Ю.А. Клевчихин

Введение в математический анализ

(лекции)

Владивосток
2002

УДК 517
ВВК 22.16

Клевчихин Ю.А.

Введение в математический анализ (лекции). Уч. пособие. – Владивосток: Изд-во Дальневосточного ун-та, 2002. 107 с.

Учебное пособие является записью первых 17 лекций (I семестр, 34 часа) читавшихся на факультете прикладной математики института математики и компьютерных наук ДВГУ в 2000 году и содержит вводный курс в математический анализ. Это элементы математической логики и теории множеств, элементы теории действительных чисел, теория последовательностей, начала теории функций, включающие предел, непрерывность и равномерную непрерывность.

Пособие предназначено для студентов-математиков и соответствует министерской программе специальности "Прикладная математика" (01.02.00).

Введение

Настоящее пособие является записью лекций по математическому анализу, прочитанных автором в 2000 году студентам факультета прикладной математики института математики и компьютерных наук ДВГУ. Его появление связано со следующими причинами:

1. Несмотря на то, что имеется много прекрасных учебников по математическому анализу для математиков (см. список литературы), на абонементе в библиотеке их явно недостаточно, а в продаже во Владивостоке в этом году лично я видел только одну книгу [4] и ту в нескольких экземплярах.

2. В настоящее время электронный вариант учебника становится наиболее доступным, так как его можно изучать, читая на экране монитора и, кроме того, всегда можно распечатать нужные страницы. И если даже распечатать всё пособие, обойдется это не дороже, чем купить книгу.

3. Практически каждый лектор (к их числу относится и автор) излагает теорию в соответствии со своими знаниями, пониманием предмета и вкусами, что, как правило, не совпадает (по крайней мере в деталях) ни с одним из стандартных учебников. Поэтому в идеале, на мой взгляд, каждый лектор должен публиковать свои лекции, чтобы, с одной стороны, облегчить изучение своего курса студентам, а с другой, чтобы коллеги и все желающие могли оценить его уровень, доступность и т.п.

По поводу особенностей курса можно сказать следующее.

Практика преподавания показывает, что большинство студентов на лекции, успевая записывать краткие символические формулировки теорем и их доказательства, в дальнейшем не в состоянии их правильно прочитать и, следовательно, понять. Поэтому в курсе, как правило, приводится по две формулировки теорем: словесная и записанная в формальных символах. Мне кажется, это может помочь изучающим кроме содержательного освоения курса освоить и формальную символику. Вообще, умение записать теорему в краткой символической форме способствует лучшему пониманию и запоминанию математических фактов. Кроме того, формально логическая запись зачастую уточняет словесную формулировку и подсказывает, с чего надо начинать доказательство. Словесная же формулировка имеет преимущество образности, что тоже немаловажно для понимания происходящего, а значит, правильного усвоения материала.

В основном же курс содержит стандартный теоретический материал, предусмотренный программой для студентов-математиков специальности 01.02.00 прикладная математика для государственных университетов.

Достаточно ли прочтения этого пособия для изучения соответствующего раздела курса математического анализа?

На мой взгляд таких книг в природе вообще не может быть. Лет 15 назад, будучи на факультете повышения квалификации в МГУ я столкнулся с распространенным там мнением (и я его разделяю), что математика — устная наука. Ее в принципе невозможно изучить по книгам. Правильно и быстро она познается только в результате общения с коллегами по профессии. Книги же служат для фиксации математических знаний. Если Вы что-то забыли, то с помощью книги (или своих записей) все можно вспомнить, но изучить новое (в заметном объеме) почти невозможно. Поэтому, тем кто не посещал лекции и практические занятия это пособие не поможет.

Для студентов сказанное означает: если Вы хотите стать классным специалистом, побольше общайтесь друг с другом при изучении математики, вместе решайте задачи, обсуждайте содержание и доказательства теорем, старайтесь найти доказательства отличные от предлагаемых лектором и обязательно посещайте все занятия. Иначе, время вашей “учёбы” будет потрачено впустую.

Несколько слов по поводу оформления текста. Разбивка на лекции достаточно условна. Реальная лекция могла быть либо (немного) меньше по объему материала, либо больше. Но в целом их количество соответствует вычитанному материалу.

	Греческий алфавит			Готический (немецкий) алфавит			
$\mathrm{A}\alpha$	а́льфа	$\Xi\xi$	кси	$\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ Aa	а	$\mathfrak{N}\mathfrak{n}$ Nn	эн
$\mathrm{B}\beta$	бе́та	$\mathrm{O}o$	о́микрон	$\mathfrak{B}\mathfrak{b}$ Bb	бэ	$\mathfrak{O}\mathfrak{o}$ Oo	о
$\Gamma\gamma$	га́мма	$\Pi\pi$	пи	$\mathfrak{C}\mathfrak{c}$ Cc	цэ	$\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ Pp	пэ
$\Delta\delta$	де́льта	$\mathrm{P}\rho\varrho$	ро	$\mathfrak{D}\mathfrak{d}$ Dd	дэ	$\mathfrak{Q}\mathfrak{q}$ Qq	ку
$\mathrm{E}\varepsilon\epsilon$	э́псилон	$\Sigma\sigma\varsigma$	си́гма	$\mathfrak{E}\mathfrak{e}$ Ee	э	$\mathfrak{R}\mathfrak{r}$ Rr	эр
$\mathrm{Z}\zeta$	дзе́та	$\mathrm{T}\tau$	та́у	$\mathfrak{F}\mathfrak{f}$ Ff	эф	$\mathfrak{S}\mathfrak{s}$ Ss	эс
$\mathrm{H}\eta$	э́та	$\Upsilon\upsilon$	и́псилон	$\mathfrak{G}\mathfrak{g}$ Gg	гэ	$\mathfrak{T}\mathfrak{t}$ Tt	тэ
$\Theta\theta$	тэ́та	$\Phi\varphi\phi$	фи	$\mathfrak{H}\mathfrak{h}$ Hh	ха	$\mathfrak{U}\mathfrak{u}$ Uu	у
$\mathrm{I}\iota$	йо́та	$\mathrm{X}\chi$	хи	$\mathfrak{I}\mathfrak{i}$ Ii	и	$\mathfrak{V}\mathfrak{v}$ Vv	фау
$\mathrm{K}\kappa\varkappa$	ка́ппа	$\Psi\psi$	пси	$\mathfrak{J}\mathfrak{j}$ Jj	йот	$\mathfrak{W}\mathfrak{w}$ Ww	вэ
$\Lambda\lambda$	ла́мбда	$\Omega\omega$	оме́га	$\mathfrak{K}\mathfrak{k}$ Kk	ка	$\mathfrak{X}\mathfrak{x}$ Xx	икс
$\mathrm{M}\mu$	мю			$\mathfrak{L}\mathfrak{l}$ Ll	эл	$\mathfrak{Y}\mathfrak{y}$ Yy	ипсилон
$\mathrm{N}\nu$	ню			$\mathfrak{M}\mathfrak{m}$ Mm	эм	$\mathfrak{Z}\mathfrak{z}$ Zz	цет

Лекция 1.
Немного о математической логике

Высказывания

Математика (не только анализ) в основном имеет дело с *высказываниями* (предложениями, суждениями) по поводу которых (в принципе) можно сделать заключение о том, истинны они или ложны (не обязательно в данный момент времени). Например, обозначим буквами следующие высказывания:

A =“число 5 делится нацело на 2”;

B =“сумма квадратов длин катетов прямоугольного треугольника равна квадрату длины гипотенузы”;

C =“уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет действительное решение”;

D =“всякое четное число $\geqslant 4$ можно разложить в сумму двух простых”.

Высказывание A, очевидно, ложно.

Высказывание B — истинно, но не очевидно. Рассказывают, что были времена, когда установление истинности этого высказывания вызвало такой восторг у Пифагора, что он по случаю этого открытия решил принести в жертву богам 100 быков (многие считают[1], что с тех пор все скоты не любят математику).

Некоторые полагают, что выявление истинностного смысла высказывания C привело к созданию теории комплексных чисел.

Высказывание D — гипотеза (Х. Гольдбаха). До сих пор не ясно, истинно оно или ложно. Подобных предложений в математике много (см., например, `http//www.mathsoft.com/asolve/`). Имеется 7 гипотез, установление истинности или ложности каждой из которых оценено в 1 000 000$ (см. `http//www.claymath.org/prize_problems/`).

В обычном языке (например, русском или английском) можно сформулировать много предложений не имеющих никакого истинностного смысла. Например, о вопросительном предложении “сколько будет дважды два?” нельзя сказать истинно оно или ложно. Мы на них не будем останавливаться.

Раздел математики, изучающий действия с “высказываниями”, т.е. предложениями, которые либо истинны либо ложны называют “пропозициональной логикой” (от лат. proposition – предложение, высказывание).

Нам оттуда понадобится совсем немного сведений (в основном определений).

[1] Как утверждают биографы, Софья Ковалевская, любила эту шутку.

Логические операции с высказываниями

$\neg$ — *отрицание*, $\neg A =$ не A. По определению $\neg A$ истинно тогда и только тогда, когда A ложно.

$\vee$ — *дизъюнкция*, $A \vee B =$ *"A или B"* — логическое сложение. По определению $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда одновременно ложны и A и B. В остальных случаях истинно.

$\wedge$ — *конъюнкция*, $A \wedge B =$ *"A и B"* — логическое умножение. По определению $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда одновременно истинны A и B. В остальных случаях ложно (другое обозначение конъюнкции высказываний — $A\&B$).

$\Rightarrow$ — *импликация*, $A \Rightarrow B =$ *"если A, то B"* — логическое следование. A называется *посылкой*, B — *заключением*. По определению $A \Rightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда посылка A истинна, а заключение B ложно.

$\Leftrightarrow$ — *эквиваленция*, $A \Leftrightarrow B =$ *"A тогда и только тогда, когда B"* — логическая эквивалентность высказываний. По определению, $A \Leftrightarrow B$ истинно, когда оба высказывания A и B одновременно либо истинны, либо ложны. В остальных случаях ложно.

Обычно истинным высказываниям приписывают значение 1, а ложным 0 (чтобы не писать длинно "A—истинно" или "A—ложно", пишут соответственно $A = 1$ или $A = 0$. Хотя, конечно, можно писать $A =$*и* или $A =$*л*). В этих обозначениях все наши словесные определения истинности высказываний, получаемых с помощью логических операций, можно свести в одну таблицу:

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\neg A$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Таблица истинности для составных высказываний.

Обязательны для запоминания следующие ниже логические тождества (равенства). Они особенно часто будут использоваться нами.

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \tag{1}$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B) \tag{2}$$

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B) \tag{3}$$

$$A \Rightarrow B = (\neg A) \vee B \tag{4}$$

$$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge (\neg B) \tag{5}$$

$$A \Rightarrow B = (\neg B) \Rightarrow (\neg A) \tag{6}$$

Проверку этих равенств можно сделать с помощью составления таблиц истинности правой и левой части. (Если при всех значениях истинности A и B, входящих в сложное высказывание, результаты совпадают, то равенства верны.)

Предикаты

Следующие факты относятся к "логике предикатов".

Предикат — это логическая функция (вообще говоря, нескольких переменных), определенная в некоторой области предметов (объектов) со значениями в множестве высказываний. После подстановки вместо переменных, объектов указанной области, эта функция должна превращаться в высказывание и принимать одно из двух значений: "истина" или "ложь" (или 1 и 0 соотв., что то же самое).

Например, пусть $P(X) =$ "число X больше двух". Это предикат на множестве чисел. Имеем $P(3) =$ истина, $P(1) =$ ложь.

Еще пример: пусть $P(X,Y) =$ "$X \Rightarrow Y$". Это предикат на множестве высказываний. Если $A =$ "$2 \times 2 = 4$", $B =$ "$x^2+1 = 0$ имеет действительное решение", то $P(A,B) =$ ложь, а $P(B,B) =$ истина (т.к. посылка ложна).

Соотношение между высказываниями и предикатами аналогично соотношению между числами и функциями:

исчисление высказываний — аналог арифметики чисел;

исчисление предикатов — аналог теории функций.

Чтобы превратить предикат в высказывание не обязательно вместо переменной подставлять конкретный объект. Можно "убить" эту переменную одним из двух *кванторов*:

$\forall$ — квантор "всеобщности" (или просто "общности");

$\exists$ — квантор "существования".

Выражение $\forall x\ P(x)$ читается так: "для любого x $P(x)$ (верно)" или "для каждого x (имеет место, выполняется, верно, истинно) $P(x)$".

Выражение $\exists x\ P(x)$ читается так: "существует такое x, что $P(x)$ (верно)" или "найдется такое x, что (имеет место, выполняется, верно) $P(x)$".

Примеры. 1) Пусть $P(x) =$"Целое число x делится без остатка на 2". Тогда $\forall x\ P(x)$ — ложное высказывание (любое целое число делится без остатка на 2). А $\exists x\ P(x)$ — истинное высказывание (существует целое число, которое делится без остатка на 2).

2) Пусть $P(x,y) =$ "если x—мальчик и y—девочка то x влюблен в y" (кратко: "$x \in M \wedge y \in D \Rightarrow x$ влюблен в y"). Тогда:

$$\forall x\ \exists y\ P(x,y),$$

означает: “для любого мальчика существует девочка, в которую он влюблен”. Обратим внимание, что если поменять местами кванторы[1]

$$\exists y \; \forall x \; P(x,y),$$

то получится совершенно иное по смыслу (а, значит, и по истинности) высказывание: “существует девочка, в которую влюблен каждый мальчик”. Порядок следования кванторов весьма существен! Очень не рекомендуется его путать (особенно при ответе на экзаменах).

Истинность последних двух высказываний мы здесь особо обсуждать не будем, поскольку к математике это не имеет отношения. Хотя можно довольно уверенно сказать, что в полной общности оба эти утверждения скорее всего ложны (каждый мальчик влюблен?). Если же ограничиться мальчиками и девочками, скажем, из одного и того же класса (начиная с 9-го), то первое из них может оказаться верным, а может (гораздо реже) верным будет и второе. Отметим еще, что если верно второе утверждение, то верно и первое. В таких случаях говорят, что второе утверждение более сильное.

3) Приведем еще пример, но уже из математики. Пусть $P(x,M) =$“Если x принадлежит множеству E, то $x \leqslant M$” (более коротко это можно записать так: “$x \in E \Rightarrow x \leqslant M$”.

Тогда $\exists M \; \forall x \; P(x,M)$ означает, что существует такое число M, что всякое число x из E меньше этого M. Это определение ограниченного сверху множества — одного из основных понятий, используемых в анализе. Множества E, для которых это утверждение истинно, называют *ограниченными сверху*, а множества E, для которых оно ложно называют *неограниченными сверху*. В дальнейшем мы еще встретимся с этим определением. Отметим только, что если здесь поменять местами кванторы, то получится тождественно истинное высказывание, т.е. выполняющееся для всех (числовых) множеств E и поэтому ничего не определяющее: “$\forall x \; \exists M \; P(x,y)$”= “для любого числа x из множества E существует число M большее этого x” (конечно, например, $M = x+1$).

Совершенно необходимым является умение строить отрицание высказываний, содержащих кванторы. Например, $\neg(\forall x \; P(x))$ означает: “не для любого x $P(x)$ верно”. Очевидно, это то же самое, что “существует x для которого $P(x)$ ложно” или “существует x для которого $\neg P(x)$ верно”. То есть имеет место равенство

$$\neg(\forall x \; P(x)) = (\exists x \; \neg P(x))$$

[1]Кванторы всегда считаются связанными с соответствующими переменными и слова «поменяем местами кванторы» означают, что их меняют местами вместе с переменными, как это сделано в данном примере.

Аналогично, $\neg(\exists x\ P(x))$ означает: "не существует такого x, что $P(x)$ верно"= "для любого x $P(x)$ ложно"= $\forall x\ \neg P(x)$, т.е.

$$\neg(\exists x\ P(x)) = (\forall x\ \neg P(x)).$$

Таким образом, при построении отрицаний высказываний кванторы ведут себя как "двойственные" объекты: переходят друг в друга ($\forall$ в $\exists$ и наоборот)

Для построения отрицаний более сложных высказываний надо хорошо помнить логические тождества (2), (3) и (5). Следующий пример наиболее часто будет нами использоваться (с различными конкретными предикатами $P(x,y)$ и $Q(x,y)$), поэтому его надо запомнить.

$$\neg\Big(\forall x\ \exists y\ \big(P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)\big)\Big) = \exists x\ \forall y\ \Big(P(x,y) \wedge \big(\neg Q(x,y)\big)\Big). \qquad (!!!)$$

Вопросы и задачи для самопроверки

1. Что такое высказывание?

2. Какие операции имеются для составления сложных высказываний из простых.

3. Доказать исходя из определений равенства:

$$\begin{aligned}
A \vee B = B \vee A, &\qquad A \wedge B = B \wedge A;\\
A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, &\qquad A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C;\\
A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), &\qquad A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C);\\
\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B, &\qquad \neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B;
\end{aligned}$$

$$\neg(\neg A) = A; \qquad A \vee A = A, \qquad A \wedge A = A;$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A);$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B);$$

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B);$$

$$A \Rightarrow B = (\neg A) \vee B;$$

$$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge (\neg B);$$

$$A \Rightarrow B = (\neg B) \Rightarrow (\neg A).$$

4. Построить отрицание следующего высказывания: "Вася и Петя живут в одной комнате в общежитии и если Вася храпит, то Петя во сне видит Бабу Ягу". Можно ли узнать, что Петя видит во сне, когда Вася не храпит?

5. Что такое предикат?

6. Пусть $P(x,y)$ — предикат. Тогда можно составить следующие пары *высказываний*:

$$\begin{array}{ll} \forall x\ \forall y\ P(x,y) & \forall y\ \forall x\ P(x,y); \\ \forall x\ \exists y\ P(x,y) & \exists y\ \forall x\ P(x,y); \\ \exists x\ \forall y\ P(x,y) & \forall y\ \exists x\ P(x,y); \\ \exists x\ \exists y\ P(x,y) & \exists y\ \exists x\ P(x,y); \end{array}$$

Какие из этих пар равны? Рассмотреть примеры конкретных предикатов.

7. Являются стандартными сокращения

$$\forall x \in E\ P(x) = (\forall x)\big(x \in E \Rightarrow P(x)\big) \quad \text{и} \quad \exists x \in E\ P(x) = (\exists x)\big(x \in E \wedge P(x)\big)$$

Доказать исходя из этих определений и правил построения отрицаний равенства

$$\neg\big(\forall x \in E\ P(x)\big) = \exists x \in E\ \neg P(x) \quad \text{и} \quad \neg\big(\exists x \in E\ P(x)\big) = \forall x \in E\ \neg P(x)$$

Лекция 2.

Логическая структура математических утверждений

Практически все математические утверждения носят название "теорема", "лемма", "предложение", "следствие". Различие между ними достаточно условно и носит скорее психологический характер, чем какой-то математически объективный. Все они имеют одну из двух форм: $A \Rightarrow B$ или $A \Leftrightarrow B$. Например, теорему Пифагора обычно формулируют так:

> "В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов."

На самом деле это сокращенная форма следующей формулировки:

> Если c — гипотенуза, а a и b — катеты прямоугольного треугольника, то $c^2 = a^2 + b^2$.

Видим, что формулировка теоремы имеет вид

"Если A, то B"= "$A \Rightarrow B$"

Чтобы доказать, что такая импликация верна, достаточно проверить, что ее *заключение* (т.е. B) верно, когда верна *посылка* A (см. таблицу истинности). Обычно это выражают словами: "Пусть выполнены условия теоремы. Тогда ..." и доказывают, что B верно.

Высказывание B в условии теоремы (когда оно верно) часто называют *необходимым условием* теоремы, а высказывание A — *достаточным* и теоремы $A \Rightarrow B$ формулируют еще в виде: "Для выполнения условия B достаточно выполнения условия A"="выполнение B необходимо при выполнении условия A".

Когда имеется утверждение (=высказывание) $A \Rightarrow B$ (верное или нет), то утверждение $B \Rightarrow A$ называют *обратным* к нему. Если оно верно, то говорят, что справедлива теорема обратная к утверждению $A \Rightarrow B$, которое в этом случае называют (если оно верно) *прямой* теоремой. Например, теорема обратная к теореме Пифагора выглядит так:

> Если a, b, c — стороны треугольника и $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный и a, b — катеты, а c — гипотенуза.

Эта теорема тоже верна.

Теоремы вида $A \Leftrightarrow B$, как следует из тождества (1), это, фактически, краткая запись двух теорем: прямой и обратной. Их часто называют *критериями* и формулируют в одной из форм:

"A тогда и только тогда, когда B"="Для выполнения A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось B". Опять-таки здесь B — необходимое условие, а A — достаточное. При этом слова: "докажем необходимость" означают, что собираются доказывать верность импликации $A \Rightarrow B$, а "докажем достаточность"— $B \Rightarrow A$.

Основное правило доказательства теорем — правило непосредственного вывода (modus ponens):

$$\frac{\begin{array}{c} A \text{ — верно} \\ \text{и} \\ A \Rightarrow B \text{ — верно} \end{array}}{B \text{ — верно}}$$

Всё доказательство теоремы $A \Rightarrow B$ обычно разбивается на *конечное* число шагов: A, A_1, A_2,..., A_n, B и доказывают верность импликаций $A \Rightarrow A_1$, $A_1 \Rightarrow A_2$,... $A_n \Rightarrow B$, откуда, согласно правилу непосредственного вывода делается заключение о верности B при выполнении условия A, что и требуется.

Часто используется *метод доказательства “от противного”* (более точно — “сведение к противоречию (нелепости, абсурду)”, по латыни — reductio ad absurdum): если формулировка теоремы имеет вид $A \Rightarrow B$ то слова: “предположим противное” означают, что на самом деле мы будем доказывать эквивалентное утверждение $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ (см. логическое тождество (6)). Для сокращения записи слова́ “предположим противное” часто заменяют значком $\Cap$ (в конспектах, но не книгах и статьях). Обнаружение противоречия мы фиксируем знаком “?!” (хотя не возражаем против интерпретации этого знака, как сначала удивления, а потом восхищения).

Например, рассмотрим теорему: “$\sqrt{2}$ — иррациональное число”. Это сокращенная запись следующего утверждения:

“Не существует такого рационального числа $\frac{p}{q}$, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$”=

“Если $\overbrace{p\text{—целое и } q\text{—натуральное и } p \text{ взаимно просто с } q}^{A}$, то $\overbrace{\left(\frac{p}{q}\right)^2 \neq 2}^{B}$”

Разберем подробно доказательство.

Доказательство. $\Cap$ Пусть $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ (т.е. пусть верно $\neg B$). Надо доказать, что тогда верно $\neg A$ = “p—не целое, или q—не натуральное, или p и q не взаимно просты”.

При нашем предположении $p^2 = 2q^2$ и, значит, p — четное число, т.е. имеет вид $p = 2m$. Но тогда $(2m)^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2$, т.е. q тоже четное?! Т.е. p и q не взаимно просты. И утверждение $\neg A$ верно, так как является дизъюнкцией трех высказываний, по крайней мере одно из которых, как мы доказали, верно.

Приведем еще один пример с сокращенной формулировкой и доказательством “от противного” тоже в сокращенной форме. В качестве упражнения рекомендуется восстановить в деталях и формулировку теоремы (т.е. представить в виде $A \Rightarrow B$) и ее доказательство.

Теорема. *Простых чисел бесконечно много.*

Доказательство. $\Cap$ Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — все простые числа. Рассмотрим число $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Его нет среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, так как оно больше любого из них. Поэтому, согласно нашим предположениям, оно не может быть простым, значит, $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ делится на какое-то $p_k \neq 1$ т.е. $p_1 p_2 \cdots p_n + 1 = r p_k$ и, очевидно, $p_1 p_2 \cdots p_n$ тоже делится на p_k. Но тогда на p_k должна делиться и $1 = r p_k - p_1 p_2 \cdots p_n$?! Противоречие доказывает теорему.

Метод математической индукции

Еще одно правило доказательства теорем — *метод математической индукции.* Это правило заключается в следующем. Пусть нам надо доказать предложение $\forall n\ P(n)$ (на самом деле это сокращенная запись предложения: "$(\forall n)\ \big(n \in \mathbb{N} \Rightarrow P(n)\big)$").

Для доказательства сначала верность утверждения проверяется при $n = 1$; потом доказывается, что если оно верно для какого-то произвольного n, то оно верно и для $n+1$ и отсюда делается заключение о его справедливости для всех натуральных чисел. В краткой логической форме это можно представить в виде

$$P(1) \wedge \Big(\forall n\ \big(P(n) \Rightarrow P(n+1)\big)\Big) \Rightarrow (\forall n)P(n)$$

В качестве интуитивного обоснования этого метода полезно расположить силлогизмы один за другим:

Утверждение верно при $n = 1$, т.е. $P(1)$.	$P(1)$
Но из $P(1)$ следует $P(2)$.	$P(1) \Rightarrow P(2)$
Следовательно, верно $P(2)$.	$P(2)$
Опять, из $P(2)$ следует $P(3)$.	$P(2) \Rightarrow P(3)$
Следовательно, верно $P(3)$ и так далее...	$P(3)\ldots$
Значит, $P(n)$ верно при любом n.	$\forall n\ P(n)$

То есть правило непосредственного вывода применяется здесь *бесконечное* число раз ("*и так далее...*"), поэтому несмотря на кажущуюся интуитивно очевидную верность окончательного вывода, метод математической индукции не является следствием правила непосредственного вывода и, фактически, в каждой из систем оснований математики принимается за аксиому (чаще в более сильной форме принципа трансфинитной индукции).

Очень часто математическая индукция применяется для определения различных математических понятий и символов (такие определения называют *рекурентными* или *индуктивными*). Например

$$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \quad \text{и} \quad n! \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot (n-1)!$$

Иногда пишут $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. В этой интуитивно вполне ясной записи в виде многоточия спрятан процесс математической индукции.

Еще примеры:

$$\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m, \quad \sum_{k=m}^{m+n} a_k = \left(\sum_{k=m}^{m+n-1} a_k\right) + a_{n+m}$$

Здесь тоже процесс индукции чаще прячут в многоточие

$$\sum_{n=m}^{m+n} a_k \stackrel{\text{def}}{=} a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+n}$$

Аналогично определяется символ

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

Отметим, что индуктивное определение “легко пояснить машине”, т.е. запрограммировать, в противоположность интуитивно более понятной человеку записи с многоточием.

Бином Нью́тона

В качестве примера применения метода математической индукции мы хотим доказать формулу бинома Нью́тона. Для этого положим

$$C_n^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 \quad \text{и} \quad C_n^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{k-\text{сомножителей}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(первую формулу определения C_n^k применять на практике предпочтительнее, так как она требует меньше вычислений, кроме того, она допускает обобщение на нецелые n, что оказывается очень полезным).

Числа C_n^k называют биномиальными коэффициентами. В иностранной литературе их часто обозначают $\binom{n}{k}$.

Биномиальные коэффициенты обладают рядом замечательных свойств, из которых нам в доказательстве следующей ниже теоремы понадобятся два:

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \qquad C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k.$$

Эти свойства достаточно очевидны из определения и полное их доказательство остается в качестве легкого упражнения.

Теорема. *При любом натуральном n справедлива формула*:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k =$$

$$= x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}y^2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2!}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 1$ имеем очевидное равенство:

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} C_n^k x^{n-k} y^k = C_1^0 x^1 y^0 + C_1^1 x^0 y^1 = x + y.$$

Докажем теперь при любом n верность импликации $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, где

$$P(n) = \text{“}\ (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k\ \text{”}$$

Имеем,

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \overset{\substack{\text{если}\\ P(n)\\ \text{верно}}}{=} (x+y) \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^{k+1} = *$$

Во второй сумме заменим индекс суммирования по формуле $k + 1 = k'$. Тогда k' будет изменяться от 1 до $n + 1$:

$$* = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n+1-k} y^k + \sum_{k'=1}^{n+1} C_n^{k'-1} x^{n+1-k'} y^{k'} = *$$

Теперь опять во второй сумме вместо k' будем писать k (от этого ничего не изменится!) и в первой сумме выделим первое слагаемое (при $k = 0$), а во второй — последнее (при $k' = n + 1$):

$$* = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} = *$$

Объединим теперь две суммы в одну и воспользуемся равенствами: $C_{n+1}^0 = 1$, $C_{n+1}^{n+1} = 1$ и $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$:

$$* = x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0 x^{n+1} y^0 + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k x^{n+1-k} y^k + C_{n+1}^{n+1} x^0 y^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k x^{n+1-k} y^k.$$

Что и требовалось доказать.

Частные случаи бинома являются полезными формулами:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k =$$

$$= x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3} + \cdots$$

Отсюда при $x = 1$ и $x = -1$, находим

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

Упражнения

1. Выписать все слагаемые формулы бинома Ньютона

a. $(1+x)^5$ b. $(a+b)^6$

c. $(x+y)^7$ d. $(a-b)^8$

2. Найти коэффициент при x^3 в разложении выражения

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16}$$

по формуле бинома Ньютона.

3. Доказать равенства

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$ *b.* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} kC_n^k = 0$

c. $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^n = C_{n+m+1}^{n+1}$ *d.* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} C_n^k}{k+1} = \frac{n}{n+1}$

Вычислить суммы.

a. $\sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)C_n^k$ b. $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$ c. $\sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)C_n^k$

d. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}$ e. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k}$ f. $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1} C_n^k}{k+1}$

g. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1}$ h. $\sum\limits_{k=0}^{s} C_n^k C_m^{s-k}$ i. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k (C_n^k)^2$

Указания. В пункте b приравнять коэффициенты при x^n в тождестве $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ расписанном по формуле бинома. В пункте d. воспользоваться легко проверяемым равенством

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$$

Добавление о математической индукции.

В качестве следующего примера применения метода математической индукции докажем следующее очень полезное равенство:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}. \tag{!!!}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $P(n)$ доказываемое равенство. Видим, что при $n=1$ имеем верное (по определению знака $\sum$) равенство

$$\sum_{k=1}^{1}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_2.$$

Остаётся доказать, что из верности равенства $P(n)$ вытекает верность равенства $P(n+1)$.

Имеем,

$$\sum_{k=1}^{n+1}(a_k - a_{k+1}) \overset{\substack{\text{по опр.}\\ \text{знака}\\ \sum}}{=} \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) \overset{\substack{\text{т.к.}\\ P(n)\\ \text{верно}}}{=}$$
$$= a_1 - a_{n+1} + (a_{n+1} - a_{n+2}) = a_1 - a_{n+2}.$$

Сравнивая начало и конец, видим, что $P(n+1)$ верно. Что и требовалось доказать.

Отметим, что *интуитивно* указанное равенство достаточно очевидно, если его “расписать менее формально”:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) =$$
$$= a_1 - a_{n+1}.$$

(все слагаемые сокращаются за исключением первого и последнего). Но эта выкладка не может считаться *строгим* доказательством нашего равенства, хотя легко преобразуется в строгое доказательство методом математической индукции, как это проделано выше.

Применим полученное равенство для вывода некоторых полезных формул.

1. Вычислим сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin nx$.

$$\sum_{k=1}^{n} \sin nx = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin nx \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} [\cos \ n - \frac{1}{2} \ x - \cos \ n + \frac{1}{2} \ x}{2 \sin \frac{x}{2}} = *$$

Обозначая $a_n = \cos(n - \frac{1}{2})x$, видим, что тогда $a_{n+1} = \cos \ n + \frac{1}{2} \ x$, поэтому к числителю можно применить формулу (!!!):

$$* = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos \ n + \frac{1}{2} \ x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{n}{2}x \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

(Для получения последнего равенства мы воспользовались формулой разности косинусов).

2. **Задача.** Вычислить (аналогичной выкладкой) сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos nx$.

Замечание. Последние две суммы применяются в *теории рядов Фурье*, которую Вы будете изучать на втором курсе, поэтому знать, как они вычисляются очень полезно.

3. Вычислим сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$. Для этого обозначим через $a_k = \frac{k}{2^k}$ и посчитаем разность $a_k - a_{k+1}$:

$$a_k - a_{k+1} = \frac{k}{2^k} - \frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \quad \frac{k}{2^k} - \frac{1}{2^k} \quad .$$

Просуммируем полученные равенства по k от 1 до n:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \quad \frac{k}{2^k} - \frac{1}{2^k} \quad = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \qquad (\star)$$

Сумма в левой части последнего равенства вычисляется по формуле (!!!):

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

Последняя сумма в правой части равенства ($\star$) тоже легко считается:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

(мы воспользовались формулой суммы геометрической прогрессии).

Подставляя найденные суммы в равенство ($\star$), находим искомую сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 \quad \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \quad = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Метод обратной математической индукции

Ещё один метод, связанный с методом математической индукции, часто применяется для доказательства некоторых утверждений. Это, так называемый, *метод обратной математической индукции*. Он заключается в следующем. Пусть надо доказать утверждение $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$. Для этого проверяется справедливость двух утверждений:

1. Для любого натурального n найдётся такое k, что $k \geqslant n$ и $P(k)$ — верно.

$$\forall k\ \exists n \quad n > k \wedge P(n)$$

(не путать порядок следования кванторов! Если его поменять, получится тождественно ложное высказывание.)

2. Для любого k из выполнения $P(k)$ следует выполнение $P(k-1)$, т.е. справедлива импликация

$$\forall k\ P(k) \Rightarrow P(k-1).$$

Если эти два утверждения верны, то верно и доказываемое $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$.

Строгого доказательства этого метода мы приводить здесь не будем, а интуитивная вероcть его очевидна (разумеется, после некоторого размышления).

В качестве примера применения метода обратной математической индукции докажем *неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим*:

$$\forall k\ a_k \geqslant 0 \Rightarrow \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n}$$

или, в менее формальной записи (при $a_k \geqslant 0$)

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}. \qquad (\times)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $P(n)$ неравенство $(\times)$. Докажем методом математической индукции верность неравенства $P(2^k)$ при любом $k \geqslant 1$.

При $k = 1$ имеем $\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2}$ — верное неравенство, доказательство которого известно со школы:

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0 \Rightarrow a_1 - 2\sqrt{a_1 \cdot a_2} + a_2 \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{a_1 \cdot a_2} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Докажем справедливость неравенства $P(2^{k+1})$ при условии, что неравенство $P(2^k)$ верно.

$$\sqrt[2^{n+1}]{\underbrace{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2^n}}_{2^n \text{ сомножителей}} \cdot \underbrace{a_{2^n+1} \cdots a_{2^{n+1}}}_{2^n \text{ сомножителей}}} = \sqrt{\sqrt[2^n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2^n}} \cdot \sqrt[2^n]{a_{2^n+1} \cdots a_{2^{n+1}}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt[2^n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2^n}} + \sqrt[2^n]{a_{2^n+1} \cdots a_{2^{n+1}}}}{2} \leqslant \frac{\frac{a_1+\cdots+a_{2^n}}{2^n} + \frac{a_{2^n+1}+\cdots+a_{2^{n+1}}}{2^n}}{2} =$$

$$= \frac{a_1 + \ldots a_{2^{n+1}}}{2^{n+1}}.$$

Докажем теперь, что для любого $n \geqslant 3$ имеем $P(n) \Rightarrow P(n-1)$. Для этого обозначим $S = \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$. Тогда $a_1 + \cdots + a_{n-1} = (n-1)S$ и

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_{n-1} \cdot S} \overset{\substack{\text{т.к.} \\ P(n) \\ \text{верно}}}{\leqslant} \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + S}{n} = \frac{(n-1)S + S}{n} = S.$$

Теперь верность $P(n-1)$ легко получается:

$$a_1 \cdots a_{n-1} \cdot S \leqslant S^n \Rightarrow a_1 \cdots a_{n-1} \leqslant S^{n-1} \Leftrightarrow \sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{n-1}} \leqslant S.$$

Что и требовалось доказать.

Лекция 3.
Некоторые понятия теории множеств

Теория множеств — это большой и самостоятельный раздел математики, сколько-нибудь полное изложение хотя бы основ которого потребовало бы не менее семестрового курса. Поэтому мы остановимся только на самых необходимых для анализа понятиях и обозначениях. Более полное ее изложение должно быть проведено в других дисциплинах (например, в дискретной математике). Отметим еще, что ни сколько не боясь попасть в "порочный круг", всюду в дальнейшем мы без специальных оговорок в качестве материала для примеров будем использовать такие хорошо знакомые со школы множества (и их части), как $\mathbb{N}$ — все натуральные числа, $\mathbb{Z}$ — все целые числа, $\mathbb{Q}$ — все рациональные числа, $\mathbb{R}$ — все действительные числа.

Первичными (и основными) понятиями теории множеств принято считать *множество* и *отношение принадлежности* $\in$. Эти понятия не определяются через другие (более простые), а полностью характеризуются своими свойствами, выражаемыми в *аксиомах теории множеств*. Наиболее известными аксиоматизациями теории множеств (из *эквивалентных*) являются: NGB — Неймана-Гёделя-Бернайса и ZF — Цермело-Френкеля.

Мы не будем приводить здесь списков ни той ни другой систем аксиом, а воспользуемся, так называемым, “наивным” подходом к изложению основных из необходимых нам понятий. Практика показывает, что “осторожное” использование такого подхода не приводит к противоречиям.

Множества

Итак, *множество* мы должны представлять себе как некое собрание, совокупность, коллекцию, объединение в одно целое *различимых* элементов (предметов, объектов) “произвольной природы” (на самом деле исключительно математической, т.е. множеств, чисел, функций и т.п.). Отношение $x \in A$ (или $A \ni x$) читается так: “(*элемент*) x принадлежит (множеству) A” или “x является *элементом* (множества) A” или “(множество) A содержит (*элемент*) x”.

Если элемент x *не принадлежит* множеству A (т.е. $\neg(x \in A)$), то пишут $x \notin A$ или $x \overline{\in} A$ (или, реже, $A \not\ni x$, $A \overline{\ni} x$)

Всякое множество однозначно определяется набором своих элементов:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

(множества A и B равны, когда всякий элемент x принадлежит множеству A тогда и только тогда, когда принадлежит B)

Если имеет место импликация только в одну сторону, например,

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B),$$

(всякий элемент из A является одновременно элементом и B) то говорят, что “A является *подмножеством* B” или “A содержится в B” и пишут

$$A \subset B \quad (\text{или } A \subseteq B)$$

Таким образом,

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

(каждый элемент из A принадлежит B и наоборот.)

Иногда множества задают простым перечислением всех элементов (в фигурных скобках). Например, $\{a, b, c\}$ — множество, состоящее из трех элементов. Но основной способ построения множеств дает следующая конструкция.

> Принцип выделения. Если $P(x)$ некоторое свойство которым может обладать (или не обладать) элемент (предмет) x, то *существует множество* $\{x : P(x)\}$, состоящее *в точности из всех* тех x (и только тех), для которых свойство $P(x)$ выполняется.

Например, $\{x : x^2 + 5x - 3 = 0\}$ — множество, состоящее из двух элементов — корней этого квадратного трехчлена;

$\varnothing = \{x : x \neq x\}$ — пустое множество, т.е. множество не содержащее ни одного элемента (так как нет элементов не равных самим себе); к примеру, имеет место равенство

$$\varnothing = \{x : x \neq x\} = \{x : x - \text{действительное число и } x^2 + 1 = 0\}$$

Такой способ построения новых множеств вызвал наибольшие возражения у математической общественности из-за того, что его *неограниченное* применение приводит к *парадоксам.* Например, хорошо известен парадокс Рассела.

Определим "множество" $A = \{x : x \notin x\}$ (это все те и только те множества, которые не являются своим элементом). И посмотрим, какое из отношений верно $A \in A$ или $A \notin A$ (согласно закону [логики] "исключенного третьего", третьего не дано! Другие возможности исключены!).

> Если предположить, что $A \in A$, то оно не обладает *определяющим* для A свойством $(x \notin x)$ и поэтому не должно принадлежать A, т.е. $A \notin A$?!
>
> Если же предположить, что $A \notin A$, то тогда оно обладает определяющим свойством $(x \notin x)$ и поэтому должно принадлежать множеству A, т.е. $A \in A$?!

Анализ этого и других (подобных и нет) парадоксов привел к пересмотру всех оснований математики. Мы не хотим отвлекаться на описании и перечислении всех следствий этого процесса[1], укажем только, что было выяснено наличие достаточно простых выходов для избавления от подобных противоречий.

Один из таких выходов (в аксиоматике NGB) предлагает различать "множества" и "классы", а принцип выделения допускать *только для множеств*[2]. Таким образом, $\{x : P(x)\}$ читается как "класс ***множеств*** x

[1]интересующихся популярным изложением этой истории мы отсылаем к книге М. Клайна "Математика. Утрата определенности." М.: Мир, 1984

[2]в аксиоматике NGB кроме классов и отношения принадлежности больше ничего нет. Множества, числа, функции и т.п. являются некоторыми специальными классами

которые обладают свойством $P(x)$" (фактически, каждый класс отождествляются со свойством, которым может обладать или нет *множество*).

При таком подходе все множества являются одновременно классами, но не все классы являются множествами. Множества — по определению это только те классы, которые являются *элементами* какого-нибудь другого класса. А парадокса не возникает, потому что, например, класс всех классов, не принадлежащих самим себе, построить не удается, так как $\{x : x \notin x\}$ — это класс всех *множеств* не принадлежащих самим себе (а не класс классов).

Интуитивно "собственные" классы (т.е. не являющиеся множествами) — это очень большие совокупности типа класса всех множеств или, как в парадоксе Рассела, класса всех множеств, не являющихся своим элементом. При этом парадокс превращается в *доказательство* того, что соответствующий класс не является множеством.

Задача Доказать, что класс $\mathfrak{M} = \{x : x - \text{множество}\}$ (класс всех множеств) не является множеством.

Операции над множествами

Над множествами (впрочем, и над классами) можно производить следующие операции:

1) Объединение $A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in A \vee x \in B\}$ ($A \cup B$ состоит в точности из таких элементов, которые имеются или в A или в B)

2) Пересечение $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ ($A \cap B$ состоит *только* из тех элементов, которые имеются и в A и в B одновременно)

3) Разность $A - B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ ($A - B$ состоит только из тех элементов, которые есть в A, но нет в B. Другое обозначение разности множеств — $A \setminus B$)

4) Симметрическая разность $A \dot{-} B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$ ($A \dot{-} B$ состоит из тех элементов, которые есть в A, но нет в B или есть в B, но нет в A, т.е. имеет место равенство

$$A \dot{-} B = (A - B) \cup (B - A).$$

(Другое обозначение для симметрической разности — $A \vartriangle B$ или $A \triangleq B$)

5) Дополнение $A^c \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \notin A\}$ (другие обозначения: $\overline{A}$ или $\complement A$). Это определение обычно употребляется, когда фиксировано некоторое "*универсальное*" множество (например) $\mathbf{U}$, подмножеством которого является A (и все другие изучаемые в тот момент множества). И на самом деле *подразумевается*, что A^c состоит только из элементов $\mathbf{U}$, не принадлежащих A,

т.е. $A^c = \{x : x \in \mathbf{U} \wedge x \notin A\}$. В общем же случае определение $\{x : x \notin A\}$ задает *класс*, который не является множеством.

6) Пусть E — множество, тогда через $\mathfrak{P}(E)$ (или 2^E) обозначается класс всех подмножеств множества E:

$$\mathfrak{P}(E) = \{X : X \subset E\}.$$

Несмотря на то, что этот класс является множеством[1], его часто продолжают называть "классом всех подмножеств множества E" (чтобы, избежать некрасивого словосочетания "множество всех подмножеств множества E").

Пример. Пусть $E = \{a, b, c\}$, тогда

$$\mathfrak{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

Видим, что $\mathfrak{P}(E)$ содержит $2^3 = 8$ элементов.

Задача. Доказать, что когда E состоит из n элементов, $\mathfrak{P}(E)$ содержит 2^n элементов (отсюда обозначение $2^E = \mathfrak{P}(E)$).

Свойства операций над множествами

Следующие свойства операций над множествами вытекают непосредственно из определений.

1. Коммутативность объединения и пересечения:

$$A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A.$$

2. Ассоциативность объединения и пересечения:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения и дистрибутивность пересечения относительно объединения:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

[1] a priori это ни откуда не следует, но постулируется в аксиоматике NGB (когда E множество)

4. Если A, B — подмножества $\mathbf{U}$, то тогда

$$\begin{aligned}
&A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A,\\
&A \subset A \cup B,\\
&A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B,\\
&A \cup A^c = \mathbf{U}, \quad A \cap A^c = \varnothing,\\
&(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,\\
&(A \cap B)^c = A^c \cup B^c,\\
&(A^c)^c = A.
\end{aligned}$$

Произведение множеств, графики, отношения

Следующие ниже понятия теории множеств являются главными для математического анализа.

Определение. Пусть X, Y — множества и $x \in X$, $y \in Y$. *Упорядоченная пара* (x, y) в аксиоматике определяется как множество $\big\{x, \{x, y\}\big\}$. Мы не хотим здесь обсуждать всех следствий такого определения, отметим только, что чтобы правильно пользоваться этим понятием, надо представлять себе упорядоченную пару (x, y), просто как пару элементов, выписанных в определенном порядке[1]: первый элемент — это x, второй — y.

Главное свойство, являющееся определяющим для упорядоченной пары, заключено в том, что при сравнении двух пар (x_1, y_1) и (x_2, y_2) они могут совпадать тогда и только тогда, когда совпадают соответственно их первые и вторые элементы:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2.$$

(легкое, но полезное упражнение — доказать исходя из определения этот факт. Отметим еще, что для множеств это свойство не выполнено и всегда имеет место равенство $\{x, y\} = \{y, x\}$, но при $x \neq y$ для упорядоченных пар $(x, y) \neq (y, x)$.)

Если X и Y — два множества, то их *декартовым произведением* (или просто *произведением*) называют множество *всех* упорядоченных пар (x, y), первый элемент которых принадлежит X, а второй — Y.

$$X \times Y \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$

[1] На самом деле по мнению многих, в том числе и автора, понятие функции является столь же “первичным”, как и множества. Фактически, аксиома пары “легализует” существование “простейших” функций, позволяя дать “строгое” определение “общих” функций.

Примеры. 1) Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{\bigcirc, \triangle, \square, \smiley\}$. Для того чтобы увидеть *все* упорядоченные пары с первым элементом из X, а вторым из Y, составим таблицу:

$X \setminus Y$	$\bigcirc$	$\triangle$	$\square$	$\smiley$
1	$(1, \bigcirc)$	$(1, \triangle)$	$(1, \square)$	$(1, \smiley)$
2	$(2, \bigcirc)$	$(2, \triangle)$	$(2, \square)$	$(2, \smiley)$
3	$(3, \bigcirc)$	$(3, \triangle)$	$(3, \square)$	$(3, \smiley)$

Видим, что всех возможных пар с первым элементом из X, а вторым из Y всего 12 штук.

2) Пусть $(a; b)$ и $(c; d)$ — два интервала на прямой. По аналогии с предыдущим примером, очевидно, их декартово произведение $(a; b) \times (c; d)$ можно отождествить с точками прямоугольника на плоскости.

В случае, когда в произведении оба сомножителя равны, пишут $X \times X = X^2$ и полученное произведение называют *декартовым квадратом* множества X.

Так, например, в соответствии с предыдущим, декартов квадрат множества всех действительных чисел $\mathbb{R}^2$ можно отождествить с множеством всех точек плоскости, если фиксировать на ней (прямоугольную) систему координат и сопоставить каждой паре чисел (x, y) точку плоскости с такими координатами.

Определение. Говорят, что G — *график* (в произведении $X \times Y$), если G — подмножество в $X \times Y$:

$$G \text{ — график } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} G \subset X \times Y.$$

При этом полагают

$$\operatorname{dom} G \overset{\text{def}}{=} \{x : \exists y \ (x, y) \in G\} \qquad \text{(от слова domain)}$$

$$\operatorname{ran} G \overset{\text{def}}{=} \{y : \exists x \ (x, y) \in G\} \qquad \text{(от слова range)}$$

$\operatorname{dom} G$ называют *областью определения* графика G, а $\operatorname{ran} G$ называют *областью значений* графика G. Отметим, что при этом множество X называют *областью отправления* графика G и в общем случае $X \neq \operatorname{dom} G$; множество Y называют *областью прибытия* графика G и, вообще говоря, $Y \neq \operatorname{ran} G$ тоже.

В случае, когда пара (x, y) принадлежит графику G этот факт обозначают одним из приводимых ниже способов:

$$(x, y) \in G \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} G : x \mapsto y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \overset{G}{\mapsto} y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} y = G(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \, G \, y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} y = G_x.$$

Из определений следует, что $G \subset (\operatorname{dom} G) \times (\operatorname{ran} G) \subset X \times Y$.

Если X множество и R график в декартовом квадрате X^2, то R часто называют *отношением* в X. При такой терминологии чаще всего вместо $(x, y) \in R$ пишут $x\,R\,y$ и говорят, что (элемент) x находится в отношении R с (элементом) y.

Примеры. 1) Пусть X — произвольное непустое множество. Обозначим через R *диагональ* декартова квадрата X^2:

$$R = \{(x, y) : x = y\}$$

Тогда $(x, y) \in R$ или, что то же самое $x\,R\,y$, означает $x = y$. И поэтому можно написать $R \stackrel{\text{def}}{=} =$ (т.е. R — отношение равенства в множестве X).

2) Пусть $X = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{Q}$). По определению положим $R \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \leqslant y\}$. То есть $R = \leqslant$. И в этом случае преимущество записи $x \leqslant y$ перед $(x, y) \in \leqslant$ ни у кого не вызывает сомнений.

Следующее обобщение последнего примера нам понадобится в дальнейшем.

Определение. Отношение R в X называют *отношением порядка* (или иногда *отношением частичного порядка*), если оно обладает свойствами:

1. $\forall x \in X\ xRx$ (рефлексивность),
2. $\forall x, y \in X\ xRy$ и $yRx \Rightarrow x = y$ (антисимметричность),
3. $\forall x, y, z \in X\ xRy$ и $yRz \Rightarrow xRz$ (транзитивность).

Примеры. 1) Пусть $X = \mathfrak{P}(E)$ и

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{(A, B) : A \subset E\ \wedge\ B \subset E\ \wedge\ A \subset B\}.$$

Очевидно, на подмножествах из E отношение R совпадает с $\subset$ (но в общем случае, если быть педантичным, написать равенство $R = \subset$ нельзя, так как $\subset$ имеет областью отправления класс *всех* множеств, а R только $\mathfrak{P}(E)$ — всех подмножеств из E).

2) Положим $X = \mathbb{N}$ и $\succcurlyeq = \{(n, m) : n$ делится нацело на $m\}$. То есть мы пишем $n \succcurlyeq m \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} n$ делится нацело на m. Рефлексивность, антисимметричность и транзитивность этого отношения вполне очевидна. Таким образом, $\succcurlyeq$ — отношение порядка.

Еще один тип отношений очень часто встречается в математике.

Определение. Говорят, что R — *отношение эквивалентности* на множестве X, если оно обладает свойствами:

1. $\forall x \in X\ xRx$ (рефлексивность)
2. $\forall x, y \in X\ xRy \Rightarrow yRx$ (симметричность)
3. $\forall x, y, z \in X\ xRy$ и $yRz \Rightarrow xRz$ (транзитивность)

Подробнее мы изучим такие отношения немного позже, а сейчас рассмотрим несколько примеров.

Примеры. 1) Пусть X — произвольное (непустое) множество. По определению положим

$$xRy \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in X \ \wedge \ y \in X \ \wedge x = y.$$

Это отношение R называют *отношением равенства* на X. Очевидно, оно является отношением эквивалентности.

2) На множестве всех целых чисел $\mathbb{Z}$ определим отношение $\overset{(p)}{=}$ по правилу:

$$m \overset{(p)}{=} n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} m - n \text{ делится нацело на число } p$$

Его рефлексивность следует из того, что для любого n число $n - n = 0$ делится на p.

Симметричность: если $m - n$ делится на p, то и $n - m = -(m - n)$ делится на p.

Транзитивность: если $m - n$ делится на p и $n - k$ делится на p, то $m - k = (m - n) + (n - k)$ делится на p (на p делится каждое слагаемое).

Таким образом, $\overset{(p)}{=}$ — отношение эквивалентности.

Функция

Одним из самых главных понятий для анализа (и математики вообще) является *функция*. Мы приводим здесь полностью формализованное его определение, главное преимущество которого по сравнению с обычным "школьным" (функция — это правило, сопоставляющее каждому элементу x из X ровно один элемент y из Y) состоит в том, что из него видно, что с функциями можно поступать так же как с другими математическими объектами (множествами, числами,...), объединяя их *в множества* по какому-нибудь *признаку* и изучать свойства полученной совокупности. А делать это с "правилами", которые что-то чему-то "сопоставляют" как-то неуютно. По сути же, приводимое определение означает в точности то же самое, что и обычное "школьное". Поэтому, чтобы хорошо понять приводимое формальное определение функции, надо постоянно держать в уме стандартное "школьное".

Определение. Пусть X и Y — (непустые) множества и $f \subset X \times Y$ — график. Тройку (X, Y, f) называют функцией, если:

1) $\operatorname{dom} f = X$;

2) f — функциональный график, т.е.

$$(\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2) \quad ((x, y_1) \in f) \wedge ((x, y_2) \in f) \Rightarrow (y_1 = y_2).$$

В соответствии с нашими договоренностями об обозначениях, последнее свойство можно переписать в виде

$$(\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2) \quad (y_1 = f(x)) \wedge (y_2 = f(x)) \Rightarrow (y_1 = y_2).$$

т.е. если два элемента y_1 и y_2 соответствуют одному и тому же x, то они обязаны совпадать! Очевидно, это то же самое, что одному элементу x *должен* соответствовать в точности один элемент y. О чем и говорится в "школьном" определении: "…каждому x из X (т.е. $\operatorname{dom} f = X$) сопоставляется *ровно один*! $y \in Y$".

Из этого определения видим, что функция (X, Y, f) и ее график f — это, по сути, одно и то же![1] Но график это просто подмножество из декартова произведения $X \times Y$, обладающее двумя (достаточно простыми) свойствами 1) и 2). Поэтому с функциями можно обращаться как с обычными множествами, в частности, объединять их по какому-нибудь признаку, составляя из них новые множества. Например, через Y^X (или $\mathcal{F}(X, Y)$, или $X \to Y$) обозначают множество всех функций, определенных на X со значениями в Y. В дальнейшем будут точно определены такие множества, как $\mathcal{B}(X)$ — всех ограниченных числовых функций, определенных на X, $C(X)$ — всех непрерывных функций на X и т.д.

Отметим еще, что вместо обозначения (X, Y, f) для функции общепринято более соответствующее нашей интуиции своей наглядностью обозначение $f : X \to Y$ (хотя, более логично было бы писать $f \in X \to Y$).

Конкретные функции определяются обычно с помощью принципа выделения посредством задания свойства (правила, условия), по которому мы должны выделить график (т.е. подмножество) из декартова произведения.

Например, $\{(x, y) : y = ax^2 + bx + c \wedge x \in \mathbb{R}\}$ задает квадратичную функцию.

Более сложно задаются тригонометрические функции. Скажем, функция $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, как следует из "школьного" определения, задается так:

> $(x, y) \in \sin$ (или $y = \sin x$) тогда и только тогда, когда y — это ордината конца *единичного* радиус-вектора (с началом в нуле), повернутого против часовой стрелки от оси абсцисс на угол x (в радианах или на дугу длины x единичной окружности).

[1] Не совсем. Хотя множество X однозначно восстанавливается по графику f, множество Y уже этим свойством не обладает. И по определению мы две функции (X, Y, f) и (X, Y', f), отличающиеся *только* областью прибытия, должны считать различными!

Приведем некоторые важные понятия, связанные с функцией. Пусть $f : X \to Y$ — функция, определенная на X со значениями в Y. Тогда:

$f(x)$ — *значение* функции f в точке x, когда x — *элемент* области определения X. Это обозначение не рекомендуют путать со следующим очень похожим обозначением:

$f(A)$ — *образ* множества A. По определению это *множество* всех тех элементов y, в которые “отображаются” (посредством f) элементы x из A:

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{y : (\exists x) x \in A \wedge y = f(x)\}.$$

Из этого определения видим, что, например, образ множества, состоящего из одного элемента x, это $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ — *множество*, состоящее из одного элемента $f(x)$, а его надо различать с самим элементом $f(x)$.

$f^{-1}(B)$ — *прообраз* множества B. Когда B — подмножество из области прибытия Y функции f, по определению это все те x из области определения X, которые f отображает в B:

$$f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (\exists y)\ y \in B \wedge y = f(x)\}.$$

В частности, если B не пересекается с областью значений функции $\operatorname{ran} f$, то $f^{-1}(B) = \varnothing$, даже если $B \neq \varnothing$ (чего никогда не бывает с образами множеств).

Теорема. *Для образов и прообразов множеств при отображении f имеют место соотношения*:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \tag{1}$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \tag{2}$$
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \tag{3}$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \tag{4}$$

Доказательство. Докажем равенство (1). Для этого докажем, что всякий элемент из $f(A \cup B)$ принадлежит $f(A) \cup f(B)$ и обратно.

Итак, пусть $y \in f(A \cup B)$. Тогда, по определению найдется такой элемент $x \in A \cup B$, что $y = f(x)$. Но так как x принадлежит A или B (или обоим одновременно), $f(x)$ будет принадлежать $f(A)$ или $f(B)$, то есть $f(x) = y \in f(A) \cup f(B)$.

Обратно, если $y \in f(A) \cup f(B)$, то y принадлежит $f(A)$ или $f(B)$. Поэтому найдется такой элемент x из A или из B, что $y = f(x)$. Но тогда $x \in A \cup B$, поэтому $y = f(x) \in f(A \cup B)$. Что и требовалось доказать.

Доказательства остальных соотношений ничуть не труднее и остается в качестве упражнения. Отметим только, что соотношение (2) выделяется в этом списке отсутствием равенства (в общем случае). Чтобы понять в чем тут дело, рассмотрим пример:

> Пусть $f(x) = \sin x$. Возьмем $A = [0; \frac{\pi}{2}]$, $B = [2\pi; \frac{5\pi}{2}]$. Очевидно, тогда $f(A) = f(B) = [0; 1]$, значит, $f(A) \cap f(B) = [0; 1]$. Но так как $A \cap B = \varnothing$, имеем $f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing$.

Лекция 4.
Последовательности и семейства

Функции в математике возникают повсюду и в одном и том же математическом исследовании могут встречаться совершенно "разнородные" функции. Чтобы как-то группировать "однородные" и различать "разнородные" функции в математике имеется много синонимов слова "функция". В дальнейшем мы часто будем употреблять такие как "отображение", "оператор", "функционал" и другие.

Названия функций могут отражать их геометрический или физический смысл, например: "мера", "интеграл", "емкость", "потенциал"; и даже начертание при записи. К последним относятся такие термины, как "последовательность" и "семейство", к определению которых мы и приступаем.

Определение. *Последовательность* — это функция, областью определения которой является множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел[1], причем используются индексные обозначения для значений на аргументе n, то есть пишут x_n вместо $x(n)$. Если ее областью прибытия является какое-то множество X, то такую последовательность называют *последовательностью элементов* (*множества*) X. При этом, вместо $x : \mathbb{N} \to X$ пишут $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ или $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (или просто (x_n), когда не может возникнуть недоразумений). Иногда (особенно в старых книгах) для обозначения последовательности употребляют фигурные скобки: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что, вообще говоря, не желательно, так как может вызвать некоторую путаницу, как будет видно из дальнейшего.

Задают последовательности очень часто либо с помощью формулы, по которой вычисляется "*общий член последовательности*" x_n (т.е. значение

[1] или, иногда $\mathbb{Z}$, или его подмножества, например, $\{0\} \cup \mathbb{N}$

последовательности на произвольном натуральном числе n), либо выписывая в строку (через запятую) несколько "первых членов последовательности[2]" (т.е. *значений* последовательности на первых натуральных числах):

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

Например, (задача 113 из задачника Б.П. Демидовича [11])

$$x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}.$$

или (задача 114 из того же задачника)

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{1}{8}, \ \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots$$

Очень рекомендуется не путать (особенно математикам; филологам или юристам можно!) последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и ее множество значений $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (сокращая, пишут еще просто $\{x_n\}$). Например, если последовательность $x_n = (-1)^n$, то есть

$$-1, \ 1, -1, \ 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

то ее множество значений $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ состоит всего из двух элементов (а не бесконечного числа -1 и $+1$). Ошибка здесь часто возникает потому, что значение последовательности на аргументе n, то есть x_n, строго говоря не является *элементом* последовательности. Последовательность, как и всякую другую функцию, можно считать подмножеством декартова произведения и тогда ее *элементами* являются упорядоченные пары (n, x_n). А их в последовательности всегда бесконечно много. Например, в рассмотренной выше последовательности $x_n = (-1)^n$ имеется бесконечно много э л е м е н т о в:

$$\{(1,-1), (2,1), (3,-1), (4,1), \ldots, (n, (-1)^n), \ldots\}.$$

Обобщением понятия "последовательности" является понятие "семейства".

Определение. Пусть I и X — два множества. Функцию x из I в X называют *семейством* элементов из X, если ее аргумент записывают в виде индекса, и в этом случае применяют обозначения:

$$(x_i)_{i\in I} \text{ — семейство}; \quad x_i \text{ — его значение на элементе } i$$

[2]как будет видно ниже, не следует говорить "первых элементов последовательности"

Очень часто термин “семейство” употребляется для обозначения функций принимающих значения в множествах, элементами которых являются другие множества, например, в $\mathfrak{P}(E)$ (т.е. когда область прибытия функции $= \mathfrak{P}(E)$). В этом случае вместо слов:

> “Пусть $X : I \to \mathfrak{P}(E)$ — функция на множестве I со значениями в классе всех подмножеств множества $E \ldots$

пишут

> “Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство подмножеств из $E \ldots$”

что выглядит элегантнее по форме и легко воспринимается по смыслу.

С произвольными семействами множеств $(X_i)_{i\in I}$ в математике очень часто производятся следующие операции:

1) *Объединение семейства множеств* $(X_i)_{i\in I}$:

$$\bigcup_{i\in I} X_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (\exists i)\ x \in X_i\}$$

(это в точности те элементы x, которые принадлежат хотя бы одному X_i)

2) *Пересечение семейства множеств* $(X_i)_{i\in I}$:

$$\bigcap_{i\in I} X_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (\forall i)\ x \in X_i\}$$

(те элементы x, которые принадлежат одновременно всем X_i)

3) *Прямое произведение семейства множеств* $(X_i)_{i\in I}$:

$$\prod_{i\in I} X_i \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_i)_{i\in I} : (\forall i)\ x \in X_i\}$$

Элементами этого множества являются всевозможные *семейства* $(x_i)_{i\in I}$, у которых “i-я компонента”[1] принадлежит множеству X_i.

В том частном случае, когда все X_i совпадают с одним и тем же множеством X, очевидно, произведение $\prod\limits_{i\in I} X_i = \prod\limits_{i\in I} X = X^I$ совпадает с множеством X^I всех функций определенных на I и со значениями в X (откуда и обозначение для множества всех функций!)

Наиболее часто в математике используются два типа семейств множеств: *покрытия* и *разбиения*.

[1]В русском языке есть слово “компонент”— мужского рода. *Математический* же термин “компонента”— женского рода и соответственно склоняется

Определение. Семейство $(X_i)_{i\in I}$ подмножеств из E называется *покрытием множества* $X \subset E$, если

$$\bigcup_{i\in I} X_i \supset X.$$

(что вполне согласовано с обыденным смыслом слова "покрытие" [1]: множества X_i в совокупности "покрывают" множество X)

Определение. *Разбиение множества* $X \subset E$ — это семейство $(X_i)_{i\in I}$ подмножеств из E, обладающее свойствами:

1. $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = X$;
2. $(\forall i, j) i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \varnothing$.

(тоже в согласии с обыденным пониманием того, что называется "разбить на части")

Очевидно, всякое разбиение является покрытием, но (вообще говоря) не наоборот!

Примеры. 1) $X_n = \left(\frac{1}{n}; 1\right)$. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — покрытие интервала $(0;1)$ (доказать!). Очевидно, оно не является разбиением, так как различные X_n и X_m пересекаются.

2) $X_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ $n = 1, 2, \ldots$ — разбиение интервала $(0;1)$. Так как

$$k \neq n \Rightarrow X_k \cap X_n = \varnothing, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = (0;1).$$

(Доказать.)

Замечание. Очень часто терминами "разбиение" и "покрытие" называют *не семейства* множеств, а *классы*[2] множеств с соответствующими свойствами[3]. Более точно, говорят, что *класс* множеств $\mathfrak{U}$ является покрытием множества X, если

$$\bigcup_{U\in\mathfrak{U}} U \supset X,$$

т.е. объединение всех элементов класса $\mathfrak{U}$ содержит X.

[1] Еще одно подходящее слово "накрытие" в математике используется для совершенно другого (более сложного) понятия

[2] здесь слово "класс" синоним слова "множество", употребляется только чтобы не говорить "множество множеств".

[3] Впрочем, любой класс (множество) можно легко превратить в семейство, взяв в качестве множества индексов его самого, а за семейство — тождественное отображение.

Класс множеств $\mathfrak{A}$ называется *разбиением* множества X, если
1) $\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{A}} A = X$,
2) $\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad A \neq B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$.

Оказывается разбиения очень тесно связаны с отношениями эквивалентности. А именно, имея разбиение $(X_i)_{i\in I}$ множества X можно определить отношение эквивалентности $\sim$ по правилу:

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists i)\ x \in X_i \wedge y \in X_i. \tag{$*$}$$

(Т.е. по определению считаем x и y эквивалентными тогда и только тогда, когда они лежат в одном и том же подмножестве X_i нашего разбиения. Рефлексивность, симметричность и транзитивность этого отношения очевидна.)

Обратно, всякое отношение эквивалентности $\sim$ на множестве X порождает разбиение (X_i) множества X, для которого $\sim$ получается по правилу $(*)$. А именно, положим

$$[x] \overset{\text{def}}{=} \{x' : x' \sim x\}$$

(т.е. через $[x]$ мы обозначили множество всех элементов эквивалентных фиксированному элементу x)

Теорема. *Множества $[x]$ и $[y]$ либо совпадают, либо не пересекаются.*

Доказательство. Если $x' \in [x] \cap [y]$, то по определению $x' \sim x$ и $x' \sim y$. Но тогда (по свойству симметричности) $x \sim x'$ и $x' \sim y$. Откуда по свойству транзитивности $x \sim y$. Значит, по свойству транзитивности, любой элемент из $[x]$ принадлежит $[y]$ и обратно, т.е. множества $[x]$ и $[y]$ совпадают, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы и вытекает, что всё множество X распадается на непересекающиеся “классы” $[x]$, образующие в совокупности разбиение.

Этот факт очень часто используется в математике. Полученное разбиение называют *фактор-множеством множества* X (построенным) по отношению $\sim$ и обозначают $X/\sim$.

Лекция 5.
Теория действительных чисел

В математике встречаются два основных типа определений. Первый — когда определяемый объект выделяется из уже определенного класса объектов посредством некоторого свойства, которым он должен обладать. Например, рациональное число — это дробь вида $\frac{p}{q}$ (или, если хотите, пара чисел (p, q)), где p — целое число, а q — натуральное. При этом дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{p'}{q'}$ отождествляются (т.е. считаются эквивалентными, записывают это $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$), тогда и только тогда, когда $pq' = qp'$. Таким образом, множество рациональных чисел — это фактор-множество $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/ =$.

Другой тип определения называется *аксиоматическим* и сводится к перечислению всех "характерных" свойств, которыми должен обладать определяемый объект. При таком определении необходимо показать, что объект с такими свойствами существует и притом "ровно один" (как правило, "с точностью до изоморфизма").

Существование устанавливают либо доказательством "непротиворечивости" характерных свойств (т.е. что из них нельзя вывести истинности A и $\neg A$ для какого-нибудь утверждения A теории) или "построением модели" определяемого объекта, т.е. приведением примера объекта со всеми перечисленными свойствами, откуда автоматически следует непротиворечивость (в случае непротиворечивости того, из чего моделируют).

Примером аксиоматического определения является определение множества. При этом построить какую-нибудь "модель" не удается, так как ее не из чего строить. Доказательство же непротиворечивости достаточно сложно и в настоящее время, например, доказано, что (при некоторых "естественных" ограничениях на методы) такого доказательства не существует вовсе!

Тем не менее, большинство математиков считают теорию множеств непротиворечивой (в той или иной степени общности) и, как правило, используют ее для построения всякого рода моделей математических объектов.

Мы определяем здесь множество действительных чисел *аксиоматически*, т.е. перечисляем *все "характерные"* свойства действительных чисел, выводим из них некоторые важные для дальнейшего следствия и затем строим модель этого множества. На доказательстве единственности мы не останавливаемся, так как для нас самым важным является вывод некоторых постоянно используемых в анализе свойств (а именно, существование точных граней у ограниченного множества и следствий свойства Архимеда).[1]

[1] Желающих более углубленно изучить различные определения и доказательства всех свойств действительных чисел мы отсылаем к книгам [2], [9]

Аксиомы действительных чисел

Отметим сначала, что термины "действительное число" и "вещественное число" — синонимы (второе название устаревшее[2]) и приведем еще одно определение.

Определение. *Алгебраическая операция* (*бинарная*) *на множестве* X это отображение $X \times X \to X$ (другое название: *внутренний закон композиции* на X)

Если $\top : X \times X \to X$ — алгебраическая операция, то обычно вместо $\top(x, y) = z$ пишут $x \top y = z$. Наиболее употребимыми знаками для обозначения алгебраических операций являются $+$, $\times$, $\cdot$, $-$, $:$, $\oplus$, $\otimes$, $\top$, $\perp$. Если на множестве X зафиксировали какую-нибудь алгебраическую операцию (или несколько, например, $\top$ и $\perp$), то говорят, что X *наделено* операцией (или двумя $\top$ и $\perp$).

Определение. Множеством действительных чисел $\mathbb{R}$ называется всякое множество, наделенное двумя алгебраическими операциями (обычно обозначаемыми $+$ и $\cdot$) и отношением (порядка, обозначаемым $\leqslant$), так что выполняются свойства (их называют аксиомами действительных чисел):

I. Относительно сложения $\mathbb{R}$ — абелева группа, т.е. сложение обладает свойствами:

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения)

2. $\exists 0\ \forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = 0 + x = x$ (существование нейтрального элемента для сложения)

3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists(-x) \quad x + (-x) = 0$ (существование обратного элемента для сложения)

4. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x + y = y + x$ (коммутативность сложения)

II. Относительно умножения множество $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ (т.е. множество всех ненулевых элементов) тоже является абелевой группой, т.е.

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^* \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (ассоциативность умножения)

2. $\exists 1\ \forall x \in \mathbb{R}^* \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (существование нейтрального элемента для умножения)

3. $\forall x \in \mathbb{R}^*\ \exists(x^{-1}) \quad x \cdot x^{-1} = 1$ (существование обратного элемента для умножения)

4. $\forall x, y \in \mathbb{R}^* \quad x \cdot y = y \cdot x$ (коммутативность умножения)

III. Операции сложения и умножения связаны между собой законом дистрибутивности (умножения относительно сложения)

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x(y + z) = xy + xz$

IV. Множество $\mathbb{R}$ линейно упорядочено относительно отношения $\leqslant$, т.е.

[2] Говорят, что в алгебраической научной литературе становится популярным термин «реальное число» (Г.К. Пак)

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leqslant x$ (рефлексивность)

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leqslant y$ и $y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (антисимметричность)

3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leqslant y$ и $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (транзитивность)

4. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ (линейность, т.е. любые числа сравнимы относительно этого порядка)

V. Порядок связан с алгебраическими операциями следующим образом:

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$ (к обеим частям неравенства можно прибавлять одно и то же число)

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leqslant y$ и $0 \leqslant z \Rightarrow xz \leqslant yz$ (обе части неравенства можно умножать на число большее нуля)

VI. Наиболее важное для анализа свойство отношения порядка это *свойство (аксиома) полноты*:

$\forall A, B \subset \mathbb{R}\ \forall x \in A\ \forall y \in B\ x \leqslant y \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in A\ \forall y \in B\ x \leqslant c \leqslant y.$

(Для любых двух множеств, одно из которых целиком лежит левее другого, найдется число $c \in \mathbb{R}$ "разделяющее" эти множества, т.е. $x \leqslant c \leqslant y$ для любых $x \in A$ и $y \in B$)

Нетривиальность этого свойства можно понять из того, что, например, множество всех рациональных чисел этим свойством не обладает (все остальные выполнены и для рациональных чисел!). Действительно, пусть $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0 \vee x^2 \leqslant 2\}$ — все отрицательные рациональные числа или меньшие $\sqrt{2}$, $B = \{y \in \mathbb{Q} : y > 0 \wedge y^2 > 2\}$ — все положительные рациональные числа, которые больше $\sqrt{2}$. Очевидно, любое рациональное число из множества A меньше любого рационального числа из множества B. Тем не менее, не существует рационального числа c отделяющего эти множества, т.е. такого, чтобы было $x \leqslant c \leqslant y$ для любых $x \in A$ и $y \in B$, так как на роль такого числа может претендовать только такое рациональное число, квадрат которого равен двум. Но, как мы видели, такого рационального числа не существует (см. доказательство иррациональности $\sqrt{2}$).

Следствия из аксиом действительных чисел

Сначала приведем простейшие следствия из первых пятнадцати аксиом (исключая аксиому полноты). Этими свойствами обладают и рациональные числа, поэтому мы приводим далеко не полный список следствий и только для того, чтобы продемонстрировать нетривиальность вывода из аксиом этих простых арифметических равенств и неравенств.

Теорема 1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \cdot x = 0.$

Доказательство.

$x + 0 \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x = x = x + 0$

Таким образом, $x + 0 \cdot x = x + 0$, откуда $0 \cdot x = 0$. Ч.Т.Д.

Теорема 2. $\forall x \in \mathbb{R} \quad -x = (-1) \cdot x$

Доказательство.

$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = \big(1 + (-1)\big) \cdot x = 0 \cdot x = 0$

Теперь приведем некоторые следствия аксиом порядка, но сначала стандартное определение.

Определение. Полагаем x *строго меньше* y $(x < y)$, когда $x \leqslant y$ и $x \neq y$:

$$x < y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leqslant y \wedge x \neq y.$$

Следующие утверждения рекомендуется доказать самим в качестве упражнения для освоения аксиом.

Теорема 4. *Для любых x, y, z, w справедливы импликации*:

$$\begin{aligned}
&x < y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x < z;\\
&x < y \Rightarrow \forall z \quad x + z < y + z;\\
&0 < x \Rightarrow -x < 0;\\
&x \leqslant y \wedge z \leqslant w \Rightarrow x + z \leqslant y + w;\\
&x < y \wedge z \leqslant w \Rightarrow x + z < y + w;\\
&0 < x \wedge 0 < y \Rightarrow 0 < x \cdot y;\\
&x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow 0 < x \cdot y;\\
&x < 0 \wedge 0 < y \Rightarrow x \cdot y < 0;\\
&x < y \wedge 0 < z \Rightarrow xz < yz.
\end{aligned}$$

Теорема 5. $0 < 1$.

Доказательство. Так как $1 \in \mathbb{R}^*$, имеем $0 \neq 1$. Если предположить теперь, что $1 < 0$, то

$$1 < 0 \wedge 1 < 0 \Rightarrow 0 < 1 \cdot 1 \Rightarrow 0 < 1 \ ?!$$

Следствия аксиомы полноты

Здесь мы получаем основные для анализа свойства действительных чисел: существование точных верхней и нижней граней у ограниченного множества.

Определение. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует такое число M, что все числа из A меньше этого M:

$$(\exists M)(\forall x)\ x \in A \Rightarrow x \leqslant M$$

Используя общепринятые сокращения[1], то же самое можно записать в виде $(\exists M)(\forall x \in A)\ x \leqslant M$.

Число M в этом случае называется *верхней границей* множества A или иначе, *мажорантой* (от итальянского слова "мажор"— бо́льший).

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если существует такое число m, что все числа из A больше этого M:

$$(\exists m)(\forall x)\ x \in A \Rightarrow x \geqslant m$$

Опять, короче то же самое можно записать в виде $(\exists m)(\forall x \in A)\ x \geqslant m$.

Число m называется *нижней границей* множества A или иначе, *минорантой* (от итальянского слова "минор"— меньший).

Число a называется *минимумом* (или *минимальным элементом*) множества A (пишут $a = \min A$), когда оно обладает двумя свойствами:

1. $a \in A$;
2. $\forall x \in A\ x \geqslant a$.

Число b называется *максимумом* (или *максимальным элементом*) множества A (пишут $a = \max A$), когда оно обладает двумя свойствами:

1. $b \in A$;
2. $\forall x \in A\ x \leqslant b$.

Далеко не всякое множество вещественных чисел (даже ограниченное) имеет максимальный или минимальный элемент. Например, интервал $(a, b) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{x : a < x < b\}$, очевидно, не имеет ни максимального ни минимального элемента, а сегмент $[a, b] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$ имеет и минимальный и максимальный элементы (a и b соответственно).

Определение. *Точной верхней гранью* (или, иначе, *супре́мумом*) множества A называется минимальный элемент множества всех мажорант множества A (обозначение: $a = \sup A$), т.е. число a со свойствами:

1) $(\forall x \in A)\ x \leqslant a$ (т.е. a является мажорантой)

2) $(\forall a' < a)\ (\exists x)\ x \in A$ и $x > a'$ (т.е. любое меньшее чем a число не является мажорантой и, значит, a — наименьшая из мажорант).

Свойство 2) имеет равносильную формулировку (психологически предпочтительную для практического применения):

2′) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x)\ x \in A$ и $x > a - \varepsilon$

(Если множество мажорант пусто, по определению полагают $\sup A = \infty$)

Точной нижней гранью (или, иначе, *и́нфимумом*) множества A называется максимальный элемент множества всех минорант множества A (обозначение: $b = \inf A$), т.е. число b со свойствами:

[1] Обычно в анализе используют сокращения: $(\forall x \in E)\ P(x) \overset{\text{def}}{=} (\forall x)(x \in E \Rightarrow P(x))$ и $(\exists x \in E)\ P(x) \overset{\text{def}}{=} (\exists x)(x \in E \wedge P(x))$

1) $(\forall x \in A)\ x \geqslant b$ (т.е. b является минорантой)

2) $(\forall b' > b)\ (\exists x)\ x \in A)$ и $x < b'$ (т.е. любое большее чем b число не является минорантой и, значит, b — наибольшая из минорант).

И здесь свойство 2) имеет равносильную формулировку предпочтительную для практического применения:

2′) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x)\ x \in A$ и $x < b + \varepsilon$

(Если множество минорант пусто, по определению полагают $\inf A = -\infty$)

Теорема. *Если множество A ограничено сверху, то оно имеет (единственную) точную верхнюю грань*:

$$A \text{ — ограничено сверху} \Rightarrow \exists! c = \sup A.$$

($\exists!$ читается как “существует единственный элемент…”)

Доказательство. Обозначим через B множество всех мажорант множества A:

$$b \in B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A) \Rightarrow x \leqslant b$$

По условию оно непусто и $\forall x \in A\ \forall b \in B\ x \leqslant b$. Согласно свойству полноты существует такое число c, что $\forall x \in A\ \forall b \in B\ x \leqslant c \leqslant b$. Левое неравенство говорит о том, что c — мажоранта множества A, а правое, что все другие мажоранты больше нее, т.е. $c = \sup A$.

Единственность. Предположим, что существуют две точные верхние грани c и c' множества A. Тогда $c \leqslant c'$, так как по предположению c — минимальный элемент множества мажорант. По аналогичной причине $c' \leqslant c$. В силу антисимметричности отношения порядка $c = c'$.

Точно так же доказывается

Теорема. *Если множество A ограничено снизу, то оно имеет (единственную) точную нижнюю грань*:

A — ограничено снизу $\Rightarrow \exists! c = \inf A$.

Замечание. Из последнего доказательства легко усмотреть справедливость теоремы:

Если множество имеет максимальный элемент, то он единствен. Минимальный элемент тоже единствен, если существует.

Свойство Архимеда

Отметим, что $1 \geqslant 0$, $-1 < 0$ (вообще говоря, это теоремы! Первую мы доказали ранее).

По определению положим

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \text{где } 2{=}1{+}1,\ 3{=}2{+}1, \dots$$

Теорема. *Если $A \subset \mathbb{N}$ ограничено сверху, то в нем существует максимальный элемент.*

Доказательство. По теореме о существовании точной верхней грани у множества A имеется $s = \sup A$. Так как $s - 1 < s$, по свойствам точной верхней грани в множестве A найдется число (натуральное) $s - 1 < n \leqslant s$. Если натуральное число $n' > n$, то $n' \geqslant n + 1$ и, следовательно, $n' > s$, т.е. не принадлежит множеству A. Значит, n — наибольший элемент, принадлежащий(!) множеству A, т.е. является его максимальным элементом (и $n = s$).

Следствие 1. *Множество всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ не ограничено сверху.*

Доказательство. $\Cap$ Пусть $\mathbb{N}$ ограничено сверху. По предыдущей теореме в нем имеется максимальный элемент $n = \max \mathbb{N}$. Но число $n + 1$ — натуральное (т.е. принадлежит $\mathbb{N}$) и $n + 1 > n$?! Это противоречит максимальности n. Ч.Т.Д.

Определение. $\mathbb{Z} = \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Следствие 2. *Если множество $A \subset \mathbb{Z}$ ограничено снизу (соотв. сверху), то оно имеет минимальный элемент (соотв. максимальный).*

Теорема (принцип Архимеда). *Если число $h > 0$, то для любого $x \in \mathbb{R}$ найдется такое $n \in \mathbb{Z}$, что $(n-1)h \leqslant x < nh$*

$$h > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{Z} : (n-1)h \leqslant x < nh.$$

Доказательство. Обозначим через A множество всех целых чисел больших $\frac{x}{h}$:

$$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} : n > \frac{x}{h} \right\}$$

По определению A ограничено снизу, поэтому имеет минимальный элемент. Пусть $m = \min A$. Тогда m принадлежит A, значит, $m > \frac{x}{h}$, т.е. $x < mh$. Покажем, что $(m-1)h \leqslant x$.

$\Cap$ $(m-1)h > x$. Тогда $m - 1 > \frac{x}{h}$, значит, $m - 1 \in A$. Но $m - 1 < m$?! (противоречие с минимальностью в A числа m). Ч.Т.Д.

Следствие 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное n, что $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

$(\exists n\ 0 < 1 < n\varepsilon)$

Следствие 2. *Если $x \geqslant 0$ и для любого n имеем $x < \frac{1}{n}$, то $x = 0$.*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant x < \frac{1}{n} \Rightarrow x = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\Cap$ $x > 0$ (строго!). Тогда $\exists n$ $0 < \frac{1}{n} < x$?! Ч.Т.Д.

Следствие 3. *Если a, b произвольные действительные числа такие, что $a < b$, то найдется рациональное число r, для которого $a < r < b$*:

$$(\forall a, b \in \mathbb{R}) a < b \Rightarrow (\exists r) r \in \mathbb{Q} \wedge a < r < b.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $b - a > 0$, поэтому $\exists n \in \mathbb{N}$ $0 < \frac{1}{n} < b - a$. Согласно принципу Архимеда (при $h = \frac{1}{n}$), найдется целое m, для которого $\frac{m-1}{n} \leqslant a < \frac{m}{n}$. Покажем, что тогда $b > \frac{m}{n}$.

$\Cap$ $b \leqslant \frac{m}{n}$. Тогда $b - a \leqslant \frac{m}{n} - a \leqslant \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} = \frac{1}{n}$?!

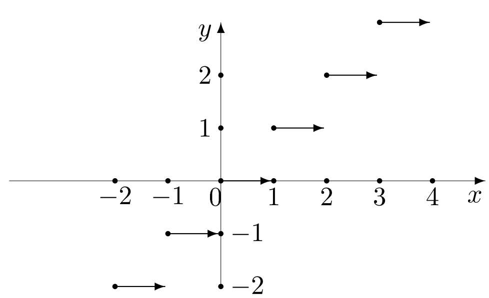
Таким образом, видим, что $\frac{m}{n}$ искомое рациональное число: $a < \frac{m}{n} < b$. Ч.Т.Д.

Следствие 4. *Для любого действительного числа x найдется такое целое число n, что*

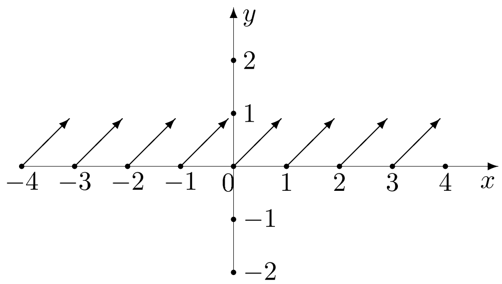
$$n \leqslant x < n + 1.$$

(надо выбрать $h = 1$ в принципе Архимеда)

Определение. Целое число n, полученное в предыдущем следствии для каждого действительного числа x, называется его *целой частью* и обозначается $[x]$. Функция $x \mapsto [x]$ имеет такой график:



Число $x - [x]$ называется дробной частью числа x и обозначается $\{x\}$ (не путать с множеством, состоящим из одного элемента x) Функция $x \mapsto \{x\}$ имеет такой график:



Лекция 6.
Модель множества действительных чисел $\mathbb{R}$

Чтобы все 16 свойств, перечисленных ранее, и все извлеченные из них следствия имели смысл, мы должны построить модель (т.е. привести пример) множества, обладающего всеми этими свойствами, так как в принципе может оказаться, что таких объектов не существует вовсе. Тогда все извлекаемые следствия ничего не означают!

Итак, нам надо сначала задать некое множество (которое мы обозначим $\mathbb{R}$) и затем на нем определить две алгебраические операции $+$ и $\cdot$ и отношение порядка $\leqslant$ так, чтобы выполнялись все 16 свойств, перечисленных в определении.

Наиболее широко известными (есть и другие) являются две модели множества действительных чисел (конечно же изоморфные). Одна из них — модель Дедекинда, в ней действительные числа моделируются, так называемыми, "сечениями" множества рациональных чисел. Подробно эта модель описана в учебнике Фихтенгольца [9] и желающих с ней ознакомиться мы отсылаем к этой книге. Другая модель, к построению которой мы приступаем, реализует действительные числа как "бесконечные десятичные дроби". Фактически, этой моделью мы постоянно пользуемся на практике, выписывая "десятичные приближения" действительных чисел, поэтому она более привычна и легче воспринимается.

Приступим к точному формальному описанию этой модели.

Определение. *Бесконечной десятичной дробью* называется последовательность

$$x = x_0, x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \ldots$$

где x_0 — целое число (положительное или отрицательное), а числа x_k при $k \geqslant 1$ могут принимать любые значения из множества $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Целое число x_0 при $x_0 \geqslant 0$ и $x_0 - 1$ при $x_0 < 0$ называют *целой частью* действительного числа x, а последовательность $0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$ — *дробной частью* числа x.

Говорят, что бесконечная десятичная дробь *периодична*, если существует такое целое число N, начиная с которого некоторый отрезок дроби $x_{N+1} \dots x_{N+p}$ бесконечно повторяется в последовательности:

$$x = x_0, x_1 \dots x_N \overbrace{x_{N+1} \dots x_{N+p}}^{\text{период дроби}} x_{N+1} \dots x_{N+p} \dots \stackrel{\text{def}}{=} x_0, x_1 \dots x_N (x_{N+1} \dots x_{N+p}).$$

При этом $x_{N+1} \dots x_{N+p}$ называют *периодом* периодической бесконечной десятичной дроби.

Определение. Совокупность всех бесконечных десятичных дробей, *не имеющих периодом* 9, назовем *множеством действительных чисел* $\mathbb{R}$.

Зададим на $\mathbb{R}$ сначала отношение порядка $\leqslant$ (при этом мы считаем известной теорию рациональных чисел). Предварительно отметим, что модулем действительного числа $x = x_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$ называется число $|x| = |x_0|, x_1 x_2 \dots x_n \dots$

Определение. Будем говорить, что число $x = x_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$ равно числу $y = y_0, y_1 y_2 \dots y_n \dots$ тогда и только тогда, когда $\forall k \geqslant 0\ x_k = y_k$:

$$\begin{array}{ccccccc} x_0, & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n & \dots \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \dots & \shortparallel & \shortparallel & \dots \\ y_0, & y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & y_n & \dots \end{array}$$

Будем говорить, что $x > 0$ (x сторо больше нуля), когда $x \neq 0$ и $x_0 \geqslant 0$, т.е. когда больше нуля целая часть числа $x = x_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$ (для целых чисел отношение $\geqslant$ определено!)

Определим сначала отношение $<$ (строго меньше) для чисел больше нуля: если $x = x_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots > 0$, $y = y_0, y_1 y_2 \dots y_n \dots > 0$ по определению положим (определение индуктивное!)

$$x < y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x_0 < y_0 \quad \text{или} \quad x_0 = y_0 \wedge (\exists n \geqslant 1)\ (\forall k)\ k < n \Rightarrow x_k = y_k \wedge x_n < y_n$$

Иначе говоря, при выполнении неравенства $x < y$ первые несколько знаков могут совпадать, но на первом же месте, где есть несовпадение, должно быть строгое неравенство ($x_n < y_n$). Как ведут себя остальные знаки этих бесконечных дробей, не важно! Наглядно это можно изобразить так:

$$\begin{array}{ccccccc} x_0, & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n & \dots \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \dots & \shortparallel & \wedge & \\ y_0, & y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & y_n & \dots \end{array}$$

Если одно из чисел отрицательно или равно нулю (т.е. $\leqslant 0$), а другое положительно (т.е. > 0), то по определению положительное больше.

Если они оба отрицательные, то по определению полагают меньшим то, модуль которого больше (модули уже положительны, а для них отношение $<$ определено).

Наконец, мы полагаем $x \leqslant y$ (x меньше y) тогда и только тогда, когда $x < y$ (x строго меньше y) или $x = y$.

Проверка выполнения первых четырех свойств отношения порядка (рефлексивность, антисимметричность, транзитивность, линейность) остается читателям в качестве утомительного, но несложного упражнения. Мы же остановимся на доказательстве свойства полноты.

Теорема. *На множестве $\mathbb{R}$ введенное отношение порядка обладает свойством полноты.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть подмножества A и B из $\mathbb{R}$ таковы, что $\forall x \in A$ и $\forall y \in B$ $x \leqslant y$ и дополнительно предположим, что в A имеется элемент $\geqslant 0$. Докажем, что существует действительное число c "отделяющее" множества A и B, т.е.

$$(\exists c)(\forall x \in A)(\forall y \in B) \quad x \leqslant c \leqslant y.$$

Это самый сложный этап доказательства. Как мы увидим, оставшиеся случаи легко решаются с его помощью.

Обозначим через X_0 множество всех целых частей десятичных дробей из A:

$$X_0 = \{x_0 : x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots \in A\}.$$

Это множество целых чисел ограниченное сверху любым из целых чисел y_0, где $y = y_0, y_1 \cdots \in B$. Поэтому в нем есть максимальный элемент (см. прошлую лекцию). Обозначим его через $\overline{x}_0$, а через A_0 — множество всех чисел из A, у которых целая часть совпадает с $\overline{x}_0$:

$$A_0 = \{x = \overline{x}_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots : x \in A\}.$$

Отметим, что $A_0 \neq \varnothing$ (по свойству 1 определения максимального элемента).

Далее, обозначим через X_1 множество всех первых десятичных знаков чисел из A_0:

$$X_1 = \{x_1 : x = \overline{x}_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots \in A_0\}.$$

Это *конечное подмножество* из $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, так как только такие значения могут принимать десятичные знаки. Поэтому оно тоже имеет максимальный элемент, скажем $\overline{x}_1$. Обозначим через A_1 множество всех элементов из A_0, у которых первый десятичный знак совпадает с $\overline{x}_1$:

$$A_1 = \{x = \overline{x}_0, \overline{x}_1 x_2 \dots x_n \dots : x \in A_0\}.$$

Продолжая так и в дальнейшем, обозначаем через X_k множество десятичных знаков стоящих на k-ом месте в числах из A_{k-1}:

$$X_k = \{x_k : x = \overline{x}_0, \overline{x}_1 \dots \overline{x}_{k-1} x_k \dots \in A_{k-1}\}.$$

Максимальный элемент этого множества обозначаем через $\overline{x}_k$ и через A_k обозначаем подмножество из A_{k-1} таких x, у которых на k-ом месте стоит $\overline{x}_k$:

$$A_k = \{x = \overline{x}_0, \overline{x}_1 \dots \overline{x}_k x_{k+1} \dots : x \in A_{k-1}\}.$$

Отметим, что все множества A_k непусты.

Продолжая этот процесс до бесконечности, получим последовательность

$$\overline{x}_0, \overline{x}_1 \overline{x}_2 \dots \overline{x}_n \dots$$

Если эта последовательность не имеет периодом 9, то это действительное число, которое мы и обозначим через c. Но может оказаться и так, что эта последовательность имеет периодом 9. Заменим ее последовательностью с нулем в периоде, увеличив на 1 десятичный знак, стоящий перед периодом и через c обозначим полученное действительное число.

Покажем, что для любых $x \in A$ и $y \in B$ $x \leqslant c \leqslant y$. В самом деле, для любых $x \in A$ имеем $x \leqslant c$ по построению.

Чтобы доказать неравенство $c \leqslant y$, предположим сначала, что у нас не возникала периодом девятка. Тогда пусть $y = y_0, y_1 \dots y_n \dots \in B$. Число y_0 не может быть меньше $\overline{x}_0$, так как в противном случае любое число x из $A_0 \subset A$, имеющее вид $\overline{x}_0, x_1 \dots$, окажется больше y, чего не может быть согласно выбору A и B. Если y_0 строго больше $\overline{x}_0$, то число $c < y$, и всё доказано. Если же $y_0 = \overline{x}_0$, то сравниваем следующий десятичный знак y_1 с $\overline{x}_1$. Опять, он не может быть меньше $\overline{x}_1$, ибо в противном случае любое число из (непустого) множества $A_1 \subset A$, имеющее вид $x = \overline{x}_0, \overline{x}_1 x_2 \dots$, было бы строго больше числа y, чего не может быть согласно выбору A и B. Если $y_1 > \overline{x}_1$, то все доказано, если же $y_1 = \overline{x}_1$, сравниваем следующий десятичный знак. Применение метода математической индукции (подробно провести самим), показывает, что в этом случае $c \leqslant y$.

Если же при построении числа c возникала девятка в периоде, то оно имеет вид:

$$c = \overline{x}_0, \overline{x}_1 \dots \overline{x}_{n-1}(\overline{x}_n + 1)00 \dots$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим показывают, что в худшем случае мы будем иметь совпадение десятичных знаков чисел c и y вплоть до $(n-1)$-го. Покажем, что y_n не может быть строго меньше $(\overline{x}_n + 1)$. В самом деле, тогда $y_n \leqslant \overline{x}_n$. Опять $y_n < \overline{x}_n$ противоречит выбору A и B, так как тогда любое число $x \in A_n$ больше y. Если же $y_n = x_n$, то у числа y найдется знак, стоящий после y_n, который строго меньше 9 (иначе последовательность y имела бы периодом 9) т.е. число y имеет вид:

$$y = \overline{x}_0, \overline{x}_1 \dots \overline{x}_n 9 \dots 9 y_{n+k} y_{n+k+1} \dots \quad y_{n+k} < 9$$

Но тогда любое число $x \in A_{n+k}$, имеющее вид

$$x = \overline{x}_0, \overline{x}_1 \dots \overline{x}_n 9 \dots 99 x_{n+k+1} \dots$$

было бы больше числа y, чего не может быть в силу выбора A и B. Значит, $c \leqslant y$ и в этом случае. Что и требовалось доказать.

Шаг 2. Пусть теперь все элементы из A меньше нуля. Если все элементы из B больше нуля, то в качестве числа c отделяющего множества A и B можно взять 0.

Если же в B имеются элементы < 0, то заменим у всех элементов множеств A и B знак на противоположный (соответствующие множества обозначим $-A$ и $-B$). Полученные множества удовлетворяют всем условиям шага 1 и:

$$\forall(-y \in -B)\ \forall(-x \in -A) \quad -y < -x$$

Согласно доказанному, существует число (обозначим его $-c$) для которого

$$\forall(-y \in -B)\ \forall(-x \in -A) \quad -y \leqslant -c \leqslant -x.$$

Но тогда число c обладает нужным свойством.

Теорема доказана.

Определение алгебраических операций. Для определения алгебраических операций над действительными числами сопоставим каждому *положительному* действительному числу $x = x_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$ два множества рациональных чисел: $\{\underline{x}_{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ — множество нижних срезок числа x и $\{\overline{x}_{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ — множество верхних срезок числа x, по определению полагая

$$\underline{x}_{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \dots + \frac{x_n}{10^n} = x_0, x_1 x_2 \dots x_n 00 \dots$$
$$\overline{x}_{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \dots + \frac{x_n + 1}{10^n} = x_0, x_1 x_2 \dots x_n 00 \dots + \frac{1}{10^n}$$

Очевидно, для любых $n, m \in \mathbb{N}$ имеем $\underline{x}_{(n)} \leqslant x \leqslant \overline{x}_{(m)}$

Определение суммы и произведения. Если $x = x_0, x_1 x_2 \ldots$ и $y = y_0, y_1 y_2 \ldots$ — два *положительных* действительных числа, то полагаем

$$x + y \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\underline{x}_{(n)} + \underline{y}_{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$$
$$x - y \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\underline{x}_{(n)} - \overline{y}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$$
$$x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\underline{x}_{(n)} \cdot \underline{y}_{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$$

Для чисел x и y произвольных знаков операции сложения и умножения определяются стандартным соглашением о "правиле знаков". Мы на этом не будем останавливаться как и на утомительной но несложной проверке выполнения всех 9 чисто алгебраических аксиом действительных чисел. Отметим только, что, с одной стороны, это полезное упражнение для самопроверки понимания всех определений, а с другой, эти доказательства имеются во всех стандартных учебниках из списка литературы [1–4] и желающие могут прочитать их там.

Еще очень полезными являются следующие упражнения:

1. Доказать, что для положительных действительных чисел имеют место равенства:

$$x + y \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\overline{x}^{(n)} + \overline{y}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$$
$$x - y \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\overline{x}^{(n)} - \underline{y}_{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$$
$$x \cdot y \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\overline{x}^{(n)} \cdot \overline{y}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$$

2. Обозначим через A множество сумм всевозможных нижних срезок положительных чисел x и y:

$$A = \{\underline{x}_{(n)} + \underline{y}_{(m)} : n, m \in \mathbb{N}\},$$

а через B множество сумм всевозможных верхних срезок чисел x и y:

$$B = \{\overline{x}^{(n)} + \overline{y}^{(m)} : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидно, что любое число из множества A меньше любого числа из множества B.

Доказать, что $x + y = c$, где c "разделяет" множества A и B.

Аналогично можно определить произведение чисел x и y. Надо только в качестве множеств A и B взять всевозможные произведения:

$$A = \{\underline{x}_{(n)} \cdot \underline{y}_{(m)} : n, m \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{\overline{x}^{(n)} \cdot \overline{y}^{(m)} : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Лекция 7. Теория последовательностей

Числовая последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — это функция, определенная на множестве натуральных чисел[1], для записи значений которой на аргументе n используются индексные обозначения, т.е. пишут x_n, а не $x(n)$ как у других функций.

Напомним, что образ множества всех натуральных чисел мы обозначаем одним из трех способов: $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ или $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ или просто $\{x_n\}$, если это не может вызвать недоразумений.

Пример. Если $x_n = (-1)^n$, то множество ее значений $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \{-1, +1\}$, т.е. состоит всего из двух элементов.

Определение. Говорят, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***ограничена сверху***, если ограничено сверху множество ее значений, т.е.

$$\exists M\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \leqslant M.$$

(***существует*** число M большее ***любого*** члена последовательности x_n).

Неограниченность сверху последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ означает, что выполнено свойство

$$\forall M\ \exists n : n \in \mathbb{N} \wedge x_n \geqslant M.$$

(какое бы число M мы ни взяли, в последовательности есть (существуют) члены, большие чем M)

Говорят, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***ограничена снизу***, если ограничено снизу множество ее значений, т.е.

$$\exists m\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \geqslant m.$$

(***существует*** число m меньшее ***любого*** члена последовательности)

Последовательность называют ***ограниченной***, если она одновременно ограничена и снизу и сверху. Очевидно, это будет тогда и только тогда, когда

$$\exists C\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leqslant C.$$

(в качестве C можно взять $\max\{|M|, |m|\}$ или любое большее число)

Отметим, что согласно общему правилу построения отрицаний, неограниченная последовательность — это последовательность со свойством:

$$\forall C\ \exists n \in \mathbb{N} : |x_n| \geqslant C.$$

[1] как мы упоминали ранее, иногда в качестве области определения берут $\mathbb{Z}$ или его подмножества, очень часто $\{0\} \cup \mathbb{N}$

(для любого C найдется (существует) такое n, что $|x_n|$ больше этого C)

Примеры. 1) Пусть $x_n = \dfrac{n+100}{n+1}$. Эта последовательность ограничена, что видно из оценки:

$$|x_n| = \left|\frac{n+100}{n+1}\right| = \left|\frac{n+1+99}{n+1}\right| = \left|1+\frac{99}{n+1}\right| \leqslant 1 + \frac{99}{2} = C.$$

2) Пусть $x_n = n^{(-1)^n}$. Выпишем несколько членов этой последовательности:

$$1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, \ldots$$

Докажем, что последовательность неограничена.

В самом деле, для любого $C > 0$ (по следствию из принципа Архимеда) найдется целое число $n > \frac{C}{2}$. Тогда $x_{2n} = (2n)^{(-1)^{2n}} = 2n > C$. Ч.Т.Д.

Следующее определение — одно из главных для математического анализа. Оно формализует наше представление о возможности приблизить число с любой точностью посредством значений заданной последовательности, причем так, что все следующие члены последовательности дают приближение не хуже.

Определение. Число a называют *пределом последовательности* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что для всех x_n с номерами $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

В краткой символической форме это определение можно записать в виде:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Приведенное чисто "*аналитическое*" определение предела последовательности допускает немного более наглядную "*геометрическую*" формулировку. Предварительно полезное топологическое понятие.

Определение. Назовем *ε-окрестностью* точки a (или просто *окрестностью*) множество

$$U_\varepsilon(a) = \{x : |x-a| < \varepsilon\} = \{x : a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon).$$

Что вполне согласуется с обычным пониманием того, что такое окрестность точки на прямой — это то, что лежит немного левее или немного правее.

Отметим, что принадлежность x окрестности $U_\varepsilon(a)$ (т.е. $x \in U_\varepsilon(a)$) означает выполнение неравенства $|x-a| < \varepsilon$ или, что то же самое, $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

А теперь "геометрическое" определение предела последовательности:

Определение. $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если для любой окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки a найдется такой номер N, начиная с которого все члены последовательности попадут в эту окрестность:

$$\forall U_\varepsilon(a)\ \exists N\ \forall n > N \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a)$$

Примеры. 1) Пусть $x_n = \frac{n-1}{n+1}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

Действительно,

$$\Big|\frac{n-1}{n+1} - 1\Big| = \Big|\frac{-2}{n+1}\Big| = \frac{2}{n+1}.$$

Решая неравенство $\frac{2}{n+1} < \varepsilon$, находим, что оно выполняется при всех $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ (тем более оно будет выполняться при $n > \frac{2}{\varepsilon}$ и любых больших числах). Поэтому, для произвольного $\varepsilon > 0$, если взять в качестве N любое (целое) число большее чем $\frac{2}{\varepsilon} - 1$, то наши вычисления показывают, что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство $\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$. Что и требовалось доказать.

2. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})$.

Решение. Сначала преобразуем данное выражение:

$$\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} = \frac{(n+3)-(n+1)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$$

Теперь видно, что при увеличении n знаменатель растет, а числитель остается постоянным. Очевидно, предел будет равен нулю, что можно подтвердить оценкой:

$$\Big|\frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}\Big| \leqslant \Big|\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}\Big| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

при всех $n > N = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$.

Определение. Говорят, что предел последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равен *бесконечности* и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, когда для любого (сколь угодно большого) положительного числа E найдется такой номер N, начиная с которого все члены последовательности будут по модулю больше E:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall E > 0\ \exists N\ \forall n > N \Rightarrow |x_n| \geqslant E.$$

Это определение надо различать с очень похожим по обозначению, но отличным по смыслу $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall E > 0\ \exists N\ \forall n > N \Rightarrow x_n \geqslant E.$$

И еще одно определение

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall E > 0\ \exists N\ \forall n > N \Rightarrow x_n \leqslant -E.$$

Из этих определений сразу видим, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Обратное, вообще говоря, неверно, что можно увидеть из примера:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty, \quad \text{но} \quad \lim_{n\to\infty}(-1)^n n \neq +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}(-1)^n n \neq -\infty.$$

Определение. Говорят, что последовательность *сходится*, если она имеет *конечный* предел.

Предложение 1. *Последовательность* (x_n) *сходится к числу* a *(т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*) тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$.

Доказательство сводится к написанию того, что означает по определению первое и второе равенства, откуда сразу видно, что это одно и то же.

Предложение 2. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$*, то последовательность* (z_n)*, определяемая соотношениями*

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n-1}{2}}, & n = 2k+1; \\ y_{\frac{n}{2}}, & n = 2k; \end{cases}$$

сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Отметим, что в условиях теоремы имеем

$$\begin{array}{ccccccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & \dots \\ \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \dots \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 & \dots \end{array}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, найдется такой номер N_1, что при всех $n > N_1$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. А так как и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, найдется такой номер N_2, что при всех $n > N_2$ будет выполняться неравенство $|y_n - a| < \varepsilon$. Возьмем $N = 2\max\{N_1, N_2\}$. Теперь, если $n > N$, то в случае, когда $n = 2k$ (т.е. n — четное), число $k > N_2$, значит, $|z_n - a| = |y_k - a| < \varepsilon$, а когда $n = 2k+1$, имеем $k > N_1$, значит, $|z_n - a| = |x_k - a| < \varepsilon$ тоже.

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ мы подобрали $N = 2\max\{N_1, N_2\}$ такое, что при всех $n > N$ имеет место неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$. Что и требовалось доказать.

Теорема. *У любой последовательности может существовать не более одного предела.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow a = b.$$

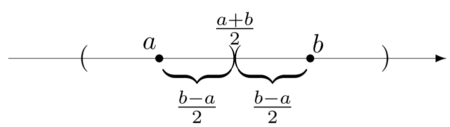
Доказательство. Приведем два доказательства. Первое чисто алгебраическое, а второе более аппелирует к геометрическим представлениям.

Итак, оценим разность

$$|a-b| = |a - x_n + x_n - b| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| = |x_n - a| + |x_n - b| \qquad (*)$$

Так как $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, найдется такое число N_1, что при всех $n > N_1$ будем иметь неравенство $|x_n - a| < \varepsilon/2$. По аналогичной причине найдется такое N_2, что при $n > N_2$ будет выполняться неравенство $|x_n - b| < \varepsilon/2$. Поэтому, если $n > \max\{N_1, N_2\}$, будут выполнены оба неравенства и тогда из оценки $(*)$ следует, что $|a-b| < \varepsilon$. Это верно для любого $\varepsilon > 0$. Согласно следствиям из свойства Архимеда отсюда вытекает, что $|a - b| = 0$, т.е. $a = b$, что и требовалось доказать.

Более геометричное доказательство состоит в том, что если предположить, что $|a-b| > 0$, то, беря в качестве $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$, видим, что окрестности $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ не пересекаются. [1]



Но в силу равенства $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ начиная с некоторого N_1 все $x_n \in U_\varepsilon(a)$, а в силу равенства $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ начиная с какого-то N_2 все $x_n \in U_\varepsilon(b)$?! Противоречие доказывает ложность предположения $|a - b| > 0$, значит, $|a - b| = 0$. Что и требовалось доказать.

Теорема. *Если последовательность (x_n) сходится, то она ограничена* (обратное утверждение в общем случае неверно).

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \neq \infty \Rightarrow \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ — ограничено.}$$

Доказательство. Предположим $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Выбрав $\varepsilon = 1$, подберем N так, чтобы при $n > N$ все x_n попали в интервал $U_1(a) = (a-1; a+1)$.

[1] Алгебраическая выкладка: если $x \in U_\varepsilon(a)$, то $|x - b| = |(x - a) - (b - a)| \geqslant |b - a| - |x - a| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$, значит, $x \notin U_\varepsilon(b)$.

Вне этого интервала могут быть только числа x_1, x_2,…,x_N. Поэтому положив $m = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_N, a-1\}$, а $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_N, a+1\}$, видим, что при всех n выполняется неравенство $m \leqslant x_n \leqslant M$. Что и требовалось доказать.

Ограниченная последовательность в общем случае не обязана сходиться, например, последовательность $x_n = (-1)^n$ очевидно ограничена, но не является сходящейся.

Теорема (о сжатой переменной). *Если (x_n), (y_n) и (z_n) — такие три последовательности, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и для любого n выполняются неравенства $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, то последовательность (z_n) сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.*

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a) \wedge (x_n \leqslant z_n \leqslant y_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По произвольному $\varepsilon > 0$ подберем такое число N, что при всех $n > N$ будет $x_n \in U_\varepsilon(a)$ и $y_n \in U_\varepsilon(a)$. Так как z_n лежит между ними, то очевидно и $z_n \in U_\varepsilon(a)$. Что и требовалось доказать.

Примеры. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 1)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку при любых $a > 1$ имеем $\sqrt[n]{a} > 1$, положим $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$. Очевидно, тогда $\alpha_n \geqslant 0$. Но тогда

$$a = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 + \cdots > 1 + n\alpha_n,$$

откуда $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \frac{a-1}{n}$. Поэтому

$$a \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant 1 + \frac{a-1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Для завершения доказательства остается применить теорему о сжатой переменной.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любых $n \geqslant 1$ имеем $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$, положим $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$. Очевидно, тогда $\alpha_n \geqslant 0$. По формуле бинома Ньютона

$$n = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2 + \cdots > 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2,$$

откуда $0 \leqslant \alpha_n^2 \leqslant \frac{2!}{n}$. Поэтому

$$1 \leqslant \sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

По теореме о сжатой переменной получаем требуемое равенство.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0 \ (a > 1)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $a = 1 + \varepsilon$, тогда $\varepsilon > 0$ и

$$0 < \frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = \frac{n}{1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \dots} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2} = \frac{2}{(n-1)\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теорема. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *и* $a < b$, *то существует такое* N, *что при всех* $n > N$ *имеет место неравенство* $x_n < y_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Тогда окрестности $U_\varepsilon(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ не пересекаются. Выберем N_1 так, чтобы при $n > N_1$ все $x_n \in U_\varepsilon(a)$ и выберем N_2 так, чтобы при $n > N_2$ имели $y_n \in U_\varepsilon(b)$. Очевидно, при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ будем иметь $x_n < \frac{a+b}{2} < y_n$.[1] Что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $a < b$, *то* $\exists N \ \forall n > N \Rightarrow x_n < b$.

Следствие 2. *Если последовательности* (x_n) *и* (y_n) *таковы, что* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *и* $\forall n \ x_n \leqslant y_n$, *то* $a \leqslant b$ (иными словами в неравенствах можно переходить к пределу: $x_n \leqslant y_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, если указанные пределы существуют).

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\Cap$ $a > b$. Но согласно доказанной теореме это противоречит тому, что по условию $\forall n \ x_n \leqslant y_n$?!

Теорема. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *и* $b \neq 0$, *то существует такое* N, *что множество* $\left\{\dfrac{1}{y_n} : n > N\right\}$ *ограничено.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ и подберем N так, чтобы при всех $n > N$ выполнялось соотношение $y_n \in U_\varepsilon(b)$. Очевидно, для этих n имеем $|y_n| > \varepsilon = \frac{|b|}{2}$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| \leqslant \frac{1}{|b/2|} = \frac{2}{|b|}.$$

Что и требовалось доказать.

---

[1] $x_n \in U_\varepsilon(a) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon = \frac{b-a}{2} \Rightarrow x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$. Аналогично доказывается, что $\frac{a+b}{2} < y_n$

Теорема. (Алгебраические свойства пределов) *Пусть существуют конечные пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$ если $b \neq 0$ и $\forall n\ y_n \neq 0$

Доказательство. 1. Оценим модуль разности

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b|. \qquad (*)$$

Поскольку существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ для любого $\varepsilon > 0$ подберем N_1 так, чтобы при $n > N_1$ выполнялось неравенство $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и N_2, чтобы при $n > N_2$ выполнялось неравенство $|y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ из $(*)$ следует, что $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$ и 1. доказано.

2. Имеем

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leqslant |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b|. \qquad (**)$$

Последовательность (y_n) сходится, значит, ограничена. Пусть для всех n $|y_n| \leqslant M$. Тогда выберем N_1 так, чтобы при всех $n > N_1$ выполнялось неравенство $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ и N_2 так, чтобы при всех $n > N_2$ (и $|a| \neq 0$) выполнялось неравенство $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$. В этом случае при $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ из $(**)$ следует справедливость неравенства $|x_n y_n - ab| < \varepsilon$ и 2. доказано.

3. Делая все выборы соответствующим образом (подобно предыдущему), можно написать оценку (самостоятельно указать, как выбирать N):

$$\Big|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\Big| = \Big|\frac{x_n b - a y_n}{y_n b}\Big| = \frac{|x_n b - ab + ab - a y_n|}{|y_n b|} \leqslant \frac{|x_n - a| \cdot |b| + |a| \cdot |y_n - b|}{|y_n||b|} \leqslant$$

(по предыдущей теореме $\frac{1}{|y_n|} \leqslant \frac{2}{|b|}$)

$$\leqslant \frac{2}{|b|^2}\big(|b| \cdot |x_n - a| + |a| \cdot |y_n - b|\big) = \frac{2}{|b|}|x_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|y_n - b| < \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

Лекция 8.
Теоремы существования пределов

Определение. Последовательность (x_n) называется *возрастающей* (соотв. *строго возрастающей*), если

$$\forall n \; x_n \leqslant x_{n+1} \quad (\text{соотв. } x_n < x_{n+1})$$

Для сокращения записи иногда вместо слов “последовательность (x_n) возрастает” в конспектах пишут $x_n \nearrow$ или $x_n \uparrow$

Последовательность (x_n) называется *убывающей* (соотв. *строго убывающей*), если

$$\forall n \; x_n \geqslant x_{n+1} \quad (\text{соотв. } x_n > x_{n+1})$$

(обозначение $x_n \searrow$ или $x_n \downarrow$)

Замечания. 1. В русской литературе очень часто называют *неубывающими* те последовательности, которые мы называем возрастающими и просто *возрастающими* те, которые мы называем строго возрастающими. И аналогичная терминология для убывания: *невозрастающие* — те последовательности, которые мы называем убывающими и *убывающие* — те, которые мы называем строго убывающими.

2. Если существует такое N, что при $n > N$ последовательность возрастает (т.е. $(\forall n)\; N < n \Rightarrow x_n \leqslant x_{n+1}$), то говорят, что (x_n) возрастает начиная с номера N.

Теорема. *Если последовательность (x_n) возрастает и ограничена сверху, то она сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$:*

$$x_n \uparrow \wedge (x_n) - \text{ограничена сверху} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Доказательство. Поскольку по условию множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено, оно имеет точную верхнюю грань, скажем $a = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Для этого по определению точной верхней грани, для любого $\varepsilon > 0$ найдем такое число x_{n_0}, что $a - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant a$. Но в силу возрастания последовательности при $n > n_0$ будем иметь $a - \varepsilon < x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant a$. Значит, $|x_n - a| < \varepsilon$. Что и требовалось доказать.

Упражнение. Сформулировать и доказать аналогичную теорему для убывающих последовательностей.

Очевидно, обе теоремы остаются верными для последовательностей возрастающих (соотв. убывающих) начиная с некоторого N. Поэтому, как итог можно сформулировать теорему.

Теорема (о пределе монотонной последовательности) *Если последовательность монотонна (хотя бы начиная с некоторого N) и ограничена, то она сходится.*

Если возрастает и неограничена, то имеет пределом $+\infty$.

Если неограничена и убывает, то имеет пределом $-\infty$.

Примеры. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

Действительно, если $x_n=\frac{a^n}{n!}$, то $x_{n+1}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{a^n}{n!}\frac{a}{(n+1)}$. Откуда видим, что при $n>N=[a]$ последовательность убывает (т.к. $\frac{a}{n+1}<1$). Поэтому она сходится и мы можем обозначить ее предел, скажем, через A. Но тогда

$$A=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}\frac{a}{(n+1)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}x_n\frac{a}{(n+1)}=\lim_{n\to\infty}x_n\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(n+1)}=A\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(n+1)}=0.$$

2) Пусть $x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}}}_{n\text{ – корней}}$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Имеем $x_1=\sqrt{2}<2$. Покажем по индукции, что и при любом n все $x_n<2$.

В самом деле, если $x_n<2$, то $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2$. И верность неравенства $x_n<2$ доказана.

Далее, последовательность x_n возрастает, так как

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}=x_n\sqrt{\frac{2+x_n}{x_n^2}}>x_n\sqrt{\frac{x_n+x_n}{x_n^2}}=x_n\sqrt{\frac{2}{x_n}}>x_n$$

По теореме о пределе монотонной последовательности (x_n) сходится, скажем, к A. Переходя к пределу в обеих частях равенства $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, получим $A=\sqrt{2+A}$, откуда $A^2=2+A$ или $A^2-A-2=0$, т.е. $A=2$ или $A=-1$. Так как все $x_n>0$ и, значит, $A\geqslant 0$, второй корень посторонний (возник при возведении в квадрат обеих частей равенства) и $A=2$.

Число e

По определению полагают

$$e\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n.$$

Теорема. *Определение числа e корректно.*

Доказательство. Надо доказать, что предел в правой части существует, в этом случае мы действительно имеем право как-нибудь его обозначить. Буквой e его обозначают в честь Л. Эйлера (L. Euler), который ввел его в математику.

Достаточно показать, что последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена сверху. Сначала докажем, что она возрастает. Для этого представим общий член последовательности в более удобном виде:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\frac{1}{n} + C_n^2\frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^k\frac{1}{n^k} + \cdots + C_n^n\frac{1}{n^n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\frac{1}{n^k}.$$

Заметим, что "общий член" этой суммы $C_n^k\frac{1}{n^k}$ можно преобразовать следующим образом:

$$C_n^k\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\,\frac{1}{n^k} = \frac{\overbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}^{k\text{–сомножителей}}}{\underbrace{n\cdot n\dots n}_{k\text{–сомножителей}}}\,\frac{1}{k!} =$$
$$= \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{(k-1)\text{–сомножитель}}\frac{1}{k!}$$

Тогда,

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}$$
$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{k!}$$

Видим, что сомножители верхней суммы *меньше* соответствующих сомножителей нижней суммы и еще нижняя сумма имеет на одно слагаемое больше, поэтому $x_n < x_{n+1}$.

Для доказательства ограниченности сверху последовательности (x_n) заметим, что

$$x_n = 1+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} < 3$$

и теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что $2 < e < 3$. Можно доказать, что число e — иррационально, $e \approx 2,718281828459$. [1]

Принцип вложенных отрезков

Следующая ниже теорема настолько часто и эффективно применяется при доказательстве других теорем, что ее называют "принципом".

Определение. Последовательность отрезков $([a_n; b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ называется *последовательностью вложенных отрезков*, если

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

Очевидно, в этом случае последовательность левых концов отрезков (a_n) является возрастающей, а последовательность правых (b_n) — убывающей.

Теорема Кантора (принцип вложенных отрезков). *Если* $([a_n; b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *— такая последовательность вложенных отрезков, что* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, *то существует* единственная *точка c, принадлежащая всем отрезкам одновременно*:

$$(\forall n)[a_n; b_n] \subset [a_{n+1}; b_{n+1}] \wedge \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \Rightarrow \exists! c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n].$$

Доказательство. Обозначим через A множество левых концов всех отрезков, а через B — правых:

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \qquad B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидно, для любых n, m имеем $a_n < b_m$, поэтому согласно свойству полноты множества действительных чисел существует точка c, разделяющая эти множества, т.е. такая, что

$$\forall a_n \in A \ \forall b_m \in B \quad a_n \leqslant c \leqslant b_m$$

В частности, для любых n будем иметь $c \in [a_n; b_n]$, значит, $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n]$.

Остается показать, что такая точка единственна.

$\Cap$ Пусть c и $c' \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n; b_n]$. Будем считать, что $c < c'$. Тогда для любых n $\quad a_n \leqslant c < c' \leqslant b_n$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем N так, чтобы при

[1] На самом деле оно трансцендентно, т.е. не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами

всех $n > N$ выполнялось неравенство $|b_n - a_n| < \varepsilon$. Тогда

$$0 \leqslant |c' - c| \leqslant |b_n - a_n| < \varepsilon$$

Так как это неравенство справедливо для произвольного $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что $|c' - c| = 0$?!

Теорема доказана.

Лекция 9.

Подпоследовательности и частичные пределы

Определение. Последовательность $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ называется *подпоследовательностью* последовательности (x_n) тогда и только тогда, когда ее индексы n_k образуют *строго возрастающую* последовательность натуральных чисел:

$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots < n_k < \ldots$$

Таким образом, подпоследовательность — это композиция двух отображений: строго возрастающего $k \mapsto n_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и последовательности $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Примеры. Если $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность, то $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ее подпоследовательность. Эту подпоследовательность называют подпоследовательностью элементов с четными номерами. Аналогично $(x_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ — подпоследовательность элементов с нечетными номерами.

Еще примеры: $(x_{k^2})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ ...

Определение. Если подпоследовательность $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ имеет предел (конечный или бесконечный), то его называют *частичным пределом* последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Примеры. 1) Пусть $x_n = (-1)^n$. Мы уже видели, что эта последовательность расходится, тем не менее она имеет два частичных предела 1 и -1, так как

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$$
$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} = \lim_{k\to\infty} -1 = -1.$$

2) Пусть $x_n = (-1)^n n + \frac{1}{n}$. Последовательность расходится и имеет два частичных предела $+\infty$ и $-\infty$.

Теорема. *Если последовательность* (x_n) *имеет предел* (*конечный или бесконечный*), *то всякая ее подпоследовательность имеет тот же самый предел.* (*Обратное утверждение тоже верно*!)

Этот факт часто используют для доказательства расходимости последовательностей. Если указать две подпоследовательности сходящихся к разным пределам, то исходная последовательность, в силу этой теоремы, не может быть сходящейся.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $(|a| \neq \infty)$ и $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ произвольная подпоследовательность (x_n). Для любого $\varepsilon > 0$ найдем такое число N, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В силу строгого возрастания последовательности n_k, найдется такое K, что при всех $k > K$ будем иметь $n_k > N$, значит, $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. И в этом случае теорема доказана.

Доказательство в случае $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$ и обратная теорема остаются для самостоятельной работы.

Определение. *Верхним пределом* последовательности (x_n) называется наибольший из частичных пределов и обозначается одним из двух способов: $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ или $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Нижним пределом последовательности (x_n) называется наименьший из частичных пределов и обозначается $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ или $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Следующая теорема гарантирует существование верхнего (нижнего) предела у любой последовательности, хотя приведенный способ его вычисления мало эффективен.

Теорема. *У любой последовательности* (x_n) *существует верхний предел* (*конечный или равный* $\pm\infty$), *вычисляемый по формуле*:

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{k\geqslant n} x_k\Big)$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $y_n = \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$. Очевидно, она убывает, так как для любого n

$$y_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \geqslant \sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = y_{n+1}.$$

Если $y_1 < +\infty$, то (y_n) либо 1) имеет конечный предел (когда ограничена снизу), либо 2) $y_n \to -\infty$.

В первом случае пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Покажем, что это наибольший из частичных пределов. Для этого надо показать, что a — мажоранта множества частичных пределов и принадлежит ему.

Положим $X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$. Тогда $y_n = \sup X_n$. Если $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ — произвольная подпоследовательность из (x_n), то в силу строгого возрастания n_k, при любых k имеем $n_k > k$, значит, $x_{n_k} \in X_k$ и поэтому $x_{n_k} \leqslant y_k$. Переходя к пределу в этом неравенстве (что можно делать по свойству пределов), получаем $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant a$, т.е. a — мажоранта множества частичных пределов. Чтобы показать, что она принадлежит этому множеству, надо построить подпоследовательность (x_{n_k}), сходящуюся к a.

По определению точной верхней грани для $\varepsilon = \frac{1}{k}$ выберем $x_{n_{k+1}} \in X_{n_k+1}$ (значит, $n_k < n_{k+1}$, что необходимо, чтобы получить подпоследовательность) так, чтобы $y_{n_k+1} - \frac{1}{n} < x_{n_{k+1}} \leqslant y_{n_k+1}$. Заметим, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k+1} = a$, как у подпоследовательности сходящейся последовательности. Поэтому по теореме о сжатой переменной $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Случай 1) полностью доказан. Доказательства в случае 2) и когда $y_1 = +\infty$ остаются для самостоятельной работы.

В качестве полезного упражнения рекомендуется самостоятельно доказать теорему

Теорема. *У любой последовательности (x_n) существует нижний предел (конечный или равный $\pm\infty$), вычисляемый по формуле*:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geqslant n} x_k\right)$$

Теорема (Больцано-Вейерштрасса) *Если последовательность (x_n) ограничена, то существует подпоследовательность (x_{n_k}) этой последовательности, которая сходится.*

Иногда эту теорему формулируют в более образной форме:

Из всякой ограниченной последовательности (x_n) можно извлечь сходящуюся подпоследовательность:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ — ограничена } \Rightarrow \exists (n_k)_{k\in\mathbb{N}} : n_k \uparrow \wedge (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ — сходится.}$$

Доказательство. Эту теорему обычно доказывают, так называемым, “методом дихотоми́и” (деления пополам). В дальнейшем этот метод будет применяться для доказательства многих других теорем.

В силу ограниченности (x_n) существуют такие a и b, что все $x_n \in [a;b]$. Разделим этот отрезок на две равные части точкой $\frac{a+b}{2}$. Обозначим через $[a_1;b_1]$ ту из половинок отрезка $[a,b]$ для которой отношение $x_n \in [a_1;b_1]$ выполняется для бесконечного множества индексов $n \in \mathbb{N}$ (по крайней мере для одной из них это верно, так как множество $\mathbb{N}$ бесконечно, если же оно верно для обеих половинок, в этом случае берем любую из них). Очевидно, $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Аналогично, через $[a_2; b_2]$ обозначаем ту из половинок отрезка $[a_1; b_1]$, для которой отношение $x_n \in [a_2; b_2]$ выполняется для бесконечного множества индексов $n \in \mathbb{N}$. Тогда $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$. Продолжая так до бесконечности, получим последовательность вложенных отрезков

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

причем $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Согласно принципу вложенных отрезков существует единственная точка $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$.

Построим подпоследовательность (x_{n_k}), сходящуюся к c. Для этого выберем n_1 так, чтобы $x_{n_1} \in [a_1; b_1]$. Это можно сделать, так как таких n по построению бесконечно много. Далее, выберем n_2 так, чтобы $n_2 > n_1$ и $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$. Опять это возможно сделать, так как по построению таких n бесконечно много. Продолжая аналогично, получим такую подпоследовательность (x_{n_k}), что $x_{n_k} \in [a_k; b_k]$. Значит,

$$0 \leqslant |x_{n_k} - c| \leqslant (b_k - a_k) \leqslant \frac{b-a}{2^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Применение теоремы о сжатой переменной завершает доказательство.

Очень часто бывает полезна информация о том, сходится последовательность или расходится без вычисления самого предела. Свойство, указанное в следующем определении позволяет получать эту информацию.

Определение. Последовательность (x_n) называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \qquad (*)$$

(для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при всех n, m больше этого N выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$) Немного иначе то же самое можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ \forall p \geqslant 0 \Rightarrow |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon \qquad (**)$$

Само условие $(*)$ (или эквивалентное $(**)$) называется *условием Коши.*

Теорема. *Если (x_n) фундаментальна, то она ограничена.*

Доказательство. Для $\varepsilon = 1$ выберем N так, чтобы при всех $n > N$ и любых $p > 0$ выполнялось неравенство $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$. Пусть $n_0 > N$. Тогда вне интервала $U_1(x_{n_0}) = (x_{n_0} - 1; x_{n_0} + 1)$ могут быть только $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Положим $m = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_N, x_{n_0} - 1\}$ и $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_N, x_{n_0} + 1\}$. Очевидно, тогда для любых n имеем $m \leqslant x_n \leqslant M$. Что и требовалось доказать.

Теорема (Критерий Коши). *Для того чтобы последовательность* (x_n) *сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальна* (*или, что то же самое, удовлетворяла условию Коши*).

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем N так, чтобы при всех $n > N$ выполнялось неравенство $|x_n - a| < \varepsilon/2$. Но тогда и для любого $p > 0$ будет $|x_{n+p} - a| < \varepsilon/2$. Поэтому

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - a + a - x_n| \leqslant |x_{n+p} - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

и последовательность фундаментальна.

($\Leftarrow$) Пусть (x_n) фундаментальна. По предыдущей теореме она ограничена, а по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, скажем, (x_{n_k}), $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Покажем, что и вся последовательность (x_n) тоже сходится к a.

В самом деле,

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < *$$

Выберем N_1 так, чтобы при всех $n, m > N_1$ выполнялось неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ и выберем N_2 так, чтобы при $k > N_2$ выполнялось неравенство $|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$. Тогда при $k > \max\{N_1, N_2\}$ (учитывая, что $n_k > k$) оба неравенства выполняются одновременно, поэтому

$$* < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

Очень часто критерий Коши применяется для доказательства расходимости последовательностей:

Пример. Последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ расходится.

Доказательство. Покажем, что условие Коши не выполнено (то есть выполнено отрицание условия Коши). Имеем

$$|x_n - x_{n+p}| = \overbrace{\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}}^{p\text{–слагаемых}} \geqslant p \cdot \frac{1}{n+p} \qquad (***)$$

Покажем, что $\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n > N$ и $\exists p > 0$: $|x_n - x_{n+p}| \geqslant \varepsilon$. Для этого выберем произвольное $n > N$ (например, $n = N + 1$) и $p = n$. Тогда, согласно $(***)$ будем иметь

$$|x_n - x_{n+p}| = |x_n - x_{2n}| \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Лекция 10.
Предел функции

Здесь мы изучим понятие предела функций, определенных на интервалах $(a; b)$ или отрезках $[a; b]$. Пределы на более сложно устроенных множествах мы в целях упрощения изложения на этом этапе не рассматриваем.

Предварительно несколько вспомогательных топологических понятий.

Определение. Напомним, что *ε-окрестность* точки x_0 — это множество $U_\varepsilon(x_0) = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$.

Проколотой δ-окрестностью $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ точки x_0 называют множество

$$\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) - \{x_0\} = (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$$

(т.е. проколотая окрестность — это окрестность, из которой, образно говоря, "выкололи" (удалили) ее центр).

Определение. Пусть f определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Число A называют *пределом функции* f при стремлении x к x_0 и пишут $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, когда

> для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех x из проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ точки x_0 выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

В более краткой алгебраической форме (чаще всего используемой на практике) то же самое можно записать в виде:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$)

Интуитивно, значения функции f должны быть сколь угодно близки к числу A, если только значения x *достаточно* близки к числу x_0 (но *не совпадают* с x_0).

Примеры. 1) $\lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 < |x - x_0| < \delta$, тогда $|x| - |x_0| \leqslant |x - x_0| < \delta$, значит, $|x| < |x_0| + \delta$ и

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < \delta(|x| + |x_0|) \leqslant \delta(2|x_0| + \delta) \leqslant *$$

Выберем $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\}$, тогда оценку $*$ можно продолжить:

$$* \leqslant \delta(2|x_0| + 1) \leqslant \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$, выбирая $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\}$ при всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$, будет выполняться неравенство $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$, что и требуется по определению предела.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 < |x - x_0| < \delta$, тогда

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\sin\frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

(мы воспользовались известным неравенством $|\sin x| \leqslant |x|$) Из этой оценки видим, что для любого $\varepsilon > 0$, если выбрать $\delta = \varepsilon$, то при всех x: $0 < |x - x_0| < \delta$ будет выполняться неравенство $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Приведенное выше определение предела функции, впервые предложил (в 1821 году) французский математик О.Л. Коши́ (A.L. Cauchy). Другое определение, как мы увидим ниже, эквивалентное определению Коши, предложил ($\approx$ 1850 г.) немецкий математик Г.Э. Гейне (H.E. Heine). В некоторых случаях оно оказывается более удобным для использования, чем определение Коши.

Определение. Число A называют пределом (по Гейне) функции f при x стремящемся к x_0, если

для любой последовательности (x_n) такой, что $\begin{cases} x_n \neq x_0 \\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \end{cases}$
соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ имеет пределом число A:

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} x_n \neq x_0 \\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Очень часто это определение используют для доказательства отсутствия предела у функции при $x \to x_0$. Для этого *достаточно* найти такие две последовательности $x_n \to x_0$ и $x'_n \to x_0$, чтобы соответствующие последовательности значений функции $f(x_n)$ и $f(x'_n)$ имели разные пределы.

Пример Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Покажем, что предела $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует.

Пусть $x_n = \dfrac{1}{\pi n}$ и $x'_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Очевидно, тогда $x_n \to 0$ и $x'_n \to 0$. Но $f(x_n) = \sin\pi n = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а $f(x'_n) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\Big) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Значит, предел не существует.

Обозначим временно через $\operatorname*{C-lim}\limits_{x\to x_0} f(x)$ — предел функции по Коши, а через $\operatorname*{H-lim}\limits_{x\to x_0} f(x)$ — предел функции f по Гейне.

Теорема (об эквивалентности определений Коши и Гейне) *Предел функции по Коши существует тогда и только тогда, когда существует предел по Гейне и в этом случае они равны*:

$$\operatorname*{C-lim}_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \operatorname*{H-lim}_{x\to x_0} f(x) = A$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\operatorname*{C-lim}\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x : 0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Возьмем произвольную последовательность (x_n) такую, что $x_n \neq x_0$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Тогда найдется такое N, что при всех $n > N$ будет $|x_n - x_0| < \delta$. Следовательно, $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Значит, $\operatorname*{H-lim}\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

($\Leftarrow$) $\Cap$ Пусть $\operatorname*{H-lim}\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, но $\operatorname*{C-lim}\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A$. Тогда $\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta = \frac{1}{n}$ $\exists x_n$: $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon$. Но тогда последовательность (x_n) такова, что $x_n \neq x_0$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ Поэтому должно выполняться соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n) - A| = 0$, а у нас $|f(x_n) - A| > \varepsilon$?!

Теорема полностью доказана.

Определение Число A называют пределом функции f при стремлении x к x_0 *слева* и пишут

$$A = \lim_{x\to x_0 - 0} f(x),$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех x из $(x_0 - \delta; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Более коротко то же самое можно записать так:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Термин “предел при стремлении x к x_0 слева” соответствует интуитивному представлению о приближении x к x_0 слева, т.е. x, приближаясь к x_0 остается всегда меньше x_0.

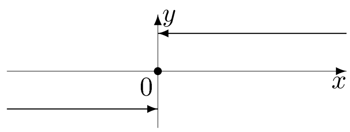
Аналогично определяется понятие предела *справа* (мы приводим его только в краткой символической форме):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пределы спрва и слева называют *односторонними.* Отметим, что в случае, когда $x_0 = 0$ в обозначении предела пишут $\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x)$ (а не $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(x)$).

Очень часто для сокращения записи односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)$ обозначают символами $f(x_0 \pm 0)$.

Пример. Пусть $f(x) = \operatorname{sgn} x$. График этой функции имеет вид:



Очевидно, предела $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует. Тем не менее существуют односторонние пределы. Например, очевидно,

$$\lim_{x\to -0} \operatorname{sgn} x = -1, \quad \text{и} \quad \lim_{x\to +0} \operatorname{sgn} x = +1.$$

Теорема. *Предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ *существует тогда и только тогда, когда существуют и равны A оба односторонних предела.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. ($\Rightarrow$) Поскольку $|f(x) - A| < \varepsilon$ при всех x из проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, тем более это неравенство будет выполняться при всех x из левой (соотв. правой) полуокрестности $(x_0 - \delta; x_0)$ (соотв. $(x_0; x_0 + \delta)$).

($\Leftarrow$) Для произвольного $\varepsilon > 0$ подберем сначала δ_1 так, чтобы при $0 < x_0 - x < \delta_1$ выполнялось неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Потом выберем δ_2 так, чтобы при $0 < x - x_0 < \delta_2$ выполнялось то же самое неравенство. Тогда при $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и x из $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, очевидно, будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Что и требовалось доказать.

Выпишем теперь несколько определений часто встречающихся в анализе. Их необходимо знать так, чтобы не задумываясь правильно и быстро выписывать. Для этого полезно представить геометрически, что означают записанные в логических и алгебраических символах свойства.

Определения.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall E>0\ \exists\delta>0\ \forall x: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>E.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall E>0\ \exists\delta>0\ \forall x: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>E.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall E>0\ \exists\delta>0\ \forall x: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<-E.$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x)=a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>0\ \forall x: |x|>\Delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>0\ \forall x: x>\Delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>0\ \forall x: x<-\Delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon.$$

Свойства пределов

Теорема. *Если функция f имеет в точке x_0 конечный предел, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки*:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a\neq\infty \Rightarrow \exists \overset{\circ}{U}_\delta(x_0),\ \text{в которой } f \text{ ограничена}$$

Доказательство. Для $\varepsilon=1$ выберем δ так, чтобы при всех $x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполнялось неравенство $|f(x)-a|<1$. Но тогда при всех x из этой окрестности $a-1<f(x)<a+1$, то есть функция ограничена. Что и требовалось доказать.

Теорема. *Если предел функции f в точке x_0 строго больше нуля, то и сама функция строго больше нуля в некоторой проколотой окрестности точки x_0*:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a>0 \Rightarrow \exists\delta>0\ \forall x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\Rightarrow f(x)>0$$

Доказательство. В условиях теоремы возьмем $\varepsilon=a(>0)$. Для него выберем $\delta>0$ так, чтобы при всех $x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполнялось неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon=a$. Но это неравенство равносильно тому, что

$$0=a-a<f(x)<a+a\Rightarrow 0<f(x)<2a.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема. *Если предел функции g в точке x_0 отличен от нуля, то существует проколотая окрестность точки x_0, в которой функция $\frac{1}{g(x)}$*

ограничена:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = b \neq 0 \Rightarrow \exists \delta > 0\ \exists M\ \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow \Big|\frac{1}{g(x)}\Big| \leqslant M.$$

Доказательство. В условиях теоремы возьмем $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ и для него выберем $\delta > 0$ так, чтобы при всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполнялось неравенство $|g(x) - b| < \frac{|b|}{2}$. Но $\big||g(x)| - |b|\big| < |g(x) - b|$, откуда $|b| - |g(x)| < \frac{|b|}{2}$, значит, $|g(x)| > \frac{|b|}{2}$. Это позволяет написать следующую оценку верную при всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$:

$$\Big|\frac{1}{g(x)}\Big| < \frac{1}{|b|/2} = \frac{2}{|b|} = M.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема (о сжатой переменной). *Пусть имеется проколотая окрестность точки x_0, в которой выполнены неравенства $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$. Если при этом $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a$, то тогда f имеет предел при x стремящемся к x_0 тоже равный a*:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

Доказательство. Применим для доказательства определение предела функции по Гейне. Для этого возьмем произвольную последовательность (x_n) со свойствами: $\forall n\ x_n \neq x_0$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Рассмотрим три числовых последовательности $\big(f(x_n)\big)$, $\big(g(x_n)\big)$ и $\big(h(x_n)\big)$. Согласно условиям теоремы

$$\forall n : g(x_n) \leqslant f(x_n) \leqslant h(x_n) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = a.$$

То есть выполнены все условия теоремы о сжатой переменной для последовательностей. Значит, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Поскольку это доказано для любой последовательности (x_n) с указанными выше свойствами, согласно определению по Гейне $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

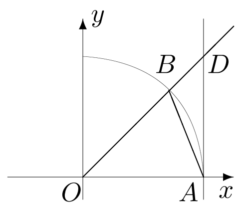
Что и требовалось доказать.

В качестве примера применения доказанной теоремы приведем

Первый замечательный предел. Так называют следующее предельное соотношение

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим на координатной плоскости круг единичного радиуса с центром в 0 и рассмотрим треугольник $\triangle OAB$, сектор $\sphericalangle OAB$ и треугольник $\triangle OAD$. Когда угол x при вершине O этих фигур находится в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$, очевидно, их площади связаны неравенствами



$$S_{\triangle OAB} < S_{\sphericalangle OAB} < S_{\triangle OAD}.$$

Вычисляя эти площади, получаем неравенства

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Деля эти неравенства на $\frac{1}{2}\sin x > 0$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Значит, для обратных величин выполняются неравенства

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Заметим, что все входящие в неравенство функции четные. Поэтому оно остается верным и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to 0$, по теореме с сжатой переменной получаем требуемый результат.

Т е о р е м а (о переходе к пределу в неравенствах) ***Если в некоторой проколотой окрестности*** $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ ***выполнено неравенство*** $f(x) \leqslant g(x)$ ***и существуют пределы*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, ***то*** $a \leqslant b$ (т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$)

Фактически теорема утверждает, что в неравенствах можно переходить к пределам, при этом эти неравенства сохраняются, [1] разумеется, когда соответствующие пределы существуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим определение предела Гейне. Для этого возьмем произвольную последовательность (x_n) со свойствами: $x_n \neq x_0$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ (очевидно, можно считать, что $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$). Соответствующие последовательности значений функций $\big(f(x_n)\big)$ и $\big(g(x_n)\big)$ при всех

[1] Строгие неравенства могут стать нестрогими

n связаны неравенством $f(x_n) \leqslant g(x_n)$ и, по определению Гейне, имеют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$. По соответствующей теореме для последовательностей $a \leqslant b$. Что и требовалось доказать.

Теорема (об арифметических свойствах предела) *Если функции f и g имеют в точке x_0 конечный предел, то существуют пределы, написанные слева, и справедливы равенства*:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x);$$
$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x);$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Причем, существование предела слева в последнем равенстве (и само равенство) можно гарантировать в общем случае только при дополнительном условии $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Доказательство. С помощью определения предела Гейне все доказательство можно свести к применению соответствующих теорем для последовательностей[1], но мы докажем это пользуясь определением предела Коши, чтобы продемонстрировать как оно работает.

1) Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. По определению предела для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что при x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon/2$. Точно так же найдется такое $\delta_2 > 0$, что при $0 < |x - x_0| < \delta_2$, выполняется неравенство $|g(x) - B| < \varepsilon/2$. Выбрав $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ видим, что при x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$ можем написать

$$\begin{aligned}|\big(f(x) + g(x)\big) - (A + B)| = |\big(f(x) - A\big) + \big(g(x) - B\big)| \leqslant \\ \leqslant |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

и первое равенство доказано.

2) Пусть опять $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Найдем сначала проколотую δ_0-окрестность, где $|g(x)| \leqslant M$ (это можно сделать, так как g имеет конечный предел). Далее, подберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы при $0 < |x - x_0| < \delta_1$ выполнялось неравенство $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$ и $\delta_2 > 0$, чтобы при $0 < |x - x_0| < \delta_2$ выполнялось неравенство $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$ (если $A \neq 0$). Тогда, при

[1] Рекомендуется проделать в качестве упражнения

$\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\} > 0$ и любых x: $0 < |x - x_0| < \delta$ будут выполняться все указанные неравенства для f и g, поэтому

$$|f(x)g(x) - AB| = |f(x)g(x) - Ag(x) + Ag(x) - AB| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - A||g(x)| + |A||g(x) - B| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}M + |A|\frac{\varepsilon}{2|A|} = \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать по определению предела.

3) Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$. По доказанной ранее теореме найдется проколотая δ_0-окрестность, в которой функция $\frac{1}{g(x)}$ ограничена (пусть, $\frac{1}{|g(x)|} < M$). В этой окрестности имеем неравенства

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\Big| = \frac{|f(x)B - Ag(x)|}{|B||g(x)|} = \frac{|f(x)B - AB + AB - Ag(x)|}{|B||g(x)|} \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - A|\frac{1}{|g(x)|} + \frac{|A|}{|B||g(x)|}|g(x) - B| \leqslant |f(x) - A|M + \frac{|A|M}{|B|}|g(x) - B|.$$

Видим, что в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, в которой $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$ и $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon|B|}{2|A|M}$ будем иметь $\big|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\big| < \varepsilon$.

Что и требовалось доказать.

Теорема (о замене переменной в пределе) ***Пусть существует предел*** $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = A$. ***Если*** $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = y_0$, ***причем для всех*** x ***из некоторой проколотой окрестности*** $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ ***выполняется неравенство*** $\varphi(x) \neq y_0$, ***то функция*** $F(x) = f\big(\varphi(x)\big)$ ***имеет предел в точке*** x_0 ***и***

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} f\big(\varphi(x)\big) = \lim_{y\to y_0} f(y) = A.$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем сначала $\sigma > 0$ так, чтобы при $0 < |y - y_0| < \sigma$ выполнялось неравенство $|f(y) - A| < \varepsilon$. Далее, найдем $\delta > 0$, чтобы при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполнялось неравенство $0 < |\varphi(x) - y_0| < \sigma$ (больше нуля, так как $\varphi(x) \neq y_0$). Но тогда при этих x

$$|F(x) - A| = |f\big(\varphi(x)\big) - A| < \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. Вполне очевидно, что в случае, когда $\lim\limits_{y\to y_0} f(x) = f(y_0)$, требование $\varphi(x) \neq y_0$ можно отбросить. Оно иногда может быть слишком ограничительным.

Примеры. 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x}$ $(a \neq 0)$.

Р е ш е н и е. Обозначим $y = ax$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0} ax = 0$ и при $x \neq 0$ имеем $ax = y \neq 0$, то есть выполнены все условия предыдущей теоремы, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a \sin ax}{ax} = \lim_{y\to 0} \frac{a \sin y}{y} = a.$$

2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Р е ш е н и е. Обозначим $y = \arcsin x$. Тогда при $x \to 0$, $y = \arcsin x \to 0$ и $y \neq 0$ при $x \neq 0$. Поэтому (учитывая, что $x = \sin y$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

Лекция 11

Теоремы существования предела функции

Для нахождения пределов очень важной является информация о том, существует или нет искомый предел. Бывают случаи, когда на этот вопрос можно ответить не вычисляя самого предела. Здесь мы изучим такие случаи.

Сначала напомним определение.

Определение. Функция f называется *возрастающей* (соответственно *строго возрастающей*) на отрезке $[a;b]$ (в конспектах пишут $f \nearrow_{[a;b]}$ или $f \uparrow [a;b]$), когда при любых $x_1 < x_2$ из отрезка $[a;b]$ выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) < f(x_2)$):

$$f \nearrow_{[a;b]} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in [a;b]\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Функция f называется *убывающей* (соответственно *строго убывающей*) на отрезке $[a;b]$ (в конспектах пишут $f \searrow^{[a;b]}$ или $f \downarrow [a;b]$), когда при любых $x_1 < x_2$ из отрезка $[a;b]$ выполняется неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$):

$$f \searrow^{[a;b]} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in [a;b]\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

Иначе говоря, применение возрастающей функции к обеим частям неравенства сохраняет это неравенство, а убывающей — меняет знак неравенства на противоположный.

Если функция возрастает (или убывает) на всем промежутке $[a;b]$, то говорят, что она *монотонна* на этом промежутке.

Теорема. *Если f монотонна на $[a,b]$, то в каждой точке $x_0 \in (a;b)$ существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$, причем если f возрастает, то*

$$\sup_{x\in[a;x_0)} f(x) = f(x_0-0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+0) = \inf_{(x_0;b]} f(x),$$

а если убывает, то неравенства противоположные.

В крайних точках a и b существуют соответствующие односторонние пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) \geqslant f(a)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b-0) \leqslant f(b)$ (для возрастающей функции).

Доказательство. Предположим, что f возрастает. Тогда при любых $x < x_0$ имеем $f(x) \leqslant f(x_0)$, поэтому $\sup\limits_{x<x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$ (наименьшая из мажорант меньше одной конкретной $f(x_0)$).

Положим $\sup\limits_{x<x_0} f(x) = A$ и покажем, что $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$. По определению точной верхней грани для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем такое число $x_1 < x_0$, что $A-\varepsilon < f(x_1) \leqslant A$. В силу возрастания f для любых $x \in (x_1;x_0)$ будем иметь

$$A-\varepsilon < f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant A \quad \text{ то есть } \quad f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

что и требовалось доказать.

Существование предела справа доказывается аналогично и остается для самостоятельной работы.

Критерий Коши для функции

Определение. Говорят, что функция f удовлетворяет *условию Коши* в точке x_0, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x', x'' : \begin{cases} 0 < |x'-x_0| < \delta \\ 0 < |x''-x_0| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Используя понятие проколотой окрестности, это условие можно записать немного короче:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

(для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых x', x'' из проколотой δ-окрестности точки x_0 выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$)

Лемма *Если известно, что для любой последовательности (x_n) такой, что $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ и $x_n \neq x_0$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится, то все такие последовательности сходятся к одному и тому же пределу.*

Доказательство. Пусть $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ и $x'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ и при всех n имеем $x_n \neq x_0$ и $x'_n \neq x_0$. Тогда "перемешанная" последовательность $y_n = \begin{cases} x_k, & n = 2k \\ x'_k & n = 2k+1 \end{cases}$ тоже сходится к x_0, поэтому последовательность $f(y_n)$ имеет предел, который мы обозначим через A. Но последовательность $f(x_k)$ является подпоследовательностью $f(y_n)$ с четными номерами, поэтому должна иметь тот же предел A. Точно так же $f(x'_k)$ является подпоследовательностью с нечетными номерами и должна тоже сходиться к A, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$.

Что и требовалось доказать.

Теорема (критерий Коши). *Для существования конечного предела у функции f в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялось условие Коши.*

$$\exists \lim_{x\to\infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Предположим $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Тогда по произвольному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы при всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполнялось неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon/2$. Если теперь x' и x'' — произвольные элементы из этой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, то справедлива оценка

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

И необходимость доказана.

($\Leftarrow$) Нам дано, что выполнено условие Коши. Для доказательства существования предела воспользуемся определением Гейне. Пусть (x_n) — произвольная последовательность со свойствами $x_n \neq x_0$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Рассмотрим последовательность значений функции $\big(f(x_n)\big)$.

Она фундаментальна, так как для любого $\varepsilon > 0$ сначала найдем $\delta > 0$ так, чтобы при любых $x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, затем подберем N так, чтобы при всех $n > N$ имели $x_n \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, но тогда и $x_{n+p} \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, значит, $|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \varepsilon$.

В силу фундаментальности, последовательность $\big(f(x_n)\big)$ сходится, скажем, к числу A. По предыдущей лемме этот предел не зависит от выбора последовательности (x_n), поэтому по определению Гейне предел функции f равен этому числу A. Что и требовалось доказать.

Примеры. 1. Покажем с помощью критерия Коши, что функция $f(x) = \sin x$ имеет предел в точке x_0, для этого, выбрав $x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, можем написать оценку:

$$|\sin x' - \sin x''| = \left|2\sin\frac{x'-x''}{2}\cos\frac{x'+x''}{2}\right| \leqslant \left|2\sin\frac{x'-x''}{2}\right| \tag{5}$$

$$\leqslant |x'-x''| \leqslant |x'-x_0| + |x_0 - x''| < 2\delta = \varepsilon \tag{6}$$

Откуда видно, что для f выполнено условие Коши в точке x_0, значит, она имеет конечный предел в этой точке. Что и требовалось доказать.

Очень часто критерий Коши применяют, когда надо доказать, что предела не существует. Для этого достаточно показать, что выполнено отрицание условия Коши:

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x', x'' \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \wedge |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon$$

2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует. Для этого выберем $x' = \frac{1}{2\pi n}$, $x'' = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$. Тогда для любых n будем иметь $|f(x') - f(x'')| = 1$.

Лекция 12. Непрерывность

Определение. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Более подробно в алгебраических терминах это означает:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Отметим, что в данном случае x можно выбирать любое из полной, а не проколотой окрестности точки x_0, т.к. в самой точке x_0 нужное неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ выполняется автоматически ($0 < \varepsilon$).

В геометрических терминах это определение выглядит так:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon\big(f(x_0)\big),$$

т.е. для любой ε-окрестности $U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$ точки $f(x_0)$ найдется такая δ-окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что образы всех точек x из $U_\delta(x_0)$ попадают в $U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$.

Более коротко то же самое означает:

> Функция f непрерывна в x_0 тогда и только тогда, когда прообраз при f любой ε-окрестности точки $f(x_0)$ содержит некоторую δ-окрестность точки x_0:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ f^{-1}\big(U_\varepsilon(f(x_0))\big) \supset U_\delta(x_0).$$

Замечание. Равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ часто интерпретируют, как возможность перестановки операций перехода к пределу и вычисления функции:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

Особенно полезно это иметь в виду при различных "заменах переменной" у непрерывной функции (см. замечание к теореме о замене переменной в пределе).

Определение. Говорят, что функция f *имеет разрыв* в точке x_0, если она в этой точке не является непрерывной, то есть f не определена в точке x_0, или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ (В частности, этого равенства нет и есть разрыв, когда предела в левой части равенства не существует).

Точки разрыва функции f классифицируют в зависимости от ее поведения вблизи этой точки согласно следующему определению.

Определение. Говорят, что x_0 — *точка разрыва* 1*-го рода* функции f, если существуют *конечные* односторонние пределы при $x \to x_0$, но хотя бы один из них не совпадает со значением f в точке x_0 (в частности, когда f не определена в точке x_0)

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \wedge \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$$

но

$$f(x_0-0) \neq f(x_0) \vee f(x_0+0) \neq f(x_0)$$

Когда $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$, разрыв (1-го рода) называют *устранимым*.

Точки разрыва не являющиеся разрывами 1-го рода, называют *точками разрыва 2-го рода*.

Очевидно, x_0 — точка разрыва 2-го рода тогда и только тогда, когда хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 *не существует* или равен ∞.

Если функция определена на интервале $(a;b)$ или промежутке $[a;b]$, то крайние точки a и b называют точками разрыва, если f в них не определена или соответствующие односторонние пределы не совпадают со значением f в этих точках.

Примеры. 1. Функция $\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$ в точке 0 имеет разрыв 1-го рода (неустранимый). Так как

$$\lim_{x\to -0}\frac{|x|}{x} = -1 \neq \lim_{x\to +0}\frac{|x|}{x} = 1.$$

2. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ имеет в точке 0 разрыв, так как

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{x} = +\infty.$$

Независимо от того, каким будет предел слева (а он равен $-\infty$) видим, что 0 — точка разрыва 2-го рода.

3. Мы уже видели, что у функции $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ в точке 0 не существует предела ни справа ни слева. Поэтому в этой точке разрыв 2-го рода.

Определение. Функция называется *непрерывной на интервале* (a,b), если она непрерывна *в каждой точке* этого интервала.

Говорят, что функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна на интервале $(a;b)$, и

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to b-0} f(x) = f(b).$$

(пределы односторонние!)

Примеры. 1) Функция $f(x) = x^n$ $(n\in\mathbb{N})$, непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0} x^n = \lim_{x\to x_0} x_0^n\Big(\frac{x}{x_0}\Big)^n = \lim_{x\to x_0} x_0^n\bigg(1+\Big(\frac{x-x_0}{x_0}\Big)\bigg)^n = x_0^n.$$

2) Функция $f(x) = \ln x$ непрерывна на интервале $(0;+\infty)$.

Доказательство. Пусть $x_0 > 0$, тогда имеем

$$\lim_{x\to x_0}\ln x = \lim_{x\to x_0}\Big(\ln x_0 + \ln\frac{x}{x_0}\Big) = \ln x_0 + \lim_{x\to x_0}\ln\Big(1+\frac{x-x_0}{x_0}\Big) = \ln x_0.$$

Так как последний предел равен нулю в силу оценки[1]

$$0 \leqslant \Big|\ln\Big(1+\frac{x-x_0}{x_0}\Big)\Big| \leqslant \frac{|x-x_0|}{x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0.$$

[1] Следует из неравенства $|\ln(1+x)| < |x|$.

Определение. Через $C[a,b]$ (соотв. $C(a,b)$) обозначают множество *всех непрерывных функций на отрезке* $[a,b]$. (соотв. на интервале (a,b)). Таким образом, запись $f \in C[a,b]$ означает просто, что функция f непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b]$.

Теорема *Следующие элементарные функции непрерывны на своей области определения*:

1) $y = x^n$;
2) $y = \sin x$;
3) $y = \cos x$;
4) $y = \log_a x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$.

Доказательство. Фактически, мы уже доказали ранее, что $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$, т.е. непрерывность функции sin в каждой точке $\mathbb{R}$. Для косинуса доказательство аналогично, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, а непрерывность $\ln x$ на $(0;+\infty)$ уже доказана.

Тем не менее рекомендуется в качестве упражнения провести детальные доказательства всех этих фактов.

Лекция 13

Второй замечательный предел

Так называют следующее предельное соотношение:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \qquad (*)$$

Напомним, что число e определяется формулой $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Поэтому естественно воспользоваться этим определением для доказательства соотношения $(*)$.

Лемма. *Если* (n_k) *— произвольная последовательность натуральных чисел стремящаяся к* $+\infty$ *(не обязательно возрастающая), то*

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$$

Доказательство. Отметим, что если n_k строго возрастающая последовательность, то ничего доказывать не надо, так как тогда $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ — подпоследовательность для $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходящейся к e и, значит, сама сходится к e.

В общем же случае сначала для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем такое N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$ и затем (в силу $n_k \to \infty$), выберем такое K, что при всех $k > K$ имеет место неравенство $n_k > N$. Тогда

$$\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e\right| < \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема. *Справедливы следующие предельные соотношения*:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство. Докажем первое равенство воспользовавшись определением предела по Гейне. Для этого возьмем произвольную последовательность $x_n \to +\infty$ и положим $n_k = [x_k]$ (целая часть от x_k). Тогда $n_k \leqslant x_k < n_k + 1$, поэтому

$$1 + \frac{1}{n_k+1} < 1 + \frac{1}{x_k} \leqslant 1 + \frac{1}{n_k}.$$

Все члены равенства больше 1, поэтому при возведении в большую степень могут только увеличиться:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \leqslant \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Вычисляя предел слева, по лемме будем иметь

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)} = e$$

Аналогично справа

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e$$

По теореме о сжатой переменной (для последовательностей) $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e$. И согласно определению предела Гейне, первое равенство доказано.

Докажем второе предельное соотношение. Для этого сделаем замену переменной по формуле $x = -y$. Тогда при $x \to -\infty$ будем иметь $y \to +\infty$. Поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1} =$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e.$$

Теорема доказана.

Теорема. (Второй замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Доказательство. В равенствах предыдущей теоремы, делая замену переменной $y = \frac{1}{x}$ (тогда $y \to +0$ при $x \to +\infty$ и $y \to -0$ при $x \to -\infty$), будем иметь

$$\lim_{y\to+0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to-0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

И в силу равенства односторонних пределов существует простой предел и равен общему значению односторонних.

Что и требовалось доказать.

Следующие три следствия второго замечательного предела иногда тоже считают замечательными пределами и их знание является обязательным для каждого математика.

Следствие 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

Доказательство. Мы уже доказали непрерывность функции $\log_a x$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Следствие 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем замену переменной по формуле $y = a^x - 1$, тогда $y \to 0$ при $x \to 0$ и $x = \log_a(1+y)$. Поэтому (используя предыдущее следствие)

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}} = \ln a.$$

Следствие 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем замену переменной $y = (1+x)^\alpha - 1$, тогда $y \to 0$ при $x \to 0$ и $(1+y) = (1+x)^\alpha$, значит, $\ln(1+y) = \alpha\ln(1+x)$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\(y\to 0)}} \frac{y\cdot\alpha\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} \lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

Пример. Функция $f(x) = x^\alpha$ непрерывна (при $x \neq 0$, если $\alpha < 0$)

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $x_0 \neq 0$ имеем

$$\lim_{x\to x_0}(x^\alpha - x_0^\alpha) = \lim_{x\to x_0} x_0^\alpha\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha - 1\right] = \lim_{x\to x_0} x_0^\alpha\left[\left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right)^\alpha - 1\right] =$$

$$\lim_{x\to x_0} x_0^\alpha \frac{\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{x-x_0}{x_0}}\cdot\frac{x-x_0}{x_0} = 0$$

Локальные свойства непрерывных функций

Так называют свойства, которые описывают поведение функции вблизи одной точки.

Теорема 1. *Если f непрерывна в x_0, то существует окрестность $U_\delta(x_0)$ (не проколотая!), в которой f ограничена.*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \;\Rightarrow\; \exists\delta > 0\ \exists C\ \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| \leqslant C.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению непрерывности в точке x_0 для $\varepsilon = 1$ найдем такое $\delta > 0$, что для всех $x \in U_\delta(x_0)$ будет выполняться соотношение $f(x) \in U_1\big(f(x_0)\big)$. Откуда видно, что $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$, то есть функция ограничена и если взять $C = \max\{|f(x_0)-1|, |f(x_0)+1|\}$, то $|f(x)| < C$.

Что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если f непрерывна в x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U_\delta(x_0)$, в которой f сохраняет знак.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0 \ \Rightarrow \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x)f(x_0) > 0.$$

Эта теорема является непосредственным следствием соответствующей теоремы о пределах. Тем не менее, в качестве упражнения рекомендуется провести полное доказательство для данного случая.

Теорема 3 (арифметические свойства). *Если f и g непрерывны в точке x_0, то непрерывны в x_0 функции*:

1) $f \pm g$;

2) $f \cdot g$;

3) $\dfrac{f}{g}$, при дополнительном условии $g(x_0) \neq 0$.

Эта теорема тоже является непосредственным следствием теоремы об арифметических свойствах пределов функции. В качестве самостоятельной работы рекомендуется написать полные доказательства этих свойств для данного случая.

Лекция 14.

Глобальные свойства непрерывных функций

Здесь мы изучим свойства, которыми обладают непрерывные функции, рассматриваемые как “единое целое”. Напомним, что $C[a;b]$ — множество всех непрерывных на $[a;b]$ функций, а $B[a;b]$ — множество всех ограниченных на $[a;b]$ функций. А запись $f \in C[a;b]$ (соотв. $f \in B[a;b]$) можно считать просто сокращением слов: “функция f непрерывна в каждой точке отрезка $[a;b]$” (соотв. “функция f ограничена на отрезке $[a;b]$”).

Теорема (1-я теорема Вейерштрасса) *Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке*:

$$f \in C[a;b] \ \Rightarrow \ f \in B[a;b].$$

Доказательство. $\Cap$ Пусть f неограничена на $[a;b]$. Тогда выполнено условие (отрицание условия ограниченности):

$$\forall C \ \exists x : x \in [a;b] \wedge |f(x)| \geqslant C.$$

Беря последовательно $C = n$ будем находить такие $x_n \in [a;b]$, в которых $|f(x_n)| \geqslant n$. Из полученной ограниченной последовательности (x_n)

выделим (по теореме Больцано-Вейерштрасса) сходящуюся подпоследовательность (x_{n_k}). Пусть $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$. Тогда $x_0 \in [a;b]$, так как $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$ и в неравенствах можно переходить к пределу.

Теперь, с одной стороны

$$|f(x_{n_k})| \geqslant n_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty,$$

и последовательность $\big(f(x_{n_k})\big)$ неограничена, а с другой, в силу непрерывности f в точке $x_0 \in [a;b]$ и определения предела по Гейне

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

и, значит, последовательность $\big(f(x_{n_k})\big)$ ограничена?!

Противоречие доказывает теорему.

Замечание. Отметим важность условия замкнутости промежутка $[a;b]$. Оно гарантирует принадлежность точки x_0 множеству, где функция непрерывна по условию, чем мы и воспользовались (существенно!) при доказательстве. Если это условие в предположениях опустить, то результат становится, вообще говоря, неверен.

Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0;1)$, но неограничена на нем (Все доказательства провести самостоятельно).

Теорема (2-я теорема Вейерштрасса). *Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a;b]$, то существует точка $\underline{x}$, в которой $f(\underline{x}) = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ и существует точка $\overline{x}$, в которой $f(\overline{x}) = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.*

Более образно эту теорему формулируют так:

> *Если f непрерывна на замкнутом промежутке $[a;b]$, то она* **достигает** *своих точных верхней и нижней граней.*

Если же вспомнить определения максимального и минимального элементов, то эту теорему еще можно сформулировать так:

> *У множества значений, которые принимает непрерывная функция на замкнутом промежутке $[a;b]$,* **существуют** *максимальный и минимальный элементы.*

Доказательство. Пусть $f \in C[a;b]$. По первой теореме Вейерштрасса она ограничена, поэтому множество ее значений имеет точные верхнюю и нижнюю грани. Мы покажем только, что существует точка $\underline{x} \in [a;b]$, в которой $f(\underline{x}) = m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. Оставшееся (для успешной сдачи экзамена) необходимо доказать самостоятельно.

По определению точной нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $x_\varepsilon \in [a;b]$, что $m \leqslant f(x_\varepsilon) < m + \varepsilon$.

Выбирая поочередно $\varepsilon = \frac{1}{n}$ построим такую последовательность $x_n \in [a;b]$, что $m \leqslant f(x_n) < m + \frac{1}{n}$. Очевидно, $f(x_n)$ сходится к m. По теореме Больцано-Вейерштрасса имеется подпоследовательность (x_{n_k}), сходящаяся к некоторому элементу $\underline{x} \in [a;b]$ (см. замечание к 1-ой теореме Вейерштрасса). Теперь, в силу непрерывности функции f имеем, с одной стороны $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\underline{x})$, а с другой, $\big(f(x_{n_k})\big)$ — подпоследовательность сходящейся последовательности $\big(f(x_n)\big)$, а значит, имеет тот же предел m, то есть $f(\underline{x}) = m$. Что и требовалось доказать.

Следующая теорема важна для приложений математики, поскольку дает легко реализуемый алгоритм (приближенного) решения уравнений.

Теорема (О. Коши о нулях) *Если f непрерывна на замкнутом промежутке $[a;b]$ и принимает на концах значения разных знаков, то существует точка $x_0 \in (a;b)$, в которой $f(x_0) = 0$:*

$$f \in C[a;b] \quad \text{и} \quad f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a;b) : f(x_0) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности предположим, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Другой случай доказывается аналогично.

Применим метод дихотоми́и. Разделим отрезок $[a;b]$ точкой $c = \frac{a+b}{2}$ пополам. Если $f(c) = 0$, то все доказано. Если $f(c) \neq 0$, то из двух половинок обозначим через $[a_1;b_1]$ ту из них, для которой $f(a_1) < 0$ и $f(b_1) > 0$. С полученным отрезком $[a_1;b_1]$ поступим так же: делим пополам точкой $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ и (если $f(c_1) \neq 0$) обозначаем через $[a_2;b_2]$ ту из половинок, для которой $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$.

В результате такой процедуры либо мы через конечное число шагов попадем в точку c_n, в которой $f(c_n) = 0$ (и теорема доказана), либо построим последовательность вложенных отрезков $[a_n;b_n]$, у которых $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$. Согласно принципу вложенных отрезков в этом случае имеется (единственная) точка $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n;b_n]$ и $a_n \uparrow x_0$ (т.е. монотонно возрастая), $b_n \downarrow x_0$ (т.е. монотонно убывая).

В силу непрерывности f имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Но при всех n имеем $f(a_n) < 0$, значит, $f(x_0) \leqslant 0$. С другой стороны, при всех n имеем $f(b_n) > 0$, значит, $f(x_0) \geqslant 0$. Поэтому $f(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема (О. Коши о промежуточных значениях). *Если $f \in C[a;b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого числа y_0 между A и B найдется такое $x_0 \in [a;b]$, что $f(x_0) = y_0$.*

> Иногда эту теорему еще формулируют так: *непрерывная функция принимает все промежуточные значения между теми, которые она принимает на концах промежутка $[a;b]$.*

Доказательство. Предположим для определенности, что $A < B$ и $A \leqslant y_0 \leqslant B$. Рассмотрим новую функцию $F(x) = f(x) - y_0$. Очевидно, она непрерывна на $[a;b]$ и $F(a) = f(a) - y_0 = A - y_0 < 0$, $F(b) = f(b) - y_0 = B - y_0 > 0$. Поэтому, по предыдущей теореме (О.Коши о нулях) существует точка x_0, в которой $F(x_0) = 0$, то есть $f(x_0) - y_0 = 0$ или $f(x_0) = y_0$.

Что и требовалось доказать.

Применение 2-ой теоремы Вейерштрасса позволяет немного усилить последнюю теорему.

Следствие. (Усиление теоремы О. Коши о промежуточных значениях) *Если $f \in C[a;b]$ и $A = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ $B = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, то для любого $y_0 \in [A;B]$ существует $x_0 \in [a;b]$, для которого $f(x_0) = y_0$.*

Доказательство. По 2-ой теореме Вейерштрасса существуют точки x_1, x_2, в которых функция принимает минимальное и максимальное значения (A и B соответственно). На промежутке $[x_1;x_2]$ (в случае $x_1 < x_2$ и $[x_2;x_1]$ в случае противоположного неравенства) выполнены все условия теоремы Коши о промежуточных значениях, поэтому существует точка $x_0 \in [x_1;x_2] \subset [a;b]$, в которой $f(x_0) = y_0$.

Что и требовалось доказать.

В качестве применения доказанных теорем приведем некоторые результаты часто используемые в приложениях.

Определение. Пусть $f : [a;b] \to [a;b]$. Точка x_0 называется *неподвижной* для f, если $f(x_0) = x_0$.

Отметим, что условие $f : [a;b] \to [a;b]$ нетривиально. Оно означает, что для любых $x \in [a;b]$ должны выполняться неравенства $a \leqslant f(x) \leqslant b$.

Теорема (о существовании неподвижной точки) *Если $f : [a;b] \to [a;b]$ — непрерывная функция, то f имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - x$. Она непрерывна на $[a;b]$, как разность двух непрерывных функций. Кроме того, $F(a) = f(a) - a \geqslant 0$, а $F(b) = f(b) - b \leqslant 0$. По теореме Коши о нулях, существует точка x_0, в которой $F(x_0) = 0$, то есть $f(x_0) - x_0 = 0$ или $f(x_0) = x_0$.

Что и требовалось доказать.

Следующая теорема имеет геометрический характер. И для ее формулировки нам понадобятся некоторые понятия. Мы будем рассматривать плоскость, на которой фиксируем систему координат. Будем обозначать $x = (x_1, x_2)$ — точки этой плоскости.

Определение. Две точки, лежащие на одной окружности, называются *антиподáльными*,[1] если они лежат на (противоположных) концах одного диаметра.

Очевидно, если окружность имеет центр в нуле и точка $x = (x_1, x_2)$ лежит на одном конце диаметра, то антиподальной будет точка $-x = (-x_1, -x_2)$. (Нарисуйте картинку).

Теорема (об антиподáльных точках). *Если функция f непрерывна на окружности, то существуют антиподальные точки, в которых она принимает одинаковые значения.*

Доказательство. Рассмотрим новую функцию на окружности: $F(x) = f(x) - f(-x)$. Она непрерывна, как разность двух непрерывных функций. Взяв произвольную точку x_1, вычислим значение функции F в антиподальной точке $-x_1$:

$$F(-x_1) = f(-x_1) - f(x_1) = -\big(f(x_1) - f(-x_1)\big) = -F(x_1).$$

То есть в антиподальных точках функция F принимает значения разных знаков. По теореме Коши о нулях, существует точка x_0, в которой $F(x_0) = 0$, то есть $f(x_0) = f(-x_0)$.

Что и требовалось доказать.

Определение. Пусть функция f определена на промежутке $[a; b]$. Напомним, что функция g, определенная на промежутке $[A; B]$ называется обратной к f, если

$$\forall x \in [a; b] \Rightarrow g\big(f(x)\big) = x \quad \text{и} \quad \forall y \in [A; B] \Rightarrow f\big(g(y)\big) = y.$$

Теорема (о существовании обратной функции). *Если f непрерывна на $[a; b]$, строго возрастает на $[a; b]$ и $A = f(a)$, $B = f(b)$, то существует функция g обратная к f. При этом она строго возрастает и непрерывна на промежутке $[A; B]$.*

Доказательство. Шаг 1. Докажем сначала существование. Так как $A = f(a)$ и $B = f(b)$, по теореме Коши о промежуточных значениях для любого $y \in [A; B]$ найдется такое число $x \in [a; b]$, что $y = f(x)$. По определению положим $g(y) = x$ и это определение корректно, т.е. число x для каждого y определяется однозначно

[1] От слова "антипод"

> $\Cap$ Пусть $f(x) = y$ и $f(x') = y$. Можно считать, что $x < x'$, но тогда в силу строго возрастания $f(x) < f(x')$?!

и существование функции g доказано.

Шаг 2. Докажем монотонность g. $\Cap$ Пусть $y_1 < y_2$ и $x_1 = g(y_1) \geqslant g(y_2) = x_1$. Но тогда $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$ и в силу строгого возрастания f, так как $x_1 \geqslant x_2$ должны иметь $y_1 \geqslant y_2$?!

Шаг 3. Докажем непрерывность g. $\Cap$ В силу доказанной монотонности g она имеет в каждой точке из $[A; B]$ конечные односторонние пределы, значит, не может иметь разрывов 2-го рода. Пусть в точке y_0 разрыв 1-го рода и, скажем, $g(y_0 - 0) \neq g(y_0)$ (напомним, что по определению $g(y_0 - 0) = \lim\limits_{y \to y_0 - 0} g(y)$). Тогда $\sup\limits_{y \in [A; y_0)} g(y) = g(y_0 - 0) < g(y_0)$, значит, для любого $y < y_0$ будем иметь $g(y) \leqslant g(y_0 - 0) < g(y_0)$. Но для $x \in \big(g(y_0 - 0); g(y_0)\big) = (g(y_0 - 0); x_0)$ должно существовать число $y < y_0$, для которого $g(y) = x > g(y_0 - 0) = \sup\limits_{y \in [A; y_0)} g(y)$?! Полученное противоречие доказывает неверность предположения.

Теорема полностью доказана.

Замечание. Очевидно, аналогичная теорема справедлива и для строго убывающей непрерывной на $[a; b]$ функции. Точная формулировка и доказательство этой теоремы остается в качестве упражнения для самостоятельной работы.

Следствие. Следующие элементарные функции являются непрерывными по доказанной теореме:

1) $y = e^x$ — как обратная к строго возрастающей непрерывной функции $x = \ln y$ (или, более общо, $y = a^x$).

2) $y = \arcsin x$ — как обратная к строго возрастающей на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функции $x = \sin y$.

3) $y = \arccos x$ — как обратная к строго убывающей на промежутке $[0; \pi]$ функции $x = \cos y$.

Лекция 15

О-символика

Здесь мы приводим терминологию, связанную с пределами и очень часто используемую не только в математическом анализе, а потому знать ее должен каждый образованный математик.

Определение. Две последовательности (x_n) и (y_n) называют *эквивалентными* и пишут $x_n \sim y_n$, если существует такая последовательность

α_n, что:

$$\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{и} \quad \forall n\ x_n = \alpha_n y_n.$$

Теорема. *Если при любых n имеем $y_n \neq 0$, то последовательности (x_n) и (y_n) эквивалентны тогда и только тогда, когда*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = 1.$$

Доказательство тривиально, надо просто взять $\alpha_n = \frac{x_n}{y_n}$.

Примеры. 1) Если $x_n = n$, а $y_n = n + \sqrt{n}$, то эти последовательности эквивалентны, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Таким образом, можем написать $n \sim (n + \sqrt{n})$.

2) Докажем, что $\frac{1}{n+100} \sim \frac{1}{n}$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n+100}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+100} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{100}{n}} = 1.$$

3) Как мы уже доказали $\sqrt[n]{n} \sim 1$.

Определение Говорят, что функции f и g *эквивалентны при x стремящемся к x_0* (и пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$), когда существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}_\delta(x_0)$ и функция $\alpha(x)$, определенная в этой окрестности, что

$$\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)\ f(x) = \alpha(x) g(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 1.$$

Теорема. *Если функция $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Эта теорема не менее очевидна, чем для последовательностей.

Примеры. Вспоминая первый замечательный предел и следствия из второго, можем написать при $x \to 0$

$$\sin x \sim x;\ \ln(1+x) \sim x;\ (a^x - 1) \sim x \ln a;\ \big[(1+x)^\alpha - 1\big] \sim \alpha x.$$

В качестве упражнения рекомендуется проверить, что введенное отношение $\sim$ обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, то есть действительно является отношением эквивалентности на множестве всех последовательностей (или функций, определенных в некоторой окрестности x_0)

Следующие два определения немного обобщают предыдущие:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что последовательность (x_n) есть "*O-большое от (y_n) при n стремящемся к бесконечности*" и пишут

$$x_n = O(y_n) \quad \text{при } n \to \infty,$$

когда существует такая *ограниченная* последовательность α_n, что $x_n = \alpha_n y_n$:

$$x_n = O(y_n) \quad \text{при } n \to \infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists(\alpha_n) : \forall n \; x_n = \alpha_n y_n \wedge \alpha_n \text{ —ограничена}$$

В частности, если $x_n \sim y_n$ можем написать $x_n = O(y_n)$. Обратное, очевидно, неверно.

ТЕОРЕМА. *Если при всех n имеем $y_n \neq 0$, то $x_n = O(y_n)$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда последовательность $\frac{x_n}{y_n}$ ограничена.*

Если вспомнить о том, что всякая сходящаяся последовательность ограничена, то простым следствием этой теоремы будет

ТЕОРЕМА. *Если существует конечный предел $\lim \frac{x_n}{y_n}$, то $x_n = O(y_n)$ при $n \to \infty$.*

Для функций все соответствующие результаты выглядят так.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что $f(x)$ *есть O-большое от $g(x)$ при $x \to x_0$* и пишут:

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \quad \text{при } x \to x_0,$$

когда существуют проколотая окрестность точки x_0 и *ограниченная* в ней функция $\alpha(x)$ такие, что при всех x из этой проколотой окрестности $f(x) = \alpha(x)g(x)$.

ТЕОРЕМА. *Если $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то $f(x) = O\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда существует проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, в которой функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена.*

В частности, если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq \infty$, то $f(x) = O\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$.

ПРИМЕРЫ. 1) Соотношение $x_n = O(1)$ при $n \to \infty$ означает в точности, что последовательность (x_n) — ограничена.

2) Можно написать $x \sin \frac{1}{x} = O(x)$ при $x \to 0$, так как

$$\left| \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} \right| = \left| \sin \frac{1}{x} \right| < 1.$$

(Хотя предела отношения при $x \to 0$ не существует)

Следующие понятия наиболее употребимы из всей o-символики:

Определение. Говорят, что последовательность (x_n) есть "o-малое от y_n при n стремящемся к бесконечности" и пишут:

$$x_n = o(y_n) \quad \text{при } n \to \infty,$$

когда существует такая последовательность α_n, что при всех n имеем $x_n = \alpha_n y_n$ и $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Аналогично для функций:

Говорят, что $f(x)$ есть "o-малое от $g(x)$ при x стремящемся к x_0" и пишут

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \quad \text{при } x \to x_0$$

когда существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ и функция $\alpha(x)$, определенная в этой окрестности, что

$$f(x) = \alpha(x) g(x) \quad \text{и} \quad \alpha(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0.$$

Следующая теорема вытекает непосредственно из определения.

Теорема. *Если функция $g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то $f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Формулировка соответствующей теоремы для последовательностей остается в качестве упражнения.

Примеры. Запись $x_n = o(1)$ при $n \to \infty$, как следует непосредственно из определения в точности означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Аналогично, $f(x) = o(1)$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Определение. Последовательность (x_n) (соотв. функцию $f(x)$) называют *бесконечно малой при $n \to \infty$* (соотв. при $x \to x_0$), если $x_n = o(1)$ при $n \to \infty$ (соотв. $f(x) = o(1)$ при $x \to x_0$).

Если последовательность (y_n) есть бесконечно малая, то последовательность (x_n) называют *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с* (y_n), если $x_n = o(y_n)$.

Замечание. Отметим, что условия $x_n = o(y_n)$ при $n \to \infty$ недостаточно, чтобы говорить, что "x_n — бесконечно малая более высокого порядка чем y_n". Надо еще, чтобы $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Например, очевидно, что $n = o(n^2)$ при $n \to \infty$, но ни (n), ни (n^2) не являются бесконечно малыми.

Некоторые топологические понятия

Более подробно элементы топологии мы изучим в следующем семестре при изучении функций нескольких переменных, а здесь мы рассмотрим только несколько общих понятий, которые понадобятся нам в ближайшее время.

Определение. Точка x_0 называется *внутренней* для множества E, если она принадлежит E вместе с некоторой окрестностью:

$$x_0 \text{ — внутренняя для } E \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \delta > 0 \ U_\delta(x_0) \subset E. \qquad (*)$$

Точка x_0 не является внутренней для E, когда для нее выполняется отрицание условия $(*)$, то есть никакая окрестность $U_\delta(x_0)$ не содержится целиком в E. Очевидно, это равносильно тому, что любая окрестность $U_\delta(x_0)$ содержит точки, не принадлежащие E или $U_\delta(x_0) - E \neq \varnothing$:

$$\forall \delta > 0 \ U_\delta(x_0) - E \neq \varnothing.$$

Примеры 1. Пусть $E = [a; b]$. Если $x_0 \in (a; b)$ (т.е. выполняются строгие неравенства $a < x_0 < b$), то x_0 — внутренняя для $[a; b]$. В самом деле, обозначив через $\delta = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$, получим $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset [a; b]$ [1]

2. Точки a и b отрезка $[a; b]$ не являются внутренними для $[a; b]$ (что вполне согласуется с нашими бытовыми представлениями: точки a и b — лежат на краю отрезка, а не внутри). Докажем это, например, для a.

Для любого интервала $(a - \delta; a + \delta)$ имеем

$$(a - \delta; a + \delta) - [a; b] = (a - \delta; a) \neq \varnothing.$$

Что и требовалось доказать.

Следующее понятие одно из самых важных для топологии и математического анализа.

[1] Нарисуйте картинку.

Определение. Точка x_0 называется *предельной* для множества E, если любая *проколотая* окрестность точки x_0 имеет *непустое* пересечение с E:

$$x_0 \text{ — предельная для } E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\delta>0\ \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\cap E\neq\varnothing.$$

В соответствии с общим правилом построения отрицаний высказываний, точка x_0 не является предельной, когда

$$\exists\delta>0:\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)\cap E=\varnothing.$$

то есть точка x_0 должна иметь проколотую окрестность, непересекающуюся с E.

Примеры. 1. Всякая внутренняя точка для E, очевидно, является предельной. Обратное, в общем случае неверно. Более того, предельная точка не обязана принадлежать E. Например, пусть $E=(a;b)$. Точка $a\notin(a;b)$, но

$$\overset{\circ}{U}_\delta(a)\cap(a;b)=(a;a+\delta)\neq\varnothing.$$

Значит, a — предельная для $(a;b)$.

2. Пусть $E=\{1+\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$. Покажем, что 1 — предельная точка для E. Действительно, для произвольной проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\delta(1)$, согласно следствию из принципа Архимеда, найдется такое n_0, что $0<\frac{1}{n_0}<\delta$. Но тогда $1+\frac{1}{n_0}\in\overset{\circ}{U}_\delta(1)$, то есть пересечение непусто. Что и требовалось доказать.

Задачи. 1. Доказать, что у множества из предыдущего примера нет других предельных точек.

2. Найти все предельные точки множества $E=\{(-1)^n+\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$.

3*. Доказать, что для множества значений последовательности $(\{na\})_{n\in\mathbb{N}}$ дробных частей чисел na, где a — фиксированное иррациональное число (произвольное), предельными являются все точки отрезка $[0;1]$.

Определение. Множество $G\subset\mathbb{R}$ называется *открытым*, если состоит только из внутренних точек:

$$G \text{ — открыто } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x\ x\in G\Rightarrow\exists\delta>0\ U_\delta(x)\subset G.$$

Примеры 1. Интервал $(a;b)$ — открытое множество. Если $x\in(a;b)$, то выполняются строгие неравенства $a<x<b$), поэтому, обозначая $\delta=\min\{x-a,b-x\}$, получим[1] $U_\delta(x)=(x-\delta;x+\delta)\subset(a;b)$, то есть каждая точка x — внутренняя.

[1] Нарисуйте картинку

2^*. Доказать, что любое открытое множество в $\mathbb{R}$ является объединением некоторого количества (возможно бесконечного) попарно непересекающихся интервалов.

Обозначим через $\mathscr{T}$ класс[1] всех открытых множеств, содержащихся в $\mathbb{R}$. Таким образом, соотношение $G \in \mathscr{T}$ означает в точности то, что G — открытое множество в $\mathbb{R}$.

Теорема. *Объединение любого количества открытых множеств открыто*:

$$\forall (G_i)_{i\in I}\ \forall i\ G_i \in \mathscr{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \in \mathscr{T}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \bigcup\limits_{i\in I} G_i$. Тогда существует такое $i_0 \in I$, что $x \in G_{i_0}$. Так как по предположению G_{i_0} — открыто, имеется окрестность $U_\delta(x)$, содержащаяся в G_{i_0}. Но тогда она содержится и в объединении всех G_i. Значит, x — внутренняя точка для $\bigcup\limits_{i\in I} G_i$. Мы доказали это для произвольной точки из $G = \bigcup\limits_{i\in I} G_i$, значит, G — открыто.

Теорема. *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто*:

$$\forall (G_i)_{i\in J}\ J \text{ – конечное множество} \wedge \forall i\ G_i \in \mathscr{T} \Rightarrow \bigcap_{i\in J} G_i \in \mathscr{T}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap\limits_{i\in J} G_i$. Тогда для любого $i \in J$ имеем $x \in G_i$. Так как по предположению G_i — открыто, имеется окрестность $U_{\delta_i}(x)$, содержащаяся в G_i. Положим $\delta = \min\{\delta_i : i \in J\}$. Отметим, что δ строго больше нуля, так как является минимальным среди *конечного* числа $\delta_i > 0$. Очевидно, тогда $U_\delta(x)$ содержится в каждой из окрестностей $U_{\delta_i}(x) \subset G_i$, значит, и в пересечении всех G_i. Поэтому x — внутренняя точка для $\bigcap\limits_{i\in J} G_i$. Мы доказали это для произвольной точки из $G = \bigcap\limits_{i\in J} G_i$, значит, G открыто.

Отметим, что пересечение бесконечного числа открытых множеств *не обязано* быть открытым. Например, пусть $(a - \frac{1}{n}; b) = G_n$, тогда (доказать самостоятельно) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = [a; b)$. И множество $[a; b)$ не является открытым (точка a не является внутренней).

[1]Этот класс является множеством

Определение. Множество F называется *замкнутым*, если содержит все *свои* предельные точки:

$$F \text{ — замкнуто } \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)\ x \text{ — предельная для } F \Rightarrow x \in F$$

Примеры. 1. Отрезок $[a;b]$ — замкнутое множество. Действительно, если $x \notin [a;b]$, то или $x < a$, или $x > b$. Если $x < a$, то беря $\delta = a - x > 0$, видим, что $\overset{\circ}{U}_\delta(x) \cap [a;b] = \varnothing$, то есть x не является предельной точкой для $[a;b]$. Случай $b < x$ рассматривается аналогично. Таким образом, $[a;b]$ содержит все свои предельные точки, то есть замкнуто.

2. Любое множество F, состоящее из конечного числа точек, замкнуто. Доказать самостоятельно.

3. Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ одновременно открыто и замкнуто. По определению этим свойством еще обладает пустое множество $\varnothing$. А, например, промежуток $[a;b)$ не является ни открытым, ни замкнутым множеством.

Теорема. *Дополнение к замкнутому множеству является открытым множеством, а дополнение к открытому множеству замкнуто.*

$$F \text{ – замкнуто } \Rightarrow F^c \in \mathscr{T}, \qquad G \in \mathscr{T} \Rightarrow G^c \text{ – замкнуто.}$$

Доказательство. Пусть F — замкнуто. Соотношение $x \in F^c$ означает, что точка x не принадлежит замкнутому множеству F, поэтому не является для него предельной. Значит, имеется окрестность $U_\delta(x)$ непересекающаяся с F, а потому содержащаяся в F^c. То есть x принадлежит F^c вместе с окрестностью $U_\delta(x)$. Мы показали, что любая точка $x \in F^c$ — внутренняя, значит, F^c — открыто.

Пусть G — открыто и точка x — предельная для G^c. Тогда $x \notin G$, иначе она принадлежала бы G вместе с некоторой окрестностью и эта окрестность не пересекалась бы с G^c, что противоречит тому, что x предельная для G^c. Значит, $x \in G^c$ и G^c содержит все свои предельные точки.

Что и требовалось доказать.

Теорема. *Пересечение произвольного количества замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. Пусть F_i при $i \in I$ —замкнуты. Тогда для любого $i \in I$ множества F_i^c — открыты по предыдущей теореме, значит, $\bigcup\limits_{i\in I} F_i^c$ тоже открыто, но

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \Big(\bigcup_{i\in I} F_i^c\Big)^c$$

то есть является дополнением к открытому множеству, значит, замкнуто.

Что и требовалось доказать.

Теорема. *Объединение конечного количества замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство легко получается “переходом к дополнениям” аналогично предыдущей теореме и его рекомендуется провести самостоятельно.

Задача. Мы уже приводили пример, когда пересечение бесконечного числа открытых множеств не является открытым. Придумайте пример, когда объединение бесконечного числа замкнутых множеств не является замкнутым.

То, что мы проделали до сих пор — это определили (описали, построили), так называемую, *стандартную* топологию на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$. Как будет видно из следующего ниже определения, на $\mathbb{R}$ существуют и другие топологии (менее “хорошие”).

В общем случае топология определяется следующим образом (существуют и другие эквивалентные способы)

Определение. Множество T называется *топологическим пространством*, если в нем выделен класс подмножеств $\mathscr{T}$ со свойствами:

1. Объединение любого количества элементов из $\mathscr{T}$ принадлежит $\mathscr{T}$;
2. Пересечение конечного числа элементов из $\mathscr{T}$ принадлежит $\mathscr{T}$.

И в этом случае элементы из $\mathscr{T}$ называют *открытыми множествами*, а их дополнения — *замкнутыми множествами*. Само множество $\mathscr{T}$ называют *топологией* на множестве T.

Задача. Доказать, что на любом (непустом) множестве T будут топологиями:

1. $\mathscr{T}_0 = \{\varnothing, T\}$ (Эта топология называется тривиальной)
2. $\mathscr{T}_1 = \mathfrak{P}(T)$ (Эта топология называется дискретной)

Лекция 16.
Принцип компактности

Всюду в этом разделе мы называем покрытием множества A такой класс подмножеств $\mathfrak{X}$ из $\mathbb{R}$, что $\bigcup\limits_{X\in\mathfrak{X}} X \supset A$. (объединение всех подмножеств X из $\mathfrak{X}$ содержит множество A)

Определение. Покрытие $\mathfrak{G}$ множества A называется *открытым*, если все его элементы $G \in \mathfrak{G}$ — открытые множества.

Определение. Пусть $\mathfrak{G}$ — покрытие множества A. Если подмножество $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ осталось покрытием A, его называют *подпокрытием* покрытия $\mathfrak{G}$.

Пример Пусть $(a;b)$ интервал в множестве $\mathbb{R}$. Положим $\mathfrak{G} = \{U_\varepsilon(x) : x \in (a;b)\}$. Очевидно, $\mathfrak{G}$ — открытое покрытие $(a;b)$. Положим $N = \left[\frac{b-a}{\varepsilon}\right]$ ($[\cdot]$ — целая часть). Тогда[1] $\{U_\varepsilon(a+\varepsilon), U_\varepsilon(a+2\varepsilon), \dots, U_\varepsilon(a+N\varepsilon)\}$ — подпокрытие $\mathfrak{G}$.

Определение. Покрытие $\mathfrak{K}$ множества A называется *конечным*, если $\mathfrak{K}$ состоит из конечного числа элементов.

Определение. Множество K называется *компактным* (или, иначе, K — *компакт*), если в любом его *открытом* покрытии имеется *конечное* подпокрытие.

Более образно то же самое выражают словами: K — компактно, когда из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.

В случае, когда K компактное подмножество множества X, пишут $K \Subset X$.

Пример. Множество K, состоящее из конечного числа точек, компактно. Это вполне очевидно, но имеются и бесконечные компактные множества. Примеры таких множеств дает следующая теорема.

Теорема (Э. Борель) *Замкнутый интервал $[a;b]$ является компактным множеством*:

Доказательство. $\Cap$ Пусть $\{G : G \in \mathfrak{G}\}$ — открытое покрытие $[a;b]$, в котором нет конечного подпокрытия.

(Метод дихотомии) Разделим отрезок $[a;b]$ точкой $\frac{a+b}{2}$ пополам и обозначим через $[a_1;b_1]$ ту из половинок, которая не покрывается никаким конечным числом элементов $G \in \mathfrak{G}$. (Если таковы обе, то выбираем любую, например, левую. Если бы такой не было, то весь интервал покрывался бы конечным числом множеств G из $\mathfrak{G}$, что противоречит предположению).

Теперь, делим отрезок $[a_1;b_1]$ пополам и опять выбираем ту из половинок, которая не покрывается конечным числом элементов G из $\mathfrak{G}$. И так далее.

В результате получим последовательность вложенных отрезков $[a_n;b_n]$, у которых $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. По теореме Кантора все они имеют единственную общую точку, скажем, $x_0 \in [a;b]$:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n;b_n] = \{x_0\}.$$

Так как $\mathfrak{G}$ покрытие $[a;b]$, эта точка x_0 принадлежит какому-то множеству $G \in \mathfrak{G}$. А поскольку G — открыто, то существует окрестность $U_\varepsilon(x_0) \subset G$.

[1] Нарисуйте картинку

Выберем теперь n так, чтобы $b_n - a_n < \varepsilon$. Так как $x_0 \in [a_n; b_n]$, то $[a_n; b_n] \subset U_\varepsilon(x_0) \subset G$?! Мы ведь выбирали отрезок $[a_n; b_n]$ так, что он не покрывается никаким конечным числом элементов из $\mathfrak{G}$, а оказалось, что он покрывается одним множеством $G \in \mathfrak{G}$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема. *Если K — компактно, а F замкнуто и содержится в K, то F компактно*:

$$K \Subset \mathbb{R} \wedge F \subset K \wedge F - \text{замкнуто} \Rightarrow F \Subset \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольное открытое покрытие множества F. Добавим к нему открытое множество F^c (напомним, что дополнение к замкнутому множеству открыто). Полученное множество $\mathfrak{G} \cup \{F^c\}$, очевидно, является покрытием K (и даже всего $\mathbb{R}$). В силу компактности K в нем имеется конечное подпокрытие $\{G_1, \ldots, G_n\}$ множества K, а, значит, и $F \subset K$ тоже. Если в нем отсутствует множество F^c, то нужное конечное подпокрытие мы нашли. Если же среди $\{G_1, \ldots, G_n\}$ есть множество F^c, то все оставшиеся множества G_i перестав, вообще говоря, быть покрытием для K, останутся покрытием для F, так как F и F^c не имеют общих точек. И мы опять нашли нужное конечное подпокрытие в $\mathfrak{G}$.

Теорема доказана.

Теорема. *Множество $K \subset \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда K — замкнуто и ограничено*:

$$K \Subset \mathbb{R} \Leftrightarrow K - \text{замкнуто} \wedge K - \text{ограничено}.$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Докажем сначала замкнутость K.

$\Cap$ Пусть x_0 — предельная точка K и $x_0 \notin K$. Тогда множества $G_\delta = \{x : |x - x_0| > \delta\}$ образуют открытое покрытие K:

$$K \subset \bigcup_{\delta > 0} G_\delta.$$

В самом деле, если $x \in K$, то $x \neq x_0$, поэтому $|x - x_0| = \delta_1 > 0$. Но тогда $x \in G_{\delta_1/2}$, так как $|x - x_0| = \delta_1 > \delta_1/2$. Значит, x_0 принадлежит $\bigcup\limits_{\delta > 0} G_\delta$. (Легко видеть, что на самом деле $\bigcup\limits_{\delta > 0} G_\delta = \mathbb{R} - \{x_0\}$)

В силу компактности K из этого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие, скажем, G_{δ_1}, $G_{\delta_2}, \ldots$, G_{δ_n}. При $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ тогда $G_\delta \supset K$ и, значит, $U_\delta(x_0) \cap K = \varnothing$. Это противоречит тому, что x_0 — предельная точка K. И замкнутость K доказана.

Докажем ограниченность. Для этого из открытого покрытия $\{U_1(x) : x \in K\}$ выберем конечное подпокрытие, скажем, $\{U_1(x_1), \dots, U_1(x_n)\}$. Можно считать, что $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, тогда видим, что для всех $x \in K$ выполнены неравенства $x_1 - 1 < x < x_n + 1$.

($\Leftarrow$) Множество K ограничено, следовательно, содержится в промежутке $[m; M]$, где m — произвольная миноранта множества K, а M — мажоранта. По теореме Бореля $[m; M]$ — компакт. А так как $K \subset [m; M]$ замкнуто, оно также компактно.

Что и требовалось доказать.

Как применение принципа компактности приведем обобщение первой теоремы Вейерштрасса.

Теорема *Если функция f непрерывна на компакте K, то она ограничена на K.*

$$f \in C(K) \wedge K \Subset \mathbb{R} \Rightarrow f \in B(K).$$

Доказательство. По условию функция f непрерывна в каждой точке K, поэтому для любого $x \in K$ и $\varepsilon = 1$ найдется такое $\delta(x)$, что при всех $x' \in U_{\delta(x)}(x)$ будет выполняться неравенство $|f(x') - f(x)| < 1$. Множество окрестностей $\{U_{\delta(x)}(x) : x \in K\}$ является открытым покрытием K. В силу компактности K в нем имеется конечное подпокрытие, скажем, $\{U_{\delta(x_1)}(x_1), \dots, U_{\delta(x_n)}(x_n)\}$. Положим $m = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} f(x_k) - 1$, $M = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} f(x_k) + 1$ и покажем, что для любого $x \in K$ имеем $m < f(x) < M$.

В самом деле, поскольку $\{U_{\delta(x_1)}(x_1), \dots, U_{\delta(x_n)}(x_n)\}$ — покрытие, для любого x найдется такое x_k, что $x \in U_{\delta(x_k)}(x_k)$. Тогда

$$f(x) = \overbrace{f(x) - f(x_k)}^{\text{по модулю}<1} + f(x_k) > -1 + \min_{1 \leqslant k \leqslant n} f(x_k) = m.$$

Аналогично $f(x) < 1 + \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} f(x_k) = M$.

Что и требовалось доказать.

Отметим, что обобщение второй теоремы Вейерштрасса (на произвольные компакты K) тоже справедливо.

Равномерная непрерывность

Определение. Функция f называется *равномерно непрерывной* на множестве X, если удовлетворяет условию

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x', x'' \in X : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Говоря образно, это условие означает, что два значения функции можно сделать отличающимися произвольно мало, когда значения аргумента достаточно близки друг к другу независимо от их положения на X.

Выпишем полное определение простой непрерывности функции в каждой точке $x' \in X$, чтобы сравнить его с определением равномерной непрерывности[1]:

$$\forall x' \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x'' \in X : |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Формально мы переставили на первое место только один квантор! Но смысл от этого изменился сильно. В определении простой непрерывности в каждой точке выбор δ *зависит* от выбора точки x' (т.е. $\delta = \delta(x')$), а для равномерной непрерывности функции этот выбор надо уметь делать *независимо* от положения x', x'' на множестве X, лишь бы они были "достаточно близки друг к другу".

Отметим очевидные следствия определения равномерной непрерывности.

1. Если функция равномерно непрерывна на множестве X, то она останется равномерно непрерывной на всяком его подмножестве $X_1 \subset X$.

2. Всякая равномерно непрерывная на X функция является непрерывной в каждой точке множества X. Обратное утверждение в общем случае неверно. Существуют непрерывные функции не являющиеся равномерно непрерывными. Примеры мы приведем ниже, а сейчас отметим, что для доказательства неравномерной непрерывности (т.е. отсутствия равномерной непрерывности) надо доказывать, что не выполнено условие равномерной непрерывности, т.е. выполняется его отрицание:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x', x'' \in X : |x' - x''| < \delta \wedge |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon.$$

Пример 1. Рассмотрим функцию $\frac{1}{x}$ на $(0, 1)$. Очевидно, она непрерывна на этом интервале. Докажем, что она не является равномерно непрерывной: для $\varepsilon = 1$ и любого $\delta > 0$ выберем $x' = \frac{1}{n}$, $x'' = \frac{1}{2n}$, где n таково, что $\frac{1}{2n} < \delta$, тогда

$$|x' - x''| = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} < \delta \quad \text{и} \quad \left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = n \geqslant 1.$$

Что и требовалось доказать.

Чтобы быстро находить такие решения, надо хорошо представлять ситуацию. В рассмотренном примере при $x \to 0$ функция быстро возрастает, поэтому мы и выбрали точки x', x'' вблизи нуля.

[1] Для удобства сравнения мы пишем вместо x_0 и x соответственно x' и x''

2. $\sin\frac{1}{x}$ на $(0,1)$. Опять, легко видеть, что функция непрерывна на интервале $(0,1)$, но в самой точке 0 имеет разрыв (2-го рода). Представив себе поведение функции вблизи нуля, мы для $\varepsilon = 1$ и любого $\delta > 0$ выберем (близко к нулю!) $x' = \frac{1}{2\pi n}$, а $x'' = \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$, где n возьмем таким, чтобы

$$|x'-x''| = \frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi/2}{2\pi n(2\pi n+\frac{\pi}{2})} < \delta$$

(очевидно, это всегда можно сделать). Тогда,

$$|f(x')-f(x'')| = \left|\sin 2\pi n - \sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1$$

То есть выполнено отрицание условия равномерной непрерывности и $\sin\frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на $(0,1)$.

Пока мы привели примеры только неравномерно непрерывных функций. Следующая теорема дает много примеров равномерно непрерывных функций.

Теорема (Г. Кантор) *Если функция непрерывна на* **компакте** K*, то она равномерно непрерывна на* K.

$$f \in C(K) \wedge K \Subset \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ — равномерно непрерывна на } K.$$

Доказательство. В силу непрерывности f в каждой точке, для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x' \in K$ выберем $\delta(x')$ так, чтобы при $x'' \in U_{\delta(x')}(x')$ выполнялось неравенство $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon/2$. Класс множеств $\{U_{\frac{\delta(x')}{2}}(x') : x' \in K\}$ является открытым покрытием K, поэтому в нем имеется конечное подпокрытие, скажем, $\{U_{\frac{\delta(x_1)}{2}}(x_1), \dots, U_{\frac{\delta(x_n)}{2}}(x_n)\}$. Положим $\delta = \min\{\frac{\delta(x_1)}{2}, \dots, \frac{\delta(x_n)}{2}\}$.

Если $|x'-x''| < \delta$ найдем сначала такое x_k, что $x' \in U_{\frac{\delta(x_k)}{2}}(x_k)$ (это можно сделать, так как все $U_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ покрывают K). Тогда

$$|x''-x_k| \leqslant |x''-x'| + |x'-x_k| < \delta + \frac{\delta(x_k)}{2} < \delta(x_k)$$

то есть $x', x'' \in U_{\delta(x_k)}(x_k)$. Поэтому

$$|f(x')-f(x'')| < |f(x')-f(x_k)| + |f(x_k)-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

Эта теорема может гарантировать равномерную непрерывность только на ограниченных множествах. Но функция может быть равномерно непрерывной и на неограниченном множестве, например, $f(x) = \sin x$ равномерно непрерывна на всем множестве действительных чисел $\mathbb{R}$.

Имеются большие классы функций, состоящие только из равномерно непрерывных функций:

Определение. Говорят, что функция f удовлетворяет условию Липшица на множестве E (и пишут $f \in \mathrm{Lip}(E)$), когда

$$\exists C\ \forall x', x'' \in E \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant C|x' - x''|.$$

Очевидно, функции $f \in \mathrm{Lip}(E)$ равномерно непрерывны на E. В качестве примера функции, удовлетворяющей условию Липшица (на $\mathbb{R}$) можно привести $f(x) = \sin x$:

$$|\sin x' - \sin x''| = \left|2 \sin \frac{x' - x''}{2} \cos \frac{x' + x''}{2}\right| \leqslant \left|2 \sin \frac{x' - x''}{2}\right| \leqslant |x' - x''|$$

(отсюда, в частности, следует ее равномерная непрерывность на $\mathbb{R}$)

Отметим, что равномерно непрерывная функция не обязана удовлетворять условию Липшица.

Следующее условие является обобщением условия Липшица.

Определение. Говорят, что функция f *удовлетворяет на E условию Гёльдера с показателем* α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ и пишут $f \in H^{(\alpha)}(E)$, когда

$$\exists C\ \forall x', x'' \in E \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leqslant C|x' - x''|^{\alpha}.$$

Задача. Доказать, что условию Гёльдера с показателем $\alpha > 1$ удовлетворяют только функции тождественно равные константе.

Лекция 17. Общее понятие предела

Содержание этой лекции пока не входит в обязательную программу для математиков-прикладников и я привожу его только для того, чтобы *не скрывать* от желающих общую концепцию предела, так как овладение ею позволяет гораздо глубже понимать ситуации, в которых речь идет о топологии и предельных переходах. Многие вещи, доказываемые в классическом анализе, становятся тривиальными, если посмотреть на них с более общей точки зрения — теории фильтров, на которой основано общее понятие предела.

До сих пор мы встретились с несколькими определениями пределов:

1) Предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

2) Предел функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) Предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$;

4) Односторонние пределы функции $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)$.

5) В следующем семестре мы встретимся еще с пределами "интегральных сумм при мелкости разбиения стремящейся к нулю".

Все они имеют нечто общее и притом больше, чем значок lim в обозначениях. Как выявили исследования 1920-1950 годов это общее собрано в (не очень простом) понятии фильтра. [1]

Определение. Пусть X произвольное непустое множество. Класс $\mathfrak{F}$ подмножеств множества X называют фильтром, если он обладает свойствами:

а) $\varnothing \notin \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \neq \varnothing$;

б) $\forall A, B \quad A \supset B$ и $B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \in \mathfrak{F}$;

в) $\forall A, B \in \mathfrak{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Примеры. 1. Для произвольного непустого множества X положим $\mathfrak{F} = \{X\}$, т.е. $\mathfrak{F}$ состоит из одного элемента — всего множества X. Очевидно, все три свойства определения для него выполняются. Этот фильтр называется *тривиальным*.

2. Определим класс подмножеств $\mathfrak{U}(x_0)$ в X, считая подмножество $A \subset X$ принадлежащим $\mathfrak{U}(x_0)$ тогда и только тогда, когда A содержит точку x_0:

$$A \in \mathfrak{U}(x_0) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \ni x_0.$$

Проверим, что выполнены все три условия определения фильтра.

а) Любое подмножество A из $\mathfrak{U}(x_0)$ обязано содержать точку x_0, значит, непусто, поэтому пустое множество не принадлежит $\mathfrak{U}(x_0)$, так как оно не содержит точки x_0. Само множество $\mathfrak{U}(x_0)$ не пусто, так как содержит по крайней мере один элемент $\{x_0\}$ — подмножество, состоящее из одной точки x_0.

б) Если $B \in \mathfrak{U}(x_0)$, то множество B содержит точку x_0, но тогда эту точку содержит и любое множество $A \supset B$, значит, принадлежит $\mathfrak{U}(x_0)$ по определению.

[1] Как утверждается в учебнике [4], первым, кто ввел и изучил подобное понятие, был одесский математик Д.А. Крыжановский в 1924 году, но в общую математическую практику понятие фильтра вошло благодаря трудам коллектива французских математиков под общим псевдонимом Н. Бурбаки и особенно одного из его членов — А. Картана.

в) Если два множества A и B принадлежат $\mathfrak{U}(x_0)$, то они содержат точку x_0, поэтому эта точка принадлежит их пересечению $A \cap B$, значит $A \cap B \in \mathfrak{U}(x_0)$.

Что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали, что $\mathfrak{U}(x_0)$ — фильтр. Он называется *тривиальным ультрафильтром в точке* x_0.

3. Пусть X произвольное бесконечное множество (например, $X = \mathbb{N}$) Обозначим через $\mathfrak{F}$ класс таких подмножеств из X, дополнения к которым являются конечными множествами. Покажем, что это фильтр (он называется фильтром Фреше́).

а) Дополнением к пустому множеству $\varnothing$ является всё множество X, а оно по предположению бесконечно, поэтому $\varnothing$ не принадлежит $\mathfrak{F}$ и сам класс $\mathfrak{F}$ непуст, так как содержит множество X, дополнение к которому не содержит элементов вовсе.

б) Если дополнение к множеству B содержит конечное число элементов, то в силу того, что $A \supset B \Leftrightarrow A^c \subset B^c$ дополнение к множеству A, содержащему B, содержит еще меньше элементов, значит, принадлежит $\mathfrak{F}$.

в) Последнее свойство выполнено в силу равенства $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. (Множества A^c и B^c конечны, значит, конечно и их объединение).

В случае, когда $X = \mathbb{N}$, фильтр Фреше **обозначают символом** $n \to \infty$.

4. Пусть $X = \mathbb{R}$. Определим класс $\mathfrak{F}(x_0)$, полагая множество A принадлежащим $\mathfrak{F}(x_0)$, тогда и только тогда, когда существует такое $\delta > 0$, что A содержит δ-окрестность точки x_0:

$$A \in \mathfrak{F}(x_0) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset A$$

Проверка того, что $\mathfrak{F}(x_0)$ — фильтр, остается для самостоятельной работы. Этот фильтр называется *фильтром окрестностей точки* x_0.

5. Пусть $X = \mathbb{R}$. Определим класс $\mathfrak{F}$, полагая множество A принадлежащим $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\delta > 0$, что A содержит проколотую δ-окрестность точки x_0:

$$A \in \mathfrak{F} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \delta > 0 : \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \subset A$$

Этот фильтр называется *фильтром проколотых окрестностей точки* x_0 и **обозначается символом** $x \to x_0$. (Доказательства проделать самостоятельно.)

Следующее понятие важно тем, что позволяет легче описывать (а, значит, и употреблять) различные фильтры.

Определение. Подмножество $\mathfrak{B}$ фильтра $\mathfrak{F}$ называется *базисом* фильтра $\mathfrak{F}$ (или, в другой терминологии, *базой*), если оно обладает свойствами:

а) $\mathfrak{B} \neq \varnothing$, $\varnothing \notin \mathfrak{B}$;

б) $\forall A \in \mathfrak{F}\ \exists B \in \mathfrak{B}$: $B \subset A$.

Как мы увидим, знание только базиса фильтра позволяет легко восстановить сам фильтр.

Примеры. 1. Всякий фильтр является базисом для самого себя.

2. Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр Фреше в множестве $\mathbb{N}$. Обозначим через $\mathbf{n} = [n, \infty) = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ — отрезок множества натуральных чисел. Положим $\mathfrak{B} = \{\mathbf{n} : n \in \mathbb{N}\}$, то есть $\mathfrak{B}$ — это множество всевозможных отрезков натуральных чисел. Покажем, что $\mathfrak{B}$ — базис фильтра Фреше.

Если $A \in \mathfrak{F}$, то обозначим через n максимальный элемент его дополнения. Он существует, так как это дополнение состоит из конечного числа натуральных чисел. Очевидно, тогда множество $[n+1, \infty)$ содержится в A.

Остальные свойства очевидны.

3. Пусть $\mathfrak{F}(x_0)$ фильтр окрестностей точки x_0. Положим $\mathfrak{B}_1 = \{U_\delta(x_0) : \delta > 0\}$. Очевидно, $\mathfrak{B}_1$ базис фильтра окрестностей точки x_0. Более того, если обозначить через $\mathfrak{B}_2$ множество только тех δ-окрестностей, у которых $\delta = \frac{1}{n}$, то есть

$$\mathfrak{B}_2 = \{U_{\frac{1}{n}}(x_0) : n \in \mathbb{N}\},$$

то $\mathfrak{B}_2$ тоже будет базисом фильтра окрестностей точки x_0. Выполнение свойства а) определения базиса очевидно, а свойство б) следует из того, что если $A \in \mathfrak{F}(x_0)$, то найдется такое $\delta > 0$, что $U_\delta(x_0) \subset A$, а для этого δ найдется такое n, что $\frac{1}{n} < \delta$, значит, $U_{\frac{1}{n}}(x_0) \subset A$. Что и требовалось доказать.

Мы видим, что у произвольного фильтра имеется, вообще говоря, много различных базисов (иначе то же самое можно сказать так: выбор базиса у фильтра неоднозначен).

4. У фильтра $(x \to x_0)$ проколотых окрестностей точки x_0 тоже есть очевидный базис — множество $\{\overset{\circ}{U}_\delta(x_0) : \delta > 0\}$ всех проколотых δ-окрестностей.

Следующая теорема дает способ восстановления фильтра по его базису.

Теорема. *Пусть X — непустое множество и $\mathfrak{B}$ некоторый класс его подмножеств. Тогда $\mathfrak{B}$ является базисом некоторого фильтра в X тогда и только тогда, когда*

а) $\mathfrak{B} \neq \varnothing$ и $\varnothing \notin \mathfrak{B}$;

б) $\forall A, B \in \mathfrak{B}\ \exists C \in \mathfrak{B} \quad C \subset A \cap B$.

Доказательство. В доказательстве нуждается только достаточность. Пусть $\mathfrak{B}$ — класс подмножеств из X, обладающий свойствами а), б). По определению положим[1]

$$\mathfrak{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \big| \exists B \in \mathfrak{B} : A \supset B\}$$

Покажем, что $\mathfrak{F}$ — фильтр, базисом которого является $\mathfrak{B}$. Выполнение свойств а), б) фильтра очевидно. Проверим с). Пусть A и B — произвольные элементы из $\mathfrak{F}$. Тогда найдутся A_1 и B_1 из $\mathfrak{B}$ такие, что $A_1 \subset A$ и $B_1 \subset B$. Их пересечение $A_1 \cap B_1$ содержит множество $C \in \mathfrak{B}$, которое, очевидно, содержится и в $A \cap B$, значит, принадлежит $\mathfrak{F}$. Что и требовалось доказать.

Замечания. 1. Фильтр восстанавливается по базису однозначно. Более точно это можно сформулировать в виде следующего предложения (доказать самостоятельно):

если фильтры $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ имеют один и тот же базис $\mathfrak{B}$, то они совпадают, т.е. $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$.

2. В Московском университете большинство лекторов в качестве основного понятия обычно берут понятие “базы” (т.е. базиса фильтра), а не “фильтра”, по-видимому, считая, что оно более доступно интуиции. Может быть это так и есть, но на самом деле, как мы увидим, все зависит не от базиса, а от фильтра. Например, во вводимом ниже понятии предела и других.

Теорема. *Пусть $f : X \to Y$ — функция и $\mathfrak{B}$ — базис фильтра в множестве X. Обозначим через $f(\mathfrak{B})$ класс подмножеств из Y, состоящий из образов элементов A из $\mathfrak{B}$:*

$$f(\mathfrak{B}) = \{f(A) : A \in \mathfrak{B}\}.$$

Тогда $f(\mathfrak{B})$ — базис фильтра в Y. Он называется образом при отображении f базиса фильтра $\mathfrak{B}$.

Доказательство. Свойство а) из предыдущей теоремы, очевидно, выполнено для $f(\mathfrak{B})$.

Пусть $f(A) \in f(\mathfrak{B})$ и $f(B) \in f(\mathfrak{B})$. Тогда $f(A) \cap f(B) \supset f(A \cap B) \in f(\mathfrak{B})$.

Что и требовалось доказать.

Замечание. Если $\mathfrak{F}$ — фильтр, то его образ $f(\mathfrak{F})$, вообще говоря, не обязан быть фильтром, но по предыдущей теореме будет базисом некоторого фильтра. Этот фильтр называется образом фильтра $\mathfrak{F}$ и обозначается тоже $f(\mathfrak{F})$, что не совсем корректно, но как правило, не приводит к недоразумениям.

[1] Это множество называется *надклассом* класса $\mathfrak{B}$ — это все подмножества, содержащие какой-нибудь элемент $\mathfrak{B}$

Определение. Говорят, что базис фильтра $\mathfrak{B}_1$ *мажорирует* базис фильтра $\mathfrak{B}_2$ и пишут $\mathfrak{B}_1 \succcurlyeq \mathfrak{B}_2$, когда для любого множества $A \in \mathfrak{B}_2$ существует такое $B \in \mathfrak{B}_1$, что $B \subset A$.

Задача. Доказать, что если $\mathfrak{B}_1$ — базис фильтра $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — базис фильтра $\mathfrak{F}_2$, то $\mathfrak{B}_1 \succcurlyeq \mathfrak{B}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$.

Определение. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ функция и $\mathfrak{B}$ — базис фильтра $\mathfrak{F}$ в X. Говорят, что число A есть предел функции f по фильтру $\mathfrak{F}$ (или по базису фильтра $\mathfrak{B}$) и пишут

$$\lim_{\mathfrak{F},x} f(x) = A, \qquad \text{или} \quad \lim_{\mathfrak{B},x} f(x) = A$$

когда образ $f(\mathfrak{B})$ базиса фильтра $\mathfrak{B}$ при отображении f мажорирует фильтр окрестностей точки $A \in \mathbb{R}$.

Пример. **Предел последовательности.** Если $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность, то по определению $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, когда образ при отображении x (базиса) фильтра Фреше мажорирует фильтр окрестностей точки a.

Разберемся в том, что это означает. Как мы видели, базисом фильтра Фреше ($n \to \infty$) в множестве $\mathbb{N}$ является совокупность всех отрезков $[N, \infty)$. Образом при x каждого такого отрезка является множество $\{x_N, x_{N+1}, \ldots\}$. Поэтому образ этого базиса фильтра Фреше будет мажорировать базис $\{U_\varepsilon(a) : \varepsilon > 0\}$ фильтра окрестностей точки a тогда и только тогда (по определению), когда для любой окрестности $U_\varepsilon(a)$ существует отрезок $[N, \infty)$, образ которого $\{x_N, x_{N+1}, \ldots\}$ содержится в $U_\varepsilon(a)$. Очевидно, то же самое можно более подробно выразить так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \Rightarrow x_n \in U_\varepsilon(a).$$

Что в точности совпадает с обычным определением предела.

Предел функции. Пусть $f : (a; b) \to \mathbb{R}$ — функция, $x_0 \in (a; b)$. Напомним, что $x \to x_0$ — это фильтр проколотых окрестностей точки x_0. Поэтому по определению $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда образ при f (базиса) фильтра проколотых окрестностей мажорирует (базис) фильтра окрестностей точки A. Если разобраться подробно, то это в точности совпадает со стандартным определением предела функции по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x : x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Список литературы

[1] Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988

[2] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ, Т. 1. М.: Наука, 1979

[3] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, Т. 1 М.: Наука, 1980

[4] Архипов Г.И. Садовничий В.А. Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2000.

[5] Никольский С.М. Курс математического анализа, Т. 1. М.: Наука, 1990

[6] Зорич В.А. Математический анализ, Т. 1. М.: Наука, 1981

[7] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, Т. 1, М.: Наука. 1984

[8] Смирнов В.И. Курс высшей математики, Т. 1. М.: Наука, 1974

[9] Грауэрт Г., Либ И., Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Мир, 1971

[10] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. 1 М.: Наука, 1970

[11] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990

[12] Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. М.: Высшая школа, 1983

[13] Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач и упражнений по математическому анализу (предел, непрерывность, дифференцируемость) М.: Наука, 1984