, B и C. Множества A и C равны. Кроме того, все элементы множества A являются также и элементами как множества B, так и множества C, но не наоборот. Поэтому истинными высказываниями являются:

□ $A = C$	□ $A \subset C$	□ $B \subset C$	□ $B \subset A$	□ $C \subset A$

4. Конечными множествами являются…

□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество {–2, –1, 0, 1, 2}.
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество натуральных чисел, больших 10.

Решение. Только два конечных множества:

□ Множество {–2, –1, 0, 1, 2}.
□ Множество деревьев в саду.

5. Если A есть множество двухзначных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $A \cap B$ равно…

1) 3. 2) 6. 3) 9. 4) ∞.

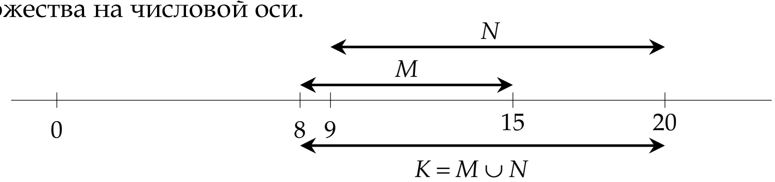
Решение. Нужно найти пересечение двух данных множеств A и B. Для этого подсчитаем количество двухзначных натуральных чисел в множестве B, получим 3.

6. Пусть множества $M = (8, 15)$, $N = (9, 20)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \cup N$ как числовой промежуток будет равно…

1) $K = (9, 15)$. 2) $K = (8, 9)$. 3) $K = (8, 20)$. 4) $K = (15, 20)$.

Решение 1. Множество K — это объединение множеств M и N. Самая маленькая левая граница из двух левых границ множеств M и N (8 и (9 — это (8. Самая большая правая граница из двух правых границ множеств M и N 15) и 20) — это 20). Поэтому объединение множеств $K = M \cup N$ представляют собой интервал $K = (8, 20)$.

Решение 2. Множество K — это объединение множеств M и N. Нарисуем эти множества на числовой оси.



Ясно видно, что объединение множеств $K = M \cup N = (8, 20)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.

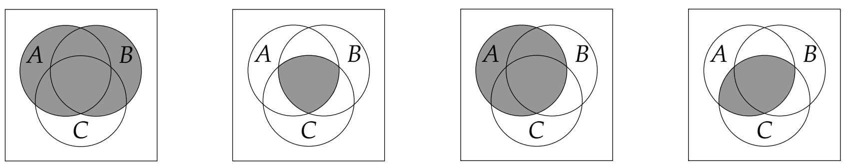
□ $A \cup B$ □ $A \cap B \cap C$ □ A □ $A \cap C$

Решение 1. Чем большим *пересечением* исходных множеств является данное множество, тем *меньше* само данное множество, а чем большим *объединением* — тем *больше* само данное множество. Поэтому самое маленькое множество то, которое образовано двумя пересечениями $A \cap B \cap C$. Это множество принадлежит следующему по величине множеству с одним пересечением $A \cap C$. А это множество, в свою очередь, есть подмножество множества без пересечений и объединений A. Наконец, самое большое множество получается при одном объединении $A \cup B$.

Получаем цепочку принадлежностей множеств:

$$\boxed{A \cap B \cap C} \subset \boxed{A \cap C} \subset \boxed{A} \subset \boxed{A \cup B}.$$

Решение 2. Нарисуем диаграммы Эйлера — Венна указанных множеств:



$A \cup B$ $A \cap B \cap C$ A $A \cap C$

Итак, самое маленькое множество из указанных занимает самую маленькую площадь, а самое большое — самую большую площадь на диаграммах.

Получаем цепочку принадлежностей множеств:

$$\boxed{A \cap B \cap C} \subset \boxed{A \cap C} \subset \boxed{A} \subset \boxed{A \cup B}.$$

Итак, получаем ответ:

$\boxed{4}$ $A \cup B$ $\boxed{1}$ $A \cap B \cap C$ $\boxed{3}$ A $\boxed{2}$ $A \cap C$

8. Если отношение задано неравенством: $x - 2y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…

1) (0, 0). 2) (5, 2). 3) (2, –1). 4) (2, 2).

Решение. Подставим пары чисел по очереди в неравенство. Получим истинное неравенство только в случае пары (2, 2): $2 - 2\cdot 2 = 2 - 4 = -2 < 0$.

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «TIME», равно…

1) 16. 2) 24^4. 3) 24. 4) 120.

Решение. Обратите внимание, что количество мест равно количеству букв.

На первое место можно поставить одну из 4 букв. При каждой из 4 букв на первом месте на второе место можно поставить одну из оставшихся 3 букв, получаем $4\cdot 3 = 12$ вариантов. При каждом из них на третье место можно поставить одну из оставшихся 2 букв, имеем $12\cdot 2 = 24$ варианта. Последняя четвертая буква размещается однозначно. Все буквы разные, поэтому ответ остается 24.

10. Количество перестановок из букв слова «вальс», в которых буква «в» на первом месте, а буква «с» — в конце слова, равно…

1) 24. 2) 3. 3) 6. 4) 5.

Решение. Обратите внимание, что количество переставляемых букв 3.

Переставлять можно только 3 буквы, про фиксированные 2 можно забыть. Переставляемые три буквы разные, поэтому получаем $3\cdot 2\cdot 1 = 6$ перестановок.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «коробок», равно…

1) $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$. 2) 12. 3) 420. 4) 840.

Решение. Обратите внимание, что в слове есть одинаковые буквы.

При перестановке всех 7 букв получим $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$ комбинаций. Но в данном слове имеются одинаковые буквы: одна серия из 2 букв «к» и одна серия из трех букв «о». При перестановке только 2 букв «к» полученные 2 слова не меняются, и при перестановке только 3 букв «о» полученные $3\cdot 2$ слова не меняются. Поэтому разных слов получится меньше, а именно

$$\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 2} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 2 = 42\cdot 10 = 420.$$

12. Количество различных трехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «штора» (все буквы в комбинации различны), равно…

1) 32. 2) 60. 3) 24. 4) 120.

Решение. Обратите внимание, что количество мест меньше количества букв.

Количество различных трехбуквенных комбинаций равно $5\cdot 4\cdot 3 = 60$.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 томов из 12-томного собрания сочинений Л. Н. Толстого равно…
1) 24. 2) 132. 3) 66. 4) 2.

Решение. 2 тома из 12 можно выбрать $12 \cdot 11 = 132$ способами. Но это при учете порядка. Чтобы учесть одинаковые варианты, отличающиеся порядком, разделим 132 на количество выбираемых томов: $132/2 = 66$.

14. Даны множества $M = \{a, b, c, d\}$ и $N = \{b, c, d, e, f, g\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.

1. $M \cap N$.	2. $M \cup N$.	3. $M \backslash N$.	4. $N \backslash M$.
□ $\{a\}$	□ $\{b, c, d\}$	□ $\{a, b, c, d, e, f, g\}$	□ $\{e, f, g\}$

Решение. Выполним предложенные операции на множествах M и N:
1. $M \cap N = \{a, b, c, d\} \cap \{b, c, d, e, f, g\} = \{b, c, d\}$;
2. $M \cup N = \{a, b, c, d\} \cup \{b, c, d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$;
3. $M \backslash N = \{a, b, c, d\} \backslash \{b, c, d, e, f, g\} = \{a\}$;
4. $N \backslash M = \{b, c, d, e, f, g\} \backslash \{a, b, c, d\} = \{e, f, g\}$.

Получаем правильный ответ:

$\boxed{3}$ $\{A\}$ $\boxed{1}$ $\{b, c, d\}$ $\boxed{2}$ $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ $\boxed{4}$ $\{e, f, g\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности: Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\overline{A} \vee B) \wedge A$ будет таблица…

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\overline{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Решение 1. Попробуем упростить данное высказывание:

$C = (\overline{A} \vee B) \wedge A$ = (по закону дистрибутивности) = $(\overline{A} \wedge A) \vee (B \wedge A)$ =
= (по законам нуля и единицы) = $0 \vee (B \wedge A)$ =
= (по законам нуля и единицы) = $B \wedge A$ =
= (по закону коммутативности) = $A \wedge B$.

Данное высказывание — конъюнкция A и B, что соответствует таблице 4).

Решение 2. Вычислим значения выражения C.

$C(1, 1) = (\overline{A} \vee B) \wedge A(1, 1) = (\overline{1} \vee 1) \wedge 1 = (0 \vee 1) \wedge 1 = 1 \wedge 1 = 1.$
$C(1, 0) = (\overline{A} \vee B) \wedge A(1, 0) = (\overline{1} \vee 0) \wedge 1 = (0 \vee 0) \wedge 1 = 0 \wedge 1 = 0.$
$C(0, 1) = (\overline{A} \vee B) \wedge A(0, 1) = (\overline{0} \vee 1) \wedge 0 = (1 \vee 1) \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 0.$
$C(0, 0) = (\overline{A} \vee B) \wedge A(0, 0) = (\overline{0} \vee 0) \wedge 0 = (0 \vee 0) \wedge 0 = 0 \wedge 0 = 0.$

Полученные значения совпадают с таблицей 4).

16. Заданы множества $A = \{2, 6, -6\}$ и $B = \{4, -4\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(4, 6), (6, 4), (6, -4), (-6, -4), (4, -6), (-4, 2)\}$.
2) $\{-6, -4, 2, 4, 6\}$.
3) $\{\varnothing\}$.
4) $\{(2, 4), (2, -4), (6, 4), (6, -4), (-6, 4), (-6, -4)\}$.

Решение 1. Декартово произведение — это прежде всего множество пар. Поэтому варианты ответов 2) и 3) сразу отпадают.

На первом месте в декартовом произведении $A \times B$ стоит множество $A = \{2, 6, -6\}$, поэтому первыми числами в паре могут быть только числа 2, 6, –6. Этому условию не удовлетворяет вариант 1) и удовлетворяет вариант 4).

Решение 2. Найдем декартово произведение:

$A \times B = \{2, 6, -6\} \times \{4, -4\} = \{(2, 4), (2, -4), (6, 4), (6, -4), (-6, 4), (-6, -4)\}$.

Это вариант ответа 4).

17. Принято обозначать:

N — множество натуральных чисел;

Q — множество рациональных чисел;

Z — множество целых чисел;

R — множество действительных чисел.

Тогда верным утверждением будет…

1) $13 \in N$. 2) $\sqrt{8} \in Z$. 3) $3{,}7 \in N$. 4) $\sqrt{7} \in Q$.

Решение. Утверждение 1) верно, 13 — это натуральное число.

Рассмотрим остальные утверждения. Они неверны:

2) $\sqrt{8}$ не является целым числом, это число иррациональное;

3) 3,7 — число дробное, а не натуральное;

4) $\sqrt{7}$ — иррациональное, а не рациональное.

В вариантах ответов не может быть R — множество действительных чисел, поскольку любое число — действительное (комплексных чисел здесь нет).

18. Высказывание A — «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ»; высказывание B — «Диагонали прямоугольника равны». **Конъюнкцией** этих высказываний ($A \wedge B$) является предложение…
1) «**Если** Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **то** диагонали прямоугольника равны».
2) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **и** диагонали прямоугольника равны».
3) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **или** диагонали прямоугольника равны».
4) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ **тогда и только тогда**, **когда** диагонали прямоугольника равны».

Решение. Конъюнкция ($A \wedge B$) — это логическая связка «и». Ищем среди вариантов ответов тот, который содержит связку «и»,— это ответ 2).

19. Вероятность вытащить качественную деталь из первого ящика равна 0,7; а из второго — 0,6. из каждого ящика равна по одной детали. Вероятность того, что обе они качественные, равна…

1) 0,6. 2) 0,7. 3) 0,42. 4) 1,3.

Решение. Качество одной детали н зависит от качества другой, это события независимые. Вероятность одновременно наступления этих двух событий, конечно, меньше их собственных вероятностей и равна $0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, не меньшее 4, равна…

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{9}$. 5) $\frac{4}{9}$.

Решение 1. Четное число очков, не меньшее 4, встречается на гранях кубика 2 раза: это 4 и 6. Поэтому впадение четного числа очков, не меньшего 4, на одном кубике равна $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$, а на двух кубиках — $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

Решение 2. Выпишем все варианты, которые могут получиться при бросании двух кубиков:

$$\begin{array}{l}
(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),\\
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),\\
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),\\
(4, 1), (4, 2), (4, 3), \boxed{(4, 4)}, (4, 5), \boxed{(4, 6)},\\
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),\\
(6, 1), (6, 2), (6, 3), \boxed{(6, 4)}, (6, 5), \boxed{(6, 6)}.
\end{array}$$

Четное число очков, не меньшее 4, встречается на гранях кубика 2 раза: это 4 и 6. Поэтому нас устраивают 4 варианта (4, 4), (4, 6), (6, 4), (6, 6) из 36. Искомая вероятность равна $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

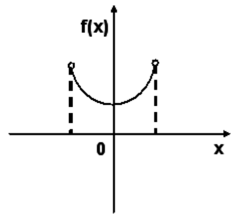
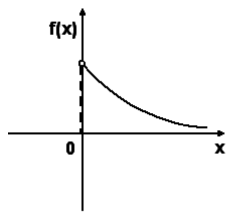
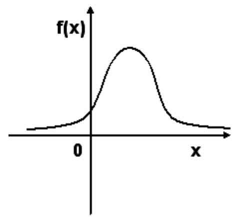
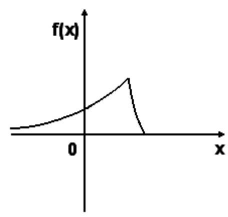
X	2	6
P	0,3	0,7

Математическое ожидание $M(X)$ этой случайной величины равно…

1) 1. 2) 4,8. 3) 0,6. 4) 4,2.

Решение. Математическое ожидание $M(X)$ — это взвешенное среднее, то есть $M(X) = 2\cdot 0{,}3 + 6\cdot 0{,}7 = 0{,}6 + 4{,}2 = 4{,}8$.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения изображен на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

Решение. График плотности вероятностей для нормального распределения имеет колоколообразный вид и поэтому изображен на рисунке 3).

23. Из приведенных величин случайными являются…

□ «Число бракованных деталей в прибывшей на завод партии».

□ «Число $\pi = 3{,}1415927$».

□ «Число дней в декабре».

□ «Число очков при стрельбе по мишени».

Решение. Величины «число *p=3,1415927*» и «число дней в декабре» являются константами, постоянными числами, и случайными не являются.

Величины «число бракованных деталей в прибывшей на завод партии» и «число очков при стрельбе по мишени» зависит от случая, меняется от случая к случаю и поэтому являются случайными.

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при бросании кубика выпало два очка;

(2) при бросании кубика выпало не менее двух очков;

(3) при двух бросаниях кубика выпало в сумме два очка.

Решение. Вычислим вероятности описанных событий.

1) Событие «при бросании кубика выпало два очка» бывает в 1 случае из 6 и имеет вероятность $\frac{1}{6}$.

2) Событие «при бросании кубика выпало не менее двух очков» бывает в 5 случаях из 6 (это очки 2, 3, 4, 5 и 6) и имеет вероятность $\frac{5}{6}$.

3) Событие «при двух бросаниях кубика выпало в сумме два очка» бывает в 1 случае из 36 (это очки (1, 1)) и имеет вероятность $\frac{1}{36}$.

Получаем ответ: (3), (1), (2).

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

□ «Наступление ночи» и «Восход солнца».

□ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление 4 при бросании игральной кости».

□ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 7 до 10 очков при стрельбе по мишени».

□ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

Решение. Посмотрим, могут ли указанные события произойти одновременно.

1) «Наступление ночи» и «Восход солнца» одновременно не бывают, это события несовместные.

2) «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление 4 при бросании игральной кости» одновременно не бывают, это события несовместные.

3) «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 7 до 10 очков при стрельбе по мишени» одновременно не бывают, это события несовместные.

4) «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени» могут произойти одновременно, например, когда выбито 2 очка, а еще когда выбито 4 очка, а еще когда выбито 0 очков. Эти события совместные.

Ответ. В первых трех квадратиках ставим галочки.

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 0,3. 2) 1. 3) 1,3. 4) 0,7.

Решение. Согласно свойству вероятности, ее значение всегда принадлежит отрезку [0, 1]. Поэтому вероятность наступления некоторого события не может быть равна 1,3, что больше 1.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,2	__	0,2	0,1	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x = 3$ будет равно…

1) 0,1. 2) 0,4. 3) 0,5. 4) 0,2.

Решение. Сумма вероятностей статистического ряда должна быть равна 1. До единицы данному статистическому ряду не хватает 0,4.

Варианты домашних заданий

Вариант 0

1. Заданы множества $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$. Истинными высказываниями являются…
□ Множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ состоит из 5 элементов.
□ **М**ножество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ пустое.
□ **М**ножество $\{4\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ **М**ножество $\{4, 6\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.

3. Для множеств $A = \{1, 2, 6, 18\}$; $B = \{6, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $A \neq C$ □ $B \subset A$ □ $C \subset A$ □ $C \subset B$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n + 1), \ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

5. Если A есть множество натуральных чисел, больших 11, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $A \cap B$ равно…
1) 3. 2) 4. 3) 5. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (8, 15)$, $N = (9, 20)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \cap N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (9, 15)$. 2) $K = (8, 9)$. 3) $K = (8, 20)$. 4) $K = (15, 20)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cup B$ □ $A \cap C$ □ A □ $A \cap B \cap C$

8. Если отношение задано неравенством: $2x - 4y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (2, 2). 2) (5, 2). 3) (2, –1). 4) (0, 0).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «TIME», равно…
1) 120. 2) 24^4. 3) 24. 4) 16.

10. Количество перестановок из букв слова «штора», в которых буква «ш» на первом месте, равно…
1) 32. 2) 4. 3) 24. 4) 16.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «арарат», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных трехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «товар» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 120. 2) 60. 3) 24. 4) 32.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 томов из 10-томного собрания сочинений Л. Н. Толстого равно…
1) 19. 2) 90. 3) 45. 4) 2.

14. Даны множества $M = \{a, b, c, d\}$ и $N = \{b, c, d, e, f, g\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
□ $\{e, f, g\}$ □ $\{b, c, d\}$ □ $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ □ $\{a\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \vee B) \wedge A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{2, 6, -6\}$ и $B = \{4, -4\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(2, 4), (2, -4), (6, 4), (6, -4), (-6, 4), (-6, -4)\}$. 2) $\{-6, -4, 2, 4, 6\}$.
3) $\{\varnothing\}$. 4) $\{(4, 6), (6, 4), (6, -4), (-6, -4), (4, -6), (-4, 2)\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $\sqrt{7} \in$ Q. 2) $\sqrt{8} \in$ Z. 3) $3{,}7 \in$ N. 4) $13 \in$ N.

18. Высказывание A — «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ»; высказывание B — «Диагонали прямоугольника равны». **Дизъюнкцией** этих высказываний ($A \vee B$) является предложение…
1) «**Если** Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **то** диагонали прямоугольника равны».
2) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **и** диагонали прямоугольника равны».
3) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **или** диагонали прямоугольника равны».
4) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ **тогда и только тогда**, **когда** диагонали прямоугольника равны».

19. Вероятность вытащить качественную деталь из первого ящика равна 0,7; а из второго — 0,6. из каждого ящика равна по одной детали. Вероятность того, что обе они качественные, равна…
1) 0,6. 2) 0,7. 3) 1,3. 4) 0,42.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, не меньшее 4, равна…

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{9}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{4}$. 5) $\frac{4}{9}$.

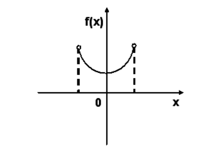
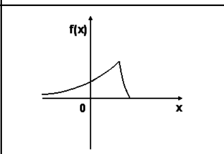
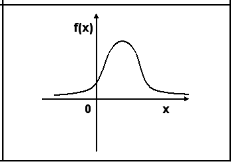
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	2	6
P	0,3	0,7

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 1. 2) 4,2. 3) 0,6. 4) 4,8.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

23. Из приведенных величин случайными являются…

☐ «Число π = *3,1415927*».

☐ «Число дней в декабре».

☐ «Число очков при стрельбе по мишени».

☐ «Число бракованных деталей в прибывшей на завод партии».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при бросании кубика выпало не менее двух очков;

(2) при двух бросаниях кубика выпало в сумме два очка;

(3) при бросании кубика выпало два очка.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

☐ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

☐ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление 4 при бросании игральной кости».

☐ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 7 до 10 очков при стрельбе по мишени».

☐ «Наступление ночи» и «Восход солнца».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 1,3. 2) 1. 3) 0,3. 4) 0,7.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,2	__	0,2	0,2	0,2

Тогда значение относительной частоты при $x = 3$ будет равно…

1) 0,1. 2) 0,4. 3) 0,5. 4) 0,2.

Вариант 1

1. Заданы множества $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$. Истинными высказываниями являются…
□ Множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ состоит из 5 элементов.
□ **М**ножество $\{4, 6\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ **М**ножество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ пустое.
□ **М**ножество $\{4\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.

3. Для множеств $A = \{1, 2, 6, 18\}$; $B = \{6, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $C \subset B$ □ $B \subset A$ □ $C \subset A$ □ $A \neq C$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.

5. Если A есть множество двухзначных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $A \cup B$ равно…
1) 3. 2) 6. 3) 9. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (8, 15)$, $N = (9, 20)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \backslash N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (9, 15)$. 2) $K = (8, 9)$. 3) $K = (8, 20)$. 4) $K = (15, 20)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cap C$ □ $A \cap B \cap C$ □ A □ $A \cup B$

8. Если отношение задано неравенством: $3x - 6y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) $(2, -1)$. 2) $(5, 2)$. 3) $(0, 0)$. 4) $(2, 2)$.

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «СНАТ», равно…
1) 24^4. 2) 16. 3) 120. 4) 24.

10. Количество перестановок из букв слова «штора», в которых буква «ш» на первом месте, равно…
1) 16. 2) 4. 3) 24. 4) 32.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «библия», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных трехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «билет» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 24. 2) 60. 3) 32. 4) 120.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 томов из 10-томного собрания сочинений Л. Н. Толстого равно…
1) 45. 2) 90. 3) 19. 4) 2.

14. Даны множества $M = \{a, b, c, d\}$ и $N = \{b, c, d, e, f, g\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
□ $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ □ $\{b, c, d\}$ □ $\{a\}$ □ $\{e, f, g\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \vee B) \wedge A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{2, 6, -6\}$ и $B = \{4, -4\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{\varnothing\}$. 2) $\{-6, -4, 2, 4, 6\}$.
3) $\{(4, 6), (6, 4), (6, -4), (-6, -4), (4, -6), (-4, 2)\}$.
4) $\{(2, 4), (2, -4), (6, 4), (6, -4), (-6, 4), (-6, -4)\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $3{,}7 \in \mathrm{N}$. 2) $\sqrt{8} \in \mathrm{Z}$. 3) $13 \in \mathrm{N}$. 4) $\sqrt{7} \in \mathrm{Q}$.

18. Высказывание A — «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ»; высказывание B — «Диагонали прямоугольника равны». **Эквивалентностью** этих высказываний ($A \leftrightarrow B$) является предложение…
1) «**Если** Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **то** диагонали прямоугольника равны».
2) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **и** диагонали прямоугольника равны».
3) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **или** диагонали прямоугольника равны».
4) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ **тогда и только тогда**, **когда** диагонали прямоугольника равны».

19. Первый студент не сдаст сессию с вероятностью 0,2, а второй — с вероятностью 0,3. Вероятность того, что они оба не сдадут сессию, равна…
1) 0,06. 2) 0,5. 3) 0,2. 4) 0,3.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, равна…

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{9}$. 5) $\frac{4}{9}$.

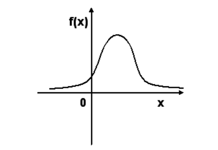
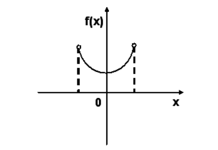
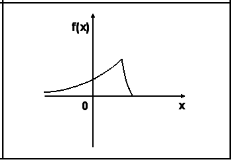
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	1	4
P	0,4	0,6

Математическое ожидание $M(X)$ этой случайной величины равно…

1) 5. 2) 2,8. 3) 2,2. 4) 1.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

23. Из приведенных величин случайными являются…

□ «Число дней в декабре».

□ «Число очков при стрельбе по мишени».

□ «Число бракованных деталей в прибывшей на завод партии».

□ «Число $\pi = 3{,}1415927$».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при двух бросаниях кубика выпало в сумме два очка;

(2) при бросании кубика выпало два очка;

(3) при бросании кубика выпало не менее двух очков.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

□ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 7 до 10 очков при стрельбе по мишени».

□ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление 4 при бросании игральной кости».

□ «Наступление ночи» и «Восход солнца».

□ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 0,3. 2) 1,3. 3) 1. 4) 0,7.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,3	__	0,3	0,1	0,2

Тогда значение относительной частоты при $x = 3$ будет равно…

1) 0,1. 2) 0,4. 3) 0,5. 4) 0,2.

Вариант 2

1. Заданы множества $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$. Истинными высказываниями являются…
□ Множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ состоит из 5 элементов.
□ **М**ножество $\{4, 6\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ **М**ножество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ пустое.
□ **М**ножество $\{4\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.

3. Для множеств $A = \{1, 2, 6, 18\}$; $B = \{6, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $A = C$ □ $A \subset B$ □ $A \subset C$ □ $B \subset C$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1),\ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.

5. Если A есть множество двухзначных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $A \backslash B$ равно…
1) 3. 2) 6. 3) 9. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (8, 15)$, $N = (9, 20)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = N \backslash M$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (9, 15)$. 2) $K = (8, 9)$. 3) $K = (8, 20)$. 4) $K = (15, 20)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ A □ $A \cap B \cap C$ □ $A \cup B$ □ $A \cap C$

8. Если отношение задано неравенством: $4x - 8y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (5, 2). 2) (0, 0). 3) (2, –1). 4) (2, 2).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «КОМАР», равно…
1) 32. 2) 720. 3) 24. 4) 120.

10. Количество перестановок из букв слова «штора», в которых буква «ш» на первом месте, равно…
1) 24. 2) 4. 3) 32. 4) 16.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «змееед», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных трехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «арбуз» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 60. 2) 32. 3) 24. 4) 120.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 томов из 10-томного собрания сочинений Л. Н. Толстого равно…
1) 19. 2) 45. 3) 90. 4) 2.

14. Даны множества $M = \{a, b, c, d\}$ и $N = \{b, c, d, e, f, g\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
□ $\{b, c, d\}$ □ $\{a\}$ □ $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ □ $\{e, f, g\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \vee B) \wedge A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{2, 6, -6\}$ и $B = \{4, -4\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) {-6, -4, 2, 4, 6}. 2) {(4, 6), (6, 4), (6, –4), (–6, –4), (4, –6), (–4, 2)}.
3) $\{\varnothing\}$. 4) {(2, 4), (2, –4), (6, 4), (6, –4), (–6, 4), (–6, –4)}.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $\sqrt{8} \in$ Z. 2) $13 \in$ N. 3) $3{,}7 \in$ N. 4) $\sqrt{7} \in$ Q.

18. Высказывание A — «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ»; высказывание B — «Диагонали прямоугольника равны». **Импликацией** этих высказываний ($A \to B$) является предложение…
1) «**Если** Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **то** диагонали прямоугольника равны».
2) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **и** диагонали прямоугольника равны».
3) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **или** диагонали прямоугольника равны».
4) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ **тогда и только тогда**, **когда** диагонали прямоугольника равны».

19. Первый студент не сдаст сессию с вероятностью 0,2, а второй — с вероятностью 0,3. Вероятность того, что они оба не сдадут сессию, равна…
1) 0,3. 2) 0,5. 3) 0,2. 4) 0,06.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, равна…

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{4}{9}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{9}$. 5) $\frac{1}{4}$.

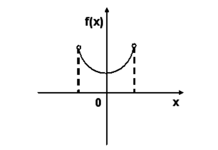
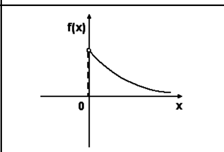
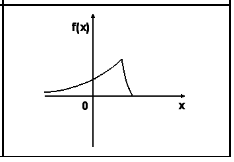
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	1	4
P	0,4	0,6

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 5. 2) 1. 3) 2,2. 4) 2,8.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

23. Из приведенных величин случайными являются…

☐ «Число очков при стрельбе по мишени».

☐ «Число бракованных деталей в прибывшей на завод партии».

☐ «Число $\pi = 3{,}1415927$».

☐ «Число дней в декабре».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при бросании кубика выпало четное число очков;

(2) при бросании кубика выпало не менее 5 очков;

(3) при двух бросаниях кубика в сумме не менее 2 очков.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

☐ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление 4 при бросании игральной кости».

☐ «Наступление ночи» и «Восход солнца».

☐ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 7 до 10 очков при стрельбе по мишени».

☐ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 0,3. 2) 1. 3) 0,7. 4) 1,3.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,3	__	0,3	0,1	0,2

Тогда значение относительной частоты при $x = 3$ будет равно…

1) 0,2. 2) 0,4. 3) 0,5. 4) 0,1.

Вариант 3

1. Заданы множества $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$. Истинными высказываниями являются…
□ **М**ножество $\{4, 6\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ **М**ножество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ пустое.
□ **М**ножество $\{4\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ Множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ состоит из 5 элементов.

3. Для множеств $A = \{1, 2, 6, 18\}$; $B = \{6, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $C \subset A$ □ $B \subset A$ □ $C \subset B$ □ $A \neq C$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.

5. Если A есть множество двухзначных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $B \backslash A$ равно…
1) 3. 2) 6. 3) 9. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (1, 20)$, $N = (5, 30)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \cup N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (1, 5)$. 2) $K = (20, 30)$. 3) $K = (1, 30)$. 4) $K = (5, 20)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cap B \cap C$ □ $A \cup B$ □ A □ $A \cap C$

8. Если отношение задано неравенством: $x + 2y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (2, 0). 2) (2, –1). 3) (2, –2). 4) (2, 1).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «КОМАР», равно…
1) 120. 2) 720. 3) 24. 4) 32.

10. Количество перестановок из букв слова «штора», в которых буква «ш» на первом месте, равно…
1) 4. 2) 32. 3) 24. 4) 16.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «крекер», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных трехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «кобура» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 32. 2) 60. 3) 24. 4) 120.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 томов из 10-томного собрания сочинений Л. Н. Толстого равно…
1) 19. 2) 90. 3) 2. 4) 45.

14. Даны множества $M = \{a, b, c, d\}$ и $N = \{a, b, c, e\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
☐ $\{e\}$ ☐ $\{a, b, c\}$ ☐ $\{a, b, c, d, e\}$ ☐ $\{d\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\overline{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\overline{A} \wedge B) \vee A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{1, 5, -5\}$ и $B = \{3, -3\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(3, 5), (5, 3), (5, -3), (-5, -3), (3, -5), (-3, 1)\}$. 2) $\{-5, -3, 1, 3, 5\}$.
3) $\{\varnothing\}$. 4) $\{(1, 3), (1, -3), (5, 3), (5, -3), (-5, 3), (-5, -3)\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $\frac{2}{3} \in \mathrm{Z}$. 2) $2 \in \mathrm{N}$. 3) $\frac{1}{6} \in \mathrm{N}$. 4) $\sqrt{3} \in \mathrm{Z}$.

18. Высказывание A — «Клавиатура — это устройство ввода информации»; высказывание B — «Диагонали квадрата равны». **Конъюнкцией** этих высказываний ($A \wedge B$) является предложение…
1) «Клавиатура — это устройство ввода информации, **и** диагонали квадрата равны».
2) «Клавиатура — это устройство ввода информации, **или** диагонали квадрата равны».
3) «Клавиатура — это устройство ввода информации **тогда и только тогда**, **когда** диагонали квадрата равны».
4) «**Если** клавиатура — это устройство ввода информации, **то** диагонали квадрата равны».

19. Первый студент не сдаст сессию с вероятностью 0,2, а второй — с вероятностью 0,3. Вероятность того, что они оба не сдадут сессию, равна…
1) 0,2. 2) 0,5. 3) 0,06. 4) 0,3.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, равна…

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{9}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{4}$. 5) $\frac{4}{9}$.

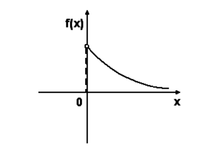
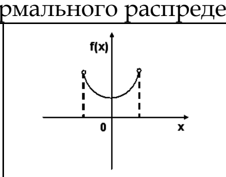
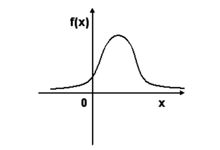
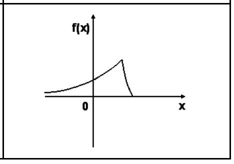
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	1	4
P	0,4	0,6

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 5. 2) 2,2. 3) 2,8. 4) 1.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

23. Из приведенных величин случайными являются…

□ «Число дней в неделе».

□ «Число *e = 2,718281828*».

□ «Число очков при бросании игральной кости».

□ «Число студентов в аудитории».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при бросании кубика выпало не менее 5 очков;

(2) при двух бросаниях кубика в сумме не менее 2 очков;

(3) при бросании кубика выпало четное число очков.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

□ «Сон» и «Принятие пищи».

□ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление не менее 4 при бросании игральной кости».

□ «Выбивание не менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 4 до 8 очков при стрельбе по мишени».

□ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание нечетного числа очков при стрельбе по мишени».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 0. 2) 2. 3) 0,3. 4) 0,7.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,3	__	0,3	0,1	0,2

Тогда значение относительной частоты при $x = 3$ будет равно…

1) 0,5. 2) 0,4. 3) 0,1. 4) 0,2.

Вариант 4

1. Заданы множества $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$. Истинными высказываниями являются…
□ **М**ножество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ пустое.
□ **М**ножество $\{4\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ **М**ножество $\{4, 6\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ Множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ состоит из 5 элементов.

3. Для множеств $A = \{1, 2, 6, 18\}$; $B = \{6, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $B \subset A$ □ $C \subset B$ □ $C \subset A$ □ $A \neq C$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество деревьев в саду.

5. Если A есть множество трехзначных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 11, 22, 111, 222\}$, то количество элементов множество $A \cap B$ равно…
1) 2. 2) 4. 3) 6. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (1, 20)$, $N = (5, 30)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \cap N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (1, 5)$. 2) $K = (20, 30)$. 3) $K = (1, 30)$. 4) $K = (5, 20)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cup C$ □ $A \cap C$ □ C □ $A \cup B \cup C$

8. Если отношение задано неравенством: $x + 2y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (2, 1). 2) (2, –1). 3) (2, –2). 4) (2, 0).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «КОМАР», равно…
1) 24. 2) 720. 3) 32. 4) 120.

10. Количество перестановок из букв слова «штора», в которых буква «ш» на первом месте, равно…
1) 32. 2) 4. 3) 16. 4) 24.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «варвар», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных трехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «фантом» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 120. 2) 60. 3) 24. 4) 32.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 студентов из группы в 25 студентов равно…
1) 600. 2) 300. 3) 150. 4) 49.

14. Даны множества $M = \{a, b, c, d\}$ и $N = \{a, b, c, e\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
□ $\{d\}$ □ $\{a, b, c\}$ □ $\{a, b, c, d, e\}$ □ $\{e\}$

15. Операции над высказываниями А и В (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \wedge B) \vee A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{1, 5, -5\}$ и $B = \{3, -3\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(1, 3), (1, -3), (5, 3), (5, -3), (-5, 3), (-5, -3)\}$. 2) $\{-5, -3, 1, 3, 5\}$.
3) $\{\varnothing\}$. 4) $\{(3, 5), (5, 3), (5, -3), (-5, -3), (3, -5), (-3, 1)\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $\frac{2}{3} \in \mathrm{Z}$. 2) $\sqrt{3} \in \mathrm{Z}$. 3) $\frac{1}{6} \in \mathrm{N}$. 4) $2 \in \mathrm{N}$.

18. Высказывание A — «Клавиатура — это устройство ввода информации»; высказывание B — «Диагонали квадрата равны». **Дизъюнкцией** этих высказываний ($A \vee B$) является предложение…
1) «Клавиатура — это устройство ввода информации, **и** диагонали квадрата равны».
2) «Клавиатура — это устройство ввода информации, **или** диагонали квадрата равны».
3) «Клавиатура — это устройство ввода информации **тогда и только тогда**, **когда** диагонали квадрата равны».
4) «**Если** клавиатура — это устройство ввода информации, **то** диагонали квадрата равны».

19. Первый студент не сдаст сессию с вероятностью 0,2, а второй — с вероятностью 0,3. Вероятность того, что они оба не сдадут сессию, равна…
1) 0,5. 2) 0,06. 3) 0,2. 4) 0,3.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, равна…

1) $\frac{1}{36}$. 2) 1. 3) $\frac{1}{4}$. 4) $\frac{1}{9}$. 5) $\frac{4}{9}$.

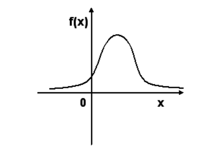
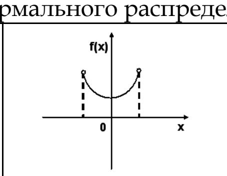
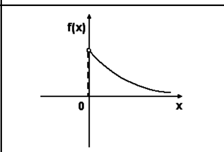
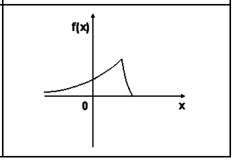
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	1	4
P	0,4	0,6

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 2,8. 2) 5. 3) 2,2. 4) 1.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

23. Из приведенных величин случайными являются…

□ «Число $e = 2,718281828$».
□ «Число очков при бросании игральной кости».
□ «Число студентов в аудитории».
□ «Число дней в неделе».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при двух бросаниях кубика в сумме не менее 2 очков;
(2) при бросании кубика выпало четное число очков;
(3) при бросании кубика выпало не менее 5 очков.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

□ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание нечетного числа очков при стрельбе по мишени».

□ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление не менее 4 при бросании игральной кости».

□ «Выбивание не менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 4 до 8 очков при стрельбе по мишени».

□ «Сон» и «Принятие пищи».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 0. 2) 0,7. 3) 0,3. 4) 2.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,3	__	0,3	0,1	0,2

Тогда значение относительной частоты при $x = 3$ будет равно…

1) 0,4. 2) 0,1. 3) 0,5. 4) 0,2.

Вариант 5

1. Заданы множества $A = \{12, 14, 16\}$, $B = \{12, 14, 16, 18\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$. Истинными высказываниями являются…
□ **М**ножество $\{3, 5\}$ является подмножеством множества $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$.
□ Множество $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$ состоит из 5 элементов.
□ **М**ножество $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$ пустое.
□ **М**ножество $\{3\}$ является подмножеством множества $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$.

3. Для множеств $A = \{1, 6, 18\}$; $B = \{6, 2, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $A = C$ □ $B = C$ □ $A \subset C$ □ $B \subset C$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.

5. Если A есть множество трехзначных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 11, 22, 111, 222\}$, то количество элементов множество $A \cup B$ равно…
1) 2. 2) 4. 3) 6. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (1, 20)$, $N = (5, 30)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \backslash N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (1, 5)$. 2) $K = (20, 30)$. 3) $K = (1, 30)$. 4) $K = (5, 20)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cup B \cup C$ □ $A \cap C$ □ C □ $A \cup C$

8. Если отношение задано неравенством: $x + 2y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (2, –2). 2) (2, –1). 3) (2, 0). 4) (2, 1).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «КОМАР», равно…
1) 720. 2) 32. 3) 24. 4) 120.

10. Количество перестановок из букв слова «штора», в которых буква «ш» на первом месте, равно…
1) 24. 2) 4. 3) 16. 4) 32.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «уютную», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных трехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «писарь» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 24. 2) 60. 3) 32. 4) 120.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 студентов из группы в 25 студентов равно…
1) 600. 2) 49. 3) 150. 4) 300.

14. Даны множества $M = \{a, b, c, d\}$ и $N = \{a, b, c, e\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \setminus N$. 4. $N \setminus M$.
☐ $\{a, b, c, d, e\}$ ☐ $\{a, b, c\}$ ☐ $\{e\}$ ☐ $\{d\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \wedge B) \vee A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{1, 5, -5\}$ и $B = \{3, -3\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{\varnothing\}$. 2) {-5, -3, 1, 3, 5}.
3) {(3, 5), (5, 3), (5, –3), (–5, –3), (3, –5), (–3, 1)}.
4) {(1, 3), (1, –3), (5, 3), (5, –3), (–5, 3), (–5, –3)}.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $\frac{2}{3} \in$ Z. 2) $\frac{1}{6} \in$ N. 3) $2 \in$ N. 4) $\sqrt{3} \in$ Z.

18. Высказывание A — «Клавиатура — это устройство ввода информации»; высказывание B — «Диагонали квадрата равны». **Эквивалентностью** этих высказываний ($A \leftrightarrow B$) является предложение…
1) «Клавиатура — это устройство ввода информации, **и** диагонали квадрата равны».
2) «Клавиатура — это устройство ввода информации, **или** диагонали квадрата равны».
3) «Клавиатура — это устройство ввода информации **тогда и только тогда**, **когда** диагонали квадрата равны».
4) «**Если** клавиатура — это устройство ввода информации, **то** диагонали квадрата равны».

19. Первый завод выпускает некачественные станки с вероятностью 0,2; а второй — с вероятностью 0,1. на каждом заводе купили по одному станку. Вероятность того, что оба они некачественные, равна…
1) 0,3. 2) 0,02. 3) 0,2. 4) 0,1.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, не меньшее 4, равна…

1) $\frac{1}{4}$. 2) $\frac{1}{36}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{9}$. 5) $\frac{4}{9}$.

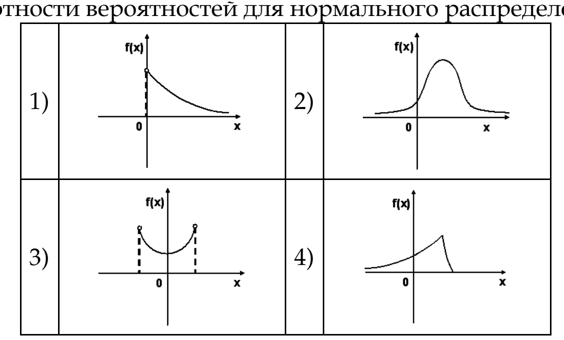
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	1	2
P	0,3	0,7

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 0,21. 2) 1. 3) 1,3. 4) 1,7.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…



23. Из приведенных величин случайными являются…

□ «Число очков при бросании игральной кости».
□ «Число студентов в аудитории».
□ «Число дней в неделе».
□ «Число $e = 2{,}718281828$».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:
(1) при бросании кубика выпало 4 очка;
(2) при бросании кубика выпало нечетное число очков;
(3) при двух бросаниях кубика выпало в сумме не менее 3 очков.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

□ «Выбивание не менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 4 до 8 очков при стрельбе по мишени».

□ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление не менее 4 при бросании игральной кости».

□ «Сон» и «Принятие пищи».

□ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание нечетного числа очков при стрельбе по мишени».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 0. 2) 0,3. 3) 2. 4) 0,7.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,1	0,1	0,2	__	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x = 5$ будет равно…

1) 0,1. 2) 0,4. 3) 0,5. 4) 0,2.

Вариант 6

1. Заданы множества $A = \{12, 14, 16\}$, $B = \{12, 14\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$. Истинными высказываниями являются…
□ Множество $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$ состоит из 5 элементов.
□ **М**ножество $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$ пустое.
□ **М**ножество $\{3\}$ является подмножеством множества $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$.
□ **М**ножество $\{3, 5\}$ является подмножеством множества $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$.

3. Для множеств $A = \{1, 6, 18\}$; $B = \{6, 2, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $B \subset C$ □ $B = C$ □ $A \subset C$ □ $A = C$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество деревьев в саду.

5. Если A есть множество трехзначных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 11, 22, 111, 222\}$, то количество элементов множество $A \setminus B$ равно…
1) 2. 2) 4. 3) 6. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (1, 20)$, $N = (5, 30)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = N \setminus M$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (1, 5)$. 2) $K = (20, 30)$. 3) $K = (1, 30)$. 4) $K = (5, 20)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ C □ $A \cap C$ □ $A \cup C$ □ $A \cup B \cup C$

8. Если отношение задано неравенством: $x + 2y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) $(2, -1)$. 2) $(2, 0)$. 3) $(2, -2)$. 4) $(2, 1)$.

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «ГРОМ», равно…
1) 16. 2) 4. 3) 24. 4) 120.

10. Количество перестановок из букв слова «штора», в которых буква «ш» на первом месте, равно…
1) 16. 2) 4. 3) 32. 4) 24.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «заноза», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных трехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «камыши» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 60. 2) 32. 3) 24. 4) 120.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 студентов из группы в 25 студентов равно…
1) 600. 2) 150. 3) 300. 4) 49.

14. Даны множества $M = \{a, b, c, d\}$ и $N = \{a, b, c, e\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.

1. $M \cap N$.	2. $M \cup N$.	3. $M \backslash N$.	4. $N \backslash M$.
□ $\{a, b, c\}$	□ $\{e\}$	□ $\{a, b, c, d, e\}$	□ $\{d\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\overline{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\overline{A} \wedge B) \vee A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{1, 5, -5\}$ и $B = \{3, -3\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) {-5, -3, 1, 3, 5}. 2) {(3, 5), (5, 3), (5, –3), (–5, –3), (3, –5), (–3, 1)}.
3) {∅}. 4) {(1, 3), (1, –3), (5, 3), (5, –3), (–5, 3), (–5, –3)}.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $2 \in \mathrm{N}$. 2) $\frac{2}{3} \in \mathrm{Z}$. 3) $\frac{1}{6} \in \mathrm{N}$. 4) $\sqrt{3} \in \mathrm{Z}$.

18. Высказывание *A* — «Клавиатура — это устройство ввода информации»; высказывание *B* — «Диагонали квадрата равны». **Импликацией** этих высказываний ($A \to B$) является предложение…
1) «Клавиатура — это устройство ввода информации, **и** диагонали квадрата равны».
2) «Клавиатура — это устройство ввода информации, **или** диагонали квадрата равны».
3) «Клавиатура — это устройство ввода информации **тогда и только тогда**, **когда** диагонали квадрата равны».
4) «**Если** клавиатура — это устройство ввода информации, **то** диагонали квадрата равны».

19. Первый завод выпускает некачественные станки с вероятностью 0,2; а второй — с вероятностью 0,1. на каждом заводе купили по одному станку. Вероятность того, что оба они некачественные, равна…
1) 0,3. 2) 0,1. 3) 0,2. 4) 0,02.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, не меньшее 6, равна…

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{9}$. 5) $\frac{4}{9}$.

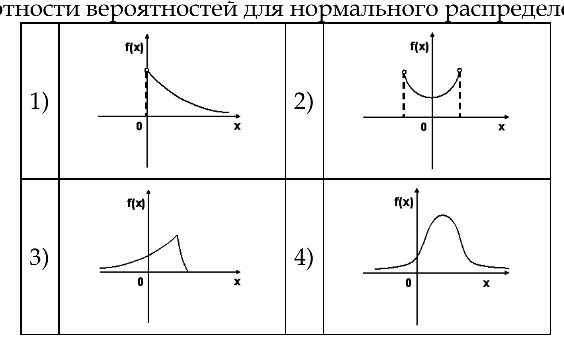
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	1	2
P	0,3	0,7

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 1,7. 2) 1. 3) 1,3. 4) 0,21.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…



23. Из приведенных величин случайными являются…

☐ «Число студентов в аудитории».

☐ «Число дней в неделе».

☐ «Число $e = 2{,}718281828$».

☐ «Число очков при бросании игральной кости».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при бросании кубика выпало нечетное число очков;

(2) при двух бросаниях кубика выпало в сумме не менее 3 очков;

(3) при бросании кубика выпало 4 очка.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

☐ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление не менее 4 при бросании игральной кости».

☐ «Сон» и «Принятие пищи».

☐ «Выбивание не менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 4 до 8 очков при стрельбе по мишени».

☐ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание нечетного числа очков при стрельбе по мишени».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 2. 2) 0. 3) 0,3. 4) 0,7.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,1	0,1	0,2	__	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x = 5$ будет равно…

1) 0,5. 2) 0,4. 3) 0,1. 4) 0,2.

Вариант 7

1. Заданы множества $A = \{12, 14, 16\}$, $B = \{12, 14, 16\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$. Истинными высказываниями являются…
□ **М**ножество $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$ пустое.
□ **М**ножество $\{3\}$ является подмножеством множества $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$.
□ **М**ножество $\{3, 5\}$ является подмножеством множества $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$.
□ Множество $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$ состоит из 5 элементов.

3. Для множеств $A = \{1, 6, 18\}$; $B = \{6, 2, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $A \subset C$ □ $B = C$ □ $A = C$ □ $B \subset C$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество деревьев в саду.

5. Если A есть множество трехзначных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 11, 22, 111, 222\}$, то количество элементов множество $B \setminus A$ равно…
1) 2. 2) 4. 3) 6. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (18, 25)$, $N = (9, 20)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \cup N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (9, 18)$. 2) $K = (18, 20)$. 3) $K = (9, 25)$. 4) $K = (20, 25)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cap C$ □ $A \cup C$ □ C □ $A \cup B \cup C$

8. Если отношение задано неравенством: $2x - y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (2, 2). 2) (2, 3). 3) (2, 4). 4) (2, 5).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «ГРОМ», равно…
1) 120. 2) 4. 3) 24. 4) 16.

10. Количество перестановок из букв слова «штора», в которых буква «ш» на первом месте, равно…
1) 4. 2) 32. 3) 16. 4) 24.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «молоко», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных четырехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «табун» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 32. 2) 60. 3) 24. 4) 120.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 студентов из группы в 25 студентов равно…
1) 300. 2) 600. 3) 150. 4) 49.

14. Даны множества $M = \{a, b, d\}$ и $N = \{b, c, d\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
□ $\{a\}$ □ $\{b, d\}$ □ $\{a, b, c, d\}$ □ $\{c\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\overline{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\overline{A} \vee B) \wedge A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{2, 6, -6\}$ и $B = \{4, -4\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(4, 6), (6, 4), (6, -4), (-6, -4), (4, -6), (-4, 2)\}$.
2) $\{(2, 4), (2, -4), (6, 4), (6, -4), (-6, 4), (-6, -4)\}$.
3) $\{\varnothing\}$. 4) $\{-6, -4, 2, 4, 6\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $13 \in N$. 2) $\sqrt{7} \in Q$. 3) $3{,}7 \in N$. 4) $\sqrt{8} \in Z$.

18. Высказывание A — «Принтер — устройство вывода информации»; высказывание B — «Две параллельные прямые не имеют общих точек». **Конъюнкцией** этих высказываний ($A \wedge B$) является предложение…
1) «Принтер — устройство вывода информации, **и** у параллельных нет общих точек».
2) «Принтер — устройство вывода информации, **или** у параллельных нет общих точек».
3) «Принтер — устройство вывода информации **тогда и только тогда**, **когда** у параллельных нет общих точек».
4) «**Если** принтер — устройство вывода информации, **то** у параллельных нет общих точек».

19. Первый завод выпускает некачественные станки с вероятностью 0,2; а второй — с вероятностью 0,1. на каждом заводе купили по одному станку. Вероятность того, что оба они некачественные, равна…
1) 0,3. 2) 0,2. 3) 0,02. 4) 0,1.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, не меньшее 6, равна…

1) $\frac{4}{9}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{9}$. 5) $\frac{1}{36}$.

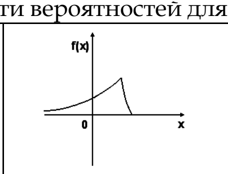
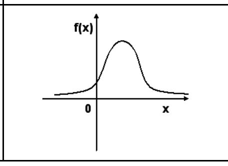
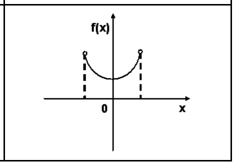
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	1	2
P	0,3	0,7

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 0,21. 2) 1,7. 3) 1,3. 4) 1.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

23. Из приведенных величин случайными являются…

☐ «Число дней в неделе».
☐ «Число очков при бросании игральной кости».
☐ «Число студентов в аудитории».
☐ «Число $e = 2{,}718281828$».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при двух бросаниях кубика выпало в сумме не менее 3 очков;
(2) при бросании кубика выпало 4 очка;
(3) при бросании кубика выпало нечетное число очков.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

☐ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление четного числа очков при бросании игральной кости».

☐ «Выбивание более 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 1 до 3 очков при стрельбе по мишени».

☐ «Выбивание 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

☐ «Поступление в университет» и «Отчисление из университета».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 0,3. 2) 1. 3) 0,3. 4) 1,7.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,1	0,1	0,2	__	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x = 5$ будет равно…

1) 0,1. 2) 0,5. 3) 0,4. 4) 0,2.

Вариант 8

1. Заданы множества $A = \{12, 14, 16\}$, $B = \{22, 24, 26, 28\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$. Истинными высказываниями являются…
□ **М**ножество $\{3\}$ является подмножеством множества $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$.
□ **М**ножество $\{3, 5\}$ является подмножеством множества $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$.
□ Множество $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$ состоит из 5 элементов.
□ **М**ножество $\{1, 3, 5, \{3, 5\}, 7\}$ пустое.

3. Для множеств $A = \{1, 6, 18\}$; $B = \{6, 2, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $B = C$ □ $A = C$ □ $A \subset C$ □ $B \subset C$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n + 1), \ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.

5. Если A есть множество нечетных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $A \cap B$ равно…
1) 3. 2) 6. 3) 9. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (18, 25)$, $N = (9, 20)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \cap N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (9, 18)$. 2) $K = (18, 20)$. 3) $K = (9, 25)$. 4) $K = (20, 25)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cup C$ □ $A \cap C$ □ $A \cup B \cup C$ □ C

8. Если отношение задано неравенством: $2x - y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (2, 5). 2) (2, 3). 3) (2, 4). 4) (2, 2).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «ГРОМ», равно…
1) 24. 2) 4. 3) 16. 4) 120.

10. Количество перестановок из букв слова «книга», в которых буква «к» на первом месте, а буква «н» — на втором, равно…
1) 120. 2) 32. 3) 24. 4) 6.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «каучук», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных четырехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «косяк» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 120. 2) 60. 3) 24. 4) 32.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 фильмов из фильмотеки в 200 фильмов равно…
1) 200. 2) 400. 3) 600. 4) 19900.

14. Даны множества $M = \{a, b, d\}$ и $N = \{b, c, d\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
□ $\{c\}$ □ $\{b, d\}$ □ $\{a, b, c, d\}$ □ $\{a\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \vee B) \wedge A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{2, 6, -6\}$ и $B = \{4, -4\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(4, 6), (6, 4), (6, -4), (-6, -4), (4, -6), (-4, 2)\}$. 2) $\{\varnothing\}$.
3) $\{-6, -4, 2, 4, 6\}$. 4) $\{(2, 4), (2, -4), (6, 4), (6, -4), (-6, 4), (-6, -4)\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $13 \in$ N. 2) $3{,}7 \in$ N. 3) $\sqrt{8} \in$ Z. 4) $\sqrt{7} \in$ Q.

18. Высказывание A — «Принтер — устройство вывода информации»; высказывание B — «Две параллельные прямые не имеют общих точек». **Дизъюнкция** этих высказываний ($A \vee B$) является предложение…
1) «Принтер — устройство вывода информации, **и** у параллельных нет общих точек».
2) «Принтер — устройство вывода информации, **или** у параллельных нет общих точек».
3) «Принтер — устройство вывода информации **тогда и только тогда**, **когда** у параллельных нет общих точек».
4) «**Если** принтер — устройство вывода информации, **то** у параллельных нет общих точек».

19. Первый завод выпускает некачественные станки с вероятностью 0,2; а второй — с вероятностью 0,1. на каждом заводе купили по одному станку. Вероятность того, что оба они некачественные, равна…
1) 0,02. 2) 0,3. 3) 0,2. 4) 0,1.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, не меньшее 6, равна…

1) $\frac{1}{9}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{36}$. 5) $\frac{4}{9}$.

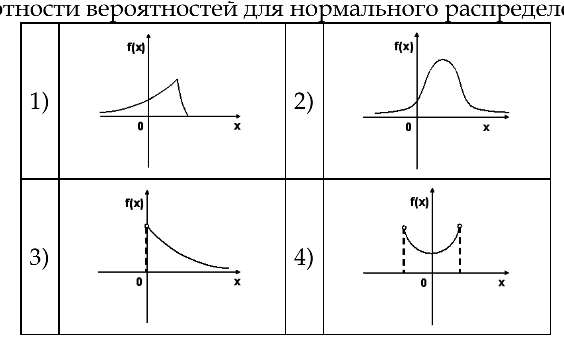
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	1	2
P	0,3	0,7

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 0,21. 2) 1. 3) 1,7. 4) 1,3.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…



23. Из приведенных величин случайными являются…

☐ «Число очков при бросании игральной кости».

☐ «Число студентов в аудитории».

☐ «Число $e = 2{,}718281828$».

☐ «Число дней в неделе».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при бросании кубика выпало не менее двух очков;

(2) при бросании кубика выпало два очка;

(3) при двух бросаниях кубика выпало в сумме два очка.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

☐ «Поступление в университет» и «Отчисление из университета».

☐ «Выбивание более 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 1 до 3 очков при стрельбе по мишени».

☐ «Выбивание 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

☐ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление четного числа очков при бросании игральной кости».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 1,7. 2) 1. 3) 0,3. 4) 0,3.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,1	0,1	0,2	__	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x = 5$ будет равно…

1) 0,1. 2) 0,4. 3) 0,2. 4) 0,5.

Вариант 9

1. Заданы множества $A = \{1, 5, 6\}$, $B = \{7, 4, 3, 8\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$. Истинными высказываниями являются…
□ **М**ножество $\{4, 6\}$ является элементом множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ **М**ножество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ не пустое.
□ Множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ состоит из 6 элементов.
□ **М**ножество $\{4\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.

3. Для множеств $A = \{1, 6, 18\}$; $B = \{6, 2, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $B \neq C$ □ $A \neq C$ □ $C \subset A$ □ $C \subset B$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.

5. Если A есть множество нечетных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $A \cup B$ равно…
1) 3. 2) 6. 3) 9. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (18, 25)$, $N = (9, 20)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \setminus N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (9, 18)$. 2) $K = (18, 20)$. 3) $K = (9, 25)$. 4) $K = (20, 25)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ C □ $A \cap C$ □ $A \cup B \cup C$ □ $A \cup C$

8. Если отношение задано неравенством: $2x - y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (2, 4). 2) (2, 3). 3) (2, 2). 4) (2, 5).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «ГРОМ», равно…
1) 4. 2) 16. 3) 24. 4) 120.

10. Количество перестановок из букв слова «книга», в которых буква «к» на первом месте, а буква «н» — на втором, равно…
1) 6. 2) 32. 3) 24. 4) 120.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «иридий», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных четырехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «прайд» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 24. 2) 60. 3) 32. 4) 120.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 фильмов из фильмотеки в 200 фильмов равно…
1) 19900. 2) 400. 3) 600. 4) 200.

14. Даны множества $M = \{a, b, d\}$ и $N = \{b, c, d\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
☐ $\{a, b, c, d\}$ ☐ $\{b, d\}$ ☐ $\{a\}$ ☐ $\{c\}$

15. Операции над высказываниями А и В (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \vee B) \wedge A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{2, 6, -6\}$ и $B = \{4, -4\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(4, 6), (6, 4), (6, -4), (-6, -4), (4, -6), (-4, 2)\}$. 2) $\{-6, -4, 2, 4, 6\}$.
3) $\{(2, 4), (2, -4), (6, 4), (6, -4), (-6, 4), (-6, -4)\}$. 4) $\{\varnothing\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $13 \in$ N. 2) $\sqrt{8} \in$ Z. 3) $\sqrt{7} \in$ Q. 4) $3{,}7 \in$ N.

18. Высказывание A — «Принтер — устройство вывода информации»; высказывание B — «Две параллельные прямые не имеют общих точек». **Эквивалентностью** этих высказываний ($A \leftrightarrow B$) является предложение…
1) «Принтер — устройство вывода информации, **и** у параллельных нет общих точек».
2) «Принтер — устройство вывода информации, **или** у параллельных нет общих точек».
3) «Принтер — устройство вывода информации **тогда и только тогда**, **когда** у параллельных нет общих точек».
4) «**Если** принтер — устройство вывода информации, **то** у параллельных нет общих точек».

19. Студент на экзамене верно ответит на первый вопрос с вероятностью 0,8, на второй — вероятностью 0,6. вероятность того что он верно ответит на оба вопроса, равна…
1) 1,4. 2) 0,8. 3) 0,48. 4) 0,7.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, не меньшее 6, равна…

1) 1. 2) $\frac{1}{4}$. 3) $\frac{1}{36}$. 4) $\frac{1}{9}$. 5) $\frac{4}{9}$.

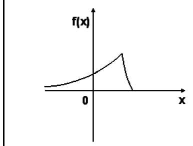
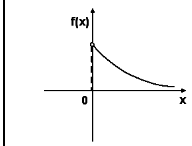
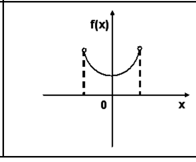
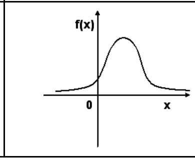
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	3	5
P	0,6	0,4

Математическое ожидание М(X) этой случайной величины равно…

1) 1. 2) 3,8. 3) 0,6. 4) 4,2.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

23. Из приведенных величин случайными являются…

☐ «Число студентов в аудитории».

☐ «Число $e = 2{,}718281828$».

☐ «Число дней в неделе».

☐ «Число очков при бросании игральной кости».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при бросании кубика выпало два очка;

(2) при двух бросаниях кубика выпало в сумме два очка;

(3) при бросании кубика выпало не менее двух очков.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

☐ «Выбивание 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

☐ «Выбивание более 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 1 до 3 очков при стрельбе по мишени».

☐ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление четного числа очков при бросании игральной кости».

☐ «Поступление в университет» и «Отчисление из университета».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 0,3. 2) 1,7. 3) 0,3. 4) 1.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,1	0,2	__	0,3	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x = 4$ будет равно…

1) 0,3. 2) 0,4. 3) 0,5. 4) 0,2.

Вариант 10

1. Заданы множества $A = \{1, 5, 6\}$, $B = \{6, 1, 5\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$. Истинными высказываниями являются…
□ Множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ состоит из 6 элементов.
□ **М**ножество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ не пустое.
□ **М**ножество $\{4\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ **М**ножество $\{4, 6\}$ является элементом множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.

3. Для множеств $A = \{1, 6, 18\}$; $B = \{6, 2, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $C \subset B$ □ $A \neq C$ □ $C \subset A$ □ $B \neq C$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.

5. Если A есть множество нечетных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $A \setminus B$ равно…
1) 3. 2) 6. 3) 9. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (18, 25)$, $N = (9, 20)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = N \setminus M$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (9, 18)$. 2) $K = (18, 20)$. 3) $K = (9, 25)$. 4) $K = (20, 25)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cup B \cup C$ □ $A \cap C$ □ $A \cup C$ □ C

8. Если отношение задано неравенством: $2x - y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (2, 3). 2) (2, 2). 3) (2, 4). 4) (2, 5).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «ГРОМ», равно…
1) 4. 2) 16. 3) 120. 4) 24.

10. Количество перестановок из букв слова «книга», в которых буква «к» на первом месте, а буква «н» — на втором, равно…
1) 24. 2) 32. 3) 120. 4) 6.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «сказка», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных четырехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «толпа» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 60. 2) 32. 3) 24. 4) 120.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 фильмов из фильмотеки в 200 фильмов равно…
1) 200. 2) 19900. 3) 600. 4) 400.

14. Даны множества $M = \{a, b, d\}$ и $N = \{b, c, d\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
□ $\{b, d\}$ □ $\{a\}$ □ $\{a, b, c, d\}$ □ $\{c\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \wedge B) \vee A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{1, 5, -5\}$ и $B = \{3, -3\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(3, 5), (5, 3), (5, -3), (-5, -3), (3, -5), (-3, 1)\}$.
2) $\{(1, 3), (1, -3), (5, 3), (5, -3), (-5, 3), (-5, -3)\}$.
3) $\{\varnothing\}$. 4) $\{-5, -3, 1, 3, 5\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $\sqrt{3} \in Z$. 2) $2 \in N$. 3) $\frac{1}{6} \in N$. 4) $\frac{2}{3} \in Z$.

18. Высказывание A — «Принтер — устройство вывода информации»; высказывание B — «Две параллельные прямые не имеют общих точек». **Импликацией** этих высказываний ($A \to B$) является предложение…
1) «Принтер — устройство вывода информации, **и** у параллельных нет общих точек».
2) «Принтер — устройство вывода информации, **или** у параллельных нет общих точек».
3) «Принтер — устройство вывода информации **тогда и только тогда**, **когда** у параллельных нет общих точек».
4) «**Если** принтер — устройство вывода информации, **то** у параллельных нет общих точек».

19. Студент на экзамене верно ответит на первый вопрос с вероятностью 0,8, на второй — вероятностью 0,6. вероятность того что он верно ответит на оба вопроса, равна…
1) 0,48. 2) 0,8. 3) 1,4. 4) 0,7.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, не меньшее 6, равна…

1) $\frac{1}{4}$.   2) $\frac{1}{36}$.   3) 1.   4) $\frac{1}{9}$.   5) $\frac{4}{9}$.

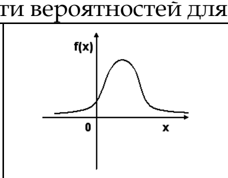
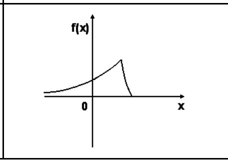
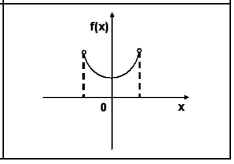
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	3	5
P	0,6	0,4

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 1.   2) 4,2.   3) 0,6.   4) 3,8.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

23. Из приведенных величин случайными являются…

□ «Число $e = 2,718281828$».

□ «Число дней в неделе».

□ «Число очков при бросании игральной кости».

□ «Число студентов в аудитории».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при двух бросаниях кубика выпало в сумме два очка;

(2) при бросании кубика выпало не менее двух очков;

(3) при бросании кубика выпало два очка.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

□ «Выбивание более 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 1 до 3 очков при стрельбе по мишени».

□ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление четного числа очков при бросании игральной кости».

□ «Выбивание 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

□ «Поступление в университет» и «Отчисление из университета».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 0,3.   2) 1.   3) 1,7.   4) 0,3.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,1	0,2	__	0,3	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x = 4$ будет равно…

1) 0,2.   2) 0,4.   3) 0,5.   4) 0,3.

Вариант 11

1. Заданы множества $A = \{1, 5, 6, 8\}$, $B = \{6, 1, 5\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество {2, {4, 6}, 4, 6, 8}. Истинными высказываниями являются…
□ **М**ножество {2, {4, 6}, 4, 6, 8} не пустое.
□ **М**ножество {4} является подмножеством множества {2, {4, 6}, 4, 6, 8}.
□ **М**ножество {4, 6} является элементом множества {2, {4, 6}, 4, 6, 8}.
□ Множество {2, {4, 6}, 4, 6, 8} состоит из 6 элементов.

3. Для множеств $A = \{1, 6, 18\}$; $B = \{6, 2, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $C \subset A$ □ $A \neq C$ □ $B \neq C$ □ $C \subset B$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество {–2, –1, 0, 1, 2}.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.

5. Если A есть множество нечетных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $B \setminus A$ равно…
1) 3. 2) 6. 3) 9. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (8, 15)$, $N = (3, 10)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \cup N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (3, 15)$. 2) $K = (3, 8)$. 3) $K = (8, 10)$. 4) $K = (10, 15)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cap C$ □ $A \cup C$ □ $A \cup B \cup C$ □ C

8. Если отношение задано неравенством: $2x + y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (0, 0). 2) (1, 0). 3) (1, –2). 4) (1, –4).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «ГРОМ», равно…
1) 24. 2) 16. 3) 120. 4) 4.

10. Количество перестановок из букв слова «книга», в которых буква «к» на первом месте, а буква «н» — на втором, равно…
1) 32. 2) 120. 3) 24. 4) 6.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «зигзаг», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных четырехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «печать» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 360. 2) 60. 3) 24. 4) 120.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 фильмов из фильмотеки в 200 фильмов равно…
1) 200. 2) 400. 3) 19900. 4) 600.

14. Даны множества $M = \{b, c, d\}$ и $N = \{c, d, e, f, g\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
□ $\{b\}$ □ $\{c, d\}$ □ $\{b, c, d, e, f, g\}$ □ $\{e, f, g\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \wedge B) \vee A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{1, 5, -5\}$ и $B = \{3, -3\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(3, 5), (5, 3), (5, -3), (-5, -3), (3, -5), (-3, 1)\}$. 2) $\{\varnothing\}$.
3) $\{-5, -3, 1, 3, 5\}$. 4) $\{(1, 3), (1, -3), (5, 3), (5, -3), (-5, 3), (-5, -3)\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $\frac{1}{6} \in$ N. 2) $2 \in$ N. 3) $\frac{2}{3} \in$ Z. 4) $\sqrt{3} \in$ Z.

18. Высказывание A — «Жесткий диск — устройство хранения данных»; высказывание B — «Сумма смежных углов 180°». **Конъюнкцией** этих высказываний ($A \wedge B$) является предложение…
1) «Жесткий диск — устройство хранения данных, **и** сумма смежных углов 180°».
2) «Жесткий диск — устройство хранения данных, **или** сумма смежных углов 180°».
3) «Жесткий диск — устройство хранения данных **тогда и только тогда**, **когда** сумма смежных углов 180°».
4) «**Если** жесткий диск — устройство хранения данных, **то** сумма смежных углов 180°».

19. Студент на экзамене верно ответит на первый вопрос с вероятностью 0,8, на второй — вероятностью 0,6. вероятность того что он верно ответит на оба вопроса, равна…
1) 1,4. 2) 0,8. 3) 0,7. 4) 0,48.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет число очков, не меньшее 3, равна…

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{9}$. 5) $\frac{4}{9}$.

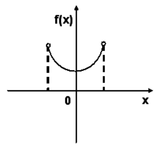
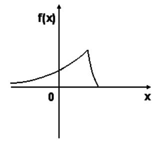
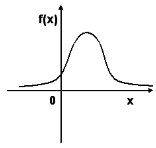
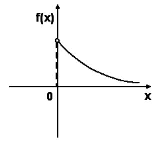
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	3	5
P	0,6	0,4

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 1. 2) 0,6. 3) 3,8. 4) 4,2.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

23. Из приведенных величин случайными являются…

□ «Число дней в неделе».

□ «Число очков при бросании игральной кости».

□ «Число $e = 2{,}718281828$».

□ «Число студентов в аудитории».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при бросании кубика выпало не менее 5 очков;

(2) при бросании кубика выпало четное число очков;

(3) при двух бросаниях кубика в сумме не менее 2 очков.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

□ «Наступление ночи» и «Восход солнца».

□ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 7 до 10 очков при стрельбе по мишени».

□ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление 4 при бросании игральной кости».

□ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 1,3. 2) 1. 3) 0,3. 4) 0,7.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,1	0,2	__	0,3	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x = 4$ будет равно…

1) 0,5. 2) 0,4. 3) 0,3. 4) 0,2.

Вариант 12

1. Заданы множества $A = \{1, 5, 6\}$, $B = \{6, 1, 5, 2\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$. Истинными высказываниями являются…
□ **М**ножество $\{4\}$ является подмножеством множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ **М**ножество $\{4, 6\}$ является элементом множества $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$.
□ Множество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ состоит из 6 элементов.
□ **М**ножество $\{2, \{4, 6\}, 4, 6, 8\}$ не пустое.

3. Для множеств $A = \{1, 6, 18\}$; $B = \{6, 2, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $A \neq C$ □ $B \neq C$ □ $C \subset A$ □ $C \subset B$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

5. Если A есть множество натуральных чисел, больших 30, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $A \cap B$ равно…
1) 4. 2) 5. 3) 9. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (8, 15)$, $N = (3, 10)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \cap N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (3, 15)$. 2) $K = (3, 8)$. 3) $K = (8, 10)$. 4) $K = (10, 15)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cup B$ □ $A \cap B \cap C$ □ $A \cap C$ □ A

8. Если отношение задано неравенством: $2x + y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) $(1, -4)$. 2) $(1, 0)$. 3) $(1, -2)$. 4) $(0, 0)$.

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «ГРОМ», равно…
1) 4. 2) 16. 3) 120. 4) 24.

10. Количество перестановок из букв слова «книга», в которых буква «к» на первом месте, а буква «а» — на последнем, равно…
1) 120. 2) 32. 3) 24. 4) 6.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «зараза», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных четырехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «курица» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 120. 2) 60. 3) 24. 4) 360.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 тортов из ассортимента в магазине в 8 тортов равно…
1) 16. 2) 28. 3) 56. 4) 64.

14. Даны множества $M = \{b, c, d\}$ и $N = \{c, d, e, f, g\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
☐ $\{e, f, g\}$ ☐ $\{c, d\}$ ☐ $\{b, c, d, e, f, g\}$ ☐ $\{b\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \wedge B) \vee A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{1, 5, -5\}$ и $B = \{3, -3\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(3, 5), (5, 3), (5, -3), (-5, -3), (3, -5), (-3, 1)\}$. 2) $\{-5, -3, 1, 3, 5\}$.
3) $\{(1, 3), (1, -3), (5, 3), (5, -3), (-5, 3), (-5, -3)\}$. 4) $\{\varnothing\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $\frac{2}{3} \in \mathrm{Z}$. 2) $2 \in \mathrm{N}$. 3) $\sqrt{3} \in \mathrm{Z}$. 4) $\frac{1}{6} \in \mathrm{N}$.

18. Высказывание A — «Жесткий диск — устройство хранения данных»; высказывание B — «Сумма смежных углов 180°». **Дизъюнкцией** этих высказываний ($A \vee B$) является предложение…
1) «Жесткий диск — устройство хранения данных, **и** сумма смежных углов 180°».
2) «Жесткий диск — устройство хранения данных, **или** сумма смежных углов 180°».
3) «Жесткий диск — устройство хранения данных **тогда и только тогда**, **когда** сумма смежных углов 180°».
4) «**Если** жесткий диск — устройство хранения данных, **то** сумма смежных углов 180°».

19. Студент на экзамене верно ответит на первый вопрос с вероятностью 0,8, на второй — вероятностью 0,6. вероятность того что он верно ответит на оба вопроса, равна…
1) 1,4. 2) 0,48. 3) 0,8. 4) 0,7.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет число очков, не меньшее 3, равна…

1) $\frac{4}{9}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{9}$. 5) $\frac{1}{36}$.

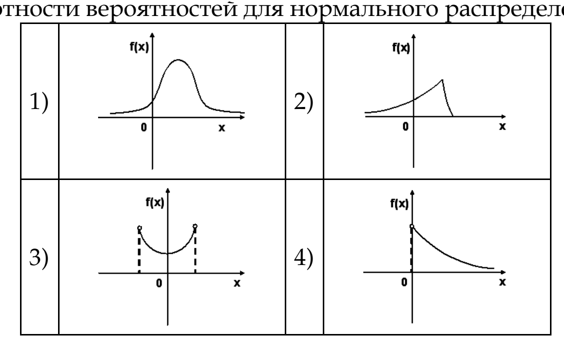
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	3	5
P	0,6	0,4

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 3,8. 2) 1. 3) 0,6. 4) 4,2.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…



23. Из приведенных величин случайными являются…

☐ «Число очков при бросании игральной кости».

☐ «Число $e = 2{,}718281828$».

☐ «Число студентов в аудитории».

☐ «Число дней в неделе».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при бросании кубика выпало четное число очков;

(2) при двух бросаниях кубика в сумме не менее 2 очков;

(3) при бросании кубика выпало не менее 5 очков.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

☐ «Наступление ночи» и «Восход солнца».

☐ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

☐ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 7 до 10 очков при стрельбе по мишени».

☐ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление 4 при бросании игральной кости».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 0,7. 2) 1. 3) 0,3. 4) 1,3.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,1	0,2	__	0,3	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x = 4$ будет равно…

1) 0,4. 2) 0,3. 3) 0,5. 4) 0,2.

Вариант 13

1. Заданы множества $A = \{-2, 4, -6\}$, $B = \{2, -4, 6, -8\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество {1, {3, 5}, 3, 5, 7}. Истинными высказываниями являются…
□ **М**ножество {3, 5} является подмножеством множества {1, {3, 5}, 3, 5, 7}.
□ Множество {1, {3, 5}, 3, 5, 7} состоит из 6 элементов.
□ **М**ножество {1, {3, 5}, 3, 5, 7} не пустое.
□ **М**ножество {3} является подмножеством множества {1, {3, 5}, 3, 5, 7}.

3. Для множеств $A = \{1, 2, 6, 18\}$; $B = \{6, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $B \subset C$ □ $A \subset B$ □ $A \subset C$ □ $A = C$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.

5. Если A есть множество натуральных чисел, больших 30, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $A \cup B$ равно…
1) 4. 2) 5. 3) 9. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (8, 15)$, $N = (3, 10)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \setminus N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (3, 15)$. 2) $K = (3, 8)$. 3) $K = (8, 10)$. 4) $K = (10, 15)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ A □ $A \cap B \cap C$ □ $A \cap C$ □ $A \cup B$

8. Если отношение задано неравенством: $2x + y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) $(1, -2)$. 2) $(1, 0)$. 3) $(0, 0)$. 4) $(1, -4)$.

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «ГРОМ», равно…
1) 16. 2) 4. 3) 120. 4) 24.

10. Количество перестановок из букв слова «книга», в которых буква «к» на первом месте, а буква «а» — на последнем, равно…
1) 6. 2) 32. 3) 24. 4) 120.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «обгоняя», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных четырехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «банкет» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 24. 2) 60. 3) 360. 4) 120.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 тортов из ассортимента в магазине в 8 тортов равно…
1) 16. 2) 64. 3) 56. 4) 28.

14. Даны множества $M = \{b, c, d\}$ и $N = \{c, d, e, f, g\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
□ $\{b, c, d, e, f, g\}$ □ $\{c, d\}$ □ $\{b\}$ □ $\{e, f, g\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \vee B) \wedge A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{7, 9\}$ и $B = \{4, -5, -4\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) {(7, 4), (4, 7), (9, –5), (–5, 9), (7, –4), (–4, 7)}. 2) {-5, -4, 4, 7, 9}.
3) {∅}. 4) {(7, 4), (9, 4), (7, –5), (9, –5), (7, –4), (9, –4)}.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $\sqrt{8} \in$ Z. 2) 3,7 $\in$ N. 3) $\sqrt{7} \in$ Q. 4) 13 $\in$ N.

18. Высказывание A — «Жесткий диск — устройство хранения данных»; высказывание B — «Сумма смежных углов 180°». **Эквивалентностью** этих высказываний ($A \leftrightarrow B$) является предложение…
1) «Жесткий диск — устройство хранения данных, **и** сумма смежных углов 180°».
2) «Жесткий диск — устройство хранения данных, **или** сумма смежных углов 180°».
3) «Жесткий диск — устройство хранения данных **тогда и только тогда**, **когда** сумма смежных углов 180°».
4) «**Если** жесткий диск — устройство хранения данных, **то** сумма смежных углов 180°».

19. Вероятность вытащить качественную деталь из первого ящика равна 0,5; а из второго — 0,9. из каждого ящика равна по одной детали. Вероятность того, что обе они качественные, равна…
1) 0,9. 2) 0,5. 3) 1,4. 4) 0,45.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет число очков, не меньшее 3, равна…

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{4}{9}$. 3) 1. 4) $\frac{1}{9}$. 5) $\frac{1}{4}$.

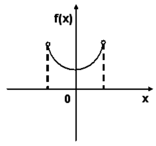
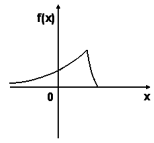
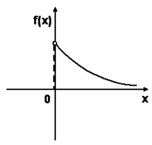
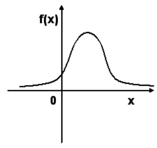
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	2	0
P	0,2	0,8

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 0,2. 2) 0,8. 3) 0,4. 4) 1,6.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

23. Из приведенных величин случайными являются…

☐ «Число $e = 2{,}718281828$».

☐ «Число студентов в аудитории».

☐ «Число дней в неделе».

☐ «Число очков при бросании игральной кости».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при двух бросаниях кубика в сумме не менее 2 очков;

(2) при бросании кубика выпало не менее 5 очков;

(3) при бросании кубика выпало четное число очков.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

☐ «Наступление ночи» и «Восход солнца».

☐ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление 4 при бросании игральной кости».

☐ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

☐ «Выбивание менее 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 7 до 10 очков при стрельбе по мишени».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 0,3. 2) 1. 3) 1,3. 4) 0,7.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,2	__	0,2	0,1	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x = 3$ будет равно…

1) 0,4. 2) 0,5. 3) 0,1. 4) 0,2.

Вариант 14

1. Заданы множества $A = \{-2, 4, -6\}$, $B = \{-2, 4, -6, -8\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$. Истинными высказываниями являются…
□ Множество $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$ состоит из 6 элементов.
□ **М**ножество $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$ не пустое.
□ **М**ножество $\{3\}$ является подмножеством множества $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$.
□ **М**ножество $\{3, 5\}$ является подмножеством множества $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$.

3. Для множеств $A = \{1, 2, 6, 18\}$; $B = \{6, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $A \subset C$ □ $A \subset B$ □ $A = C$ □ $B \subset C$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество $A = 2, 4, \dots, 2n, 2(n + 1), \dots$, где n-натуральное число.
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

5. Если A есть множество натуральных чисел, больших 30, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $A \setminus B$ равно…
1) 4. 2) 5. 3) 9. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (8, 15)$, $N = (3, 10)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = N \setminus M$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (3, 15)$. 2) $K = (3, 8)$. 3) $K = (8, 10)$. 4) $K = (10, 15)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cap C$ □ $A \cap B \cap C$ □ $A \cup B$ □ A

8. Если отношение задано неравенством: $2x + y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (1, 0). 2) (0, 0). 3) (1, –2). 4) (1, –4).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «ДОСКА», равно…
1) 720. 2) 5. 3) 24. 4) 120.

10. Количество перестановок из букв слова «книга», в которых буква «к» на первом месте, а буква «а» — на последнем, равно…
1) 24. 2) 32. 3) 120. 4) 6.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «фарфор», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных четырехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «гепард» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 60. 2) 360. 3) 24. 4) 120.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 тортов из ассортимента в магазине в 8 тортов равно…
1) 16. 2) 56. 3) 28. 4) 64.

14. Даны множества $M = \{b, c, d\}$ и $N = \{c, d, e, f, g\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
□ $\{c, d\}$ □ $\{b\}$ □ $\{b, c, d, e, f, g\}$ □ $\{e, f, g\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \vee B) \wedge A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{7, 9\}$ и $B = \{4, -5, -4\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(7, 4), (9, 4), (7, -5), (9, -5), (7, -4), (9, -4)\}$. 2) $\{-5, -4, 4, 7, 9\}$.
3) $\{\varnothing\}$. 4) $\{(7, 4), (4, 7), (9, -5), (-5, 9), (7, -4), (-4, 7)\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $\sqrt{7} \in$ Q. 2) $13 \in$ N. 3) $\sqrt{8} \in$ Z. 4) $3{,}7 \in$ N.

18. Высказывание A — «Жесткий диск — устройство хранения данных»; высказывание B — «Сумма смежных углов 180°». **Импликацией** этих высказываний ($A \to B$) является предложение…
1) «Жесткий диск — устройство хранения данных, **и** сумма смежных углов 180°».
2) «Жесткий диск — устройство хранения данных, **или** сумма смежных углов 180°».
3) «Жесткий диск — устройство хранения данных **тогда и только тогда**, **когда** сумма смежных углов 180°».
4) «**Если** жесткий диск — устройство хранения данных, **то** сумма смежных углов 180°».

19. Вероятность вытащить качественную деталь из первого ящика равна 0,5; а из второго — 0,9. из каждого ящика равна по одной детали. Вероятность того, что обе они качественные, равна…
1) 0,45. 2) 0,5. 3) 1,4. 4) 0,9.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет число очков, не меньшее 3, равна…

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) $\frac{4}{9}$. 4) $\frac{1}{9}$. 5) 1.

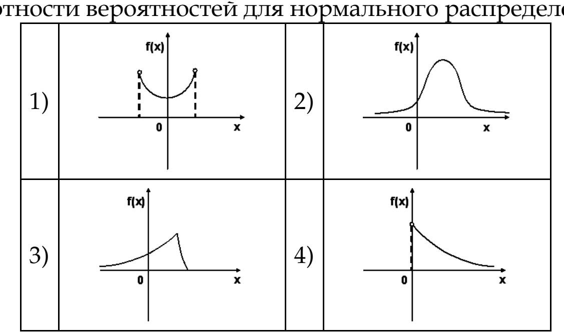
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	2	0
P	0,2	0,8

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 0,4. 2) 0,8. 3) 0,2. 4) 1,6.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…



23. Из приведенных величин случайными являются…

□ «Число студентов в аудитории».

□ «Число дней в неделе».

□ «Число очков при бросании игральной кости».

□ «Число $e = 2,718281828$».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при бросании кубика выпало нечетное число очков;

(2) при бросании кубика выпало 4 очка;

(3) при двух бросаниях кубика выпало в сумме не менее 3 очков.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

□ «Выбивание более 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 1 до 3 очков при стрельбе по мишени».

□ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление четного числа очков при бросании игральной кости».

□ «Выбивание 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

□ «Поступление в университет» и «Отчисление из университета».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 1. 2) 1,3. 3) 0,3. 4) 0,7.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,2	__	0,2	0,1	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x = 3$ будет равно…

1) 0,4. 2) 0,2. 3) 0,5. 4) 0,1.

Вариант 15

1. Заданы множества $A = \{-2, 4, -6\}$, $B = \{-2, 4\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$. Истинными высказываниями являются…
□ **М**ножество $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$ не пустое.
□ **М**ножество $\{3\}$ является подмножеством множества $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$.
□ **М**ножество $\{3, 5\}$ является подмножеством множества $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$.
□ Множество $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$ состоит из 6 элементов.

3. Для множеств $A = \{1, 2, 6, 18\}$; $B = \{6, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $A \subset B$ □ $A = C$ □ $A \subset C$ □ $B \subset C$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество деревьев в саду.
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

5. Если A есть множество натуральных чисел, больших 30, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $B \setminus A$ равно…
1) 4. 2) 5. 3) 9. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (8, 15)$, $N = (9, 10)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \cup N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (8, 15)$. 2) $K = (8, 10)$. 3) $K = (8, 9)$. 4) $K = (9, 10)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cap B \cap C$ □ $A \cup B$ □ $A \cap C$ □ A

8. Если отношение задано неравенством: $x - y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (0, 0). 2) (2, –1). 3) (1, 1). 4) (1, 2).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «ДОСКА», равно…
1) 120. 2) 5. 3) 24. 4) 720.

10. Количество перестановок из букв слова «книга», в которых буква «к» на первом месте, а буква «а» — на последнем, равно…
1) 32. 2) 120. 3) 24. 4) 6.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «пробор», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных трехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «кларнет» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 210. 2) 60. 3) 24. 4) 120.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 2 тортов из ассортимента в магазине в 8 тортов равно…
1) 28. 2) 16. 3) 56. 4) 64.

14. Даны множества $M = \{a, b, c, d\}$ и $N = \{b, c, d, e, f, g\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.
1. $M \cap N$. 2. $M \cup N$. 3. $M \backslash N$. 4. $N \backslash M$.
☐ $\{a\}$ ☐ $\{e, f, g\}$ ☐ $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ☐ $\{b, c, d\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \wedge B) \vee A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{7, 9\}$ и $B = \{4, -5, -4\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(7, 4), (4, 7), (9, -5), (-5, 9), (7, -4), (-4, 7)\}$.
2) $\{(7, 4), (9, 4), (7, -5), (9, -5), (7, -4), (9, -4)\}$.
3) $\{\varnothing\}$. 4) $\{-5, -4, 4, 7, 9\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $2 \in$ N. 2) $\frac{1}{6} \in$ N. 3) $\sqrt{3} \in$ Z. 4) $\frac{2}{3} \in$ Z.

18. Высказывание A — «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ»; высказывание B — «Диагонали прямоугольника равны». **Конъюнкцией** этих высказываний ($A \wedge B$) является предложение…
1) «**Если** Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **то** диагонали прямоугольника равны».
2) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **или** диагонали прямоугольника равны».
3) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ **тогда и только тогда**, **когда** диагонали прямоугольника равны».
4) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **и** диагонали прямоугольника равны».

19. Вероятность вытащить качественную деталь из первого ящика равна 0,5; а из второго — 0,9. из каждого ящика равна по одной детали. Вероятность того, что обе они качественные, равна…
1) 0,9. 2) 0,45. 3) 1,4. 4) 0,5.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет число очков, не меньшее 3, равна…

1) $\frac{1}{36}$. 2) $\frac{1}{4}$. 3) 1. 4) $\frac{4}{9}$. 5) $\frac{1}{9}$.

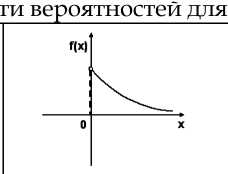
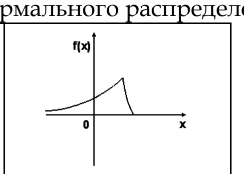
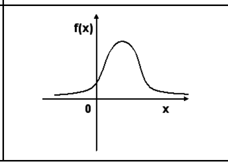
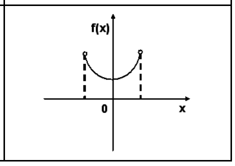
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	2	0
P	0,2	0,8

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 0,2. 2) 0,4. 3) 0,8. 4) 1,6.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

23. Из приведенных величин случайными являются…

☐ «Число π = *3,1415927*».

☐ «Число бракованных деталей в прибывшей на завод партии».

☐ «Число очков при стрельбе по мишени».

☐ «Число дней в декабре».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при бросании кубика выпало 4 очка;

(2) при двух бросаниях кубика выпало в сумме не менее 3 очков;

(3) при бросании кубика выпало нечетное число очков.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

☐ «Выбивание более 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 1 до 3 очков при стрельбе по мишени».

☐ «Поступление в университет» и «Отчисление из университета».

☐ «Выбивание 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

☐ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление четного числа очков при бросании игральной кости».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 1,3. 2) 1. 3) 0,7. 4) 0,3.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,2	__	0,2	0,1	0,1

Тогда значение относительной частоты при x = 3 будет равно…

1) 0,1. 2) 0,2. 3) 0,4. 4) 0,5.

Вариант 16

1. Заданы множества $A = \{-2, 4, -6\}$, $B = \{-2, 4, -6\}$. Верно для них утверждение…
1) Множества A и B равны.
2) Множество B есть подмножество множества A.
3) Множество A есть подмножество множества B.
4) Множества A и B не содержат одинаковых элементов.

2. Задано множество $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$. Истинными высказываниями являются…
□ **М**ножество $\{3\}$ является подмножеством множества $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$.
□ **М**ножество $\{3, 5\}$ является подмножеством множества $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$.
□ Множество $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$ состоит из 6 элементов.
□ **М**ножество $\{1, \{3, 5\}, 3, 5, 7\}$ не пустое.

3. Для множеств $A = \{1, 2, 6, 18\}$; $B = \{6, 1, 18\}$; $C = \{2, 18, 6, 1\}$ истинными высказываниями являются…
□ $A \subset C$ □ $B \subset C$ □ $A = C$ □ $A \subset B$

4. Конечными множествами являются…
□ Множество $A = 2, 4, \ldots, 2n, 2(n+1), \ldots$, где n-натуральное число.
□ Множество двухзначных натуральных чисел.
□ Множество $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
□ Множество деревьев в саду.

5. Если A есть множество однозначных натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 3, 11, 22, 33, 111, 222, 333\}$, то количество элементов множество $A \cap B$ равно…
1) 3. 2) 6. 3) 9. 4) ∞.

6. Пусть множества $M = (8, 15)$, $N = (9, 10)$ представляют собой интервалы числовой оси, тогда множество $K = M \cap N$ как числовой промежуток будет равно…
1) $K = (8, 15)$. 2) $K = (8, 10)$. 3) $K = (8, 9)$. 4) $K = (9, 10)$.

7. Заданы произвольные множества A, B и C. Расположите указанные множества по порядку так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.
□ $A \cup B$ □ A □ $A \cap B \cap C$ □ $A \cap C$

8. Если отношение задано неравенством: $x - y < 0$, то данному отношению принадлежит следующая пара чисел…
1) (1, 1). 2) (2, –1). 3) (0, 0). 4) (1, 2).

9. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «ДОСКА», равно…
1) 24. 2) 5. 3) 720. 4) 120.

10. Количество перестановок из букв слова «книга», в которых буква «к» на первом месте, а буква «а» — на последнем, равно…
1) 32. 2) 120. 3) 6. 4) 24.

11. Количество комбинаций, которое можно получить путем перестановки букв, в слове «дундук», равно…
1) 90. 2) 120. 3) 180. 4) 240.

12. Количество различных трехбуквенных комбинаций, которые можно составить из букв, входящих в слово «леопард» (все буквы в комбинации различны), равно…
1) 120. 2) 60. 3) 24. 4) 210.

13. Количество различных способов выбора (порядок не имеет значения) 3 тортов из ассортимента в магазине в 8 тортов равно…
1) 11. 2) 336. 3) 168. 4) 84.

14. Даны множества $M = \{a, b, c, d\}$ и $N = \{b, c, d, e, f, g\}$. Установите соответствия между обозначениями множеств и самими множествами.

1. $M \cap N$.	2. $M \cup N$.	3. $M \backslash N$.	4. $N \backslash M$.
□ $\{a\}$	□ $\{a, b, c, d, e, f, g\}$	□ $\{b, c, d\}$	□ $\{e, f, g\}$

15. Операции над высказываниями A и B (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание) задаются с помощью таблицы истинности:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\bar{A}$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Тогда таблицей истинности для сложного высказывания $C = (\bar{A} \wedge B) \vee A$ будет таблица…

1)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

2)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3)

A	B	C
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

4)

A	B	C
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

16. Заданы множества $A = \{7, 9\}$ и $B = \{4, -5, -4\}$, тогда декартовым произведением этих множеств $A \times B$ является множество…
1) $\{(7, 4), (4, 7), (9, -5), (-5, 9), (7, -4), (-4, 7)\}$. 2) $\{-5, -4, 4, 7, 9\}$.
3) $\{(7, 4), (9, 4), (7, -5), (9, -5), (7, -4), (9, -4)\}$. 4) $\{\varnothing\}$.

17. Принято обозначать:
N — множество натуральных чисел;
Q — множество рациональных чисел;
Z — множество целых чисел;
R — множество действительных чисел.
Тогда верным утверждением будет…
1) $\sqrt{3} \in$ Z. 2) $\frac{2}{3} \in$ Z. 3) $2 \in$ N. 4) $\frac{1}{6} \in$ N.

18. Высказывание A — «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ»; высказывание B — «Диагонали прямоугольника равны». **Конъюнкцией** этих высказываний ($A \wedge B$) является предложение…
1) «**Если** Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **то** диагонали прямоугольника равны».
2) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **или** диагонали прямоугольника равны».
3) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ, **и** диагонали прямоугольника равны».
4) «Джон фон Нейман — архитектор ЭВМ **тогда и только тогда**, **когда** диагонали прямоугольника равны».

19. Вероятность вытащить качественную деталь из первого ящика равна 0,5; а из второго — 0,9. из каждого ящика равна по одной детали. Вероятность того, что обе они качественные, равна…
1) 0,9. 2) 0,5. 3) 0,45. 4) 1,4.

20. Игральный кубик бросают два раза. Вероятность того, что на верхней грани два раза выпадет четное число очков, не меньшее 4, равна…

1) $\frac{1}{36}$.   2) $\frac{1}{4}$.   3) 1.   4) $\frac{4}{9}$.   5) $\frac{1}{9}$.

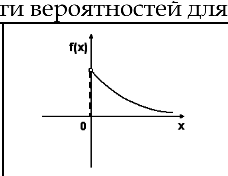
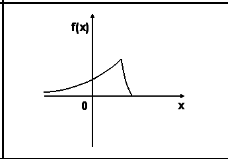
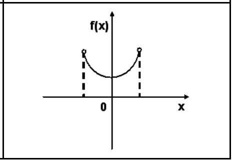
21. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения вероятностей:

X	2	0
P	0,2	0,8

Математическое ожидание M(X) этой случайной величины равно…

1) 0,2.   2) 0,8.   3) 1,6.   4) 0,4.

22. График плотности вероятностей для нормального распределения на рисунке…

1)		2)	
3)		4)	

23. Из приведенных величин случайными являются…

☐ «Число бракованных деталей в прибывшей на завод партии».

☐ «Число π = *3,1415927*».

☐ «Число очков при стрельбе по мишени».

☐ «Число дней в декабре».

24. Расположите случайные события в порядке возрастания их вероятностей:

(1) при двух бросаниях кубика выпало в сумме не менее 3 очков;

(2) при бросании кубика выпало нечетное число очков;

(3) при бросании кубика выпало 4 очка.

25. Из приведенных событий **несовместными** являются…

☐ «Выбивание более 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание от 1 до 3 очков при стрельбе по мишени».

☐ «Появление 6 при бросании игральной кости» и «Появление четного числа очков при бросании игральной кости».

☐ «Поступление в университет» и «Отчисление из университета».

☐ «Выбивание 5 очков при стрельбе по мишени» и «Выбивание четного числа очков при стрельбе по мишени».

26. Вероятность наступления некоторого события **не может** быть равна…

1) 0,3.   2) 0,7.   3) 1.   4) 1,3.

27. В результате некоторого эксперимента получен статистический ряд:

x_i	1	3	4	5	6
p_i	0,2	__	0,2	0,1	0,1

Тогда значение относительной частоты при $x = 3$ будет равно…

1) 0,2.   2) 0,1.   3) 0,5.   4) 0,4.

Литература

Адаменко А. Н., Кучуков А. М. Логическое программирование и Visual Prolog.— СПб.: БХВ-Петербург, 2003.— 990 с.: ил. ISBN 5-94157-156-9.

Комментарий.

Прекрасная книга по логике и языку Пролог. Имеет компакт-диск с дистрибутивом Visual Prolog 5.2.

Аннотация.

Книга посвящена наиболее распространенному в мире языку логического программирования Visual Prolog, предшественником и ближайшим «родственником» которого является широко известный Turbo Prolog. Рассматриваются математические основы логического программирования, история, идеи и методы этого направления науки, его применение в задачах искусственного интеллекта и экспертных системах. Описание Visual Prolog — языка и системы программирования, возможности которых значительно шире возможностей только лишь логического программирования — базируется на переводе фирменной документации Prolog Development Center (PDC). Последовательно и подробно рассмотрены вопросы установки системы, синтаксис языка, принципы, методы и особенности программирования, визуальная среда разработки, методы стыковки с другими широко используемыми языками программирования, вопросы создания графического интерфейса и баз данных, визуальное, логическое, процедурное, объектно-ориентированное и системное программирование на Visual Prolog. Прилагается компакт-диск, содержащий дистрибутив системы, упражнения и примеры из книги.

Для программистов, студентов и преподавателей вузов.

Оглавление.

Предисловие.

Введение в Visual Prolog. Где может использоваться Visual Prolog? *Мир искусственного интеллекта. Системы базы данных. Универсальная среда разработки.* Как создавался Visual Prolog.

ЧАСТЬ I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЛОГИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Глава 1. Дедуктивные системы. Логический вывод и логическое программирование. Соотношение между содержательными и формальными теориями. *Геометрия Лобачевского и разбегающиеся галактики. Формализация мышления и формальные системы. Кризис основ и программа обоснования математики.* Аксиоматический метод и формальные теории. Логика и исчисление высказываний. *Логические операции над логическими переменными. Алгебра логики. Пропозициональные формулы. Логическое следствие и логический вывод. Метод резолюций. Исчисление высказываний как формальная теория. Логическое следствие и формальный вывод.*

Глава 2. Исчисление предикатов и теории первого порядка. Отношение и предикат. Кванторы. Язык логики предикатов. Синтаксис языка исчисления предикатов. Семантика исчисления предикатов. Эквивалентные преобразования формул. Исчисление предикатов первого порядка. *Аксиомы. Правила вывода. Свойства исчисления предикатов.* Прикладные исчисления предикатов. *Теории с равенством. Теория частичного упорядочения. Формальная арифметика.*

Глава 3. Логический вывод в исчислении предикатов. Логическое следствие в исчислении предикатов. *Преобразование формул: предваренная форма. Преобразование формул: скулемовская и клаузальная формы. Логическое следование: правило резолюций.* Метод резолюций в логике предикатов. *Унификация. Алгоритм унификации. Исчисление метода резолюций.* Секвенциальные исчисления и обратный метод С. Ю. Маслова. *Секвенциальное исчисление. Обратный метод С. Ю. Маслова.*

ЧАСТЬ II. ЛОГИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ.

Глава 4. Искусственный интеллект. Что такое искусственный интеллект. Логико-лингвистические модели в системах управления. Искусственный интеллект и теория поиска вывода. Современной состояние искусственного интеллекта. *Экспертные системы. Робототехника. Автономные агенты. Мозг как аналого-цифровое устройство. Искусственная жизнь. Чат-роботы. Общение с человеком на естественном языке.* Перспективы и тенденции развития искусственного интеллекта. *Рейтинг перспективных технологий.*

Глава 5. Экспертные системы. Что такое экспертная система. Области создания и применения ЭС. Общие принципы построения и функционирования ЭС. Примеры ЭС.

ЧАСТЬ III. ОСНОВЫ ПРОЛОГА.

Глава 6. Введение в Пролог.

Глава 7. Примеры решения задач на языке Пролог.

ЧАСТЬ IV. ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА VISUAL PROLOG.

Глава 8. Установка и начало работы в Visual Prolog. Системные требования. *Процедура инсталляции.* Рекомендации по установке Visual Prolog. Запуск Visual Prolog с CD-ROM. Обновление версии Visual Prolog. Запуск Visual Prolog. Создание Test Goal-проекта для выполнения примеров. *Открытие окна редактора. Запуск и тестирование программы. Тестирование примеров данного руководства. Тестирование примеров в Test Goal.* Обработка ошибок.

Глава 9. Возможности Visual Prolog. Визуальная среда разработки (VDE). *Эксперты кода. Эксперт приложений. Интегрированные редакторы для подготовки ресурсов. Возможность импорта ресурсов. Текстовый редактор. Интегрированный создатель подсказок. Браузер исходного кода. Разделение проектов и управление исходным кодом. Интерактивная справка Visual Prolog. Интерфейс визуального программирования (VPI). Компоненты (пакеты) GUI высокого уровня. Компилятор. Проверка соответствия типов компилятором. Отладчик. Обработка исключительных ситуаций и перехват ошибок. Классы и объекты. Переносимый код. Открытая платформа. Интегрированная возможность сборки. Подсистема баз данных. Клиент-серверная архитектура. ODBC- и SQL-интерфейсы. Инструментальное средство обработки документов. Исходный код для интерпретатора Пролог. Использование компилятора Пролог. Исходный код для визуальной среды разработки. Экспертная система для текстовой анимации. Эксперт меток штрихкодов.* Комплексные средства разработки программ Internet. *Интерфейс с сокетами. Поддержка FTP. Поддержка HTTP. Поддержка CGI. Поддержка ISAPI.*

Глава 10. Основы языка Visual Prolog. ПРОграммирование в ЛОГике. *Факты и правила. Переменные: общее представление. Краткий обзор.* От естественного языка к программам. *Предложения. Предикаты. Переменные. Цели (запросы). Комментарии. Сопоставление.* Программы Visual Prolog. *Основные разделы Visual Prolog-программ. Раздел предложений. Раздел предикатов. Раздел доменов. Раздел цели.* Декларации и правила. Другие разделы программ. *Раздел фактов. Раздел констант. Глобальные разделы. Директивы компилятора.* Резюме.

Глава 11. Унификация и поиск с возвратом. Сопоставление и унификация. Поиск с возвратом. *Поиск всех решений в Test Goal. Управление поиском решений. Использование предиката fail. Прерывание поиска с возвратом: отсечение.* О прологе с процедурной точки зрения. *Факты и правила в качестве процедур*. Резюме.

Глава 12. Простые и составные объекты. Простые объекты данных. *Переменные как объекты данных. Константы как объекты данных.* Составные объекты данных и функторы. *Унификация составных объектов. Использование нескольких значений как единого целого. Объявление составных доменов. Определение составных смешанных доменов.* Резюме.

Глава 13. Повтор и рекурсия. Процесс повторения. *Снова поиск с возвратом. Использование отката с петлями. Рекурсивные процедуры. Оптимизация хвостовой рекурсии. Использование аргументов в качестве переменных цикла.* Рекурсивные структуры данных. *Деревья как типы данных. Бинарные поисковые деревья.* Резюме.

Глава 14. Списки и рекурсия. Что такое список? *Объявление списков.* Работа со списками. Использование списков. *Печать списков. Подсчет элементов списка. Хвостовая рекурсия. Принадлежность к списку. Объединение списков.* Поиск всех решений для цели сразу. Составные списки. *Грамматический разбор списков.* Резюме.

Глава 15. Внутренняя база фактов Visual Prolog. Объявление внутренней базы фактов. Использование внутренних баз фактов. *Доступ к внутренней базе фактов. Обновление внутренней базы фактов. Сохранение базы фактов во время работы программы. Ключевые слова, определяющие свойства фактов.* Резюме.

Глава 16. Арифметические вычисления и сравнения. Арифметические выражения. *Операции. Порядок вычислений.* Функции и предикаты. *Генератор случайных чисел. Целочисленная и вещественная арифметика.* Сравнение. *Равенство и предикат равенства. Сравнение символов, строк и идентификаторов.*

Глава 17. Более сложные приемы программирования. Анализ потока параметров. *Составной поток параметров. Функции и возвращаемые значения. Управление детерминизмом в Visual Prolog. Предикаты как аргументы. Бинарные домены. Модульное программирование. Ошибки и исключительные ситуации. Динамическое отсечение. Преобразование типов. Стиль программирования.*

Глава 18. Классы и объекты. Инкапсуляция. Объекты и классы. Наследование. Индивидуальность. Классы Visual Prolog. *Объявления классов. Реализация класса.* Экземпляры класса – объекты. *Уничтожение объектов.* Домены классов. Производные классы и наследование. Виртуальные предикаты. Статические предикаты и факты. Ссылка объекта на себя (предикат *this*). Области видимости класса. *Классы как модули.* Пользовательские конструкторы и деструкторы. Абстрактные классы. Защищенные предикаты, домены и факты. Управление доступом в производных классах. Объектные предикатные значения. *Объявления объектных предикатных доменов.* Формальный синтаксис для классов.

Глава 19. Запись, чтение и файлы. Запись и чтение. *Запись. Чтение. Передача двоичных блоков.* Файловая система в Visual Prolog. *Открытие и закрытие файлов. Переопределение стандартного ввода/вывода. Работа с файлами. Атрибуты файлов.* Имена файлов и путей. Поиск в каталогах. Манипулирование файловыми атрибутами. Управление термами в текстовых файлах. *Работа с фактами как с термами.* Резюме.

Глава 20. Обработка строк в Visual Prolog. Основные предикаты управления строкой. Преобразования типов. Резюме.

Глава 21. Внешние базы данных в Visual Prolog. Соглашения об именовании. Селекторы внешних баз данных. Цепочки. Домены внешних баз данных. *Числа-указатели в базе данных.* Обработка баз данных. Обработка цепочек. Обработка термов. B+ деревья. *Страницы, порядок и длина ключа. Двойные ключи. Множественный просмотр. Стандартные предикаты для B+ деревьев.* Программирование внешних баз данных. *Просмотр базы данных. Вывод содержания базы данных. Создание защищенной базы данных. Обновление базы данных. Использование внутреннего указателя B+ дерева. Изменение структуры базы данных. Разделение файлов и внешние базы данных. Домены разделения файлов. Открытие баз данных в режиме разделения. Программирование с разделением файлов. Реализация высокоуровневого блокирования. Полный пример разделения файлов. Аспекты реализации разделения файлов в Visual Prolog.* Резюме.

Глава 22. Программирование на системном уровне. Доступ к операционной системе. Операции на уровне бит. Прямой доступ к памяти. Резюме.

Глава 23. Систематический обзор языка Visual Prolog. Имена. *Ключевые слова. Специально определенные предикаты.* Разделы программы. *Раздел доменов. Раздел предикатов. Раздел фактов. Раздел предложений. Раздел цели. Раздел констант.* Условная компиляция. Включение файлов в программу. Модули и глобальные программные конструкции. *Модули компиляции. Имена с глобальной областью видимости. Структура многомодульных программ. Правила видимости для членов классов. Опции компилятора для многомодульных проектов. Директивы компилятора.* Управление памятью в Visual Prolog. *Размер стека. Размер глобального стека. Размер кучи. Экономия ресурсов памяти.*

Глава 24. Интерфейс с другими языками. Использование DLL. Вызов других языков из Visual Prolog. *Объявление внешних предикатов. Соглашения о вызове и передаче параметров. Реализация доменов.* О памяти. *Выравнивание памяти. Распределение памяти. Примеры обработки списков. Вызов Visual Prolog из других языков. Вызов ассемблерной подпрограммы из Visual Prolog.*

ЧАСТЬ V. РАЗРАБОТКА ГРАФИЧЕСКОГО ИНТЕРФЕЙСА ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ.

Глава 25. Создание программы с графическим интерфейсом. Визуальное программирование на Visual Prolog. Начало работы с экспертом приложений. *Использование команды Project | Run. Как изучать сгенерированный код. Основные «горячие» клавиши. Развитие приложения "Hello World". Создание окна Sweep. Окно часов. Окно изображения. Создания окна дерева. Создание окна редактора. Обработка буфера обмена. Печать. Добавление элементов управления в окно часов. Использование списка. Создание диалогового окна. Динамический обмен данными.*

Глава 26. Средства создания графического интерфейса. Управляемые событиями приложения. Запуск VPI. Окна. *Типы окон. Стили окон. Клиентская область окна. Окно экрана (Screen). Окно задачи (Task). Окна верхнего уровня (Top-Level). Дочерние окна. Элементы управления. Диалоговые окна. Обработчики событий. Возвращаемые значения обработчика событий. Создание окон. Уничтожение окон. Доступ к клиентской области. Область отсечения. Доступ к внешней границе области. Вычисление клиенткой области по внешней границе окна. Перемещение и изменение размеров окон. Изменение состояния окна. Изменение пиктограммы, ассоциированной с окном. Изменение текста окна или заголовка окна. Изменение обработчика событий. Связь данных с окном. Доступ к окну Task. Доступ к родительскому окну. Доступ к активному окну. Установка фокуса. Доступ к окну, имеющему фокус. Упорядочивание окон. Обновление окон.* События. *Создание окон. Удаление окна. Закрытие окна пользователем. Закрытие графического пользовательского интерфейса. Активизация меню. Выбор пункта меню. События от мыши. Двойной щелчок кнопкой мыши. Перемещение мыши в окне. Отпускание кнопки мыши. Ввод с клавиатуры. Нажатие клавиши. Отпускание клавиши. Событие от горизонтальной полосы прокрутки. Событие от вертикальной полосы прокрутки. Получение фокуса. Потеря фокуса. Стирание фона. Изменение положения окна. Изменение размера окна. Изменение состояния окна. События GUI самой ОС. «Собственное» рисование. Возврат размера элемента «собственного» рисования. Перерисовка окна. Истечение интервала времени таймера. Возникновение программируемого события. Динамический обмен данными. События уведомления от элементов управления. События уведомления о завершении приложения. Активизация приложения. Деактивизация приложения.* Элементы управления. *Работа с элементами управления.* Флаги стиля. *События от элементов управления. Создание элементов управления. Различные элементы управления. Статический текст. Полосы прокрутки. «Собственное» рисование для элементов управления. Специальные элементы управления.*

ЧАСТЬ VI. ВОЗМОЖНОСТИ ВИЗУАЛЬНОЙ СРЕДЫ РАЗРАБОТКИ.

Глава 27. Особенности визуальной среды разработки для опытного пользователя.

ЧАСТЬ VII. ПРИЛОЖЕНИЯ.

Приложение 1. Описание прикладных пакетов, облегчающих создание VPI-программ.

Приложение 2. Примеры программ на языке Пролог.

Приложение 3. Medication Assistant — медицина, основанная на доказательствах.

Приложение 4. В. П. Оревков. Обратный метод поиска вывода.

Приложение 5. Описание компакт-диска.

Список литературы. Предметный указатель.

Азимов Айзек. В мире чисел. От арифметики до высшей математики.— М.: ЗАО Центрполиграф, 2004.— 203 с.: ил.— ISBN 5-9524-0868-0.

Аннотация.

Книги А. Азимова — это оригинальное сочетание научной достоверности, яркой образности, мастерского изложения. Свой увлекательный рассказ Азимов начинает с древнейших времен, когда человек использовал для счета пальцы, затем знакомит нас со счетами, с операциями сложения, вычитания, умножения и деления. Шаг за шагом автор ведет нас тем же путем, которым шло человечество, совершенствуя свои навыки в математике. Эта книга позволяет школьнику легко освоить арифметику и основы алгебры, избежать ненужной зубрежки и находить самостоятельные решения сложнейших задач.

Оглавление.

Глава 1. Цифры и — цифры. Глава 2. Ничто — и нечто, еще меньшее. Глава 3. В обход «сложения». Глава 4. Разбитые числа. Глава 5. Разбиваем на десятки. Глава 6. Форма чисел. Глава 7. Докапываемся до корней. Глава 8. Очень большое и очень маленькое. Глава 9. От числовой оси к числовой плоскости. Глава 10. Бесконечность.

Бизам Д., Герцег Я. Многоцветная логика. 175 логических задач.— М.: Мир, 1978.— 436 с.: ил.

Аннотация.

Новая книга уже известных советскому читателю венгерских математиков Д. Бизама и Я. Герцега продолжает серию книг по занимательной математике. Как и предыдущая книга этих авторов «Игра и логика» (М., Мир, 1975), она посвящена началам математической логики и содержит 175 логических задач. Пользуясь элементарными средствами, авторы в увлекательной форме учат читателя умению последовательно мыслить.

Книга доступна самому широкому кругу читателей.

Оглавление.

Предисловие переводчика.

Предисловие.

Как читать эту книгу.

ЗАДАЧИ.

Часть I. Небольшая разминка. Часть II. Наведем порядок! Часть III. Поговорим о деньгах. Часть IV. Логика на весах. Часть V. Возьмем не глядя! Часть VI. Золотоискатели, ящерица и бергомобиль. Часть VII. Составление смесей. Часть VIII. Розыгрыш кубка. Часть IX. Буквенное лото. Часть X. Кросснамберы. Часть XI. Истинно и ложно. Часть XII. Чтение мыслей.

РЕШЕНИЯ.

Часть I. Часть II. Часть III. Часть IV. Часть V. Часть VI. Часть VII. Часть VIII. Часть IX. Часть X. Часть XI. Часть XII.

Болтянский В. Г., Савин А. П. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты.— М.: ФИМА, МЦНМО, 2002.— 368 с.: ил.— ISBN 5-89492-011-6 («ФИМА»).— ISBN 5-94057-040-2 (МЦНМО).

Аннотация.

Книга вводит читателя в круг идей современной математики. В популярной форме рассказывается о теории множеств, комбинаторике, теории графов, теории вероятностей и других вопросах.

Издание будет интересно учителям математики. Специальная глава посвящена вопросам, связанным с поиском учащимися решений задач.

В то же время эта книга может служить основой курса математики для студентов гуманитарных специальностей, такой курс был прочитан авторами для психологов.

Учащиеся и учителя математических школ, лицеев и гимназий могут использовать издание в качестве учебного пособия.

Из предисловия.

В конце 40-х годов XX века американские математики Р. Курант и Г. Роббинс предприняли удачную попытку рассказать широкому кругу читателей, в первую очередь учителям математики в школе и школьникам, о содержании и методах современной математики в книге «Что такое математика». Эта книга не раз издавалась и на русском языке. С тех пор прошло полвека и назрела необходимость еще раз попытаться ответить на вопрос «Что такое математика?». Эта книга написана именно с этой целью. Первый ее том «Дискретные объекты» вы держите в руках. Вторым томом предполагается «Непрерывность», а третьим «Экстремум».

Оглавление.

Предисловие.

ВВЕДЕНИЕ.

Беседа 1. Предмет математики. 1. Мнения о пользе математики. 2. Понятия математики и их возникновение. 3. Некоторые виды абстракции. 4. Многоступенчатые абстракции. 5. Пространственные и пространственноподобные формы. 6. Количественные отношения реального мира.

Глава I. Множества и отображения.

Беседа 2. Конечные и бесконечные множества. 7. Множество и его элементы. 8. Взаимно однозначное соответствие. 9. Счетные множества. 10. Понятие мощности множества.

Беседа 3. Операции над множествами. 11. Пересечение множеств. 12. Объединение множеств. 13. Дополнение множеств. 14. Произведение множеств.

Беседа 4. Отображения. 15. Общее понятие отображения и школьная математика. 16. Некоторые виды отображений. 17. Обратное отображение. 18. Композиция отображений. 19. Классификация.

Беседа 5. Упорядоченные множества. 20. Понятие упорядоченного множества. 21. Минимальные элементы и математическая индукция. 22. Трансфинитные числа и аксиома выбора.

Глава II. Комбинаторика.

Беседа 6. Размещения, сочетания и родственные задачи. 23. Размещения с повторениями. 24. Системы счисления. 25. Размещения без повторений. 26. Сочетания без повторений. 27. Сочетания с повторениями. 28. Бином Ньютона. 29. Производящие функции. 30. Принцип Дирихле.

Беседа 7. События и вероятности. 31. События. 32. Классическое понятие вероятности. 33. Свойства вероятности. 34. Условная вероятность. 35. Независимые события и серии испытаний.

Беседа 8. Случайные величины. 36. Математическое ожидание и дисперсия. 37. Нормальное распределение. 38. Закон больших чисел.

Беседа 9. Информация. 39. Чет — нечет. 40. Количество двоичных цифр. 41. Задачи на взвешивание. 42. Понятие об энтропии.

Беседа 10. Комбинаторные задачи о графах. 43. Графы и их элементы. 44. Цепи и циклы в графах. 45. Плоские графы. 46. Формула Декарта — Эйлера. 47. Правильные многогранники и паркеты. 48. Проблема четырех красок. 49. Ориентированные графы. 50. Конечные позиционные игры. 51. Понятие о сетевом планировании.

Глава III. Рассуждения.

Беседа 11. Теоремы. 52. Существование и общность. 53. Структура теоремы. 54. Отрицание. 55. Необходимое и достаточное условие. 56. Конъюнкция и дизъюнкция.

Беседа 12. Понятие об аксиоматическом методе. 57. Возникновение аксиоматического метода в математике. 58. Метрические пространства. 59. Коммутативные группы.

Беседа 13. Непротиворечивость, независимость, полнота. 60. Непротиворечивость и понятие модели. 61. Математические примеры моделей. 62. Построение аксиоматики геометрии. 63. Геометрия Лобачевского. 64. Модель геометрии Лобачевского. 65. Изоморфизм моделей. 66. Полнота аксиоматики.

Глава IV. Поиск решений.

Беседа 14. Инсайт. 67. Цикл озарения. 68. Сфера достижимости. 69. Анализ и синтез. 70. Обратимый анализ. 71. Анализ — поиск решения. 72. Поиск решений нестандартных задач. 73. Соединение анализа с синтезом.

Беседа 15. Наглядность. Аналогия. Интуиция. 74. Формула наглядности — изоморфизм плюс простота. 75. Наглядность и математическая эстетика. 76. Аналогия — общность аксиоматики. 77. Прогнозирование. 78. Несколько слов о математической интуиции.

Решения задач и упражнений.

Предметный указатель.

Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А. Комбинаторика.— М.: ФИМА, МЦНМО, 2006.— 400 с.: ил.— ISBN 978-5-89492-014-6 («ФИМА»).— ISBN 978-5-94057-230-6 (МЦНМО).

Комментарий.

Комбинаторика — важный раздел математики, знание которого необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, специалистам по кодам, инженерам и многим другим научно-техническим работникам. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей и ее приложений.

Книга может быть использована как дополнительная литература по разделам комбинаторики и теории вероятностей, изучаемым в школьном курсе математики, а также как источник упражнений по информатике: многие вычислительные задачи, приведенные в книге, удобнее всего решать на компьютере в программах электронных таблиц.

Аннотация.

В книге в популярной форме рассказывается о комбинаторике, методах решения комбинаторных задач, о рекуррентных соотношениях и производящих функциях. Материал частично захватывает области, выходящие за рамки элементарной математики, однако изложение доступно хорошему ученику средней школы. Книга содержит более 400 упражнений.

Книга будет полезна школьникам старших классов, интересующимся математикой, учителям, студентам первых курсов математических факультетов университетов и пединститутов, а также всем, сталкивающимся в своей практической работе с комбинаторными задачами.

Оглавление.

Предисловие.

Глава I. Общие правила комбинаторики. 1. Суеверный председатель. 2. Лото. 3. Команда космического корабля. 4. Правила суммы и произведения. 5. Размещения с повторениями. 6. Секретный замóк. 7. Системы счисления и передача информации. 8. Вокруг ЭВМ. 9. Морской семафор. 10. Точки—тире телеграфные. 11. Задачи о шашках. 12. Сколько человек не знают иностранных языков? 13. Формула включений и исключений. 14. Анализ отчета. 15. Решето Эратосфена. 16. Проблемы комбинаторики. 17. Иножества и кортежи.

Глава II. Размещения, перестановки и сочетания. 18. Первенство по футболу. 19. Размещения без повторений. 20. Перестановки. 21. Лингвистические проблемы. 22. Перестановки с повторениями. 23. Сочетания без повторений. 24. Бином Ньютона. 25. Покупка пирожных. 26. Сочетания с повторениями. 27. Генуэзская лотерея. 28. «Спортлото». 29. Снова футбольное первенство. 30. Перестановки с ограничениями. 31. Постройка лестницы. 32. Рыцари короля Артура. 33. Свойства сочетаний. 34. Частный случай формулы включений и исключений. 35. Знакопеременные суммы сочетаний.

Глава III. Раскладки. 36. Шары и лузы. 37. Сбор яблок. 38. Букет цветов и сбор грибов. 39. Задача о числе делителей. 40. Домино и преферанс. 41. Раскладка по ящикам. 42. Сушка грибов. 43. Разные статистики. 44. Распределение нагрузки. 45. Посылка фотографий. 46. Числа Стирлинга. 47. Комбинаторика классификаций. 48. Флаги на мачтах. 49. Полное число сигналов. 50. Общая задача о ладьях. 51. Симметричные расстановки. 52. Восемь ферзей. 53. Вся королевская конница… 54. Два коня.

Глава IV. Разбиения. 55. Задача о наклейке марок. 56. Разбиение чисел на слагаемые. 57. Жетоны в мешке. 58. m-арифметический треугольник. 59. Счастливые троллейбусные билеты. 60. Некоторые свойства чисел $C_m(n, N)$. 61. Проблема абитуриента. 62. Уплата денег. 63. Покупка конфет. 64. Как разменять гривенник? 65. Диаграммная техника. 66. Двойственные диаграммы. 67. Формула Эйлера.

Глава V. Смещения, субфакториалы и запретные зоны. 68. Девушка спешит на свидание. 69. Сеанс телепатии. 70. Общая задача о смещении. 71. Субфакториалы. 72. Запретные зоны и ладейные числа. 73. Общая формула. 74. За обеденным столом. 75. Диаграммы Юнга. 76. Караван в пустыне. 77. Катание на карусели. 78. Затруднение мажордома.

Глава VI. Блуждания, фигурные числа и обобщения биномиальных коэффициентов. 79. Человек бродит по городу. 80. Броуновское движение. 81. Блуждания и свойства сочетаний. 82. Очередь в кассу. 83. Задача о двух шеренгах. 84. Очереди и свойства сочетаний. 85. У Шемаханской царицы. 86. Поглощающая стенка и игры на разорение. 87. Блуждания по бесконечной плоскости. 88. Арифметический квадрат. 89. Фигурные числа. 90. Расширенный арифметический треугольник. 91. Шашка в углу. 92. Арифметический пятиугольник.

Глава VII. Рекуррентные соотношения. 93. Снова перестановки без повторений. 94. Кролики Фибоначчи. 95. Разбиение фигур. 96. Расстановка скобок. 97. Задача о непересекающихся хордах. 98. Новое решение задачи мажордома. 99. Рекуррентные таблицы. 100. Третье решение проблемы мажордома. 101. Решение рекуррентных соотношений. 102. Случай постоянных коэффициентов. 103. Случай равных корней характеристического уравнения. 104. Рекуррентные соотношения и передача информации.

Глава VIII. Ряды и производящая функция. 105. Деление многочленов. 106. Алгебраические дроби и степенные ряды. 107. Действия над степенными рядами. 108. Применение степенных рядов для доказательства тождеств. 109. Производящие функции. 110. Производящие функции и биномиальные коэффициенты. 111. Дробные предметы. 112. Ряд Ньютона. 113. Извлечение квадратных корней. 114. Производящие функции и рекуррентные соотношения. 115. Разложение на элементарные дроби. 116. Производящие функции и задача о разбиениях. 117. Полиномиальная формула. 118. Производящие функции и разбиения чисел. 119. Производящие функции и наборы гирь.

Глава IX. Комбинаторика орбит. 120. Преобразования и орбиты. 121. Хоровод. 122. Раскраска куба. 123. Черно-белый квадрат. 124. Орбиты и группы преобразований. 125. Неподвижные элементы. 126. Черно-белый куб. 127. Сопряжение и циклы.

Глава X. Возможное и невозможное в комбинаторике. 128. Магические квадраты. 129. Офицерское каре. 130. Посев пшеницы. 131. Принцип Дирихле. 132. Научная переписка. 133. Выбор представителей. 134. Графическое решение. 135. Прерывания IRQ. 136. Общие представители. 137. Игра в 15. 138. Острова и мосты. 139. Кругосветное путешествие. 140. Четыре краски. 141. Код Хемминга.

Глава XI. Из истории комбинаторики и ее приложений. 142. Дела давно минувших дней… 143. Таинственная черепаха. 144. Комбинаторика в Древней Греции. 145. Мистики, астрологи, каббалисты. 146. Комбинаторика и схоластики. 147. Комбинаторика в странах Востока. 148. Liber Abaci. 149. Игра в кости. 150. Игрок и ученые. 151. Новая ветвь математики. 152. Комбинаторика и шифры. 153. Анаграммы. 154. Иероглифы и клинопись. 155. Комбинаторика в биологии. 156. Модель ДНК. 157. Генетический код. 158. Химический пасьянс. 159. Комбинаторика эпохи компьютеров.

Ответы.

Гарднер М. Этот правый, левый мир: 2-е изд., испр. и дополн. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2007.— 272 с.: ил. ISBN 978-5-484-00922-0. (1-е изд.— 1967.)

Аннотация.

Симметрия и асимметрия в математике, искусстве, философии, астрономии, зоологии, анатомии, химии, ядерной физике --- предмет волнующих открытий для всех любознательных. Почему у нарвала бивень имеет левую «резьбу»? Будут ли марсианские асимметричные вирусы пагубны для космонавтов, а земные — для марсиан? Что такое «бустрафедон» и какое отношение эта вещь имеет к двум великим научным открытиям XX века — ниспровержению физиками закона сохранения четности и открытию биологами винтообразного строения молекулы, которая несет генетический код? Об этом и еще очень многом из правого, левого мира вы сможете прочитать в этой увлекательной книге.

Книга предназначена для широкого круга читателей.

Оглавление.

От автора.

Глава 1. Зеркала. Глава 2. Лайнландия и Флатландия. Глава 3. Трехмерный мир. Глава 4. Фокусы. Глава 5. Живопись, музыка и поэзия. Глава 6. Галактика, звезды и планеты. Глава 7. Растения и животные. Глава 8. Асимметрия у животных. Глава 9. Человеческое тело. Глава 10. Злополучное меньшинство. Глава 11. Кристаллы. Глава 12. Молекулы. Глава 13. Углерод. Глава 14. Живые молекулы. Глава 15. Происхождение жизни. Глава 16. Происхождение асимметрии. Глава 17. Четвертое измерение. Глава 18. Проблема «Озма». Глава 19. Чему удивлялся Мах. Глава 20. Четность. Глава 21. Античастицы. Глава 22. Ниспровержение четности. Глава 23. Нейтрино. Глава 24. Мистер Сплит. Глава 24. Решена ли «Проблема Озма»?

О новой истории «Проблемы Озма». *Я. А. Смородинский.*

Ответы на упражнения.

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения: 2-е изд., испр. и дополн. / Пер. с англ.— М.: Мир, 1999.— 447 с.: ил. ISBN 5-03-003340-8. (1-е изд.— 1971.)

Аннотация.

Книга известного американского популяризатора науки М. Гарднера содержит множество занимательных задач и головоломок из самых различных областей математики. Благодаря удачному подбору материала, необычной форме его подачи и тонкому юмору автора она не только доставит удовольствие любителям математики, желающим с пользой провести свой досуг, но и может быть полезной преподавателям математики школ и колледжей в их работе.

Оглавление.

От переводчика.

Введение.

Глава 1. Гексафлексагоны. Глава 2. Фокусы с матрицами. Глава 3. Девять задач. Глава 4. Крестики и нолики, или тик-так-тоу. Глава 5. Парадоксы теории вероятностей. Глава 6. «Икосаэдрическая игра» и «Ханойская башня». Глава 7. Занимательные топологические модели. Глава 8. Игра в гекс. Глава 9. Американский изобретатель головоломок Сэм Лойд. Глава 10. Математические фокусы с картами. Глава 11. Девять новых задач. Глава 12. Полимино. Глава 13. Математические софизмы. Глава 14. Ним и так-тикс. Глава 15. Правое или левое? Глава 16. Пять платоновых тел. Глава 17. Тетрафлексагоны. Глава 18. Английский изобретатель головоломок Генри Э. Дьюдени. Глава 19. Цифровые корни. Глава 20. Девять задач. Глава 21. Кубики сома. Глава 22. Занимательная топология. Глава 23. Число φ — золотое сечение. Глава 24. Мартышка и кокосовые орехи. Глава 25. Лабиринты. Глава 26. Занимательная логика. Глава 27. Магические квадраты. Глава 28. Фирма «Джеймс Хью Райли, аттракционы и головоломки». Глава 29. Еще девять задач. Глава 30. Индуктивная игра элузис. Глава 31. Оригами. Глава 32. Квадрирование квадрата. Глава 33. Механические головоломки. Глава 34. Вероятность и неоднозначность. Глава 35. Двоичная система. Глава 36. Теория групп и косы. Глава 37. Восемь задач. Глава 38. Вырезание из бумаги. Глава 39. Игры на шахматной доске. Глава 40. Упаковка шаров. Глава 41. Трансцендентное число «пи». Глава 42. Виктор Айген, матемаг и волшебник. Глава 43. Проблема четырех красок. Глава 44. Мистер Аполлинакс в Нью-Йорке. Глава 45. Девять задач. Глава 46. Полимино и «прочные» прямоугольники.

Литература по занимательной математике.

Рекомендательная литература.

Гарднер М. Математические досуги: 2-е изд., испр. и доп. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2000.— 444 с.: ил. ISBN 5-03-003339-4. (1-е изд.— 1972.)

Аннотация.

Книга известного американского специалиста в области занимательной математики М. Гарднера в живой и увлекательной форме рассказывает читателю много удивительного из самых разных разделов математики. Любители головоломок смогут испробовать свои силы в решении парадоксов и задач, а те, кто увлекается показом фокусов,— пополнить свой репертуар.

Книга доступна самому широкому кругу читателей и доставит много радости всем любителям математических развлечений, а также может быть полезна преподавателям математики в их работе в школе и колледжах.

Оглавление.

От переводчика.

Глава 1. Ошибка Эйлера: открытие греко-латинских квадратов десятого порядка. Глава 2. Эллипс. Глава 3. 24 разноцветных квадрата и 30 разноцветных кубиков. Глава 4. Гаролд С. М. Коксетер. Глава 5. Бридж-ит и другие игры. Глава 6. Девять задач. Глава 7. Исчисление конечных разностей. Глава 8. Казнь врасплох и связанный с ней логический парадокс. Глава

9. Узлы и кольца Борромео. Глава 10. Трансцендентное число *e*. Глава 11. Геометрические задачи на разрезание фигур. Глава 12. Церковь четвертого измерения. Глава 13. Еще восемь задач. Глава 14. Самодельная самообучающаяся машина из спичечных коробков. Глава 15. Спирали. Глава 16. Игра в солитер. Глава 17. Флатландия. Глава 18. Съезд фокусников в Чикаго. Глава 19. Признаки делимости. Глава 20. Еще девять задач. Глава 21. Восемь ферзей и другие занимательные задачи на шахматной доске. Глава 22. Игра в веревочку. Глава 23. Кривые постоянной ширины. Глава 24. «Делящиеся» фигуры на плоскости. Глава 25. Двадцать шесть каверзных вопросов. Глава 26. От штопора до ДНК. Глава 27. Топологические развлечения. Глава 28. Парадоксы комбинаторики. Глава 29. Задачу решает… бильярдный шар. Глава 30. Математические игры на специальных досках. Глава 31. Еще восемь задач. Глава 32. Проверка на четность. Глава 33. Игра в 15 и другие головоломки. Глава 34. Простые числа. Глава 35. Плоские графы. Глава 36. Недесятичные системы счисления. Глава 37. Семь коротких задач. Глава 38. Игра «Жизнь».

Дополнительная литература.

Литература по занимательной математике.

Гарднер М. Математические новеллы: 2-е изд., испр. и доп. / Пер. с англ.— М.: Мир, 2000.— 416 с.: ил. ISBN 5-03-003339-4. (1-е изд.— 1974.)

Аннотация.

Как и предыдущие книги известного американского специалиста в области занимательной математики М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» и «Математические досуги», настоящая книга живо и увлекательно рассказывает читателю много удивительного из различных разделов математики. Благодаря удачному подбору материала, необычной форме его подачи и тонкому юмору автора она не только доставит удовольствие любителям математики, желающим с пользой провести досуг, но и может быть полезным преподавателям математических школ и колледжей в их работе.

Оглавление.

Предисловие.

Глава 1. Трудности и парадоксы, связанные с бесконечными рядами и понятием предела. Глава 2. Полиамонды. Глава 3. Тетраэдры в природе и архитектуре. Глава 4. Семь коротких задач. Глава 5. Решетка целых чисел. Глава 6. Математические головоломки и развлечения мистера О'Тара, почтальона. Глава 7. Пентамино и полимино: пять игр и серия задач. Глава 8. Восемь элементарных задач. Глава 9. Занимательная нумизматика. Глава 10. Иерархия бесконечностей. Глава 11. Математическое искусство Морица Эшера. Глава 12. Незадачи с задачами. Глава 13. О трисекции угла и тех, кто упорно (но тщетно) пытается решить эту древнюю задачу. Глава 14. Занимательная физика. Глава 15. Стеганое одеяло миссис Перкинс. Глава 16. Можно ли наглядно представить себе четырехмерную фигуру? Глава 17. Неисчерпаемое очарование треугольника Паскаля. Глава 18. Оптимальные стратегии для игр с двумя участниками. Глава 19. Семь элементарных задач. Глава 20. Секреты эстрадных вычислений. Глава 21. Извлечение кубического корня и угадывание дней недели по названным датам. Глава 22. Полигекс и полиаболо. Глава 23. Топологические игры «Рассада» и «Брюссельская капуста». Глава 24. Ходом коня. Глава 25. Девять задач. Глава 26. Теория игр в играх. Глава 27. «Деревья» и связанные с ними комбинаторные задачи. Глава 28. Краткий трактат о бесполезной красоте совершенных чисел. Глава 29. 23 простые, но каверзные задачи. Глава 30. Счет на пальцах. Глава 31. Булева алгебра, диаграммы Венна и исчисление высказываний. Глава 32. Числа Фибоначчи. Глава 33. Игры «Гонки», «Сим» и «Щелк!». Глава 34. Двенадцать задач. Глава 35. Геометрические построения с помощью циркуля и линейки и с помощью одного лишь циркуля. Глава 36. Игра в домино и связанные с ней комбинаторные задачи.

Гарднер М. От мозаик Пенроуза к надежным шифрам / Пер. с англ.— М.: Мир, 1993.— 416 с., ил. ISBN 5-03-001991-X (русск.). ISBN 0-7167-1987-8 (англ.).

Аннотация.

Новая книга выдающегося американского популяризатора науки Мартина Гарднера продолжает серию его известных книг. В ней среди затронутых тем читатель найдет непериодические мозаики Пенроуза, фракталы Мандельброта, сюрреальные числа Конуэя, познакомится с комбинаторными головоломками, сможет освоить новую игру – ним Витхоффа.

Для всех любителей математики.

Оглавление.

От переводчика.

Предисловие.

Глава 1. Мозаики Пенроуза. Глава 2. Мозаики Пенроуза II. Глава 3. Фракталы Мандельброта. Дополнение. **Глава 4. Сюрреальные числа Конуэя.** Ответы и решения. Дополнение. **Глава 5. Возвращение из Клондайка и другие задачи.** Ответы и решения. Дополнение. **Глава 6. Улипо.** Ответы и решения. **Глава 7. Улипо II. Глава 8. Ним Витхоффа.** Ответы и решения. Дополнение. **Глава 9. Треугольники из бильярдных шаров и другие задачи.** 1. Треугольники из бильярдных шаров. 2. Каннибализм среди торов, или торы-тороеды. 3. Исследуя тетрады. 4. Рыцари и жены. 5. Маршруты исчезнувшего короля. 6. Эллипсы Штейнера. 7. Различные расстояния. 8. Парадокс в лимериках. Ответы и решения. Дополнение. **Глава 10. Математическая индукция и цветные шляпы.** Ответы и решения. Дополнение. **Глава 11. Отрицательные числа.** Дополнение. **Глава 12. Разрезание фигур на N конгруэнтных частей.** Ответы и решения. Дополнение. **Глава 13. Надежные шифры.** Ответы и решения. **Глава 14. Надежные шифры II. Глава 15. Гиперболы.** Ответы и решения. Дополнение. **Глава 16. Новый Элевсин.** Ответы и решения. Дополнение. **Глава 17. Теория Рамсея.** Ответы и решения. Дополнение. **Глава 18. От колючек до Беррокаля.** Дополнение. **Глава 19. Игральные кости Зихермана, принцип Крускала и другие курьезы.** Ответы и решения. Дополнение. **Глава 20. Логические задачи Рэймонда Смаллиана.** Ответы и решения. Дополнение. **Глава 21. Возвращение доктора Матрикса.** Ответы и решения. Дополнение.

Литература.

Именной указатель.

Предметный указатель.

Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия.— СПб.: Питер, 2002.— 208 с.: ил. ISBN 5-318-00537-3.

Комментарий.

Книга представляет собой одно из лучших и исторически одно из первых популярных произведений по математике, написанных крупными математиками. В книге содержится, действительно, очень наглядный, но достаточно строгий рассказ о геометрических науках и теориях, в частности о геометрической кристаллографии, о геометрической сущности кинематики и о топологии. Книга вполне доступна школьникам старших классов, интересующимся математикой. В то же время она во многих главах хорошо дополняет, не дублируя, курс вузовской математики. Эту книгу с удовольствием прочтет и зрелый математик, случайно не познакомившийся с нею в процессе своего математического образования.

Предисловие.

В математике, как и вообще в научных исследованиях, встречаются две тенденции: тенденция к абстракции — она пытается выработать логическую точку зрения на основе различного материала и привести весь этот материал в систематическую связь — и другая тенденция, тенденция к наглядности, которая в противоположность этому стремится к живому пониманию объектов и их внутренних отношений.

Что касается геометрии, то в ней тенденция к абстракции привела к грандиозным систематическим построениям алгебраической геометрии, римановой геометрии и топологии, в которых находят широкое применение методы абстрактных рассуждений, символики и анализа. Тем не менее и ныне наглядное понимание играет первенствующую роль в геометрии, и притом не только как обладающее большой доказательной силой при исследовании, но и для понимания и оценки результатов исследования.

Здесь мы будем рассматривать геометрию в ее современном состоянии с наглядной стороны. Руководствуясь непосредственным созерцанием, мы сможем уяснить многие геометрические факты и постановку вопросов и благодаря этому во многих случаях мы сможем также изложить в наглядной форме методы исследований и доказательств, которые приводят к пониманию теорем без введения в рассмотрение деталей абстрактных теорий и выкладок. Например, доказательство того, что сфера со сколь угодно малой дырой все еще разгибаема, или что два различных тора не всегда могут быть конформно отображены друг на друга, можно представить в такой форме, которая дает представление о ходе доказательства, не заставляя следовать за деталями аналитического изложения.

Благодаря разносторонности геометрии и ее отношениям к различным ветвям математики мы получим, таким образом, обзор математики вообще и представление об изобилии ее проблем и о богатстве содержащихся в ней идей. Так, с помощью наглядного рассмотрения выявятся результаты важнейших направлений геометрии, содействующие справедливой оценке математики в широкой публике. Ибо вообще математика не пользуется популярностью, хотя ее значение и признается. Причина этого лежит в распространенном представлении о математике как о продолжении и более высокой ступени счетного мастерства. Этому представлению должна противостоять наша книга, в которой вместо формул приведено много наглядных фигур, которые читатель легко дополнит моделями.

Книга должна послужить увеличению числа друзей математики, облегчая читателю проникновение в математику без необходимости изучения ее, сопряженного с известными трудностями.

Оглавление.

Вступительное слово П. С. Александрова.

Предисловие.

Глава I. Простейшие кривые и поверхности. § 1. Плоские кривые. § 2. Цилиндр и конус; конические сечения и поверхности вращения, образуемые ими. § 3. Поверхности второго порядка. § 4. Построение эллипсоида и софокусных поверхностей второго порядка при помощи нити.

Добавления к главе I. § 1. Построение конического сечения при помощи подэры. § 2. Директрисы конических сечений. § 3. Подвижная стержневая модель гиперболоида.

Глава II. Правильные точечные системы. § 5. Плоские точечные решетки. § 6. Плоские точечные решетки в теории чисел. § 7. Точечные решетки в трех и более измерениях. § 8. Кристаллы как правильные точечные системы. § 9. Правильные точечные системы и дискретные группы движений. § 10. Плоские движения и их сложение. Классификация дискретных групп плоских движений. § 11. Дискретные группы плоских движений с бесконечной фундаментальной областью. § 12. Федоровские группы движений на плоскости. Правильные системы точек и стрелок. Построение плоскости из конгруэнтных областей. § 13. Кристаллографические классы и группы пространственных движений. Группы и точечные системы с зеркальной симметрией. § 14. Правильные многогранники.

Глава III. Конфигурации. § 15. Предварительные замечания о плоских конфигурациях. § 16. Конфигурации (7_3) и (8_3). § 17. Конфигурации (9_3). § 18. Перспектива, бесконечно удаленные элементы и принцип двойственности на плоскости. § 19. Бесконечно удаленные элементы и принцип двойственности в пространстве. Теорема Дезарга и конфигурация Дезарга (10_3). § 20. Сопоставление теорем Паскаля и Дезарга. § 21. Предварительные замечания о пространственных конфигурациях. § 22. Конфигурация Рейе. § 23. Правильные тела и ячейки и их проекции. § 24. Исчислительные методы геометрии. § 25. Двойной шестисторонник Шлефли.

Глава IV. Дифференциальная геометрия. § 26. Плоские кривые. § 27. Пространственные кривые. § 28. Кривизна поверхности. Случаи эллиптический, гиперболический и параболический. Линии кривизны и асимптотические линии; точки округления, минимальные поверхности; «обезьянье седло». § 29. Сферическое изображение и гауссова кривизна. § 30. Развертывающиеся поверхности. Линейчатые поверхности. § 31. Кручение пространственных кривых. § 32. Одиннадцать свойств шара. § 33. Изгибание поверхностей на себя. § 34. Эллиптическая геометрия. § 35. Геометрия Лобачевского (гиперболическая геометрия). Ее взаимоотношения с евклидовой и эллиптической геометрией. § 36. Стереографическая проекция и преобразования, сохраняющие окружности. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. § 37. Методы отображений. Отображения, сохраняющие длину, сохраняющие площади, геодезические, непрерывные и конформные. § 38. Геометрическая теория функций. Теорема Римана об отображениях. Конформное отображение в пространстве. § 39. Конформное отображение кривых поверхностей. Минимальные поверхности. Задача Плато.

Глава V. Кинематика. § 40. Шарнирные механизмы. § 41. Движение плоских фигур. § 42. Прибор для построения эллипсов и их рулетт. § 43. Движения в пространстве.

Глава VI. Топология. § 44. Многогранники. § 45. Поверхности. § 46. Односторонние поверхности. § 47. Проективная плоскость как замкнутая поверхность. § 48. Нормальные формы поверхностей конечной связности. § 49. Топологическое отображение поверхности на себя. Неподвижные точки. Классы отображений. Универсальная накрывающая тора. § 50. Конформное отображение тора. §51. Задачи о соседних областях, задача о нити и задача о красках.

Добавления к главе VI. § 1. Проективная плоскость в четырехмерном пространстве. § 2. Евклидова плоскость в четырехмерном пространстве.

Предметный указатель.

Карпов Ю. Г. Теория автоматов.— СПб.: Питер, 2002.— 208 с.: ил. ISBN 5-318-00537-3.

Аннотация.

Эта книга служит формированию знаний и умений, которые образуют теоретический фундамент, необходимый для корректной постановки и решения проблем в области информатики, для осознания целей и ограничений при создании вычислительных структур, алгоритмов и программ обработки информации.

В этом учебнике практическое использование моделей не является частной иллюстрацией теоретических результатов — наоборот, автор постарался практические проблемы проектирования и анализа систем сделать отправной точкой, а формальный аппарат — средством систематического решения этих проблем. В каждом разделе книги важное внимание уделено вопросам абстрагирования и адекватной интерпретации и реализации результатов аналитических преобразований.

Усвоение рассмотренных в книге моделей теоретической информатики, способов их анализа и синтеза должно обеспечить основу, позволяющую читателю воспринимать и усваивать многие другие общетехнические и специальные дисциплины по информационным технологиям, вычислительным средствам и системам, инструментарию и методам проектирования программных систем, входящим в программу высшей школы.

Книга допущена в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов «Информатика и вычислительная техника».

Оглавление.

Введение.

Глава 1. Конечные функциональные преобразователи. Постановка проблемы. Булевы функции. Функциональная полнота. Формы представления булевых функций. Булевы алгебры. Пороговая логика. Контрольные задания.

Глава 2. Введение в математическую логику. Формальные модели. Логика высказываний. Логическое следствие. Основы логики предикатов и логического вывода. Логическое программирование. Контрольные задания.

Глава 3. Конечные автоматы. Автоматное преобразование информации. Примеры КА. Визуальный формализм представления моделей реактивных систем: Statecharts. Графы переходов при спецификации и анализе параллельных программ. Проблема умножения: алгоритм, который не может выполнить КА. Алгебраическая структурная теория конечных автоматов. Контрольные задания.

Глава 4. Автоматные языки. Языки. Грамматики. Автоматные грамматики и языки. Лемма о накачке. Эквивалентность и минимизация конечноавтоматных распознавателей. Недетерминированные конечно-автоматные распознаватели. Синтаксические диаграммы. Связь синтаксических диаграмм и автоматных языков. Трансляторы автоматных языков. Регулярные множества и регулярные выражения. Контрольные задания.

Глава 5. Машины Тьюринга. Формальные модели алгоритмов. Машина Тьюринга. Алгоритмически неразрешимые проблемы. Контрольные задания.

Литература.

Кордемский Б. А. Математика изучает случайности. Пособие для учащихся.— М.: Просвещение, 1975.— 224 с., ил.

Из предисловия.

В школьных программах пока нет элементов теории вероятностей. Не очень обширен и выбор доступных школьникам книг «для чтения» по этому предмету.

Между тем многим из нас — будь то практическая или познавательная деятельность — приходится соприкасаться с многочисленными и многосторонними проявлениями стихии случайностей, постигать закономерности случайных явлений и событий.

В наше время чрезвычайно расширился спектр наук — от естественных до социальных, применяющих вероятностные и статистические рассуждения, выводы: физика, химия, биология, экономика, кибернетика, лингвистика и многие другие. Возникло много новых научных направлений, разрабатывающих приложения вероятностных методов к практике.

Цель, которую поставил перед собой автор предлагаемой книги, и состоит в том, чтобы помочь читателю самостоятельно овладеть первоначальными понятиями и методами теории вероятностей и простейшим аппаратом математической статистики.

Это — книга для познавательного чтения с карандашом в руке и рабочей тетрадью на столе.

Оглавление.

Предисловие.

Игра случая (введение).

1. Произойдет ли событие? Мера нашей уверенности. Случайное блуждание. Частица в лабиринте клеток. «На кончике пера». Быть или не быть частице в круге? Формула действий. Считаем вероятности. Определите свою позицию. Не надеясь на «авось». Мнимая загадочность в поведении трех игральных кубиков. Что означает знак восклицания? Множество событий, называемое пространством. Три основных постулата. Контуры «решающего устройства». Конфликтные ситуации. За кулисами своенравного случая. Монета — генератор случайных чисел. Треугольник Паскаля. Дерево с числами на ветвях. Три лица у одной формулы. По разработанной технологии.

2. Привлекая алгебру событий. Слуга двух господ. Либо дождик, либо снег. И… И… ИЛИ… ИЛИ…— в серии примеров. Экзамен нашей интуиции. Бывает и мечта вероятность меняет. Декларация независимости. Рассмотрим дела житейские. Объединение (сумма) совместных событий. Событие появляется m раз, не менее m раз. Великая теорема Ферма как задача теории вероятностей. Наилучшая стратегия игры. Наиболее вероятное число успехов. Бином Ньютона из формулы Бернулли. Немного о числе e и «законе редких явлений».

3. Полезные средние. Числовая функция на множестве элементарных событий. Распределяем вероятности: которому — сколько? Отыскание «Центра» в хаосе разброса или «Среднее», называющее себя «математическим ожиданием». Пять задач. Свойства математического ожидания. Уравнение для математического ожидания. Снова средняя квадратов. Малые вероятности с серьезными последствиями. «Нормальный» нрав случайности.

4. Расчетливое доверие. О чем рассказывают результаты измерения? Устойчивость среднего арифметического. Если не знаем с несомненностью, то знаем с вероятностью. При $n \geqslant 20$. При $n < 20$.

5. Заключительные задачи-этюды для самостоятельного решения.

6. Дополнения. Метод математической индукции и формулы комбинаторики. Предел последовательности с общим членом $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Некоторые свойства математического ожидания и дисперсии. Почему предпочтительно среднее арифметическое? Теорема Чебышёва — закон больших чисел. Из теоремы Чебышёва — теорема Бернулли.

Послесловие.

Косовский Н. К., Тишков А. В. Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств: Учеб. пособие.— СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000.— 269 с.— ISBN 5-288-02049-3.

Аннотация.

Книга предназначена для математиков, интересующихся неклассическим логическим моделированием, включающим, в частности, существенные черты нечетких и противоречивых знаний.

Пособие состоит из двух разделов и приложений.

Оглавление.

Предисловие.

Раздел I. Двузначная логика, ее начальные свойства и применение.

Глава 1. Пропозициональные формулы для моделирования простейших утверждений. Глава 2. Секвенциальное исчисление предикатов. Глава 3. Математические теории на основе исчисления предикатов. Глава 4. Простейшие свойства исчисления высказываний и исчисления предикатов. Глава 5. Параметрические универсальные формулы теории предиката конкатенации. Краткие комментарии.

Раздел II. Логики конечнозначных предикатов.

Глава 6. Бескванторные (универсальные) теории линейных неравенств. Глава 7. Плюралистическая логика и смешанные логики Поста и Лукасевича. Глава 8. Некоторые свойства введенных логик. Краткие комментарии.

Предметный указатель. Указатель литературы.

Приложение 1. Доказательство равномерной непрерывности функций на гиперрациональных числах в аксиоматике арифметики.

Приложение 2. Полиномиальные алгоритмы решения уравнений в словах без неизвестных в правой части уравнения.

Приложение 3. О совместности систем двучленных линейных неравенств.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов / Пер. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова.— Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.— 592 с., ил. ISBN 5-93972-029-3.

Аннотация.

Книга написана крупным математиком Рихардом Курантом в соавторстве с Г. Роббинсом. Она призвана сократить разрыв между математикой, которая преподается в школе, и наиболее живыми и важными для естествознания и техники разделами современной математической науки. Начиная с элементарных понятий, читатель движется к важным областям современной науки. Книга написана очень доступно языком и является классикой популярного жанра в математике.

Книга предназначена для школьников, студентов, преподавателей, а также для всех интересующихся развитием математики и ее структурой.

Оглавление.

Предисловие ко второму русскому изданию.

Предисловие к первому изданию.

Предисловие ко второму, третьему и четвертому изданиям.

Как пользоваться книгой.

Что такое математика?

ГЛАВА I. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

Введение.

§ 1. Операции над целыми числами. 1. Законы арифметики. 2. Представление целых чисел с помощью письменных знаков (нумерация). 3. Арифметические действия в недесятичных системах счисления.

§ 2. Бесконечность системы натуральных чисел. Математическая индукция. 1. Принцип математической индукции. 2. Арифметическая прогрессия. 3. Геометрическая прогрессия. 4. Сумма n первых квадратов. *5. Одно важное неравенство. *6. Биномиальная теорема. 7. Дальнейшие замечания по поводу метода математической индукции.

Дополнение к главе I. Теория чисел. Введение. § 1. Простые числа. *1. Основные факты. 2. Распределение простых чисел.* § 2. Сравнения. *1. Общие понятия. 2. Теорема Ферма. 3. Квадратические вычеты.* § 3. Пифагоровы числа и большая теорема Ферма. § 4. Алгоритм Евклида. *1. Общая теория. 2. Применение к основной теореме арифметики. 3. Функция Эйлера $\varphi(n)$. Еще раз о теореме Ферма. 4. Непрерывные дроби. Диофантовы уравнения.*

ГЛАВА II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧИСЛОВАЯ СИСТЕМА.

Введение.

§ 1. Рациональные числа. 1. Рациональные числа как средство измерения. 2. Возникновение надобности в рациональных числах внутри смой математики. Принцип обобщения. 3. Геометрическое представление рациональных чисел.

§ 2. Несоизмеримые отрезки. Иррациональные числа, пределы. 1. Введение. 2. Десятичные дроби: конечные и бесконечные. 3. Пределы. Бесконечные геометрические прогрессии. 4. Рациональные числа и периодические десятичные дроби. 5. Общее определение иррациональных чисел посредством стягивающихся отрезков. *6. Иные методы определения иррациональных чисел. Дедекиндовы сечения.

§ 3. Замечания из области аналитической геометрии. 1. Основной принцип. 2. Уравнения прямых и кривых линий.

§ 4. Математический анализ бесконечного. 1. Основные понятия. 2. Счетность множества рациональных чисел и несчетность континуума. 3. «Кардинальные числа» Кантора. 4. Косвенный метод доказательства. 5. Парадоксы бесконечного. 6. Основания математики.

§ 5. Комплексные числа. 1. Возникновение комплексных чисел. 2. Геометрическое представление комплексных чисел. 3. Формула Муавра и корни из единицы. *4. Основная теорема алгебры.

§ 6. Алгебраические и трансцендентные числа. 1. Определение и вопросы существования. *2. Теорема Лиувилля и конструирование трансцендентных чисел.

Дополнение к главе II. Алгебра множеств. 1. Общая теория. 2. Применение к математической логике. 3. Одно из применений к теории вероятностей.

Глава III. Геометрические построения. Алгебра числовых полей.

Введение.

Часть 1. Доказательства невозможности и алгебра. § 1. Основные геометрические построения. *1. Построение полей и извлечение квадратных корней. 2. Правильные многоугольники. 3. Проблема Аполлония.* § 2. Числа, допускающие построение, и числовые поля. *1. Общая теория. 2. Все числа, допускающие построение,— алгебраические.* § 3. Неразрешимость трех классических проблем. *1. Удвоение куба. 2. Одна теорема о кубических уравнениях. 3. Трисекция угла. 4. Правильный семиугольник. 5. Замечания по поводу квадратуры круга.*

Часть 2. Различные методы выполнения построений. § 4. Геометрические преобразования. Инверсия. *1. Общие замечания. 2. Свойства инверсии. 3. Геометрическое построение обратных точек. 4. Как разделить отрезок пополам и как найти центр данного круга с помощью с помощью одного циркуля.* § 5. Построения с помощью иных инструментов. Построения Маскерони с помощью одного циркуля. *1. Классическая конструкция, служащая для удвоения куба. 2. Построения с помощью одного циркуля. 3. Черчение с помощью различных механических приспособлений. Механические кривые. Циклиды. *4. Шарнирные механизмы. Инверсоры Поселье и Гарта.* § 6. Еще об одной инверсии и ее применениях. *1. Инвариантность углов. Семейства окружностей. 2. Применение к проблеме Аполлония. 3. Повторные отражения.*

Глава IV. Проективная геометрия. Аксиоматика. Неевклидовы геометрии.

§ 1. Введение. 1. Классификация геометрических свойств. Инвариантность при преобразованиях. 2. Проективные преобразования.

§ 2. Основные понятия. 1. Группа проективных преобразований. 2. Теорема Дезарга.

§ 3. Двойное отношение. 1. Определение и доказательство инвариантности. 2. Применение к полному четырехстороннику.

§ 4. Параллельность и бесконечность. 1. «Идеальные» бесконечно удаленные точки. 2. Идеальные элементы и проектирование. 3. Двойное отношение с бесконечно удаленными элементами.

§ 5. Применения. 1. Предварительные замечания. 2. Двумерное доказательство теоремы Дезарга. 3. Теорема Паскаля . 4. Теорема Брианшона. 5. Замечание по поводу двойственности.

§ 6. Аналитическое представление. 1. Вводные замечания. *2. Однородные координаты. Алгебраические основы двойственности.

§ 7. Задачи на построение с помощью одной линейки.

§ 8. Конические сечения и квадрики. 1. Элементарная метрическая геометрия конических сечений. 2. Проективные свойства конических сечений. 3. Конические сечения как «линейчатые кривые». 4. Теоремы Паскаля и Брианшона для общего случая произвольных конических сечений. 5. Гиперболоид.

§ 9. Аксиоматика и неевклидова геометрия. 1. Аксиоматический метод. 2. Гиперболическая неевклидова геометрия. 3. Геометрия и реальность. 4. Модель Пуанкаре. 5. Эллиптическая, или риманова, геометрия.

Приложение. Геометрия в пространствах более чем трех измерений. 1. Введение. 2. Аналитический подход. *3. Геометрический, или комбинаторный, подход.

Глава V. Топология.

Введение.

§ 1. Формула Эйлера для многогранников.

§ 2. Топологические свойства фигур. 1. Топологические свойства. 2. Свойства связности.

§ 3. Другие примеры топологических теорем. 1. Теорема Жордана о замкнутой кривой. 2. Проблема четырех красок. *3. Понятие размерности. 4. Теорема о неподвижной точке. 5. Узлы.

§ 4. Топологическая классификация поверхностей. 1. Род поверхности. *2. Эйлерова характеристика поверхности. 3. Односторонние поверхности.

Приложение. *1. Проблема пяти красок. 2. Теорема Жордана для случая многоугольников. *3. Основная теорема алгебры.

Глава VI. Функции и пределы.

Введение.

§ 1. Независимое переменное и функция. 1. Определения и примеры. 2. Радианная мера углов. 3. График функции. Обратные функции. 4. Сложные функции. 5. Непрерывность. *6. Функции нескольких переменных. *7. Функции и преобразования.

§ 2. Пределы. 1. Предел последовательности a_n. 2. Монотонные последовательности. 3. Число Эйлера e. 4. Число π. *5. Непрерывные дроби.

§ 3. Пределы при непрерывном приближении. 1. Введение. Общие определения. 2. Замечания по поводу понятия предела. 3. Предел $\sin(x)/x$. 4. Пределы при $x \to \infty$.

§ 4. Точное определение непрерывности.

§ 5. Две основные теоремы о непрерывных функциях. 1. Теорема Больцано. *2. Доказательство теоремы Больцано. 3. Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях. *4. Теорема о последовательностях. Компактные множества.

§ 6. Некоторые применения теоремы Больцано. 1. Геометрические применения. *2. Применение к одной механической проблеме.

Дополнение к главе VI. Дальнейшие примеры на пределы и непрерывность. § 1. Примеры пределов. *1. Общие замечания. 2. Предел q^n. 3. Предел $\sqrt[n]{p}$. 4. Разрывные функции как предел непрерывных. *5. Пределы при итерации.* § 2. Пример, относящийся к непрерывности

ГЛАВА VII. МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ.

Введение.

§ 1. Задачи из области элементарной геометрии. 1. Треугольник наибольшей площади при двух заданных сторонах. 2. Теорема Герона. Экстремальное свойство световых лучей. 3. Применения к задачам о треугольниках. 4. Свойства касательных к эллипсу и гиперболе. Соответствующие экстремальные свойства. *5. Экстремальные расстояния точки от данной кривой.

§ 2. Общий принцип, которому подчинены экстремальные задачи. 1. Принцип. 2. Примеры.

§ 3. Стационарные точки и дифференциальное исчисление. 1. Экстремальные и стационарные точки. 2. Максимумы и минимумы функций нескольких переменных. Седловые точки. 3. Точки минимакса и топология. 4. Расстояние точки от поверхности.

§ 4. Треугольник Шварца. 1. Доказательство, предложенное Шварцем. 2. Другое доказательство. 3. Тупоугольные треугольники. 4. Треугольники, образованные световыми лучами. *5. Замечания, касающиеся задач на отражение и эргодическое движение.

§ 5. Проблема Штейнера. 1. Проблема и ее решение. 2. Анализ возникающих возможностей. 3. Дополнительная проблема. 4. Замечания и упражнения. 5. Обобщение: проблема уличной сети.

§ 6. Экстремумы и неравенства. 1. Средние арифметическое и геометрическое двух положительных величин. 2. Обобщение на случай n переменных. 3. Метод наименьших квадратов.

§ 7. Существование экстремума. Принцип Дирихле. 1. Общие замечания. 2. Примеры. 3. Экстремальные проблемы элементарного содержания. 4. Трудности, возникающие в более сложных случаях.

§ 8. Изопериметрическая проблема.

***§ 9. Экстремальные проблемы с граничными условиями. Связь между проблемой Штейнера и изопериметрической проблемой.**

§ 10. Вариационное исчисление. 1. Введение. 2. Вариационное исчисление. Принцип Ферма в оптике. 3. Решение задачи о брахистохроне, принадлежащее Якобу Бернулли. 4. Геодезические линии на сфере. Минимаксы.

§ 11. Экспериментальные решения задач на минимум. Опыты с мыльными пленками. 1. Введение. 2. Опыты с мыльными пленками. 3. Новые опыты, относящиеся к проблеме Плато. 4. Экспериментальные решения других математических проблем.

ГЛАВА VIII. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.

Введение.

§ 1. Интеграл. 1. Площадь как предел. 2. Интеграл. 3. Общие замечания о понятии интеграла. Общее определение. 4. Примеры интегрирования. Интегрирование функции x^r. 5. Правила «интегрального исчисления».

§ 2. Производная. 1. Производная как наклон. 2. Производная как предел. 3. Примеры. 4. Производные от тригонометрических функций. *5. Дифференцируемость и непрерывность. 6. Производная и скорость. Вторая производная и ускорение. 7. Геометрический смысл второй производной. 8. Максимумы и минимумы.

§ 3. Техника дифференцирования.

§ 4. Обозначения Лейбница и «бесконечно малые».

§ 5. Основная теорема анализа. 1. Основная теорема. 2. Первые применения. Интегрирование функций x^r, $\cos x$, $\sin x$. Функция $\operatorname{arctg} x$. 3. Формула Лейбница для π.

§ 6. Показательная (экспоненциальная) функция и логарифм. 1. Определение и свойства логарифма. Эйлерово число *e*. 2. Показательная (экспоненциальная) функция. 3. Формулы дифференцирования функций e^x, a^x, x^a. 4. Явные выражения числа *e* и функций e^x и $\ln x$ в виде пределов. 5. Бесконечный ряд для логарифма. Вычисление логарифмов.

§ 7. Дифференциальные уравнения. 1. Определения. 2. Дифференциальное уравнение экспоненциальной функции. Радиоактивный распад. Закон роста. Сложные проценты. 3. Другие примеры. Простые колебания. 4. Закон движения Ньютона.

Дополнение к главе VIII. § 1. Вопросы принципиального порядка. *1. Дифференцируемость. 2. Интеграл. 3. Другие приложения понятия интеграла. Работа. Длина кривой.* § 2. Порядки возрастания. *1. Показательная функция и степени переменного x. 2. Порядок возрастания функции* $\ln(n!)$. § 3. Бесконечные ряды и бесконечные произведения. *1. Бесконечные ряды функций. 2. Формула Эйлера* $\cos x + i \sin x = e^{ix}$. *3. Гармонический ряд и дзета-функция. Формула Эйлера, выражающая* $\sin x$ *в виде бесконечного произведения.* *§ 4. Доказательство теоремы о простых числах на основе статистического метода.

Приложение. Дополнительные замечания, задачи и упражнения. Арифметика и алгебра. Аналитическая геометрия. Геометрические построения. Проективная и неевклидова геометрия. Топология. Функции, пределы, непрерывность. Максимумы и минимумы. Дифференциальное и интегральное исчисления. Техника интегрирования.

Рекомендуемая литература.

Предметный указатель.

Кэрролл Л. История с узелками.—М.: «Мир», 2000.— 398 с.: ил.— ISBN 5-03-003341-6.

Аннотация.

В «Истории с узелками» собраны математические головоломки и изящные логические парадоксы знаменитого английского писателя, автора «Алисы в Стране Чудес» и «Алисы в Зазеркалье» Льюиса Кэрролла.

Кенига рассчитана на читателей, интересующихся математикой и желающих с пользой провести свой досуг, а также может быть использована преподавателями математики и логики в школах и колледжах.

Оглавление.

От переводчика.

ИСТОРИЯ С УЗЕЛКАМИ.

Узелок I. По горам и по долам. Узелок II. Комнаты со всеми удобствами. Узелок III. Безумная математильда. Узелок IV. Искусство счисления. Узелок V. Крестики и нолики. Узелок VI. Ее блистательство. Узелок VII. Мелкие расходы. Узелок VIII. De rebus omnibus. Узелок IX. Змея с углами. Узелок X. Пирожки. Ответы.

ПОЛУНОЧНЫЕ ЗАДАЧИ, ПРИДУМАННЫЕ В ЧАСЫ БЕССОННИЦЫ.

Предисловие. Предметный указатель задач. Глава I. Задачи. Глава II. Ответы. Глава III. Решения.

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ЛОГИКА.

Обращение к учащимся.

Книга I. Предметы и их признаки. Глава I. Введение. Глава II. Классификация. Глава III. Разбиение на подклассы. *§ 1. Предварительные замечания. § 2. Дихотомия.* Глава IV. Имена. Глава V. Определение.

Книга II. Суждения. Глава I. Общие сведения о суждениях. *§ 1. Предварительные замечания. § 2. Нормальная форма суждения. § 3. Различные типы суждений.* Глава II. Суждения существования. Глава III. Суждения отношения. *§ 1. Предварительные замечания. § 2. Приведение суждения отношения к нормальной форме. § 3. Суждение, начинающееся со слова «все», как двойное суждение. § 4. Какое заключение следует из суждения отношения относительно реальности его терминов? § 5. Перевод суждения отношения в одно или несколько суждений существования.*

Книга III. Двухбуквенная диаграмма. Глава I. Символы и клетки. Глава II. Фишки. Глава III. Представление суждений на диаграмме. *§ 1. Предварительные замечания. § 2. Представление суждений существования на диаграмме. § 3. Представление суждений отношения на диаграмме.* Глава IV. Интерпретация двухбуквенной диаграммы с расставленными на ней фишками.

Книга IV. Трехбуквенная диаграмма. Глава I. Символы и клетки. Глава II. Представление суждений в терминах *x* и *m* или *y* и *m*. *§ 1. Представление суждений существования в терминах x и m или y и m. § 2. Представление суждений отношения в терминах x и m или y и m.* Глава III. Одновременное представление на одной диаграмме двух суждений отношения: одного — в терминах *x* и *m*, другого — в терминах *y* и *m*. Глава IV. Интерпретация трехбуквенной диаграммы с расставленными на ней фишками или цифрами в терминах *x* и *y*.

Книга V. Силлогизмы. Глава I. Введение. Глава II. Задачи на силлогизмы. *§ 1. Предварительные замечания. § 2. Задачи первого типа. Вывод заключения из двух суждений отношения, содержащих два ко-класса и принимаемых за посылки силлогизма. § 3. Задачи второго типа. Проверка правильности и полноты заключения силлогизма, образованного тремя суждениями отношения, из которых любые два содержат по два ко-класса.*

Книга VI. Метод индексов. Глава I. Введение. Глава II. Представление суждений отношения. Глава III. Силлогизмы. *§ 1. Представление силлогизмов. § 2. Формулы для решения задач на силлогизмы. § 2. Логические ошибки. § 4. Метод обнаружения ошибки в данной паре суждений.*

Книга VII. Сориты. Глава I. Введение. Глава II. Задачи на сориты. *§ 1. Предварительные замечания. § 2. Решение соритов методом отдельных силлогизмов. § 3. Решение соритов методом подчеркивания.*

Книга VIII. Примеры, ответы и решения. Глава I. Примеры. *§ 1. Привести к нормальной форме следующие суждения отношения. § 2. Представить на одной трехбуквенной диаграмме пару абстрактных суждений (одно суждений — в терминах x и m, другое — в терминах y и m). § 3. Следующие трехбуквенные диаграммы перевести на язык суждений в терминах x и y. § 4. Приняв каждую из следующих пар абстрактных суждений за посылки силлогизма, вывести заключение. § 5. Приняв каждую из следующих пар конкретных суждений за посылки силлогизма, вывести заключение. § 6. Проверить, являются ли следующие тройки абстрактных суждений силлогизмами. § 7. Проверить, являются ли следующие тройки конкретных суждений силлогизмами. § 8. Предположить, что каждый из приводимых далее наборов абстрактных суждений является набором посылок сорита, найти заключение. § 9. Предположить, что каждый из приводимых далее наборов конкретных суждений является набором посылок сорита, найти заключение.* Глава II. Ответы. Глава III. Решения. *§ 1. Нормальная форма суждения отношения. § 2. Метод диаграмм. § 2. Метод индексов.*

Приложение, адресованное преподавателям. *§ 1. Введение. § 2. Утверждение о существовании субъекта суждения, вытекающее из самого суждения. § 3. Употребление выражение «не есть» («не суть») в качестве связки. § 4. Теория, согласно которой «две отрицательные посылки ничего не доказывают». § 5. Метод кругов Эйлера. § 6. Метод диаграмм Венна. § 7. Мой метод диаграмм. § 8. Решение силлогизмов с помощью различных методов. § 9. Мой метод рассмотрения силлогизмов и соритов. § 10. Краткий обзор II и III частей «Символической логики».*

РАЗНЫЕ РАЗНОСТИ ИЛИ MISCELLANEA CARROLLIANA.

Трудности и парадоксы. Трудность первая. Где происходит смена дат? Трудность вторая. Какие часы лучше?

Что черепаха сказала Ахиллу.

Аллен, Браун и Карр.

Предисловие к книге «Простые факты о квадратуре круга», оставшейся ненаписанной.

Задачи и загадки для больших и маленьких.

Из писем к детям.

Мендельсон Э. Введение в математическую логику.— М.: Наука, 1976.— 320 с.: ил.

От редактора перевода.

В книге Э. Мендельсона «Введение в математическую логику» дается доступное для начинающего читателя и достаточно полное изложение основных разделов современной математической логики и многих ее приложений. Наряду с такими разделами, как логика высказываний, исчисление предикатов, формальная арифметика и теория алгоритмов, в ней освещены также теория моделей и аксиоматическая теория множеств, отсутствующие в книге С. К. Клини «Введение в метаматематику», которая до настоящего времени служила наиболее полным пособием по математической логике. Следует однако отметить, что в отличие от книги С. К. Клини в этой книге по существу не затрагиваются интуиционистское и конструктивное направления математической логики.

Оглавление.

От редактора перевода.

Предисловие.

Введение.

Глава 1. Исчисление высказываний. § 1. Пропозициональные связки. Истинностные таблицы. § 2. Тавтологии. § 3. Полные системы связок. § 4. Система аксиом для исчисления высказываний. § 5. Независимость. Многозначные логики. § 6. Другие аксиоматизации.

Глава 2. Теории первого порядка. § 1. Кванторы. § 2. Интерпретации. Выполнимость и истинность. Модели. § 3. Теории первого порядка. § 4. Свойства теорий первого порядка. § 5. Теоремы о полноте. § 6. Некоторые дополнительные метатеоремы. § 7. Правило C. § 8. Теории первого порядка с равенством. § 9. Введение новых функциональных букв и предметных констант. § 10. Предваренные нормальные формы. § 11. Изоморфизм интерпретаций. Категоричность теорий. § 12. Обобщенные теории первого порядка. Полнота и разрешимость.

Глава 3. Формальная арифметика. § 1. Система аксиом. § 2. Арифметические функции и отношения. § 3. Примитивно рекурсивные и рекурсивные функции. § 4. Арифметизация. Гёделевы номера. § 5. Теорема Гёделя для теоремы S. § 6. Рекурсивная неразрешимость. Теорема Тарского. Система Робинсона.

Глава 4. Аксиоматическая теория множеств. § 1. Система аксиом. § 2. Порядковые числа. § 3. Равномощность. Конечные и счетные множества. § 4. Теорема Хартогса. Начальные порядковые числа. Арифметика порядковых чисел. § 5. Аксиома выбора. Аксиома ограничения.

Глава 5. Эффективная вычислимость. § 1. Нормальные алгорифмы Маркова. § 2. Алгорифмы Тьюринга. § 3. Вычислимость по Эрбрану — Гёделю. Рекурсивно перечислимые множества. § 4. Неразрешимые проблемы.

Дополнение. Доказательство непротиворечивости формальной арифметики.

Литература.

Алфавитный указатель.

Символы и обозначения.

Прасолов В. В. Наглядная топология.— М.: МЦНМО, 2006.— 112 с., ил.— ISBN 5-94057-260-X.

Аннотация.

Книга представляет собой вводный курс топологии. Основные понятия сначала описываются на интуитивно понятном уровне, а затем постепенно уточняются и становятся вполне строгими. Это позволяет сразу же заняться содержательными топологическими задачами.

Книга снабжена многочисленными иллюстрациями, которые нередко более важны для ее понимания, чем текст. Каждая глава содержит задачи, обдумывание которых поможет лучше усвоить излагаемый материал.

Книга будет интересна всем, кто способен воспринимать изящество и элегантность геометрических конструкций и теорем.

Для школьников, преподавателей математики, руководителей кружков, студентов младших курсов математических специальностей.

Первое издание книги вышло в 1995 г.

Оглавление.

Предисловие.

1. Деформация эластичных тел. 2. Узлы и зацепления. 3. Заклеивание узлов и зацеплений. 4. Инвариант узла. 5. Гомеоморфизмы. 6. Векторные поля на плоскости. 7. Векторные поля на двумерных поверхностях. 8. Гомеоморфизмы без неподвижных точек. 9. Двумерные поверхности.

Список рекомендуемой литературы.

Романовский И. В. Дискретный анализ.— СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2003.— 320 с., ил.— ISBN 5-7940-0114-3 («Невский Диалект»).— ISBN 5-94157-330-8 («БХВ-Петербург»).

Эпиграф к книге.

大 **dà** 1) большой; великий; высокий (*ростом*); крупный; огромный; вырасти; 2) старший (*по возрасту, положению*); быть старше; 3) сильно, очень, весьма; громко; особенно; преувеличенно; 4) увеличивать, расширять; преувеличивать; напускать на себя важность; 5) *сокр.* высшее учебное заведение, университет…

Из китайско-русского словаря

Аннотация.

Пособие написано по материалам вводного лекционного курса, который автор читает на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета студентам, специализирующимся по прикладной математике и информатике. Особое внимание уделяется связям между понятиями дискретного анализа, возникающими в разных разделах математики и современной информатики.

В это издание включено много новых материалов, в связи с чем изменилась структура книги: появились новые главы и параграфы. Увеличено число упражнений. Текст дополнен алфавитным указателем и библиографическими рекомендациями.

Оглавление.

Введение.

1. Некоторые определения из теории множеств. 1.1. Основные определения. 1.2. Прямое произведение. 1.3. Разбиения. *1.3.1. Порядок и нумерация.*

2. Строки фиксированной длины. 2.1. Векторы из нулей и единиц. 2.2. Перебор 0—1 векторов. 2.3. Перебор элементов прямого произведения множеств. 2.4. Перестановки. *2.4.1. Определение и перебор перестановок. 2.4.2. Экстремальные задачи, связанные с перестановками.* 2.5. Размещения и сочетания. 2.6. Бином Ньютона и его комбинаторные использования. 2.7. Числа Фибоначчи.

3. Элементарная теория вероятностей. 3.1. Основные определения. 3.2. Условные вероятности и формула Байеса. 3.3. Случайные величины. 3.4. Математическое ожидание и дисперсия. 3.5. Схема Бернулли. 3.6. Функции распределения. 3.7. Случайные числа. 3.8. Двоичный поиск и неравенство Крафта. 3.9. Энтропия и ее свойства.

4. Строки переменной длины. 4.1. Строки, списки, последовательности. 4.2. Операции над строками. 4.3. Функции от строк. 4.4. Скользящие суммы. 4.5. Поиск образца в строке. *4.5.1. Задача точного поиска. 4.5.2. Суффиксное дерево. 4.5.3. Задачи приближенного поиска. 4.5.4. Регулярные выражения.* 4.6. Задача о максимальном совпадении двух строк. 4.7. Задача Кнута — Пласса о выключке абзаца. 4.8. Слияние. 4.9. Операции над множествами на прямой. 4.10. Длинная арифметика. 4.11. Кусочно-постоянные функции.

5. Сжатие и защита информации. 5.1. Введение. 5.2. Код Шеннона — Фано и алгоритм Хаффмена. 5.3. Сжатие текстов. *5.3.1. Сжатие по алгоритму Хаффмена. 5.3.2. Сжатие по методу Зива — Лемпеля. 5.3.3. Метод Барроуза — Уилера. 5.3.4. Еще о сжатии.* 5.4. Избыточное кодирование. *5.4.1. Преобразование в видимый формат. 5.4.2. Помехоустойчивость.* 5.5. Криптография. *5.5.1. Симметричное шифрование. 5.5.2. Шифрование с открытым ключом. 5.5.3. Цифровые подписи, конверты, дайджесты. 5.5.4. Немного о длине ключей и правовых аспектах.*

6. Информационный поиск и организация информации. 6.1. Зачем здесь этим заниматься? 6.2. Простейшие механизмы — массивы, файлы и цепные списки. 6.3. Простейшее действие организации — сортировка. 6.4. Простейшее ускорение поиска — дихотомия. 6.5. Информационные деревья. *6.5.1. АВЛ-дерево. 6.5.2. В-дерево. 6.5.3. Дерево ключей и суффиксное дерево. 6.5.4. Биномиальные деревья. 6.5.5. Квадродеревья.* 6.6. Хеширование. 6.7. Приоритетные очереди. *6.7.1. Простейшие приоритетные очереди. 6.7.2. «Корзинная» приоритетная очередь. 6.7.3. Биномиальная куча.*

7. Предикаты и отношения. 7.1. Определения. 7.2. Отношения порядка. 7.3. Отношения в базах данных.

8. Теория графов. 8.1. Определения. 8.2. Построение транзитивного замыкания графа (отношения). 8.3. Связность. Компоненты связности и сильной связности. 8.4. Деревья. 8.5. Применения деревьев. *8.5.1. Иерархические схемы. 8.5.2. Представление дерева в компьютере. 8.5.3. Обходы и нумерации деревьев. 8.5.4. Суффиксные деревья. 8.5.5. Неориентированные деревья.* 8.6. Матрица инциденций и линейные системы. 8.7. Задача о кратчайшем пути и ее варианты. 8.8. Задачи о кратчайшем дереве путей. 8.9. Сетевой график и критические пути. 8.10. Теория паросочетаний и ее применения.

9. Экстремальные задачи. 9.1. Какие задачи и методы нам уже встречались. 9.2. Бистохастические матрицы. 9.3. Экстремальные задачи на множестве перестановок. 9.4. Методы улучшенного перебора. 9.5. Приближенные методы оптимизации. *9.5.1. Метод локальных улучшений. 9.5.2. Случайный поиск. 9.5.3. Эвристические методы. 9.5.4. Сокращенный поиск.*

10. Процессы. 10.1. Конечные автоматы. 10.2. Марковская цепь. 10.3. Управляемые процессы. 10.4. Вычислительные процессы. *10.4.1. Обычный вычислительный процесс как процесс. 10.4.2. Процесс как часть алгоритма. 10.4.3. Сопрограммы.*

11. Связи дискретного и непрерывного анализа. 11.1. Введение. Конкретная математика. 11.2. Производящие функции. *11.2.1. Общая идея. 11.2.2. Числа Фибоначчи. 11.2.3. Числа Каталана. 11.3. Асимптотика.*

Приложение. Библиографические рекомендации.
Библиография.
Алфавитный указатель.

Харари Ф. Теория графов. М.: Едиториал УРСС, 2003.—296 с.: ил.— ISBN 5-354-00301-6. [Harary F. Graph Theory.]

Из предисловия.

Прошло 30 лет после выпуска монографии Ф. Харари «Теория графов», но ее привлекательные качества нисколько не потускнели. Унификация терминологии, проведенной автором и широко распространенной благодаря этой книге, стала общепринятой. Преподавание теории графов с использованием книги Ф. Харари ведется во многих вузах нашей страны.

Аннотация.

В последнее время теория графов привлекает все более пристальное внимание специалистов разных областей знания. Наряду с традиционными применениями ее в таких науках, как физика, электротехника, химия, она проникла и в науки, считавшиеся ранее далекими от нее,— экономику, социологию, лингвистику и др. Давно известны тесные контакты теории графов с топологией, теорией групп и теорией вероятностей. Особенно важная взаимосвязь существует между теорией графов и теоретической кибернетикой (особенно теорией автоматов, исследованием операций, теорией кодирования, теорией игр). Широко используется теория графов при решении различных задач на вычислительных машинах.

За последние годы тематика теории графов стала значительно разнообразней; резко увеличилось количество публикаций.

Предлагаемая книга написана одним из видных специалистов по дискретной математике. Несмотря на небольшой объем и конспективный характер изложения, книга достаточно полно освещает современное состояние теории графов. Она, безусловно, будет полезна студентам университетов и технических вузов и, несомненно, заинтересует широкие круги научных работников, занимающихся приложениями дискретной математики.

Оглавление.

Предисловие.

Введение.

Глава 1. Открытие! Задача о кёнигсбергских мостах. Электрические цепи. Химические изомеры. «Вокруг света». Гипотеза четырех красок. Теория графов в двадцатом веке.

Глава 2. Графы. Типы графов. Маршруты и связность. Степени. Задача Рамсея. Экстремальные графы. Графы пересечений. Операции над графами. Упражнения.

Глава 3. Блоки. Точки сочленения, мосты и блоки. Графы блоков и графы точек сочленения. Упражнения.

Глава 4. Деревья. Описание деревьев. Центры и центроиды. Деревья блоков и точек сочленения. Независимые циклы и коциклы. Матроиды. Упражнения.

Глава 5. Связность. Связность и реберная связность. Графические варианты теоремы Менгера. Другие варианты теоремы Менгера. Упражнения.

Глава 6. Разбиения. Упражнения.

Глава 7. Обходы графов. Эйлеровы графы. Гамильтоновы графы. Упражнения.

Глава 8. Реберные графы. Некоторые свойства реберных графов. Характеризация реберных графов. Специальные реберные графы. Реберные графы и обходы. Тотальные графы. Упражнения.

Глава 9. Факторизация. 1-факторизация. 2-факторизация. Древесность. Упражнения.

Глава 10. Покрытия. Покрытия и независимость. Критические вершины и ребра. Реберное ядро. Упражнения.

Глава 11. Планарность. Плоские и планарные графы. Внешнепланарные графы. Теорема Понтрягина — Куратовского. Другие характеризации планарных графов. Род, толщина, крупность, число скрещиваний. Упражнения.

Глава 12. Раскраски. Хроматическое число. Теорема о пяти красках. Гипотеза четырех красок. Теорема Хивуда о раскраске карт. Однозначно раскрашиваемые графы. Критические графы. Гомоморфизмы. Хроматический многочлен. Упражнения.

Глава 13. Матрицы. Матрица смежностей. Матрица инциденций. Матрица циклов. Обзор дополнительных свойств матроидов. Упражнения.

Глава 14. Группы. Группа автоморфизмов графа. Операции на группах подстановок. Группа графа-композиции. Графы с данной группой. Симметрические графы. Графы с более сильной симметрией. Упражнения.

Глава 15. Перечисления. Помеченные графы. Теорема перечисления Пойа. Перечисление графов. Перечисление деревьев. Теорема перечисления степенной группы. Решенные и нерешенные задачи перечисления графов. Упражнения.

Глава 16. Орграфы. Орграфы и соединимость. Ориентированная двойственность и бесконтурные орграфы. Орграфы и матрицы. Обзор по проблеме восстановления турниров. Упражнения.

Приложение I. Диаграммы графов.

Приложение II. Диаграммы орграфов.

Приложение III. Диаграммы деревьев.

Список литературы и именной указатель.

Указатель обозначений.

Предметный указатель.

Указатели

Указатель обозначений

0 87
$0!$ 29
1 87
$A, \ \ldots, Z$ 73
$a, \ \ldots, z$ 73
A_n^k 31
$A \times B$ 25, 79
(a, b) 25, 79
$\mathbb{C}$ 16
C_n^k 33
$\mathrm{Im}\, z$ 17
i 16
K_n 152
$K_{n,m}$ 153
M 63
$\mathbb{N}$ 5
$n!$ 29
$\binom{n}{k}$ 33
P 45
P_n 28
$P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ 29
(p, q) 136, 159
$\mathbb{Q}$ 9
$\mathbb{R}$ 14
$\mathbb{R}^2$ 17
$\mathrm{Re}\, z$ 17
$\wp(A)$ 77
U 75
$\mathbb{Z}$ 7
$z = x + iy$ 17
$\bar{z} = x - iy$ 18
$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$ 18
$\aleph$ 15
$\aleph_0$ 8
$\{\ldots\}$ 73
$\{\}$ 73
$\varnothing$ 73
$\in$ 73
$\notin$ 73
$\subset$ 74
$\not\subset$ 74
$\cup$ 87
$\vee$ 87
$\cap$ 89
$\wedge$ 89
& 89
$\overline{}$ 90
$\neg$ 90
$\setminus$ 91
Δ 91
$\sim$ 92
$\leftrightarrow$ 92
$\rightarrow$ 93
, 120
$\Leftrightarrow$ 120
$\Rightarrow$ 120

Предметный указатель

А
Абстрагирование 143
Антипризма 170

Б
Бесконечность 8
— счетная 8
Бином квадратичный 13
— кубический 13
— линейный 13
Биномиальный коэффициент 13
Бросание кости 44
Булеан 77
Бутылка Клейна 190

В
Вероятность 43, 45
—, свойства 45
Вершина 135, 168
— нечетная 137
—, степень 135
— четная 137
Выбор карты из колоды 44
Выборка 26
Вывод 106
— резолютивный 121

Г
Гексаэдр 169
Гиперкуб 175
Гомеоморфизм 183
Грань 168
Граф 135
— двудольный 153
— —, изоморфизм 153
— — полный 153
—, изоморфизм 135
—, компонента связности 139
— ориентированный 159
— остовный 160
— планарный 151
— плоский 151
— полный 152
—, порядок 135
—, правильная раскраска 156
—, связность 139
—, хроматическое число 156
— эйлеров 144
— (p, q) 136

Д
Декартово произведение 25, 79
Дерево 140
Диагональный метод Кантора 15
Диаграмма Эйлера — Венна 75
— — — полная 76
Дизъюнкция 87
Додекаэдр 169
Доказательство от противного 107, 120
Дуга 159
Дуги антипараллельные 159

З
Задача о кёнигсбергских мостах[1] 142, 143
Задача о кёнигсбергских мостах[2] 142
— о четырех красках 158
— об электро-, газо- и водоснабжении 155
Заключение 106
— обратное 106
— противоположное 106
— — обратному 106
— прямое 106
Заключения эквивалентные 107
Закон ассоциативности 94
— больших чисел 65
— двойного отрицания 120
— де Моргана 94
— де Моргана обобщенные 94
— дистрибутивности 94
— единицы 94
— идемпотентности 94
— коммутативности 94
— нуля 94
Запрос 121
—, стандартизация 121
Заход 159

И
Икосаэдр
Импликация 93
Инвариант 171, 185
— графа 137
Испытание 43
Исход[1] 43
Исход[2] 159

К
Комбинаторика 26
Континуум 15
Конъюнкция 89
Край 184
Крендель 187
Кривая 183
Куб 169
— четырехмерный 175

Л
Лента Мёбиуса 190
Лист Мёбиуса 190
Логическая истина 119
— операция 88
— переменная 87
— связка 88
— — второго уровня 120
— — — — «если…, то» 120
— — — — «и» 120
— — — — «тогда и только тогда» 120
— — «если…, то» 93
— — «и» 89
— — «или» 87
— — «исключающее или» 92
— — «не» 90
— — «тогда и только тогда» 92
Логическое значение 87

М
Маршрут 139
— замкнутый 140
— ориентированный 161
— открытый 140
Математика дискретная 5
— недискретная 5
— непрерывная 5
Математическое ожидание 63
Метод Монте-Карло 50
Мнимая единица 16
Многогранник 167
—, двойственность 172
— полуправильный 170
— правильный 167
Многоугольник 167
— правильный 167
Множества, импликация 93
—, объединение 87
—, пересечение 89
—, разность 91
Множества, разность симметрическая 91
—, эквивалентность 92
Множество 73
— бесконечное 73
—, дополнение 90
— конечное 73
— пустое 73
— универсальное 75
— n-элементное 73
Мультиграф 143

Н
Надмножество 74, 77
Непрерывная деформация 183

О
Обработка неудачи 121
Октаэдр 169
— четырехмерный 175
Операции над числами, свойства 6, 8, 11
Орграф 159
—, связность сильная 161
—, — слабая 160
— эйлеров 161
— (p, q) 159
Орграфы, изоморфизм 160
Ормаршрут 161
— замкнутый 161
Орребро 159
Отрицание 90
Орцикл 161

П
Парадокс Деда Мороза 81
— определения натуральных чисел 80
— парикмахера 80
— Рассела 80
— рефлексивности 81
— Тристрама Шенди 82
Перестановка 26, 28
— без повторения 26
— с повторением 26, 29
Пирамида треугольная правильная 169
Плоскость комплексная 17
— координатная 25
Поверхность 183
— замкнутая 184
— открытая 184
Подкидывание монеты 43
Подмножество 74, 77

Полиэдр 167
Посылка 106
Правило 119, 121
Призма 170
Проективная плоскость 192
Прямое произведение 25, 79

Р
Равносильность 111
Размещение 27, 31
— без повторения 27
— с повторением 27, 32
Разность 91
— симметрическая 91
Разрез 189
Расстановка 26
Ребро 135, 168
— ориентированное 159
Решетка 78

С
Связность 139, 184
—, компонента 139
— сильная 161
— слабая 160
—, степень 189
Случайная величина 57
— —, распределение 57
— —, — нормальное 61
— —, —, свойства 61
Событие 45
— достоверное 45, 61
— невозможное 45
События независимые 47
— несовместные 48
—, произведение 46
—, сумма 47
Сочетание 27, 33
— без повторения 27
— с повторением 27
Сторона 184
Страна 157
Страны, карта 157
— соседние 157
Сфера 186

Т
Таблица истинности 88
Тело платоново 167
Теорема о двуцветных картах 158
Теорема Понтрягина — Куратовского 154
— Рамсея 138
— Эйлера 143
Тетраэдр 169
— четырехмерный 175
Топология 183
Тор 187
Треугольник Паскаля 14, 34, 65

У
Унификация 121
Упорядоченная пара 79
Условие достаточное 108
— необходимое 108
Утверждение 106, 119
— хорновское 121
— элементарное 119
Утверждения эквивалентные 107

Ф
Факт 119, 121
Факториал 29
Фигура 183
Формула Декарта — Эйлера 172

Ц
Цель 121
—, стандартизация 121
Цепь 140
Цикл 140

Ч
Числа случайные 51
Число алгебраическое 12
— действительное 14
— дробное 9
— иррациональное 12
— комплексное 16
— —, модуль 18
— — сопряженное 18
— натуральное 5
— отрицательное 7
— положительное 7
— рациональное 9
— трансцендентное 14
— целое 7

Э
Эквивалентность 92

M
Modus ponens 120

Учебное издание

Сергей Валентинович Мациевский

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ

Учебное пособие

Редакция С. В. Мациевского.
Набор и верстка С. В. Мациевского.

Подписано в печать 04.02.2010.
Бумага для множительных аппаратов. Формат $70\times100^{1}/_{16}$.
Гарнитура «Book Antiqua». Ризограф. Усл. печ. л. 24. Уч.-изд. л. 20.
Тираж 400 экз. Заказ 26.

Издательство Российского государственного университета им. Иммануила Канта
236041, г. Калининград, ул. им. Александра Невского, 14.

ДЛЯ ЗАМЕТОК