И. Л. Тимофеева

Математическая логика

КУРС ЛЕКЦИЙ

2-е издание, переработанное

*Допущено Учебно-методическим объединением
по специальностям педагогического образования
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 032100 — математика*

Мир и Образование

Книжный Дом
«Университет»

Москва
2007

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.12я73
Т41

Научный редактор:
Матросов В. Л. — акад. РАО, член-корр. РАН,
докт. физ.-мат. наук, проф.

Рецензенты:
Гладкий А. В. — докт. физ.-мат. наук, проф.;
Кабаков Ф. А. — канд. физ.-мат. наук, доц.;
Плиско В. Е. — канд. физ.-мат. наук, доц.

Тимофеева И. Л.
Т41 Математическая логика. Курс лекций: Учеб. пособие для студентов вузов / И. Л. Тимофеева. — 2-е изд., перераб. — М.: КДУ, 2007. — 304 с.
ISBN 978-5-98227-307-9

Пособие написано в соответствии с действующей программой по математической логике для педагогических вузов. Рассмотрены следующие темы: язык логики высказываний, исчисления высказываний, язык логики предикатов, исчисления предикатов, теории первого порядка. Центральное место занимает изложение основ теории доказательств. Отдельный раздел посвящен проблемам оснований математики.

Курс лекций предназначен для студентов математических факультетов педвузов, изучающих математическую логику, а также для преподавателей, читающих лекционный курс и ведущих практические занятия по математической логике.

УДК 510.6(075.8)
ББК 22.12я73

ISBN 978-5-98227-307-9

Оглавление

Предисловие

Математическая логика более 30 лет входит в число основных курсов математических факультетов отечественных педвузов. На математическом факультете МПГУ этот курс читается почти 50 лет. К настоящему времени он стал неотъемлемой частью подготовки будущих учителей математики.

Нехватка разных учебных пособий по математической логике для педвузов, соответствующих современной программе этого курса, создает определенные трудности студентам при овладении учебным материалом, а преподавателям – при чтении лекций и проведении практических занятий по этому предмету.

В данном пособии изложены теоретические основы математической логики в соответствии с примерной программой этой дисциплины, утвержденной Министерством образования и науки РФ (2004 г.). При его написании использованы материалы лекций и практических занятий по математической логике, проводимых автором на математическом факультете МПГУ в течение двадцати лет.

Пособие содержит шесть глав: язык логики высказываний, исчисления высказываний, язык логики предикатов, исчисления предикатов, теории первого порядка и проблемы оснований математики. Шестая глава пособия, посвященная проблемам оснований математики, играет особую в методологическом отношении роль.

Основы теории доказательств занимают центральное место в курсе математической логики. Поэтому значительное внимание уделяется логическим системам (исчислениям), средствами которых осуществляется математическое уточнение понятия доказательства. В соответствии с этим темы, посвященные логическим исчислениям, представлены в пособии более подробно, чем другие темы. Во второй главе наряду с классическим исчислением высказываний рассматривается интуиционистское исчисление.

Особенностью данного пособия является то, что в разделах, посвященных логическим исчислениям, за основу взяты *системы естественного* (*натурального*) *вывода.* Остановимся более подробно на соображениях, определивших выбор в пользу систем естественного вывода при изложении теории доказательств.

Математическое *уточнение понятия доказательства* в математике является первоочередной задачей теории доказательств, представляющей собой основной раздел математической логики. В математической логике разработано *два основных типа* математического уточнения понятия доказательства в математике. Уточнения первого типа связаны с именем Д. Гильберта и представляют собой *линейные выводы* в логических аксиоматических системах — системах гильбертовского типа. Именно на базе таких систем традиционно излагается теория доказательств. Уточнения второго типа принадлежат Г. Генцену и представляют собой *выводы в виде дерева* в системах естественного вывода.

Изложение основ теории доказательств на базе естественного вывода имеет ряд дидактических *преимуществ* по сравнению с традиционным его изложением на базе логических исчислений гильбертовского типа:

— *естественность и адекватность той модели* реальных математических доказательств, которую представляют собой деревья естественного вывода;

— широкие *эвристические возможности*, которыми обладают правила вывода, постулируемые в системах естественного вывода;

— *наглядность* отражения логической структуры вывода в виде дерева;

— *простота* построения деревьев естественного вывода, возможность построения простых деревьев вывода даже в тех случаях, когда построение линейного вывода в гильбертовских системах практически неосуществимо в рамках учебного процесса.

Принципиально важным для студентов педвузов — будущих учителей математики — является изучение наиболее адекватной, наглядной и простой математической модели реальных математических доказательств. Такие модели предоставляют генценовские системы естественного вывода.

Естественный вывод явно недооценен в преподавании математической логики. И это особенно досадно, когда речь идет о преподавании ее будущим учителям математики. Желание исправить ситуацию и привело к написанию этого пособия.

Это пособие предоставляет преподавателю (особенно начинающему), читающему курс математической логики, возможность выбора, какой тип формализации брать за основу построения курса.

Пособие может быть использовано также, когда изложение основ теории доказательств строится традиционным образом на базе гильбертовских исчислений. Эти системы рассмотрены в § 2.13 и 4.6. Главы, посвященные языкам логики высказываний и логики предикатов, можно использовать при любом подходе к изложению основ теории доказательств.

В 2002 г. было издано пособие автора «Математическая логика в вопросах и задачах» (М., МПГУ, 2002), содержащее большой набор задач для практических занятий по математической логике. Использование этого сборника задач в сочетании с данным пособием будет способствовать более эффективному усвоению студентами курса математической логики.

* * *

Хочу выразить благодарность всем, кто оказал помощь в подготовке этого пособия к изданию. Самую глубокую благодарность выражаю моему учителю Феликсу Александровичу Кабакову, общение с которым на протяжении многих лет совместной работы на кафедре математического анализа МПГУ оказало огромное влияние на стиль изложения и содержание некоторых разделов этого пособия. Искренне благодарю Г. Н. Борисову, А. Ю. Вейц, Е. В. Лукьянову, И. Е. Сергееву, С. В. Хохлова за большую помощь в работе над рукописью пособия.

Автор

Введение

При изучении нового курса прежде всего возникают вопросы: *что* предстоит изучить в этом курсе, *как* и *зачем* это нужно изучать?

Сначала выясним, ***что*** изучает математическая логика. Предмет изучения математической логики весьма необычен – это математические рассуждения, доказательства и теории.

Здесь важно отметить, что математика – наука *дедуктивная* (от лат. *deductio* – «выведение»). Это означает, что основным методом обоснования знаний в математике является выведение одних утверждений из других. Причем это выведение происходит по четким правилам, обеспечивающим достоверность выводов при условии, что исходные утверждения были достоверными. Это отличает математику от других наук, в которых широко используются индуктивные рассуждения и такие методы, как эксперимент, наблюдение и т.п.

Справедливыми в математике признают только те утверждения, которые обоснованы с помощью дедуктивных рассуждений. Все интуитивно полученные в процессе математического творчества результаты, сформулированные в виде утверждений, затем обязательно обосновывают с помощью дедуктивных рассуждений. Именно *дедуктивные рассуждения* и будут предметом нашего изучения.

Дедуктивные рассуждения в математике выстраивают в доказательства в рамках соответствующих математических теорий. Таким образом, именно математические доказательства и математические теории являются предметом изучения математической логики, точнее, ее основного раздела – *теории доказательств.*

Второй естественно возникающий вопрос: ***как***, каким образом осуществляется изучение математических рассуждений? Поскольку математическая логика – это область математики, то она пользуется математическими средствами и методами.

Итак, кратко можно сказать, что *математическая логика изучает математические рассуждения, пользуясь математическими методами.*

Основным методом математической логики является *метод формализации*, имеющий решающее значение в развитии математической логики. Сущность этого метода заключается в следующем.

Все математические предложения записывают на специальном (формальном) логическом языке в виде формул. С помощью этого же языка точно выражают используемые в математических рассуждениях логические правила. В результате всякое математическое доказательство в неформальной аксиоматической теории превращается в упорядоченную систему формул, построенную по четко описанным правилам, — *формальный вывод* в формальной теории, становясь при этом точно описанным математическим объектом.

Прежде чем перейти к следующему вопросу, несколько слов об истории возникновения математической логики.

Создателем *формальной логики* был древнегреческий мыслитель Аристотель (384—322 до н. э.). Его учение неизменно лежало в основе изучения логики более двух тысячелетий. Новым этапом ее развития стало использование символического языка для записи предложений (XIX в., Джордж Буль). Однако *математическая логика* как наука возникла только в XX веке. Огромную роль в ее становлении и развитии сыграл крупнейший немецкий математик Давид Гильберт (1862—1943), использовавший *метод формализации* для изучения математических теорий с целью доказательства их непротиворечивости.

Наконец, возникает еще один вопрос: ***зачем*** нужно изучать математические рассуждения? Действительно, математика многие века достаточно успешно развивалась без их специального изучения, без математической логики. Чем это было вызвано? Возникновению математической логики способствовали следующие обстоятельства. В конце XIX века Георг Кантор (1845—1918) создал теорию множеств. Эта теория была принята математиками как универсальный фундамент всей математической науки и явилась важнейшим инструментом ее дальнейшего развития (прежде всего, развития математического анализа). Однако в начале XX века математика была потрясена открытием противоречий в канторовой теории множеств, так называемых *парадоксов*. Открытие парадоксов ознаменовало начало кризиса в основаниях математики на рубеже XIX—XX веков. Подробно на этом мы остановимся в гл. 6 «Проблемы оснований математики».

С открытием парадоксов появилась необходимость уточнения и специального изучения логических средств, используемых в математических доказательствах, что привело к возникновению математической логики и способствовало ее дальнейшему развитию.

Математическая логика продолжает развиваться и в настоящее время. Результаты современных исследований в некоторых областях математической логики находят все большее применение в кибернетике и информатике (или, как сейчас принято говорить, в *computer science*).

Основы математической логики необходимо изучать в той или иной степени каждому, кто занимается математикой. Особенно важную роль изучение математической логики играет в профессиональной подготовке будущих учителей математики. Ведь учитель математики должен уметь объяснить своему ученику, почему то или иное умозаключение является неправильным и в чем заключается ошибка. Именно учитель математики обучает школьников доказательствам, а значит, он должен понимать, в чем заключается сущность математических доказательств, как они устроены. Кроме того, изучение математической логики дисциплинирует ум. Вспоминая известное изречение М. В. Ломоносова о математике, можно сказать, что математическая логика более чем какая-либо другая математическая наука «ум в порядок приводит».

Некоторые частоиспользуемыеобозначения

Для выявления логической структуры предложений в большинстве случаев формулировки определений и теорем сопровождаются их символической записью. С этой целью в пособии использованы следующие обозначения:

$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$	– символическая запись предложения «Если $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}$» («Из $\mathcal{A}$ следует $\mathcal{B}$»), где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – обозначения некоторых предложений естественного языка;
$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$	– символическая запись предложения «$\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$»;
$\leftrightharpoons$	– символ, используемый для введения обозначений (то, что стоит слева от знака $\leftrightharpoons$, служит обозначением того, что стоит справа от этого знака);
$\xleftrightarrow{def}$	– знак, используемый для символической записи определений;
$(x)\ \mathcal{P}(x)$	– символическая запись предложения «Для любого x имеет место $\mathcal{P}(x)$», где x пробегает некоторое множество известных объектов (чисел, формул, множеств формул и т. п.);
$(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x)$	– символическая запись предложения «Существует x, для которого выполняется $\mathcal{P}(x)$».

Кроме того, используются следующие обозначения:

|	– вертикальной чертой слева от текста отмечены основные определения;
!	– особо важные определения и теоремы;
➤➤	– «Обратите внимание!»;
❐	– доказательство закончено;
❍	– окончание примера или замечания;
★ ☆	– звездочками отмечен дополнительный материал, который можно пропустить при первом прочтении.

1

Глава

ЯЗЫК ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1.1. Высказывания и операции над ними

Алгебра высказываний – раздел математической логики, в котором изучаются операции над высказываниями.

Под ***высказыванием*** будем понимать повествовательное предложение, которое однозначно характеризуется как истинное или ложное. Таким образом, каждое высказывание имеет только одно из двух значений – *истина* или *ложь*. Для их обозначения будем использовать буквы «И», «Л» соответственно, а сами значения называть ***истинностными значениями***.

Рассмотрим следующие предложения:

1) все студенты математических факультетов педвузов должны изучать математическую логику;

2) $7 \times 7 = 47$;

3) $7 \times 7 = ?$ (Чему равно 7×7?);

4) $7 \times x = 21$.

Первое из предложений является истинным высказыванием, поскольку математическая логика входит в учебные планы математических факультетов педвузов. Второе предложение является ложным высказыванием. Третье предложение является вопросительным и поэтому не является высказыванием. Наконец, четвертое предложение содержит переменную, и про него нет смысла говорить, что оно истинно или ложно. Поэтому оно также не является высказыванием.

Произвольные высказывания будем обозначать буквами $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и т. д.

Из одних высказываний с помощью *логических операций* можно образовывать другие, более сложные высказывания, истинностные значения которых полностью определяются значениями исходных высказываний.

Введем основные логические операции над высказываниями.

Конъюнкцией[1] высказываний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называют высказывание «$\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$». Его считают истинным тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Дизъюнкцией[2] высказываний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называют высказывание «$\mathcal{A}$ *или* $\mathcal{B}$». Его считают истинным тогда и только тогда, когда истинно по крайней мере одно из высказываний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Отметим, что союз *или* в дизъюнкции высказываний носит не взаимоисключающий характер.

Импликацией[3] высказываний $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называют высказывание «*Если* $\mathcal{A}$, *то* $\mathcal{B}$». Его считают ложным тогда и только тогда, когда высказывание $\mathcal{A}$ истинно, а высказывание $\mathcal{B}$ ложно. При этом высказывание $\mathcal{A}$ называют *посылкой*, а $\mathcal{B}$ — *заключением.*

Обозначают импликацию «Если $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}$» так: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Отрицанием высказывания $\mathcal{A}$ называют высказывание «*Неверно, что* $\mathcal{A}$ (*не* $\mathcal{A}$)». Это высказывание считают истинным тогда и только тогда, когда высказывание $\mathcal{A}$ ложно[4].

Зависимость истинностного значения конъюнкции, дизъюнкции и импликации высказываний от истинностных значений их членов отражена в трех первых таблицах. Четвертая таблица соответствует отрицанию. Эти четыре таблицы называют *истинностными таблицами* для рассматриваемых операций.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

$\mathcal{A}$	не $\mathcal{A}$
И	Л
Л	И

---

[1] От лат. *conjunctio* — «соединение, союз, связь».

[2] От лат. *disjunctio* — «разъединение, разобщение».

[3] От лат. *implico* — «тесно связывать».

[4] Часто для обозначения операций над высказываниями используют символы &, $\vee$, $\supset$, $\neg$. Но мы этого не делаем, поскольку будем использовать эти символы в качестве букв алфавита ЯЛВ (см. § 1.2). Отметим, что символ & возник в результате стилизации написания лат. союза *et* (и).

В этих таблицах буквы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ можно рассматривать как переменные по двухэлементному множеству {И, Л}. Тогда и сами таблицы можно рассматривать как задание некоторых функций. Первые три таблицы задают двуместные функции следующего типа: $\{И, Л\}^2 \to \{И, Л\}$. Четвертая таблица задает одноместную функцию типа $\{И, Л\} \to \{И, Л\}$. Эти функции являются операциями на множестве {И, Л} и относятся к так называемым *истинностным функциям*, о которых пойдет речь в § 1.3.

Примеры.

1. «2 – простое число, и 2 – четное число» – истинное высказывание, как конъюнкция двух истинных высказываний.

2. «2 – простое число, или 2 – четное число» – истинное высказывание, как дизъюнкция двух истинных высказываний.

3. «2 меньше 3, или 2 равно 3» – истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным первым членом.

4. «2 меньше 2, или 2 равно 2» – истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным вторым членом.

5. «Если 2 – простое число, то 2 – четное число» – истинное высказывание, как импликация, посылка и заключение которой – истинные высказывания.

6. «Неверно, что 2 – простое число» – ложное высказывание, как отрицание истинного высказывания. ❍

Обычно наибольшее недоумение вызывает определение импликации. Сделаем некоторые пояснения. Истинность импликации не является отражением причинно-следственных связей между составляющими ее высказываниями. Однако таблица для импликации согласуется с обычным содержательным пониманием союза «если».

Рассмотрим пример. Высказывание-обещание «Если в воскресенье будет солнечная погода, то мы пойдем гулять в парк» естественно признать невыполненным (ложным) только в одном случае: когда его посылка истинна, а заключение ложно. Истинностная таблица для импликации полностью соответствует такому пониманию.

Рассмотрим другой пример. В математике признается истинным следующее высказывание: «Каково бы ни было натуральное число x, если оно делится на 9, то оно делится на 3». Истинность этого высказывания означает, что какие бы натуральные числа мы ни подставляли вместо буквы x в предложение с переменной «$9 \mid x \to 3 \mid x$», будем получать истинные высказывания, в частности, истинными являются следующие высказывания: «$9 \mid 6 \to 3 \mid 6$» и «$9 \mid 17 \to 3 \mid 17$».

У первого из них посылка ложна, а заключение истинно. У второго посылка ложна и заключение тоже ложно. Это как раз соответствует третьей и четвертой строкам истинностной таблицы для импликации.

Таким образом, если посылка импликации ложна, то импликация истинна независимо от значения заключения. Это свойство импликации обычно выражают фразой: «Из лжи следует все, что угодно». Если заключение импликации истинно, то сама импликация истинна независимо от значения посылки. Это свойство импликации выражают следующей фразой: «Истина следует из чего угодно».

Как уже отмечалось, истинностное значение высказывания, образованного с помощью логических операций из каких-то высказываний, зависит лишь от значений составляющих его высказываний. Поэтому в логике высказываний нас будет интересовать не содержание высказывания, а его истинностное значение, а также его логическая *форма*, позволяющая вычислять его значение в зависимости от значений составляющих его простейших высказываний.

Поясним понятие формы высказывания на примере.

(1) «Если число 1 234 567 делится на 12, то оно делится на 3; следовательно, если это число не делится на 3, то оно не делится на 12».

(2) «Если число π является рациональным, то оно является алгебраическим; следовательно, если число π не является алгебраическим, то оно не является рациональным».

Обозначив через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ те высказывания, из которых составлено сложное высказывание (1), получим следующую символическую запись, отражающую его форму: $(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\text{не}\,\mathcal{B} \to \text{не}\,\mathcal{A})$. То же самое получим, проделав аналогичную операцию с высказыванием (2). Таким образом, высказывания (1) и (2) имеют одинаковую форму.

Понятие логической *формы* сложного высказывания уточняется при помощи понятия *формулы*.

Будем рассматривать p_1, ..., p_n, ... как переменные по множеству высказываний. Из этих переменных с помощью символов &, $\vee$, $\supset$, $\neg$ и скобок по определенным правилам будем строить осмысленные выражения – формулы.

Теперь перейдем к уточнению понятия *формулы*. Для этого прежде всего необходимо построить специальный формальный язык – язык логики высказываний.

§ 1.2. Формулы языка логики высказываний

Будем использовать понятия *буква*, *слово*, *подслово* данного слова, *алфавит*, *слово в алфавите* и т. п., полагая, что читатель имеет интуитивное представление об этих понятиях (некоторое их уточнение приведено далее).

Всякий формальный логический язык обычно задают двумя компонентами – алфавитом (исходными символами) и правилами построения осмысленных выражений – формул, т. е. *синтаксисом* языка[1].

Язык логики высказываний (ЯЛВ) зададим алфавитом и правилами построения формул.

Алфавит ЯЛВ состоит из следующих букв: &, $\vee$, $\supset$, $\neg$,), (, p.

Символы &, $\vee$, $\supset$, $\neg$ называют ***пропозициональными связками***[2]. Связку & называют *конъюнкцией*, связку $\vee$ – *дизъюнкцией*, связку $\supset$ – *импликацией*, а связку $\neg$ – *отрицанием*[3].

Скобки в формальном языке играют роль знаков препинания.

Слово $\underbrace{(\mathrm{p} \ldots \mathrm{p})}_{n \text{ раз}}$ будем называть ***пропозициональной переменной*** и обозначать через p_n ($n = 1, 2, \ldots$)[4].

Из пропозициональных переменных с помощью пропозициональных связок и скобок строятся формулы ЯЛВ.

Правила построения формул ЯЛВ выражены в индуктивном определении, которое приведено далее.

Индуктивные определения часто встречаются в математической логике. Типичными примерами индуктивных определений

---

[1] *Синтаксис* (от греч. σινταξιζ – «построение, составление») – в логике раздел, в котором изучаются вопросы, связанные с построением формальных логических языков и систем, простые отношения между символами и выражениями этих языков. Синтаксисом формального логического языка называют правила построения формул этого языка.

[2] *Пропозициональный* – относящийся к высказываниям (от лат. *propositio* – «предложение, высказывание»). Пропозициональные связки можно интерпретировать как операции над высказываниями, а пропозициональные переменные – как переменные по высказываниям.

[3] В качестве пропорциональных связок вместо символов &, $\supset$, $\neg$ часто используют символы $\wedge$, $\rightarrow$, $\overline{}$ соответственно.

[4] Для того чтобы получить бесконечное (счетное) множество пропозициональных переменных, из которых строятся формулы, *достаточно* конечного алфавита. Часто бесконечное множество пропозициональных переменных сразу включают в исходные символы, используя тем самым бесконечный алфавит.

служат определения формулы ЯЛВ, дерева N-вывода (§ 2.4), терма и формулы ЯЛП (§ 3.2), дерева PN-вывода (§ 4.2), дерева T-вывода (§ 5.2).

Индуктивное определение состоит из трех пунктов, первые два из которых называют прямыми, а третий — косвенным. Первые два пункта могут состоять из нескольких подпунктов.

В первом пункте, называемом базисом индукции, указывают исходные объекты, которые следует непосредственно относить к определяемому понятию (их называют *элементарными*). Во втором пункте, называемом шагом индукции, задают порождающее правило, которое позволяет из уже построенных объектов строить новые объекты, относящиеся к определяемому понятию. В третьем пункте утверждается, что никаких других объектов, относящихся к определяемому понятию, кроме как описанных в двух первых пунктах, нет. Более точная формулировка третьего пункта имеет следующий вид: объект относится к определяемому понятию тогда и только тогда, когда это можно обосновать с помощью первых двух пунктов.

! Определение ***формулы ЯЛВ***:

1. Всякая пропозициональная переменная p_n есть формула ЯЛВ.
2. Если слова A и B — формулы ЯЛВ, то слова $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ также являются формулами ЯЛВ.
3. Слово в алфавите ЯЛВ является формулой тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью п. 1 и 2.

Формулы ЯЛВ будем также называть *пропозициональными формулами*. Далее в гл. 1 и 2 для краткости вместо «формула ЯЛВ» будем говорить просто «формула» и вместо «пропозициональная переменная» — просто «переменная», если это не будет вызывать недоразумений.

Формулы $(A \& B)$ и $(A \vee B)$ называют соответственно *конъюнкцией* и *дизъюнкцией формул* A и B, а сами формулы A и B — *конъюнктивными* и *дизъюнктивными членами* соответственно. Формулу $(A \supset B)$ называют *импликацией* от A к B, а формулы A и B, входящие в формулу $(A \supset B)$, называют соответственно *посылкой* и *заключением* импликации.

Естественно называть связки &, $\vee$, $\supset$ *бинарными* (или *двуместными*), а связку $\neg$ *унарной* (или *одноместной*).

Для любых формул A и B формулу $((A \supset B)\ \&\ (B \supset A))$ будем обозначать через $A \sim B$ и называть *эквиваленцией формул* A и B.

➤➤ Введем *соглашение об экономии скобок*, договорившись опускать скобки в некоторых случаях. Договоренность основывается на следующем упорядочении пропозициональных связок по убыванию силы связывания: $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$. Таким образом, считаем, что связка $\neg$ связывает теснее, чем $\&$, $\vee$, $\supset$; связка $\&$ — теснее, чем $\vee$, $\supset$; связка $\vee$ — теснее, чем $\supset$. Будем считать, что связка $\sim$ связывает слабее остальных связок. Кроме того, будем опускать внешние скобки. Скобки, опущенные в соответствии с этой договоренностью, могут быть однозначно восстановлены.

Пример. Слово (((¬(pp)) & (p)) ⊃ (ppp)) является формулой ЯЛВ. Очевидно, пользоваться столь громоздкими записями крайне неудобно. В связи с этим, во-первых, упростим эту запись, пользуясь обозначениями для пропозициональных переменных. В результате получим следующее обозначение: $(((\neg p_2)\ \&\ p_1) \supset p_3)$. Во-вторых, опустим скобки в соответствии с принятой договоренностью. В итоге получим совсем короткое обозначение для приведенной выше формулы: $\neg p_2\ \&\ p_1 \supset p_3$. В дальнейшем такого рода обозначения формул также будем называть формулами.

Выражение $(\supset p_1 (\neg\ \&\ p_2$ формулой не является. Заметим, что ему трудно придать какой-нибудь смысл. В то же время, если в произвольную формулу вместо переменных подставить какие-либо высказывания, а на связки посмотреть как на обозначения логических операций, то всегда получится высказывание. ❍

Произвольные пропозициональные переменные будем обозначать строчными латинскими буквами p, q, r, s, возможно, с индексами; произвольные формулы ЯЛВ — латинскими заглавными буквами A, B, C, D, F, возможно, с индексами; а произвольные (чаще всего конечные) множества формул — греческими заглавными буквами Γ (гамма), Δ (дельта), возможно, с индексами.

Формулы могут обладать теми или иными свойствами. Примерами служат такие свойства, как «быть пропозициональной переменной», «быть конъюнкцией некоторых формул», «иметь равное число вхождений левой и правой скобок» и т. п. Примеры более содержательных свойств появятся позже. Отметим, что для последнего из перечисленных свойств в отличие от предыдущих свойств можно доказать, что им обладают *все* формулы ЯЛВ.

Если $\mathcal{P}$ — некоторое свойство формул ЯЛВ и требуется доказать, что *все* формулы ЯЛВ обладают свойством $\mathcal{P}$, удобно использовать следующий принцип, который основан на индуктивном характере определения формулы ЯЛВ.

! **ТЕОРЕМА** (*принцип индукции для формул* ЯЛВ). Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое свойство формул ЯЛВ.

Если 1) все пропозициональные переменные обладают свойством $\mathcal{P}$,

и 2) для любых формул A и B, обладающих свойством $\mathcal{P}$, формулы $(A \mathbin{\&} B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ также обладают свойством $\mathcal{P}$,

то всякая формула ЯЛВ обладает свойством $\mathcal{P}$.

Доказательство этого принципа читатель может при желании провести с помощью обычной математической индукции по натуральному n — числу вхождений пропозициональных связок в формулу (по так называемой *логической длине* формулы).

Если в доказательстве утверждения «Всякая формула обладает свойством $\mathcal{P}$» используется принцип индукции для формул ЯЛВ, то говорят также, что доказательство ведется *индукцией по построению* (*пропозициональной*) *формулы.*

Пусть A — формула. Всякое подслово слова A, являющееся формулой, называют *подформулой* формулы A.

Понятие *подформулы данной формулы* можно также определить индуктивно.

Определение ***подформулы*:**

1. Единственной подформулой всякой пропозициональной переменной является она сама.

2.1. Если A и B — формулы, то подформулами каждой из формул $(A \mathbin{\&} B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$ являются она сама и все подформулы формул A и B.

2.2. Если A — формула, то подформулами формулы $(\neg A)$ является она сама и все подформулы формулы A.

3. Формула является подформулой данной формулы тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью п. 1 и 2.

Можно доказать эквивалентность двух определений подформулы.

Оператор подстановки

Пусть $\mathcal{G} = (A_1, ..., A_n)$ – произвольный набор формул, $\omega = (p_{i_1}, ..., p_{i_n})$ – произвольный список пропозициональных переменных ($i_1 < i_2 < ... < i_n$). Какова бы ни была формула F, если одновременно для каждой переменной p_{i_k} ($k = 1, ..., n$) все ее вхождения в формулу F (если таковые имеются) заменить на вхождения формулы A_k, то получим формулу, которую называют *результатом* (*одновременной*) *подстановки формул* $A_1, ...,$ A_n *вместо переменных* $p_{i_1}, ..., p_{i_n}$ *в формулу* F и обозначают через $S_{\mathcal{G}}^{\omega}(F)$ (или просто $S(F)$, если $\mathcal{G}$ и ω фиксированы). Можно использовать также другое обозначение: $(F)_{A_1, ..., A_n}^{p_{i_1}, ..., p_{i_n}}$.

Уточним введенное понятие, сформулировав индуктивное определение.

Для простоты обозначений будем считать, что ω есть список переменных $q_1, ..., q_n$, т. е. $\omega = (q_1, ..., q_n)$.

Определение ***результата подстановки формул*** A_1***, ...,*** A_n ***вместо переменных*** $q_1, ..., q_n$ ***в формулу*** F:

1. Для всякой пропозициональной переменной p_i $(p_i)_{A_1,...,A_n}^{q_1,...,q_n} = A_j$, если p_i совпадает с q_j для некоторого j ($j = 1, ..., n$) и $(p_i)_{A_1,...,A_n}^{q_1,...,q_n} = p_i$, если p_i не входит в список ω.

2. Каковы бы ни были формулы A и B, если результаты подстановок $(A)_{A_1,...,A_n}^{q_1,...,q_n}$ и $(B)_{A_1,...,A_n}^{q_1,...,q_n}$ определены, то $(A \oplus B)_{A_1,...,A_n}^{q_1,...,q_n} =$ $= (A)_{A_1,...,A_n}^{q_1,...,q_n} \oplus (B)_{A_1,...,A_n}^{q_1,...,q_n}$, где $\oplus$ – любая из связок &, $\vee$, $\supset$; $(\neg A)_{A_1,...,A_n}^{q_1,...,q_n} = \neg(A)_{A_1,...,A_n}^{q_1,...,q_n}$.

Заметим, что результат подстановки $(F)_{A_1,...,A_n}^{q_1,...,q_n}$ зависит лишь от того, какие формулы подставляются вместо переменных, входящих в формулу F, что можно доказать, используя данное определение.

Имея такое определение, легко доказать, что для любых F, ω, $\mathcal{G}$ слово $S^{\omega}_{\mathcal{G}}(F)$ − результат указанной выше подстановки, является формулой.

Можно говорить об *операторе подстановки* $S^{q_1,\ldots,q_n}_{A_1,\ldots,A_n}$ как об отображении множества всех формул ЯЛВ в себя, при котором каждой формуле F ставится в соответствие формула $(F)^{q_1,\ldots,q_n}_{A_1,\ldots,A_n}$. В этом случае удобно обозначать результат указанной подстановки через $S(F)$.

Метаязык

! ***Языком-объектом*** называют язык, который является объектом изучения. ***Метаязыком*** называют язык, с помощью которого происходит изучение языка-объекта и на котором формулируются и доказываются утверждения об этом языке-объекте.

В нашем случае языком-объектом служит ЯЛВ, а метаязыком − русский математический язык, в котором также используется своя символика. Если символы пропозициональных связок &, $\vee$, $\supset$, $\neg$ являются символами языка-объекта, то символы $\to$, $\leftrightarrow$ и т. п. являются символами метаязыка или *метасимволами*[1]. Буквы A, B, C, D, которые используются как переменные по формулам ЯЛВ, также являются символами метаязыка − метапеременными.

Буквы, слова, алфавиты

Теперь некоторым образом уточним используемые нами термины: *буква*, *слово*, *алфавит*.

Под *буквой* будем понимать символ (знак), рассматривая его как не расчленяемый на части. Под *словом* будем понимать конечную цепочку написанных горизонтально в ряд букв. Про буквы, из которых построено слово, будем говорить, что они *входят* в это слово, причем одна и та же буква может иметь несколько *вхождений* в слово. Например, буква 1 имеет четыре вхождения, а буква 0 − три вхождения в слово 0110110.

Удобно рассматривать также *пустое слово* − слово, не содержащее ни одной буквы, которое будем обозначать символом Λ (греч. буква «лямбда»).

Алфавитом будем называть всякое непустое слово, составленное из попарно различных букв.

[1] В дальнейшем изложении появятся другие символы, которые также являются символами метаязыка: $\models$, $\vdash$ и т. п.

Алфавитом ЯЛВ служит следующее слово: &∨⊃¬)(р.

Будем говорить, что слово X – *слово в алфавите* A, если каждая буква слова X является буквой алфавита A.

Например, слово 346 является словом в алфавите цифр 0123456789; слово 011*110 является словом в алфавите 01*; пропозициональные переменные и пропозициональные формулы являются словами в алфавите ЯЛВ.

Число вхождений букв в слово X называется *длиной* этого слова. Например, длина слова 011*110 равна семи. Длина пустого слова равна нулю.

Будем говорить, что слово X *графически равно* слову Y, и писать $X \eqcirc Y$, если выполняются следующие два условия:
1) длины этих слов равны;
2) если X и Y – непустые слова, слово X имеет вид $a_1a_2 \ldots a_n$, а слово Y – вид $b_1b_2 \ldots b_n$, где a_i и b_i – буквы ($i = 1, \ldots, n$), то a_1 совпадает с b_1; a_2 совпадает с b_2; ...; a_n совпадает с b_n.

Любым двум словам X и Y поставим в соответствие слово XY (операция *присоединения* или *конкатенации*).

Очевидно, что $X \eqcirc \Lambda X$ и $X \eqcirc X\Lambda$ для любого слова X.

Будем говорить, что слово X *входит* (*имеет вхождение*) в слово Y, если существуют слова Z_1 и Z_2 такие, что $Y \eqcirc Z_1XZ_2$. Такая пара слов может быть не одна, т. е. слово X может иметь несколько вхождений в слово Y. *Вхождением* слова X в слово Y называют всякую тройку слов (Z_1, X, Z_2) такую, что $Y \eqcirc Z_1XZ_2$.

Будем говорить, что слово X является *подсловом* слова Y, если слово X имеет хотя бы одно вхождение в слово Y.

Слово X называют *началом* слова Y, если существует слово Z такое, что $Y \eqcirc XZ$. Заметим, что пустое слово является началом любого слова: $X \eqcirc \Lambda X$, и любое слово является началом самого себя. *Собственным началом* слова X называют всякое его начало, отличное от X и от пустого слова.

Отметим, что:

1) если слова X_1 и X_2 – являются началами слова Y, то одно из них является началом другого;

2) если $X_1Y \eqcirc X_2Y$ или $YX_1 \eqcirc YX_2$, то $X_1 \eqcirc X_2$.

Итак, формула – это слово в некотором алфавите, построенное по определенным правилам, т. е. графический объект. Такого рода объекты требуют некоторого осмысления, интерпретации[1].

---

[1] *Интерпретация* – толкование, объяснение (от лат. *interpretatio* – «толкование, объяснение»).

§ 1.3. Формулы и истинностные функции

Истинностными значениями называют слова *истина* и *ложь*. Для их обозначения используют буквы «И» и «Л» соответственно. Заметим, что вместо букв «И», «Л» часто используют цифры «1», «0» соответственно.

Истинностным набором называют всякий (упорядоченный) набор истинностных значений, т. е. всякий набор вида $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где n — некоторое натуральное число, а $\alpha_i \in \{И, Л\}$ для $i = 1, \ldots, n$.

! *n-местной* ***истинностной функцией***[1] называют всякое отображение множества $\{И, Л\}^n$ во множество $\{И, Л\}$, т. е. отображение типа $\{И, Л\}^n \to \{И, Л\}$.

Основные двуместные истинностные функции — конъюнкция ($\mathring{\&}$), дизъюнкция ($\mathring{\vee}$), импликация ($\mathring{\supset}$), и одноместная истинностная функция — отрицание ($\mathring{\neg}$), задаются следующими таблицами, называемыми *истинностными таблицами* для этих функций (α, β — переменные по множеству $\{И, Л\}$):

α	β	$\alpha \mathring{\&} \beta$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

α	β	$\alpha \mathring{\vee} \beta$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

α	β	$\alpha \mathring{\supset} \beta$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

α	$\mathring{\neg} \alpha$
И	Л
Л	И

Замечание 1. Для того чтобы отличить символы (метасимволы), обозначающие основные истинностные функции, от символов соответствующих им пропозициональных связок, при написании первых используют сверху символ $^\circ$. Заметим, что такое различие в обозначениях можно не делать (или делать только первое время), рассчитывая на то, что читатель из контекста поймет, о чем идет речь: о связках или об истинностных функциях. ❍

[1] Наряду с термином *истинностная функция* часто употребляется термин *булева функция* (в том же смысле).

➤➤ Истинностные функции обычно задаются стандартным образом с помощью истинностных таблиц. Всевозможные истинностные наборы длины n (для n-местной функции) упорядочиваются в *словарном* порядке (*лексикографически*). В правом столбце записываются соответствующие значения функции.

Именно так были заданы истинностные функции $\overset{\circ}{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\supset}, \overset{\circ}{\neg}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Существует всего 2^{2^n} различных n-местных истинностных функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, во-первых, что существует 2^n различных истинностных наборов длины n и, во-вторых, что каждая истинностная функция однозначно определяется столбцом значений своей истинностной таблицы. Длина каждого такого столбца равна 2^n, а значит, всего таких различных столбцов 2^{2^n}. Следовательно, и различных n-местных истинностных функций всего 2^{2^n}. ❐

Истинностное значение формулы

Будем интерпретировать пропозициональные переменные как переменные по множеству {И, Л}, а пропозициональные связки &, ∨, ⊃, ¬ как истинностные функции $\overset{\circ}{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\supset}, \overset{\circ}{\neg}$ соответственно. Если в формулу A вместо всех входящих в нее переменных подставить истинностные значения, а пропозициональные связки заменить обозначениями соответствующих функций, то по истинностным таблицам можно вычислить *истинностное значение формулы A* при данных значениях переменных. Далее мы уточним это понятие.

***Списком** пропозициональных переменных* (длины n) будем называть конечную последовательность (набор) переменных ($p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$) с индексами, упорядоченными по возрастанию: $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$. Список пропозициональных переменных ω будем называть ***допустимым списком** формулы A*, если он содержит все переменные, входящие в формулу A. Список пропозициональных переменных ω будем называть ***собственным списком** формулы A*, если он содержит те и только те переменные, которые входят в формулу A.

Заметим, что всякая формула имеет единственный собственный список и бесконечно много допустимых списков. Всякий собственный список формулы является ее допустимым списком.

Аналогично определяются *общие* допустимые и собственные *списки* переменных произвольного конечного непустого множества формул Γ (греч. буква «гамма»).

Примеры.

1. Рассмотрим формулу $\neg\neg p_3 \,\&\, p_8 \supset p_6 \vee \neg p_2$. Список переменных $\omega_0 = (p_2, p_3, p_6, p_8)$ является собственным списком этой формулы, а список $\omega_1 = (p_1, p_2, p_3, p_6, p_8)$ – ее допустимым списком.

2. Для множества формул $\Gamma = \{p_2 \supset \neg p_4,\ p_1 \vee \neg p_2\}$ список переменных (p_1, p_2, p_4) является общим собственным, а список $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ – общим допустимым списком. ❍

Пусть F – произвольная формула, $\omega = (p_{i_1}, ..., p_{i_n})$ – произвольный допустимый список формулы F, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ – произвольный истинностный набор для ω (т. е. той же длины, что и ω). В формуле F заменим каждую переменную p_{i_k} из списка ω, входящую в формулу F, на соответствующее истинностное значение α_k, а пропозициональные связки – на обозначения соответствующих (одноименных) истинностных функций. Тогда истинностное значение, полученное в результате вычислений в соответствии с истинностными таблицами, называют *значением формулы F на наборе* α *относительно списка* ω и обозначают символом $|F|_\alpha^\omega$.

Индуктивный характер определения формулы ЯЛВ позволяет уточнить введенное понятие с помощью следующего индуктивного определения.

Определение ***значения формулы F на истинностном наборе*** α ***относительно ее допустимого списка*** ω:

1. Каковы бы ни были переменная p_{i_k}, содержащий ее список ω и набор α для ω, если $\omega = (p_{i_1}, ..., p_{i_n})$ и $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, то $|p_{i_k}|_\alpha^\omega = \alpha_k$ $(k = 1, ..., n)$.

2. Каковы бы ни были формулы A и B, их допустимый список ω и набор α для ω, если значения $|A|_\alpha^\omega$ и $|B|_\alpha^\omega$ определены, то

$$|A \,\&\, B|_\alpha^\omega = |A|_\alpha^\omega \overset{\circ}{\&} |B|_\alpha^\omega,$$

$$|A \vee B|_\alpha^\omega = |A|_\alpha^\omega \overset{\circ}{\vee} |B|_\alpha^\omega,$$

$|A \supset B|_\alpha^\omega = |A|_\alpha^\omega \overset{\circ}{\supset} |B|_\alpha^\omega$,

$|\neg A|_\alpha^\omega = \overset{\circ}{\neg} |A|_\alpha^\omega$.

Замечание 2. В дальнейшем для обозначения произвольной пропозициональной бинарной связки будем использовать символ $\oplus$. С помощью этого обозначения вместо первых трех равенств можно записать одно:

$|A \oplus B|_\alpha^\omega = |A|_\alpha^\omega \overset{\circ}{\oplus} |B|_\alpha^\omega$, где $\oplus$ – любая из связок &, $\vee$, $\supset$. ❍

Функцией, порождаемой формулой F относительно ее допустимого списка ω, будем называть такую n-местную истинностную функцию (где n – длина ω), обозначаемую символом f_F^ω, что для любого истинностного набора α для ω выполняется равенство $f_F^\omega(\alpha) = |F|_\alpha^\omega$.

Заметим, что если допустимый список ω формулы F не является собственным, то функция f_F^ω имеет *фиктивные* переменные, т. е. переменные, от значений которых не зависит значение функции.

➤ Если ω – собственный список формулы F, то верхний индекс ω можно не указывать, используя обозначение f_F вместо f_F^ω и $|F|_\alpha$ вместо $|F|_\alpha^\omega$, и называть функцию f_F просто *функцией, порождаемой формулой F*, а значение $|F|_\alpha$ – просто *значением формулы F на наборе* α.

Кроме того, если ω и α фиксированы (известны), то вместо $|F|_\alpha^\omega$ будем писать просто $|F|$, если это не вызовет недоразумений.

Замечание 3. Индукцией по построению формулы F можно доказать, что каковы бы ни были допустимый список формулы F $\omega' = (p_{i_1}, ..., p_{i_n})$ и истинностный набор $\alpha' = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, выполняется равенство $|F|_{\alpha'}^\omega = |F|_\alpha$, где α – набор для собственного списка формулы F, приписывающий всем переменным формулы F те же значения, что и α'. ❍

Проиллюстрируем это следующим примером:

$$|\neg p_2 \,\&\, p_1 \supset p_4|^{p_1,p_2,p_3,p_4}_{\text{И,Л,Л,И}} = |\neg p_2 \,\&\, p_1 \supset p_4|^{p_1,p_2,p_4}_{\text{И,Л,И}} = (\overset{\circ}{\neg}\,\text{Л} \overset{\circ}{\&} \text{И}) \overset{\circ}{\supset} \text{И} = \text{И}.$$

➤ Для того чтобы вычислить значение формулы $(F)^{p_1,\dots,p_n}_{A_1,\dots,A_n}$ – результата подстановки формул $A_1, \dots, A_n$ вместо переменных $p_1, \dots, p_n$ в формулу F – на истинностном наборе α, нужно вычислить на этом наборе значения формул $A_1, \dots, A_n$, а затем вычислить значение формулы F на полученном наборе $\beta = (|A_1|_\alpha, \dots, |A_n|_\alpha)$. Сказанное наглядно иллюстрирует следующая запись, использующая неформальные обозначения:

$$|F(A_1, \dots, A_n)|_\alpha = F(|A_1|_\alpha, \dots, |A_n|_\alpha).$$

Уточняя сказанное, сформулируем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ (*о вычислении значения результата подстановки*). Пусть F – формула ЯЛВ, $(p_1, \dots, p_n)$ – ее допустимый список, $A_1, \dots, A_n$ – набор формул, $\omega = (q_1, \dots, q_m)$ – их общий допустимый список, а $(F)^{p_1,\dots,p_n}_{A_1,\dots,A_n}$ – результат подстановки формул $A_1, \dots, A_n$ вместо переменных $p_1, \dots, p_n$ в формулу F. Тогда для любого истинностного набора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ значение формулы $(F)^{p_1,\dots,p_n}_{A_1,\dots,A_n}$ на наборе α совпадает со значением формулы F на истинностном наборе $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, где $\beta_i = |A_i|_\alpha$ для каждого i ($i = 1, \dots, n$), т. е.

$$|(F)^{p_1,\dots,p_n}_{A_1,\dots,A_n}|^{\omega}_{\alpha} = |F|^{p_1,\dots,p_n}_{\beta_1,\dots,\beta_n}.$$

★ Приведем другой вариант уточнения понятия *значения формулы*.

Оценкой будем называть всякое отображение v множества всех пропозициональных переменных Vr во множество {И, Л}, т. е. $v\colon Vr \to$ {И, Л}.

Значение формулы F при оценке v, которое будем обозначать через $v(F)$, определим индуктивно:

1. Для всякой переменной p_n ее значение $v(p_n)$ задано оценкой.

2. Каковы бы ни были формулы A и B, если значения $v(A)$ и $v(B)$ определены, то

а) $v(A \oplus B) = v(A) \overset{\circ}{\oplus} v(B)$, где $\oplus$ – любая из связок $\&$, $\vee$, $\supset$;

б) $v(\neg A) = \overset{\circ}{\neg}\, v(A)$.

Понятия *значения формулы F при оценке v* и *значения формулы F на наборе α относительно ее допустимого списка ω* тесно связаны друг с другом. Можно доказать, что значение $v(F)$ формулы F при оценке v полностью определяется значениями ее переменных при этой оценке и совпадает со значением $|F|_{\alpha}^{\omega}$ формулы F на наборе $\alpha = (v(p_{i_1}), \ldots, v(p_{i_n}))$, где $\omega = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ – собственный список F. Поэтому, вместо того чтобы говорить о значении формулы F при оценке v, можно говорить о значении формулы F на наборе $\alpha = (v(p_{i_1}), \ldots, v(p_{i_n}))$ относительно ее собственного списка ω. Точнее, верно следующее утверждение[1].

УТВЕРЖДЕНИЕ. Каковы бы ни были оценка v и формула F, если $\omega = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ – собственный список F, то:

1) $v(F) = |F|_{\alpha}^{\omega}$, где $\alpha = (v(p_{i_1}), \ldots, v(p_{i_n}))$;

2) для всякой оценки v_1, удовлетворяющей условию $v_1(p_{i_1}) = v(p_{i_1}), \ldots, v_1(p_{i_n}) = v(p_{i_n})$, справедливо $v_1(F) = v(F)$.

Доказательство этого утверждения с помощью принципа индукции для формул ЯЛВ является несложным упражнением.

Иногда бывает удобно использовать также понятие *оценки формулы F*, понимая под этим всякое отображение v_F множества всех переменных Vr_F формулы F во множество {И, Л}, т. е.

v_F: $Vr_F \to$ {И, Л}. ☆

Связь между формулами ЯЛВ и истинностными функциями

Очевидно, что всякая формула A порождает истинностную функцию f_A и, кроме того, бесконечно много функций f_A^{ω} для каждого допустимого списка ω формулы A.

---

[1] Это утверждение позволяет ограничиваться только одним из двух понятий: *значение формулы при оценке* и *значение формулы на наборе*. Однако полезно ознакомиться с обоими. Первое проще вводится, однако использует бесконечные последовательности переменных и истинностных наборов. Второе требует введения целого ряда сопутствующих понятий, но использует лишь конечные списки переменных и значений. Фактически именно оно применяется на практике.

Возникает вопрос: верно ли, что всякая истинностная функция порождается некоторой формулой ЯЛВ? На этот вопрос дает ответ следующая теорема.

! **ТЕОРЕМА**. Всякая истинностная функция порождается некоторой формулой ЯЛВ.

Используя символы метаязыка, это утверждение можно записать следующим образом: $(f)\ (\mathsf{E}F)\ (f = f_F)$.

Доказательство. Индукцией по натуральному n докажем следующее утверждение: всякая n-местная истинностная функция f порождается некоторой формулой F ЯЛВ с собственным списком $\omega = (p_1, \ldots, p_n)$ (или, как говорят, формулой в n переменных $p_1, \ldots, p_n$).

Базис индукции. Докажем, что всякая одноместная истинностная функция порождается формулой в переменной p_1, указав для каждой такой функции соответствующую формулу. Зададим все одноместные функции (таковых существует четыре) с помощью истинностных таблиц.

α_1	$f_1(\alpha_1)$	$f_2(\alpha_1)$	$f_3(\alpha_1)$	$f_4(\alpha_1)$
И	И	И	Л	Л
Л	И	Л	И	Л

Легко проверить, что эти функции порождаются соответственно следующими формулами:

$$F_1 \rightleftharpoons p_1 \vee \neg p_1;\quad F_2 \rightleftharpoons p_1;\quad F_3 \rightleftharpoons \neg p_1;\quad F_4 \rightleftharpoons \neg(p_1 \vee \neg p_1).$$

Шаг индукции. Пусть каждая n-местная истинностная функция порождается некоторой формулой в переменных $p_1, \ldots, p_n$.

Пусть f — произвольная $(n + 1)$-местная истинностная функция: $\{\text{И, Л}\}^{n+1} \to \{\text{И, Л}\}$. Докажем, что она порождается некоторой формулой в переменных $p_1, \ldots, p_{n+1}$.

Введем две n-местные истинностные функции такие, что для любого истинностного набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \text{И});$$
$$h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \text{Л}).$$

Согласно предположению индукции, функции g и h порождаются некоторыми формулами в n переменных. Пусть G и H — формулы в переменных $p_1, \ldots, p_n$, порождающие функции g и h соответственно: $g = f_G$ и $h = f_H$.

Докажем, что функция f порождается следующей формулой F в переменных $p_1, \ldots, p_{n+1}$:

$$F \leftrightharpoons (G \mathbin{\&} p_{n+1}) \vee (H \mathbin{\&} \neg p_{n+1}).$$

Действительно, с помощью непосредственной проверки убедимся в том, что для любого истинностного набора α выполняется равенство $f(\alpha) = |\,F\,|_\alpha$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ – произвольный истинностный набор.

Если $\alpha_{n+1} = \text{И}$, то $|\,F|_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \text{И}} = (|\,G|_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \overset{\circ}{\&} \text{И}) \overset{\circ}{\vee} (|\,H|_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \overset{\circ}{\&} \text{Л}) = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \text{И})$.

Если $\alpha_{n+1} = \text{Л}$, то $|\,F|_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \text{Л}} = (|\,G|_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \overset{\circ}{\&} \text{Л}) \overset{\circ}{\vee} (|\,H|_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \overset{\circ}{\&} \text{И}) = h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \text{Л})$. ❐

Анализируя это доказательство, можно сделать вывод, что фактически доказано следующее более сильное утверждение.

! **СЛЕДСТВИЕ.** Всякая истинностная функция порождается некоторой формулой ЯЛВ, содержащей только связки $\&$, $\vee$, $\neg$ (не содержащей связку $\supset$).

Систему истинностных функций называют ***полной***, если всякая истинностная функция может быть получена как суперпозиция функций из этой системы.

Из только что доказанной теоремы следует, что системы истинностных функций $\{\overset{\circ}{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\supset}, \overset{\circ}{\neg}\}$ и $\{\overset{\circ}{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\neg}\}$ – полные.

Несложно доказать, что системы истинностных функций $\{\overset{\circ}{\&}, \overset{\circ}{\neg}\}$, $\{\overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\neg}\}$, $\{\overset{\circ}{\supset}, \overset{\circ}{\neg}\}$ являются полными, а системы $\{\overset{\circ}{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\supset}\}$ и $\{\overset{\circ}{\neg}\}$ не являются полными.

§ 1.4. Тавтологии

Среди всех формул ЯЛВ особую роль играют формулы, принимающие значение И при любых значениях входящих в них переменных.

Формулу A называют ***тавтологией***[1] (или *тождественно истинной* формулой) и пишут $\models A$, если A принимает значение И на любом истинностном наборе α (относительно собственного списка), т. е.

$$\models A \xleftrightarrow{def} (\alpha)(|A|_\alpha = И).$$

Например, какова бы ни была формула A, являются тавтологиями формулы $A \vee \neg A$ и $\neg\neg A \supset A$, что легко проверить, составив истинностные таблицы для этих формул. Формулу $p \vee \neg p$, называют ***законом исключенного третьего*** (лат. *tertium non datur*), а формулу $\neg\neg p \supset p$ — ***законом снятия двойного отрицания***. Эти два закона играют особую роль в основаниях математики, о чем подробно будет говориться в гл. 6.

➤ Заметим, что формула A является тавтологией тогда и только тогда, когда функция f_A, порождаемая формулой A, является тождественно истинной.

➤ Поскольку значение формулы при заданной оценке зависит только от значений ее переменных, формула A является тавтологией тогда и только тогда, когда она принимает значение И при любой оценке, т. е.

$$\models A \leftrightarrow (v)(v(A) = И).$$

Тавтологии играют особую роль в логике, представляя собой такие схемы, что любые высказывания, построенные по этим схемам, являются истинными. Поэтому тавтологии часто называют *законами логики*.

Очень важно уметь распознавать тавтологии. Существует алгоритм, позволяющий по произвольной формуле ЯЛВ выяснить, является ли она тавтологией. Действительно, для каждой формулы можно построить истинностную таблицу функции, порождаемой этой формулой (ее называют также истинностной таблицей этой формулы). Если ее правый столбец — столбец значений — содержит только буквы И, то эта формула, очевидно, является тавтологией. В противном случае, т. е. когда столбец значений содержит по крайней мере одну букву Л, формула тавтологией не является.

Однако составление истинностных таблиц — весьма утомительное и неинтересное занятие. Поэтому полезно овладеть дру-

---

[1] *Тавтология* — от греч. ταυτολογεω — «повторяю сказанное»; ταυτο — «то же самое»; λογοζ — «слово».

гим способом распознавания тавтологий, который опирается на свойства основных истинностных функций и позволяет обойтись без построения истинностных таблиц. Суть его заключается в поиске истинностного набора, на котором данная формула принимает значение Л, путем попытки привести к нелепости предположение о его существовании.

Перечислим утверждения, полезные при исследовании формул на тождественную истинность.

➤➤ Каковы бы ни были формулы A и B, допустимый общий список переменных этих формул ω и истинностный набор α для этого списка, выполняются следующие соотношения (где вместо $|F|_{\alpha}^{\omega}$ пишем просто $|F|$):

$|A \& B| =$ И $\leftrightarrow |A| =$ И и $|B| =$ И;
$|A \& B| =$ Л $\leftrightarrow |A| =$ Л или $|B| =$ Л;
$|A \vee B| =$ И $\leftrightarrow |A| =$ И или $|B| =$ И;
$|A \vee B| =$ Л $\leftrightarrow |A| =$ Л и $|B| =$ Л;
$|A \supset B| =$ И $\leftrightarrow |A| =$ Л или $|B| =$ И;
$|A \supset B| =$ Л $\leftrightarrow |A| =$ И и $|B| =$ Л;
$|\neg A| =$ И $\leftrightarrow |A| =$ Л; $|\neg A| =$ Л $\leftrightarrow |A| =$ И.

П р и м е р ы. Рассмотрим два примера исследования формул на тождественную истинность.

1. Выясним, является ли тавтологией формула

$$p \supset (q \supset p). \qquad (1)$$

Рассмотрим произвольный набор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Допустим, что формула (1) принимает на α значение Л: $|p \supset (q \supset p)|_{\alpha} =$ Л. Тогда $|p|_{\alpha} =$ И, а $|q \supset p|_{\alpha} =$ Л. Из второго вытекает, что $|q|_{\alpha} =$ И, а $|p|_{\alpha} =$ Л, а значит, $|p|_{\alpha} \neq$ И. Получили противоречие: $|p|_{\alpha} =$ И и $|p|_{\alpha} \neq$ И. Следовательно, наше допущение неверно, и формула (1) принимает на наборе α значение И. Поскольку набор α был взят произвольно, получаем, что данная формула − тавтология: $\models p \supset (q \supset p)$.

2. Выясним, является ли тавтологией формула

$$(p \supset q) \supset p. \qquad (2)$$

Допустим, что $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ − набор, на котором формула (2) принимает значение Л: $|(p \supset q) \supset p|_{\alpha} =$ Л. Тогда $|p \supset q|_{\alpha} =$ И, а $|p|_{\alpha} =$ Л. Это означает, что $|p|_{\alpha} =$ Л, а $|q|_{\alpha}$ может быть любым. Таким образом, набором, на котором данная формула принимает значение Л, может быть набор (Л, И) или набор (Л, Л). Непосредственной проверкой можно убедиться, что формула (2) на каком-либо из этих наборов (достаточно проверить на одном, например, на наборе (Л, И)) действительно принимает значение Л. Итак, предъявлен набор, на котором формула (2) ложна, а значит, доказано, что она не тавтология. Запишем это следующим образом:

$$\not\models (p \supset q) \supset p. \ \bigcirc$$

➤ Приведем список некоторых известных тавтологий с названиями (A, B, C – произвольные формулы ЯЛВ):

1) $A \vee \neg A$ – закон исключенного третьего;

2) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$ – закон доказательства разбором случаев;

3) $(A \supset (B \supset C)) \supset (A \mathbin{\&} B \supset C)$ – закон соединения посылок;

4) $(A \mathbin{\&} B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$ – закон разъединения посылок;

5) $(A \supset (B \supset C)) \supset (B \supset (A \supset C))$ – закон перестановки посылок;

6) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$ – закон доказательства от противного;

7) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$ – закон приведения к нелепости;

8) $\neg A \supset (A \supset B)$ – закон Дунса Скота[1)];

9) $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ – закон силлогизма;

10) $\neg(A \mathbin{\&} \neg A)$ – закон непротиворечия;

11) $\neg\neg A \supset A$ – закон снятия двойного отрицания.

Читателю рекомендуется самостоятельно доказать, что эти формулы – тавтологии, а также продумать содержательное толкование этих тавтологий, связав его, где это возможно, с названиями.

§1.5. Равносильные формулы

Формулы A и B называют ***равносильными формулами*** и пишут $A \equiv B$, если они принимают одинаковые значения на любом истинностном наборе α относительно ω – *общего* собственного списка переменных формул A и B:

$$A \equiv B \overset{def}{\longleftrightarrow} (\alpha)(|A|_{\alpha}^{\omega} = |B|_{\alpha}^{\omega}).$$

Индукцией по длине общего собственного списка формул A и B легко показать, что формулы A и B равносильны тогда и только

1) Дунс Скот (ок. 1266–1308) – францисканский монах, философ, логик.

тогда, когда они принимают одинаковые значения при любой оценке v, т. е.

$$A \equiv B \leftrightarrow (v)(v(A) = v(B)).$$

Замечание. Формулы A и B равносильны тогда и только тогда, когда $f_A^\omega = f_B^\omega$, где ω — общий собственный список формул A и B. Здесь равенство $f_A^\omega = f_B^\omega$ нельзя заменить равенством $f_A = f_B$. Действительно, существуют формулы A и B такие, что $f_A = f_B$, однако $A \not\equiv B$. Так, например, для формул $p_1 \supset p_2$ и $p_3 \supset p_4$ имеет место равенство $f_A = f_B$ (истинностные таблицы для этих функций совпадают с таблицей для импликации $\overset{\circ}{\supset}$), однако $f_A^\omega \neq f_B^\omega$, а значит, и $A \not\equiv B$. ○

Легко доказать, что отношение равносильности $\equiv$ на множестве $\mathcal{F}r$ всех формул ЯЛВ является отношением эквивалентности (рефлексивно, симметрично и транзитивно), поскольку для любых формул A, B, C:

1) $A \equiv A$;
2) если $A \equiv B$, то $B \equiv A$;
3) если $A \equiv B$ и $B \equiv C$, то $A \equiv C$.

Основные равносильности

Среди утверждений вида $A \equiv B$ выделяют некоторый набор наиболее важных утверждений, называемых *основными равносильностями.*

➤➤ Приведем список основных равносильностей логики высказываний (A, B, C — произвольные формулы ЯЛВ):

1) $A \,\&\, B \equiv B \,\&\, A$ — коммутативность конъюнкции;
2) $A \vee B \equiv B \vee A$ — коммутативность дизъюнкции;
3) $A \,\&\, (B \,\&\, C) \equiv (A \,\&\, B) \,\&\, C$ — ассоциативность конъюнкции;
4) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ — ассоциативность дизъюнкции;
5) $A \,\&\, (B \vee C) \equiv (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ — дистрибутивность & относительно $\vee$;
6) $A \vee (B \,\&\, C) \equiv (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$ — дистрибутивность $\vee$ относительно &;
7) $A \,\&\, (A \vee B) \equiv A$ — закон поглощения;
8) $A \vee (A \,\&\, B) \equiv A$ — закон поглощения;
9) $\neg(A \,\&\, B) \equiv \neg A \vee \neg B$ — закон де Моргана[1)];

[1)] Де Морган (1806—1873) — шотландский математик, логик.

10) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \mathbin{\&} \neg B$ — закон де Моргана;
11) $A \mathbin{\&} A \equiv A$ — идемпотентность &;
12) $A \vee A \equiv A$ — идемпотентность $\vee$;
13) $A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A$ — закон контрапозиции;
14) $A \supset B \equiv \neg A \vee B$ — выражение $\supset$ через $\vee$ и $\neg$;
15) $\neg\neg A \equiv A$ — закон двойного отрицания;
16) $A \supset (B \supset C) \equiv A \mathbin{\&} B \supset C$ — соединение (разъединение) посылок.

Как и в случае важных тавтологий, читателю рекомендуется самостоятельно продумать содержательное толкование этих равносильностей.

Основные равносильности можно доказывать непосредственно, опираясь на определение равносильности формул.

Докажем, например, равносильность $A \supset B \equiv \neg A \vee B$. Зафиксируем произвольный истинностный набор α для общего собственного списка формул A и B. Докажем, что на этом наборе формула $A \supset B$ принимает значение Л в том и только в том случае, когда формула $\neg A \vee B$ принимает значение Л. Действительно,

$$|A \supset B|_\alpha = \text{Л} \leftrightarrow |A|_\alpha = \text{И},\ |B|_\alpha = \text{Л} \leftrightarrow |\neg A|_\alpha = \text{Л},\ |B|_\alpha = \text{Л} \leftrightarrow |\neg A \vee B|_\alpha = \text{Л}.$$

Полезными также являются следующие равносильности с *константами* (A — произвольная формула ЯЛВ; $\mathbf{0}$ — произвольная тождественно ложная формула, $\mathbf{1}$ — произвольная тавтология), сразу вытекающие из основных свойств логических операций:

1) $A \mathbin{\&} \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$;
2) $A \vee \mathbf{0} \equiv A$;
3) $A \mathbin{\&} \mathbf{1} \equiv A$;
4) $A \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$;
5) $A \supset \mathbf{0} \equiv \neg A$;
6) $\mathbf{0} \supset A \equiv \mathbf{1}$;
7) $A \supset \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$;
8) $\mathbf{1} \supset A \equiv A$.

Связь между понятиями *тавтология* и *равносильные формулы* выражается в следующем утверждении, весьма простое доказательство которого оставляем читателю.

! УТВЕРЖДЕНИЕ.

1. Формулы A и B равносильны тогда и только тогда, когда являются тавтологиями формулы $A \supset B$ и $B \supset A$.

2. Формулы A и B равносильны тогда и только тогда, когда является тавтологией формула $A \sim B$.

Запишем это символически:

1. $A \equiv B \leftrightarrow\ \models A \supset B$ и $\models B \supset A$.

2. $A \equiv B \leftrightarrow\ \models A \sim B$.

Согласно этому утверждению, для того чтобы *выяснить*, являются ли равносильными формулы A и B, достаточно *выяснить*, являются ли тавтологиями формулы $A \supset B$ и $B \supset A$.

Является полезной следующая теорема.

ТЕОРЕМА (*о равносильной замене*). Пусть F, A, A_1 — формулы ЯЛВ, причем формулы A и A_1 равносильны, а формула A является подформулой F. Если в формуле F какое-либо вхождение в нее подформулы A заменить вхождением формулы A_1, то получим формулу, равносильную исходной формуле F.

Изложим идею доказательства.

Сначала сформулируем доказываемое утверждение более точно: если F, A, A_1 — формулы ЯЛВ, причем для некоторых слов X и Y в алфавите ЯЛВ $F \rightleftharpoons XAY$ (т. е. A — подформула формулы F), то:

1) слово XA_1Y также является формулой ЯЛВ;

2) если $A \equiv A_1$, то $XAY \equiv XA_1Y$.

Доказать это утверждение несложно с помощью принципа индукции для формул ЯЛВ и следующей леммы.

ЛЕММА. Если $A \equiv A_1$, а B — произвольная формула, то:

1) $A \mathbin{\&} B \equiv A_1 \mathbin{\&} B$;

2) $A \vee B \equiv A_1 \vee B$;

3) $A \supset B \equiv A_1 \supset B$;

4) $B \supset A \equiv B \supset A_1$;

5) $\neg A \equiv \neg A_1$.

Доказательство леммы и самой теоремы является хотя и трудоемким, но несложным и оставляется читателю в качестве упражнения.

Иногда требуется найти формулу специального вида (или более простую формулу), равносильную данной. Для решения такой задачи удобно выстроить цепочку из равносильных друг другу формул, в которой каждый переход к последующей формуле обосновывается с помощью одной из основных равносильностей и теоремы о равносильной замене. Построение такой цепочки равносильных формул называют *равносильными преобразованиями* формул.

➤➤ Техника *равносильных преобразований* основана на:

1) основных равносильностях и

2) теореме о равносильной замене.

Пусть A — формула, не являющаяся тождественно ложной, и $\omega = (p_1, \ldots, p_n)$ — ее собственный список. Введем обозначение:

$$p_i^{\alpha_i} = \begin{cases} p_i, \text{ если } \alpha_i = \text{И}, \\ \neg p_i, \text{ если } \alpha_i = \text{Л}. \end{cases}$$

➤ Можно доказать (см., например, [12]), что формула A равносильна дизъюнкции, члены которой имеют вид $p_1^{\alpha_1} \& \ldots \& p_n^{\alpha_n}$, по всем наборам $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, на которых формула A принимает значение И:

$$A \equiv \bigvee_{\substack{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ |A|_\alpha^\omega = \text{И}}} p_1^{\alpha_1} \& \ldots \& p_n^{\alpha_n}.$$

Такую дизъюнкцию называют *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* формулы A.

§ 1.6. Семантическое следование

Введем отношение семантического[1] следования – отношение между конечными множествами формул и формулами ЯЛВ.

Пусть Γ – произвольное конечное множество формул, B – произвольная формула ЯЛВ, $\omega = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ – общий собственный список переменных формул из Γ и формулы B.

Будем говорить, что формула B ***семантически следует*** из множества формул Γ, и писать $\Gamma \vDash B$, если на любом истинностном наборе α для ω, на котором все формулы из Γ принимают значение И, формула B также принимает значение И.

Можно доказать, что формула B семантически следует из множества формул Γ, если для любой оценки, при которой все формулы из Γ принимают значение И, формула B также принимает значение И.

Если $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$, то вместо $\{A_1, \ldots, A_n\} \vDash B$ будем писать $A_1, \ldots, A_n \vDash B$.

Легко доказать следующие *свойства* семантического следования:

1) $B \vDash B$ (рефлексивность);

---

[1] *Семантика* (от греч. σημαντικοζ – «обозначающий») – в логике раздел, в котором изучаются связи между формулами и их смыслом.

2) если $\Gamma \models B$ и $\Gamma \subseteq \Gamma_1$, то $\Gamma_1 \models B$ (монотонность);

3) если $\Gamma \models A_i$ (для $i = 1, \ldots, n$) и $A_1, \ldots, A_n \models B$, то $\Gamma \models B$ (транзитивность);

4) если $\Gamma, A \models F$ и $\Gamma \models A$, то $\Gamma \models F$;

5) если $\Gamma \models F$, то $S(\Gamma) \models S(F)$ для любого оператора подстановки S, где $S(\Gamma) \leftrightharpoons \{S(A) \mid A \in \Gamma\}$;

5') если $\models F$, то $\models S(F)$ для любого оператора подстановки S.

Доказательство этих свойств оставляем читателю. Заметим только, что в доказательстве свойства 5 удобно использовать утверждение о вычислении значения результата подстановки (§ 1.3).

Связь между понятиями *семантического следования*, *равносильности* и *тавтологии* отражена в следующей теореме (простое доказательство которой, опирающееся лишь на определения рассматриваемых понятий, оставляем читателю).

! **ТЕОРЕМА** (о связи между понятиями *семантического следования*, *равносильности* и *тавтологии*).

Каковы бы ни были формулы A, B и множество формул Γ:

1) $A \models B$ тогда и только тогда, когда $\models A \supset B$;

2) $A \equiv B$ тогда и только тогда, когда $A \models B$ и $B \models A$;

3) $\varnothing \models B$ тогда и только тогда, когда формула B – тавтология;

4) если $\Gamma \models B$ и все формулы из Γ – тавтологии, то B – тавтология.

! **ТЕОРЕМА** (*свойства семантического следования*, связанные с введением и удалением пропозициональных связок). Каковы бы ни были формулы A, B, C и множество формул Γ, справедливы следующие утверждения:

1) $\dfrac{\Gamma \models A \text{ и } \Gamma \models B}{\Gamma \models A \,\&\, B}$; 2) $\dfrac{\Gamma \models A \,\&\, B}{\Gamma \models A \text{ и } \Gamma \models B}$;

3) $\dfrac{\Gamma \models A \text{ или } \Gamma \models B}{\Gamma \models A \vee B}$; 4) $\dfrac{\Gamma, A \models C \text{ и } \Gamma, B \models C}{\Gamma, A \vee B \models C}$;

5) $\dfrac{\Gamma, A \models B}{\Gamma \models A \supset B}$; 6) $\dfrac{\Gamma \models A \text{ и } \Gamma \models A \supset B}{\Gamma \models B}$;

7) $\dfrac{\Gamma, A \models B \text{ и } \Gamma, A \models \neg B}{\Gamma \models \neg A}$; 8) $\dfrac{\Gamma \models A \text{ и } \Gamma \models \neg A}{\Gamma \models B}$; 9) $\dfrac{\Gamma \models \neg\neg A}{\Gamma \models A}$.

Замечание 1. Горизонтальная черта здесь использована для сокращенной записи условных утверждений, т. е. утверждений вида «если..., то...». ❍

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства этих утверждений достаточно доказать следующие утверждения соответственно:

1') $A,\ B \models A\ \&\ B$; 2') $A\ \&\ B \models A$ и $A\ \&\ B \models B$;

3') $A \models A \vee B$ и $B \models A \vee B$; 4') $A \vee B,\ A \supset C,\ B \supset C \models C$;

5') $\Gamma,\ A \models B \to \Gamma \models A \supset B$; 6') $A,\ A \supset B \models B$;

7') $A \supset B,\ A \supset \neg B \models \neg A$; 8') $A,\ \neg A \models B$;

9') $\neg\neg A \models A$.

Действительно, утверждения 1, 2, 3, 6, 8, 9 следуют соответственно из утверждений 1', 2', 3', 6', 8', 9' в силу транзитивности отношения $\models$, а утверждения 4 и 7 следуют из 4' и 7' в силу транзитивности $\models$ и утверждения 5. Для утверждения 5 соответствующей пары нет, поэтому оно просто повторяется, правда, по техническим причинам в другой форме записи.

Сначала докажем утверждение 5.

Допустим, что $\Gamma,\ A \models B$, и докажем, что $\Gamma \models A \supset B$. Пусть α – такой набор для общего собственного списка переменных формул A, B и формул из Γ, на котором все формулы из Γ принимают значение И. Докажем, что $|A \supset B|_\alpha =$ И. Если $|A|_\alpha =$ И, то в силу допущения $\Gamma,\ A \models B$ получаем, что $|B|_\alpha =$ И, а значит, и $|A \supset B|_\alpha =$ И. Если $|A|_\alpha =$ Л, то, очевидно, также получаем, что $|A \supset B|_\alpha =$ И. Таким образом, утверждение 5 доказано.

Теперь докажем утверждение 4': $A \vee B,\ A \supset C,\ B \supset C \models C$. Пусть α – произвольный истинностный набор для общего собственного списка формул A, B, C. Допустим, что $|A \vee B|_\alpha =$ И, $|A \supset C|_\alpha =$ И, $|B \supset C|_\alpha =$ И, и докажем, что $|C|_\alpha =$ И. Из допущения $|A \vee B|_\alpha =$ И следует, что $|A|_\alpha =$ И или $|B|_\alpha =$ И. Если $|A|_\alpha =$ И, то при допущении $|A \supset C|_\alpha =$ И получаем, что $|C|_\alpha =$ И. Если $|B|_\alpha =$ И, то при допущении $|B \supset C|_\alpha =$ И также получаем, что $|C|_\alpha =$ И. Таким образом, $|C|_\alpha =$ И, а значит, утверждение 4' доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 7': $A \supset B,\ A \supset \neg B \models \neg A$.

Пусть α – произвольный набор для общего собственного списка формул A и B. Допустим, что $|A \supset B|_\alpha =$ И и $|A \supset \neg B|_\alpha =$ И, и докажем, что $|\neg A|_\alpha =$ И. Допустим, что $|\neg A|_\alpha =$ Л. Тогда, очевидно, $|A|_\alpha =$ И. Отсюда, поскольку $|A \supset B|_\alpha =$ И и $|A \supset \neg B|_\alpha =$ И, получаем, что $|B|_\alpha =$ И и $|\neg B|_\alpha =$ И, что невозможно. Следовательно, $|\neg A|_\alpha =$ И, а значит, утверждение 7' доказано.

Докажем утверждение 8': $A, \neg A \models B$.

Пусть α — произвольный набор для общего собственного списка переменных формул A и B. Формулы A и $\neg A$ не могут обе принимать значение И на этом наборе. Поэтому условное предложение «если $|A|_\alpha =$ И и $|\neg A|_\alpha =$ И, то $|B|_\alpha =$ И» истинно в силу ложности посылки. Это как раз и означает, что $A, \neg A \models B$.

Остальные свойства доказываются аналогично. ❐

Замечание 2. В дальнейшем мы скажем, что доказанные утверждения выражают тот факт, что отношение семантического следования $\models$ сохраняется правилами введения и удаления пропозициональных связок (см. § 2.6). ❍

Замечание 3. Понятие семантического следования является одним из математических уточнений неформального понятия логического следования. Поэтому все свойства семантического следования имеют естественное содержательное толкование. Например, свойство 7 соответствует методу доказательства приведением к нелепости, свойство 4 соответствует методу доказательства разбором случаев. ❍

УПРАЖНЕНИЕ

1. Докажите, что для любых формул $A_1, \ldots, A_n, B$:

а) $A_1, \ldots, A_n \models B \leftrightarrow\ \models A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n \supset B$;

б) $A_1, \ldots, A_n \models B \leftrightarrow\ \models A_1 \supset (A_2 \supset (\ldots \supset (A_n \supset B)\ldots))$.

2. Докажите, что:

а) если B — тавтология, то $\Gamma \models B$ для любого множества формул Γ;

б) если не существует набора α, на котором все формулы из Γ принимают значение И, то $\Gamma \models B$ для любой формулы B.

§ 1.7. Разрешимость языка логики высказываний

Формальный логический язык Я называют ***разрешимым языком***, если существует алгоритм, позволяющий по любому слову в алфавите этого языка Я выяснить, является ли это слово формулой языка Я.

В этом параграфе необходимо временно отказаться от соглашения об опускании скобок при написании формул ЯЛВ, так как наличие скобок в формулах в соответствии с определением является в данном разделе принципиальным.

! **ТЕОРЕМА.** Язык логики высказываний разрешим.

★ Сформулируем ряд лемм, облегчающих доказательство разрешимости ЯЛВ[1].

ЛЕММА 1. Если формула A не является пропозициональной переменной, то существуют такие формулы B и C и бинарная пропозициональная связка $\oplus$, что $A \eqcirc (B \oplus C)$ или $A \eqcirc (\neg B)$.

ЛЕММА 2. Для всякого слова X в алфавите ЯЛВ обозначим через $\mathrm{L}(X)$, $\mathrm{R}(X)$ число вхождений соответственно левой скобки и правой скобки в слово X. Тогда для любой формулы A:

а) существует слово X такое, что $A \eqcirc (X)$; б) $\mathrm{L}(A) = \mathrm{R}(A)$.

ЛЕММА 3. Каковы бы ни были слово Y и формула A:

а) для всякого собственного начала X формулы A $\mathrm{L}(X) \geq \mathrm{R}(X) + 1$;

б) если A не является пропозициональной переменной, то существует единственное вхождение некоторой пропозициональной связки $\oplus$ (бинарной или унарной) в формулу A, такое что $A \eqcirc X \oplus Y$ и $\mathrm{L}(X) = \mathrm{R}(X) + 1$ для некоторых слов X и Y.

ЛЕММА 4. Пусть A – слово в алфавите ЯЛВ, такое что $A \eqcirc (A_1)$ для некоторого слова A_1, и, кроме того, для A существует единственное вхождение некоторой пропозициональной связки $\oplus$ (бинарной или унарной), такое что $A \eqcirc (\underbracket{X}\oplus Y)$ и $\mathrm{L}(\underbracket{(X}) = \mathrm{R}(\underbracket{(X}) + 1$.

Такое слово A является формулой тогда и только тогда, когда выполняется какое-либо из следующих двух условий:

а) X, Y – формулы, а $\oplus$ – бинарная пропозициональная связка;

б) X – пустое слово, Y – формула, а $\oplus$ – унарная связка $\neg$.

ЛЕММА 5. Всякое собственное начало формулы не может быть формулой.

---

[1] Материал, представленный в этом параграфе в виде лемм и подводящий к построению разрешающего ЯЛВ алгоритма, изложен в полном соответствии с тем, как в течение многих лет излагал тему «Разрешимость ЯЛВ» Ф. А. Кабаков в курсе математической логики на математическом факультете МПГУ.

❢ **ТЕОРЕМА** (*о единственности синтаксического анализа формул* ЯЛВ). Всякая формула ЯЛВ либо является пропозициональной переменной, либо может быть представлена, и притом единственным образом, в одном и только в одном из следующих видов: $(A \mathbin{\&} B)$, или $(A \vee B)$, или $(A \supset B)$, или $(\neg B)$, где A и B — формулы.

Замечание. Единственность представления означает, что формулы A и B в первых трех случаях и B в четвертом случае определяются однозначно. ❍

На основании лемм 1—5 можно построить алгоритм, позволяющий по любому слову в алфавите ЯЛВ выяснить, является это слово формулой ЯЛВ или нет.

Доказательство лемм, теоремы, а также построение разрешающего ЯЛВ алгоритма оставляем читателю. ✰

Глава 2

ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ. ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЕСТЕСТВЕННОГО ВЫВОДА

§ 2.1. Логическая структура математических доказательств

Математические доказательства являются главным объектом изучения *теории доказательств* — основного раздела математической логики. Для того чтобы понятие математического доказательства стало объектом изучения в математике, необходимо это понятие уточнить.

Сначала необходимо договориться, что понимать под математическим доказательством[1] на интуитивном уровне.

Прежде всего под доказательством будем понимать не *процесс* обоснования какого-либо математического утверждения, а его *результат*, обычно представленный в виде некоторого *текста*. Особенность этого текста заключается в том, что он составлен из предложений, которые логически взаимосвязаны друг с другом. Обычно эта связь выражается словами «предложение такое-то *логически следует* из (предшествующих) предложений таких-то». Правда, в содержательных доказательствах используется лишь слово «следовательно» (или равнозначное слово), а из каких именно посылок следует данное предложение (делается вывод) часто явно не указано, да и сами посылки, бывает, не все сформулированы. А самое главное — никак не уточняется, что значит «*логически следует*». При уточнении под этим можно понимать соответствие каждого умозаключения, каждого шага рассуждения, некоторому *правилу вывода* (логическому правилу), разумеется, если восстановлены все пропущенные посылки и шаги. Однако на практике в неформальном доказательстве обычно не уточняется, в соответствии с каким логическим правилом делается тот или иной вывод.

В доказательстве должны быть *исходные* предложения, которые не являются следствиями предыдущих предложений (ведь текст

[1] Для краткости в дальнейшем вместо *математическое доказательство* будем говорить просто *доказательство*.

конечен!). Такими исходными предложениями могут служить *аксиомы* той математической теории, в рамках которой проводится доказательство. Исходными могут быть и предложения, имеющие место в силу *определения*. В качестве исходных предложений могут также выступать вспомогательные *допущения*. В самом деле, в доказательствах очень часто встречаются слова: «Допустим, что имеет место...». Заключительным в тексте является то предложение, которое требовалось доказать.

Отношение *логического следования*, как бы мы ни уточняли это понятие, определенным образом упорядочивает члены доказательства. Более того, этот порядок — древовидный (имеет вид дерева с корнем — наименьшим элементом), поскольку на каждом шаге рассуждения происходит переход от некоторых предложений A_1, ..., A_n к одному единственному предложению B, непосредственно следующему из них по какому-либо правилу логики.

Итак, приходим к следующему описанию понятия доказательства в виде дерева.

➤➤ Под ***доказательством в виде дерева*** будем понимать упорядоченную в виде дерева систему предложений, в которой каждое исходное предложение является аксиомой, или допущением, или верно в силу определения, а каждое из остальных предложений следует из непосредственно предшествующих ему предложений по какому-либо правилу вывода (логическому правилу).

Заметим, что на практике только для самых простых утверждений приводится доказательство в указанном (уточненном) выше смысле. Обычные математические доказательства, как правило, носят *относительный характер*, когда наряду с аксиомами используются также утверждения, доказанные ранее или про которые известно, что они доказуемы. Для каждого такого предложения теоретически можно вставить в текст его собственное доказательство, устранив тем самым относительный характер доказательства, т. е. сведя все к аксиомам.

Кроме того, на практике, в кратком доказательстве часто пропускаются некоторые посылки в умозаключениях. Они подразумеваются, но явно в рассуждении не оговариваются. Как правило, это известные, ранее доказанные утверждения. Эти неявно используемые посылки всегда при желании можно восстановить.

Рассмотрим в качестве примера обычное несложное доказательство следующего утверждения: *если натуральное число не делится на 6 и делится на 9, то оно нечетно.*

Запишем это утверждение, используя логическую символику:

$$6 \nmid n \,\&\, 9 \mid n \to 2 \nmid n.$$

В кратком виде традиционное доказательство представляет собой следующее рассуждение: «Согласно условию, n не делится на 6 и делится на 9. Поскольку n делится на 9, то n делится и на 3. Кроме того, n не делится на 6, а значит, n не делится на 2 или на 3. Следовательно, n не делится на 2».

Перечислим в виде последовательности предложения – члены этого краткого рассуждения, для обозримости используя при их записи известные логические символы:

$$6 \nmid n \,\&\, 9 \mid n;\ \ 9 \mid n;\ \ 3 \mid n;\ \ 6 \nmid n;\ \ 2 \nmid n \vee 3 \nmid n;\ \ 2 \nmid n.$$

При такой форме доказательства, т. е. в виде цепочки утверждений, не видно, какое утверждение из какого следует, не просматриваются логические связи между членами этой цепочки.

Теперь то же самое краткое рассуждение представим в виде дерева, выявив все логические связи между членами рассуждения.

Если предложение B непосредственно следует из предложений $A_1, \ldots, A_n$ по какому-либо правилу логики, будем привычным образом записывать это так:

$$\frac{A_1 \ldots A_n}{B}$$

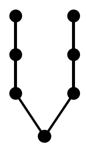
Если же на каком-то шаге рассуждения сделан сокращенный переход от предложений $A_1, \ldots, A_n$ к предложению B, который не является результатом применения какого-то логического правила, записывать это будем с помощью двойной черты следующим образом:

$$\begin{prooftree}\AxiomC{$A_1 \ldots A_n$}\doubleLine\UnaryInfC{B}\end{prooftree}$$

Каждый такой сокращенный переход обычно возникает в результате пропуска посылки, являющейся общеизвестным утверждением, а также логических умозаключений, связанных с этой посылкой. Двойная черта означает, что эту пропущенную посылку и логические переходы можно восстановить.

Краткое рассуждение, приведенное выше, если его представить в виде дерева, имеет следующий вид (справа изображен граф, отражающий структуру дерева как частично упорядоченного множества):

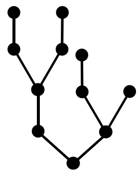
$$\begin{prooftree}\AxiomC{$6 \nmid n \,\&\, 9 \mid n$}\UnaryInfC{$6 \nmid n$}\doubleLine\UnaryInfC{$2 \nmid n \vee 3 \nmid n$}\AxiomC{$6 \nmid n \,\&\, 9 \mid n$}\UnaryInfC{$9 \mid n$}\doubleLine\UnaryInfC{$3 \mid n$}\BinaryInfC{$2 \nmid n$}\end{prooftree}$$



(1)

Восстановив в кратком варианте рассуждения пропущенные шаги, получим следующее дерево доказательства (справа от которого изображена его графическая структура):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{6\nmid n\,\&\,9\mid n}{6\nmid n}\qquad\dfrac{2\mid n\,\&\,3\mid n\to 6\mid n}{6\nmid n\to\neg(2\mid n\,\&\,3\mid n)}}{\neg(2\mid n\,\&\,3\mid n)}}{2\nmid n\vee 3\nmid n}\qquad\dfrac{\dfrac{6\nmid n\,\&\,9\mid n}{9\mid n}\qquad 9\mid n\to 3\mid n}{3\mid n}}{2\nmid n}$$



(2)

Исходными в дереве доказательства (2) служат следующие предложения:

$6\nmid n\ \&\ 9\mid n$ – условие, которое используется дважды;

$2\mid n\ \&\ 3\mid n\to 6\mid n$ и $9\mid n\to 3\mid n$ – утверждения, доказательства которых известны из арифметики.

Итак, мы упорядочили предложения, составляющие конкретное рассуждение, в виде дерева. В верхушках «ветвей» дерева, так называемых «листьях» дерева, располагаются исходные предложения. В данном случае это допущения, одно из которых представляют собой так называемое «условие», два других – ранее доказанные утверждения (таким образом, доказательство носит относительный характер). В каждом промежуточном узле на ветвях располагается предложение, которое получается с помощью некоторого логического правила из предложений, расположенных непосредственно над ним. Итак, непосредственно над каждым предложением, кроме исходных, записаны те предложения, из которых оно следует по одному из правил логики. Корнем этого дерева служит доказываемое утверждение.

Если столь же подробное рассуждение представить в виде последовательности (цепочки) предложений, то получим последовательность, состоящую из тех же членов:

$6\nmid n\ \&\ 9\mid n$; $6\nmid n\ \&\ 9\mid n\to 6\nmid n$; $6\nmid n$; $2\mid n\ \&\ 3\mid n\to 6\mid n$; $6\nmid n\to\neg(2\mid n\ \&\ 3\mid n)$; $\neg(2\mid n\ \&\ 3\mid n)$; $2\nmid n\vee 3\nmid n$; $6\nmid n\ \&\ 9\mid n\to 9\mid n$; $9\mid n$; $9\mid n\to 3\mid n$; $3\mid n$; $2\nmid n$.

Очевидно, это *линейное доказательство*, хотя и выглядит более компактным, но в отличие от дерева доказательства (2) лишено наглядности. Оно не отражает логические взаимосвязи между членами (логическую структуру доказательства). Если его снабдить комментарием, указывающим на логическую взаимосвязь между членами, то компактность исчезнет, а наглядности по-прежнему не будет:

1) $6\nmid n\ \&\ 9\mid n$ – допущение (условие);

2) $6 \nmid n$ – логически следует из предложения 1;
3) $2 \mid n \mathbin{\&} 3 \mid n \to 6 \mid n$ – известное утверждение из теории делимости;
4) $6 \nmid n \to \neg(2 \mid n \mathbin{\&} 3 \mid n)$ – логически следует из предложения 3;
5) $\neg(2 \mid n \mathbin{\&} 3 \mid n)$ – логически следует из предложений 2 и 4;
6) $2 \nmid n \vee 3 \nmid n$ – логически следует из предложения 5;
7) $9 \mid n$ – логически следует из предложения 1;
8) $9 \mid n \to 3 \mid n$ – известное утверждение из теории делимости;
9) $3 \mid n$ – логически следует из предложений 7 и 8;
10) $2 \nmid n$ – логически следует из предложений 6 и 9.

* * *

Теперь перейдем к обсуждению логических средств, используемых в доказательствах. Напомним, что пока не было дано описание логических правил, в соответствии с которыми строятся математические доказательства. Математики используют эти правила в своих рассуждениях явно или неявно, осознанно или не отдавая себе в этом отчета.

Возникают следующие *вопросы*:

– Какими логическими правилами пользуются математики в доказательствах?

– Как описать все допустимые для использования правила?

– Можно ли оптимальным образом организовать эти правила в некоторую систему?

– Какие правила при этом брать за основу?

Ответы на эти вопросы будут даны в этой главе.

Точное описание основных логических правил, используемых в математических доказательствах и обеспечивающих элементарные шаги в доказательствах, предложил Г. Генцен [2]. Эти правила принято называть *правилами вывода* или *правилами заключения*. Они будут рассмотрены в § 2.2.

Логические выводы в системах естественного вывода, предложенных Генценом, так называемые *деревья вывода*, представляют собой деревья формул, в которых все переходы происходят по правилам вывода (правилам заключения). Понятие *дерева вывода* (или вывода в виде дерева) и является *математическим уточнением* понятия доказательства, а сами выводы в виде дерева являются *математическими моделями* неформальных математических доказательств. Математическое определение дерева вывода будет сформулировано в § 2.4.

Вернемся к рассмотренному ранее примеру доказательства в виде дерева.

Если вместо предложений в узлах дерева (2) поместить соответствующие формулы, являющиеся формализацией этих предложений (и отражающие логическую структуру этих предложений), то получится следующее *дерево вывода* (точнее, дерево квазивывода, поскольку кроме основных правил используются и производные, см. § 2.8). Оно полностью отражает логическую структуру нашего содержательного доказательства:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \,\&\, B}{\neg A} \quad \dfrac{D \,\&\, C \supset A}{\neg A \supset \neg(D \,\&\, C)}}{\neg(D \,\&\, C)}}{\neg D \vee \neg C} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A \,\&\, B}{B} \quad B \supset C}{C}}{\neg D} \tag{3}$$

В исходных (верхних) узлах этого дерева вывода расположены следующие формулы, являющиеся формализацией соответствующих исходных предложений в дереве (2):

$$\neg A \,\&\, B,\ \ D \,\&\, C \supset A,\ \ B \supset C.$$

Если формализовать содержательное линейное доказательство, то получим следующую последовательность формул:

$\neg A \,\&\, B,\ \neg A,\ \ D \,\&\, C \supset A,\ \neg A \supset \neg(D \,\&\, C),\ \neg(D \,\&\, C),$
$\neg D \vee \neg C,\ B,\ \ B \supset C,\ \ C,\ \neg D.$

Получили традиционный формальный так называемый *линейный вывод* (точнее, квазивывод, в котором использованы производные правила). Этот линейный вывод в отличие от дерева вывода (3) лишен наглядности, поскольку не отражает логические взаимосвязи между его членами (логическую структуру вывода).

Для логического анализа конкретного доказательства была выявлена форма каждого предложения, а также форма каждого шага рассуждения. Это позволило выявить и форму всего доказательства в целом. Очевидно, что необходимость в столь подробном представлении доказательства с выявлением отдельных шагов возникает, если нужно проанализировать его логическую структуру.

Принципиально важным является следующее обстоятельство. Как бы мы не представили рассуждение – в виде последовательности предложений или в виде дерева предложений, является ли это рассуждение доказательством, зависит исключительно от его логической формы, а отнюдь не от содержания.

Метод, который был использован для анализа конкретного доказательства, называется методом формализации и является одним из основных методов математической логики. *Метод формализации* был использован Д. Гильбертом (1862—1943) как метод изучения математических доказательств и математических теорий с целью дальнейшего доказательства непротиворечивости этих теорий.

Благодаря Гильберту возник основной раздел математической логики — *теория доказательств*. Важнейшей задачей теории доказательств является математическое *уточнение понятия доказательства*. Метод формализации является основным методом, позволяющим разобраться в том, что такое доказательство, и выработать математическое уточнение этого понятия.

➤➤ В математической логике существуют *два основных типа математического уточнения понятия доказательства*. Уточнения первого типа восходят к Гильберту и представляют собой *линейные выводы* в логических аксиоматических системах, называемых системами гильбертовского типа (см. § 2.13). Уточнения второго типа принадлежат немецкому логику, ученику Гильберта, Г. Генцену (1909—1945) и представляют собой *выводы в виде дерева* в системах естественного (натурального) вывода (см. § 2.2).

Уточнение доказательства в виде дерева вывода в системах естественного вывода имеет *ряд преимуществ* по сравнению с линейным выводом в системах гильбертовского типа. Суть этих преимуществ заключается в том, что деревья естественного вывода дают наиболее точное описание реальных доказательств, представляя собой наиболее естественную и адекватную модель обычных математических доказательств. Поэтому за основу дальнейшего изложения теории доказательств нами выбраны именно системы естественного вывода.

§ 2.2. Правила заключения

! Всякую ***формальную логическую систему*** (***логическое исчисление***) задают четырьмя компонентами: формальным языком, множеством аксиом (т. е. специально выделенным множеством формул языка этой системы, возможно пустым), правилами заключения (правилами вывода) и определением формального вывода.

Если языком исчисления служит ЯЛВ, то такое исчисление называется *исчислением высказываний* или *пропозициональной логической системой.*

В этой главе рассматриваются логические системы, называемые *пропозициональными системами естественного вывода.*

Наряду с термином ***естественный вывод*** используют термин ***натуральный вывод*** как вариант перевода на русский язык термина *natural deduction* (англ.).

Поскольку в гл. 2 будут рассматриваться только пропозициональные логические системы, то вместо «пропозициональная система естественного вывода» будем говорить просто «система естественного вывода», а иногда и совсем коротко — «система».

Эти системы представляют собой некоторую модификацию систем, построенных Г. Генценом. Наиболее важными из них являются классическая (N_k) и интуиционистская (N_i) системы естественного вывода. Языком этих систем служит ЯЛВ. Множество *аксиом* обеих систем пусто.

Зададим *правила заключения* этих систем. Правила заключения делятся на *правила введения* и *правила удаления*. Для каждой пропозициональной связки имеется правило введения и правило удаления этой связки (иногда пара правил).

Правила заключения ***интуиционистской системы*** N_i приведены в следующей таблице ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, C — символы метаязыка). Справа от каждого правила в скобках указано его символическое обозначение (например, &в — обозначение правила введения конъюнкции, ⊃у — обозначение правила удаления импликации).

Правила заключения

Правила введения	Правила удаления
$\dfrac{\mathcal{A} \quad \mathcal{B}}{\mathcal{A} \& \mathcal{B}}$ (&в)	$\dfrac{\mathcal{A} \& \mathcal{B}}{\mathcal{A}} \quad \dfrac{\mathcal{A} \& \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$ (&у)
$\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}} \quad \dfrac{\mathcal{B}}{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$ (∨в)	$\dfrac{\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \quad \begin{matrix}[\mathcal{A}]\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\mathcal{B}]\\ C\end{matrix}}{C}$ (∨у)
$\dfrac{\begin{matrix}[\mathcal{A}]\\ \mathcal{B}\end{matrix}}{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}}$ (⊃в)	$\dfrac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \supset \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$ (⊃у)
$\dfrac{\begin{matrix}[\mathcal{A}]\\ \mathcal{B}\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\mathcal{A}]\\ \neg\mathcal{B}\end{matrix}}{\neg\mathcal{A}}$ (¬в)	$\dfrac{\mathcal{A} \quad \neg\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ (¬у)

➤➤ ***Классическая система*** естественного вывода N_k, кроме указанных в таблице правил, имеет еще одно — правило удаления двойного отрицания: $\dfrac{\neg\neg\mathcal{A}}{\mathcal{A}}$ (¬¬у).

Правила заключения систем N_i и N_k будем также называть N_i-*правилами* и N_k-*правилами* соответственно.

➤➤ Правила заключения &в, &у, $\vee$в, $\supset$у, $\neg$у, $\neg\neg$у называют ***прямыми*** (или *безусловными*) правилами, правила $\supset$в, $\vee$у, $\neg$в – ***косвенными*** (или *условными*).

В дальнейшем потребуется сформулировать ряд определений и теорем, аналогичных для систем N_i и N_k. Чтобы избежать дублирования (с точностью до индекса в обозначении системы), введем символ N_c для обозначения произвольной из систем N_i и N_k. Если символ N_c использован в определении или теореме, его следует заменить на символ N_i или символ N_k, чтобы получить формулировку для соответствующей системы.

Содержательный смысл правил заключения

Правила заключения являются формализацией тех простейших способов умозаключений, в соответствии с которыми мы проводим простейшие рассуждения, часто не осознавая этого. Именно эти правила отражают форму элементарных шагов в доказательствах.

Содержательный смысл прямых правил заключения достаточно прост и ясен. Так, правилу &в соответствует следующий шаг в рассуждении: если обосновано утверждение *A* и обосновано утверждение *B*, то считаем обоснованным утверждение «*A* и *B*».

Правило $\supset$у[1] формализует такой шаг доказательства: если обосновано утверждение *A* и обосновано условное утверждение «Если *A*, то *B*», то считаем обоснованным утверждение *B*.

Правило $\neg$у формализует так называемый закон Дунса Скота: из противоречия *A* и $\neg A$ следует «все, что угодно», т. е. любое предложение.

Остальные прямые правила имеют столь же простое содержательное толкование.

Косвенные правила являются формализацией тех рассуждений, которые используют промежуточные допущения, т. е. косвенных рассуждений.

Рассмотрим, например, условное правило введения импликации $\supset$в:

$$\frac{\begin{matrix}[\mathcal{A}]\\ \mathcal{B}\end{matrix}}{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}}$$

Это правило является формализацией рассуждения, широко применяемого в неформальных доказательствах. При доказатель-

[1] Латинская версия названия этого правила – *modus ponens.*

стве теорем, сформулированных в импликативной форме «Если A, то B», обычно рассуждение ведется следующим образом.

Утверждение A берется в качестве допущения, из которого выводится B. После этого делается заключение, что обосновано утверждение «Если A, то B» (что соответствует формуле $A \supset B$). При этом доказанное утверждение «Если A, то B» не зависит от допущения A. Отметим, что от промежуточного допущения A не требуется, чтобы оно было доказанным, и обычно оно таковым не является.

В правиле $\supset$в, формализующем приведенное выше рассуждение, буква, заключенная в квадратные скобки, соответствует допущению A, с помощью которого обосновывается B и от которого уже не зависит $A \supset B$.

Рассмотрим известную теорему из школьного курса геометрии: «Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны». Доказательство этой теоремы обычно проводится следующим образом. Пусть $ABCD$ — произвольный четырехугольник. Делаем *допущение*, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом. Затем за несколько шагов мы доказываем, что его диагонали взаимно перпендикулярны. Таким образом, мы доказываем, что $AC \perp BD$ при допущении, что $ABCD$ — ромб. В итоге мы делаем следующий вывод, считая его вполне обоснованным: «Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны». При этом мы «освобождаемся» от допущения, что $ABCD$ — ромб. Это допущение было *промежуточным*, временным. Оно было необходимо только на стадии выведения из него утверждения $AC \perp BD$.

Большой интерес представляют и другие условные правила — правило удаления дизъюнкции и правило введения отрицания.

Рассмотрим правило $\vee$у. Оно формализует так называемое доказательство *разбором случаев*: если обосновано утверждение «A или B» ($A \vee B$), то для обоснования C рассматриваем два случая. Сначала, в предположении, что имеет место A (первый случай), из допущения A выводим C. Затем, в предположении, что имеет место B (второй случай), из допущения B также выводим C. После этого считаем обоснованным утверждение C, т. е. что C имеет место независимо от обоих допущений A и B.

Наконец, рассмотрим правило $\neg$в. Оно формализует доказательство *приведением к нелепости* (лат. *reductio ad absurdum*): если из допущения A мы выводим противоречащие друг другу утверждения B и *не* B ($\neg B$), то считаем, что наше допущение A неверно, а верно, обосновано *не* A ($\neg A$).

§2.3. Деревья формул

Для дальнейшего изложения нам потребуется понятие дерева формул. *Дерево формул* — это графический объект, который строится из формул с использованием горизонтальной черты. Уточним понятие дерева формул с помощью индуктивного определения.

Определение ***дерева формул высоты*** h (с высотой h):
1. Всякая формула есть дерево формул, высота которого равна нулю (так называемое *элементарное* дерево формул).
2. Если $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ — деревья формул с высотами $h_1, \ldots, h_n$ соответственно, а F — некоторая формула, то $\dfrac{\mathcal{D}_1 \ldots \mathcal{D}_n}{F}$ — дерево формул высоты h, где $h = \max(h_1, \ldots, h_n) + 1$ (где n — произвольное натуральное число, отличное от нуля).
3. Графический объект является деревом формул тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью п. 1 и 2.

Листьями дерева формул будем называть формулы, имеющие вхождения в это дерево формул, непосредственно над которыми отсутствуют вхождения каких-либо формул. *Корнем* дерева формул будем называть формулу, имеющую самое нижнее вхождение в это дерево.

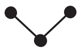
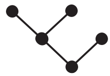
Примеры.
1. q, p, $p \supset q$ — элементарные деревья формул;

2. $\dfrac{p \quad q \supset p}{q}$ — дерево формул высоты 1.

3. $\dfrac{\dfrac{p \quad p \supset q}{q} \qquad r}{q \,\&\, r}$ — дерево формул высоты 2.

4. Графический объект $\dfrac{p \,\&\, q}{p \quad q}$ не является деревом формул, поскольку под чертой две формулы, а не одна. ❍

Замечание. Использование термина «дерево» здесь может быть объяснено тем, что дерево формул, как графический объект, фактически задает частичный порядок на множестве *вхождений* формул в это дерево. Так, деревья формул из примеров 2 и 3 задают частично упорядоченные множества, которые, заменив формулы точками, можно изобразить в виде следующих графов:

Каждое из этих частично упорядоченных множеств является *деревом*[1], поскольку имеет наименьший элемент (корень) и каждый элемент, кроме наименьшего, имеет единственный непосредственно предшествующий элемент. ❍

Для того чтобы изложение не было слишком формальным, будем использовать без точных определений, следующие интуитивно ясные понятия: *вхождение* формулы в дерево формул (заметим, что формула может иметь несколько вхождений в данное дерево); вхождение формулы A в дерево формул, находящееся *непосредственно над* (выше) или *под* (ниже) вхождения формулы B.

Деревья формул будем обозначать символами $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_i$ ($i = 1, 2$ ...).

Среди деревьев формул в дальнейшем нас будут интересовать только так называемые *деревья вывода*.

Уточнение некоторых понятий

Уточним используемое нами понятие *правила заключения* и связанные с ним понятия.

Схемой формул будем называть всякое слово, построенное из букв $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... с помощью пропозициональных связок и скобок по тем же правилам, по которым формулы строятся из пропозициональных переменных[2].

Если для каждой из букв $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... все вхождения этой буквы в схему формул $\mathcal{F}$ заменить вхождениями некоторой формулы ЯЛВ, то получим формулу, называемую *формулой по схеме* $\mathcal{F}$.

Так, например, формула $\neg(p_1 \,\&\, p_2) \supset \neg p_3$ является формулой по схеме $\neg\mathcal{A} \supset \neg\mathcal{B}$.

Если для каждой из букв $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ... все вхождения этой буквы в схемы $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n$ заменить вхождениями некоторой формулы ЯЛВ, то получим набор формул $F_1, ..., F_n$, называемый *набором формул, построенным по набору схем формул* $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n$.

---

[1] *Деревом* называют частично упорядоченное множество с наименьшим элементом (корнем), каждый элемент которого, за исключением корня, имеет единственный непосредственно предшествующий элемент.

[2] Можно дать индуктивное определение схемы формул, аналогичное определению формулы ЯЛВ.

Прямой схемой заключений будем называть графический объект вида $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}$ — схемы формул, причем $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ называют *посылками*, а $\mathcal{F}$ — *заключением.*

Дерево формул $\dfrac{F_1 \ldots F_n}{F}$ будем называть *примером заключения* по схеме заключений $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$ (и говорить, что дерево $\dfrac{F_1 \ldots F_n}{F}$ *построено по схеме заключений* $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$), если набор формул $F_1, \ldots, F_n$, F является набором формул, построенным по набору схем формул $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}$, а сам набор формул $F_1, \ldots, F_n, F$ будем называть *соответствующим схеме заключений* $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$.

Так, дерево формул $\dfrac{p_1 \quad p_1 \supset p_2}{p_2}$ является примером заключения по схеме заключений $\dfrac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \supset \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$ (построено по схеме $\dfrac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \supset \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$).

Если в схеме заключений, по крайней мере над одной из посылок, написана какая-либо буква ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$) в квадратных скобках, то такую схему будем называть *косвенной* (*условной*) схемой заключений.

Произвольная условная схема с двумя посылками имеет вид

$$\dfrac{\mathcal{E} \quad \overset{[\mathcal{H}]}{\mathcal{G}}}{\mathcal{F}}$$

Первую посылку в этой схеме будем называть безусловной, а вторую — условной.

Схемы $\vee$у, $\neg$в и $\supset$в являются примерами условных схем заключений.

Примером заключения по условной схеме заключений будем называть всякий пример заключения по соответствующей прямой схеме заключений, которая получается из данной условной схемы отбрасыванием букв, заключенных в скобки (вместе со скобками).

Так, дерево формул $\dfrac{q}{p \supset q}$ является примером заключения по условной схеме $\dfrac{\overset{[\mathcal{A}]}{\mathcal{B}}}{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}}$.

Для той или иной логической системы среди схем заключений выделяют схемы специального вида, которые называют *правилами заключения* этой логической системы. Их рассматривают как *исходные* (*основные*) среди схем, в некотором смысле признаваемых *правильными*.

Таким образом, прямые N_c-правила заключения представляют собой *схемы заключений* следующего вида: $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$ ($n = 1$ или $n = 2$ в зависимости от числа посылок — одной или двух), где $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}$ — некоторые специального вида схемы формул. Всякое прямое правило заключения является схемой заключений, задающей бесконечное множество деревьев формул (схемой, по которой строятся конкретные деревья формул) единичной высоты. Эти деревья формул получают заменой букв $\mathcal{A}, \mathcal{B}, C$ в схеме (правиле заключений) на произвольные формулы.

Как уже отмечалось, правила заключения являются формализацией элементарных шагов математических доказательств. В то же время прямые правила заключения представляют собой правила перехода от одних формул к другим, а косвенные — правила перехода от деревьев формул к формулам. Правила заключения играют ключевую роль в определении важнейшего понятия *дерева вывода*, которое будет введено в следующем параграфе.

§2.4. Деревья вывода

Логические выводы в системах естественного вывода, так называемые *деревья вывода*, представляют собой деревья формул, в которых все переходы происходят по правилам заключения. Понятие дерева вывода является основным понятием теории естественного вывода.

Процесс построения дерева вывода. Неформальное описание

Прежде чем приступить к формулировке определения дерева вывода, рассмотрим пример, чтобы сначала усвоить это понятие на интуитивном уровне. На этом примере продемонстрируем процесс построения дерева вывода заданной формулы, предварительно проведя неформальные рассуждения.

Рассмотрим формулу $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$.

Посмотрим на A и B как на обозначения каких-то неформальных математических предложений. Представим, что мы хотим доказать утверждение вида $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$, где символы $\supset$, $\neg$ понимаются опять же неформально, как слова «если..., то» и «не».

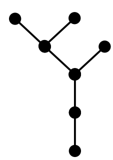
Для доказательства такого утверждения можно рассуждать так. Нам требуется доказать следующее: если $A \supset B$, то, если к тому же $\neg B$, то $\neg A$. Допустим, что верно $A \supset B$ и $\neg B$, и докажем, что верно утверждение $\neg A$. Доказывать $\neg A$ будем приведением к нелепости. Допустим, что верно A. Тогда, используя допущения A и $A \supset B$, получаем B. Кроме того, имеем допущение $\neg B$. Таким образом, получаем противоречие: B и $\neg B$. Следовательно, наше допущение A неверно и, значит, верно $\neg A$.

Можно по существу то же самое рассуждение изложить несколько иначе. Для обоснования предложения $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ достаточно, взяв $A \supset B$ в качестве допущения, вывести $\neg B \supset \neg A$. В свою очередь для обоснования $\neg B \supset \neg A$ достаточно добавить $\neg B$ в качестве еще одного (второго) допущения и обосновать $\neg A$. Итак, задача свелась к обоснованию $\neg A$, исходя из допущений $A \supset B$ и $\neg B$. Далее, для обоснования $\neg A$ достаточно, в силу содержательного правила приведения к нелепости, взяв A в качестве еще одного (третьего) допущения, получить какое-то противоречие. Итак, имеем три допущения $A \supset B$, $\neg B$, A. Из A и $A \supset B$ выводим B, кроме того, имеем $\neg B$. Таким образом, получили противоречие: B и $\neg B$. Следовательно, наше допущение A неверно, и, значит, $\neg A$ доказано.

Теперь формализуем это неформальное эвристическое рассуждение в виде дерева вывода, сопровождая построение этого дерева комментариями.

П р и м е р. Опишем процесс построения дерева вывода формулы $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^3 \quad [A \supset B]^1}{B}\,{\scriptstyle\supset\text{у}} \qquad [\neg B]^2}{\neg A}\,{\scriptstyle\neg\,\text{в}\ (3)}}{\neg B \supset \neg A}\,{\scriptstyle\supset\text{в}\ (2)}}{(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)}\,{\scriptstyle\supset\text{в}\ (1)}$$



Справа от данного дерева вывода построен граф, изображающий частично упорядоченное множество, соответствующее этому дереву вывода.

В процессе построения этого дерева вывода рассуждать можно следующим образом. Корнем дерева должна быть формула $(A \supset B) \supset$ $\supset (\neg B \supset \neg A)$, а значит, требуется построить дерево вывода, корнем которого служит эта импликация. Следовательно, в силу правила $\supset$в достаточно, взяв формулу $A \supset B$ в качестве допущения (и присвоив ему номер 1), построить дерево вывода с корнем $\neg B \supset \neg A$. Поэтому проводим над формулой $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ черту, над которой записываем формулу $\neg B \supset \neg A$. Справа от черты указываем обозначение правила $\supset$в и номер взятого допущения. В стороне от дерева справа (или внизу) для удобства записываем в квадратных скобках первое допущение с номером 1:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \neg B \supset \neg A\end{matrix}}{(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)}{\scriptstyle \supset\text{в}\,(1)} \qquad [A \supset B]^1$$

Поскольку формула $\neg B \supset \neg A$ также является импликацией, ее посылку $\neg B$ берем в качестве второго допущения (с номером 2), записываем справа в квадратных скобках и пытаемся построить дерево вывода формулы $\neg A$ из имеющихся допущений. С этой целью над формулой $\neg B \supset \neg A$ проводим черту, над которой пишем формулу $\neg A$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \neg A\end{matrix}}{\neg B \supset \neg A}{\scriptstyle \supset\text{в}\,(2)}}{(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)}{\scriptstyle \supset\text{в}\,(1)} \qquad \begin{matrix}[\neg B]^2\\ [A \supset B]^1\end{matrix}$$

Теперь попытаемся вывести формулу $\neg A$ из двух допущений: $A \supset B$, $\neg B$. Поскольку формула $\neg A$ является отрицанием, в силу правила $\neg$в достаточно, взяв A в качестве еще одного (третьего) допущения, вывести какое-нибудь противоречие (сразу может быть неясно, какое именно):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots \qquad \vdots}{\neg A}{\scriptstyle \neg\text{в}\,(3)}}{\neg B \supset \neg A}{\scriptstyle \supset\text{в}\,(2)}}{(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)}{\scriptstyle \supset\text{в}\,(1)} \qquad \begin{matrix}[A]^3\\ [\neg B]^2\\ [A \supset B]^1\end{matrix}$$

Итак, имеем три допущения: $\neg B$, $A \supset B$, A. Из двух допущений A и $A \supset B$ по правилу $\supset$у выводим формулу B. В то же время имеем допущение $\neg B$. Таким образом, получаем противоречие: B и $\neg B$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{B} \qquad [\neg B]^2}{\neg A}{\scriptstyle \neg\text{в}\,(3)}}{\neg B \supset \neg A}{\scriptstyle \supset\text{в}\,(2)}}{(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)}{\scriptstyle \supset\text{в}\,(1)} \qquad \begin{matrix}[A]^3\\ [\neg B]^2\\ [A \supset B]^1\end{matrix}$$

Формула $\neg B$ является одним из допущений, в связи с чем ее заключаем в квадратные скобки и помечаем ее номером. Теперь остается только отразить, как получена формула B из допущений A и $A \supset B$, что и завершит построение дерева вывода:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{[A]^3 \quad [A \supset B]^1}{B}\ {\scriptstyle \supset \text{у}} \qquad [\neg B]^2}{\neg A}\ {\scriptstyle \neg \text{в}\ (3)}}{\neg B \supset \neg A}\ {\scriptstyle \supset \text{в}\ (2)}}{(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)}\ {\scriptstyle \supset \text{в}\ (1)} \qquad\qquad \begin{array}{c} [A]^3 \\ [\neg B]^2 \\ [A \supset B]^1 \end{array}$$

Листья A и $A \supset B$ заключены в квадратные скобки в знак того, что они являются допущениями при использовании соответствующих условных правил. ❍

➤ Обычно для облегчения понимания при построении дерева вывода справа от каждой черты принято указывать обозначение используемого правила. Кроме того, при каждом применении какого-либо косвенного правила, все вхождения соответствующего допущения-листа заключают в квадратные скобки и снабжают одним и тем же номером. Этот же номер ставится справа от черты соответствующего заключения по косвенному правилу.

Теперь приступим к уточнению понятия дерева вывода. Сначала дадим индуктивное определение.

Определение ***дерева*** N_c***-вывода с корнем*** F:

1. Всякая формула F есть дерево N_c-вывода с корнем F (*элементарное* дерево).

2. Если $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ $(n = 1, 2, 3)$[1] – деревья N_c-вывода с корнями $F_1, \ldots, F_n$ соответственно, а $\dfrac{F_1 \ \ldots \ F_n}{F}$ – пример заключения по какому-либо N_c-правилу, то $\dfrac{\mathcal{D}_1 \ldots \mathcal{D}_n}{F}$ есть дерево N_c-вывода с корнем F.

3. Дерево формул является деревом N_c-вывода с корнем F тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью п. 1 и 2.

Дерево N_c-вывода с корнем F будем называть также N_c-***выводом формулы*** F, а если нас не будет интересовать его корень, – ***деревом*** N_c-***вывода*** или просто N_c-***выводом***.

[1] Каждое N_c-правило имеет одну $(n = 1)$, две $(n = 2)$ или три $(n = 3)$ посылки.

Будем говорить, что дерево N_c-вывода $\frac{\mathcal{D}_1 \dots \mathcal{D}_n}{F}$ с корнем F *построено по правилу R* из деревьев N_c-вывода $\mathcal{D}_1$, ..., $\mathcal{D}_n$ с корнями F_1, ..., F_n соответственно (n = 1, 2, 3), если $\frac{F_1 \ \dots \ F_n}{F}$ – пример заключения по правилу R.

Таким образом, можно считать, что каждое неэлементарное дерево строится *по шагам*, считая одним шагом построение нового дерева $\mathcal{D}$ из некоторых построенных ранее деревьев $\mathcal{D}_1$, ..., $\mathcal{D}_n$ с помощью одного из N_c-правил согласно п. 2 данного определения.

Однако только что данное довольно простое определение дерева N_c-вывода с корнем F недостаточно полно отражает все характеристики дерева N_c-вывода.

В рассмотренном выше примере (см. с. 57) формулы-листья дерева вывода (точнее, вхождения таких формул) заключены в квадратные скобки. Такие листья называют *увядшими*, в отличие от так называемых *зеленых* листьев. Данное выше определение дерева вывода не уточняет, что такое зеленые (и увядшие) листья[1)], не отражает, от каких формул зависит корень.

Кроме того, это определение понятия дерева вывода с корнем F не позволяет ввести отношение N_c-выводимости, т. е. определить, что значит *формула F выводима в системе* N_c *из множества формул* Г. Поэтому следующим этапом является введение новых важных понятий.

Определение N_c-Δ-F-вывода

Пусть F – произвольная формула ЯЛВ, Δ (греч. буква «дельта») – произвольное конечное множество формул ЯЛВ, может быть пустое.

Дадим индуктивное определение ***дерева*** N_c***-вывода с корнем*** F ***и множеством зеленых листьев*** Δ или кратко N_c-Δ-F-***вывода***.

! Определение **N_c-Δ-*F-вывода***[2)]:

1. *Базис индукции.* Любая формула F есть N_c-Δ-F-вывод, где $\Delta = \{F\}$.
2. *Шаг индукции.*

[1)] Используемая нами образная терминология – *зеленые листья*, *увядшие листья* дерева вывода – предложена А. В. Гладким [3]. Часто вместо термина *зеленый лист* употребляют термин *существенное* (или *открытое*) *допущение*, а вместо термина *увядший лист* – *промежуточное* (или *закрытое*) *допущение*.

[2)] Определения N_i-Δ-F-вывода и N_k-Δ-F-вывода получим, заменив в этом определении символ N_c на символ N_i или N_k соответственно.

2.1.1. Если $\mathcal{D}_A^{\Delta_1}$ есть N_c-Δ_1-A-вывод, а $\mathcal{D}_B^{\Delta_2}$ есть N_c-Δ_2-B-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}_A^{\Delta_1} \quad \mathcal{D}_B^{\Delta_2}}{A \,\&\, B}$ есть N_c-$\Delta_1 \cup \Delta_2$-$A\&B$-вывод.

2.1.2. Если $\mathcal{D}_{A\&B}^{\Delta_1}$ есть N_c-Δ_1-$A \,\&\, B$-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}_{A\&B}^{\Delta_1}}{A}$ есть N_c-Δ_1-A-вывод и $\dfrac{\mathcal{D}_{A\&B}^{\Delta_1}}{B}$ есть N_c-Δ_1-B-вывод.

2.1.3. Если $\mathcal{D}_A^{\Delta_1}$ есть N_c-Δ_1-A-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}_A^{\Delta_1}}{A \vee B}$ есть N_c-Δ_1-$A \vee B$-вывод, и если $\mathcal{D}_B^{\Delta_1}$ – N_c-Δ_1-B-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}_B^{\Delta_1}}{A \vee B}$ есть N_c-Δ_1-$A \vee B$-вывод.

2.1.4. Если $\mathcal{D}_A^{\Delta_1}$ есть N_c-Δ_1-A-вывод, а $\mathcal{D}_{A \supset B}^{\Delta_2}$ есть N_c-Δ_2-$A \supset B$-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}_A^{\Delta_1} \quad \mathcal{D}_{A \supset B}^{\Delta_2}}{B}$ есть N_c-$\Delta_1 \cup \Delta_2$-B-вывод.

2.1.5. Если $\mathcal{D}_A^{\Delta_1}$ есть N_c-Δ_1-A-вывод, а $\mathcal{D}_{\neg A}^{\Delta_2}$ есть N_c-Δ_2-$\neg A$-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}_A^{\Delta_1} \quad \mathcal{D}_{\neg A}^{\Delta_2}}{B}$ есть N_c-$\Delta_1 \cup \Delta_2$-B-вывод.

2.1.6 (для N_k). Если $\mathcal{D}_{\neg\neg A}^{\Delta_1}$ есть N_k-Δ_1-$\neg\neg A$-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}_{\neg\neg A}^{\Delta_1}}{A}$ есть N_k-Δ_1-A-вывод.

2.2.1. Если $\mathcal{D}_B^{\Delta_1}$ есть N_c-Δ_1-B-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}_B^{\Delta_1}}{A \supset B}$ есть N_c-Δ-$A \supset B$-вывод, где $\Delta = \Delta_1 \backslash \{A\}$.

2.2.2. Если $\mathcal{D}_{A \vee B}^{\Delta_1}$ есть N_c-Δ_1-$A \vee B$-вывод, $\mathcal{D}_C^{\Delta_2}$ есть N_c-Δ_2-C-вывод и $\mathcal{D}_C^{\Delta_3}$ есть N_c-Δ_3-C-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}_{A \vee B}^{\Delta_1} \quad \mathcal{D}_C^{\Delta_2} \quad \mathcal{D}_C^{\Delta_3}}{C}$ есть N_c-Δ-C-вывод, где $\Delta = \Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\}) \cup (\Delta_3 \setminus \{B\})$.

2.2.3. Если $\mathcal{D}_B^{\Delta_1}$ есть N_c-Δ_1-B-вывод, а $\mathcal{D}_{\neg B}^{\Delta_2}$ есть N_c-Δ_2-$\neg B$-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}_B^{\Delta_1} \quad \mathcal{D}_{\neg B}^{\Delta_2}}{\neg A}$ есть N_c-Δ-$\neg A$-вывод, где $\Delta = (\Delta_1 \setminus \{A\}) \cup (\Delta_2 \setminus \{A\})$.

3. Дерево формул является N_c-Δ-F-выводом тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью п. 1 и 2.

В шаге индукции этого определения каждому правилу заключения соответствует свой пункт. Точнее, п. 2 содержит восемь подпунктов для N_i (и 9 для N_k), каждый из которых соответствует некоторому N_c-правилу, причем первые пять пунктов для N_i (шесть для N_k) соответствуют прямым правилам, а последние три пункта – косвенным правилам.

Множества зеленых листьев деревьев N_c-вывода, построенных согласно п. 2.1.1–2.1.6, которые относятся к прямым правилам, определяются аналогично, в связи с чем эти пункты можно объединить в один пункт, получая «свернутое» определение N_c-Δ-F-вывода. Аналогичное объединение п. 2.2.1–2.2.3, относящихся к косвенным правилам, существенно усложняет восприятие этого определения, и поэтому мы этого делать не будем.

! «Свернутое» определение **$\mathbf{N_c}$-$\mathbf{\Delta}$-$\boldsymbol{F}$-вывода**:

1. *Базис индукции*. Любая формула F есть N_c-Δ-F-вывод, где $\Delta = \{F\}$.
2. *Шаг индукции*.

2.1. Если для каждого i ($i = 1, ..., n$) $\mathcal{D}^{\Delta_i}_{F_i}$ есть N_c-Δ_i-F_i-вывод, а дерево формул $\dfrac{F_1 \ ... \ F_n}{F}$ построено по какому-либо прямому N_c-правилу, то $\dfrac{\mathcal{D}^{\Delta_1}_{F_1} ... \mathcal{D}^{\Delta_n}_{F_n}}{F}$ есть N_c-Δ-F-вывод, где $\Delta = \Delta_1 \cup ...$ $... \cup \Delta_n$ ($n = 1, 2$)[1].

2.2.1. Если $\mathcal{D}^{\Delta_1}_{B}$ есть N_c-Δ_1-B-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}^{\Delta_1}_{B}}{A \supset B}$ есть N_c-Δ-$A \supset B$-вывод, где $\Delta = \Delta_1 \setminus \{A\}$.

2.2.2. Если $\mathcal{D}^{\Delta_1}_{A \vee B}$ есть N_c-Δ_1-$A \vee B$-вывод, $\mathcal{D}^{\Delta_2}_{C}$ – N_c-Δ_2-C-вывод и $\mathcal{D}^{\Delta_3}_{C}$ – N_c-Δ_3-C-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}^{\Delta_1}_{A \vee B} \quad \mathcal{D}^{\Delta_2}_{C} \quad \mathcal{D}^{\Delta_3}_{C}}{C}$ есть N_c-Δ-C-вывод, где $\Delta = \Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\}) \cup (\Delta_3 \setminus \{B\})$.

2.2.3. Если $\mathcal{D}^{\Delta_1}_{B}$ есть N_c-Δ_1-B-вывод, а $\mathcal{D}^{\Delta_2}_{\neg B}$ есть N_c-Δ_2-$\neg B$-вывод, то $\dfrac{\mathcal{D}^{\Delta_1}_{B} \quad \mathcal{D}^{\Delta_2}_{\neg B}}{\neg A}$ есть N_c-Δ-$\neg A$-вывод, где $\Delta = (\Delta_1 \setminus \{A\}) \cup (\Delta_2 \setminus \{A\})$.

3. Дерево формул является N_c-Δ-F-выводом тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью п. 1 и 2.

---

[1] Каждое прямое N_c-правило имеет одну ($n = 1$) или две ($n = 2$) посылки.

Всякий N_c-Δ-F-вывод будем также иногда называть *деревом* N_c-***вы-вода*** или просто N_c-***выводом*** (т. е. N_i-выводом или N_k-выводом).

➤ **Замечание 1**. Как уже говорилось, при построении дерева N_c-вывода удобно использовать следующие дополнительные символы и метки. Во-первых, на каждом шаге построения дерева N_c-вывода справа от каждой черты будем указывать символическое обозначение применяемого на этом шаге правила. Во-вторых, если в результате применения косвенного правила (п. 2.2.1—2.2.3 определения N_c-Δ-F-вывода) некоторая формула удаляется из множества зеленых листьев (в этом случае будем говорить, что *лист увядает*[1]), то все соответствующие исходные вхождения этой формулы будем заключать в квадратные скобки. Кроме того, этим вхождениям будем присваивать один и тот же номер и этот же номер записывать справа от черты соответствующего заключения по данному косвенному правилу. Такие метки указывают, на каком шаге построения дерева и какой именно лист *увял*. ❍

Замечание 2. Отметим, что понятие множества *увядших листьев* (промежуточных допущений) дерева N_c-вывода можно определить индуктивно. При этом для элементарного дерева вывода F множество увядших листьев пусто. Шаг построения дерева N_c-вывода с помощью прямого правила заключения не меняет общее множество увядших листьев. Шаг построения дерева N_c-вывода с помощью косвенного правила заключения к множеству увядших листьев добавляет в точности те формулы, которые удаляет при этом из множества зеленых листьев Δ. Оставляем формулировку индуктивного определения множества увядших листьев читателю в качестве упражнения. ❍

Пример, иллюстрирующий определение N_c-Δ-F-вывода

Выше было показано, каким образом удобно строить дерево вывода, начиная с корня. Теперь проанализируем конкретный N_c-$\varnothing$-F-вывод в соответствии с индуктивным определением, т. е. от листьев к корню. Возьмем в качестве примера формулу $F \rightleftharpoons A \supset (B \supset A \,\&\, B)$. Этот анализ проведем по шагам. Построим последовательность $\mathcal{D}_i$ деревьев N_c-вывода, отражающую шаги «получения» из элементарных деревьев (листьев) искомого дерева N_c-$\varnothing$-F-вывода. Будем указывать для каждого ее члена $\mathcal{D}_i$ соответствующее ему множество зеленых

[1] Следует обратить внимание на то, что *лист* — это не исходное *вхождение* формулы в дерево, а сама *формула*, которая имеет одно или несколько исходных вхождений.

листьев Δ_i, множество увядших листьев Θ_i, корень F_i и высоту h_i. Каждый раз, применяя какое-либо правило заключения, будем справа от черты записывать символическое обозначение этого правила.

Первый шаг: $\mathcal{D}_1 \rightleftharpoons A$; $\Delta_1 = \{A\}$; $\Theta_1 = \varnothing$; $h_1 = 0$; $F_1 = A$.

Второй шаг: $\mathcal{D}_2 \rightleftharpoons B$; $\Delta_2 = \{B\}$; $\Theta_2 = \varnothing$; $h_2 = 0$; $F_2 = B$.

Заметим, что $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ — элементарные деревья.

Третий шаг: $\mathcal{D}_3 \rightleftharpoons \dfrac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{A \,\&\, B}\,\&\text{в}$; $\Delta_3 = \{A, B\}$; $\Theta_3 = \varnothing$; $h_3 = 1$; $F_3 = A \,\&\, B$.

Здесь мы первый раз применили правило заключения, а именно, правило введения конъюнкции, и справа от черты указали это символом &в.

Четвертый шаг: $\mathcal{D}_4 \rightleftharpoons \dfrac{\mathcal{D}_3}{B \supset A \,\&\, B}\supset\text{в}$; $\Delta_4 = \Delta_3 \setminus \{B\} = \{A\}$; $\Theta_4 = \Theta_3 \cup$ $\cup \{B\} = \{B\}$; $h_4 = 2$; $F_4 = B \supset A \,\&\, B$.

На этом шаге получения дерева мы применили косвенное правило $\supset$в, при этом формула B перестала быть зеленым листом, каковым она была в $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_3$ (лист увял). На этом шаге мы единственное исходное вхождение формулы B в дерево $\mathcal{D}_4$ заключаем в квадратные скобки, снабжая его номером 1, и ставим этот же номер в круглых скобках справа от черты соответствующего заключения по правилу $\supset$в. Таким образом, $\mathcal{D}_4$ имеет вид

$$\dfrac{\dfrac{A \quad [B]^1}{A \,\&\, B}\,\&\text{в}}{B \supset A \,\&\, B}\supset\text{в}\ (1)$$

Пятый шаг: $\mathcal{D}_5 \rightleftharpoons \dfrac{\mathcal{D}_4}{A \supset (B \supset A \,\&\, B)}\supset\text{в}$; $\Delta_5 = \Delta_4 \setminus \{A\} = \varnothing$; $\Theta_5 = \Theta_4 \cup$ $\cup \{A\} = \{A, B\}$; $h_5 = 3$; $F_5 = A \supset (B \supset A \,\&\, B)$.

На этом шаге лист A стал увядшим. Единственное исходное вхождение формулы A в дерево $\mathcal{D}_5$ мы заключаем в квадратные скобки, снабжая его номером 2, и ставим этот же номер справа от черты соответствующего заключения по правилу $\supset$в. В результате получаем искомое дерево вывода:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [B]^1}{A \,\&\, B}\,\&\text{в}}{B \supset A \,\&\, B}\supset\text{в}\ (1)}{A \supset (B \supset A \,\&\, B)}\supset\text{в}\ (2)$$

Приведенный пример служит иллюстрацией определения N_c-Δ-F-вывода. В соответствии с этим определением дерево вывода проанализировано «сверху вниз». На практике, если требуется построить дерево N_c-Δ-F-вывода, обычно удобно действовать иначе.

Рекомендации, полезные при построении деревьев вывода

➤ Построение дерева N_c-вывода с заданным корнем и заданным множеством зеленых листьев удобно начинать с корня, сводя задачу построения искомого дерева к задаче построения более простых деревьев N_c-вывода меньшей высоты. При этом могут быть полезными следующие *рекомендации*:

1. Для построения дерева N_c-вывода с корнем $A \,\&\, B$ ($\mathcal{D}^{\Delta}_{A\&B}$) достаточно построить два дерева N_c-вывода: первое с корнем A ($\mathcal{D}^{\Delta_1}_{A}$), а второе с корнем B ($\mathcal{D}^{\Delta_2}_{B}$), где $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta$. Тогда искомое дерево вывода будет иметь вид $\dfrac{\mathcal{D}^{\Delta_1}_{A} \quad \mathcal{D}^{\Delta_2}_{B}}{A \,\&\, B}$.

2. Для построения дерева N_c-вывода с корнем $A \vee B$ ($\mathcal{D}^{\Delta}_{A\vee B}$) достаточно (но не всегда возможно!) построить дерево N_c-вывода с корнем A ($\mathcal{D}^{\Delta}_{A}$) или дерево N_c-вывода с корнем B ($\mathcal{D}^{\Delta}_{B}$).

3. Для построения дерева N_c-вывода с корнем $A \supset B$ ($\mathcal{D}^{\Delta}_{A\supset B}$) достаточно, добавив к множеству зеленых листьев Δ формулу A, построить N_c-вывод с корнем B ($\mathcal{D}^{\Delta,A}_{B}$).

4. Для построения дерева N_c-вывода с корнем $\neg A$ ($\mathcal{D}^{\Delta}_{\neg A}$) достаточно, считая формулу A зеленым листом, построить два дерева N_c-вывода – первое с корнем F ($\mathcal{D}^{\Delta_1, A}_{F}$), а второе с корнем $\neg F$ ($\mathcal{D}^{\Delta_2, A}_{\neg F}$) для некоторой формулы F, где $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta$ (говоря неформально, получить противоречие).

Рекомендации 1–4 подсказывают движение от корня к листьям – «снизу-вверх». Его шаги определяются логической структурой корня и обосновываются правилами введения. Это движение «снизу-вверх» удобно сочетать с движением «сверху-вниз», от листьев к корню. Первые шаги движения «сверху-вниз» определяются логической структурой листьев и обосновываются правилами удаления. Здесь могут быть полезными следующие рекомендации:

5. Если формула $A \,\&\, B$ является зеленым листом искомого дерева (или выведена из зеленых листьев на предыдущих шагах), то из этой формулы можно получить с помощью правила &у каждую из формул A и B в отдельности.

6. Если формула $A \vee B$ является зеленым листом искомого дерева (или выведена из зеленых листьев на предыдущих шагах) и требуется построить дерево вывода с корнем C ($\mathcal{D}_C^{\Delta,\, A \vee B}$), то достаточно построить два дерева N_c-вывода, оба с корнем C, считая в первом дереве зеленым листом формулу A ($\mathcal{D}_C^{\Delta_1,\, A}$), а во втором — формулу B ($\mathcal{D}_C^{\Delta_2, B}$), где $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta$. Говоря неформально, достаточно рассмотреть («разобрать») два случая.

7. Если формула $A \supset B$ является зеленым листом искомого дерева (или выведена из множества зеленых листьев Δ на предыдущих шагах), то можно попытаться вывести формулу A из Δ с тем, чтобы от формул A и $A \supset B$ перейти к формуле B.

8. Если формула $\neg A$ является зеленым листом искомого дерева (или выведена из множества зеленых листьев Δ на предыдущих шагах), то можно попытаться вывести формулу A из Δ с тем, чтобы, воспользовавшись правилом $\neg$у, получить требуемую (вообще говоря, любую) формулу.

Наконец, последняя рекомендация относится только к системе N_k.

9. Для построения N_k-вывода с корнем A достаточно построить дерево вывода с корнем $\neg\neg A$.

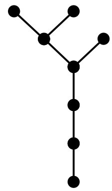
Проиллюстрируем на примере процесс построения дерева вывода в соответствии с приведенными рекомендациями.

П р и м е р. Построим дерево N_c-$\varnothing$-F-вывода, где F — формула

$$(A \,\&\, B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)).$$

Формула $(A \,\&\, B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))$ представляет собой импликацию, поэтому, согласно правилу $\supset$в, достаточно вывести формулу $A \supset (B \supset C)$, взяв в качестве допущения (зеленого листа) формулу $A \,\&\, B \supset C$. Снабдим ее сразу номером 1. Формула $A \supset (B \supset C)$ также является импликацией, причем ее заключение само является импликацией. Поэтому, дважды сославшись на правило $\supset$в, заключаем, что достаточно вывести формулу C, добавив еще два допущения: A (с номером 2) и B (с номером 3). Возможности движения «снизу-вверх» исчерпаны. Достраивать дерево будем сверху. Итак, всего имеем три допущения: A, B и $A \,\&\, B \supset C$, из которых хотим вывести формулу C. По правилу &в из формул A и B получаем формулу A & B, затем, применяя правило $\supset$у, из формул A & B и A & $B \supset C$ получаем желаемую формулу C. Наконец, упорядочив формулы соответствующим образом, получаем искомое дерево вывода.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2 \quad [B]^3}{A \,\&\, B}\,{\scriptstyle \&\text{в}} \qquad [A \,\&\, B \supset C]^1}{C}\,{\scriptstyle \supset\text{у}}}{B \supset C}\,{\scriptstyle \supset\text{в}\ (3)}}{A \supset (B \supset C)}\,{\scriptstyle \supset\text{в}\ (2)}}{(A \,\&\, B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C))}\,{\scriptstyle \supset\text{в}\ (1)}$$



○

Если существует дерево $\mathrm{N_c}$-вывода с пустым множеством зеленых листьев и корнем F, то будем использовать запись $\vdash_{\mathrm{N_c}} F$ (см. § 2.5).

П р и м е р. Докажем, что $\vdash_{\mathrm{N_c}} A \supset A$. Для этого достаточно построить дерево $\mathrm{N_c}$-вывода:

$$\dfrac{[A]^1}{A \supset A}\,{\scriptstyle \supset\text{в}\ (1)}$$

Заметим, что здесь мы имеем дерево $\dfrac{\mathcal{D}_A^{\{A\}}}{A \supset A}\,{\scriptstyle \supset\text{в}}$, где $\mathcal{D}_A^{\{A\}} \rightleftharpoons A$. ○

§ 2.5. Отношение $\mathrm{N_c}$-выводимости

! Пусть Γ − произвольное конечное множество формул.

Будем говорить, что ***из множества формул*** Γ $\mathrm{N_c}$-***выводима формула*** F, и писать $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} F$, если существует $\mathrm{N_c}$-Δ-F-вывод, множество зеленых листьев которого Δ является подмножеством Γ ($\Delta \subseteq \Gamma$).

Если $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} F$, то формулы из множества Γ принято называть *гипотезами*.

Если $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$, то вместо $\{A_1, ..., A_n\} \vdash_{\mathrm{N_c}} F$ будем писать $A_1, ..., A_n \vdash_{\mathrm{N_c}} F$.

! Если $\Gamma \vdash_{N_c} F$ и $\Gamma = \varnothing$, т. е. существует N_c-$\varnothing$-F-вывод, то будем говорить, что ***формула F N_c-выводима*** (или выводима в системе N_c), и писать $\vdash_{N_c} F$ вместо $\varnothing \vdash_{N_c} F$.

Таким образом, мы ввели отношение между конечными множествами формул и формулами – отношение N_c-выводимости.

В дальнейшем буквы Γ и Δ, возможно с индексами или со штрихами, будем использовать как метапеременные по конечным множествам формул.

Выясним теперь, какова связь между отношениями N_k-выводимости и N_i-выводимости, а также, как связаны друг с другом классы N_k-выводимых и N_i-выводимых формул.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если формула F N_i-выводима из множества Γ, то F N_k-выводима из множества Γ, т. е. $(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{N_i} F \rightarrow \Gamma \vdash_{N_k} F)$.

Доказательство. Пусть $\Gamma \vdash_{N_i} F$, т. е. существует N_i-Δ-F-вывод такой, что $\Delta \subseteq \Gamma$. Поскольку всякое N_i-правило является N_k-правилом, то всякий N_i-Δ-F-вывод является N_k-Δ-F-выводом, в частности, при пустом Γ. Следовательно, $\Gamma \vdash_{N_k} F$. ❐

! **СЛЕДСТВИЕ.** Всякая N_i-выводимая формула является N_k-выводимой, т. е. $(F)(\vdash_{N_i} F \rightarrow \vdash_{N_k} F)$.

Замечание 1. Сразу отметим, что обратное неверно. Например, такие формулы, как $p \vee \neg p$, $\neg\neg p \supset p$, $\neg p \vee \neg\neg p$, $(p \supset q) \supset (\neg p \vee q)$, $\neg(p \ \& \ q) \supset (\neg p \vee \neg q)$ выводимы в N_k, но невыводимы в N_i. О том, как доказывать утверждения о невыводимости формул, речь пойдет позже. ○

Остановимся теперь на основных свойствах отношения выводимости в системах естественного вывода.

Основные свойства отношения N_c-выводимости

! **УТВЕРЖДЕНИЕ**. Каковы бы ни были формулы A, F и множества формул Γ, Γ', Γ_1, Γ_2:

1) $A \vdash_{N_c} A$ (*рефлексивность* $\vdash_{N_c}$);

1') если $A \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash_{N_c} A$ (*квазирефлексивность* $\vdash_{N_c}$);

2) если $\Gamma \vdash_{N_c} F$ и $\Gamma \subseteq \Gamma'$, то $\Gamma' \vdash_{N_c} F$ (*монотонность* $\vdash_{N_c}$);

3) если $\Gamma_1 \vdash_{N_c} \Gamma_2$ и $\Gamma_2 \vdash_{N_c} F$, то $\Gamma_1 \vdash_{N_c} F$ (*транзитивность* $\vdash_{N_c}$), где запись $\Gamma_1 \vdash_{N_c} \Gamma_2$ означает, что каждая формула из Γ_2 является N_c-выводимой из Γ_1;

4) если $\Gamma, A \vdash_{N_c} F$ и $\Gamma \vdash_{N_c} A$, то $\Gamma \vdash_{N_c} F$;

4') если $\Gamma, A \vdash_{N_c} F$ и $\vdash_{N_c} A$, то $\Gamma \vdash_{N_c} F$ (удаление выводимых гипотез);

5) если $\Gamma \vdash_{N_c} F$, то $S(\Gamma) \vdash_{N_c} S(F)$ для любого оператора подстановки S, где $S(\Gamma) \leftrightharpoons \{S(A) \mid A \in \Gamma\}$;

5') если $\vdash_{N_c} F$, то $\vdash_{N_c} S(F)$ для любого оператора подстановки S.

Доказательство. Пусть A – произвольная формула.

1. Формула A сама является деревом N_c-вывода с корнем A и множеством зеленых листьев $\{A\}$. Таким образом, $A \vdash_{N_c} A$.

1'. Пусть $A \in \Gamma$. Докажем, что $\Gamma \vdash_{N_c} A$, т. е. что существует дерево N_c-вывода с корнем A и множеством зеленых листьев, содержащимся в Γ. Действительно, поскольку $\{A\} \subseteq \Gamma$, формула A сама является таким деревом. Таким образом, $\Gamma \vdash_{N_c} A$.

2. Пусть $\Gamma \vdash_{N_c} F$ и $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Докажем, что $\Gamma' \vdash_{N_c} F$. Действительно, если $\mathcal{D}^{\Delta}_{F}$ – дерево N_c-вывода формулы F, множество зеленых листьев которого Δ является подмножеством Γ, то, очевидно, $\Delta \subseteq \Gamma'$, а значит, $\Gamma' \vdash_{N_c} F$.

3. Пусть $\Gamma_1 \vdash_{N_c} \Gamma_2$ и $\Gamma_2 \vdash_{N_c} F$. Докажем, что $\Gamma_1 \vdash_{N_c} F$. Обозначим через $\dfrac{F_1 \ldots F_n}{\overline{\overline{F}}}$ – дерево N_c-Δ-F-вывода такое, что $\Delta = \{F_1, \ldots, F_n\}$ и $\Delta \subseteq \Gamma_2$ (случай, когда $\Delta = \varnothing$, тривиален). Поскольку из Γ_1 выводима в N_c каждая формула из Γ_2, то $\Gamma_1 \vdash_{N_c} F_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Для каждого i обозначим через $\dfrac{\Delta_i}{\overline{\overline{F_i}}}$ дерево N_c-Δ_i-F_i-вывода такое, что $\Delta_i \subseteq \Gamma_1$. Каж-

дое вхождение формулы F_i ($i = 1, \ldots, n$) в дерево $\dfrac{F_1 \ldots F_n}{F}$ в качестве зеленого листа заменим деревом $\dfrac{\Delta_i}{F_i}$. Дерево N_c-вывода, которое получается в результате такой замены, можно изобразить следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{\Delta_1}{F_1} \ldots \dfrac{\Delta_n}{F_n}}{F}$$

Множество зеленых листьев этого дерева есть подмножество $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$. Поскольку $\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n \subseteq \Gamma_1$, то $\Gamma_1 \vdash_{N_c} F$.

4. Пусть $\Gamma, A \vdash_{N_c} F$ и $\Gamma \vdash_{N_c} A$. Докажем, что $\Gamma \vdash_{N_c} F$.

Обозначим через $\dfrac{\Delta_1}{F}$ – дерево N_c-Δ_1-F-вывода такое, что $\Delta_1 \subseteq \Gamma \cup \{A\}$, а через $\dfrac{\Delta_2}{A}$ – дерево N_c-Δ_2-A -вывода такое, что $\Delta_2 \subseteq \Gamma$. Если $A \notin \Delta_1$, то $\Delta_1 \subseteq \Gamma$ и $\Gamma \vdash_{N_c} F$. Если $A \in \Delta_1$, то $\Delta_1 = \Delta \cup \{A\}$, где $\Delta = \Delta_1 \setminus \{A\}$. В этом случае дерево вывода $\dfrac{\Delta_1}{F}$ удобно представить следующим образом: $\dfrac{\Delta \quad A}{F}$. Каждое вхождение формулы A в дерево вывода $\dfrac{\Delta \quad A}{F}$ в качестве зеленого листа заменим на дерево $\dfrac{\Delta_2}{A}$. Тогда дерево N_c-вывода, которое получается в результате такой замены, можно изобразить следующим образом:

$$\dfrac{\Delta \quad \dfrac{\Delta_2}{A}}{F}$$

Так как множество $\Delta \cup \Delta_2 \subseteq \Gamma$, то множество зеленых листьев этого дерева является подмножеством Г. Таким образом, $\Gamma \vdash_{N_c} F$.

Свойство 4' является следствием свойства 4, поскольку если $\vdash_{N_c} A$, то $\Gamma \vdash_{N_c} A$ для любого множества формул Г.

5. Доказательство свойства 5 оставляем читателю. Заметим лишь, что при его доказательстве нужно воспользоваться принципом индукции для N_c-выводов во второй форме (см. § 2.6). Свойство 5' получается из свойства 5 при пустом множестве Г. ❐

Рассмотрим еще ряд свойств отношения N_c-выводимости.

! УТВЕРЖДЕНИЕ (*свойства отношения* N_c*-выводимости*, связанные с введением и удалением пропозициональных связок). Для любых формул *A*, *B*, *C* и любого множества формул Г:

1) $\dfrac{\Gamma \vdash_{N_c} A \text{ и } \Gamma \vdash_{N_c} B}{\Gamma \vdash_{N_c} A \,\&\, B}$; 2) $\dfrac{\Gamma \vdash_{N_c} A \,\&\, B}{\Gamma \vdash_{N_c} A \text{ и } \Gamma \vdash_{N_c} B}$;

3) $\dfrac{\Gamma \vdash_{N_c} A \text{ или } \Gamma \vdash_{N_c} B}{\Gamma \vdash_{N_c} A \vee B}$; 4) $\dfrac{\Gamma, A \vdash_{N_c} C \text{ и } \Gamma, B \vdash_{N_c} C}{\Gamma, A \vee B \vdash_{N_c} C}$;

5) $\dfrac{\Gamma, A \vdash_{N_c} B}{\Gamma \vdash_{N_c} A \supset B}$; 6) $\dfrac{\Gamma \vdash_{N_c} A \text{ и } \Gamma \vdash_{N_c} A \supset B}{\Gamma \vdash_{N_c} B}$;

7) $\dfrac{\Gamma, A \vdash_{N_c} B \text{ и } \Gamma, A \vdash_{N_c} \neg B}{\Gamma \vdash_{N_c} \neg A}$; 8) $\dfrac{\Gamma \vdash_{N_c} A \text{ и } \Gamma \vdash_{N_c} \neg A}{\Gamma \vdash_{N_c} B}$.

Кроме того, только для системы N_k верно:

9) $\dfrac{\Gamma \vdash_{N_k} \neg\neg A}{\Gamma \vdash_{N_k} A}$.

Замечание 2. Горизонтальная черта здесь является метасимволом и используется для сокращения записи условного утверждения в отличие от горизонтальной черты, используемой при записи правил заключения или деревьев вывода и являющейся частью этих графических объектов. ❍

Докажем наиболее известное из этих свойств − свойство 5, которое обычно называют теоремой дедукции (о дедукции).

ТЕОРЕМА (*о дедукции*). Если $\Gamma, A \vdash_{\mathrm{N_c}} B$, то $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} A \supset B$.

Доказательство. Пусть $\Gamma, A \vdash_{\mathrm{N_c}} B$. Обозначим через $\dfrac{\Delta}{\overline{\overline{B}}}$ – дерево $\mathrm{N_c}$-Δ-B-вывода такое, что $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{A\}$. Докажем, что $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} A \supset B$. Построим новое дерево вывода:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Delta\\ \hline\hline B\end{array}}{A \supset B}\supset \text{в}$$

Множество его зеленых листьев есть множество $\Delta \setminus \{A\}$. Поскольку $\Delta \setminus \{A\} \subseteq \Gamma$, то $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} A \supset B$. ❐

Замечание 3. Обратное утверждение также справедливо: если $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} A \supset B$, то $\Gamma, A \vdash_{\mathrm{N_c}} B$. ❍

Легко доказать следующие полезные утверждения (A, B, C – произвольные формулы; Γ – произвольное конечное множество формул):

1) $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} A \mathbin{\&} B \leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} A$ и $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} B$;

2) $\Gamma, A \vee B \vdash_{\mathrm{N_c}} C \leftrightarrow \Gamma, A \vdash_{\mathrm{N_c}} C$ и $\Gamma, B \vdash_{\mathrm{N_c}} C$;

3) $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} A \supset B \leftrightarrow \Gamma, A \vdash_{\mathrm{N_c}} B$;

4) $\Gamma, A \mathbin{\&} B \vdash_{\mathrm{N_c}} C \leftrightarrow \Gamma, A, B \vdash_{\mathrm{N_c}} C$;

5) $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_к}} \neg\neg A \leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathrm{N_к}} A$.

Напомним введенное ранее обозначение связки ~, называемой *эквиваленцией*:

$$A \sim B \leftrightharpoons (A \supset B) \mathbin{\&} (B \supset A).$$

Будем говорить, что формула A $\mathrm{N_c}$-*эквивалентна* формуле B, если $\vdash_{\mathrm{N_c}} A \sim B$.

Легко доказать, что отношение $\mathrm{N_c}$-эквивалентности рефлексивно, транзитивно и симметрично, т. е. является отношением эквивалентности на множестве всех формул ЯЛВ.

ТЕОРЕМА (*об эквивалентной замене*). Если в формуле F какое-либо вхождение в нее подформулы A заменить вхождением формулы B, N_c-эквивалентной A, то получим формулу, N_c-эквивалентную исходной формуле F.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать следующее более сильное утверждение. Пусть A, B, F — формулы, причем для некоторых слов X и Y в алфавите ЯЛВ $F \equiv XAY$ (т. е. A — подформула формулы F). Тогда $A \sim B \vdash_{N_c} XAY \sim XBY$.

Теперь наметим этапы доказательства этого утверждения. Прежде всего необходимо доказать ряд утверждений, объединенных в следующей лемме.

ЛЕММА. Каковы бы ни были формулы A, A_1, B, B_1, для систем N_i и N_k, имеет место:

1) $A \sim A_1 \vdash_{N_c} A \,\&\, B \sim A_1 \,\&\, B$; 2) $B \sim B_1 \vdash_{N_c} A \,\&\, B \sim A \,\&\, B_1$;

3) $A \sim A_1 \vdash_{N_c} A \vee B \sim A_1 \vee B$; 4) $B \sim B_1 \vdash_{N_c} A \vee B \sim A \vee B_1$;

5) $A \sim A_1 \vdash_{N_c} A \supset B \sim A_1 \supset B$; 6) $B \sim B_1 \vdash_{N_c} A \supset B \sim A \supset B_1$;

7) $A \sim A_1 \vdash_{N_c} \neg A \sim \neg A_1$.

Эти утверждения можно доказать построением деревьев вывода, что читатель может проделать в качестве упражнения.

Далее с помощью принципа индукции для формул ЯЛВ несложно завершить доказательство теоремы, что также предоставляется читателю. ❒

Примеры деревьев вывода

Рассмотрим еще ряд важных **п р и м е р о в** деревьев вывода некоторых известных формул.

Сначала рассмотрим деревья вывода формул, называемых законами де Моргана. Первые три из них выводимы в интуиционистской системе (а значит, и в классической). Последняя формула выводима только в классической системе.

1. $\vdash_{N_c} \neg(A \vee B) \supset \neg A \,\&\, \neg B$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2}{A\vee B}\quad [\neg(A\vee B)]^1}{\neg A}{\scriptstyle (2)}\qquad \dfrac{\dfrac{[B]^3}{A\vee B}\quad [\neg(A\vee B)]^1}{\neg B}{\scriptstyle (3)}}{\neg A\,\&\,\neg B}}{\neg(A\vee B)\supset\neg A\,\&\,\neg B}\supset \text{в}(1)$$

2. $\vdash_{N_c} \neg A \,\&\, \neg B \supset \neg(A \vee B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\vee B]^2 \quad [A]^3 \quad \dfrac{[B]^3 \quad \dfrac{[\neg A \& \neg B]^1}{\neg B}}{A}}{A}\,{\scriptstyle(3)} \qquad \dfrac{[\neg A \& \neg B]^1}{\neg A}}{\neg(A\vee B)}\,{\scriptstyle(2)}}{\neg A \& \neg B \supset \neg(A\vee B)}\,{\scriptstyle(1)}$$

3. $\vdash_{N_c} (\neg A \vee \neg B) \supset \neg(A \,\&\, B)$.

$$\dfrac{\dfrac{[\neg A\vee \neg B]^1 \quad \dfrac{\dfrac{[A\& B]^3}{A} \quad [\neg A]^2}{\neg(A\& B)}\,{\scriptstyle(3)} \quad \dfrac{\dfrac{[A\& B]^3}{B} \quad [\neg B]^2}{\neg(A\& B)}\,{\scriptstyle(3)}}{\neg(A\& B)}\,{\scriptstyle(2)}}{(\neg A\vee \neg B)\supset \neg(A\& B)}\,{\scriptstyle(1)}$$

4. $\vdash_{N_{\text{к}}} \neg(A \,\&\, B) \supset (\neg A \vee \neg B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^3}{\neg A\vee\neg B} \quad [\neg(\neg A\vee \neg B)]^2}{\neg\neg A}\,{\scriptstyle(3)}}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg B]^4}{\neg A\vee\neg B} \quad [\neg(\neg A\vee \neg B)]^2}{\neg\neg B}\,{\scriptstyle(4)}}{B}}{A\& B} \quad [\neg(A\& B)]^1}{\neg\neg(\neg A\vee\neg B)}\,{\scriptstyle(2)}}{\neg A\vee \neg B}}{\neg(A\& B)\supset(\neg A\vee\neg B)}\,{\scriptstyle(1)}$$

Теперь рассмотрим деревья вывода формул, называемых законами дистрибутивности. Все четыре формулы выводимы в интуиционистской системе (а значит, и в классической).

5. $\vdash_{N_c} ((A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)) \supset A \,\&\, (B \vee C)$.

$$\dfrac{\dfrac{[A\& B\vee A\& C]^1 \quad \dfrac{\dfrac{[A\& B]^2}{A} \quad \dfrac{\dfrac{[A\& B]^2}{B}}{B\vee C}}{A\&(B\vee C)} \quad \dfrac{\dfrac{[A\& C]^2}{A} \quad \dfrac{\dfrac{[A\& C]^2}{C}}{B\vee C}}{A\&(B\vee C)}}{A\&(B\vee C)}\,{\scriptstyle(2)}}{(A\& B\vee A\& C)\supset A\&(B\vee C)}\,{\scriptstyle(1)}$$

6. $\vdash_{\mathrm{N_c}} A \mathbin{\&} (B \vee C) \supset ((A \mathbin{\&} B) \vee (A \mathbin{\&} C))$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \mathbin{\&} (B \vee C)]^1}{B \vee C} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \mathbin{\&} (B \vee C)]^1}{A} \quad [B]^2}{A \mathbin{\&} B}}{A \mathbin{\&} B \vee A \mathbin{\&} C} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \mathbin{\&} (B \vee C)]^1}{A} \quad [C]^2}{A \mathbin{\&} C}}{A \mathbin{\&} B \vee A \mathbin{\&} C}}{A \mathbin{\&} B \vee A \mathbin{\&} C}\,{\scriptstyle (2)}}{A \mathbin{\&} (B \vee C) \supset (A \mathbin{\&} B \vee A \mathbin{\&} C)}\,{\scriptstyle (1)}
$$

7. $\vdash_{\mathrm{N_c}} (A \vee (B \mathbin{\&} C)) \supset (A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \vee B \mathbin{\&} C]^1 \quad \dfrac{[A]^2}{A \vee B} \quad \dfrac{\dfrac{[B \mathbin{\&} C]^2}{B}}{A \vee B}}{A \vee B}\,{\scriptstyle (2)} \qquad \dfrac{[A \vee B \mathbin{\&} C]^1 \quad \dfrac{[A]^3}{A \vee C} \quad \dfrac{\dfrac{[B \mathbin{\&} C]^3}{C}}{A \vee C}}{A \vee C}\,{\scriptstyle (3)}}{(A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C)}}{(A \vee B \mathbin{\&} C) \supset (A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C)}\,{\scriptstyle (1)}
$$

8. $\vdash_{\mathrm{N_c}} (A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C) \supset (A \vee (B \mathbin{\&} C))$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C)]^1}{A \vee B} \quad \dfrac{[A]^2}{A \vee B \mathbin{\&} C} \quad \dfrac{\dfrac{[(A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C)]^1}{A \vee C} \quad \dfrac{[A]^3}{A \vee B \mathbin{\&} C} \quad \dfrac{\dfrac{[B]^2\ [C]^3}{B \mathbin{\&} C}}{A \vee B \mathbin{\&} C}}{A \vee B \mathbin{\&} C}\,{\scriptstyle (3)}}{A \vee B \mathbin{\&} C}\,{\scriptstyle (2)}}{(A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C) \supset (A \vee B \mathbin{\&} C)}\,{\scriptstyle (1)}
$$

Рассмотрим деревья вывода формул, выражающих связь между импликацией, с одной стороны, и дизъюнкцией и отрицанием – с другой. Здесь первая формула выводима в обеих системах, а вторая – только в классической.

9. $\vdash_{\mathrm{N_c}} (\neg A \vee B) \supset (A \supset B)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A \vee B]^1 \quad \dfrac{[A]^2\ [\neg A]^3}{B} \quad [B]^3}{B}\,{\scriptstyle (3)}}{A \supset B}\,{\scriptstyle (2)}}{(\neg A \vee B) \supset (A \supset B)}\,{\scriptstyle (1)}
$$

10. $\vdash_{N_\text{к}} (A \supset B) \supset (\neg A \vee B)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^4 \quad [A \supset B]^1}{B} \qquad \dfrac{\dfrac{[B]^5}{\neg A \vee B} \quad [\neg(\neg A \vee B)]^2}{\neg B}{\scriptstyle(5)}}{\neg A}{\scriptstyle(4)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A]^3}{\neg A \vee B} \quad [\neg(\neg A \vee B)]^2}{\neg\neg A}{\scriptstyle(3)}}{\neg\neg(\neg A \vee B)}{\scriptstyle(2)}}{\dfrac{\neg A \vee B}{(A \supset B) \supset (\neg A \vee B)}{\scriptstyle(1)}}
$$

В заключение рассмотрим дерево вывода известного классического *закона исключенного третьего* (лат. *tertium non datur*), который выводим в классической, но не выводим в интуиционистской системе.

11. $\vdash_{N_\text{к}} A \vee \neg A$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^2}{A \vee \neg A} \quad [\neg(A \vee \neg A)]^1}{\neg A}{\scriptstyle(2)} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A]^3}{A \vee \neg A} \quad [\neg(A \vee \neg A)]^1}{\neg\neg A}{\scriptstyle(3)}}{\neg\neg(A \vee \neg A)}{\scriptstyle(1)}}{A \vee \neg A} \qquad \bigcirc
$$

У П Р А Ж Н Е Н И Е

Докажите построением деревьев N_c-вывода (A, B, C − произвольные формулы):

1) $\vdash_{N_c} A \supset (B \supset A)$;

2) $\vdash_{N_c} (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;

3) $\vdash_{N_c} A \,\&\, B \supset A$; 4) $\vdash_{N_c} A \,\&\, B \supset B$;

5) $\vdash_{N_c} A \supset (B \supset A \,\&\, B)$;

6) $\vdash_{N_c} A \supset A \vee B$; 7) $\vdash_{N_c} B \supset A \vee B$;

8) $\vdash_{N_c} (A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$;

9) $\vdash_{N_c} (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$;

10) $\vdash_{N_c} A \supset (\neg A \supset B)$;

11) $\vdash_{N_\text{к}} \neg\neg A \supset A$.

§ 2.6. Принцип индукции для деревьев вывода

Математические уточнения понятия логического следования

Мы уже знакомы с некоторыми *отношениями между множествами формул и формулами*: с отношением N_i-выводимости $\vdash_{N_i}$, отношением N_k-выводимости $\vdash_{N_k}$, отношением семантического следования $\models$. В дальнейшем мы расширим список подобного рода отношений. Все эти отношения тем или иным образом уточняют интуитивное понятие *логического следования*, используемое в неформальных математических рассуждениях.

Одни из этих отношений определяются в терминах формальных выводов в некотором исчислении (формальной логической системе). Их можно рассматривать как *синтаксические* уточнения понятия логического следования. Такими являются, например, отношение N_i-выводимости $\vdash_{N_i}$ и отношение N_k-выводимости $\vdash_{N_K}$.

Другие отношения определяются в семантических терминах, таких как интерпретация, оценка, значение формулы и т. п. Такие отношения можно рассматривать как *семантические уточнения отношения логического следования*. Пока нам известно только одно такое отношение − отношение семантического следования $\models$. Это отношение появилось при стандартном толковании пропозициональных связок (при стандартной их интерпретации). Позже, когда будут рассмотрены другие интерпретации, появятся и соответствующие им так называемые отношения $\mathfrak{M}$-следования (см. § 2.11).

И те и другие отношения, служащие математическими уточнениями понятия логического следования, относятся к *отношениям типа следования*. Укажем важнейшие свойства таких отношений.

Сначала введем обозначения и дадим несколько определений.

➤➤ Произвольное отношение между множествами формул и формулами будем обозначать буквой ρ. Если множество формул Γ находится в отношении ρ с формулой F, будем записывать это так: $\Gamma\rho F$. Вместо $(\Gamma\cup\{A\})\rho F$ будем писать $\Gamma, A\rho F$, а вместо $\{A\}\rho F$ − просто $A\rho F$.

Отношение ρ будем называть ***рефлексивным***, если для любой формулы F выполняется $F\rho F$.

Отношение ρ будем называть ***монотонным***, если для любых множеств формул Γ и Γ' и любой формулы F, таких что $\Gamma\rho F$ и $\Gamma \subseteq \Gamma'$, выполняется $\Gamma'\rho F$, т. е. если

$$(\Gamma)\ (\Gamma')\ (F)\ (\Gamma\rho F \to (\Gamma \subseteq \Gamma' \to \Gamma'\rho F)).$$

Отношение ρ будем называть ***транзитивным***, если для любых Γ_1, Γ_2 и F из условий $\Gamma_1\rho\Gamma_2$ и $\Gamma_2\rho F$ следует, что $\Gamma_1\rho F$ (где запись $\Gamma_1\rho\Gamma_2$ означает, что $\Gamma_1\rho B$ для каждой формулы $B \in \Gamma_2$), т. е. если

$$(\Gamma_1)\ (\Gamma_2)\ (F)\ (\Gamma_1\rho\Gamma_2 \to (\Gamma_2\rho F \to \Gamma_1\rho F)).$$

Отношение ρ будем называть ***подстановочным***, если для любого оператора подстановки S и любых Γ и F, таких что $\Gamma\rho F$, выполняется $\mathrm{S}(\Gamma)\rho\mathrm{S}(F)$:

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma\rho F \to \mathrm{S}(\Gamma)\rho\mathrm{S}(F)).$$

Отношение между конечными множествами формул и формулами будем называть ***отношением типа следования***, если оно рефлексивно, монотонно, транзитивно и подстановочно[1].

Легко проверить, например, что отношения $\vdash_{\mathrm{N_i}}$, $\vdash_{\mathrm{N_k}}$ и $\models$ являются отношениями типа следования.

Замечание 1. Пусть ρ — произвольное отношение между конечными множествами формул и формулами. Отношение ρ будем называть *квазирефлексивным*, если для любого множества формул Γ и любой формулы F из Γ выполняется $\Gamma\rho F$. Символически это условие можно записать так: $(\Gamma)\ (F)\ (F \in \Gamma \to \Gamma\rho F)$.

Можно доказать следующие утверждения, отражающие *связь* между введенными характеристиками отношения ρ:

1) если ρ рефлексивно и монотонно, то ρ квазирефлексивно;
2) если ρ квазирефлексивно и транзитивно, то ρ монотонно;
3) если ρ квазирефлексивно, то оно рефлексивно. ❍

В ряде теорем о системах естественного вывода говорится о связи между отношением $\mathrm{N_i}$- или $\mathrm{N_k}$-выводимости и каким-либо отношением типа следования. Подобные теоремы формулируются обычно так: «Каковы бы ни были множество формул Γ и формула F, если $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} F$, то Γ находится в таком-то отношении с F».

---

[1] Если не ограничиваться *конечными* множествами Γ, то следует потребовать, чтобы отношение ρ удовлетворяло еще одному условию — условию *конечности*: каковы бы ни были Γ и F, если $\Gamma\rho F$, то существует такое конечное подмножество Δ множества Γ, что $\Delta\rho F$.

Другими словами: «Для любого множества формул Γ и любой N_c-выводимой из Γ формулы F множество формул Γ находится в отношении ρ с F», где ρ — некоторое отношение типа следования.

Далее в этом параграфе будет установлено, что для доказательства такого вида теорем достаточно проверить, что ρ удовлетворяет некоторым известным условиям.

Сначала введем еще несколько важных понятий.

Отношения, сохраняемые правилами заключения

! Пусть ρ — отношение между конечными множествами формул и формулами.
Будем говорить, что ***прямое*** N_c***-правило*** (***схема заключений***) $\frac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$ ***сохраняет отношение*** ρ, если для любого множества формул Γ и любого набора формул F_1, ..., F_n, F, соответствующего этому правилу, из условий $\Gamma\rho F_1$, ..., $\Gamma\rho F_n$ следует, что $\Gamma\rho F$.

Символически это последнее условие будем записывать так:

$$\frac{\Gamma\rho F_1; \ldots; \Gamma\rho F_n}{\Gamma\rho F}$$

Например, правило &в сохраняет отношение ρ, если для любых формул A и B и любого множества формул Γ, таких что $\Gamma\rho A$ и $\Gamma\rho B$, выполняется $\Gamma\rho(A \,\&\, B)$, т. е. если:

$$(A)\ (B)\ (\Gamma)\ \left(\frac{\Gamma\rho A;\ \Gamma\rho B}{\Gamma\rho(A \,\&\, B)}\right).$$

! Будем говорить, что ***косвенные правила*** ⊃в, ∨у, ¬в ***сохраняют отношение*** ρ, если для любого множества формул Γ и любых формул A, B, C выполняются соответственно следующие условия:

$$\frac{\Gamma, A\rho B}{\Gamma\rho\,(A \supset B)};\quad \frac{\Gamma\rho(A \vee B);\ \ \Gamma, A\rho C;\ \ \Gamma, B\rho C}{\Gamma\rho C};\quad \frac{\Gamma, A\rho B;\ \ \Gamma, A\rho\neg B}{\Gamma\rho\neg A}.$$

Аналогичным образом можно определить понятие сохранения отношения ρ произвольной косвенной схемой заключений.

➤ Отметим, что горизонтальная черта здесь и далее в аналогичных ситуациях является метасимволом и используется для сокращения записи условного утверждения в отличие от горизонтальной черты, используемой при записи правил заключения или деревьев вывода и являющейся частью этих графических объектов (ср. с замечанием 2 из § 2.5).

Соответствующие свойства отношения N_c-выводимости из § 2.5 означают, что все N_c-правила сохраняют отношение N_c-выводимости. Соответствующие свойства семантического следования из § 1.6 свидетельствуют о том, что все N_c-правила сохраняют также отношение семантического следования.

★ Пусть Γ, Δ, Δ_1, ..., Δ_n – переменные по конечным множествам формул; F_1, ..., F_n, F, A, B, C – переменные по формулам.

Можно доказать, что:

I. Если ρ – рефлексивное, монотонное и транзитивное отношение, то следующие три условия эквивалентны:

1) $(\Gamma)\left(\dfrac{\Gamma\rho F_1, ..., \Gamma\rho F_n}{\Gamma\rho F}\right)$;

2) $(\Delta_1)...(\Delta_n)\left(\dfrac{\Delta_1\rho F_1,\ ...,\ \Delta_n\rho F_n}{(\Delta_1 \cup ... \cup \Delta_n)\rho F}\right)$;

3) $\{F_1,\ ...,\ F_n\}\rho F$.

При этом для доказательства эквивалентности условий 1 и 2 достаточно, чтобы ρ было монотонным. Эквивалентность условий 1 и 3 будет доказана далее. Таким образом, в определении понятия *сохранения прямым правилом отношения* ρ можно вместо условия 1 взять условие 2 или условие 3.

II. Если ρ – монотонное отношение, то следующие два условия эквивалентны:

1) $(\Gamma)\left(\dfrac{\Gamma, A\rho B}{\Gamma\rho(A \supset B)}\right)$; 2) $(\Delta)\left(\dfrac{\Delta\rho B}{(\Delta \setminus \{A\})\rho(A \supset B)}\right)$.

III. Если ρ – рефлексивное, монотонное и транзитивное отношение, то следующие три условия эквивалентны:

1) $(\Gamma)\left(\dfrac{\Gamma\rho(A \vee B);\ \ \Gamma, A\rho C;\ \ \Gamma, B\rho C}{\Gamma\rho C}\right)$;

2) $(\Delta_1)\ (\Delta_2)\ (\Delta_3)\left(\dfrac{\Delta_1\rho(A \vee B);\ \ \Delta_2\rho C;\ \ \Delta_3\rho C}{(\Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\}) \cup (\Delta_3 \setminus \{B\}))\rho C}\right)$;

3) $(\Gamma)\left(\dfrac{\Gamma, A\rho C;\ \ \Gamma, B\rho C}{\Gamma, (A \vee B)\rho C}\right)$.

IV. Если ρ — рефлексивное, монотонное и транзитивное отношение, то следующие два условия эквивалентны:

1) $(\Gamma)\left(\dfrac{\Gamma, A\rho B;\ \ \Gamma, A\rho\neg B}{\Gamma\rho\neg A}\right)$;

2) $(\Delta_1)\ (\Delta_2)\left(\dfrac{\Delta_1\rho B;\ \ \Delta_2\rho\neg B}{(\,(\Delta_1 \setminus \{A\}) \cup (\Delta_2 \setminus \{A\})\,)\rho\neg A}\right)$.

Таким образом, для каждого косвенного правила в определении понятия *сохранения косвенным правилом отношения* ρ также можно заменить определяющее условие на эквивалентное. ☆

Принцип индукции для N_c-выводов

Как уже отмечалось, многие важные теоремы о свойствах отношения N_c-выводимости имеют следующий вид: «Для любого множества формул Γ и любой N_c-выводимой из Γ формулы F множество формул Γ находится в отношении ρ с F», где ρ — некоторое отношение между конечными множествами формул и формулами. Символически утверждения такого вида можно записывать следующим образом:

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{N_c} F \to \Gamma\rho F).$$

В силу индуктивного определения дерева N_c-вывода, утверждения указанного вида можно доказывать с помощью обычного принципа математической индукции по натуральному параметру — высоте дерева N_c-вывода. Однако такие доказательства являются весьма громоздкими. Наша ближайшая цель — сформулировать и доказать утверждение, называемое принципом индукции для N_c-выводов во второй форме, использование которого позволяет получить более простые доказательства такого вида теорем.

Но сначала сформулируем и докажем принцип индукции для N_c-выводов в первой форме. Его суть заключается в следующем.

➤➤ *При определенных условиях на отношение* ρ *множество зеленых листьев всякого дерева* N_c*-вывода находится в отношении* ρ *с его корнем.*

! **ТЕОРЕМА** (*принцип индукции для* N_c*-выводов*, *первая форма*). Пусть ρ — отношение между конечными множествами формул и формулами.

Если 1) отношение ρ рефлексивно и монотонно,

и 2) все N_c-правила сохраняют отношение ρ,

то для любых Δ, F и для любого N_c-Δ-F-вывода выполняется $\Delta\rho F$.

Доказательство. Достаточно доказать возвратной индукцией по натуральному параметру k (высоте дерева) следующее утверждение: *каковы бы ни были натуральное число* k, *множество формул* Δ, *формула* F *и дерево* N_c-Δ-F*-вывода высоты* k, Δ *находится в отношении* ρ *с* F, т. е.

$$(k)\ (\mathcal{D})\ (\Delta)\ (F)\ (\mathcal{D} = \mathcal{D}_F^\Delta \ \&\ h(\mathcal{D}) = k \to \Delta\rho F)$$

или, короче, $(k)\ (\mathcal{D}_F^\Delta)\ (h(\mathcal{D}_F^\Delta) = k \to \Delta\rho F)$.

Базис индукции. Пусть $\mathcal{D}_F^\Delta$ — N_c-Δ-F-вывод высоты 0, т. е. $\mathcal{D}_F^\Delta$ — это формула F и $\Delta = \{F\}$. В силу условия 1 отношение ρ рефлексивно, а значит, $\Delta\rho F$.

Шаг индукции. Пусть k — произвольное натуральное число.

Допустим, что для любых Δ и F и для любого N_c-Δ-F-вывода, высота которого не превосходит k, имеет место $\Delta\rho F$ (*предположение индукции*).

Пусть Δ — произвольное множество формул, F — произвольная формула и $\mathcal{D}_F^\Delta$ — произвольный N_c-Δ-F-вывод, высота которого равна $k + 1$. Докажем, что выполняется $\Delta\rho F$. Рассмотрим все возможные случаи построения дерева $\mathcal{D}_F^\Delta$ в соответствии с индуктивным определением N_c-вывода.

1. Пусть $\mathcal{D}_F^\Delta$ получено по какому-либо прямому N_c-правилу $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$ $(n = 1, 2)$, т. е. $\mathcal{D}_F^\Delta = \dfrac{\mathcal{D}_{F_1}^{\Delta_1} \ldots \mathcal{D}_{F_n}^{\Delta_n}}{F}$, где $F_1, \ldots, F_n, F$ — некоторый набор формул, соответствующий этому правилу, и $\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$. Тогда высота каждого из деревьев $\mathcal{D}_{F_i}^{\Delta_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ не превосходит k, а значит, по предположению индукции выполняется $\Delta_1\rho F_1, \ldots, \Delta_n\rho F_n$. Кроме того, $\Delta_i \subseteq \Delta$ для каждого i $(i = 1, \ldots, n)$. Отсюда в силу монотонности отношения ρ имеем $\Delta\rho F_1, \ldots, \Delta\rho F_n$. Поскольку правила заключения сохраняют отношение ρ, получаем, что $\Delta\rho F$.

2. Пусть $\mathcal{D}_F^\Delta$ построено с помощью косвенного правила $\supset$в, т. е. для некоторых формул A и B выполняется: $\mathcal{D}_F^\Delta = \dfrac{\mathcal{D}_B^{\Delta_1}}{A \supset B}$, $F \rightleftharpoons A \supset B$ и $\Delta = \Delta_1 \setminus \{A\}$. Тогда $\Delta_1 \subseteq \Delta \cup \{A\}$. Кроме того, высота $\mathcal{D}_B^{\Delta_1}$ равна k,

а значит, по предположению индукции $\Delta_1\rho B$. Отсюда в силу монотонности ρ получаем, что $\Delta \cup \{A\}\rho B$. Поскольку правило $\supset$в сохраняет отношение ρ, имеем $\Delta\rho(A \supset B)$, т. е. $\Delta\rho F$.

3. Пусть $\mathcal{D}_F^\Delta$ построено с помощью косвенного правила $\vee$у, т. е. $\mathcal{D}_F^\Delta = \dfrac{\mathcal{D}_{A\vee B}^{\Delta_1} \quad \mathcal{D}_C^{\Delta_2} \quad \mathcal{D}_C^{\Delta_3}}{C}$, $F \rightleftharpoons C$, а $\Delta = \Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\}) \cup (\Delta_3 \setminus \{B\})$. Тогда $\Delta_1 \subseteq \Delta$, $\Delta_2 \subseteq \Delta \cup \{A\}$, $\Delta_3 \subseteq \Delta \cup \{B\}$. Кроме того, высота каждого из деревьев $\mathcal{D}_{A\vee B}^{\Delta_1}$, $\mathcal{D}_C^{\Delta_2}, \mathcal{D}_C^{\Delta_3}$ не превосходит k, а значит, по предположению индукции $\Delta_1\rho(A \vee B)$; $\Delta_2\rho C$ и $\Delta_3\rho C$. Следовательно, в силу монотонности отношения ρ имеем: $\Delta\rho(A \vee B)$; $\Delta \cup \{A\}\rho C$ и $\Delta \cup \{B\}\rho C$. Отсюда, поскольку правило $\vee$у сохраняет отношение ρ, получаем $\Delta\rho C$, т. е. $\Delta\rho F$.

4. Пусть $\mathcal{D}_F^\Delta$ построено с помощью косвенного правила $\neg$в, т. е. $\mathcal{D}_F^\Delta = \dfrac{\mathcal{D}_B^{\Delta_1} \quad \mathcal{D}_{\neg B}^{\Delta_2}}{\neg A}$, $F \rightleftharpoons \neg A$, $\Delta = (\Delta_1 \setminus \{A\}) \cup (\Delta_2 \setminus \{A\})$. Тогда $\Delta_1 \subseteq \Delta \cup \{A\}$ и $\Delta_2 \subseteq \Delta \cup \{A\}$. Кроме того, высота каждого из деревьев $\mathcal{D}_B^{\Delta_1}$, $\mathcal{D}_{\neg B}^{\Delta_2}$ не превосходит k, а значит, по предположению индукции $\Delta_1\rho B$ и $\Delta_2\rho\neg B$. Отсюда в силу монотонности ρ получаем, что $\Delta \cup \{A\}\rho B$ и $\Delta \cup \{A\}\rho\neg B$. Тогда, поскольку правило $\neg$в сохраняет отношение ρ, выполняется $\Delta\rho\neg A$, т. е. $\Delta\rho F$.

Итак, согласно индуктивному определению дерева N_c-вывода, мы рассмотрели все возможные случаи построения $\mathcal{D}_F^\Delta$, получая каждый раз $\Delta\rho F$, чем завершили шаг индукции. Таким образом, для любого натурального k и любого N_c-Δ-F-вывода высоты k выполняется $\Delta\rho F$. ❒

★ Заметим, что если определение понятия *сохранения* N_c-*правилами отношения* ρ изменить в соответствии с утверждениями I—IV данного параграфа, отмеченными ★, то в формулировке принципа индукции для N_c-выводов из условия 1 можно удалить требование монотонности отношения ρ. ☆

Пусть ρ_1 и ρ_2 — отношения между конечными множествами формул и формулами. Будем говорить, что ***отношение*** ρ_1 ***согласовано с отношением*** ρ_2, если для любого множества формул Γ и любой формулы F, таких что $\Gamma\rho_1 F$, выполняется $\Gamma\rho_2 F$, т. е. если

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma\rho_1 F \rightarrow \Gamma\rho_2 F).$$

В частности, *отношение* N_c*-выводимости* $\vdash_{N_c}$ *согласовано с отношением* ρ, если для любого множества формул Γ и любой N_c-выводимой из Γ формулы F выполняется $\Gamma\rho F$, т. е. если

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{N_c} F \rightarrow \Gamma\rho F).$$

Например, отношение N_i-выводимости согласовано с отношением N_k-выводимости, поскольку ранее было доказано:

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{N_i} F \rightarrow \Gamma \vdash_{N_k} F).$$

Позже будет доказано, что отношения N_k-выводимости и N_i-выводимости согласованы с отношением семантического следования:

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{N_c} F \rightarrow \Gamma \models F).$$

Теоремы вида «Для любого множества формул Γ и любой N_c-выводимой из Γ формулы F множество формул Γ находится в отношении ρ с F», используя новую терминологию, можно переформулировать так: «Отношение N_c-выводимости согласовано с отношением ρ». Как уже отмечалось, для доказательства такого вида утверждений очень полезной является следующая теорема.

! **ТЕОРЕМА** (*принцип индукции для* N_c*-выводов, вторая форма*). Пусть ρ — отношение между конечными множествами формул и формулами.
Если 1) отношение ρ рефлексивно и монотонно,
и 2) все N_c-правила сохраняют отношение ρ,
то отношение N_c-выводимости согласовано с отношением ρ, т. е. $(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{N_c} F \rightarrow \Gamma\rho F)$.

Доказательство. Пусть Γ и F — такие, что $\Gamma \vdash_{N_c} F$, а $\mathcal{D}_F^{\Delta}$ есть N_c-Δ-F-вывод такой, что $\Delta \subseteq \Gamma$. Тогда, согласно принципу индукции для N_c-выводов в первой форме, $\Delta\rho F$. Отсюда в силу монотонности ρ следует, что $\Gamma\rho F$. ❐

Замечание 2. Можно доказать, что в обеих формах принципа индукции для N_c-выводов условие 1 можно заменить на условие 1': отношение ρ квазирефлексивно. ○

➤ Принцип индукции для N_c-выводов (вторая форма) предоставляет *достаточное условие согласованности отношения* N_c*-выводимости* $\vdash_{N_c}$ *с отношением* ρ.

Возникает вопрос, насколько удобно пользоваться этим достаточным условием, т. е. насколько просто проверить, что отношение ρ удовлетворяет условиям 1 и 2 из принципа индукции для N_c-выводов. Проверка условия 1 практически не представляет никакой сложности. Как правило, нетрудно проверить и условие 2, используя определение понятия *сохранения* N_c*-правилами отношения* ρ. Однако следующее утверждение позволяет сделать эту проверку еще более простой.

Говоря об условных правилах, для простоты изложения ограничимся схемами вида $\dfrac{\mathcal{E} \quad \overset{[\mathcal{H}]}{\mathcal{G}}}{\mathcal{F}}$ (т. е. с одной безусловной и одной условной посылками).

УТВЕРЖДЕНИЕ (*критерий сохранения отношения* ρ). Пусть ρ — рефлексивное, монотонное и транзитивное отношение между множествами формул и формулами.

1. Прямая схема заключений $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$ сохраняет отношение ρ тогда и только тогда, когда для любого набора формул $F_1, \ldots, F_n, F$, соответствующего этой схеме, $\{F_1, \ldots, F_n\}\rho F$ (что будем записывать так: $\{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n\}\rho\mathcal{F}$).

2. Если правила ⊃в и ⊃у сохраняют ρ, то следующие условия эквивалентны:

а) косвенная схема $\dfrac{\mathcal{E} \quad \overset{[\mathcal{H}]}{\mathcal{G}}}{\mathcal{F}}$ сохраняет отношение ρ;

б) прямая схема $\dfrac{\mathcal{E} \quad \mathcal{H} \supset \mathcal{G}}{\mathcal{F}}$ сохраняет отношение ρ;

в) для любых формул E, F, G и H, соответствующих схеме из п. (б), $\{E, H \supset G\}\rho F$ ($\{\mathcal{E}, \mathcal{H} \supset \mathcal{G}\}\rho\mathcal{F}$).

Доказательство.

1. Пусть схема $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$ сохраняет отношение ρ и пусть $F_1, \ldots, F_n$, F — произвольный набор формул, соответствующий этой схеме. Докажем, что $\{F_1, \ldots, F_n\}\rho F$. Обозначим через Γ множество формул $\{F_1, \ldots, F_n\}$. Тогда в силу рефлексивности и монотонности ρ имеем $\Gamma\rho F_1, \ldots, \Gamma\rho F_n$. Отсюда, поскольку схема $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$ сохраняет ρ, получаем, что $\Gamma\rho F$, т. е. $\{F_1, \ldots, F_n\}\rho F$.

Докажем обратное. Допустим, что для любого набора формул F_1, ..., F_n, F, соответствующего схеме $\frac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$, $\{F_1, \ldots, F_n\}\rho F$. Пусть Γ – произвольное множество формул такое, что $\Gamma\rho F_1$, ..., $\Gamma\rho F_n$. Тогда, поскольку ρ транзитивно, из условий $\Gamma\rho F_1$, ..., $\Gamma\rho F_n$ и $\{F_1, \ldots, F_n\}\rho F$ получаем, что $\Gamma\rho F$.

2. Перейдем к косвенным схемам. Сначала докажем эквивалентность предложений (а) и (б). Поскольку правила $\supset$в и $\supset$у сохраняют ρ, то $\Gamma \cup \{H\}\rho G$ тогда и только тогда, когда $\Gamma\rho(H \supset G)$. Следовательно, эквивалентны и следующие два условия

$$\frac{\Gamma\rho \mathcal{E};\ \ \Gamma, \mathcal{H}\rho\, \mathcal{G}}{\Gamma\rho \mathcal{F}} \text{ и } \frac{\Gamma\rho \mathcal{E};\ \Gamma\rho(\mathcal{H} \supset \mathcal{G})}{\Gamma\rho \mathcal{F}},$$

а значит, (а) $\leftrightarrow$ (б).

Эквивалентность предложений (б) и (в) вытекает из п. 1. ❐

Согласно п. 1 доказанной теоремы, например, правило &в сохраняет отношение ρ тогда и только тогда, когда для любых формул A и B выполняется $\{A,B\}\rho(A \,\&\, B)$, т. е.

$$(A)\ (B)\ (\{A, B\}\rho(A \,\&\, B)).$$

Замечание 3. Рассуждая аналогично тому, как мы рассуждали в п. 2, и учитывая, что при доказательстве цепочки (в) $\to$ (б) $\to$ (а) используется только то, что ρ транзитивно и правило $\supset$в сохраняет ρ, можно доказать следующее.

Пусть ρ – транзитивное отношение, а правило $\supset$в сохраняет ρ. Тогда:

1) если для любых формул A, B, C

$$\{A \vee B,\ A \supset C,\ B \supset C\}\rho C,$$

то косвенное правило $\vee$у сохраняет отношение ρ;

2) если для любых формул A и B

$$\{A \supset B,\ A \supset \neg B\}\rho\neg A,$$

то косвенное правило $\neg$в сохраняет отношение ρ.

Таким образом, если правило $\supset$в сохраняет транзитивное отношение ρ, то для доказательства того, что правила $\vee$у и $\neg$в сохраняют отношение ρ, достаточно доказать, что выполняются соответственно условия из п. 1 и 2 данного замечания. ❍

Теорема Гливенко

Вернемся к обсуждению связи между отношениями $\mathrm{N_i}$-выводимости и $\mathrm{N_k}$-выводимости, а также между классами $\mathrm{N_i}$-выводимых и $\mathrm{N_k}$-выводимых формул.

Нам уже известно, что если формула N_i-выводима, то она N_k-выводима. Обратное неверно, что будет доказано позже. Однако справедливо следующее утверждение, известное как *теорема Гливенко*[1]: если формула N_k-выводима, то ее двойное отрицание N_i-выводимо.

Символически это утверждение можно записать так:

$$(F)\ (\vdash_{N_K} F \to \vdash_{N_i} \neg\neg F).$$

Сначала докажем более сильное утверждение. При этом будем использовать следующее обозначение: $\neg\neg\Gamma \leftrightharpoons \{\neg\neg A \mid A \in \Gamma\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для любой формулы F и любого множества формул Γ, если $\Gamma \vdash_{N_K} F$, то $\neg\neg\Gamma \vdash_{N_i} \neg\neg F$.

Символически это утверждение можно записать так:

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{N_K} F \to \neg\neg\Gamma \vdash_{N_i} \neg\neg F).$$

Доказательство. Воспользуемся принципом индукции для N_k-выводов (во второй форме). В качестве отношения ρ возьмем отношение, задаваемое следующим образом:

$$\Gamma\rho F \xleftrightarrow{def} \neg\neg\Gamma \vdash_{N_i} \neg\neg F.$$

Докажем, что $(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{N_K} F \to \Gamma\rho F)$. Согласно принципу индукции для N_k-выводов, достаточно доказать, что отношение ρ рефлексивно и монотонно, а все N_k-правила сохраняют отношение ρ.

Рефлексивность и монотонность отношения ρ следует из рефлексивности и монотонности отношения $\vdash_{N_i}$ соответственно.

Для доказательства того, что все прямые N_k-правила сохраняют отношение ρ, в силу критерия сохранения отношения ρ (п. 1), достаточно проверить, что для любых формул A и B выполняется:

1) $\neg\neg(A \& B) \vdash_{N_i} \neg\neg A$; $\neg\neg(A \& B) \vdash_{N_i} \neg\neg B$;

2) $\neg\neg A, \neg\neg B \vdash_{N_i} \neg\neg(A \& B)$;

3) $\neg\neg A \vdash_{N_i} \neg\neg(A \vee B)$; $\neg\neg B \vdash_{N_i} \neg\neg(A \vee B)$;

4) $\neg\neg A, \neg\neg(A \supset B) \vdash_{N_i} \neg\neg B$;

---

[1] В. И. Гливенко (1897–1940) – советский математик, логик.

5) $\neg\neg A, \neg\neg\neg A \vdash_{N_i} \neg\neg B$;

6) $\neg\neg\neg\neg A \vdash_{N_i} \neg\neg A$.

Все эти утверждения можно легко доказать построением соответствующих деревьев N_i-вывода, что оставляем читателю в качестве упражнения.

Нетрудно проверить, что косвенные правила также сохраняют отношение ρ, а именно, для любых A, B, C и Γ:

7) $\dfrac{\neg\neg\Gamma, \neg\neg A \vdash_{N_i} \neg\neg B}{\neg\neg\Gamma \vdash_{N_i} \neg\neg(A \supset B)}$;

8) $\dfrac{\neg\neg\Gamma, \neg\neg A \vdash_{N_i} \neg\neg B; \quad \neg\neg\Gamma, \neg\neg A \vdash_{N_i} \neg\neg\neg B}{\neg\neg\Gamma \vdash_{N_i} \neg\neg\neg A}$;

9) $\dfrac{\neg\neg\Gamma, \neg\neg A \vdash_{N_i} \neg\neg C; \quad \neg\neg\Gamma, \neg\neg B \vdash_{N_i} \neg\neg C}{\neg\neg\Gamma, \neg\neg(A \vee B) \vdash_{N_i} \neg\neg C}$.

Докажем, к примеру, что правило $\supset$в сохраняет отношение ρ, т. е. утверждение 7. Допустим, что $\neg\neg\Gamma, \neg\neg A \vdash_{N_i} \neg\neg B$. Пусть $\dfrac{\neg\neg\Delta \quad \neg\neg A}{\neg\neg B}$ (где $\Delta \subseteq \Gamma$) есть некоторое дерево N_i-вывода с корнем $\neg\neg B$ и множеством зеленых листьев, содержащемся в множестве $\neg\neg\Gamma \cup \{\neg\neg A\}$. Используя это дерево вывода, построим дерево N_i-вывода с корнем $\neg\neg(A \supset B)$, множество зеленых листьев которого $\neg\neg\Delta$ содержится в множестве $\neg\neg\Gamma$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[B]^2}{A \supset B} \quad [\neg(A \supset B)]^1}{\neg B}(2) \qquad \dfrac{\neg\neg\Delta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^4 \quad [\neg A]^3}{B}}{A \supset B}(4) \quad [\neg(A \supset B)]^1}{\neg\neg A}(3)}{\neg\neg B}}{\neg\neg(A \supset B)}(1)$$

Таким образом, доказано, что $\neg\neg\Gamma \vdash_{N_i} \neg\neg(A \supset B)$.

Доказательство остальных пунктов построением соответствующих деревьев N_i-вывода оставляем читателю в качестве полезного и несложного упражнения. ❐

Как следствие доказанной теоремы, при пустом множестве Γ получаем известную теорему, отражающую связь между классами N_i-выводимых и N_k-выводимых формул.

! **ТЕОРЕМА** (*Гливенко*). Для любой формулы ЯЛВ, если эта формула N_k-выводима, то N_i-выводимо ее двойное отрицание, т. е.

$$(F)\ (\vdash_{N_k} F \to \vdash_{N_i} \neg\neg F).$$

Замечание 4. Доказательство двух последних теорем имеет конструктивный характер, что позволяет построить алгоритм, который для любых формулы F и множества формул Δ всякий N_k-Δ-F- вывод перерабатывает в N_i-$\neg\neg\Delta$-$\neg\neg F$-вывод (в частности, при пустом Δ). ❍

Весьма замечательным является еще одно следствие доказанного выше утверждения.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого множества формул Г и любой формулы F:

1) $\Gamma \vdash_{N_k} \neg F$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash_{N_i} \neg F$;

2) $\vdash_{N_k} \neg F$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{N_i} \neg F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Очевидно, если $\Gamma \vdash_{N_i} \neg F$, то $\Gamma \vdash_{N_k} \neg F$. Докажем обратное. Пусть $\Gamma \vdash_{N_k} \neg F$. Тогда, согласно доказанному выше утверждению, $\neg\neg\Gamma \vdash_{N_i} \neg\neg\neg F$. Кроме того, $\neg\neg\neg F \vdash_{N_i} \neg F$. Действительно, соответствующее дерево N_i-вывода имеет следующий вид:

$$\cfrac{\cfrac{[F]^1 \quad [\neg F]^2}{\neg\neg F}{\scriptstyle\ \neg\text{в}\ (2)} \qquad \neg\neg\neg F}{\neg F}{\scriptstyle\ \neg\text{в}\ (1)}$$

Следовательно, в силу транзитивности отношения N_i-выводимости, $\neg\neg\Gamma \vdash_{N_i} \neg F$. Кроме того, $\Gamma \vdash_{N_i} \neg\neg\Gamma$, поскольку $A \vdash_{N_i} \neg\neg A$ для любой формулы A. Таким образом, $\Gamma \vdash_{N_i} \neg F$.

2. Утверждение п. 2 получается из утверждения п. 1 при пустом множестве Г. ❐

§2.7. Характеристики систем естественного вывода

В предыдущих параграфах были построены две основные системы естественного вывода: N_i и N_k. Возникает целый ряд вопросов, связанных со свойствами этих систем, ответы на которые так или иначе характеризуют отношения N_i- и N_k-выводимости, классы N_i- и N_k-выводимых формул. Прежде чем перечислить эти вопросы и ввести характеристики систем естественного вывода, расширим класс рассматриваемых систем.

Наряду с системами N_i и N_k будем рассматривать системы, которые получаются из этих систем заменой на новые или удалением некоторых из их правил, а также добавлением новых правил. Для обозначения произвольных систем из расширенного класса будем использовать символы N, N_1, N_2. Для таких систем основные определения (N-Δ-F-вывода, отношения N-выводимости, сохранения N-правилом отношения ρ, согласованности отношения N-выводимости с отношением ρ и т. п.) формулируются аналогично тому, как это сделано для систем N_i и N_k (с учетом изменения множества правил). Кроме того, для произвольной системы естественного вывода N можно сформулировать и доказать принцип индукции для N-выводов аналогично тому, как это сделано для систем N_i и N_k.

➤➤ В этом параграфе будут рассмотрены следующие характеристики систем естественного вывода:

1) непротиворечивость;
2) семантическая корректность;
3) семантическая полнота (или полнота относительно класса тавтологий);
4) синтаксическая полнота (или дедуктивная полнота);
5) независимость правил заключения.

Непротиворечивость систем естественного вывода !

Пусть N − произвольная система естественного вывода.

Систему естественного вывода N называют ***противоречивой системой***, если существует формула F такая, что $\vdash_N F$ и $\vdash_N \neg F$, и ***непротиворечивой***, если такой формулы не существует.

Непротиворечивость является одним из самых важных условий, которым должна удовлетворять логическая система. Значение этого условия поясняет следующая теорема.

ТЕОРЕМА (*критерий противоречивости* системы). Пусть N — произвольная система естественного вывода, среди правил которой есть правило ¬у. Система N является противоречивой тогда и только тогда, когда любая формула N-выводима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если любая формула N-выводима, то, очевидно, что система N противоречива.

Допустим теперь, что система N, содержащая правило ¬у среди исходных, противоречива, и пусть формула F такая, что $\vdash_{\mathrm{N}} F$ и $\vdash_{\mathrm{N}} \neg F$, а $\mathcal{D}_F^{\varnothing}$ и $\mathcal{D}_{\neg F}^{\varnothing}$ — соответствующие деревья N-вывода. Тогда для любой формулы B дерево $\dfrac{\mathcal{D}_F^{\varnothing}\ \mathcal{D}_{\neg F}^{\varnothing}}{B}$, построенное по правилу ¬у, является деревом N-вывода формулы B с пустым множеством зеленых листьев, т. е. $\vdash_{\mathrm{N}} B$. Следовательно, если N — противоречивая система с правилом ¬у, то в ней выводима любая формула. ❒

Таким образом, противоречивые системы, имеющие правило ¬у, не представляют собой никакого интереса, поскольку в них выводимы все формулы.

Сразу возникает вопрос: являются ли непротиворечивыми системы $\mathrm{N_i}$ и $\mathrm{N_k}$?

Прежде чем будет получен ответ на этот вопрос, выясним:

Какова связь между отношениями $\mathrm{N_i}$- и $\mathrm{N_k}$-выводимости, с одной стороны, и отношением семантического следования, с другой?

Как связаны классы $\mathrm{N_i}$- и $\mathrm{N_k}$-выводимых формул с классом тавтологий?

Сначала докажем следующую теорему.

! **ТЕОРЕМА** (*о согласованности отношения* $\mathrm{N_c}$-*выводимости* $\vdash_{\mathrm{N_c}}$ *с отношением семантического следования* $\models$). Отношение $\mathrm{N_c}$-выводимости согласовано с отношением семантического следования, т. е. каковы бы ни были множество формул Γ и формула F, если F $\mathrm{N_c}$-выводима из Γ, то F семантически следует из Γ.

Символически это утверждение можно записать так:

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} F \rightarrow \Gamma \models F).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся принципом индукции для N_c-выводов (во второй форме).

Во-первых, отношение семантического следования $\models$ рефлексивно и монотонно. Во-вторых, все N_c-правила сохраняют отношение семантического следования, что непосредственно отражено в известных свойствах семантического следования (§ 1.6). Таким образом, согласно принципу индукции для N_c-выводов во второй форме, отношение N_c-выводимости согласовано с отношением семантического следования. ❐

! Систему естественного вывода N называют ***семантически корректной системой***, если всякая N-выводимая формула является тавтологией, т. е. если $(F)\ (\vdash_N F \to\ \models F)$.

! **ТЕОРЕМА** (*о семантической корректности систем* N_i *и* N_k). Всякая N_c-выводимая формула является тавтологией, т. е.

$$(F)\ (\vdash_{N_c} F \to\ \models F).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматриваемое утверждение получается из теоремы о согласованности отношения N_c-выводимости с отношением семантического следования при пустом множестве Г. ❐

В дальнейшем теорему о семантической корректности систем N_i и N_k будем также называть теоремой *о согласованности систем* N_i *и* N_k *с классом тавтологий.*

! **ТЕОРЕМА** (*о непротиворечивости систем* N_i и N_k). Системы N_i и N_k непротиворечивы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся методом доказательства приведением к нелепости. Предположим, что N_c — какая-либо из систем N_i или N_k, противоречива, и пусть формула F такая, что $\vdash_{N_c} F$ и $\vdash_{N_c} \neg F$. Тогда, по теореме о семантической корректности систем N_i и N_k, обе формулы F и $\neg F$ являются тавтологиями, т. е. $\models F$ и $\models \neg F$, что невозможно. Следовательно, обе системы N_i и N_k непротиворечивы. ❐

Семантическая полнота классической системы N_k

При выяснении того, как соотносится класс тавтологий с классами N_i- и N_k-выводимых формул, было установлено, что для каждой из этих систем всякая выводимая в ней формула является тавтологией. Верны ли обратные утверждения: всякая ли тавтология выводима в N_i? в N_k? Другими словами, достаточно ли полны списки N_i- и N_k-правил для того, чтобы для всякой тавтологии можно было построить дерево ее вывода в системах N_i и N_k?

Оказывается, что ответы на эти вопросы для систем N_i и N_k разные: для N_k – положительный, а для N_i – отрицательный.

! Систему естественного вывода N называют ***семантически полной*** (или *полной относительно класса тавтологий*), если всякая тавтология N-выводима, т. е. если $(F)\ (\vDash F \to\ \vdash_N F)$.

Докажем, что система N_k полна относительно класса тавтологий. Для этого сначала докажем вспомогательное утверждение, которое играет основную роль в доказательстве теоремы о полноте системы N_k.

Будем использовать следующие обозначения: $A^{И} \leftrightharpoons A$, $A^{Л} \leftrightharpoons \neg A$, где A – произвольная формула.

! **ЛЕММА 1** (*основная*). Каковы бы ни были формула F, ее допустимый список $\omega = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ и истинностный набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

$$p_{i_1}^{\alpha_1}, \ldots, p_{i_n}^{\alpha_n} \vdash_{N_C} F^{|F|_\alpha^\omega}.$$

Доказательство. Воспользуемся принципом индукции по построению формулы (§ 1.2).

Базис индукции. Пусть формула F есть пропозициональная переменная, а $\omega = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ – произвольный ее допустимый список. Это означает, что $F \rightleftharpoons p_{i_k}$ для некоторого k ($k = 1, \ldots, n$). Если α – произвольный истинностный набор длины n, то $|F|_\alpha^\omega = \alpha_k$ и $F^{|F|_\alpha^\omega} = p_{i_k}^{\alpha_k}$. Тогда, в силу рефлексивности и монотонности отношения N_c-выводимости,

$$p_{i_1}^{\alpha_1}, \ldots, p_{i_k}^{\alpha_k}, \ldots, p_{i_n}^{\alpha_n} \vdash_{N_C} p_{i_k}^{\alpha_k}.$$

Шаг индукции. Допустим, что для любого допустимого списка $\omega = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ формул A и B и любого истинностного набора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ выполняется

$$p_{i_1}^{\alpha_1}, \ldots, p_{i_n}^{\alpha_n} \vdash_{N_C} A^{|A|_\alpha^\omega} \text{ и } p_{i_1}^{\alpha_1}, \ldots, p_{i_n}^{\alpha_n} \vdash_{N_C} B^{|B|_\alpha^\omega}$$

(*предположение индукции*). Докажем, что соответствующие утверждения верны для формул $A \mathbin{\&} B$, $A \vee B$, $A \supset B$, $\neg A$.

I. Сначала проведем доказательство для формулы $A \supset B$.

Пусть $\omega = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$ – произвольный допустимый список формулы $A \supset B$, а $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – произвольный истинностный набор длины n. Очевидно, ω является допустимым списком как формулы A, так и формулы B. Тогда по предположению индукции имеем: $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} A^{|A|^{\omega}_{\alpha}}$ и $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} B^{|B|^{\omega}_{\alpha}}$, где $\Gamma \leftrightharpoons \{p^{\alpha_1}_{i_1}, \ldots, p^{\alpha_n}_{i_n}\}$. Докажем, что $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} (A \supset B)^{|A \supset B|^{\omega}_{\alpha}}$. В силу транзитивности отношения $\vdash_{\mathrm{N_c}}$ достаточно доказать, что

$$A^{|A|^{\omega}_{\alpha}},\ B^{|B|^{\omega}_{\alpha}} \vdash_{\mathrm{N_c}} (A \supset B)^{|A \supset B|^{\omega}_{\alpha}}. \tag{1}$$

Рассмотрим все возможные случаи.

1. Допустим, что $|A \supset B|^{\omega}_{\alpha} = \text{Л}$. Тогда $|A|^{\omega}_{\alpha} = \text{И}$, а $|B|^{\omega}_{\alpha} = \text{Л}$. В этом случае выводимость (1) имеет вид $A, \neg B \vdash_{\mathrm{N_c}} \neg(A \supset B)$. Докажем ее, построив соответствующее дерево $\mathrm{N_c}$-вывода:

$$\dfrac{\dfrac{A \quad [A \supset B]^1}{B}\,{\supset}\text{у} \qquad \neg B}{\neg(A \supset B)}\,{\neg}\text{в}\ (1)$$

2. Допустим, что $|A \supset B|^{\omega}_{\alpha} = \text{И}$. Тогда $|A|^{\omega}_{\alpha} = \text{Л}$ или $|B|^{\omega}_{\alpha} = \text{И}$.

2.1. Допустим, что $|A|^{\omega}_{\alpha} = \text{Л}$. В этом случае достаточно доказать, что $\neg A \vdash_{\mathrm{N_c}} A \supset B$. Докажем эту выводимость построением дерева $\mathrm{N_c}$-вывода:

$$\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad \neg A}{B}\,{\neg}\text{у}}{A \supset B}\,{\supset}\text{в}\ (1)$$

2.2. Допустим, что $|B|^{\omega}_{\alpha} = \text{И}$. В этом случае достаточно доказать, что $B \vdash_{\mathrm{N_c}} A \supset B$. Докажем эту выводимость, построив соответствующее дерево $\mathrm{N_c}$-вывода:

$$\dfrac{B}{A \supset B}\,{\supset}\text{в}$$

II. Теперь рассмотрим формулу A & B. Аналогично случаю I, достаточно доказать, что для любых ω и α

$$A^{|A|^{\omega}_{\alpha}},\ B^{|B|^{\omega}_{\alpha}} \vdash_{\mathrm{N_C}} (A \& B)^{|A\&B|^{\omega}_{\alpha}}. \qquad (2)$$

Рассмотрим все возможные случаи.

Если $|A\&B|^{\omega}_{\alpha}$ = И, то достаточно доказать, что A, $B \vdash_{\mathrm{N_C}} A \& B$.

Если $|A|^{\omega}_{\alpha}$ = Л, то достаточно доказать, что $\neg A \vdash_{\mathrm{N_C}} \neg(A \& B)$.

Если $|B|^{\omega}_{\alpha}$ = Л, то достаточно доказать, что $\neg B \vdash_{\mathrm{N_C}} \neg(A \& B)$.

Первый из этих случаев тривиален. Два других аналогичны друг другу. Поэтому построим соответствующее дерево вывода только для второго случая:

$$\dfrac{\dfrac{[A\&B]^1}{A}\,{\scriptstyle \&\,\text{у}} \quad \neg A}{\neg(A\&B)}\,{\scriptstyle \neg\text{в}\ (1)}$$

Рассмотрение случаев формул $A \vee B$ и $\neg A$ оставляем читателю. ❐

ЛЕММА 2. Каковы бы ни были множество формул Γ, формула F и пропозициональная переменная q, если Γ, $q \vdash_{\mathrm{N_k}} F$ и Γ, $\neg q \vdash_{\mathrm{N_k}} F$, то $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_k}} F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что Γ, $q \vdash_{\mathrm{N_k}} F$ и Γ, $\neg q \vdash_{\mathrm{N_k}} F$. Пусть $\dfrac{\Delta_1\ \ q}{F}$ и $\dfrac{\Delta_2\ \ \neg q}{F}$ – некоторые соответствующие деревья $\mathrm{N_k}$-вывода такие, что $\Delta_1 \subseteq \Gamma$ и $\Delta_2 \subseteq \Gamma$. Обозначим через $\dfrac{\varnothing}{q \vee \neg q}$ какой-либо $\mathrm{N_k}$-вывод формулы $q \vee \neg q$ с пустым множеством зеленых листьев, существование которого обеспечено тем, что $\vdash_{\mathrm{N_k}} q \vee \neg q$. Тогда дерево формул

$$\dfrac{\dfrac{\varnothing}{q \vee \neg q} \quad \dfrac{\Delta_1\ \ [q]^1}{F} \quad \dfrac{\Delta_2\ \ [\neg q]^1}{F}}{F}\,{\scriptstyle \vee\,\text{у}\ (1)}$$

– дерево N_k-вывода формулы F, множество зеленых листьев которого $\Delta_1 \cup \Delta_2$ является подмножеством Г. Следовательно, $\Gamma \vdash_{N_k} F$. ❒

! ТЕОРЕМА (*о полноте* N_k *относительно класса тавтологий*).

Всякая тавтология N_k-выводима:

$$(F)\ (\vDash F \to \ \vdash_{N_k} F).$$

Доказательство. Пусть F – произвольная тавтология, $\omega = (p_{i_1}, ..., p_{i_n})$ – собственный список переменных формулы F. Поскольку F – тавтология, то для любого набора $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ верно, что $|F|_\alpha^\omega =$ И, а значит, $F^{|F|_\alpha^\omega} = F$. Следовательно, по основной лемме для любых истинностных значений $\alpha_1, ..., \alpha_n$ выполняется

$$p_{i_1}^{\alpha_1}, ..., p_{i_n}^{\alpha_n} \vdash_{N_k} F. \qquad (1)$$

Отсюда, полагая сначала $\alpha_n =$ И, а затем $\alpha_n =$ Л, получаем, что для любых $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ выполняется соответственно:

$$p_{i_1}^{\alpha_1}, ..., p_{i_{n-1}}^{\alpha_{n-1}}, \ p_{i_n} \vdash_{N_k} F;$$

$$p_{i_1}^{\alpha_1}, ..., p_{i_{n-1}}^{\alpha_{n-1}}, \ \neg p_{i_n} \vdash_{N_k} F.$$

Следовательно, согласно лемме 2, для любых $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$

$$p_{i_1}^{\alpha_i}, ..., p_{i_{n-1}}^{\alpha_{n-1}} \vdash_{N_k} F. \qquad (2)$$

Отметим, что утверждение (2) содержит на одну гипотезу меньше по сравнению с утверждением (1).

Повторяя аналогичные рассуждения последовательно для $\alpha_{n-1}, ..., \alpha_1$, удаляем одну за другой гипотезы в утверждении (2). На предпоследнем шаге получаем: для любого α_1 имеет место выводимость $p_{i_1}^{\alpha_1} \vdash_{N_k} F$, т. е. $p_{i_1} \vdash_{N_k} F$, и $\neg p_{i_1} \vdash_{N_k} F$. Отсюда по лемме 2, наконец, получаем, что $\vdash_{N_k} F$. ❒

Объединяя вместе теорему о согласованности N_k с классом тавтологий и теорему о полноте N_k относительно класса тавтологий, получаем в качестве следствия утверждение, которое также часто называют теоремой о полноте N_k:

СЛЕДСТВИЕ 1. Класс N_k – выводимых формул совпадает с классом тавтологий, т. е. $(F)\ (\vdash_{N_k} F \leftrightarrow \vDash F)$.

Замечание 1. Аналогичное утверждение для N_i неверно. Позже будут приведены примеры тавтологий, невыводимых в N_i (см. § 2.12). Таким образом, система N_i неполна относительно класса тавтологий. ○

СЛЕДСТВИЕ 2. Отношения $\vDash$ и $\vdash_{N_k}$ согласованы друг с другом, т. е. $(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{N_k} F \leftrightarrow \Gamma \vDash F)$.

Разрешимость систем естественного вывода

Перейдем к следующей характеристике систем естественного вывода.

Систему естественного вывода N называют ***разрешимой системой***, если существует алгоритм, который по произвольной формуле F позволяет выяснить, является ли она N-выводимой.

ТЕОРЕМА. Система N_k разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку класс N_k-выводимых формул совпадает с классом тавтологий, для исследования формулы F на N_k-выводимость достаточно выяснить, является ли она тавтологией. Класс тавтологий разрешим, так как существует алгоритм, который по произвольной формуле F позволяет определить, является ли она тавтологией. Один из таких алгоритмов заключается в построении истинностной таблицы для формулы F. ❒

➤ **Замечание 2**. Существует также алгоритм, который позволяет по любому конечному множеству формул Γ и любой формуле F выяснить, имеет ли место выводимость $\Gamma \vdash_{N_k} F$. Действительно, $F_1, ..., F_n \vdash_{N_k} F$ тогда и только тогда, когда

$$\vdash_{N_k} F_1 \supset (F_2 \supset ...\ (F_{n-1} \supset (F_n \supset F))\ ...).$$

Следовательно, чтобы выяснить, имеет ли место выводимость $F_1, ..., F_n \vdash_{N_k} F$, достаточно выяснить, является ли тавтологией формула $F_1 \supset (F_2 \supset ...\ (F_{n-1} \supset (F_n \supset F))\ ...)$. ○

➤➤ **Замечание 3**. Система N_i также разрешима, однако разрешающий ее алгоритм весьма сложен, и его построение выходит за рамки данного курса. ❍

К основным характеристикам систем естественного вывода относятся также *дедуктивная полнота* и *независимость*, которые будут рассмотрены в § 2.9 и 2.12.

§ 2.8. Производные и допустимые правила

В дальнейшем изложении N-правила заключения будем при необходимости называть *основными* или *исходными* N-правилами, чтобы отличать их от так называемых производных N-правил.

При изучении той или иной системы естественного вывода N возникают следующие вопросы: как изменится класс N-выводимых формул, если к исходным правилам добавить новое правило; при каких условиях он расширится, а при каких останется прежним? Например, добавив к правилам системы N_i новое правило ¬¬у, мы получили систему N_k, при этом класс N_k-выводимых формул оказывается шире, чем класс N_i-выводимых формул (что будет доказано в § 2.12). В этом параграфе будет идти речь о правилах, добавление которых к исходным N-правилам не увеличивает класс выводимых формул.

! Пусть N − система естественного вывода. Будем называть ***производным* N*-правилом*** всякую схему заключений, сохраняющую отношение N-выводимости.

Таким образом, прямая схема $\frac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$ является (прямым) производным N-правилом тогда и только тогда, когда для любого множества формул Γ и любого набора формул F_1, ..., F_n, F, соответствующего этой схеме,

$$\frac{\Gamma \vdash_N F_1;\ \ldots;\ \Gamma \vdash_N F_n}{\Gamma \vdash_N F}$$

Говоря об условных производных правилах, для простоты изложения ограничимся схемами вида $\frac{\mathcal{E}\ \ \overset{[\mathcal{H}]}{\mathcal{G}}}{\mathcal{F}}$.

Условная схема $\dfrac{\mathcal{E}\quad \overset{[\mathcal{H}]}{\mathcal{G}}}{\mathcal{F}}$ является (условным) производным N-правилом тогда и только тогда, когда для любого множества формул Γ и любых формул E, F, G и H, соответствующих этой схеме,

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} E;\ \Gamma, H \vdash_{\mathrm{N}} G}{\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} F}$$

Оказывается, говоря о производных правилах для систем с правилами ⊃у и ⊃в, можно ограничиться только прямыми правилами.

УТВЕРЖДЕНИЕ (*о связи между косвенными и прямыми производными правилами*). Пусть N – система, среди исходных правил которой есть правила ⊃у и ⊃в. Косвенная схема $\dfrac{\mathcal{E}\quad \overset{[\mathcal{H}]}{\mathcal{G}}}{\mathcal{F}}$ является производным N-правилом тогда и только тогда, когда является производным N-правилом соответствующая прямая схема $\dfrac{\mathcal{E}\quad \mathcal{H} \supset \mathcal{G}}{\mathcal{F}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку среди N-правил есть правила ⊃у и ⊃в, то Γ, $H \vdash_{\mathrm{N}} G$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} H \supset G$. Следовательно, условия

$$\frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} E;\ \Gamma, H \vdash_{\mathrm{N}} G}{\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} F} \quad \text{и} \quad \frac{\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} E;\ \Gamma \vdash_{\mathrm{N}} H \supset G}{\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} F},$$

означающие, что рассматриваемые схемы являются производными, также эквивалентны. ❒

ТЕОРЕМА (*критерий производности правила*).

1. Прямая схема заключений $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$ является производным N-правилом тогда и только тогда, когда для любого набора формул $F_1, \ldots, F_n, F$, соответствующего этой схеме, $F_1, \ldots, F_n \vdash_{\mathrm{N}} F$ $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash_{\mathrm{N}} \mathcal{F})$.

2. Если правила $\supset$у и $\supset$в являются исходными для N, то косвенная схема $\dfrac{\mathcal{E} \quad \overset{[\mathcal{H}]}{\mathcal{G}}}{\mathcal{F}}$ является производным N-правилом тогда и только тогда, когда для любых формул E, F, G и H, соответствующих этой схеме, $E, H \supset G \vdash_{\mathrm{N}} F$ $(\mathcal{E}, \mathcal{H} \supset \mathcal{G} \vdash_{\mathrm{N}} \mathcal{F})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Отношение N-выводимости $\vdash_{\mathrm{N}}$, как известно, рефлексивно, монотонно и транзитивно. Следовательно, согласно критерию сохранения отношения ρ (§ 2.6), схема $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$ сохраняет отношение $\vdash_{\mathrm{N}}$ (т. е. является производным N-правилом) тогда и только тогда, когда для любого набора формул F_1, ..., F_n, F, соответствующего этой схеме, $F_1, \ldots, F_n \vdash_{\mathrm{N}} F$.

2. Утверждение пункта 2 следует из утверждения пункта 1 и утверждения о связи между косвенными и прямыми производными правилами.

Заметим, что приведенное доказательство вместе с доказательством предыдущего утверждения почти дословно повторяют доказательство критерия сохранения отношения ρ (из § 2.6). Дело в том, что доказанная теорема и предшествующее предложение непосредственно следуют из критерия сохранения отношения ρ, поскольку отношение $\vdash_{\mathrm{N}}$ рефлексивно, монотонно и транзитивно. ❐

П р и м е р ы.

1. Схема $\dfrac{\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \quad \neg\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$ является производным $\mathrm{N_c}$-правилом, поскольку $A \vee B, \neg B \vdash_{\mathrm{N_c}} A$ для любых формул A и B, что нетрудно доказать построением соответствующего дерева $\mathrm{N_c}$-вывода.

2. Косвенная схема

$$\frac{\overset{[\mathcal{A}]}{C} \quad \overset{[\neg\mathcal{A}]}{C}}{C}$$

является производным $\mathrm{N_k}$-правилом. Действительно, поскольку $A \supset C, \neg A \supset C \vdash_{\mathrm{N_k}} C$ для любых формул A и C, что нетрудно доказать построением соответствующего дерева N_k-вывода. Заметим, что можно было не прибегать к доказанным выше утверждениям, а непосредственно следуя определению, доказать, что для любых Γ, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$

$$\frac{\Gamma, \mathcal{A} \vdash_{N_k} \mathcal{C} \text{ и } \Gamma, \neg\mathcal{A} \vdash_{N_k} \mathcal{C}}{\Gamma \vdash_{N_k} \mathcal{C}} \quad \bigcirc$$

В зависимости от того, является схема заключений прямой или косвенной, производное N-правило также будем называть прямым или косвенным.

Замечание 1. Очевидно, всякое производное N_i-правило является производным N_k-правилом. Обратное неверно, что будет доказано позже. ❍

➤➤ Построением соответствующих деревьев N_c-вывода можно доказать, что следующие схемы являются производными N_c-правилами:

1) $\dfrac{\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{C})}{\mathcal{B} \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{C})}$ – правило перестановки посылок;

2) $\dfrac{\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{C})}{\mathcal{A} \ \& \ \mathcal{B} \supset \mathcal{C}}$ – правило соединения посылок;

3) $\dfrac{\mathcal{A} \ \& \ \mathcal{B} \supset \mathcal{C}}{\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{C})}$ – правило разъединения посылок;

4) $\dfrac{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}}{\neg\mathcal{B} \supset \neg\mathcal{A}}$ – правило контрапозиции;

5) $\dfrac{\mathcal{A} \supset \mathcal{B} \quad \mathcal{B} \supset \mathcal{C}}{\mathcal{A} \supset \mathcal{C}}$ – правило силлогизма;

6) $\dfrac{\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \quad \neg\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$ – правило доказательства исключением случаев;

7) $\dfrac{\mathcal{A}}{\neg\neg\mathcal{A}}$ – правило введения двойного отрицания;

8) $\dfrac{\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})}{\neg\mathcal{A} \ \& \ \neg\mathcal{B}}$, $\dfrac{\neg\mathcal{A} \& \neg\mathcal{B}}{\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})}$, $\dfrac{\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}}{\neg(\mathcal{A} \ \& \ \mathcal{B})}$ – правила де Моргана в N_i и N_k;

9) $\dfrac{\neg(\mathcal{A} \ \& \ \mathcal{B})}{\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}}$ – правило де Моргана (N_k-правило);

10) $\dfrac{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}}{\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$ — правило выражения $\supset$ через $\vee$ и $\neg$ (N_k-правило);

11) $\dfrac{\neg\mathcal{A} \supset \neg\mathcal{B}}{\mathcal{B} \supset \mathcal{A}}$ — правило обратной контрапозиции (N_k-правило);

12) $\dfrac{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}{\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{B}}$ — правило выражения $\vee$ через $\supset$ и $\neg$;

13) $\dfrac{\neg(\mathcal{A} \supset \mathcal{B})}{\mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{B}}$ — правило преобразования отрицания импликации.

Замечание 2. Схемы 9—11 являются производными N_k-правилами, однако можно доказать, что они не являются производными N_i-правилами. Все остальные схемы являются производными как для N_k, так и для N_i. ❍

Теперь остановимся на вопросе, как по произвольной схеме заключений выяснить, является ли она производным N_i- или N_k-правилом? Для системы N_k эта проблема решается легко.

ТЕОРЕМА. Схема заключений является производным N_k-правилом тогда и только тогда, когда она сохраняет отношение семантического следования $\models$.

Доказательство. Поскольку правила $\supset$в и $\supset$у сохраняют отношение $\models$, то, согласно критерию сохранения отношения ρ, случай косвенного правила сводится к случаю прямого правила. Итак, рассмотрим произвольную прямую схему $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$. В силу согласованности отношений N_k-выводимости и семантического следования, для любых формул F_1, ..., F_n, F

$$F_1, \ldots, F_n \vdash_{N_k} F \leftrightarrow F_1, \ldots, F_n \models F.$$

Теперь осталось только еще раз применить критерий сохранения отношения ρ (§ 2.6), рассмотрев в качестве ρ отношения $\vdash_{N_k}$ и $\models$. ❐

Замечание 3. Позже будет доказано, что аналогичное утверждение для N_i-производных правил не имеет места, однако верно следующее: всякое N_i-производное правило сохраняет отношение $\models$. ❍

Пользуясь только что доказанной теоремой и последующим замечанием, можно доказать, например, что следующие схемы не являются ни N_i-, ни N_k-производными:

$$\frac{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}}{\neg\mathcal{A} \supset \neg\mathcal{B}}; \quad \frac{\neg(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})}{\neg\mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{B}}; \quad \frac{\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}}{\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})}.$$

Равнообъемные системы

Системы естественного вывода N_1 и N_2 называют ***равнообъемными системами*** и пишут $N_1 \sim N_2$, если классы выводимых в них формул совпадают, т. е. если

$$(F)\ (\vdash_{N_1} F \leftrightarrow \vdash_{N_2} F).$$

Очевидно, для любых систем N_1 и N_2, если отношения N_1-выводимости и N_2-выводимости согласованы друг с другом, т. е. если

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{N_1} F \leftrightarrow \Gamma \vdash_{N_2} F),$$

то системы N_1 и N_2 равнообъемны.

! **ТЕОРЕМА** (*критерий равнообъемности систем естественного вывода*). Пусть N_1 и N_2 – системы, среди правил которых есть правила $\supset$у и $\supset$в. Системы N_1 и N_2 равнообъемны тогда и только тогда, когда всякое N_1-правило является производным N_2-правилом и наоборот.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что следующие три условия эквивалентны:

1) $(F)\ (\vdash_{N_1} F \leftrightarrow \vdash_{N_2} F)$ (т. е. системы N_1 и N_2 равнообъемны);

2) $(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{N_1} F \leftrightarrow \Gamma \vdash_{N_2} F)$ (т. е. отношения $\vdash_{N_1}$ и $\vdash_{N_2}$ согласованы друг с другом);

3) всякое N_1-правило является производным N_2-правилом и наоборот.

Сначала докажем цепочку $3 \to 2 \to 1$.

Пусть всякое N_1-правило является производным N_2-правилом и наоборот. Поскольку отношение $\vdash_{N_2}$ рефлексивно и монотонно, а всякое N_1-правило является производным N_2-правилом, т. е. сохраняет отношение $\vdash_{N_2}$, то в силу принципа индукции для

N_1-выводов (во второй форме), $\vdash_{N_1}$ согласовано с $\vdash_{N_2}$. Аналогично можно доказать, что $\vdash_{N_2}$ согласовано с $\vdash_{N_1}$. Таким образом, $3 \to 2$. Из условия 2 при пустом множестве Г получаем 1. Таким образом, $2 \to 1$.

Теперь докажем цепочку $1 \to 2 \to 3$.

Сначала докажем, что если N_1 и N_2 – системы, среди правил которых есть правила ⊃у и ⊃в, то $1 \to 2$.

Пусть системы N_1 и N_2 равнообъемны. Докажем, что отношения $\vdash_{N_1}$ и $\vdash_{N_2}$ согласованы друг с другом. Пусть Γ и F – произвольные. Случай, когда $\Gamma = \varnothing$, тривиален. Если $\Gamma = \{F_1, ..., F_n\}$, то, используя правила ⊃у и ⊃в, получаем:

$$\Gamma \vdash_{N_1} F \leftrightarrow \vdash_{N_1} F_1 \supset (F_2 \supset (... (F_n \supset F) ...)),$$

$$\Gamma \vdash_{N_2} F \leftrightarrow \vdash_{N_2} F_1 \supset (F_2 \supset (... (F_n \supset F) ...)).$$

Поскольку N_1 и N_2 равнообъемны, условия, стоящие справа, эквивалентны, а значит, эквивалентны и условия, стоящие слева: $\Gamma \vdash_{N_1} F \leftrightarrow \Gamma \vdash_{N_2} F$. Следовательно, отношения $\vdash_{N_1}$ и $\vdash_{N_2}$ согласованы друг с другом. Таким образом, доказано, что $1 \to 2$.

Докажем теперь, что $2 \to 3$. Пусть отношения $\vdash_{N_1}$ и $\vdash_{N_2}$ согласованы друг с другом. Докажем, что тогда верно утверждение п. 3. В силу критерия производности косвенного правила достаточно ограничиться прямыми правилами. Пусть R – прямая схема $\dfrac{\mathcal{F}_1 ... \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$.

В силу согласованности отношений $\vdash_{N_1}$ и $\vdash_{N_2}$, для любых формул $F_1, ..., F_n, F$

$$F_1, ..., F_n \vdash_{N_1} F \leftrightarrow F_1, ..., F_n \vdash_{N_2} F.$$

Отсюда, в силу критерия производности правила, получаем, что схема заключений R является производным N_1-правилом тогда и только тогда, когда R является производным N_2-правилом. Следовательно, верно утверждение п. 3, а значит, доказано, что $2 \to 3$. ❐

Замечание 4. Наличие правил ⊃у и ⊃в среди исходных правил систем использовалось только в доказательстве цепочки $1 \to 2 \to 3$.

➤➤ Таким образом, имеем следующее важное утверждение, предоставляющее *достаточное условие равнообъемности двух систем*: для любых систем N_1 и N_2, если всякое N_1-правило является производным N_2-правилом и наоборот, то системы N_1 и N_2 равнообъемны. ○

Пусть R – произвольная схема заключений. Обозначим через $N + R$ систему, которая получается добавлением схемы R к правилам системы N в качестве основного правила.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой системы N, если схема R – производное N-правило, то системы N и $N + R$ равнообъемны.

! **СЛЕДСТВИЕ 2** (*характеристическое свойство производного правила*)**.** Пусть N – система, среди правил которой есть правила ⊃у и ⊃в. Схема R является производным N-правилом тогда и только тогда, когда система N равнообъемна системе $N + R$.

Схему R называют ***допустимым*** N-*правилом* (или N-допустимой), если система N равнообъемна системе $N + R$ ($N \sim N + R$).

Таким образом, согласно следствию 1, всякое производное N-правило является N-допустимым, а согласно следствию 2, если N – система, среди правил которой есть правила ⊃у и ⊃в, схема R является производным N-правилом тогда и только тогда, когда она является допустимым N-правилом[1].

! **ТЕОРЕМА.** Система N_k равнообъемна системе N_k^*, которая получается из N_k удалением правила ¬у.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $N_k = N_k^* + (\neg у)$, в силу следствия 1 из критерия равнообъемности систем, достаточно доказать, что правило ¬у является производным правилом системы N_k^*. Докажем, что $A, \neg A \vdash_{N_k^*} B$ для любых формул A и B. Действительно, дерево формул

$$\cfrac{\cfrac{A \quad \neg A}{\neg\neg B}\,\neg в}{B}\,\neg\neg у$$

[1] Иная ситуация в исчислениях гильбертовского типа (см. § 2.13): в интуиционистском исчислении такого типа существуют допустимые, но не производные правила, а в классическом – всякое допустимое правило является производным.

является деревом N_k^*-вывода с корнем B и множеством зеленых листьев $\{A, \neg A\}$. ❐

➤➤ **Замечание 5**. Таким образом, изначально классическую систему естественного вывода можно было строить из N_i заменой правила ¬у на правило ¬¬у. ❍

Дополнительные замечания, относящиеся к косвенным правилам

★ Среди правил систем естественного вывода N_i и N_k три косвенных правила: ⊃в, ∨у и ¬в.

Оказывается, каждое из косвенных N_c-правил ¬в и ∨у можно заменить соответствующим ему прямым правилом таким образом, что классы выводимых формул при этом не изменятся. Можно считать, что каждое из косвенных правил ∨у и ¬в в указанном смысле *эквивалентно* соответствующему прямому правилу.

Рассмотрим сначала правило ∨у. Имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Система N_c равнообъемна системе N_c', которая получается из N_c заменой косвенного правила ∨у прямым правилом (∨у)^{п}

$$\frac{\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \quad \mathcal{A} \supset \mathcal{C} \quad \mathcal{B} \supset \mathcal{C}}{\mathcal{C}}$$

(Косвенное правило ∨у эквивалентно прямому правилу (∨у)^{п}.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из критерия производности правила следует, что:

а) схема (∨у)^{п} является производным N_c-правилом;

б) правило ∨у является производным в системе N_c'.

Отсюда, согласно критерию равнообъемности систем, получаем, что системы N_c и N_c' равнообъемны. ❐

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Система N_c равнообъемна системе, которая получается из N_c заменой косвенного правила ¬в прямым правилом (¬в)^{п}

$$\frac{\mathcal{A} \supset \mathcal{B} \quad \mathcal{A} \supset \neg\mathcal{B}}{\neg\mathcal{A}}$$

(Косвенное правило ¬в эквивалентно прямому правилу (¬в)^{п}.)

Заметим, что при доказательстве утверждений 1 и 2 используется косвенное правило $\supset$в. Именно это правило играет самую существенную роль в реализации идеи естественного вывода. В указанном смысле достаточно иметь единственное косвенное правило $\supset$в.

Можно доказать, что система N_k равнообъемна системе, которая получается из N_k заменой правила $\neg$в на два правила: правило контрапозиции $\dfrac{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}}{\neg\mathcal{B} \supset \neg\mathcal{A}}$ и правило введения двойного отрицания $\dfrac{\mathcal{A}}{\neg\neg\mathcal{A}}$. ☆

§2.9. Дедуктивная полнота

Напомним, что через N + *R* мы обозначаем систему, которая получается из системы N добавлением к ее правилам схемы *R* в качестве основного правила. Уже установлено, что при добавлении производного N-правила к исходным N-правилам класс выводимых формул не расширяется: N + *R* ~ N. Если схема *R* не является производным N-правилом, то класс (N + *R*)-выводимых формул является более широким, чем класс N-выводимых формул (система N + *R* является собственным расширением системы N). При этом система N + *R* может получиться противоречивой. Какие системы можно таким образом расширять, получая в результате непротиворечивые системы?

! Систему естественного вывода N называют ***дедуктивно полной*** (*синтаксически полной*), если для любой схемы заключений *R*, не являющейся производным N-правилом, система N + *R* противоречива.

Например, система N_i не является дедуктивно полной. Действительно, правило снятия двойного отрицания $\neg\neg$у не является производным правилом N_i (что будет доказано позже), а система N_i + $\neg\neg$у совпадает с N_k и, следовательно, непротиворечива.

! **ТЕОРЕМА** (*о дедуктивной полноте* N_k). Система N_k дедуктивно полна, т. е. для любой схемы заключений *R*, не являющейся производным N_k-правилом, система N_k + *R* противоречива.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть схема R не является производным N_k-правилом. Докажем, что система $N_k + R$ противоречива.

В силу характеристического свойства производного правила, класс $(N_k + R)$-выводимых формул шире, чем класс N_k-выводимых формул. Пусть G – такая формула, что $\vdash_{N_k + R} G$, но $\nvdash_{N_k} G$. Поскольку $\nvdash_{N_k} G$, то $\nvDash G$ в силу теоремы о семантической полноте N_k. Пусть $\omega = (p_{i_1}, ..., p_{i_m})$ – собственный список переменных формулы G, а $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$ – произвольный набор той же длины, такой что $|G|^{\omega}_{\alpha} = Л$.

Рассмотрим такую подстановку S в формулу G, при которой вместо каждой переменной p_{i_k} из ω подставляется формула $(p_1 \supset p_1)^{\alpha_k}$ (где $k = 1, ..., m$). Полученную в результате такой подстановки формулу обозначим через G^*. Заметим, что формула G^* имеет единственную переменную p_1.

Докажем, что формула $\neg G^*$ является тавтологией. Действительно, какое бы истинностное значение β_1 мы ни придали переменной p_1, получим $|(p_1 \supset p_1)^{\alpha_k}|^{p_1}_{\beta_1} = \alpha_k$ $(k = 1, ..., m)$. Отсюда следует, что $|G^*|^{p_1}_{\beta_1} = |G|^{\omega}_{\alpha} = Л$ для любого β_1 из множества {И, Л} (см. утверждение о значении результата подстановки из § 1.3). Это как раз и означает, что $\vDash \neg G^*$. Отсюда по теореме о семантической полноте N_k получаем, что формула $\neg G^*$ выводима в N_k, а значит, она выводима и в $N_k + R$: $\vdash_{N_k + R} \neg G^*$.

Вместе с тем, поскольку G выводима в системе $N_k + R$, то и формула G^*, как результат подстановки в нее, также выводима в $N_k + R$: $\vdash_{N_k + R} G^*$. Итак, имеем одновременно: $\vdash_{N_k + R} G^*$ и $\vdash_{N_k + R} \neg G^*$. Таким образом, доказано, что система $N_k + R$ противоречива. ❐

СЛЕДСТВИЕ. Система $N_k + R$ противоречива тогда и только тогда, когда схема заключений R не является производным N_k-правилом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если схема R является производным N_k-правилом, то, согласно характеристическому свойству производного правила, система $N_k + R$ равнообъемна N_k, а значит, непротиворечива.

Если схема R не является производным N_k-правилом, то, согласно теореме о дедуктивной полноте N_k, система $N_k + R$ противоречива. ❐

§2.10. Схемы доказательства от противного и приведением к нелепости

! *Схемой доказательства от противного* называют схему

$$\frac{\begin{matrix}[\neg\mathcal{A}] & [\neg\mathcal{A}] \\ \mathcal{B} & \neg\mathcal{B}\end{matrix}}{\mathcal{A}}$$

Она формализует метод доказательства от противного.

! *Схемой доказательства приведением к нелепости* называют схему, хорошо известную нам как схему введения отрицания ($\neg$в):

$$\frac{\begin{matrix}[\mathcal{A}] & [\mathcal{A}] \\ \mathcal{B} & \neg\mathcal{B}\end{matrix}}{\neg\mathcal{A}}$$

Она формализует метод доказательства приведением к нелепости.

Эти схемы похожи друг на друга, в связи с чем их часто путают. Однако несмотря на некоторое сходство, они имеют разную форму. Причем различаются они не только по форме, но и по существу, и различие это носит принципиальный характер.

Установим сначала взаимосвязь между обсуждаемыми схемами.

Рассмотрим три схемы заключений:

– схему доказательства от противного

$$\frac{\begin{matrix}[\neg\mathcal{A}] & [\neg\mathcal{A}] \\ \mathcal{B} & \neg\mathcal{B}\end{matrix}}{\mathcal{A}} \qquad \text{(I)}$$

– схему снятия двойного отрицания $\neg\neg$у

$$\frac{\neg\neg\mathcal{A}}{\mathcal{A}} \qquad \text{(II)}$$

– схему доказательства приведением к нелепости (¬в)

$$\frac{\begin{matrix}[\mathcal{A}] & [\mathcal{A}] \\ \mathcal{B} & \neg\mathcal{B}\end{matrix}}{\neg\mathcal{A}} \tag{III}$$

ТЕОРЕМА. Схема доказательства от противного (I) эквивалентна совокупности двух схем – схемы снятия двойного отрицания (II) и схемы доказательства приведением к нелепости (III) в следующем смысле. Для любой системы естественного вывода:

1) если схемы (II) и (III) являются основными правилами системы, то схема (I) является ее производным правилом;

2) если схема (I) является основным правилом системы, то схемы (II) и (III) являются ее производными правилами.

Доказательство.

1. Пусть N – система, для которой схемы ¬¬у (II) и ¬в (III) являются основными правилами. Докажем, что схема (I) является производным N-правилом, т. е. для любых формул A, B и любого конечного множества формул Γ

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash_{\mathrm{N}} B; \quad \Gamma, \neg A \vdash_{\mathrm{N}} \neg B}{\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} A}. \tag{I′}$$

Допустим, что $\Gamma, \neg A \vdash_{\mathrm{N}} B$ и $\Gamma, \neg A \vdash_{\mathrm{N}} \neg B$. Пусть $\dfrac{\Delta_1 \;\; \neg A}{\overline{\overline{B}}}$ $(\Delta_1 \subseteq \Gamma)$ и $\dfrac{\Delta_2 \;\; \neg A}{\overline{\overline{\neg B}}}$ $(\Delta_2 \subseteq \Gamma)$ – некоторые соответствующие деревья N-вывода. Докажем, что $\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} A$, построив соответствующее дерево N-вывода:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Delta_1 \quad [\neg A]^1}{\overline{\overline{B}}} \qquad \cfrac{\Delta_2 \quad [\neg A]^1}{\overline{\overline{\neg B}}}}{\neg\neg A}\;\text{III (1)}}{A}\;\text{II}$$

2. Пусть N – система, для которой схема (I) является основной. Докажем, что схемы ¬¬у (II) и ¬в (III) являются производными N-правилами.

Сначала докажем, что правило ¬¬у является производным N-правилом. Поскольку это прямое правило, достаточно доказать, что для любой формулы A

$$\neg\neg A \vdash_{\mathrm{N}} A. \tag{II′}$$

Докажем это построением дерева N-вывода, используя правило (I):

$$\frac{[\neg A]^1 \quad \neg\neg A}{A}\,\mathrm{I}\ (1)\,.$$

Докажем теперь, что правило ¬в является производным N-правилом, т. е. для любых Γ, A и B

$$\frac{\Gamma, A \vdash_N B\,; \quad \Gamma, A \vdash_N \neg B}{\Gamma \vdash_N \neg A}\,. \tag{III′}$$

Располагая деревьями N-вывода $\dfrac{\Delta_1 \quad A}{B}$ и $\dfrac{\Delta_2 \quad A}{\neg B}$, где $\Delta_1 \subseteq \Gamma$ и $\Delta_2 \subseteq \Gamma$, построим новое дерево формул:

$$\cfrac{\cfrac{\Delta_1 \quad \cfrac{[\neg A]^2 \quad [\neg\neg A]^1}{A}\,\mathrm{I}\ (2)}{B} \qquad \cfrac{\Delta_2 \quad \cfrac{[\neg A]^3 \quad [\neg\neg A]^1}{A}\,\mathrm{I}\ (3)}{\neg B}}{\neg A}\,\mathrm{I}\ (1)\,.$$

Это дерево является деревом N-вывода формулы $\neg A$, множество зеленых листьев которого содержится в Γ. Таким образом, $\Gamma \vdash_N \neg A$, а значит, утверждение (III′) доказано. ❐

Замечание 1. На самом деле аналогичным образом можно доказать более сильное утверждение:

1') если схемы (II) и (III) являются производными N-правилами, то и схема (I) является производным N-правилом;

2') если схема (I) является производным N-правилом, то схемы (II) и (III) также являются производными N-правилами. ❍

! **СЛЕДСТВИЕ 1.** Пусть N_1 − система, среди основных правил которой есть правила (II) и (III), а N_2 − система, которая получается из системы N_1 заменой правил (II) и (III) на правило (I). Тогда системы N_1 и N_2 равнообъемны.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если в системе N_k заменить правила ¬¬у и ¬в на правило доказательства от противного, то получится система N_k', равнообъемная системе N_k.

➤➤ **Замечание 2**. Позже будет доказано, что схема снятия двойного отрицания (II) не является производным N_i-правилом. Следовательно, в силу установленной связи между тремя рассматриваемыми правилами, правило доказательства от противного также не является производным в N_i. Более того, уточнив понятия, можно доказать, что схема (II) не зависит от схемы (III), а также, что, не опираясь на схему (III), из схемы (II) вывести схему (I) невозможно. ❍

Сопоставление методов доказательства от противного и приведением к нелепости[1)]

Перейдем от сопоставления правил в системах естественного вывода к неформальному сопоставлению соответствующих методов доказательств.

Метод доказательства от противного принято считать хорошо известным методом доказательства, однако часто термин «доказательство от противного» используется в разных смыслах и применительно к разным методам доказательства. Чаще всего метод доказательства от противного путают с методом доказательства приведением к нелепости.

Буквами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ будем обозначать произвольные предложения, а буквой Γ – произвольные конечные множества предложений. Будем использовать запись $\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}$ для обозначения того факта, что предложение $\mathcal{A}$ обосновано (доказано), исходя из предложений Γ, или $\mathcal{A}$ логически следует из Γ. Отношение ⇒ между множествами предложений и предложениями будем называть отношением *логического следования*.

Метод доказательства от противного заключается в следующем. Пусть требуется доказать предложение $\mathcal{A}$, исходя из некоторых предложений Γ (это могут быть ранее доказанные теоремы, аксиомы или допущения). Допускаем, что $\mathcal{A}$ неверно, т. е. допускаем $\neg\mathcal{A}$ (не $\mathcal{A}$), и путем рассуждений, исходя уже из Γ и $\neg\mathcal{A}$, выводим противоречие, т. е. некоторое предложение $\mathcal{B}$ и его отрицание $\neg\mathcal{B}$. После этого мы заключаем, что допущение неверно, а значит, верно предложение $\mathcal{A}$. Наше рассуждение можно описать с помощью следующей неформальной схемы рассуждений:

$$\frac{\Gamma, \neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ и } \Gamma, \neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}}{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}}. \qquad (1)$$

Именно эту схему следует называть схемой *доказательства от противного.*

---

1) Идея необходимости различать эти методы *в преподавании математики* принадлежит Ф. А. Кабакову, который проводил эту идею в жизнь на протяжении сорока лет работы на математическом факультете МПГУ.

Ситуация меняется, когда нужно опровергнуть предложение $\mathcal{A}$, другими словами, когда предложение, которое требуется доказать, имеет вид $\neg\mathcal{A}$ (не $\mathcal{A}$), т. е. является отрицательным предложением. Например, такой вид имеет предложение «Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2». Доказывается оно выведением противоречия из допущения, что существует рациональное число, квадрат которого равен 2.

Итак, для того чтобы доказать отрицательное утверждение $\neg\mathcal{A}$, допускаем, что имеет место $\mathcal{A}$, и выводим из этого некоторое противоречие: $\mathcal{B}$ и $\neg\mathcal{B}$. Неформальная схема, описывающая такой ход рассуждений, выглядит так:

$$\frac{\Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ и } \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}}{\Gamma \Rightarrow \neg\mathcal{A}} \tag{2}$$

Эту неформальную схему рассуждений принято называть схемой *доказательства приведением к нелепости* или *приведением к абсурду* (лат. *reductio ad absurdum*).

К сожалению, обычно в практике преподавания не различают эти две схемы, два способа доказательства, чаще всего называя и тот и другой *доказательством от противного*.

Остановимся на причинах того, почему все же следует различать эти схемы.

Во-первых, очевидно, что эти схемы различаются чисто графически, а значит, рассуждения по этим схемам различаются по форме. Различия такого же характера, т. е. по крайней мере по форме, имеются между предложениями $\mathcal{A}$ и $\neg\neg\mathcal{A}$ (или между предложениями $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$). Даже если, находясь на классических позициях, мы считаем, что эти утверждения равносильны, то все равно факт различия по форме является очевидным.

Однако такое различие может кому-то показаться недостаточным, неубедительным для того, чтобы затевать весь этот разговор. Естественно, возникают вопросы: не равносильны ли эти схемы; в чем выражается различие между ними в практике математических доказательств; это различие лишь по форме или также по существу?

Ответить на первый вопрос: «Равносильны ли схемы (1) и (2)?» можно на неформальном уровне, не переходя на путь построения формальной логической системы. Связь между схемами (1) и (2) устанавливается следующим утверждением[1).

[1) Доказательство этого утверждения можно найти в [14].

! УТВЕРЖДЕНИЕ. Схема доказательства от противного

$$\frac{\Gamma, \neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ и } \Gamma, \neg\mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}}{\Gamma \Rightarrow \mathcal{A}} \tag{1}$$

равносильна совокупности двух схем:
доказательства приведением к нелепости

$$\frac{\Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ и } \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow \neg\mathcal{B}}{\Gamma \Rightarrow \neg\mathcal{A}} \tag{2}$$

и снятия двойного отрицания

$$\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}. \tag{3}$$

Эффективные и неэффективные доказательства

Доказывая методом от противного, мы используем более сильные логические средства, чем когда доказываем приведением к нелепости. Это вызвано тем, что доказательство от противного существенно опирается на правило снятия двойного отрицания, а доказательство приведением к нелепости — нет. Именно благодаря этому обстоятельству различие между схемами (1) и (2) — это различие не только по форме, но и по существу. Более того, это различие тесно связано с некоторыми проблемами оснований математики.

Дело в том, что такие логические законы, как закон исключенного третьего $A \vee \neg A$, закон снятия двойного отрицания $\neg\neg A \supset A$ и схема (1) доказательства от противного, приводят к неэффективным конструкциям и доказательствам в математике. В первую очередь это относится к доказательствам так называемых ***теорем существования,*** т. е. теорем вида «Существует x такой, что $P(x)$»: $(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x)$.

! ***Эффективным доказательством*** теоремы вида $(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x)$ называется построение объекта x (или способа, позволяющего построить этот объект) и доказательство того, что этот объект x действительно обладает требуемым свойством $\mathcal{P}$. Доказательство теоремы существования, не удовлетворяющее этим условиям, считают ***неэффективным***.

Типичным неэффективным доказательством теоремы существования является доказательство методом от противного. Действительно, пусть требуется доказать утверждение вида $(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x)$ — «существует объект x, обладающий свойством $\mathcal{P}$». Допустим, что $\neg(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x)$. Путем рассуждения получаем некоторое противоречие: B и $\neg B$. Отсюда, в силу схемы *reductio ad absurdum*, делаем вывод, что допущение неверно, т. е. $\neg\neg(\mathrm{E}x)\ \mathcal{P}(x)$. Далее, снимая двойное отрицание, получаем $(\mathrm{E}x)\ \mathcal{P}(x)$ и считаем доказательство завершенным. Однако такое доказательство не завершается построением хотя бы одного объекта с требуемым свойством, оно нисколько не приближает нас к построению примера такого x, что $\mathcal{P}(x)$, т. е. является неэффективным доказательством.

Примерами доказательств такого вида служат доказательства следующих теорем: теоремы об ограниченности непрерывной на отрезке функции (т. е. о существовании верхней и нижней границ непрерывной на отрезке функции); теоремы о существовании наибольшего и наименьшего значений у непрерывной на отрезке функции. Традиционное доказательство этих теорем методом от противного не содержит конструкции, позволяющей построить объект, о существовании которого идет речь в теореме.

Неэффективные доказательства теорем существования признаются не всеми математиками. Для математиков, стоящих на традиционных классических позициях, характерным является признание без всяких ограничений закона исключенного третьего $A \vee \neg A$ и закона снятия двойного отрицания $\neg\neg A \supset A$. Они пренебрегают различиями между утверждениями $(\mathrm{E}x)\ \mathcal{P}(x)$ и $\neg\neg(\mathrm{E}x)\ \mathcal{P}(x)$. Математики, не придерживающиеся классических взглядов (интуиционисты и конструктивисты), отрицают универсальность этих законов. Различия между утверждениями $(\mathrm{E}x)\ \mathcal{P}(x)$ и $\neg\neg(\mathrm{E}x)\ \mathcal{P}(x)$ такие математики признают весьма существенными, считая утверждение $\neg\neg(\mathrm{E}x)\ \mathcal{P}(x)$, вообще говоря, более слабым, чем $(\mathrm{E}x)\ \mathcal{P}(x)$. Доказательство от противного, с их точки зрения, также является неприемлемым, поскольку оно опирается на принцип снятия двойного отрицания.

Таким образом, различие между схемами (1) и (2) носит методологический характер, затрагивая проблему разного понимания утверждений о существовании в математике, а также связанные с этим другие *проблемы оснований математики* (см. гл. 6).

§2.11. Интерпретации языка логики высказываний

Под интерпретацией (от лат. *interpretatio* – «разъяснение, истолкование») в логике понимают истолкование, разъяснение смысла, значения языковых выражений; приписывание некоторого содержательного смысла, значения символам и формулам формального языка; рассмотрение его как языка, описывающего ту или иную предметную область. Саму эту предметную область вместе со значениями, приписываемыми символам, также называют интерпретацией.

Логическая *семантика* – раздел логики, исследующий (анализирующий) взаимосвязь между языковыми выражениями и выражаемым ими содержанием. К основным семантическим категориям относятся «интерпретация», «модель», «выполнимость», «истинность» и т. п. Вопросы семантики играют большую роль в теории доказательств.

В § 1.3 уже было рассмотрено одно из толкований пропозициональных связок и формул ЯЛВ. Пропозициональные переменные рассматривались как переменные по множеству {И, Л} или, как нам сейчас будет удобнее считать, по множеству $\{1, 0\}$, а пропозициональные связки $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$ были интерпретированы как известные операции на этом множестве. Однако это не единственная интерпретация ЯЛВ. Возможны и другие варианты толкования, осмысления символов ЯЛВ.

Пропозициональные переменные можно рассматривать как переменные по произвольному непустому множеству, а связки истолковывать как некоторые операции на этом множестве. Введем общее понятие интерпретации ЯЛВ.

! ***Интерпретацией ЯЛВ*** называют всякую алгебраическую систему $\mathfrak{M} = \langle M, \&_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}}, \supset_{\mathfrak{M}}, \neg_{\mathfrak{M}}, 1_{\mathfrak{M}} \rangle$, где M – непустое множество (*поле* интерпретации); $\&_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}}, \supset_{\mathfrak{M}}$ – бинарные операции на M; $\neg_{\mathfrak{M}}$ – унарная операция на M; $1_{\mathfrak{M}}$ – некоторый элемент M, который называют *выделенным* элементом $\mathfrak{M}$.

Интерпретацию $\mathfrak{M}_0 = \langle \{0, 1\}, \overset{\circ}{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\supset}, \overset{\circ}{\neg}, 1 \rangle$, где $\overset{\circ}{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\supset}, \overset{\circ}{\neg}$ – операции на множестве $\{0, 1\}$, определяемые с помощью известных истинностных таблиц (см. § 1.3), а выделенным элементом является 1, называют ***главной интерпретацией ЯЛВ***.

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторая интерпретация ЯЛВ, а F – произвольная формула. Если переменным формулы F придать какие-либо значения из поля интерпретации, а пропозициональные связки заменить соответствующими им операциями на множестве M (точнее, обозначениями этих операций), то полученный в результате вычислений элемент из M называют *значением формулы* F при заданных значениях ее переменных. Уточним это понятие при помощи следующих определений.

Оценкой в интерпретации $\mathfrak{M}$ называют всякое отображение v множества всех пропозициональных переменных Vr во множество M – поле интерпретации, т. е. отображение вида $Vr \to M$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная интерпретация ЯЛВ, а v – некоторая оценка в этой интерпретации. Каждой формуле F сопоставим элемент из M, который будем называть значением формулы F в интерпретации $\mathfrak{M}$ при оценке v и обозначать через $v(F)$.

Определение ***значения формулы F в интерпретации*** $\mathfrak{M}$ ***при оценке*** v.

1. Для всякой пропозициональной переменной p_i ее значение $v(p_i)$ задается оценкой v.
2. Пусть A и B – произвольные формулы и значения $v(A)$ и $v(B)$ определены. Тогда:

а) $v(A \oplus B) = v(A) \oplus_{\mathfrak{M}} v(B)$, где $\oplus$ – любая из связок &, $\vee$, $\supset$;

б) $v(\neg A) = \neg_{\mathfrak{M}} v(A)$.

Заметим, что, для того чтобы найти $v(F)$, достаточно задать значения $v(p_{i_1})$, ..., $v(p_{i_n})$, где $\omega = (p_{i_1}, ..., p_{i_n})$ – собственный список формулы F. Таким образом, можно ввести понятие *значения формулы F в интерпретации* $\mathfrak{M}$ *на наборе* $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *элементов из M* относительно собственного списка формулы F (и обозначение $|\,F\,|_{\alpha,\,\mathfrak{M}}$) аналогично тому, как это было сделано для главной интерпретации. При этом если $\omega = (p_{i_1}, ..., p_{i_n})$ – собственный список формулы F, а $\alpha = (v(p_{i_1}), ..., v(p_{i_n}))$, то $v(F) = |\,F\,|_{\alpha,\,\mathfrak{M}}$.

Используя индукцию по построению формулы, можно доказать, что если оценки v_1 и v_2 в интерпретации $\mathfrak{M}$ удовлетворяют условию $v_1(p_{i_1}) = v_2(p_{i_1})$, ..., $v_1(p_{i_n}) = v_2(p_{i_n})$, то $v_1(F) = v_2(F)$ для любой формулы F с допустимым списком $\omega = (p_{i_1}, ..., p_{i_n})$.

! Будем называть формулу F ***общезначимой в интерпретации*** $\mathfrak{M}$ (или кратко $\mathfrak{M}$-***общезначимой***) и писать $\models_{\mathfrak{M}} F$, если при любой оценке v в этой интерпретации $v(F) = 1_{\mathfrak{M}}$.

Очевидно, что $\mathfrak{M}_0$-общезначимыми формулами являются все тавтологии и только они.

Пусть N – произвольная пропозициональная система естественного вывода.

! ***Моделью системы естественного вывода*** N будем называть всякую интерпретацию ЯЛВ $\mathfrak{M}$, в которой общезначимы все N-выводимые формулы. Символически это условие можно записать так: $(F)\ (\vdash_{\mathrm{N}} F \to \models_{\mathfrak{M}} F)$.

Теорема о семантической корректности $\mathrm{N_k}$ и $\mathrm{N_i}$ свидетельствует о том, что главная интерпретация ЯЛВ $\mathfrak{M}_0$ является моделью систем $\mathrm{N_i}$ и $\mathrm{N_k}$.

Введем отношение $\mathfrak{M}$-*следования* $\models_{\mathfrak{M}}$ аналогично тому, как было введено отношение семантического следования $\models$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная интерпретация ЯЛВ. Будем говорить, что из *множества формул* Γ $\mathfrak{M}$-***следует*** *формула* F (и писать $\Gamma \models_{\mathfrak{M}} F$), если для любой оценки v в интерпретации $\mathfrak{M}$, при которой все формулы из Γ принимают значение $1_{\mathfrak{M}}$, формула F также принимает значение $1_{\mathfrak{M}}$. Символически это определение можно записать так:

$$\Gamma \models_{\mathfrak{M}} F \xleftrightarrow{def} (v)\ (v(\Gamma) = 1_{\mathfrak{M}} \to v(F) = 1_{\mathfrak{M}}),$$

где запись $v(\Gamma) = 1_{\mathfrak{M}}$ означает, что $v(A) = 1_{\mathfrak{M}}$ для любой формулы A из Γ.

Очевидно, что отношение $\mathfrak{M}_0$-следования есть не что иное, как отношение семантического следования $\models$.

ТЕОРЕМА (*о достаточном условии модели*). Пусть N – произвольная система естественного вывода, $\mathfrak{M}$ – произвольная интерпретация ЯЛВ. Если все N-правила сохраняют отношение $\models_{\mathfrak{M}}$, то $\mathfrak{M}$ является моделью N.

Доказательство. Во-первых, отношение $\mathfrak{M}$-следования $\models_{\mathfrak{M}}$ рефлексивно и монотонно. Во-вторых, по условию все N-правила сохраняют отношение $\models_{\mathfrak{M}}$. Следовательно, в силу принципа индукции для N-выводов (во второй форме), отношение N-выводимости $\vdash_{\mathrm{N}}$ согласовано с отношением $\models_{\mathfrak{M}}$, т. е.

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{\mathrm{N}} F \to \Gamma \models_{\mathfrak{M}} F).$$

Отсюда при пустом Γ получаем

$$(F)\ (\vdash_{\mathrm{N}} F \to \models_{\mathfrak{M}} F).$$

Таким образом, $\mathfrak{M}$ является моделью системы N. ❐

Замечание 1. Обратное утверждение неверно. Так, для системы $\mathrm{N_i}$ можно привести пример модели, такой что правило ⊃в не сохраняет отношение $\models_{\mathfrak{M}}$ (см. ниже алгебру Линденбаума). ❍

Пусть $\mathfrak{M}$ – модель системы N. Возникает вопрос: верно ли, что все $\mathfrak{M}$-общезначимые формулы N-выводимы? Оказывается, что это выполняется далеко не для всякой модели.

Точной моделью системы N называют всякую модель $\mathfrak{M}$ этой системы такую, что любая $\mathfrak{M}$-общезначимая формула является N-выводимой, т. е. если

$$(F)\ (\models_{\mathfrak{M}} F \to\ \vdash_{\mathrm{N}} F).$$

Таким образом, интерпретация $\mathfrak{M}$ является точной моделью системы N тогда и только тогда, когда классы $\mathfrak{M}$-общезначимых формул и N-выводимых формул совпадают:

$$(F)\ (\models_{\mathfrak{M}} F \leftrightarrow\ \vdash_{\mathrm{N}} F).$$

Теорема о полноте $\mathrm{N_k}$ относительно класса тавтологий свидетельствует о том, что главная интерпретация ЯЛВ $\mathfrak{M}_0$ является точной моделью $\mathrm{N_k}$ (ее называют ***главной моделью системы*** $\mathrm{N_k}$).

ТЕОРЕМА. Если система N имеет конечную точную модель, то эта система разрешима.

Доказательство. Будем исходить из того, что конечная модель $\mathfrak{M}$ задана эффективно (конечное поле интерпретации – списком элементов, операции – таблично). Тогда разрешающий алгоритм заключается в проверке данной формулы F на $\mathfrak{M}$-общезначимость с помощью вычисления значений F на всевозможных наборах значений из M для собственного списка переменных формулы F (множество таких наборов конечно в силу конечности M). ❐

Замечание 2. Оказывается, что не всякая разрешимая система имеет конечную точную модель. Как уже отмечалось ранее (без доказательства), система $\mathrm{N_i}$ разрешима, однако конечной точной модели она не имеет (см. следующую теорему). ❍

★ Интерпретацию ЯЛВ, а также модель системы N, $\mathfrak{M}$ называют *регулярной*, если для любых формул A и B выполняется условие $A, A \supset B \models_{\mathfrak{M}} B$. Легко видеть, что интерпретация $\mathfrak{M}$ является регулярной тогда и только тогда, когда правило $\supset$у сохраняет отношение $\mathfrak{M}$-следования $\vDash_{\mathfrak{M}}$.

Очевидно, главная интерпретация $\mathfrak{M}_0$ является регулярной. ✩

Примеры.

1. Пусть E – произвольное множество. Обозначим через $\boldsymbol{B}(E)$ – множество всех его подмножеств (*булеан* множества E). Рассмотрим интерпретацию $\mathfrak{B}_E = \langle \boldsymbol{B}(E), \&_{\mathfrak{B}}, \vee_{\mathfrak{B}}, \supset_{\mathfrak{B}}, \neg_{\mathfrak{B}}, 1_{\mathfrak{B}} \rangle$, где $1_{\mathfrak{B}} = E$ и для любых множеств E_1 и E_2 – подмножеств E: $E_1 \&_{\mathfrak{B}} E_2 = E_1 \cap E_2$; $E_1 \vee_{\mathfrak{B}} E_2 = E_1 \cup E_2$; $E_1 \supset_{\mathfrak{B}} E_2 = (E \setminus E_1) \cup E_2$; $\neg_{\mathfrak{B}} E_1 = E \setminus E_1$. Используя достаточное условие модели, можно доказать, что $\mathfrak{B}_E$ – модель N_k и N_i. Более того, можно доказать, что для всякого непустого множества E интерпретация $\mathfrak{B}_E$ является точной моделью N_k. С этой целью можно рассмотреть подалгебру $\mathfrak{B}_0$ алгебры $\mathfrak{B}_E$ с носителем (полем) $\{\varnothing, E\}$, изоморфную $\mathfrak{M}_0$ – главной модели N_k, и доказать, что если $\vDash_{\mathfrak{B}_E} A$, то $\vDash_{\mathfrak{B}_0} A$ и $\vDash_{\mathfrak{M}_0} A$, а значит, $\vdash_{N_k} A$.

2. Рассмотрим интерпретацию $\mathfrak{M} = \langle M, \&_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}}, \supset_{\mathfrak{M}}, \neg_{\mathfrak{M}}, 1_{\mathfrak{M}} \rangle$, где $M = \{0, 1/2, 1\}$, $1_{\mathfrak{M}} = 1$ и для любых a, b из M:

$$a \&_{\mathfrak{M}} b = \min\{a, b\};\ a \vee_{\mathfrak{M}} b = \max\{a, b\};$$

$$a \supset_{\mathfrak{M}} b = \begin{cases} 1, & \text{если } a \le b, \\ b, & \text{если } a > b, \end{cases} \quad \neg_{\mathfrak{M}} a = \begin{cases} 1, & \text{если } a = 0; \\ 0, & \text{если } a \ne 0. \end{cases}$$

Можно доказать, что эта интерпретация является моделью N_i.

3. Можно доказать, что для любого n ($n = 1, 2, \ldots$) интерпретация $\mathfrak{M}_n = \langle M_n, \&_n, \vee_n, \supset_n, \neg_n, 1 \rangle$, где $M_n = \{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$ и для любых a, b из M_n:

$$a \&_n b = \min\{a, b\};\ a \vee_n b = \max\{a, b\};$$

$$a \supset_n b = \begin{cases} 1, & \text{если } a \le b, \\ b, & \text{если } a > b, \end{cases} \quad \neg_n a = \begin{cases} 1, & \text{если } a = 0; \\ 0, & \text{если } a \ne 0, \end{cases}$$

является моделью системы N_i (*конечной линейно упорядоченной моделью* N_i). ❍

★ **ТЕОРЕМА** (*о несуществовании конечной точной модели* N_i, *Гедель*)**.** Система естественного вывода N_i не имеет конечной точной модели.

Доказательство. Изложим только идею доказательства. Рассмотрим следующую формулу:

$$G_n = (p_1 \supset p_0) \vee (p_2 \supset p_1) \vee (p_2 \supset p_0) \vee \ldots \vee (p_n \supset p_{n-1}) \vee \ldots \vee (p_n \supset p_0).$$

Эту формулу кратко принято записывать следующим образом:

$$G_n = \bigvee_{0 \le i < j \le n} (p_j \supset p_i).$$

Далее можно доказать, что:

1) для всякого n ($n = 1, 2, \ldots$) формула G_n общезначима в любой n-элементной модели $\mathrm{N_i}$;

2) формула G_n опровержима в некоторой конечной линейно упорядоченной модели $\mathrm{N_i}$ (см. пример 3).

Доказательство утверждений п. 1 и 2 оставляем заинтересованному читателю. ❐

Алгебра Линденбаума

Оказывается, что система $\mathrm{N_i}$ имеет точную счетную модель. Опишем, как она устроена. Полем ее служит фактор-множество множества всех формул ЯЛВ $\mathcal{F}r$ по отношению эквивалентности $\sim_{\mathrm{i}}$, где бинарное отношение $\sim_{\mathrm{i}}$ на множестве $\mathcal{F}r$ всех формул ЯЛВ определено следующим образом:

$$A \sim_{\mathrm{i}} B \xleftrightarrow{def} \vdash_{\mathrm{N_i}} (A \supset B) \;\&\; (B \supset A).$$

Введем обозначение: $L_{\mathrm{i}} \leftrightharpoons \mathcal{F}r/\sim_{\mathrm{i}}$. Можно доказать, что множество L_{i} счетно: $|L_{\mathrm{i}}| = \aleph_0$. В качестве выделенного элемента возьмем класс $[p \supset p]$, т. е. $1_{L_{\mathrm{i}}} \leftrightharpoons [p \supset p]$. Отметим, что $1_{L_{\mathrm{i}}} = \{F \mid \vdash_{\mathrm{N_i}} F\}$.

Операции на множестве L_{i} определим следующим образом: $\neg_{L_{\mathrm{i}}}[A] = [\neg A]$; $[A] \oplus_{L_{\mathrm{i}}} [B] = [A \oplus B]$, где $\oplus$ — любая из связок $\&$, $\vee$, $\supset$. Это определение корректно, т. е. не зависит от выбора представителей.

Введем бинарное отношение $\le_{L_{\mathrm{i}}}$ на множестве L_{i}:

$$[A] \le_{L_{\mathrm{i}}} [B] \xleftrightarrow{def} \vdash_{\mathrm{N_i}} A \supset B.$$

Это отношение $\le_{L_{\mathrm{i}}}$ является отношением частичного порядка на множестве L_{i}, причем класс $[p \;\&\; \neg p]$ является наименьшим элементом L_{i}, а класс $[p \supset p]$ является наибольшим элементом L_{i}. Алгебраическая система (алгебра) $\mathcal{L}_{\mathrm{i}} = \langle L_{\mathrm{i}}, \&_{L_{\mathrm{i}}}, \vee_{L_{\mathrm{i}}}, \supset_{L_{\mathrm{i}}}, \neg_{L_{\mathrm{i}}}, 1_{L_{\mathrm{i}}} \rangle$ является точной моделью системы $\mathrm{N_i}$. Эту алгебру называют *алгеброй Линденбаума* для интуиционистской системы (в честь польского математика, логика А. Линденбаума).

Используя именно алгебру Линденбаума, можно доказать, что правило $\supset$в не сохраняет отношение $\mathcal{L}_i$-следования. Оказывается, если рассмотреть формулы[1])

$$A \rightleftharpoons (\neg\neg p \supset p) \supset (\neg p \vee \neg\neg p) \quad \text{и} \quad B \rightleftharpoons \neg p \vee \neg\neg p,$$

то $A \models_{\mathcal{L}_i} B$, но $\not\models_{\mathcal{L}_i} A \supset B$.

Таким образом, достаточное условие модели не является необходимым. ✰

§2.12. Независимость правилзаключения

При изучении систем естественного вывода важной является еще одна характеристика — *независимость правил заключения* системы. Эта характеристика связана с вопросом: не являются ли списки исходных правил построенных систем естественного вывода N_k и N_i избыточными? Другими словами, не содержат ли эти системы «лишние» правила, при удалении которых класс выводимых формул не уменьшается, т. е. остается прежним? Если такие «лишние» правила в системе есть, то, удалив их, мы получим более «компактную» систему, равнообъемную исходной.

Уточним эти вопросы, введя понятие *независимости* правил заключения систем естественного вывода. Затем докажем, что каждое N_i-правило не зависит от остальных правил системы. Вопрос о независимости правил тесно связан с общей проблемой выводимости в логических исчислениях, что определяет важность этого вопроса. При доказательстве независимости правил заключения используется метод моделей. Идея этого метода очень важна, поскольку такая же идея используется при доказательстве независимости аксиом в содержательных математических теориях (например, при доказательстве независимости аксиомы о параллельных в геометрии Евклида).

! Пусть R — какое-либо исходное N-правило. Обозначим через $N - R$ систему, которая получается из N удалением правила R из списка N-правил. Правило заключения R системы N называют ***зависимым правилом*** (*от остальных правил этой системы*), если оно является производным правилом системы $N - R$.

1) Эта идея принадлежит С. В. Хохлову.

! Правило заключения R системы N называют ***независимым правилом*** (*от остальных правил этой системы*), если оно не является производным правилом системы $N - R$.

Систему правил заключений называют *независимой*, если каждое из правил этой системы не зависит от остальных ее правил.

Независимость правил заключения является еще одной характеристикой систем естественного вывода.

Если N-правило R зависит от остальных N-правил, то системы N и $N - R$ равнообъемны. Действительно, если R является производным правилом системы $N - R$, то, в силу характеристического свойства производного правила, системы $N - R$ и $(N - R) + R$ равнообъемны.

! **УТВЕРЖДЕНИЕ**. Правило удаления отрицания $\dfrac{\mathcal{A} \quad \neg\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ зависит от остальных правил системы N_k.

Доказательство. Докажем, что правило ¬у является производным в системе $N_k^* = N_k - (\neg у)$. В силу критерия производности прямого правила достаточно доказать, что для любых формул A и B имеет место выводимость $A, \neg A \vdash_{N_k^*} B$. Действительно, дерево формул

$$\cfrac{\cfrac{A \quad \neg A}{\neg\neg B}\,{\scriptstyle\neg в}}{B}\,{\scriptstyle\neg\neg у}$$

является деревом N_k^*-вывода с корнем B и множеством зеленых листьев $\{A, \neg A\}$. ❐

СЛЕДСТВИЕ. Система N_k равнообъемна системе $N_k - (\neg у)$.

Замечание 1. Поскольку правило ¬у зависит от остальных N_k-правил и система $N_k^* = N_k - (\neg у)$ равнообъемна N_k, система N_k^* имеет некоторые преимущества по сравнению с системой N_k. Выбор в качестве основной системы именно системы N_k был вызван некоторыми соображениями технического характера. Отметим, что система N_k^* может быть получена из системы N_i заменой правила ¬у на правило ¬¬у. ❍

Доказательство зависимости правила заключения системы N от остальных правил этой системы сводится к построению соответствующего дерева вывода. А как доказать, что какое-то правило не зависит от остальных правил системы? Каким образом можно доказать, что схема не является производным правилом системы? Эта задача родственна следующей задаче: доказать невыводимость той или иной формулы в данной системе.

Для доказательства независимости какого-либо N-правила от остальных N-правил, а также для доказательства того, что какая-то формула невыводима в системе N, используется так называемый *метод интерпретаций* (метод моделей).

Прежде чем изложить этот метод, докажем лемму. В этой лемме для каждого N_k-правила R приведено специфическое для него условие вида $\Gamma \vdash_N F$, необходимое для того, чтобы R являлось N-производным правилом, где N – произвольная система естественного вывода.

ЛЕММА. Пусть N – произвольная система естественного вывода. Тогда:

1) если правило &в является N-производным, то $p, q \vdash_N p \mathbin{\&} q$;

2) если правило &у является N-производным, то $p \mathbin{\&} q \vdash_N p$ ($p \mathbin{\&} q \vdash_N q$);

3) если правило $\vee$в является N-производным, то $p \vdash_N p \vee q$ ($q \vdash_N p \vee q$);

4) если правило $\neg$у является N-производным, то $p, \neg p \vdash_N q$;

5) если правило $\supset$у является N-производным, то $p, p \supset q \vdash_N q$;

6) если правило $\neg\neg$у является N-производным, то $\neg\neg p \vdash_N p$;

7) если правило $\vee$у является N-производным, то $p \vee p \vdash_N p$;

8) если правило $\neg$в является N-производным, то $p \vdash_N \neg\neg p$;

9) если правило $\supset$в является N-производным, то $\vdash_N p \supset p$.

В доказательстве этой леммы используются только рефлексивность и монотонность отношения $\vdash_N$, а также определение N-производного правила как правила, сохраняющего отношение $\vdash_N$. Поскольку доказательство является простым упражнением, оставляем его читателю.

Для каждого N_k-правила R в этой лемме приведены свое множество формул Γ и своя формула F, такие, что $\Gamma \vdash_{N} F$ для любой системы, в которой R является производным. Поэтому обозначим их через Γ_R и F_R соответственно. Например, если R есть ⊃в, то $\Gamma_R = \varnothing$, а $F_R = p \supset p$.

Пару (Γ, F) назовем *R-парой*, если $\Gamma \vdash_{N} F$ для всякой системы N, для которой R является производным правилом:

(Γ, F) есть R-пара $\xleftrightarrow{def}$ (N) (R − производное N-правило $\rightarrow \Gamma \vdash_{N} F$).

Таким образом, для каждого N_k-правила R соответствующая ему пара (Γ_R, F_R) из леммы является R-парой.

ТЕОРЕМА (*о достаточном условии независимости правила*). Если R есть N_c-правило, а $\mathfrak{M}$ − такая интерпретация ЯЛВ, что:

1) все N_c-правила, кроме R, сохраняют отношение $\models_{\mathfrak{M}}$;

2) $\Gamma_R \not\models_{\mathfrak{M}} F_R$,

то правило R не зависит от остальных N_c-правил.

Доказательство. Пусть для N_c-правила R и интерпретации $\mathfrak{M}$ выполнены условия 1 и 2. Докажем, что R не зависит от остальных N_c-правил приведением к нелепости.

Допустим, что R зависит от остальных N_c-правил, т. е. является производным в системе $N_c - R$. Тогда, согласно лемме (применительно к системе $N_c - R$), выполняется соответствующее условие

$\Gamma_R \vdash_{N_c - R} F_R$.

С другой стороны, поскольку отношение $\models_{\mathfrak{M}}$ рефлексивно и монотонно, а все основные ($N_c - R$)-правила сохраняют отношение $\models_{\mathfrak{M}}$, в силу принципа индукции для ($N_c - R$)-выводов во второй форме, отношение $\vdash_{N_c - R}$ согласовано с отношением $\models_{\mathfrak{M}}$, т. е.

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{N_c - R} F \rightarrow \Gamma \models_{\mathfrak{M}} F).$$

Отсюда, учитывая, что $\Gamma_R \vdash_{N_c - R} F_R$, получаем, что $\Gamma_R \models_{\mathfrak{M}} F_R$, что противоречит условию 2. ❒

Замечание 2. На самом деле несложно доказать более сильное утверждение:

Если существуют интерпретация $\mathfrak{M}$ и R-пара (Γ, F) такие, что

1) все N_c-правила, кроме R, сохраняют отношение $\models_{\mathfrak{M}}$;

2) $\Gamma \not\models_{\mathfrak{M}} F$,

то правило R не зависит от остальных N_c-правил.

С другой стороны, терему о достаточном условии независимости правила можно существенно усилить, заменив условие 2 следующим более слабым условием: R не сохраняет отношение $\models_{\mathfrak{M}}$.

Однако в этом случае доказательство теоремы существенно усложнится. ❍

➤ Таким образом, *метод доказательства независимости* N_c-правил заключается в следующем: для того чтобы доказать, что какое-то N_c-правило не зависит от остальных N_c-правил, достаточно привести пример такой интерпретации, которая удовлетворяет условиям 1 и 2 из теоремы о достаточном условии независимости правила.

! **ТЕОРЕМА** (*о независимости правил заключения системы* N_i). Каждое N_i-правило не зависит от остальных N_i-правил.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство независимости каждого из N_i-правил от остальных правил проводится по одной и той же схеме. В соответствии с теоремой о достаточном условии независимости правила, для каждого N_i-правила R подберем такую интерпретацию $\mathfrak{M}$, что $\Gamma_R \not\models_{\mathfrak{M}} F_R$ для соответствующих Γ_R и F_R (из леммы), а все N_i-правила, кроме R, сохраняют отношение $\models_{\mathfrak{M}}$. Для каждого правила R системы N_i рассмотрим двухэлементную интерпретацию (будем обозначать ее через $\mathfrak{M}_R$), которая получается из стандартной интерпретации $\mathfrak{M}_0$ следующим образом. Если R вводит или удаляет пропозициональную связку $\oplus$, то переопределим в $\mathfrak{M}_0$ (нестандартно определим) лишь операцию, интерпретирующую связку $\oplus$, таким образом, чтобы $\Gamma_R \not\models_{\mathfrak{M}_R} F_R$, а другие правила, описывающие связку $\oplus$, отношение $\models_{\mathfrak{M}_R}$ сохраняли. Все остальные операции в $\mathfrak{M}_R$ определяются точно так же, как и в $\mathfrak{M}_0$, т. е. все остальные пропозициональные связки интерпретируются стандартным образом. Тогда все правила заключения, вводящие или удаляющие пропозициональные связки, отличные от связки $\oplus$, очевидно, сохраняют отношение $\models_{\mathfrak{M}_R}$. Поэтому построенная таким образом интерпретация $\mathfrak{M}_R$ удовлетворяет условию, являющемуся достаточным для независимости правила R.

Для каждого $\mathrm{N_i}$-правила приведем интерпретацию, удовлетворяющую указанным условиям:

1) $\mathfrak{M}_{\bar{\&}} = \langle\{0, 1\}, \bar{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\supset}, \overset{\circ}{\neg}, 1\rangle$, где $a \mathbin{\bar{\&}} b \equiv 0$ (для &в);

2) $\mathfrak{M}_{\tilde{\&}} = \langle\{0, 1\}, \tilde{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\supset}, \overset{\circ}{\neg}, 1\rangle$, где $a \mathbin{\tilde{\&}} b \equiv b$ и

$\mathfrak{M}_{\hat{\&}} = \langle\{0, 1\}, \hat{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\supset}, \overset{\circ}{\neg}, 1\rangle$, где $a \mathbin{\hat{\&}} b \equiv a$ (для &у);

3) $\mathfrak{M}_{\bar{\vee}} = \langle\{0, 1\}, \overset{\circ}{\&}, \bar{\vee}, \overset{\circ}{\supset}, \overset{\circ}{\neg}, 1\rangle$, где $a \mathbin{\bar{\vee}} b \equiv b$ и

$\mathfrak{M}_{\bar{\bar{\vee}}} = \langle\{0, 1\}, \overset{\circ}{\&}, \bar{\bar{\vee}}, \overset{\circ}{\supset}, \overset{\circ}{\neg}, 1\rangle$, где $a \mathbin{\bar{\bar{\vee}}} b \equiv a$ (для ∨в);

4) $\mathfrak{M}_{\tilde{\vee}} = \langle\{0, 1\}, \overset{\circ}{\&}, \tilde{\vee}, \overset{\circ}{\supset}, \overset{\circ}{\neg}, 1\rangle$, где $a \mathbin{\tilde{\vee}} b \equiv 1$ (для ∨у);

5) $\mathfrak{M}_{\tilde{\neg}} = \langle\{0, 1\}, \overset{\circ}{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\supset}, \tilde{\neg}, 1\rangle$, где $\tilde{\neg} a \equiv 0$ (для ¬в);

6) $\mathfrak{M}_{\hat{\neg}} = \langle\{0, 1\}, \overset{\circ}{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \overset{\circ}{\supset}, \hat{\neg}, 1\rangle$, где $\hat{\neg} a \equiv 1$ (для ¬у);

7) $\mathfrak{M}_{\hat{\supset}} = \langle\{0, 1\}, \overset{\circ}{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \hat{\supset}, \overset{\circ}{\neg}, 1\rangle$, где $a \mathbin{\hat{\supset}} b \equiv 1$ (для ⊃у);

8) $\mathfrak{M}_{\tilde{\supset}} = \langle\{0, 1\}, \overset{\circ}{\&}, \overset{\circ}{\vee}, \tilde{\supset}, \overset{\circ}{\neg}, 1\rangle$, где $a \mathbin{\tilde{\supset}} b \equiv 0$ (для ⊃в).

Докажем независимость нескольких правил.

1. Рассмотрим правило &в. Построим нужную интерпретацию, изменив в $\mathfrak{M}_0$ только операцию, интерпретирующую связку &. Обозначим через $\bar{\&}$ операцию, которая задается следующим образом: для любых a, b из $\{0, 1\}$ положим $a \mathbin{\bar{\&}} b = 0$. Остальные связки интерпретируются стандартным образом. Полученную интерпретацию обозначим через $\mathfrak{M}_{\bar{\&}}$. Сначала докажем, что $p, q \nvDash_{\mathfrak{M}_{\bar{\&}}} p \mathbin{\&} q$. Рассмотрим оценку v в $\mathfrak{M}_{\bar{\&}}$ такую, что $v(p) = 1$, $v(q) = 1$. Тогда $v(p \mathbin{\&} q) = v(p) \mathbin{\bar{\&}} v(q) = 0$.

Покажем теперь, что оба правила &у сохраняют отношение $\vDash_{\mathfrak{M}_{\bar{\&}}}$, т. е. для любых формул A и B выполняются условия $A \mathbin{\&} B \vDash_{\mathfrak{M}_{\bar{\&}}} A$ и $A \mathbin{\&} B \vDash_{\mathfrak{M}_{\bar{\&}}} B$. Действительно, пусть A и B – произвольные формулы, а v – произвольная оценка в $\mathfrak{M}_{\bar{\&}}$. Тогда условное предложение «если $v(A \mathbin{\&} B) = 1$, то $v(A) = 1$» истинно, поскольку посылка ложна. Следовательно, $A \ \& \ B \vDash_{\mathfrak{M}_{\bar{\&}}} A$. Аналогично доказывается, что $A \ \& \ B \vDash_{\mathfrak{M}_{\bar{\&}}} B$.

2. Докажем независимость правила &у построением соответствующей интерпретации. Конъюнкцию на этот раз проинтерпретируем иначе. Обозначим через $\tilde{\&}$ операцию на множестве $\{0, 1\}$, которая задается следующим образом: положим $a \tilde{\&} b = b$ для любых a и b из множества $\{0, 1\}$. Остальные связки интерпретируем стандартным образом, как в $\mathfrak{M}_0$. Обозначим новую интерпретацию через $\mathfrak{M}_{\tilde{\&}}$. Докажем, что $p \ \& \ q \nvDash_{\mathfrak{M}_{\tilde{\&}}} p$. Рассмотрим оценку v такую, что $v(p) = 0$, а $v(q) = 1$. Тогда $v(p \ \& \ q) = v(p) \tilde{\&} v(q) = v(q) = 1$, а $v(p) = 0$. Таким образом, $p \ \& \ q \nvDash_{\mathfrak{M}_{\tilde{\&}}} p$.

Докажем, что другое правило &у, а также правило &в сохраняют отношение $\vDash_{\mathfrak{M}_{\tilde{\&}}}$. Сначала докажем, что для любых формул A и B $A \ \& \ B \vDash_{\mathfrak{M}_{\tilde{\&}}} B$. Действительно, каковы бы ни были формулы A и B и оценка v в $\mathfrak{M}_{\tilde{\&}}$, если $v(A \ \& \ B) = 1$, то $v(B) = v(A) \tilde{\&} v(B) = v(A \ \& \ B) = 1$. Таким образом, второе правило &у сохраняет отношение $\vDash_{\mathfrak{M}_{\tilde{\&}}}$.

Теперь докажем, что $A, B \vDash_{\mathfrak{M}_{\tilde{\&}}} A \ \& \ B$ для любых формул A и B. Каковы бы ни были формулы A и B и оценка v в $\mathfrak{M}_{\tilde{\&}}$, если $v(A) = v(B) = 1$, то $v(A \ \& \ B) = v(A) \ \tilde{\&} \ v(B) = v(B) = 1$. Таким образом, правило &в также сохраняет $\vDash_{\mathfrak{M}_{\tilde{\&}}}$.

Аналогично можно доказать независимость второго правила &у, обоих правил $\vee$в, правила $\supset$у и правила $\neg$у.

3. Докажем теперь независимость от остальных N_i-правил косвенного правила $\vee$у. Построим нужную интерпретацию, изменив в $\mathfrak{M}_0$ только операцию, интерпретирующую связку $\vee$. Обозначим через $\tilde{\vee}$ операцию на $\{0, 1\}$, которую зададим так: для любых a, b из $\{0, 1\}$ положим $a \tilde{\vee} b = 1$. Все остальные операции оставим без изменения. Эту интерпретацию обозначим через $\mathfrak{M}_{\tilde{\vee}}$. Докажем теперь, что $p \vee p \not\models_{\mathfrak{M}_{\tilde{\vee}}} p$. Рассмотрим в $\mathfrak{M}_{\tilde{\vee}}$ такую оценку v, что $v(p) = 0$. Тогда $v(p \vee p) = v(p) \ \tilde{\vee}\ v(p) = 1$. Докажем теперь, что оба правила $\vee$в сохраняют отношение $\models_{\mathfrak{M}_{\tilde{\vee}}}$. Докажем, что для любых формул A и B выполняется $A \models_{\mathfrak{M}_{\tilde{\vee}}} A \vee B$. Каковы бы ни были формулы A и B и оценка v в $\mathfrak{M}_{\tilde{\vee}}$, $v(A \vee B) = v(A) \ \tilde{\vee}\ v(B) = 1$. Следовательно, условное утверждение «если $v(A) = 1$, то $v(A \vee B) = 1$» истинно, поскольку истинно его заключение. Значит, $A \models_{\mathfrak{M}_{\tilde{\vee}}} A \vee B$. Аналогично можно доказать, что $B \models_{\mathfrak{M}_{\tilde{\vee}}} A \vee B$.

4. Рассмотрим правило $\neg$в. Построим интерпретацию $\mathfrak{M}_{\tilde{\neg}}$, которая отличается от $\mathfrak{M}_0$ нестандартной интерпретацией связки $\neg$. Обозначим через $\tilde{\neg}$ операцию, задаваемую следующим образом: для любого a из $\{0, 1\}$ положим $\tilde{\neg} a = 0$. Докажем, что $p \not\models_{\mathfrak{M}_{\tilde{\neg}}} \neg\neg p$. Рассмотрим в $\mathfrak{M}_{\tilde{\neg}}$ оценку v такую, что $v(p) = 1$. Тогда $v(\neg\neg p) = \tilde{\neg}\tilde{\neg} 1 = 0$. Теперь докажем, что правило $\neg$у сохраняет отношение $\models_{\mathfrak{M}_{\tilde{\neg}}}$. Докажем, что $A, \neg A \models_{\mathfrak{M}_{\tilde{\neg}}} B$ для любых формул A и B. Действительно, каковы бы ни были формулы A и B и оценка v в $\mathfrak{M}_{\tilde{\neg}}$, $v(\neg A) = \tilde{\neg} v(A) = 0$. Следовательно, условное высказывание «если $v(A) = 1$ и $v(\neg A) = 1$, то $v(B) = 1$» истинно в силу ложности посылки. Таким образом, $A, \neg A \models_{\mathfrak{M}_{\tilde{\neg}}} B$.

5. Для доказательства независимости правила $\supset$в рассмотрим интерпретацию, которая отличается от стандартной заданием операции, соответствующей связке $\supset$. Для любых a, b из $\{0, 1\}$ положим $a \mathbin{\tilde{\supset}} b = 0$. Тогда $\not\models_{\mathfrak{M}_{\tilde{\supset}}} p \supset p$. Кроме того, легко проверить, что правило $\supset$у сохраняет отношение $\models_{\mathfrak{M}_{\tilde{\supset}}}$. ❐

Теперь, пользуясь этим же методом, докажем, что правило удаления двойного отрицания $\neg\neg$у не зависит от остальных $\mathrm{N_k}$-правил. Для этого достаточно доказать следующую теорему.

! ТЕОРЕМА. Правило удаления двойного отрицания $\neg\neg$у не является производным N_i-правилом.

Доказательство. Построим интерпретацию ЯЛВ $\mathfrak{M}$, удовлетворяющую условиям 1 и 2 из теоремы о достаточном условии независимости правила.

Рассмотрим интерпретацию $\mathfrak{M} = \langle M, \&_{\mathfrak{M}}, \vee_{\mathfrak{M}}, \supset_{\mathfrak{M}}, \neg_{\mathfrak{M}}, 1_{\mathfrak{M}}\rangle$, где $M = \{0, 1/2, 1\}$, $1_{\mathfrak{M}} = 1$ и для любых a, b из M:

$$a \&_{\mathfrak{M}} b = \min\{a, b\};\quad a \vee_{\mathfrak{M}} b = \max\{a, b\};$$

$$a \supset_{\mathfrak{M}} b = \begin{cases} 1, \text{ если } a \leq b, \\ b, \text{ если } a > b, \end{cases} \quad \neg_{\mathfrak{M}} a = \begin{cases} 1, \text{ если } a = 0; \\ 0, \text{ если } a \neq 0. \end{cases}$$

Докажем, что все N_i-правила сохраняют отношение $\vDash_{\mathfrak{M}}$.

Рассмотрим, например, правило &в. Докажем, что для любых формул A и B $A, B \vDash_{\mathfrak{M}} A \& B$. Пусть A и B – произвольные формулы, а v – произвольная оценка в $\mathfrak{M}$. Если $v(A) = v(B) = 1$, то $v(A \& B) = v(A) \&_{\mathfrak{M}} v(B) = \min\{v(A), v(B)\} = 1$. Таким образом, для любых формул A и B $A, B \vDash_{\mathfrak{M}} A \& B$. Отсюда, в силу критерия сохранения отношения ρ (в данном случае это $\vDash_{\mathfrak{M}}$), правило &в сохраняет отношение $\vDash_{\mathfrak{M}}$.

Рассмотрим правило $\supset$у. Докажем, что для любых формул A и B $A, A \supset B \vDash_{\mathfrak{M}} B$. Пусть A и B – произвольные формулы, а v – произвольная оценка в $\mathfrak{M}$. Если $v(A) = 1$ и $v(A \supset B) = v(A) \supset_{\mathfrak{M}} v(B) = 1$, а значит, $v(A) \leqslant v(B)$, то $v(B) = 1$. Таким образом, правило $\supset$у также сохраняет отношение $\vDash_{\mathfrak{M}}$.

Аналогично можно доказать, что остальные N_i-правила, кроме $\supset$в, сохраняют отношение $\vDash_{\mathfrak{M}}$. Некоторые трудности возникают только при доказательстве того, что правило $\supset$в сохраняет отношение $\vDash_{\mathfrak{M}}$.

★ Чтобы избежать трудностей, возникающих при проверке условия сохранения $\vDash_{\mathfrak{M}}$ правилом $\supset$в, достаточно доказать следующие два утверждения[1]:

[1] Эта идея принадлежит С. В. Хохлову.

а) если $\Gamma \vdash_{\mathrm{N_i}} A$, то $v(\&\Gamma) \leqslant v(A)$ для любой оценки v в $\mathfrak{M}$, где $v(\&\Gamma) \leftrightharpoons v(F_1 \,\&\, \dots \,\&\, F_n)$, если $\Gamma = \{F_1, \dots, F_n\}$, и $v(\&\Gamma) \leftrightharpoons 1$, если $\Gamma = \varnothing$. При доказательстве удобно воспользоваться принципом индукции для $\mathrm{N_i}$-выводов, определив отношение ρ следующим образом:

$$\Gamma \rho A \xleftrightarrow{def} (v)\ (v(\&\Gamma) \leqslant v(A));$$

б) если для всякой оценки v в $\mathfrak{M}$ $v(\&\Gamma) \leqslant v(A)$, то $\Gamma \vDash_{\mathfrak{M}} A$. ☆

Докажем теперь, что $\neg\neg p \nvDash_{\mathfrak{M}} p$. Действительно, при оценке v, такой что $v(p) = 1/2$, имеем: $v(\neg\neg p) = \neg_{\mathfrak{M}} (\neg_{\mathfrak{M}} 1/2) = \neg_{\mathfrak{M}} 0 = 1$, а $v(p) \neq 1$. ❐

СЛЕДСТВИЕ 1. Система $\mathrm{N_i}$ не является дедуктивно полной.

Доказательство. Действительно, добавив к системе $\mathrm{N_i}$ правило $\neg\neg$у, которое не является $\mathrm{N_i}$-производным, получим непротиворечивую систему $\mathrm{N_k}$. Следовательно, $\mathrm{N_i}$ не является дедуктивно полной. ❐

СЛЕДСТВИЕ 2. Формулы $\neg\neg p \supset p$ и $p \vee \neg p$ невыводимы в $\mathrm{N_i}$.

Доказательство. Интерпретация $\mathfrak{M}$, рассмотренная в теореме, является моделью $\mathrm{N_i}$, поскольку все $\mathrm{N_i}$-правила сохраняют $\vDash_{\mathfrak{M}}$. Вместе с тем формулы $\neg\neg p \supset p$ и $p \vee \neg p$ опровержимы (необщезначимы) в $\mathfrak{M}$. Действительно, при оценке v такой, что $v(p) = 1/2$, имеем $v(\neg\neg p \supset p) = v(\neg\neg p) \supset_{\mathfrak{M}} v(p) = 1 \supset_{\mathfrak{M}} 1/2 = 1/2$ и $v(p \vee \neg p) =$ $= 1/2 \vee_{\mathfrak{M}} 0 = 1/2$. ❐

СЛЕДСТВИЕ 3. Система $\mathrm{N_i}$ не является полной относительно класса тавтологий.

Доказательство. Действительно, формула $\neg\neg p \supset p$ является тавтологией, однако она невыводима в $\mathrm{N_i}$. ❐

Таким образом, класс теорем системы $\mathrm{N_k}$ шире класса теорем системы $\mathrm{N_i}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Каждое правило системы N_k^* не зависит от остальных правил этой системы (N_k^* – система, получаемая из N_i заменой правила $\neg$у на правило $\neg\neg$у).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно при доказательстве независимости правила $\neg$в к тем рассуждениям, которые проводились для этого правила в теореме о независимости N_i-правил, добавить проверку того, что правило $\neg\neg$у сохраняет отношение $\models_{\mathfrak{M}_{\neg}}$. Независимость же правила $\neg\neg$у от остальных правил N_k, а значит и N_k^*, была доказана ранее. ❐

➤ **Замечание 3**. *Метод доказательства невыводимости формул* в некоторой системе N заключается в следующем: для того чтобы доказать, что формула F невыводима в N, достаточно привести пример такой модели системы N, в которой формула F опровержима, т. е. не является в ней общезначимой.

Используя метод моделей, можно доказать, что формулы

$$\neg p \vee \neg\neg p, \ \ (p \supset q) \supset (\neg p \vee q), \ \ \neg(p \,\&\, q) \supset (\neg p \vee \neg q)$$

невыводимы в N_i. ❍

★ Понятие *зависимости* (*независимости*) можно ввести и для пропозициональных связок. Бинарную пропозициональную связку ⊕ назовем *зависимой* в системе N (от остальных связок ЯЛВ), если для любых формул A и B существует формула F в тех же переменных, в которую не входит связка ⊕, такая, что $\vdash_N A \oplus B \sim F$. Связку $\neg$ назовем *зависимой* в системе N (от остальных связок ЯЛВ), если для любой формулы A существует формула F в тех же переменных, в которую не входит связка $\neg$, такая, что $\vdash_N \neg A \sim F$. Пропозициональную связку называют *независимой* в системе N, если она не является зависимой от остальных связок. Можно доказать, что:

1) каждая из бинарных связок зависит в N_k от остальных связок ЯЛВ;

2) связка $\neg$ не зависит в N_k от остальных связок;

3) каждая из пропозициональных связок не зависит в N_i от остальных связок ЯЛВ. ✩

§ 2.13. Исчисления высказываний гильбертовского типа

В § 2.2 было введено общее понятие формальной логической системы (логического исчисления) как системы, задаваемой четырьмя *компонентами*: формальным языком, множеством аксиом, правилами заключения (правилами вывода) и определением вывода.

Напомним, что аксиомой логической системы называют всякий элемент специально выделенного множества формул языка этой системы — множества ее аксиом (возможно, пустого).

Логические системы (исчисления) принято делить на исчисления *гильбертовского типа* и *генценовского типа* по именам математиков Д. Гильберта и Г. Генцена[1)].

В исчислениях гильбертовского типа почти все логические средства выражены в виде аксиом, поэтому их называют также аксиоматическими исчислениями. Уточнением понятия доказательства в этих исчислениях служит понятие линейного вывода — последовательности формул, удовлетворяющей указанным далее условиям. В исчислениях генценовского типа логические средства выражены в виде правил вывода, а аксиом или совсем нет (как в системах естественного вывода), или почти нет (как в секвенциальных исчислениях[2)]), при этом уточнением понятия доказательства служит понятие вывода в виде дерева.

Системы генценовского типа не зря называют естественными: деревья вывода больше похожи на обычные математические рассуждения и доказательства, чем линейные выводы. В дереве вывода значительно нагляднее отражены логические взаимосвязи между его членами, т. е. его логическая структура. Таким образом, понятие дерева вывода лучше отражает сущность обычных математических доказательств. Кроме того, выводы в виде дерева стро-

---

[1)] Д. Гильберт (1862—1943) — немецкий математик, внесший огромный вклад в развитие различных областей математики, в том числе и в развитие математической логики.

Г. Генцен (1909—1945) — немецкий логик, ученик и соратник Д. Гильберта, вклад которого в развитие математической логики не ограничивается созданием систем естественного вывода и секвенциальных исчислений (и те и другие называют теперь исчислениями генценовского типа). Используя исчисления именно этого типа, Генцен доказал непротиворечивость арифметики (см. § 5.6 и гл. 6).

[2)] О секвенциальных исчислениях можно прочитать, например, в [6] или [3].

ить гораздо проще, чем линейные выводы в гильбертовских исчислениях.

В то же время исчисления гильбертовского типа проще описать и сформулировать определение вывода в этих системах. В связи с этим исчисления гильбертовского типа часто используют при изложении основ теории доказательств.

Рассмотренные ранее пропозициональные системы естественного вывода относятся к системам *генценовского типа*. Рассмотрим теперь две логические системы *гильбертовского типа* – классическое исчисление высказываний (K) и интуиционистское исчисление высказываний (I). Формальным языком этих исчислений служит ЯЛВ. Бесконечное множество аксиом исчисления I задается следующими схемами:

➤ (A_1) $\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{A})$;
(A_2) $(\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{C})) \supset ((\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{C}))$;
(A_3) $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \supset \mathcal{A}$;
(A_4) $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B} \supset \mathcal{B}$;
(A_5) $\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})$;
(A_6) $\mathcal{A} \supset \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;
(A_7) $\mathcal{B} \supset \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$;
(A_8) $(\mathcal{A} \supset \mathcal{C}) \supset ((\mathcal{B} \supset \mathcal{C}) \supset (\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \supset \mathcal{C}))$;
(A_9) $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \supset ((\mathcal{A} \supset \neg\mathcal{B}) \supset \neg\mathcal{A})$;
(A_{10}) $\mathcal{A} \supset (\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$.

Список схем аксиом классического исчисления K получается добавлением к указанному списку еще одной схемы:

$(A_{11}^{\text{к}})$ $\neg\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{A}$.

Обе системы имеют единственное правило вывода (заключения) – ***modus ponens***: $\dfrac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \supset \mathcal{B}}{\mathcal{B}}$. Каковы бы ни были формулы A и B, формулу B называют непосредственно следующей из формул A и $A \supset B$ по правилу ***modus ponens***[1].

Будем обозначать символом C произвольное из исчислений K и I.

Пусть Γ – произвольное конечное множество формул.
C-Γ-***выводом*** (*выводом из множества формул* Γ *в исчислении* C) будем называть всякую конечную последовательность формул

[1] Фактически, это правило совпадает с правилом ⊃у в системах естественного вывода, однако для него традиционно используют название *modus ponens* (лат.).

$F_1, \ldots, F_n$, каждый член которой является или аксиомой С, или формулой из Г, или непосредственным следствием каких-либо двух предшествующих формул по правилу *modus ponens.*

С-Г-вывод будем называть С-Г-***F-выводом***, если его последним членом является формула F.

Формулу F будем называть С-Г-*выводимой* и писать $\Gamma \vdash_{\mathrm{C}} F$, если существует хотя бы один С-Г-*F-вывод* (при этом формулы из множества Г принято называть *гипотезами*).

Формулу F будем называть С-***выводимой*** и писать $\vdash_{\mathrm{C}} F$, если существует ее вывод в исчислении С из пустого множества формул.

Замечание 1. Можно доказать, что исчисление К равнообъемно исчислению К*, которое получается из исчисления I заменой схемы аксиом $\mathcal{A} \supset (\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$ на схему $\neg\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{A}$ или, иначе говоря, удалением схемы $\mathcal{A} \supset (\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$ из списка схем аксиом К. ❍

Рассмотрим примеры С-выводов.

Пример. Пусть A − произвольная формула. Построим С-вывод формулы $A \supset A$. Пронумеруем формулы, входящие в вывод. Каждый член вывода сопроводим комментарием, указывающим, на каком основании он входит в вывод:

1) $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ − аксиома по схеме A_1;
2) $(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$ − аксиома по схеме A_2;
3) $(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$ − *modus ponens* (1, 2);
4) $A \supset (A \supset A)$ − аксиома по схеме A_1;
5) $A \supset A$ − *modus ponens* (4, 3).

Таким образом, $\vdash_{\mathrm{I}} A \supset A$ и $\vdash_{\mathrm{K}} A \supset A$. ❍

Замечание 2. В построенном выводе используются аксиомы только по схемам A_1 и A_2, а значит, его можно рассматривать как вывод в любом исчислении гильбертовского типа, среди схем аксиом которого имеются схемы A_1 и A_2. ❍

Пример. Докажем, что $A \vdash_{\mathrm{C}} \neg\neg A$ построением С-вывода:

1) $(\neg A \supset A) \supset ((\neg A \supset \neg A) \supset \neg\neg A)$ − аксиома по схеме A_9;
2) A − гипотеза;
3) $A \supset (\neg A \supset A)$ − аксиома по схеме A_1;
4) $\neg A \supset A$ − *modus ponens* (2, 3);
5) $(\neg A \supset \neg A) \supset \neg\neg A$ − *modus ponens* (4, 1);

6) $\neg A \supset ((\neg A \supset \neg A) \supset \neg A)$ – аксиома по схеме A_1;

7) $(\neg A \supset ((\neg A \supset \neg A) \supset \neg A)) \supset ((\neg A \supset (\neg A \supset \neg A)) \supset (\neg A \supset \neg A))$ – аксиома по схеме A_2;

8) $(\neg A \supset (\neg A \supset \neg A)) \supset (\neg A \supset \neg A)$ – *modus ponens* (6, 7);

9) $\neg A \supset (\neg A \supset \neg A)$ – аксиома по схеме A_1;

10) $\neg A \supset \neg A$ – *modus ponens* (9, 8);

11) $\neg\neg A$ – *modus ponens* (10, 5). ○

Как видно уже из примеров 1 и 2, построение выводов в исчислениях K и I – занятие весьма утомительное, а сами выводы очень громоздки. Это особенно заметно, если сравнить их с соответствующими деревьями естественного вывода тех же формул. Таким образом, доказывать С-выводимость формул построением вывода, т. е. непосредственно, довольно громоздко и непросто.

Следующее утверждение позволяет проводить доказательство утверждений о выводимости, не прибегая к построению вывода.

УТВЕРЖДЕНИЕ (*о производных правилах исчислений* K и I). Пусть *A, B, C* – произвольные формулы, а Г – произвольное конечное множество формул. Тогда:

1) $\dfrac{\Gamma \vdash_C A \text{ и } \Gamma \vdash_C B}{\Gamma \vdash_C A \& B}$; 2) $\dfrac{\Gamma \vdash_C A \& B}{\Gamma \vdash_C A \text{ и } \Gamma \vdash_C B}$;

3) $\dfrac{\Gamma \vdash_C A \text{ или } \Gamma \vdash_C B}{\Gamma \vdash_C A \vee B}$; 4) $\dfrac{\Gamma, A \vdash_C C \text{ и } \Gamma, B \vdash_C C}{\Gamma, A \vee B \vdash_C C}$;

5) $\dfrac{\Gamma, A \vdash_C B}{\Gamma \vdash_C A \supset B}$; 6) $\dfrac{\Gamma \vdash_C A \text{ и } \Gamma \vdash_C A \supset B}{\Gamma \vdash_C B}$;

7) $\dfrac{\Gamma, A \vdash_C B \text{ и } \Gamma, A \vdash_C \neg B}{\Gamma \vdash_C \neg A}$; 8) $\dfrac{\Gamma \vdash_C A \text{ и } \Gamma \vdash_C \neg A}{\Gamma \vdash_C B}$;

9) $\dfrac{\Gamma \vdash_K \neg\neg A}{\Gamma \vdash_K A}$.

Все утверждения, кроме 5, легко доказать, используя определение С-вывода. Отметим, что наиболее важным и полезным является утверждение 5, известное как *теорема дедукции* для исчислений K и I[1]. Доказательство теоремы дедукции, в отличие от доказательств остальных производных правил, нетривиально. Его удобно проводить с помощью принципа индукции для C-Г-выводимых формул. Перейдем к формулировке этого принципа.

Пусть $\mathcal{P}$ — произвольное свойство формул. Будем говорить, что правило *modus ponens* сохраняет свойство $\mathcal{P}$, если для любых формул A и B из условий $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{P}(A \supset B)$ следует $\mathcal{P}(B)$.

ТЕОРЕМА (*принцип индукции для* C-Г-*выводимых формул*). Пусть $\mathcal{P}$ — произвольное свойство формул, а Г — произвольное конечное множество формул.

Если 1) все аксиомы и формулы из Г обладают свойством $\mathcal{P}$
и 2) правило *modus ponens* сохраняет свойство $\mathcal{P}$,
то все C-Г-выводимые формулы обладают свойством $\mathcal{P}$.

Достаточно доказать математической индукцией по натуральному n следующее утверждение (при выполнении условий 1 и 2): для любого натурального n и любого C-Г-вывода длины n (т. е. с n членами) каждый член этого вывода обладает свойством $\mathcal{P}$. Проведение этой индукции предоставляется читателю.

Этот принцип удобно использовать при доказательстве теорем вида: «Для любого множества формул Г и любой C-Г-выводимой формулы F эта формула обладает свойством $\mathcal{P}$». Символически такого вида утверждение можно записать так:

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{\mathrm{C}} F \to \mathcal{P}(F)).$$

Теперь перейдем к вопросу о связи между исчислениями K и I и исчислениями $\mathrm{N_k}$ и $\mathrm{N_i}$ соответственно.

ТЕОРЕМА (*о согласованности отношений* $\mathrm{N_c}$-*выводимости и* C-*выводимости*). Для любой формулы F и любого конечного множества формул Г формула F является $\mathrm{N_c}$-Г-выводимой тогда и только тогда, когда она C-Г-выводима, т. е. $(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} F \leftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathrm{C}} F)$.

Доказательство. Сначала докажем, что для любых Г и F, если формула F является $\mathrm{N_c}$-Г-выводимой, то она C-Г-выводима, т. е.

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{\mathrm{N_c}} F \to \Gamma \vdash_{\mathrm{C}} F).$$

[1] Доказательство теоремы дедукции использует лишь схемы аксиом $\mathrm{A_1}$ и $\mathrm{A_2}$, а следовательно, это утверждение верно для любого исчисления высказываний гильбертовского типа, имеющего среди схем аксиом схемы $\mathrm{A_1}$ и $\mathrm{A_2}$. Доказательство этой теоремы в учебниках обычно проводится индукцией по натуральному n (см., например, [10]).

Воспользуемся принципом индукции для N_c-выводов во второй форме, взяв в качестве отношения ρ отношение С-выводимости $\vdash_C$. Согласно этому принципу, достаточно проверить, что отношение $\vdash_C$ рефлексивно и монотонно, а все N_c-правила сохраняют отношение С-выводимости $\vdash_C$. Рефлексивность и монотонность $\vdash_C$ присутствуют среди основных свойств отношения С-выводимости. Утверждение о производных правилах исчислений K и I свидетельствует как раз о том, что все N_c-правила сохраняют отношение С-выводимости.

Теперь докажем, что для любых Γ и *F*, если формула *F* является С-Γ-выводимой, то она N_c-Γ-выводима, т. е.

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_C F \to \Gamma \vdash_{N_c} F).$$

Зафиксируем произвольное множество Γ. Воспользуемся принципом индукции для С-Γ-выводимых формул, взяв в качестве свойства $\mathcal{P}$ свойство формулы «быть N_c-выводимой из Γ», т. е. положим $\mathcal{P}(F) \leftrightarrow \Gamma \vdash_{N_c} F$. Согласно этому принципу, достаточно проверить, что все аксиомы исчисления С являются N_c-выводимыми, а правило *modus ponens* сохраняет свойство $\mathcal{P}$. Для каждой схемы аксиом исчисления С N_c-выводимость произвольной аксиомы по этой схеме легко доказать непосредственно построением дерева N_c-вывода (см. упражнение из § 2.5). Кроме того, очевидно, правило *modus ponens* сохраняет свойство $\mathcal{P}$, поскольку это правило является также N_c-правилом, а именно, правилом ⊃у. ❒

В качестве следствия получаем следующую важную теорему.

! **ТЕОРЕМА** (*о равнообъемности исчислений* С *и* N_c). Класс N_c-выводимых формул совпадает с классом С-выводимых формул, т. е. $(F)\ (\vdash_C F \leftrightarrow \vdash_{N_c} F)$.

Теперь, пользуясь равнообъемностью исчислений K и I с одноименными исчислениями естественного вывода N_k и N_i, а также семантической корректностью N_k и N_i и полнотой N_k, сразу получаем следующие теоремы[1].

---

[1] Впрочем, эти теоремы можно доказать независимо от соответствующих результатов для систем естественного вывода (см., например, [10]).

ТЕОРЕМА. Всякая С-выводимая формула является тавтологией.

ТЕОРЕМА. Класс К-выводимых формул совпадает с классом тавтологий.

Замечание 3. Для гильбертовских исчислений можно ввести понятие дедуктивной (синтаксической) полноты и доказать дедуктивную полноту К. Естественным образом можно ввести понятие независимости схемы аксиом от остальных схем аксиом и доказать, что каждая из схем исчислений I и К* не зависит от остальных схем аксиом этих исчислений (см., например, [11]). ○

УПРАЖНЕНИЕ

Докажите построением С-Г-вывода (A, B, C − произвольные формулы):

1) $\vdash_C \neg(A \,\&\, \neg A)$;

2) $A \supset B, \neg B \vdash_C \neg A$;

3) $B, A \supset (B \supset C) \vdash_C A \supset C$;

4) $A \supset B, B \supset C \vdash_C A \supset C$;

5) $A, \neg A \vdash_C B$;

6) $\neg A \vee B, A \vdash_C B$.

Глава 3

ЯЗЫК ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Недостаточность выразительных средств ЯЛВ

Средств логики высказываний не хватает для изучения формы математических предложений и математических рассуждений в полном объеме. Редкое математическое рассуждение обходится без предложений с так называемыми *кванторными* словами «любой» («всякий») и «существует» («некоторый»).

Рассмотрим, например, следующие рассуждения:

1. Всякая дифференцируемая в некоторой точке функция непрерывна в этой точке. Функция Дирихле разрывна в каждой точке отрезка [0, 1]. Следовательно, функция Дирихле не дифференцируема ни в одной точке отрезка [0, 1].

2. Всякое трансцендентное число иррационально. Число π иррационально, следовательно, оно трансцендентно.

Чтобы выявить и проанализировать логическую форму таких рассуждений, выяснить, правильные они или нет, выразительных средств языка логики высказываний не достаточно.

Используются кванторные слова и в определениях. Достаточно вспомнить определение предела функции в точке: «Для всякого положительного ε существует δ ...»

В этом разделе будет построен формальный логический язык с более широкими выразительными возможностями, чем язык логики высказываний, — язык логики предикатов. Прежде чем перейти к его построению, познакомимся с понятием *предиката*.

§3.1. Предикаты и высказывательные формы

Рассмотрим предложение «x — простое число» с переменной x по множеству натуральных чисел $\mathbf{N}$[1]. Это предложение не является высказыванием, так как ему нельзя приписать значение И или Л. Однако, придавая x значения из множества $\mathbf{N}$, получим серию однотипных высказываний: «0 — простое число», «1 — простое число», «2 — простое число» и т. д. Предложение «x — простое число» представляет собой так называемую *высказывательную форму* с одной натуральной переменной (переменной по множеству $\mathbf{N}$). Эта высказывательная форма позволяет каждому натуральному n поставить в соответствие истинностное значение высказывания «n — простое число», задав тем самым отображение (функцию): $\mathbf{N} \to \{\text{И, Л}\}$.

Рассмотрим в качестве другого примера предложение «x делит y», где x и y — переменные по множеству целых чисел $\mathbf{Z}$. Здесь мы имеем дело с высказывательной формой с двумя переменными по множеству $\mathbf{Z}$. Придавая переменным x и y значения из $\mathbf{Z}$, также будем получать различные высказывания. Сопоставив каждой паре целых чисел (x, y) истинностное значение соответствующего высказывания, получим отображение (функцию): $\mathbf{Z}^2 \to \{\text{И, Л}\}$.

Примеры. Рассмотрим еще несколько предложений с переменными:

1) «$x = y$» (x равен y) — предложение с двумя переменными, которые можно рассматривать как действительные переменные;

2) «прямые l и m параллельны» — предложение с двумя переменными, которые могут принимать значения из множества прямых некоторой плоскости (или пространства);

3) «$x \subseteq y$» (x является подмножеством y) — предложение с двумя переменными, которые могут принимать значения из произвольной совокупности множеств;

4) «$x^2 + y^2 + z^2 = 1$» — предложение с тремя переменными по множеству действительных чисел;

5) «$x^2 - 2 = 0$» и «$x^2 - 2 < 0$» — предложения с одной переменной по множеству действительных чисел.

➤➤ Заметим, что всякое уравнение и всякое неравенство с неизвестными представляет собой предложение с переменными. ❍

---

[1] В логике принято считать, что натуральный ряд начинается с 0, т. е. $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.

Ни одно из этих предложений не является высказыванием, поскольку ни одному из них нельзя приписать значение И или Л. Однако если в каждом из этих предложений переменным придавать какие-либо значения из области изменения переменных, то будем получать различные высказывания (однотипные для каждого примера), как истинные, так и ложные, в зависимости от значений переменных.

➤ Предложение с n переменными по множеству M, которое превращается в высказывание при любой подстановке вместо всех его переменных каких-либо элементов из M, называют ***высказывательной формой*** с n переменными по множеству M[1].

Высказывательные формы с одной переменной x по множеству M обычно имеют вид: «x обладает свойством $\mathcal{P}$», где $\mathcal{P}$ — некоторое свойство элементов из M. Обозначать такие формы будем через $\mathcal{P}(x)$. Высказывательные формы с двумя переменными x и y по множеству M обычно имеют вид: «x находится в отношении $\mathcal{R}$ с y», где $\mathcal{R}$ — некоторое бинарное отношение на M (можно говорить, что $\mathcal{R}$ — свойство элементов из M^2). Обозначать такие формы будем через $\mathcal{R}(x, y)$.

Со всякой высказывательной формой $\mathcal{P}(x_1, ..., x_n)$ с n переменными ($n \geqslant 1$) по множеству M можно естественным образом связать n-местную истинностнозначную функцию, переменные которой принимают значения из M, т. е. функцию вида $M^n \to \{И, Л\}$. На произвольном кортеже $(a_1, ..., a_n)$ из M^n эта функция принимает значение И или Л в зависимости от того, *истинно* или *ложно* высказывание $\mathcal{P}(a_1, ..., a_n)$, полученное из высказывательной формы заменой ее переменных $x_1, ..., x_n$ значениями $a_1, ..., a_n$ из M соответственно.

Пусть M — произвольное непустое множество. Всякое отображение множества M^n во множество {И, Л} будем называть *n-местным **предикатом**[2] на множестве M.*

Поскольку всякое предложение с n переменными по множеству M, которое при замене всех переменных на элементы из M превращается в высказывание, однозначно определяет n-местный предикат, то обычно n-местный предикат на множестве M задают с помощью предложения с n переменными по множеству M,

[1] Следует различать *высказывательные* и *именные* формы (см. § 3.2).

[2] Термин *предикат* происходит от лат. *praedicatum* — «сказуемое». Обычно именно сказуемое (или группа сказуемого) в предложении с переменными выражает (задает) то свойство, которое определяет отображение, называемое предикатом.

т. е. с помощью некоторой высказывательной формы. И наоборот, всякому n-местному предикату на M можно сопоставить некоторое предложение с n переменными по множеству M (высказывательную форму). В связи с этим сами предложения с переменными (высказывательные формы) часто называют предикатами, если это не приводит к недоразумению.

П р и м е р ы.

1. Высказывательная форма «x — простое число», где x — натуральная переменная, задает отображение $\mathcal{Pr}: \mathrm{N} \to \{\text{И, Л}\}$ такое, что для произвольного натурального n $\mathcal{Pr}(n) = \text{И}$, если n — простое число, и $\mathcal{Pr}(n) = \text{Л}$ в противном случае. Например, $\mathcal{Pr}(3) = \text{И}$, а $\mathcal{Pr}(4) = \text{Л}$. Отображение (функция) $\mathcal{Pr}$ служит примером одноместного предиката на N.

2. Высказывательная форма «x делит y» задает отображение $\mathcal{D}$: $\mathrm{N}^2 \to \{\text{И, Л}\}$ такое, что для произвольных натуральных n и m $\mathcal{D}(m, n) = \text{И}$, если n делится на m, и $\mathcal{D}(m, n) = \text{Л}$ в противном случае. Например, $\mathcal{D}(3, 6) = \text{И}$, а $\mathcal{D}(4, 6) = \text{Л}$. Отображение $\mathcal{D}$ служит примером двуместного предиката на N.

3. Высказывательная форма «$x = y$», где x и y — действительные переменные, задает отображение $\mathcal{E}$: $\mathrm{R}^2 \to \{\text{И, Л}\}$ такое, что $\mathcal{E}(a, b) = \text{И}$, если a совпадает с b, и $\mathcal{E}(a, b) = \text{Л}$ в противном случае. Например, $\mathcal{E}(3, 3) = \text{И}$, а $\mathcal{E}(4, 6) = \text{Л}$. Функция $\mathcal{E}$ является двуместным предикатом на множестве действительных чисел R, называемым предикатом равенства. ○

По сути, задать n-местный предикат на множестве M — это значит задать некоторое свойство элементов множества M^n, а задать свойство элементов множества M^n — это значит задать n-местный предикат на множестве M.

Если $\mathcal{P}$ — n-местный предикат на множестве M, то множество E_M тех и только тех $x_1, ..., x_n$ из M, для которых $\mathcal{P}(x_1, ..., x_n) = \text{И}$, называют ***множеством истинности*** *предиката* $\mathcal{P}$ (и соответствующей ему высказывательной формы).

➤➤ Множество решений всякого уравнения (или неравенства) является множеством истинности соответствующего предиката.

Операции над высказывательными формами

На высказывательные формы можно распространить известные нам операции алгебры логики. Из любых двух предложений (высказывательных форм) с переменными по одному и тому же множеству с помощью связующих слов *и*; *или*;

если..., то можно образовать новые предложения с переменными, которые называют соответственно конъюнкцией, дизъюнкцией, импликацией данных предложений. С помощью частицы *не* из данного предложения с переменными можно образовать новое предложение, называемое отрицанием данного.

Рассмотрим несколько **примеров** образования сложных предложений с переменными (высказывательных форм) указанными способами:

1) «x — четное число ***и*** y — простое число»;

2) «x — четное число ***и*** x — простое число»;

3) «***если*** x — нечетное число, ***то*** x^2 — нечетное число»;

4) «x и y ***не*** являются взаимно простыми числами». ○

➤ Система уравнений (неравенств) представляет собой конъюнкцию предложений с переменными, а совокупность уравнений (неравенств) представляет собой дизъюнкцию предложений с переменными.

Часто говорят о логических операциях над предикатами, заданными на одном и том же множестве. Например, под конъюнкцией двух предикатов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, заданных соответственно высказывательными формами $\mathcal{P}_1(x)$ и $\mathcal{P}_2(x)$, понимают предикат, задаваемый предложением $\mathcal{P}_1(x)$ & $\mathcal{P}_2(x)$. При этом не учитывается, что предложение $\mathcal{P}_1(x)$ & $\mathcal{P}_2(y)$ задает уже другой предикат, который также «получен» из предикатов $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$.

Рассмотрим в связи с этим первые два примера. Очевидно, предложения «y — простое число» и «x — простое число» задают один и тот же предикат, т. е. для задания предиката с помощью высказывательной формы в данном случае неважен выбор переменной. В то же время, если речь идет об операциях над высказывательными формами, существенно, какие именно буквы использованы в этих формах в качестве переменных. Так, например, предложения 1 и 2 задают различные предикаты.

Таким образом, более корректно говорить об операциях над высказывательными формами, а не над предикатами.

Кванторы

Рассмотрим теперь две новые операции, специфические для высказывательных форм, — операции *применения* (*неформальных*) *кванторов*. Их задают с помощью *кванторных* слов «для любого» и «существует» или их аналогов.

Начнем с примера. Рассмотрим предложение с одной переменной «x — нечетное число» (где x — переменная, которой можно придавать значения из множества $\mathbf{N}$). Образуем из него два новых предложения: «для любого x (из $\mathbf{N}$) x — нечетное число» и «существует x (из **N**) такое, что x — нечетное число». В этих двух новых предложениях букве x уже нельзя придавать значения, т. е. она перестала быть переменной в прежнем смысле. Говорят, что в первом предложении переменная *x связана квантором общности*, а во втором — переменная *x связана квантором существования*. Оба новых предложения являются высказываниями, причем первое — ложным, а второе — истинным.

➤ Заметим, что эти высказывания можно, сохраняя смысл, переформулировать, совсем не используя букву x: «всякое (натуральное) число нечетно» и «существует (натуральное) нечетное число».

Пусть $\mathcal{P}$ — произвольное свойство элементов некоторого множества M. Как обычно, обозначим через $\mathcal{P}(x)$ предложение (высказывательную форму) с одной переменной x по множеству M: «x обладает свойством $\mathcal{P}$». Высказывание «для любого x $\mathcal{P}(x)$» называют *результатом применения* к предложению $\mathcal{P}(x)$ *квантора общности* по переменной x (результатом связывания переменной x квантором общности). Такое высказывание считают истинным тогда и только тогда, когда все элементы из M обладают свойством $\mathcal{P}$. Символически мы записываем такое высказывание следующим образом: (x) $\mathcal{P}(x)$. Заметим, что тот же смысл и то же истинностное значение имеет высказывание «для любого y $\mathcal{P}(y)$», как, впрочем, и высказывание, в котором совсем не используются переменные: «всякий элемент из M обладает свойством $\mathcal{P}$».

Образуем из предложения $\mathcal{P}(x)$ другое высказывание: «существует x такое, что $\mathcal{P}(x)$» (в символической записи $(\mathsf{E}x)$ $\mathcal{P}(x)$), которое считают истинным тогда и только тогда, когда хотя бы один элемент из M обладает свойством $\mathcal{P}$. Это высказывание называют *результатом применения* к предложению $\mathcal{P}(x)$ *квантора существования* по переменной x (результатом связывания переменной x квантором существования в предложении $\mathcal{P}(x)$).

➤ Слова «для всякого x» называют (*неформальным*) *квантором общности по x*, а слова «существует x» — (*неформальным*) *квантором существования по x.*

Рассмотрим теперь предложение (высказывательную форму) с двумя натуральными переменными:

$$«x \text{ меньше } y». \tag{1}$$

Образуем из него два новых предложения:

$$«\text{для всякого } y \text{ число } x \text{ меньше } y», \tag{2}$$

которое будем символически записывать так: (y) $(x < y)$;

$$«\text{существует } y \text{ такое, что } x \text{ меньше } y», \tag{3}$$

которое будем символически записывать так: $(\mathsf{E}y)(x < y)$.

В отличие от первого предложения (1) в двух новых предложениях (2) и (3) значения можно придавать только переменной x, которую называет *свободной*. Букве y уже нельзя придавать какие-либо значения, так как она перестала быть переменной в прежнем смысле, т. е. свободной переменной. Переменную y в таких случаях называют *связанной* переменной. В предложении (2) переменная *y связана квантором общности*, а в предложении (3) переменная *y связана квантором существования*.

Пусть $\mathcal{P}(x, y)$ – произвольное предложение с двумя переменными по некоторому множеству M. Обозначим через $(x)\ \mathcal{P}(x, y)$ предложение «для любого $x\ \mathcal{P}(x, y)$», истинное для тех и только тех y из M, для которых $\mathcal{P}(x, y)$ принимает значение И для каждого x из M (выполняется $\mathcal{P}(x, y)$). Это предложение имеет только одну свободную переменную. Аналогично рассматривается случай для квантора существования.

В общем случае, если $\mathcal{P}(x_1, ..., x_n, y)$ – предложение с переменными $x_1, ..., x_n, y$ $(n \geqslant 1)$, то результат применения к нему квантора (общности или существования) по переменной y определяется аналогично. Отметим, что в результате связывания переменной y квантором получается предложение с n переменными $x_1, ..., x_n$.

➤➤ **Замечание**. Квантор общности родственен конъюнкции в следующем смысле. Если M – конечное множество, а $\mathcal{P}(x)$ – некоторое предложение с переменной x по этому множеству, то высказывание $(x)\ \mathcal{P}(x)$ имеет тот же смысл и такое же истинностное значение, что и высказывание $\mathcal{P}(a_1)\ \&\ \mathcal{P}(a_2)\ \&\ ...\ \&\ \mathcal{P}(a_n)$, где $a_1, ..., a_n$ – список всех элементов множества M. Аналогично, квантор существования родственен дизъюнкции: высказывание $(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x)$ имеет тот же смысл и такое же истинностное значение, что и высказывание $\mathcal{P}(a_1) \vee \mathcal{P}(a_2) \vee ... \vee \mathcal{P}(a_n)$, если $M = \{a_1, ..., a_n\}$. ❍

§3.2. Язык логики предикатов и его фрагменты

Для того чтобы построить *язык логики предикатов* (ЯЛП), необходимо задать его алфавит и сформулировать определение формулы.

Алфавит ЯЛП[1]: & ∨ ⊃ ¬ ∀ ∃) (, x P f c.

[1] Теперь становится понятным, почему для сокращенной символической записи предложений вида «для любого...» и «существует...» были использованы символы, отличающиеся от символов ∀ и ∃, фигурирующих в качестве букв алфавита ЯЛП.

Левую скобку, правую скобку и запятую называют техническими символами.

Слово вида $(\underbrace{\text{x...x}}_{n\ \text{раз}})$ будем называть ***предметной переменной*** и обозначать через x_n ($n = 1, 2, ...$).

Слово вида $(\underbrace{\text{c...c}}_{n\ \text{раз}})$ будем называть ***предметной константой*** и обозначать через c_n ($n = 1, 2, ...$).

Слово вида $(\underbrace{\text{P...P}}_{n\ \text{раз}}, \underbrace{\text{P...P}}_{m\ \text{раз}})$ будем называть *n-местным* ***предикатным символом*** *с номером m* и обозначать через P^n_m ($n, m = 1, 2, ...$).

Слово вида $(\underbrace{\text{f...f}}_{n\ \text{раз}}, \underbrace{\text{f...f}}_{m\ \text{раз}})$ будем называть *n-местным* ***функциональным символом*** *с номером m* и обозначать через f^n_m ($n, m = 1, 2, ...$)[1].

Таким образом, для того чтобы получить бесконечное (счетное) множество предметных переменных, предикатных и функциональных символов и предметных констант, достаточно использовать конечный алфавит. Часто бесконечное множество предметных переменных, предикатных и функциональных символов и предметных констант сразу включают в исходные символы, используя тем самым бесконечный алфавит.

Термы ЯЛП

Прежде чем вводить понятие формулы ЯЛП, введем понятие терма. Термы служат формальными аналогами математических выражений с переменными или без них.

В математике мы часто имеем дело с такими выражениями, как π, $\sin 1$, 5^2 и т. п., которые служат ***именами*** (обозначениями) некоторых объектов (в данных примерах — чисел). Кроме того, столь же часто мы встречаем выражения, построенные из переменных и постоянных (констант) с помощью символов функций, например, такие, как $\sin 3x$, x^2, $(2x + y)^3$ и т. п. Обычно с помощью подобных выражений задают функции, в частности функции, которые являются суперпозицией более простых функций. Придавая

[1] На самом деле в дальнейшем мы будем, как обычно, используя *обозначения* предметных переменных, констант, предикатных и функциональных символов, для краткости говорить *предметная переменная* и т. д.

входящим в них переменным различные значения из области допустимых значений переменных, мы будем получать значения самих выражений — *имена* конкретных объектов.

Именной формой называют всякое выражение с переменными по некоторому множеству M, которое превращается в имя объекта из M, если всем его переменным присвоить значения из M.

➤ *Терм* (от лат. *terminus* — «выражение») — выражение ЯЛП, являющееся формальным аналогом имени объекта или именной формы. Предметные переменные и константы являются простейшими термами. Более сложные термы строятся из переменных и констант с помощью функциональных символов. Терм определяют индуктивно следующим образом.

! Определение ***терма:***

1. Всякая предметная переменная x_n и всякая предметная константа c_n есть терм.

2. Если слова t_1, ..., t_n — термы, а f_m^n — n-местный функциональный символ, то слово $f_m^n(t_1, ..., t_n)$ — терм.

3. Слово в алфавите ЯЛП является термом тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью п. 1 и 2.

Примеры.

1. Следующие слова являются термами ЯЛП[1]:

$$f_1^1(f_2^1(x_1)),\ f_1^3(x_2, c_1, x_2),\ f_1^4(x_5, c_1, f_2^2(x_2, x_3), c_4).$$

2. Слова $P_1^1(P_2^1(x_1))$, $f_1^2(P_1^1(x_1), P_2^1(c_1))$ не являются термами ЯЛП. ○

★ Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое свойство термов ЯЛП. Если требуется доказать, что все термы ЯЛП обладают свойством $\mathcal{P}$, удобно использовать следующий принцип (доказать который можно индукцией по числу вхождений в терм функциональных символов).

УТВЕРЖДЕНИЕ (*принцип индукции для термов ЯЛП*).

Если 1) всякая предметная переменная и всякая предметная константа обладают свойством $\mathcal{P}$;

---

[1] Здесь символ «,» (запятая) выступает в разных качествах: в записи $f_1^3(x_2, c_1, x_2)$ этот символ используется как девятая буква алфавита ЯЛП; вместе с тем этот же символ используется как обычная запятая метаязыка (естественного языка с математическими терминами и символами).

2) каковы бы ни были натуральные m и n, для любых термов t_1, ..., t_n, обладающих свойством $\mathcal{P}$, и n-местного функционального символа f_m^n терм $f_m^n(t_1, ..., t_n)$ также обладает свойством $\mathcal{P}$,

то всякий терм ЯЛП обладает свойством $\mathcal{P}$. ☆

Формулы ЯЛП Формулы ЯЛП являются формальными аналогами предложений с переменными или без них (т. е. высказывательных форм и высказываний). Определение формулы ЯЛП также носит индуктивный характер.

! Определение ***формулы ЯЛП***:

1. Если t_1, ..., t_n – термы, а P_m^n – n-местный предикатный символ, то $P_m^n(t_1, ..., t_n)$ – формула ЯЛП (ее называют также *элементарной* формулой ЯЛП).

2. Пусть A и B – произвольные слова в алфавите ЯЛП.

2.1. Если A и B – формулы ЯЛП, то слова $(A \,\&\, B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$ – формулы ЯЛП.

2.2. Если A – формула ЯЛП, а x_i – предметная переменная, то слова $(\forall x_i A)$, $(\exists x_i A)$ – формулы ЯЛП.

3. Слово в алфавите ЯЛП является формулой тогда и только тогда, когда это может быть обосновано с помощью п. 1 и 2.

В дальнейшем в гл. 3 и 4, если это не будет вызывать недоразумений, иногда будем использовать вместо слов «формула ЯЛП» просто слово «формула», а вместо слов «предметная переменная» просто слово «переменная».

П р и м е р ы.

1. Следующие слова являются формулами ЯЛП:

$$P_1^3(x_2, c_1, x_2),\ P_1^3(f_1^1(x_3), c_3, f_2^2(c_1, x_2)),\ ((\exists x_1 P_1^1(x_1)) \vee (\forall x_2 P_2^2(c_1, x_2))).$$

Заметим, что этим формулам можно придать смысл, причем не единственным образом (см. далее § 3.3).

2. Слова $f_1^2(P_1^1(x_1), P_2^1(c_1)), f_1^2(x_1, x_2) \,\&\, f_1^1(c_1), \forall x_1 f(x_1, x_2)$ не являются формулами ЯЛП. Этим словам невозможно естественным образом придать какой-либо смысл. ❍

➤➤ Можно доказать, что язык логики предикатов *разрешим*, т. е. существует алгоритм, позволяющий по произвольному слову в алфавите ЯЛП выяснить, является ли оно формулой ЯЛП.

Пусть $\mathcal{P}$ – некоторое свойство формул ЯЛП. Если требуется доказать, что все формулы ЯЛП обладают свойством $\mathcal{P}$, удобно использовать следующий принцип (доказать который можно индукцией по числу вхождений связок и кванторов в формулу).

УТВЕРЖДЕНИЕ (*принцип индукции для формул ЯЛП*).
Если 1) всякая элементарная формула обладает свойством $\mathcal{P}$;
2) для любых формул A и B, обладающих свойством $\mathcal{P}$, и любой предметной переменной x_i формулы $(A \mathbin{\&} B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(\neg A)$, $(\forall x_i A)$, $(\exists x_i A)$ также обладают свойством $\mathcal{P}$,
то всякая формула ЯЛП обладает свойством $\mathcal{P}$.

Для любых формул A и B формулу $((A \supset B) \mathbin{\&} (B \supset A))$ будем обозначать через $A \sim B$ и называть *эквиваленцией* формул A и B.

➤➤ При записи формул ЯЛП принято опускать некоторые скобки. Договоренность об *экономии скобок* основывается на следующем упорядочении кванторов и пропозициональных связок по убыванию их силы: $\forall$, $\exists$, $\neg$, $\&$, $\vee$, $\supset$, $\sim$. Кроме того, принято опускать внешние скобки. Скобки, опущенные в соответствии с этой договоренностью, могут быть однозначно восстановлены.

Произвольные предметные переменные будем иногда обозначать буквами x, y, z, возможно с индексами; произвольные предикатные символы – буквами P, Q, R, возможно с индексами; произвольные функциональные символы – буквами f, g, h, возможно с индексами.

В формулах $(\forall x_i A)$ и $(\exists x_i A)$ сочетания символов $\forall x_i$ и $\exists x_i$ называют соответственно ***квантором общности*** и ***квантором существования по переменной*** x_i, а формулу A называют ***областью действия*** указанного вхождения кванторов $\forall x_i$ и $\exists x_i$. ☆

Можно доказать, что существует единственное начало слова, стоящего справа от вхождения квантора $\forall x_i$ (или $\exists x_i$), которое является формулой. Эта формула и есть область действия данного вхождения квантора.

Уточнить понятие *области действия вхождения квантора в формулу* можно следующим образом.

★ Пусть A – формула ЯЛП, в которой фиксировано некоторое вхождение квантора Q: $A \equiv X\mathrm{Q}x_iY$, где X, Y – слова в алфавите ЯЛП (X может быть пустым), Q есть $\forall$ или $\exists$. Можно доказать (оставляем это заинтересованному читателю), что существует и притом единственное начало слова Y, являющееся формулой. Именно оно и называется *областью действия данного вхождения квантора* Q по переменной x_i в формулу A. ☆

П р и м е р. Рассмотрим две формулы:

$$\exists x_1 P_1^1(x_1) \,\&\, \forall x_2 P_2^2(x_1, x_2)\,;$$

$$\exists x_1 (P_1^1(x_1) \,\&\, \forall x_2 P_2^2(x_1, x_2))\,.$$

В первой формуле областью действия вхождения квантора существования $\exists x_1$ служит формула $P_1^1(x_1)$, а во второй − формула ($P_1^1(x_1) \,\&\, \forall x_2 P_2^2(x_1, x_2)$). Как видно из второго примера, скобки указывают область действия вхождения квантора $\exists x_1$ и, если их опустить, смысл формулы изменится. ❍

Замечание 1. Часто, говоря о кванторе по переменной x_i, имеют в виду *вхождение* этого квантора по переменной x_i. ❍

Вхождение переменной x_i в формулу A называют ***связанным вхождением,*** если оно находится в области действия какого-либо квантора по переменной x_i или является вхождением в сам квантор по переменной x_i. Вхождение переменной x_i в формулу A называют ***свободным вхождением,*** если оно не является связанным.

Переменную x_i называют ***свободной переменной*** формулы A, если она имеет хотя бы одно свободное вхождение в эту формулу. Если все вхождения переменной x_i в формулу A являются связанными, то x_i называют ***связанной переменной***[1] формулы A.

Формулу называют ***замкнутой формулой***, если она не содержит свободных переменных.

П р и м е р ы.

1. Переменная x_1 имеет три вхождения в формулу

$$P_1^1(x_1) \supset \forall x_1 P_1^2(x_1, x_2)\,,$$

первое из которых − свободное, а два другие − связанные. Единственное вхождение переменной x_2 в эту формулу свободное. Обе переменные являются свободными в этой формуле. Сама формула не является замкнутой.

2. Формула $\exists x_2 \forall x_1 P_1^2(x_1, x_2)$ не содержит свободных переменных, все вхождения переменных в нее связанные, а сама формула замкнута. ❍

---

[1] Иногда связанной переменной формулы A называют переменную, которая имеет хотя бы одно связанное вхождение в A.

Замечание 2. Можно сформулировать индуктивное определение свободного вхождения переменной в формулу ЯЛП. ❍

Замыканием формулы A называют:

1) формулу $\forall x_{i_1} \ldots \forall x_{i_n} A$, если A незамкнута, а $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ – список всех ее свободных переменных $(i_1 < i_2 < \ldots < i_n)$;
2) саму формулу A, если A – замкнутая формула.
Замыкание формулы A будем обозначать символом A'.

Подстановка терма в формулу

В формулы вместо свободных переменных можно подставлять термы, получая при этом новые формулы. В термы также вместо переменных можно подставлять термы, получая при этом новые термы.

➤ Пусть x, t, s, A – произвольные предметная переменная, термы и формула ЯЛП соответственно. Если каждое вхождение переменной x в терм s заменить вхождением терма t, то получим терм, который будем называть *результатом подстановки терма t в терм s вместо переменной x* и обозначать через $(s)_t^x$. Если каждое свободное вхождение переменной x в формулу A заменить вхождением терма t, то получим формулу, которую будем называть *результатом подстановки терма t в формулу A вместо переменной x* и обозначать через $(A)_t^x$.

★ Уточним эти понятия с помощью индуктивных определений.

Определение *результата подстановки терма t в терм s вместо переменной x*:

1. а) для любой переменной y, отличной от переменной x, $(y)_t^x = y$;

б) для переменной x $(x)_t^x = t$;

в) для любой предметной константы c $(c)_t^x = c$;

2. Для любых термов $t_1, \ldots, t_n$ и n-местного функционального символа f_m^n

$$(f_m^n(t_1, \ldots, t_n))_t^x = f_m^n((t_1)_t^x, \ldots, (t_n)_t^x).$$

Используя принцип индукции для термов ЯЛП, легко доказать, что результат подстановки терма t в терм s вместо переменной x является термом.

Определение ***результата подстановки терма*** t ***в формулу*** A ***вместо переменной*** x:

1. Каковы бы ни были элементарная формула $P_m^n(t_1, ..., t_n)$, терм t и переменная x:

$$(P_m^n(t_1, ..., t_n))_t^x = P_m^n((t_1)_t^x, ..., (t_n)_t^x).$$

2.1. Каковы бы ни были формулы A и B, терм t и переменная x:

$(\neg A)_t^x = \neg(A)_t^x$; $(A \oplus B)_t^x = (A)_t^x \oplus (B)_t^x$, где $\oplus$ есть &, $\vee$, $\supset$.

2.2. Каковы бы ни были формула A, терм t и переменная x:

$(\forall xA)_t^x = \forall x A$;

$(\forall yA)_t^x = \forall y(A)_t^x$, где y — переменная, отличная от x;

$(\exists xA)_t^x = \exists xA$;

$(\exists yA)_t^x = \exists y(A)_t^x$, где y — переменная, отличная от x.

Заметим, что если переменная x не входит свободно в формулу A, в частности когда A замкнута, то $(A)_t^x$ совпадает с A.

Несложно доказать, что $(A)_t^x$ — результат подстановки терма t в формулу A вместо переменной x — есть формула ЯЛП. ✰

➤➤ **Замечание 3**. Иногда удобно произвольную формулу обозначать через $A(x)$. При этом вовсе не обязательно переменная x входит в формулу A, а также, возможно, в A входят свободно переменные, отличные от x. Это удобно для того, чтобы затем результат подстановки терма t в формулу $A(x)$ вместо x обозначать через $A(t)$. ❍

Иногда формулу $(A)_t^x$ будем называть просто *подстановкой* терма t в формулу A вместо переменной x.

Отметим, что не всякая подстановка терма в формулу является в определенном смысле допустимой (корректной), осмысленной (см. замечание 3 в конце § 3.3). Во избежание нежелательных ситуаций ограничимся подстановками, при которых переменные, входящие в терм t, при подстановке его в формулу A не связываются кванторами, входящими в A. Другими словами, входящие в терм t переменные должны оставаться свободными в результате подстановки $(A)_t^x$. Уточним сказанное.

Терм t называют *допустимым* для подстановки[1] в формулу A вместо переменной x_i (A-x_i-***допустимым термом***), если никакое свободное вхождение x_i в формулу A не находится в области действия квантора по какой-либо переменной, входящей в терм t.

П р и м е р. Если формула A есть $P_1^1(x_1) \supset \forall x_3 \; P_2^2(x_1, x_3)$, то термы $f_1^2(x_1, x_2)$, $f_1^1(c_1)$ являются A-x_1-допустимыми, а термы $f_1^1(x_3)$, $f_1^2(x_1, x_3)$ не являются A-x_1-допустимыми. ○

➤ Легко проверить, что:

1) терм x_i является A-x_i-допустимым для любой формулы A;

2) терм t, не содержащий переменных, A-x_i-допустим для любой формулы A и любой переменной x_i;

3) всякий терм t является A-x_i-допустимым для любой формулы A, не содержащей x_i свободно (в частности, для замкнутой формулы);

4) всякий терм t является A-x_i-допустимым для любой бескванторной формулы A и любой переменной x_i.

Если терм t допустим для подстановки в формулу A вместо переменной x_i (A-x_i-допустим), то подстановку терма t в формулу A вместо переменной x_i будем называть *допустимой* или *корректной*.

Замечание 4. Можно сформулировать индуктивное определение результата *одновременной подстановки* в формулу A термов t_1, ..., t_n вместо переменных x_1, ..., x_n – $(A)^{x_1, \ldots, x_n}_{t_1, \ldots, t_n}$, а также индуктивное определение *допустимой одновременной подстановки* термов вместо переменных в формулу A. ○

Языки первого порядка

Обычно, для того чтобы на языке формул выразить те или иные свойства, записать те или иные утверждения некоторой математической теории, достаточно лишь частично использовать множества предикатных символов, функциональных символов и предметных констант ЯЛП. При этом в некоторых случаях можно обойтись вовсе без функциональных символов и предметных констант, в то время как без предикатных символов невозможно построить ни одной формулы.

[1] Часто вместо термина «терм *допустим* для подстановки...» используют термин «терм *свободен* для подстановки...».

Сигнатурой σ будем называть множество $Pred_\sigma \cup Func_\sigma \cup Const_\sigma$, где $Pred_\sigma$, $Func_\sigma$, $Const_\sigma$ – произвольные множества соответственно предикатных символов, функциональных символов и предметных констант, причем $Pred_\sigma \neq \varnothing$.

Фрагментом* ЯЛП *сигнатуры σ (ЯЛП$_\sigma$) будем называть язык, формулы которого строятся из элементов σ, всех предметных переменных (без ограничения) с помощью связок, кванторов и технических символов так же, как формулы ЯЛП.

➤➤ Фрагменты ЯЛП принято также называть ***языками первого порядка***.

В языках первого порядка, в отличие от языков более высокого порядка, не допускаются кванторы по предикатным и по функциональным символам. Также на языке первого порядка нельзя непосредственно записать предложения, в которых фигурируют предикаты, заданные на функциях, или функции, заданные на предикатах.

Сигнатурой формулы F (множества формул Γ) называют множество всех предикатных символов, функциональных символов и предметных констант, входящих в эту формулу (множество формул Γ). Сигнатуру формулы F (множества формул Γ) будем обозначать через $\sigma(F)$ ($\sigma(\Gamma)$).

Если язык сигнатуры σ используют для записи предложений некоторой содержательной теории, то вместо символов P^n_m, f^n_m и c_i обычно используют символы, традиционно обозначающие соответствующие предикаты и функции этой теории.

П р и м е р. При использовании языка первого порядка для записи предложений теории множеств достаточно одного единственного двуместного предикатного символа. Рассмотрим сигнатуру с единственным двуместным предикатным символом $\in$, т. е. $\sigma = \{\in\}$, при этом вместо $\in(t_1, t_2)$ будем писать $t_1 \in t_2$.

Приведем примеры формул ЯЛП$_\sigma$:

а) $\forall z\,(z \in x \sim z \in y)$; введем для этой формулы обозначение $x = y$;

б) $\forall z\,(z \in x \supset z \in y)$; эту формулу обозначим через $x \subseteq y$;

в) $\forall y\,\neg(y \in x)$; эту формулу обозначим следующим образом: $x = \varnothing$. ○

П р и м е р. Рассмотрим сигнатуру $\{ = , \cdot , 1\}$ с двуместным предикатным символом $=$, двуместным функциональным символом $\cdot$ и константой 1 (вместо $\cdot(t_1, t_2)$ будем писать привычным образом $t_1 \cdot t_2$). Примеры формул в этой сигнатуре:

а) $\exists z\ (y = x \cdot z)$;
б) $\forall y(\exists z\ (x = y \cdot z) \supset y = 1 \vee y = x)\ \&\ \neg(x = 1)$. ❍

§3.3. Интерпретации языка логики предикатов

Когда тот или иной язык первого порядка построен, возникает задача истолкования объектов этого языка. Истолковывать символы, термы и формулы этого языка, вкладывать в них смысл можно по-разному.

Введем понятия интерпретации ЯЛП$_\sigma$ и значения формулы в заданной интерпретации.

! Будем говорить, что задана ***интерпретация***[1] ***ЯЛП***$_\sigma$ (интерпретация сигнатуры σ), если задано непустое множество M — *поле интерпретации*, и:

1) каждому n-местному предикатному символу P_m^n из σ поставлен в соответствие n-местный предикат $\widetilde{P_m^n}$ на M, т. е.

$\widetilde{P_m^n} : M^n \to \{\text{И, Л}\}$;

2) каждому n-местному функциональному символу f_m^n из σ поставлена в соответствие n-местная функция $\widetilde{f_m^n}$ на M, т. е.

$\widetilde{f_m^n} : M^n \to M$;

3) каждой предметной константе c_i из σ поставлен в соответствие элемент $\tilde{c}_i$ из M.

Введем следующие обозначения: $\widetilde{Pred_\sigma} \leftrightharpoons \{\widetilde{P_m^n} \mid P_m^n \in Pred_\sigma\}$,

$\widetilde{Func_\sigma} \leftrightharpoons \{\widetilde{f_m^n} \mid f_m^n \in Func_\sigma\}$, $\widetilde{Const_\sigma} \leftrightharpoons \{\tilde{c}_i \mid c_i \in Const_\sigma\}$.

! Алгебраическую систему $\mathfrak{M}_\sigma = \langle M, \widetilde{Pred_\sigma}, \widetilde{Func_\sigma}, \widetilde{Const_\sigma} \rangle$ будем называть ***интерпретацией сигнатуры*** σ.

---

[1] *Интерпретация* — от лат. *interpretatio* («истолкование»).

Если сигнатура фиксирована, то при обозначении интерпретации этой сигнатуры индекс σ иногда будем опускать, т. е. писать просто $\mathfrak{M}$ вместо $\mathfrak{M}_\sigma$.

➤ **Пример.** Рассмотрим язык сигнатуры с одним двуместным предикатным символом = , двумя двуместными функциональными символами + и $\cdot$, одним одноместным функциональным символом $'$ и предметной константой 0. Этот язык будем называть языком формальной арифметики и обозначать $Я_{Ar}$. Наиболее важной интерпретацией этого языка является множество натуральных чисел с операциями сложения, умножения, перехода к следующему и нулем: $\mathfrak{N} = < \mathbf{N}, = , + , \cdot, ', 0 >$, предикатный символ = интерпретируется как отношение равенства (совпадения). Эту интерпретацию называют *стандартной интерпретацией* $Я_{Ar}$. ○

Пример. Для записи аксиом теории групп можно использовать язык первого порядка, сигнатура которого содержит двуместный предикатный символ = , двуместный функциональный символ $*$ и предметную константу e. Для функционального символа и константы принято использовать при аддитивной форме записи знаки + и 0, а при мультипликативной – знаки $\cdot$ и 1 соответственно. Всякая группа является интерпретацией этого языка. ○

! Каждой формуле F $ЯЛП_\sigma$ в интерпретации $\mathfrak{M}_\sigma$ поставим в соответствие содержательное предложение $\widetilde{F}$ естественного языка, которое получается из формулы F следующим образом:

1) каждый предикатный символ P_m^n формулы F заменяют на обозначение соответствующего предиката $\widetilde{P_m^n}$;

2) каждый функциональный символ f_m^n формулы F – на обозначение соответствующей функции $\widetilde{f_m^n}$;

3) каждую предметную константу c_i формулы F – на элемент $\tilde{c}_i$ из M;

4) связки &, $\vee$, $\supset$, $\neg$ заменяют соответственно на слова «и», «или», «если ..., то», «не»;

5) кванторы $\forall x_i$ и $\exists x_i$ – соответственно на слова «для всякого x_i из M» и «существует x_i из M»;

6) свободные предметные переменные x_i формулы F рассматривают как переменные по множеству M.

➤ Если формула F замкнута, то $\widetilde{F}$ является высказыванием, а если формула F имеет k свободных переменных, то $\widetilde{F}$ – предложение с k переменными по множеству M (высказывательная форма), задающее k-местный предикат на M. Предложение $\widetilde{F}$ будем называть ***прочтением формулы*** *F в интерпретации* $\mathfrak{M}_\sigma$.

Примеры. Рассмотрим интерпретацию: $\langle \mathbf{N}, < \rangle$, где $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Для следующих формул построим предложения, соответствующие им в данной интерпретации (являющиеся прочтениями этих формул).

1. «Прочитаем» формулу $\exists y\, \forall x\, P(x, y)$ в данной интерпретации: «существует (натуральное) число, которое больше любого (натурального) числа». Это предложение является ложным высказыванием.

2. «Прочитаем» формулу $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$: «для всякого (натурального) числа существует большее его (натуральное) число». Это предложение является истинным высказыванием.

3. «Прочитаем» формулу $\exists x\, P(x, y)$: «существует (натуральное) число меньшее, чем y». Это предложение с одной свободной переменной. Оно задает одноместный предикат на множестве **N**, который ложен при $y = 0$ и истинен при любом другом значении y.

4. «Прочитаем» формулу $\forall y\, P(x, y)$: «всякое (натуральное) число больше x». Это предложение с одной свободной переменной задает тождественно ложный предикат на **N** (принимающий значение Л при любом значении x).

5. «Прочитаем» формулу $\exists y\, P(x, y)$ в данной интерпретации: «существует натуральное число большее, чем x». Это предложение с переменной x задает тождественно истинный предикат на **N**. ○

Аналогичным образом каждому терму t ЯЛП$_\sigma$ в интерпретации $\mathfrak{M}_\sigma$ ставится в соответствие некоторый объект, обозначаемый через $\tilde{t}$ и представляющий собой выражение, построенное из переменных по M и констант из множества $\widetilde{Const_\sigma}$ с помощью обозначений для функций из множества $\widetilde{Func_\sigma}$. Если в терм входили переменные, то выражение $\tilde{t}$ представляет собой именную форму и задает некоторую операцию на M. Если в терм не входили никакие переменные, то $\tilde{t}$ – это некоторый элемент из M (точнее имя элемента из M). Выражение $\tilde{t}$ будем называть ***прочтением терма*** *t в интерпретации* $\mathfrak{M}_\sigma$.

Пусть заданы сигнатура σ, интерпретация $\mathfrak{M}_\sigma$ с полем M, а также n-местный предикат $\mathcal{P}$ на множестве M. Будем говорить, что формула $F(x_1, ..., x_n)$ ЯЛП$_\sigma$ со свободными переменными x_1, ..., x_n *выражает* предикат $\mathcal{P}$ в $\mathfrak{M}_\sigma$, а предикат $\mathcal{P}$ *выразим* с помощью формулы $F(x_1, ..., x_n)$ в $\mathfrak{M}_\sigma$, если для любых a_1, ..., a_n из M предложение $\widetilde{F}(a_1, ..., a_n)$ истинно в $\mathfrak{M}_\sigma$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}(a_1, ..., a_n) =$ И.

Предикат $\mathcal{P}$ на множестве M называют *выразимым в* $\mathfrak{M}_\sigma$, если существует формула F ЯЛП$_\sigma$, которая выражает этот предикат.

Пример. Рассмотрим ЯЛП$_\sigma$ с единственным двуместным предикатным символом $\in$ и интерпретацию $\mathfrak{M}_\sigma$ с некоторой совокупностью множеств в качестве поля интерпретации и отношением «x элемент y». Запишем формулы, выражающие известные отношения между множествами или свойства множеств, которые используют в интуитивной теории множеств:

а) формула $\forall z\ (z \in x \sim z \in y)$ выражает предикат равенства множеств $(x = y)$;

б) формула $\forall z\ (z \in x \supset z \in y)$ выражает предикат включения $(x \subseteq y)$;

в) формула $\forall y\ \neg(y \in x)$ выражает предикат «x — пустое множество». ❍

Пример. Рассмотрим сигнатуру $\{ = , \cdot , 1\}$ и интерпретацию $\mathfrak{M}_\sigma$ с полем N, отношением равенства, операцией умножения и единицей. В этой интерпретации:

а) формула $\exists z\ (y = x \cdot z)$ выражает предикат делимости «x делит y»;

б) формула $\forall y\ (\exists z\ (x = y \cdot z) \supset y = 1 \vee y = x)\ \&\ \neg(x = 1)$ выражает предикат «x — простое число». ❍

Символическая запись математических предложений

Часто при записи математических предложений используют символику, позволяющую сделать запись значительно короче. Таковы, например, используемые нами символические записи метаязыка $(x)\ \mathcal{P}(x)$ и $(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x)$ для предложений «для всякого x $\mathcal{P}(x)$» и «существует x такое, что $\mathcal{P}(x)$» соответственно. Синтаксис таких и подобных им записей соответствует синтаксису ЯЛП.

➤ В математических текстах часто встречаются предложения следующего вида: «всякий объект, обладающий свойством $\mathcal{P}$, обладает свойством $\mathcal{Q}$». Логическая структура таких предложений выявляется (отражается) при их символической записи:

$$(x)\ (\mathcal{P}(x) \to \mathcal{Q}(x)).$$

➤ Не менее распространены предложения другого вида: «некоторые объекты, обладающие свойством $\mathcal{P}$, обладают свойством $\mathcal{Q}$». Тот же смысл имеют предложения вида: «существует объект, обладающий свойством $\mathcal{P}$, который обладает свойством $\mathcal{Q}$». Отразим логическую структуру таких предложений в их символической записи:

$$(\mathsf{E}x)\ (\mathcal{P}(x)\ \&\ \mathcal{Q}(x)).$$

В обоих примерах $\mathcal{P}(x)$ можно рассматривать как некоторое ограничивающее условие на x.

➤ Для записи таких предложений на практике обычно используют так называемые (неформальные) *ограниченные кванторы*:
вместо $(x)\ (\mathcal{P}(x) \to \mathcal{Q}(x))$ пишут $(x)_{\mathcal{P}(x)}\, \mathcal{Q}(x)$,
а вместо $(\mathsf{E}x)\ (\mathcal{P}(x)\ \&\ \mathcal{Q}(x))$ пишут $(\mathsf{E}x)_{\mathcal{P}(x)}\, \mathcal{Q}(x)$.

Например, предложение «для всякого неотрицательного x существует неотрицательное число, квадрат которого равен x» (где x — действительная переменная) без использования ограниченных кванторов записывают так:

$$(x)\ (x \geqslant 0 \to (\mathsf{E}y)\ (y \geqslant 0\ \&\ x = y^2)).$$

Используя ограниченные кванторы, его можно записать короче:

$$(x)_{x\,\geqslant\,0}\, (\mathsf{E}y)_{y\,\geqslant\,0}\, (x = y^2).$$

Для формул ЯЛП также можно использовать (формальные) ***ограниченные кванторы***, введя следующие обозначения:

$$\forall x_{A(x)}\, B(x) \leftrightharpoons \forall x\ (A(x) \supset B(x));$$
$$\exists x_{A(x)}\, B(x) \leftrightharpoons \exists x\ (A(x)\ \&\ B(x)).$$

Так, например, условие, определяющее функцию f, непрерывную в точке a (будем считать, что f определена на промежутке D, содержащем точку a), записывают в виде формулы языка соответствующей сигнатуры так:

$$\forall\varepsilon\ (\varepsilon > 0 \supset \exists\delta\ (\delta > 0\ \&\ \forall x\ (x \in D \supset (|\, x - a\,| < \delta \supset |\, f(x) - f(a)| < \varepsilon)))).$$

С помощью ограниченных кванторов можно то же самое записать короче и более обозримо:

$$\forall\varepsilon_{\varepsilon > 0}\, \exists\delta_{\delta > 0} \forall\, x_{x \in D} (|\, x - a\,| < \delta \supset |\, f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Более привычно это можно записать так:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\ \forall x \in D\ (|\, x - a\,| < \delta \supset |\, f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

УПРАЖНЕНИЕ

Запишите на ЯЛП определяющее условие для понятия «число b является пределом функции f в точке a» без ограниченных кванторов, а также с их использованием.

➤ Рассмотрим еще один полезный пример. Запишем на языке формул предложение «существует единственный элемент, обладающий свойством $\mathcal{P}$». Предполагая в сигнатуре σ предикатный символ равенства $=$, это можно сделать следующим образом:

$$\exists x\ (A(x)\ \&\ \forall y\ (A(y) \supset y = x)),$$

где A — формула, выражающая предикат $\mathcal{P}$.

Можно это же предложение выразить другой формулой:

$$\exists x\ A(x)\ \&\ \forall x\, \forall y\ (A(x)\ \&\ A(y) \supset x = y).$$

Каждую из этих формул принято обозначать через $\exists_1 x\ A(x)$ или через $\exists! x\ A(x)$.

Заметим, что формула $\forall x \forall y\ (A(x)\ \&\ A(y) \supset x = y)$ выражает предложение «не более чем один элемент обладает свойством $\mathcal{P}$».

Значение формулы в интерпретации с оценкой

➤ Пусть Γ — непустое конечное множество формул ЯЛП$_\sigma$, а $\mathfrak{M}$ — произвольная интерпретация сигнатуры σ. Если каждой переменной x_i, имеющей свободное вхождение в какую-либо формулу из Γ, поставлен в соответствие некоторый элемент из M (т. е. задано отображение v множества FVr_Γ свободных переменных множества формул Γ во множество M), то будем говорить, что задана *оценка формул* из Γ в интерпретации $\mathfrak{M}$ (или *интерпретация* $\mathfrak{M}$ *с оценкой* v *формул* из Γ). При этом если в именной форме $\tilde{t}$ каждую переменную x_i заменить на соответствующий элемент $a_i = v(x_i)$ из M, то получится элемент из M, который называют *значением терма* t *в интерпретации* $\mathfrak{M}_\sigma$ *при данной оценке* и обозначают через $v(t)$. Если в предложении $\widetilde{F}$, где $F \in \Gamma$, каждую свободную переменную x_i заменить на соответствующий элемент $a_i = v(x_i)$ из M, то получится высказывание $\widetilde{F}(a_1, ..., a_n)$, истинностное значение которого называют *значением формулы* F *в интерпретации* $\mathfrak{M}$ *при оценке* v и обозначают символом $\left| F \right|_v^{\mathfrak{M}}$.

Введенные на интуитивном уровне понятия, связанные с понятиями терма и формулы, как всегда, можно уточнить с помощью индуктивных определений. Начнем с понятия оценки в $\mathfrak{M}_\sigma$.

Оценкой *в интерпретации* $\mathfrak{M}_\sigma$ называют всякое отображение v множества предметных переменных во множество M — поле интерпретации: $Vr \to M$.

★ Определение ***значения терма*** *t в интерпретации* $\mathfrak{M}_\sigma$ при данной оценке v:

1.1. Для любой предметной переменной x_i ее значение $v(x_i)$ задано оценкой.

1.2. Для любой предметной константы c_i $\quad v(c_i) = \tilde{c}_i$.

2. Для любых термов $t_1, ..., t_n$ и функционального символа f_m^n

$$v(f_m^n(t_1, ..., t_n)) = \widetilde{f_m^n}(v(t_1), ..., v(t_n)).$$

Легко видеть, что $v(t)$ — элемент поля интерпретации M.

Определение ***значения формулы*** F ЯЛП$_\sigma$ *в интерпретации* $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ *при оценке* v[1].

1. Для всякой элементарной формулы $P_m^n(t_1, ..., t_n)$

$$| P_m^n(t_1, ..., t_n) |_v^{\mathfrak{M}} = \widetilde{P_m^n}(v(t_1), ..., v(t_n)).$$

2.1. Каковы бы ни были формулы A и B, если значения $| A|_v^{\mathfrak{M}}$ и $| B|_v^{\mathfrak{M}}$ определены, то

$| A \oplus B|_v^{\mathfrak{M}} = | A|_v^{\mathfrak{M}} \overset{\circ}{\oplus} | B|_v^{\mathfrak{M}}$, где $\oplus$ есть $\&, \vee, \supset$; $| \neg A|_v^{\mathfrak{M}} = \overset{\circ}{\neg} | A|_v^{\mathfrak{M}}$.

2.2. Каковы бы ни были формула A и переменная x:

$| \forall x\ A|_v^{\mathfrak{M}} =$ И тогда и только тогда, когда $| A|_{v'}^{\mathfrak{M}} =$ И для всякой оценки v', которая отличается от оценки v, быть может, только значением x;

$| \exists x\ A|_v^{\mathfrak{M}} =$ И тогда и только тогда, когда $| A|_{v'}^{\mathfrak{M}} =$ И хотя бы при одной оценке v', которая отличается от оценки v, быть может, только значением x. ☆

Пример. Формуле $\forall y\ P(x, y)$ со свободной переменной x в интерпретации $\mathfrak{M} = \langle \mathbf{N}, \leqslant \rangle$ при такой оценке v этой формулы, что $v(x) = 0$, соответствует истинное высказывание «всякое (натураль-

[1] Такое уточнение предложил в 1930 г. польский логик А. Тарский.

ное) число больше или равно 0». Следовательно, $|\forall y\, P(x, y)|_{v}^{\mathfrak{M}} = \text{И}$. При любой другой оценке в $\mathfrak{M}$ эта формула принимает значение Л. ○

Пусть $A(x)$ − формула сигнатуры σ, имеющая свободные вхождения x; $\mathfrak{M}$ − интерпретация сигнатуры σ; v − оценка в этой интерпретации. Отметим, что в формуле $\forall x\, A(x)$ оценка v приписывает значения всем свободным переменным этой формулы, в число которых x не входит. При этой оценке $\tilde{A}(x)$ − предложение с одной (свободной) переменной x. Тогда, очевидно, выполняются следующие соотношения, полезные при вычислении значения формулы в интерпретации с оценкой[1]:

$$|\forall x\, A(x)|_{v}^{\mathfrak{M}} = \text{И} \leftrightarrow (x)_{x \in M}(|\tilde{A}(x)| = \text{И}) \leftrightarrow |\tilde{A}(x)| \equiv \text{И};$$

$$|\exists x\, A(x)|_{v}^{\mathfrak{M}} = \text{И} \leftrightarrow (\mathrm{E}x)_{x \in M}(|\tilde{A}(x)| = \text{И}) \leftrightarrow |\tilde{A}(x)| \not\equiv \text{Л};$$

$$|\forall x\, A(x)|_{v}^{\mathfrak{M}} = \text{Л} \leftrightarrow (\mathrm{E}x)_{x \in M}(|\tilde{A}(x)| = \text{Л}) \leftrightarrow |\tilde{A}(x)| \not\equiv \text{И};$$

$$|\exists x\, A(x)|_{v}^{\mathfrak{M}} = \text{Л} \leftrightarrow (x)_{x \in M}(|\tilde{A}(x)| = \text{Л}) \leftrightarrow |\tilde{A}(x)| \equiv \text{Л}.$$

➤ **Замечание 1**. Значение формулы в заданной интерпретации определяется только значениями ее свободных переменных. Если формула замкнута, то ее значение и вовсе не зависит от оценки. Более точно, индукцией по построению формулы можно доказать, что для любой формулы A, если при оценках v_1 и v_2 в ее интерпретации $\mathfrak{M}$ все свободные переменные формулы A принимают одинаковые значения, то и сама формула A принимает при этих оценках одинаковые значения: $|A|_{v_1}^{\mathfrak{M}} = |A|_{v_2}^{\mathfrak{M}}$.

Таким образом, для того чтобы найти значение заданной формулы A в интерпретации $\mathfrak{M}$ с оценкой v, достаточно знать значения лишь свободных переменных этой формулы. Благодаря этому, задав отображение множества свободных переменных формулы A (или формул из множества Γ) в поле интерпретации, можно гово-

[1] Заметим, что обозначение $\tilde{A}(x)$ можно понимать неоднозначно. Во-первых, можно $\tilde{A}(x)$ понимать как обозначение предложения с переменной x, которое соответствует в данной интерпретации формуле $A(x)$. Тогда следует писать $|\tilde{A}(x)| = \text{И}$. Во-вторых, $\tilde{A}(x)$ можно понимать как значение соответствующего предиката $\tilde{A}$ в точке x. В этом случае можно писать просто $\tilde{A}(x) = \text{И}$.

рить об *оценке формулы* A (или множества формул Γ) в интерпретации $\mathfrak{M}$, как об отображении множества свободных переменных формулы A (формул из Γ) в поле интерпретации M

$$v_A : FVr(A) \to M \ (v_\Gamma : FVr(\Gamma) \to M).$$

Поэтому, если A – формула со свободными переменными x_1, ..., x_n, вместо обозначения $|\,A|_v^{\mathfrak{M}}$ при фиксированной интерпретации $\mathfrak{M}$ с оценкой v можно использовать обозначение $|\,A|_{a_1,\ldots,a_n}^{x_1,\ldots,x_n}$, где $a_i = v(x_i)$ для $i = 1, \ldots, n$. ○

Замечание 2. Пусть A – формула и $\sigma = \sigma(A)$, а $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – интерпретации с одинаковым носителем M, сигнатуры которых являются расширениями сигнатуры σ и в которых все символы из σ интерпретируются одинаково. Тогда, очевидно, для любой оценки v выполняется равенство $|\,A|_v^{\mathfrak{M}_1} = |\,A|_v^{\mathfrak{M}_2}$. Благодаря этому можно говорить об *интерпретации формулы* (или множества формул). ○

➤ **Замечание 3**. Пусть $A(x)$ – формула с одной свободной переменной x, $\mathfrak{M}$ – произвольная интерпретация. Прочтением формулы $A(x)$ служит предложение «x обладает свойством $\tilde{A}$». Естественно ожидать, что прочтением формулы $A(t)$ – результата подстановки в формулу A терма t вместо переменной x, служит предложение «$\tilde{t}$ обладает свойством $\tilde{A}$». Однако формулу $A(t)$ можно прочитать таким образом только при условии, что терм t A-x-допустим. В частности, если терм y допустим для подстановки в формулу A вместо x, то во всякой интерпретации формулы A предложения $\tilde{A}(x)$ и $\tilde{A}(y)$ определяют одно и то же свойство, а значит, один и тот же предикат. Совсем другая ситуация возникает, если терм y недопустим для подстановки в формулу A вместо x.

В качестве примера рассмотрим формулу $\exists y\ P(x, y)$ и интерпретацию $< \mathbf{N}, < >$. В этой интерпретации прочтением данной формулы служит предложение «существует число большее, чем x», которое принимает значение И при любом натуральном значении x. В результате подстановки в формулу $\exists y\ P(x, y)$ терма y вместо переменной x, получим формулу $\exists y\ P(y, y)$. Ее прочтением служит ложное высказывание «существует число, которое больше самого себя», а вовсе не предложение «существует число большее, чем y».

В качестве другого примера рассмотрим формулу $F \leftrightharpoons \exists y\, P(x, y)$ и интерпретацию $\langle \mathbf{N}, \tilde{P}, \tilde{f} \rangle$, где предикат $\tilde{P}$ задан предложением «$x = 2y$», функция $\tilde{f}$ задана так: для всякого натурального x $\tilde{f}(x) = x^2$. В этой интерпретации прочтением формулы F служит предложение $\tilde{F}(x)$: «существует число y такое, что $x = 2y$», которое принимает значение И тогда и только тогда, когда x четно (т. е. задает свойство «быть четным»). Если вместо переменной x подставить терм z, получим формулу $\exists y\, P(z, y)$, прочтением которой является предложение $\tilde{F}(z)$, задающее тот же предикат, что и $\tilde{F}(x)$. В результате подстановки в формулу $\exists y\, P(x, y)$ вместо x терма $f(x)$, также допустимого для подстановки, получим формулу $\exists y\, P(f(x), y)$, прочтением которой в нашей интерпретации служит предложение $\tilde{F}(x^2)$: «существует число y такое, что $x^2 = 2y$», истинное тогда и только тогда, когда x^2 четно. Это предложение тесно связано с тем же свойством «быть четным». Если же в формулу $\exists y\, P(x, y)$ вместо x подставить недопустимый для подстановки терм y, получим формулу $\exists y\, P(y, y)$. Ее прочтением служит вовсе не предложение $\tilde{F}(y)$: «y четно», а высказывание «существует (натуральное) число y такое, что $y = 2y$», смысл которого никак не связан со свойством «быть четным». ○

§3.4. Общезначимые и выполнимые формулы

Среди всех формул ЯЛП особый интерес представляют те формулы, которые принимают значение И всюду, независимо от выбора интерпретации и значений, придаваемых их свободным переменным.

Введем ряд важных понятий.

Пусть F – формула ЯЛП$_\sigma$, а $\mathfrak{M}$ – интерпретация сигнатуры σ.

Формулу F называют *выполнимой в интерпретации* $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ, если существует оценка v в $\mathfrak{M}$, при которой эта формула принимает значение И: $(\mathsf{E}v)\ (|F|^{\mathfrak{M}}_{v} = \text{И})$.

Формулу F называют ***выполнимой***, если она выполнима хотя бы в одной интерпретации ЯЛП$_\sigma$.

Формулу F будем называть *истинной в интерпретации* $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ (или кратко $\mathfrak{M}$-*истинной*) и писать $\models_{\mathfrak{M}} F$, если для любой оценки v в $\mathfrak{M}$ эта формула принимает значение И:

$$\models_{\mathfrak{M}} F \xleftrightarrow{def} (v)\ (\left| F \right|_{v}^{\mathfrak{M}} = \text{И}).$$

Формулу F будем называть *ложной в интерпретации* $\mathfrak{M}$, если для любой оценки v в $\mathfrak{M}$ эта формула принимает значение Л.

! Формулу F будем называть ***общезначимой*** (или *всюду истинной*) и писать $\models_{\text{ЛП}} F$, если она принимая значение И в любой интерпретации ЯЛП$_\sigma$ и при любой оценке в этой интерпретации:

$$\models_{\text{ЛП}} F \xleftrightarrow{def} (\mathfrak{M})(v)\ (\left| F \right|_{v}^{\mathfrak{M}} = \text{И}).$$

Иногда будем писать $\models F$, вместо $\models_{\text{ЛП}} F$, если это не приводит к недоразумению.

Формулу F называют *опровержимой в интерпретации* $\mathfrak{M}$, если при некоторой оценке v в $\mathfrak{M}$ она принимает значение Л.

Формулу F называют ***опровержимой***, если она опровержима хотя бы в одной интерпретации ЯЛП$_\sigma$.

П р и м е р ы.
1) $P(x) \supset \forall x\, P(x)$ – необщезначимая, но выполнимая формула;
2) $\forall x\, P(x) \supset P(x)$ – общезначимая формула;
3) $P(x) \supset \exists x\, P(x)$ – общезначимая формула;
4) $\exists x\, P(x) \supset P(x)$ – необщезначимая, но выполнимая формула;
5) $\forall x\, P(x, y) \supset P(f(y), y)$ – общезначимая формула;
6) $\exists x\, \forall y\, (Q(x)\ \&\ \neg Q(y))$ – невыполнимая формула.

Доказать, что приведенные формулы обладают указанными свойствами, не составляет большого труда. Читатель справится с этим самостоятельно. ❍

Замечание 1. Очевидно, формула A общезначима тогда и только тогда, когда она истинна во всех интерпретациях сигнатуры $\sigma = \sigma(A)$ с оценками в них формулы A (см. замечания 1 и 2 § 3.3). ❍

Очевидно, введенные понятия связаны друг с другом следующим образом:

1) формула A опровержима тогда и только тогда, когда A не является общезначимой;

2) формула A общезначима тогда и только тогда, когда формула $\neg A$ не является выполнимой;

3) формула A выполнима тогда и только тогда, когда формула $\neg A$ не является общезначимой;

4) формула A опровержима тогда и только тогда, когда формула $\neg A$ выполнима.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для любой формулы A:

1) формула A общезначима тогда и только тогда, когда общезначима формула $\forall x_i\ A$;

2) формула A выполнима тогда и только тогда, когда выполнима формула $\exists x_i\ A$;

3) формула A общезначима тогда и только тогда, когда общезначима формула A' — замыкание формулы A;

4) формула A со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$ выполнима тогда и только тогда, когда выполнима формула $\exists x_1 \ldots \exists x_n\ A$.

Доказательство этого утверждения является несложным упражнением.

Замечание 2. Очевидно, что всякая *замкнутая* формула F сигнатуры σ в каждой интерпретации $\mathfrak{M}_\sigma$ либо истинна, либо ложна. В то же время незамкнутая формула в одной и той же интерпретации может быть опровержимой, но выполнимой, другими словами, не являться ни истинной, ни ложной в этой интерпретации. Достаточно в качестве примера рассмотреть формулу $P(x)$. ❍

Общезначимые формулы играют в логике предикатов (ЛП) особую роль, как и тавтологии в логике высказываний (ЛВ). Любое предложение, форма которого соответствует некоторой общезначимой формуле, является истинным высказыванием или тождественно истинным предложением с переменными. Поэтому общезначимые формулы, как и тавтологии, называют *законами логики*.

В связи с этим важно уметь доказывать, что та или иная формула общезначима (или опровержима).

Рассмотрим несколько важных примеров.

Пример. Формула $\exists x\, \forall y\, P(x, y) \supset \forall y\, \exists x\, P(x, y)$ общезначима.

Докажем это. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \tilde{P} \rangle$ — произвольная интерпретация. Можно взять и произвольную оценку v, однако формула замкнута, поэтому оценка не важна. Обозначим данную формулу через F. Если посылка формулы F принимает значение Л, то вся импликация принимает значение И в силу ложности посылки. Рассмотрим менее тривиальный случай, когда посылка $\exists x\, \forall y\, P(x, y)$

данной формулы принимает значение И. В этом случае имеется такой элемент из M, который находится в отношении $\tilde{P}$ с каждым элементом M. Пусть a – такой элемент из M, что для каждого y из M $\tilde{P}(a, y) =$ И. Тогда и заключение $\forall y\ \exists x\ P(x, y)$ формулы F также принимает значение И. Действительно, для произвольного y из M в качестве x можно взять элемент a, поскольку $\tilde{P}(a, y) =$ И. Таким образом, доказано, что данная замкнутая формула истинна в произвольной интерпретации. Следовательно, она общезначима. ❍

П р и м е р. Формула $\forall y\ \exists x\ P(x, y) \supset \exists x\ \forall y\ P(x, y)$ не является общезначимой. Действительно, рассмотрим интерпретацию $< \mathbf{N}, > >$. В этой интерпретации посылке данной формулы соответствует истинное высказывание «для каждого натурального числа существует большее натуральное число», а заключению – ложное высказывание «существует натуральное число, которое больше всякого натурального числа». Таким образом, в этой интерпретации вся импликация принимает значение Л. Следовательно, данная формула не является общезначимой. Однако эта формула выполнима. Действительно, например, в интерпретации $< \mathbf{N}, \leqslant >$ истинны как посылка, так и заключение данной формулы, а значит, истинна и сама формула. ❍

П р и м е р. Рассмотрим формулу $\exists x\ (P(x) \supset \forall y\ P(y))$. Обозначим ее через F. Эта замкнутая формула имеет весьма забавные интерпретации. Например, в качестве поля M можно взять множество всех людей, в качестве $\tilde{P}$ – свойство «быть пьяницей»[1]. Тогда формуле F соответствует высказывание «существует такой человек, что если он пьет, то пьют все». На первый взгляд может показаться, что такого человека не существует, а значит, это высказывание ложно. Однако на самом деле, это высказывание истинно. Более того, рассматриваемая формула истинна в любой интерпретации. Докажем это. Пусть $\mathfrak{M} = < M, \tilde{P} >$ – произвольная интерпретация. Можно взять и произвольную оценку $\boldsymbol{v}$, однако формула F замкнута, поэтому оценка неважна. Докажем разбором случаев, что высказывание $\tilde{F}$ истинно. Для этого достаточно в каждом слу-

[1] Эта забавная интерпретация была предложена в замечательной книге Р. Смаллиана с парадоксальным названием «Как же называется эта книга?» (М.: Мир, 1981), а сама формула названа «принципом пьяницы».

чае указать такой элемент a из M, что высказывание $\tilde{P}(a) \supset (y)\, \tilde{P}(y)$ истинно.

а) Допустим, что $\tilde{P}(x) \equiv$ И. Тогда в качестве искомого x можно взять любой элемент M. Действительно, пусть a — какой-нибудь элемент M. Высказывание $\tilde{P}(a) \supset (y)\, \tilde{P}(y)$ истинно, поскольку истинна как его посылка, так и заключение. Таким образом, высказывание $\tilde{F}$ истинно.

б) Допустим, что $\tilde{P}(x) \not\equiv$ И. Пусть b — такой элемент из M, что $\tilde{P}(b)$ = Л. Тогда в качестве искомого x можно взять элемент b. Действительно, высказывание $\tilde{P}(b) \supset (y)\, \tilde{P}(y)$ истинно, поскольку его посылка ложна. Таким образом, и в этом случае высказывание $\tilde{F}$ истинно.

Итак, разбором случаев мы доказали, что высказывание $\tilde{F}$ истинно в произвольной интерпретации. Следовательно, формула F общезначима. ❍

УПРАЖНЕНИЕ

Докажите, что:

1) если формула $A \supset B$ общезначима, то формула $\forall x\, A \supset \forall x\, B$ также общезначима;

2) если формула $A \supset B$ общезначима, то формула $\exists x\, A \supset \exists x\, B$ также общезначима.

Предикатная подстановка в пропозициональную формулу

➤ Пусть F — произвольная формула ЯЛВ (пропозициональная формула). Если вместо входящих в нее пропозициональных переменных подставить какие-либо формулы ЯЛП$_\sigma$ (при условии, что все вхождения одной и той же пропозициональной переменной заменяются вхождениями одной и той же предикатной формулы), то получится формула ЯЛП$_\sigma$, которую будем называть *предикатной подстановкой* в формулу F (или *предикатным примером* формулы F).

Пример. Формула $\forall x\, P(x) \supset \forall y\, P(y)$ является предикатной подстановкой в формулу $p \supset q$. Формула $\exists x\, P(x, y) \vee \neg\exists x\, P(x, y)$ является предикатной подстановкой, например, в формулу $p \vee \neg p$. ❍

Уточним понятие предикатной подстановки в формулу ЯЛВ.

Пусть F − формула ЯЛВ, $\omega = (p_1, \ldots, p_n)$ − ее допустимый список[1] и $A_1, \ldots, A_n$ − набор формул ЯЛП$_\sigma$. Если вместо каждой переменной p_i в формулу F подставить соответствующую предикатную формулу A_i, то получим предикатную формулу, которую будем обозначать через $(F)^{p_1,\ldots,p_n}_{A_1,\ldots,A_n}$, и результат такой подстановки определим индукцией по построению формулы ЯЛВ.

Определение *результата подстановки в пропозициональную формулу F вместо пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_n$ предикатных формул $A_1, \ldots, A_n$*:

1. Для всякой пропозициональной переменной p_i ($i = 1, \ldots, n$)

$$(p_i)^{p_1,\ldots,p_n}_{A_1,\ldots,A_n} = A_i.$$

2. Каковы бы ни были формулы ЯЛВ A и B, если $(A)^{p_1,\ldots,p_n}_{A_1,\ldots,A_n}$ и $(B)^{p_1,\ldots,p_n}_{A_1,\ldots,A_n}$ определены, то $(A \oplus B)^{p_1,\ldots,p_n}_{A_1,\ldots,A_n} = (A)^{p_1,\ldots,p_n}_{A_1,\ldots,A_n} \oplus (B)^{p_1,\ldots,p_n}_{A_1,\ldots,A_n}$, где $\oplus$ − любая из связок &, $\vee$, $\supset$; $(\neg A)^{p_1,\ldots,p_n}_{A_1,\ldots,A_n} = \neg\left((A)^{p_1,\ldots,p_n}_{A_1,\ldots,A_n}\right)$.

Результат подстановки в формулу F вместо пропозициональных переменных $p_1, \ldots, p_n$ предикатных формул $A_1, \ldots, A_n$ можно также обозначать через $S^{p_1,\ldots,p_n}_{A_1,\ldots,A_n}(F)$.

Формулу $(F)^{p_1,\ldots,p_n}_{A_1,\ldots,A_n}$ − результат подстановки в пропозициональную формулу F вместо переменных $p_1, \ldots, p_n$ предикатных формул $A_1, \ldots, A_n$, будем также называть просто ***предикатной подстановкой** в пропозициональную формулу F* (или *предикатным примером* формулы F).

Располагая этим индуктивным определением, легко доказать, что всякая предикатная подстановка в формулу ЯЛВ (пропозициональную формулу) является формулой ЯЛП (предикатной формулой).

Заметим, что результат подстановки $(F)^{p_1,\ldots,p_n}_{A_1,\ldots,A_n}$ зависит лишь от того, какие предикатные формулы подставляются вместо перемен-

---

[1] В действительности произвольный допустимый список для формулы имеет вид $\omega = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$, однако для простоты обозначений без потери общности можно считать, что этот список имеет вид $p_1, \ldots, p_n$.

ных из *собственного* списка формулы F, что легко доказать, используя данное определение.

Особый интерес представляют предикатные подстановки в тавтологии, поскольку они всегда являются общезначимыми формулами.

! **ТЕОРЕМА**. Всякая предикатная подстановка в тавтологию является общезначимой формулой ЯЛП.

Доказательство. Прежде всего отметим, что, для того чтобы вычислить значение предикатной подстановки в интерпретации с оценкой $|(F)^{p_1,\dots,p_n}_{A_1,\dots,A_n}|^{\mathfrak{M}}_{v}$, достаточно найти значения подставляемых формул $|A_1|^{\mathfrak{M}}_{v}, \dots, |A_n|^{\mathfrak{M}}_{v}$, а затем вычислить значение F на полученном истинностном наборе.

Точнее, справедливо следующее утверждение.

Каковы бы ни были пропозициональная формула F, ее допустимый список $\omega = (p_1, \dots, p_n)$ и набор $A_1, \dots, A_n$ формул ЯЛП$_\sigma$, а также интерпретация $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ с оценкой v, значение формулы $(F)^{p_1,\dots,p_n}_{A_1,\dots,A_n}$ в $\mathfrak{M}$ при оценке v совпадает со значением формулы F на истинностном наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i = |A_i|^{\mathfrak{M}}_{v}$ для каждого i ($i = 1, \dots, n$), т. е.

$$|(F)^{p_1,\dots,p_n}_{A_1,\dots,A_n}|^{\mathfrak{M}}_{v} = |F|^{\omega}_{\alpha}$$

или

$$|(F)^{p_1,\dots,p_n}_{A_1,\dots,A_n}|^{\mathfrak{M}}_{v} = |F|^{p_1,\ \dots,\ p_n}_{|A_1|^{\mathfrak{M}}_{v},\dots,|A_n|^{\mathfrak{M}}_{v}}\ .$$

Заметим, что, возможно, кто-то посчитает более наглядной запись, использующую другие обозначения:

$$|F(A_1, \dots, A_n)|^{\mathfrak{M}}_{v} = F(|A_1|^{\mathfrak{M}}_{v}, \dots, |A_n|^{\mathfrak{M}}_{v})\ .$$

Доказательство этого вспомогательного утверждения с помощью принципа индукции для формул ЯЛВ оставляем читателю в качестве упражнения.

Завершение доказательства самой теоремы теперь не составляет труда. Действительно, пусть F — тавтология, $\omega = (p_1, \dots, p_n)$ — ее допустимый список, $A_1, \dots, A_n$ — набор формул ЯЛП$_\sigma$, $\mathfrak{M}$ — интерпретация сигнатуры σ, а v — оценка в $\mathfrak{M}$. Поскольку F — тавтология, то она принимает значение И на всяком истинностном наборе для ее допустимого списка. В частности, $|F|_{\alpha}^{\omega}$ = И при $\alpha = (|A_1|_{\upsilon}^{\mathfrak{M}}, \ldots, |A_n|_{\upsilon}^{\mathfrak{M}})$, а значит, и $|(F)_{A_1,\ldots,A_n}^{p_1,\ldots,p_n}|_{\upsilon}^{\mathfrak{M}} = |F|_{\alpha}^{\omega}$ = И. Итак, формула $(F)_{A_1,\ldots,A_n}^{p_1,\ldots,p_n}$ принимает значение И в произвольной интерпретации с оценкой. Таким образом, доказано, что формула $(F)_{A_1,\ldots,A_n}^{p_1,\ldots,p_n}$ общезначима. ❐

Замечание 3. Разумеется, не всякая общезначимая формула ЯЛП является подстановкой в тавтологию. Например, формулы ЯЛП $\forall x\ P(x) \supset P(x)$ и $\forall x\ P(x) \supset \exists x\ P(x)$ общезначимы, но не являются предикатными подстановками в тавтологии. Однако можно доказать, что бескванторная формула ЯЛП общезначима тогда и только тогда, когда она является некоторым предикатным примером тавтологии. ❍

Приведем еще ряд важных примеров общезначимых и необщезначимых формул. Одни из них связаны с перестановкой кванторов, другие – с пронесением отрицания через квантор, третьи – с пронесением квантора через связку. Доказательство того, что перечисленные формулы являются (или не являются) общезначимыми – полезное упражнение для читателя. Не менее полезен неформальный анализ того, почему формулы из первого списка общезначимы, а из второго – нет.

➤ I. Следующие формулы общезначимы для любых формул A, B, C; переменная x не входит свободно в C:

1) $\neg\forall x\ A(x) \sim \exists x\ \neg A(x)$;
2) $\neg\exists x\ A(x) \sim \forall x\ \neg A(x)$;
3) $\forall x\ (A(x)\ \&\ B(x)) \sim \forall x\ A(x)\ \&\ \forall x\ B(x)$;
4) $\forall x\ A(x) \vee \forall x\ B(x) \supset \forall\ x(A(x) \vee B(x))$;
5) $\forall x\ (A(x) \supset B(x)) \supset (\forall x\ A(x) \supset \forall x\ B(x))$;
6) $\exists x\ (A(x)\ \&\ B(x)) \supset \exists x\ A(x)\ \&\ \exists x\ B(x)$;
7) $\exists x\ (A(x) \vee B(x)) \sim \exists x\ A(x) \vee \exists x\ B(x)$;
8) $\exists x\ (A(x) \supset B(x)) \sim (\forall x\ A(x) \supset \exists x\ B(x))$;
9) $\neg\forall x\ (A(x) \supset B(x)) \sim \exists x\ (A(x)\ \&\ \neg B(x))$;
10) $\exists x\ (C \supset A(x)) \sim (C \supset \exists x\ A(x))$;
11) $\forall x\ (C \supset A(x)) \sim (C \supset \forall x\ A(x))$;
12) $\forall x\ (A(x) \supset C) \sim (\exists x\ A(x) \supset C)$;
13) $\exists x\ (A(x) \supset C) \sim (\forall x\ A(x) \supset C)$;
14) $\exists x\ (C\ \&\ A(x)) \sim (C\ \&\ \exists x\ A(x))$;
15) $\forall x\ (C \vee A(x)) \sim (C \vee \forall x\ A(x))$.

II. Следующие формулы необщезначимы, но выполнимы (P, Q — предикатные символы; C — формула, не содержащая x свободно):

1) $\neg\forall x\ P(x) \supset \forall x\ \neg P(x)$;
2) $\neg\exists x\ P(x) \sim \exists x\ \neg P(x)$;
3) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \supset \forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$;
4) $(\forall x\ P(x) \supset \forall x\ Q(x)) \supset \forall x\ (P(x) \supset Q(x))$;
5) $\exists x\ P(x)\ \&\ \exists x\ Q(x) \supset \exists x\ (P(x)\ \&\ Q(x))$;
6) $\exists x\ (P(x) \supset Q(x)) \supset (\exists x\ P(x) \supset \exists x\ Q(x))$;
7) $(\exists x\ P(x) \supset \exists x\ Q(x)) \supset \forall x\ (P(x) \supset Q(x))$;
8) $\exists x\ (P(x) \supset C) \sim (\exists x\ P(x) \supset C)$;
9) $\forall x\ (P(x) \supset C) \sim (\forall x\ P(x) \supset C)$;
10) $\exists x\ (P(x) \supset Q(x)) \sim (\forall x\ P(x) \supset Q(x))$.

УПРАЖНЕНИЕ

Исследуйте формулы на общезначимость и выполнимость (P — предикатный символ; f, g — функциональные символы; x, y — предметные переменные):

1) $\forall x\ P(x) \supset \exists x\ P(g(x, x))$;
2) $P(f(y)) \supset \exists x\ P(f(x))$;
3) $\exists x\ P(x) \supset P(g(y))$;
4) $P(y) \supset \exists x\ P(f(x))$;
5) $P(f(x)) \supset \forall x\ P(f(x))$;
6) $\exists x\ P(f(x)) \supset P(f(x))$;
7) $\forall x\ P(f(x)) \supset P(f(y))$.

Истинность формул на множествах различной мощности

★ Пусть A — формула ЯЛП$_\sigma$. Формулу A называют *истинной* (*общезначимой*) *на множестве M*, если в любой интерпретации $\mathfrak{M}_\sigma$ с полем M и при любой оценке в $\mathfrak{M}_\sigma$ формула A принимает значение *истина*.

Формулу A называют *выполнимой на множестве M*, если существует интерпретация $\mathfrak{M}_\sigma$ с полем M такая, что при некоторой оценке в $\mathfrak{M}_\sigma$ формула A принимает значение *истина*.

Очевидно, что формула A общезначима на множестве M тогда и только тогда, когда формула $\neg A$ не является выполнимой на M.

ТЕОРЕМА (*Лёвенгейм*)[1]. Если формула A выполнима, то она выполнима на счетном множестве.

Сформулируем ряд утверждений, относящихся к введенным понятиям. Читатель при желании может доказать эти утверждения самостоятельно.

[1] Доказательство этой теоремы выходит за рамки курса. При желании его можно найти в [10].

1. а) Если формула A выполнима на множестве M, то A выполнима на любом равномощном ему множестве.

б) Если формула A общезначима на множестве M, то A общезначима на любом равномощном ему множестве.

2. а) Если формула A выполнима на некотором подмножестве множества M, то A выполнима на M.

б) Если формула A общезначима на некотором множестве M, то A общезначима на любом его подмножестве.

3. а) Если формула A выполнима на множестве M, то A выполнима на всяком множестве, мощность которого не меньше, чем мощность M.

б) Если формула A общезначима на множестве M, то A общезначима на любом множестве, мощность которого не превосходит мощности множества M.

4. Если формула A выполнима на некотором бесконечном множестве, то A выполнима на любом бесконечном множестве.

5. Следующие формулы выполнимы на бесконечном множестве и невыполнимы ни на одном конечном множестве:

а) $\forall x\ \exists y\ R(x, y)\ \&\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (R(x, y)\ \&\ R(y, z) \supset R(x, z))\ \&$ $\&\ \forall x\ \neg R(x, x)$;

б) $\forall x\ \exists y\ R(x, y)\ \&\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (R(x, y)\ \&\ R(y, z) \supset R(x, z))\ \&$ $\&\ \forall x\ \forall y\ (R(x, y) \supset \neg R(y, x))$.

6. Существуют формулы, общезначимые на любом конечном множестве (конечно-общезначимые), но необщезначимые на любом бесконечном множестве. ✩

§3.5. Сравнение формул по силе. Равносильные формулы

Будем говорить, что формула A *сильнее* формулы B, если формула $A \supset B$ общезначима, а формула $B \supset A$ необщезначима.

Будем говорить, что формула A *равна по силе* формуле B, если обе формулы $A \supset B$ и $B \supset A$ общезначимы.

Будем говорить, что формула A *несравнима по силе* с формулой B, если обе формулы $A \supset B$ и $B \supset A$ необщезначимы.

Замечание 1. Понятие «формула A сильнее формулы B» является математическим уточнением (математической моделью) неформального интуитивного понятия «утверждение A сильнее, чем утверждение B», которое означает, что предложение B является *логи-*

ческим следствием предложения A, а предложение A не является *логическим следствием* предложения B. Поэтому задачи на *сравнение формул по силе* служат математическими моделями содержательных задач, которые возникают при изучении математики: выяснить, какое из двух неформальных предложений сильнее (за счет логической структуры предложений). ❍

➤ **Пример.** Сравним по силе следующие формулы:

$$\exists x\, \forall y\, P(x, y) \text{ и } \forall y\, \exists x\, P(x, y).$$

В § 3.4 было доказано, что:
формула $\exists x\, \forall y\, P(x, y) \supset \forall y\, \exists x\, P(x, y)$ является общезначимой;
формула $\forall y\, \exists x\, P(x, y) \supset \exists x\, \forall y\, P(x, y)$ не является общезначимой.

Таким образом, формула $\exists x\, \forall y\, P(x, y)$ сильнее формулы $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$. ❍

Полезным на практике является следующее утверждение.
Каковы бы ни были формулы A, B, C:
1) если A сильнее B, то $C \supset A$ сильнее $C \supset B$;
2) если A сильнее B, то $B \supset C$ сильнее $A \supset C$;
3) если A сильнее B, то $C \,\&\, A$ сильнее $C \,\&\, B$;
4) если A сильнее B, то $C \vee A$ сильнее $C \vee B$;
5) если A сильнее B, то $\neg B$ сильнее $\neg A$.

Замечание 2. Легко доказать, что каковы бы ни были формулы A и B:

1) если $\models_{\text{ЛП}} A$ и $\models_{\text{ЛП}} B$, то A и B равны по силе;

2) если $\models_{\text{ЛП}} A$ и $\not\models_{\text{ЛП}} B$, то B сильнее A;

3) если $\models_{\text{ЛП}} \neg A$ и $\not\models_{\text{ЛП}} \neg B$, то A сильнее B. ❍

УПРАЖНЕНИЕ

Сравните по силе следующие формулы:
1) $\neg\forall x\, P(x)$ и $\forall x\, \neg P(x)$;
2) $\neg\exists x\, P(x)$ и $\exists x\, \neg P(x)$;
3) $\forall x\, (P(x) \,\&\, Q(x))$ и $\forall x\, P(x) \,\&\, \forall x\, Q(x)$;
4) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$ и $\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$;
5) $\forall x\, (P(x) \supset Q(x))$ и $\forall x\, P(x) \supset \forall x\, Q(x)$;
6) $\exists x\, (P(x) \,\&\, Q(x))$ и $\exists x\, P(x) \,\&\, \exists x\, Q(x)$;
7) $\exists x\, (P(x) \vee Q(x))$ и $\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$;
8) $\exists x\, (P(x) \supset Q(x))$ и $\exists x\, P(x) \supset \exists x\, Q(x)$;
9) $\neg\forall x\, (P(x) \supset Q(x))$ и $\exists x\, (P(x) \supset \neg Q(x))$;
10) $\neg\forall x\, (P(x) \supset Q(x))$ и $\exists x\, (P(x) \,\&\, \neg Q(x))$.

Комментарий. Все подобранные примеры очень полезны. Большинство из них связано с пронесением квантора через связки. На первый взгляд может показаться, что здесь приведены только пары равных по силе формул. Оказывается, что это не так.

При сравнении формул по силе особенно важным является случай, когда формулы равны по силе.

Равносильные формулы ЯЛП

Пусть A и B — формулы ЯЛП$_\sigma$.

Формулы A и B называют ***равносильными формулами*** ($A \equiv B$), если в любой интерпретации $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ и при любой оценке v в $\mathfrak{M}$ эти формулы принимают одинаковые значения:

$$A \equiv B \xleftrightarrow{def} (\mathfrak{M})\ (v)\ (\left| A \right|_v^{\mathfrak{M}} = \left| B \right|_v^{\mathfrak{M}}).$$

Очевидно, что понятие равносильности следующим образом связано с понятием общезначимости:

➤ $A \equiv B$ тогда и только тогда, когда формулы $A \supset B$ и $B \supset A$ общезначимы (т. е. формулы A и B равны по силе).

Легко доказать, что отношение равносильности $\equiv$ на множестве всех формул ЯЛП$_\sigma$ является отношением эквивалентности, т. е. рефлексивно, симметрично и транзитивно:
для любых формул A, B, C
$A \equiv A$;
если $A \equiv B$, то $B \equiv A$;
если $A \equiv B$ и $B \equiv C$, то $A \equiv C$.

Основные равносильности логики предикатов

Среди утверждений о равносильности формул ЯЛП выделяют наиболее важные, называемые *основными равносильностями логики предикатов.* Их можно разделить на две группы.

К *первой группе* отнесем все основные равносильности логики высказываний (см. § 1.5), в которых A, B, C теперь рассматриваются как произвольные формулы ЯЛП. Доказать справедливость этих равносильностей для логики предикатов не представляет труда.

Ко *второй группе* отнесем специфические для логики предикатов равносильности, в которых фигурируют кванторы.

! **УТВЕРЖДЕНИЕ**. Пусть A, B, C — произвольные формулы ЯЛП, а переменная x не входит свободно в C[1]. Тогда:

[1] В утверждениях п. 3—6 пишем не A, а $A(x)$, чтобы подчеркнуть различие между формулами A и C: в формулу A переменная x может входить свободно, а в формулу C — нет.

1) $\forall x\, \forall y\, A \equiv \forall y\, \forall x\, A$;
2) $\exists x\, \exists y\, A \equiv \exists y\, \exists x\, A$;
3) $\forall x\, (C \vee A(x)) \equiv C \vee \forall x\, A(x)$;
4) $\forall x\, (C \,\&\, A(x)) \equiv C \,\&\, \forall x\, A(x)$;
5) $\exists x\, (C \vee A(x)) \equiv C \vee \exists x\, A(x)$;
6) $\exists x\, (C \,\&\, A(x)) \equiv C \,\&\, \exists x\, A(x)$;
7) $\forall x\, A \,\&\, \forall x\, B \equiv \forall x\, (A \,\&\, B)$;
8) $\exists x\, A \vee \exists x\, B \equiv \exists x\, (A \vee B)$;
9) $\forall x\, C \equiv C$;
10) $\exists x\, C \equiv C$;
11) $\neg\forall x\, A \equiv \exists x\, \neg A$;
12) $\neg\exists x\, A \equiv \forall x\, \neg A$;

$$\left.\begin{array}{l} 13)\ \forall x\, A(x) \equiv \forall y\, A(y); \\ 14)\ \exists x\, A(x) \equiv \exists y\, A(y), \end{array}\right\}$$ где y не входит в формулу $A(x)$; $A(y)$ – результат замены в $A(x)$ всех свободных вхождений x на вхождения y.

Доказательство. Докажем только утверждение п. 8. Остальные утверждения доказываются аналогично. Пусть A и B – произвольные формулы ЯЛП$_\sigma$, $\mathfrak{M}$ – произвольная интерпретация сигнатуры σ с оценкой v. Пусть $|\exists x\, A \vee \exists x\, B|_v^{\mathfrak{M}} =$ И. Тогда $|\exists x\, A|_v^{\mathfrak{M}} =$ И или $|\exists x\, B|_v^{\mathfrak{M}} =$ И. Если $|\exists x\, A|_v^{\mathfrak{M}} =$ И, то для некоторого a из M высказывание $\tilde{A}(a)$ истинно ($|\tilde{A}(a)| =$ И), а значит, истинно и высказывание $\tilde{A}(a) \vee \tilde{B}(a)$: $|\tilde{A}(a) \vee \tilde{B}(a)| =$ И. Отсюда $|\exists x\, (A \vee B)|_v^{\mathfrak{M}} =$ И. Аналогично доказывается, что если $|\exists x\, B|_v^{\mathfrak{M}} =$ И, то $|\exists x\, (A \vee B)|_v^{\mathfrak{M}} =$ И. Таким образом, доказано, что если $|\exists x\, A \vee \exists x\, B|_v^{\mathfrak{M}} =$ И, то и $|\exists x\, (A \vee B)|_v^{\mathfrak{M}} =$ И. Докажем обратное. Допустим, что $|\exists x\, (A \vee B)|_v^{\mathfrak{M}} =$ И. Тогда для некоторого b из M $|\tilde{A}(b) \vee \tilde{B}(b)| =$ И. Если $|\tilde{A}(b)| =$ И, то $|\exists x\, A|_v^{\mathfrak{M}} =$ И, а значит, и $|\exists x\, A \vee \exists x\, B|_v^{\mathfrak{M}} =$ И. Если $|\tilde{B}(b)| =$ И, то $|\exists x\, B|_v^{\mathfrak{M}} =$ И, а значит, и в этом случае $|\exists x\, A \vee \exists x\, B|_v^{\mathfrak{M}} =$ И. Таким образом, если $|\exists x\, (A \vee B)|_v^{\mathfrak{M}} =$ И, то $|\exists x\, A \vee \exists x\, B|_v^{\mathfrak{M}} =$ И. Итак, $|\exists x\, A \vee \exists x\, B|_v^{\mathfrak{M}} =$ И тогда и только тогда, когда $|\exists x\, (A \vee B)|_v^{\mathfrak{M}} =$ И. Поскольку $\mathfrak{M}$ и v – произвольные, то доказано, что $\exists x\, A \vee \exists x\, B \equiv \exists x\, (A \vee B)$. ❐

➤➤ **Замечание 3**. Если в утверждении п. 7 заменить знак & на знак $\vee$, а в утверждении п. 8 — знак $\vee$ на &, то равносильность не сохранится (не будет верной для любых A и B). Таким образом, квантор $\forall$ можно проносить только через &, а квантор $\exists$ — только через $\vee$. Это является проявлением некоего родства между квантором $\forall$ и &, а также между квантором $\exists$ и $\vee$. Сущность этого родства выражена в замечании в конце § 3.1. ○

Замечание 4. Утверждения п. 3—6 выражают тот факт, что если один из членов конъюнкции или дизъюнкции не содержит свободных вхождений переменной x, то любой из кванторов можно пронести через любую из этих связок. ○

Замечание 5. Утверждения п. 11 и 12 являются обобщением законов де Моргана для пропозиционального случая (см. замечание § 3.1). ○

Замечание 6. Ограничения в утверждениях п. 13 и 14 гарантируют, что при переименовании переменных не меняется смысл формулы (как говорят, не возникает *коллизии переменных*). ○

На практике является полезной следующая теорема.

! **ТЕОРЕМА** (*о равносильной замене*). Пусть F, A, A_1 — формулы ЯЛП, причем формулы A и A_1 равносильны, а формула A является подформулой F. Если в формуле F какое-либо вхождение в нее подформулы A заменить на вхождение формулы A_1, то получим формулу, равносильную исходной формуле F.

Доказательство. Наметим лишь этапы доказательства. Сначала сформулируем доказываемое утверждение более точно:

если F, A, A_1 — формулы ЯЛП, причем для некоторых слов X и Y в алфавите ЯЛП $F \rightleftharpoons XAY$ (т. е. A — подформула формулы F), то

1) слово XA_1Y также является формулой ЯЛП;

2) если $A \equiv A_1$, то $XAY \equiv XA_1Y$.

Доказать это утверждение несложно с помощью принципа индукции для формул ЯЛП и следующей леммы.

ЛЕММА. Если $A \equiv A_1$, а B — произвольная формула ЯЛП, то:

1) $A \mathbin{\&} B \equiv A_1 \mathbin{\&} B$;

2) $A \vee B \equiv A_1 \vee B$;

3) $A \supset B \equiv A_1 \supset B$;

4) $B \supset A \equiv B \supset A_1$;

5) $\neg A \equiv \neg A_1$;

6) $\forall x\, A \equiv \forall x\, A_1$;

7) $\exists x\, A \equiv \exists x\, A_1$.

Доказательство леммы и завершение доказательства самой теоремы является хотя и трудоемкой, но несложной задачей, которую предлагаем читателю решить самостоятельно[1]. ❐

Замечание 7. Если формулы A и B равносильны, то равносильны их замыкания. Обратное неверно. ○

Формулу вида $Q_1 x_{i_1} \dots Q_n x_{i_n} A$, где A – бескванторная формула, $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ – различные предметные переменные, а Q_i ($i = 1, \dots, n$) – квантор $\forall$ или $\exists$, называют формулой в *предваренной нормальной форме* (ПНФ). Всякую бескванторную формулу также называют формулой в ПНФ.

! **ТЕОРЕМА.** Для любой формулы ЯЛП существует равносильная ей формула в ПНФ.

Доказательство этой теоремы с помощью принципа индукции для формул ЯЛП и основных равносильностей при желании можно провести самостоятельно или найти в традиционных учебниках по математической логике (см., например, [3], [18]).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что следующие формулы равносильны ($A(x)$, $B(x)$, C – произвольные формулы; x не входит свободно в C):

а) $\neg\forall x\,(A(x) \supset B(x))$ и $\exists x\,(A(x)\ \&\ \neg B(x))$;
б) $\exists x\,(C \supset A(x))$ и $C \supset \exists x\,A(x)$;
в) $\forall x\,(C \supset A(x))$ и $C \supset \forall x\,A(x)$;
г) $\exists x\,(A(x) \supset C)$ и $\forall x\,A(x) \supset C$;
д) $\forall x\,(A(x) \supset C)$ и $\exists x\,A(x) \supset C$.

2. Докажите, что следующие формулы неравносильны (P, Q, R – предикатные символы):

а) $\exists x\,\forall y\,R(x, y)$ и $\forall y\,\exists x\,R(x, y)$;
б) $\neg\forall x\,P(x)$ и $\forall x\,\neg P(x)$;
в) $\neg\exists x\,P(x)$ и $\exists x\,\neg P(x)$;
г) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x))$ и $\forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x)$;
д) $\exists x\,(P(x)\ \&\ Q(x))$ и $\exists x\,P(x)\ \&\ \exists x\,Q(x)$;
е) $\exists x\,(P(x) \supset Q(x))$ и $\exists x\,P(x) \supset \exists x\,Q(x)$;
ж) $\forall x\,(P(x) \supset Q(x))$ и $\forall x\,P(x) \supset \forall x\,Q(x)$.

---

[1] Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [3], [18].

§3.6. Семантическое следование в логике предикатов

Введем понятие семантического следования в логике предикатов аналогично тому, как это было сделано в логике высказываний.

Пусть Γ − множество формул ЯЛП$_\sigma$, B − формула ЯЛП$_\sigma$. Будем говорить, что *формула B* ***семантически следует*** *из множества формул* Γ, и писать $\Gamma \vDash_{ЛП} B$ (или просто $\Gamma \vDash B$), если для любой интерпретации $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ и любой оценки v в $\mathfrak{M}$, при которой все формулы из Γ принимают значение И, формула B также принимает значение И.

Если $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$, то вместо $\{A_1, ..., A_n\} \vDash B$ будем писать $A_1, ..., A_n \vDash B$.

Пусть $\mathfrak{M}$ − фиксированная интерпретация сигнатуры σ. Будем говорить, что формула B *$\mathfrak{M}$-следует* из множества формул Γ, и писать $\Gamma \vDash_{\mathfrak{M}} B$, если для любой оценки v в интерпретации $\mathfrak{M}$, при которой все формулы из Γ принимают значение И, формула B также принимает значение И.

➤ Легко доказать следующие *свойства* семантического следования в ЛП:

1) $B \vDash B$ (рефлексивность);

2) если $\Gamma \vDash B$ и $\Gamma \subseteq \Gamma_1$, то $\Gamma_1 \vDash B$ (монотонность);

3) если $\Gamma \vDash A_i$ (для $i = 1, ..., n$) и $A_1, ..., A_n \vDash B$, то $\Gamma \vDash B$ (транзитивность).

Замечание 1. Если в свойствах 1−3 заменить $\vDash$ на $\vDash_{\mathfrak{M}}$, утверждения останутся справедливыми. ❍

Связь между понятиями *общезначимой формулы*, *равносильности формул* и *семантического следования* отражена в следующих утверждениях (доказательство которых, опирающееся лишь на определения рассматриваемых понятий, оставляется читателю).

➤ Каковы бы ни были формулы A и B и множество формул Γ ЯЛП$_\sigma$:

1) $A \vDash_{ЛП} B$ тогда и только тогда, когда формула $A \supset B$ общезначима;

2) $A \equiv B$ тогда и только тогда, когда $A \vDash_{ЛП} B$ и $B \vDash_{ЛП} A$;

3) $\varnothing \vDash_{ЛП} B$ тогда и только тогда, когда формула B общезначима;

4) если $\Gamma \vDash_{ЛП} B$ и все формулы из Γ общезначимы, то и формула B общезначима.

Замечание 2. Легко показать, что если A — *замкнутая* формула, то из A семантически следует B тогда и только тогда, когда во всякой интерпретации $\mathfrak{M}$, в которой истинна формула A, формула B также истинна: если A — замкнутая формула, то

$$A \vDash_{ЛП} B \leftrightarrow (\mathfrak{M})\ (\vDash_{\mathfrak{M}} A \to \vDash_{\mathfrak{M}} B).$$

Здесь условие замкнутости формулы A является существенным для той части утверждения, которая соответствует обратной стрелке $\leftarrow$. Действительно, достаточно рассмотреть, например, формулы $A \rightleftharpoons P(x)$ и $B \rightleftharpoons \forall x\ P(x)$. Очевидно, во всякой интерпретации, в которой истинна формула $P(x)$, формула $\forall x\ P(x)$ также истинна, однако $P(x) \nvDash_{ЛП} \forall x\ P(x)$. ○

Семантическое следование в логике предикатов обладает свойствами, аналогичными свойствам семантического следования в логике высказываний, которые впоследствии характеризовались как сохранение N-правилами отношения семантического следования (см. § 1.6). Доказываются эти свойства аналогично тому, как доказывались соответствующие свойства в логике высказываний.

ТЕОРЕМА 1 (*свойства семантического следования* в ЛП, связанные с введением и удалением пропозициональных связок). Каковы бы ни были формулы A, B, C и множество формул Γ языка логики предикатов, справедливы следующие утверждения:

1) $\dfrac{\Gamma \vDash A \text{ и } \Gamma \vDash B}{\Gamma \vDash A \,\&\, B}$; 2) $\dfrac{\Gamma \vDash A \,\&\, B}{\Gamma \vDash A \text{ и } \Gamma \vDash B}$;

3) $\dfrac{\Gamma \vDash A \text{ или } \Gamma \vDash B}{\Gamma \vDash A \vee B}$; 4) $\dfrac{\Gamma, A \vDash C \text{ и } \Gamma, B \vDash C}{\Gamma, A \vee B \vDash C}$;

5) $\dfrac{\Gamma, A \vDash B}{\Gamma \vDash A \supset B}$; 6) $\dfrac{\Gamma \vDash A \text{ и } \Gamma \vDash A \supset B}{\Gamma \vDash B}$;

7) $\dfrac{\Gamma, A \vDash B \text{ и } \Gamma, A \vDash \neg B}{\Gamma \vDash \neg A}$; 8) $\dfrac{\Gamma \vDash A \text{ и } \Gamma \vDash \neg A}{\Gamma \vDash B}$; 9) $\dfrac{\Gamma \vDash \neg\neg A}{\Gamma \vDash A}$.

Замечание 3. В дальнейшем мы скажем, что доказанные утверждения выражают тот факт, что отношение семантического следования в логике предикатов сохраняется правилами введения и удаления пропозициональных связок (см. § 4.4). ❍

Замечание 4. Понятие семантического следования в логике предикатов является одним из математических уточнений неформального понятия логического следования. ❍

Семантическое следование в логике предикатов имеет также ряд свойств, связанных с кванторами. Они являются специфическими для ЛП и не имеют аналогов в логике высказываний.

! **ТЕОРЕМА 2** (*свойства семантического следования в* ЛП, *связанные с кванторами*). Пусть $A(x)$, C − формулы ЯЛП; Γ − множество формул ЯЛП; t − терм, $A(t)$ − результат подстановки терма t в формулу $A(x)$ вместо x. Тогда:

1) $\dfrac{\Gamma \vDash \forall x\, A(x)}{\Gamma \vDash A(t)}$, где терм t является A-x-допустимым;

2) $\dfrac{\Gamma \vDash A(t)}{\Gamma \vDash \exists x\, A(x)}$, где терм t является A-x-допустимым;

3) $\dfrac{\Gamma \vDash A(x)}{\Gamma \vDash \forall x\, A(x)}$, где x не входит свободно в формулы из Γ;

4) $\dfrac{\Gamma, A(x) \vDash C}{\Gamma, \exists x\, A(x) \vDash C}$, где x не входит свободно в формулы из Γ и в C.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сформулируем лемму. Неформальный смысл этой леммы заключается в том, что если терм t является A-x-допустимым, то, для того чтобы вычислить значение формулы $A(t)$ в интерпретации $\mathfrak{M}$ с оценкой v, нужно сначала вычислить значение $v(t)$ самого терма t, а затем подставить это значение в предложение $\widetilde{A}(x)$ вместо x, наряду со значениями других свободных переменных формулы A, предписанными оценкой v (ср. с замечанием 3 в конце § 3.3):

$$| A(t) |_v^{\mathfrak{M}} = \widetilde{A}(v(t)).$$

ЛЕММА. Каковы бы ни были формула A, термы s и t ЯЛП$_\sigma$, интерпретация $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ и оценка v, если оценка v' такова, что $v'(x) = v(t)$, а все остальные переменные принимают то же значение, что и при оценке v, то:

а) $v((s)^x_t) = v'(s)$;

б) если терм t является A-x-допустимым, то $|(A)^x_t|^{\mathfrak{M}}_v = |A|^{\mathfrak{M}}_{v'}$.

Доказательство утверждения п. (а) индукцией по построению терма, а утверждения п. (б) индукцией по построению формулы ЯЛП оставляем читателю. Отметим, что требование в п. (б) A-x-допустимости терма t является существенным.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства утверждения п. 1 в силу транзитивности отношения $\models$ достаточно доказать следующее утверждение:

1') $\forall xA \models_{\text{ЛП}} A(t)$, где терм t является A-x-допустимым.

Пусть $\sigma = \sigma(\forall x\, A,\, A(t))$, а $\mathfrak{M}$ − произвольная интерпретация сигнатуры σ с оценкой v, такая, что $|\forall xA|^{\mathfrak{M}}_v =$ И. Рассмотрим оценку v', которая отличается от оценки v, возможно, лишь значением x, а $v'(x) = v(t)$. Согласно определению значения формулы ЯЛП в $\mathfrak{M}$ при оценке v, $|A|^{\mathfrak{M}}_{v'} =$ И. Кроме того, в силу леммы, $|(A)^x_t|^{\mathfrak{M}}_v = |A|^{\mathfrak{M}}_{v'}$. Следовательно, $|(A)^x_t|^{\mathfrak{M}}_v =$ И, т. е. $|A(t)|^{\mathfrak{M}}_v =$ И.

Утверждение п. 2 можно доказать аналогично.

Докажем утверждение п. 3. Допустим, что x не входит свободно ни в одну формулу из Γ и $\Gamma \models A$. Докажем, что $\Gamma \models \forall x\, A$. Пусть $\sigma = \sigma(\Gamma, \forall x\, A)$, а $\mathfrak{M}$ − произвольная интерпретация сигнатуры σ с оценкой v, такая, что все формулы из Γ принимают значение И (запишем это так: $|\Gamma|^{\mathfrak{M}}_v =$ И). Докажем, что $|\forall x\, A|^{\mathfrak{M}}_v =$ И. Рассмотрим произвольную оценку v', которая отличается от v, возможно, только лишь значением x, и докажем, что $|A|^{\mathfrak{M}}_{v'} =$ И. Поскольку x не входит свободно в формулы из Γ, то $|\Gamma|^{\mathfrak{M}}_{v'} = |\Gamma|^{\mathfrak{M}}_v =$ = И. Кроме того, имеем $\Gamma \models A$. Следовательно, $|A|^{\mathfrak{M}}_{v'} =$ И, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение п. 4. Допустим, что $\Gamma, A \models C$, причем x не входит свободно в формулы из Γ и в C. Докажем, что $\Gamma, \exists x\, A \models C$. Пусть $\sigma = \sigma(\Gamma, \exists x\, A,\, C)$, а $\mathfrak{M}$ − произвольная интерпретация сигнатуры σ с оценкой v, такая, что все формулы из Γ и формула $\exists x\, A$

принимают значение И ($|\,\Gamma\,|_{v}^{\mathfrak{M}}$ = И и $|\,\exists x\,A|_{v}^{\mathfrak{M}}$ = И). Докажем, что $|\,C|_{v}^{\mathfrak{M}}$ = И. Поскольку $|\,\exists x\;A|_{v}^{\mathfrak{M}}$ = И, то, согласно определению, $|\,A|_{v'}^{\mathfrak{M}}$ = И для некоторой оценки v', отличающейся от v только лишь, может быть, значением x. Так как x не входит свободно в формулы из Γ, то $|\,\Gamma\,|_{v'}^{\mathfrak{M}} = |\,\Gamma\,|_{v}^{\mathfrak{M}}$ = И. Итак, $\Gamma, A \models C$, $|\,\Gamma\,|_{v'}^{\mathfrak{M}}$ = И и $|\,A|_{v'}^{\mathfrak{M}}$ = И. Отсюда следует, что $|\,C|_{v'}^{\mathfrak{M}}$ = И. Поскольку x не входит свободно в формулу C, то $|\,C|_{v}^{\mathfrak{M}} = |\,C|_{v'}^{\mathfrak{M}}$. Таким образом, $|\,C|_{v}^{\mathfrak{M}}$ = И, что и требовалось доказать. ❐

Заметим, что для любой интерпретации $\mathfrak{M}$ отношение $\models_{\mathfrak{M}}$ также обладает рассмотренными в этом параграфе свойствами.

§3.7. Приложение логики предикатов к исследованию математических рассуждений

Для каждого, кто изучает математику, важно уметь распознавать правильные и неправильные рассуждения[1].

Признание математического рассуждения правильным или неправильным зависит только от его формы, а вовсе не от содержания. Если все предложения, участвующие в рассуждении, записать в виде формул языка первого порядка подходящей сигнатуры, то будет выявлена форма не только отдельных предложений, но и *форма рассуждения* в целом, точнее *схема*, по которой проведено рассуждение.

Всякое рассуждение состоит из элементарных, одношаговых рассуждений (умозаключений). Далее будем говорить именно о простейших, одношаговых рассуждениях, из которых составлено всякое более сложное многошаговое рассуждение. Если рассуждение имеет вид «из $\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{A}_n$ следует $\mathcal{A}$», то его форму можно изобразить

[1] Некоторые понятия, используемые в этом параграфе, не являются математическими, а потому нельзя рассчитывать на их точное определение.

схемой $\frac{A_1 \dots A_n}{A}$, где $A_1, \dots, A_n, A$ – формулы, отражающие логическую структуру предложений $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n, \mathcal{A}$. Схему $\frac{A_1 \dots A_n}{A}$ естественно считать *правильной*, если всякое рассуждение вида «из $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ следует $\mathcal{A}$», построенное по этой схеме и имеющее истинные посылки $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, имеет истинное заключение $\mathcal{A}$. Другими словами, *правильная схема* должна гарантировать истинность заключения при истинности посылок для всякого рассуждения по этой схеме. Схему рассуждения естественно считать *неправильной*, если существует рассуждение по этой схеме, все посылки которого истинны, а заключение ложно. Тогда, чтобы доказать, что данное рассуждение неправильно, достаточно привести пример рассуждения по той же схеме (той же формы), посылки которого истинны, а заключение ложно.

Понятие правильной схемы рассуждений, а значит, и правильного рассуждения, как рассуждения по правильной схеме, можно уточнить следующим образом.

Будем называть *прямое рассуждение по схеме* $\frac{A_1 \dots A_n}{A}$ *правильным*[1], если из формул $A_1, \dots, A_n$ семантически следует формула A: $A_1, \dots, A_n \vDash_{\text{ЛП}} A$.

Рассуждение может иметь более сложный вид: «если из B_1 следует A_1, ..., из B_n следует A_n, то верно A» (так называемое косвенное рассуждение). К таким рассуждениям относятся, например, рассуждения приведением к нелепости и разбором случаев.

Чтобы учесть и такого типа рассуждения, введенное выше понятие прямого правильного рассуждения можно обобщить следующим образом.

Рассуждение будем называть *правильным*[2], если схема, по которой оно проведено, сохраняет отношение семантического следования в ЛП $\vDash_{\text{ЛП}}$[3].

---

[1] Точнее было бы сказать «правильным с позиций *классической* логики».

[2] Можно подойти к уточнению понятия правильного рассуждения, пользуясь исключительно синтаксическими средствами. А именно, можно считать умозаключение правильным, если его форма соответствует некоторому допустимому правилу заключения в предикатной системе естественного вывода (см. § 4.4). Такое уточнение эквивалентно предложенному.

[3] Сохранение схемой заключения отношения $\vDash$ в ЛП будет введено аналогично тому, как это было сделано в ЛВ (см. далее § 4.4).

➤➤ Таким образом, для того чтобы выяснить, является ли рассуждение правильным, достаточно:

1) составить схему, по которой проведено рассуждение (формализовать рассуждение, записав составляющие его предложения в виде формул ЯЛП), и

2) проверить, сохраняет ли эта схема отношение семантического следования в логике предикатов.

Заметим, что для выяснения, сохраняет ли прямая схема $\frac{A_1 \dots A_n}{A}$ отношение семантического следования, достаточно проверить, выполняется ли следующее условие: $A_1, \dots, A_n \vDash_{\text{ЛП}} A$. Для доказательства того, что это условие не выполняется, достаточно привести пример интерпретации с оценкой, в которой каждая из формул $A_1, \dots, A_n$ принимает значение И, а формула A принимает значение Л. Такая интерпретация дает пример рассуждения по этой же схеме, посылки которого истинны, а заключение ложно.

Рассмотрим примеры. Выясним, являются ли правильными следующие рассуждения, применяя средства логики предикатов.

П р и м е р. Всякое число, делящееся на 9, делится на 3; 18 делится на 3. Следовательно, 18 делится на 9.

Запишем предложения, составляющие это рассуждение, в виде формул. Для этого используем язык, сигнатура которого содержит двуместный предикатный символ D и символы констант: a, b, c.

В результате получим схему, по которой проведено рассуждение:

$$\frac{\forall x(D(x,a) \supset D(x,b)) \quad D(c,b)}{D(c,a)}.$$

Теперь выясним, сохраняет ли эта схема отношение семантического следования. Для этого достаточно выяснить, имеет ли место семантическое следование $\forall x(D(x,a) \supset D(x,b)), D(c, b) \vDash D(c, a)$. Опустим описание процесса исследования. Ответ должен быть отрицательным. Для доказательства достаточно рассмотреть интерпретацию с полем $\mathbf{N}$, в которой $\tilde{D}$ − это отношение делимости, $\tilde{a} = 9$, $\tilde{b} = 3$, $\tilde{c} = 12$. В этой интерпретации обе посылки принимают значение И («всякое число, делящееся на 9, делится на 3», «12 делится на 3»), а заключение («12 делится на 9») принимает значение Л. Таким образом, рассуждение является неправильным, хотя все три высказывания, составляющие его, истинны. ❍

П р и м е р. График всякой четной функции симметричен относительно оси ординат; данная функция не является четной. Следовательно, график данной функции несимметричен относительно оси ординат.

Составим схему, по которой проведено рассуждение, записав составляющие его предложения в виде формул подходящей сигнатуры:

$$\frac{\forall x\ (P(x) \supset Q(x))\quad \neg P(a)}{\neg Q(a)}.$$

Эта схема не является правильной, поскольку можно подобрать рассуждение по той же схеме, посылки которого истинны, а заключение ложно. Действительно, рассмотрим интерпретацию, полем которой служит множество функций типа R $\to$ R, $\tilde{P}$ есть свойство функции быть дифференцируемой в точке ноль, $\tilde{Q}$ есть свойство функции быть непрерывной в точке ноль, а $\tilde{a}$ есть функция f такая, что для всякого x из R: $f(x) = |\,x\,|$. ❍

П р и м е р. График всякой четной функции симметричен относительно оси ординат; график данной функции несимметричен относительно оси ординат. Следовательно, данная функция не является четной.

Рассуждение построено по следующей схеме:

$$\frac{\forall x\ (P(x) \supset Q(x))\quad \neg Q(a)}{\neg P(a)}.$$

Эта схема является правильной, поскольку, как легко показать,

$$\forall x\ (P(x) \supset Q(x)),\ \neg Q(a) \models\ \neg P(a)\,.\ ❍$$

УПРАЖНЕНИЕ

Выясните, являются ли следующие рассуждения правильными:

1. Все ромбы — параллелограммы; некоторые четырехугольники не являются ромбами. Следовательно, некоторые четырехугольники не являются параллелограммами.

2. График всякой четной функции симметричен относительно оси ординат; график данной функции симметричен относительно оси ординат. Следовательно, данная функция четная.

3. Все натуральные числа рациональны; некоторые действительные числа не являются натуральными. Следовательно, некоторые действительные числа не являются рациональными.

§3.8. Проблема общезначимости для логики предикатов

Мы уже отмечали связь между тавтологиями и общезначимыми формулами. Поскольку и те и другие являются в известном смысле законами логики, очень важно уметь распознавать не только тавтологии, но и общезначимые формулы. Однако проблему распознавания общезначимых формул ЯЛП нельзя решить так же просто, как и задачу распознавания тавтологий в логике высказываний.

Теорема Чёрча Фундаментальным результатом, доказательство которого использует средства теории алгоритмов, является следующая теорема, доказанная в 1936 году американским логиком А. Чёрчем[1]. В этой теореме говорится о том, что невозможен общий метод, позволяющий по всякой предикатной формуле распознать, является она общезначимой или нет.

Язык первого порядка, который содержит все предикатные символы, но не содержит функциональных символов и предметных констант, называют языком *чистой логики предикатов*. Сам ЯЛП, поскольку он содержит все предикатные символы, все функциональные символы и все предметные константы, называют также *языком насыщенной логики предикатов*.

! **ТЕОРЕМА** (*Чёрч*)[2]. Не существует алгоритма, позволяющего по любой формуле языка чистой логики предикатов выяснить, является ли она общезначимой.

! **СЛЕДСТВИЕ**. Не существует алгоритма, позволяющего по любой формуле ЯЛП выяснить, является ли она общезначимой.

★ Однако для некоторых классов формул ЯЛП существуют алгоритмы, позволяющие по любой формуле из этих классов выяснять, является ли она общезначимой. Приведем ряд связанных с этим утверждений, доказательство которых не входит в наши задачи, однако весьма доступно и при желании может быть проведено читателем.

1. Существует алгоритм, позволяющий по любой бескванторной формуле ЯЛП выяснить, является ли она общезначимой.

---

[1] А. Чёрч (1903—1995) — американский математик, логик.

[2] Доказательство этой теоремы выходит за рамки нашего курса. При желании его можно найти в [3], [10].

2. Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле ЯЛП выяснить, является ли она истинной во всех k-элементных интерпретациях ЯЛП (k фиксировано).

3. Пусть A − произвольная бескванторная формула ЯЛП$_\sigma$ без функциональных символов и предметных констант, $(x_1, ..., x_n)$ − список ее переменных.

а) Формула $\forall x_1 ... \forall x_n\ A$ общезначима тогда и только тогда, когда она истинна в любой n-элементной интерпретации ЯЛП$_\sigma$.

б) Существует алгоритм, решающий проблему общезначимости для формул вида, описанного в п. (а).

4. Пусть A − произвольная бескванторная формула ЯЛП$_\sigma$ без функциональных символов и предметных констант, $(x_1, ..., x_n)$ − список ее переменных.

а) Формула $\exists x_1 ... \exists x_n\ A$ общезначима тогда и только тогда, когда она истинна в любой одноэлементной интерпретации ЯЛП$_\sigma$.

б) Существует алгоритм, решающий проблему общезначимости для формул вида, описанного в п. (а).

5. Пусть A − произвольная бескванторная формула ЯЛП$_\sigma$ без функциональных символов и предметных констант, $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_k)$ − список ее переменных.

а) Формула $\forall x_1 ... \forall x_n\ \exists y_1 ... \exists y_k\ A$ общезначима тогда и только тогда, когда она истинна в любой n-элементной интерпретации ЯЛП$_\sigma$.

б) Существует алгоритм, решающий проблему общезначимости для формул вида, описанного в п. (а).

6. а) Любая формула A языка ЯЛП$_\sigma$, где $\sigma = \{ P_1^1, ..., P_n^1 \}$, выполнима тогда и только тогда, когда она выполнима в интерпретации, содержащей не более 2^n элементов.

б) Существует алгоритм, решающий проблему общезначимости для формул вида, описанного в п. (а). ✰

Глава 4

ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ. ПРЕДИКАТНЫЕ СИСТЕМЫ ЕСТЕСТВЕННОГО ВЫВОДА

§4.1. Кванторные правила заключения

Построим новую логическую систему — *предикатную систему естественного вывода*[1], которую будем обозначать символом PN. Для этого опишем ее язык и правила заключения. Языком этой системы служит ЯЛП. Множество аксиом, как и в случае пропозициональных систем естественного вывода, пусто.

! Список правил заключения предикатной системы PN (или, кратко, PN-*правил*) получим добавлением к списку правил заключения пропозициональной системы N_k следующих четырех кванторных правил (∃в и ∀у — прямые, ∀в и ∃у — условные):

$$\frac{\mathcal{A}(x)}{\forall x\mathcal{A}(x)}$$ (∀в) — введение квантора общности;

$$\frac{\mathcal{A}(t)}{\exists x\mathcal{A}(x)}$$ (∃в) — введение квантора существования;

$$\frac{\forall x\mathcal{A}(x)}{\mathcal{A}(t)}$$ (∀у) — удаление квантора общности;

$$\frac{\exists x\mathcal{A}(x) \quad \overset{[\mathcal{A}(x)]}{C}}{C}$$ (∃у) — удаление квантора существования.

➤➤ Отметим, что при построении деревьев PN-вывода все кванторные правила используются с существенными ограничениями, которые будут отражены в определении дерева PN-вывода.

---

[1] Рассматриваемая предикатная система, как и в пропозициональном случае, является некоторой модификацией системы, предложенной Генценом.

Замечание. Построенная предикатная система является классической предикатной системой естественного вывода PN_k, поскольку среди правил заключения есть правило $\neg\neg$у. Удалив из списка правил PN_k правило $\neg\neg$у, получим интуиционистскую предикатную систему PN_i. Поскольку мы ограничимся изучением классической предикатной системы, будем обозначать ее просто PN, исключая те случаи, когда необходимо подчеркнуть, что рассматриваемая система — классическая. ❍

Содержательный смысл кванторных правил заключения

Как и в случае правил введения и удаления связок &, $\vee$, $\supset$, $\neg$, правила введения и удаления кванторов являются формализацией правил умозаключений, в соответствии с которыми проводятся обычные математические рассуждения.

Раскроем содержательный смысл кванторных правил. Рассмотрим примеры неформальных рассуждений, проводимых в соответствии с этими правилами.

Сначала рассмотрим ***правило удаления квантора общности*** $\forall$у. Если обосновано утверждение «Все элементы данного множества обладают свойством $\mathcal{A}$», то для произвольного элемента t из этого множества (каким бы образом мы ни задали элемент t) считается справедливым и утверждение «t обладает свойством $\mathcal{A}$». Более того, если через t обозначить произвольное выражение с переменными по данному множеству (именную форму), то предложение с переменными «t обладает свойством $\mathcal{A}$» будет верным при любых значениях переменных.

Однако если мы хотим формализовать такой логический переход, то должны учесть, что формула $A(t)$, где t — некоторый терм, интерпретируется как предложение «$\tilde{t}$ обладает свойством $\tilde{A}$», если терм t является A-x-допустимым (см. замечание 3 § 3.3). Это ограничение на применение правила $\forall$у будет отражено в определении дерева PN-вывода.

П р и м е р. Пусть M — множество всех натуральных чисел, делящихся на 4, а предикат $\mathcal{A}$ задан следующим образом: $\mathcal{A}(x) =$ $=$ И $\leftrightarrow 2 \mid x$. Легко обосновать, что всякое число, кратное 4, является четным, т. е. что *все* элементы из M обладают свойством $\mathcal{A}$. Мы договорились записывать это так: $(x)\,\mathcal{A}(x)$ или, в нашем примере, $(x)(2 \mid x)$, где x — переменная по множеству M. Отсюда следует, что для произвольных a и b из множества M истинны не только предложения $\mathcal{A}(a)$ и $\mathcal{A}(b)$, но и такие предложения, как $\mathcal{A}(a^2)$; $\mathcal{A}(5a)$;

$\mathcal{A}(a + b)$, (т. е. $2 \mid a^2$, $2 \mid 5a$, $2 \mid (a + b)$). И вообще, истинно всякое предложение вида «t обладает свойством $\mathcal{A}$», где t – элемент M или выражение с переменными по M (именная форма). ○

Теперь рассмотрим ***правило введения квантора существования*** ∃в. Если хотя бы для одного элемента заданного множества обосновано, что он обладает свойством $\mathcal{A}$, то считаем справедливым утверждение «Существует элемент из M, обладающий свойством $\mathcal{A}$». Например, поскольку справедливо утверждение «2 – четное простое число», делаем заключение, что справедливо утверждение «Существует четное простое число». Отметим, что при применении этого правила устанавливаются те же ограничения, что и в предыдущем случае.

Перейдем к ***правилу введения квантора общности*** ∀в[1]. Обосновав $\mathcal{A}(x)$ (x обладает свойством $\mathcal{A}$) в предположении, что x – произвольно взятый и зафиксированный элемент данного множества, мы считаем обоснованным утверждение «Все элементы данного множества обладают свойством $\mathcal{A}$».

Другими словами, для доказательства утверждения «Все элементы данного множества обладают свойством $\mathcal{A}$» достаточно, предполагая, что x – произвольный элемент из этого множества, доказать, что x обладает свойством $\mathcal{A}$, т. е. доказать $\mathcal{A}(x)$. Поэтому, когда требуется доказать утверждение «Все элементы из данного множества обладают свойством $\mathcal{A}$», обычно доказательство начинают со слов: «Пусть x – *произвольный* элемент из данного множества. Докажем, что он обладает свойством $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}(x)$». Доказав $\mathcal{A}(x)$, заключают, что все элементы x из данного множества обладают свойством $\mathcal{A}$, поскольку x был взят произвольно. При доказательстве предложения $\mathcal{A}(x)$ могут использоваться какие-то допущения Δ, однако в них не должны накладываться никакие условия на x, иначе x уже не будет произвольным. Это принципиально важное ограничение найдет отражение в соответствующем пункте определения PN-Δ-F-вывода (см. далее п. ($\mathbf{P_1}$)).

Пример. Пусть требуется доказать утверждение «У всякого равнобедренного треугольника углы при основании равны». Доказательство этого утверждения обычно начинают со слов: «Пусть ABC – произвольный равнобедренный треугольник. Докажем, что углы при его основании равны». Дальнейшие рассуждения не должны опираться ни на какие дополнительные условия, накладываемые на треугольник ABC. ○

---

[1] Правило ∀в часто называют также правилом *обобщения* и обозначают Gen (от лат. *generalis* – «общий, всеобщий»).

П р и м е р. Рассмотрим еще один содержательный пример. Требуется доказать утверждение, что всякая непрерывная на множестве E функция ограничена на этом множестве, где E — некоторое заданное компактное подмножество $\mathbf{R}$. Обозначим через $\mathcal{A}(f)$ предложение «Если функция f непрерывна на множестве E, то f ограничена на E» (где f — переменная по множеству функций, определенных на компакте E). Требуется доказать предложение $(f)\ \mathcal{A}(f)$, используя условие, что E компактно. Обозначим это условие через Δ и заметим, что оно не накладывает дополнительных условий на f (предложение Δ не содержит f свободно). Достаточно, предположив, что f — произвольная функция на E, доказать, что она удовлетворяет условию $\mathcal{A}$, т. е. выполняется $\mathcal{A}(f)$. Проведя это доказательство при условии Δ, мы считаем обоснованным при условии Δ и предложение $(f)\ \mathcal{A}(f)$. Такое содержательное доказательство можно условно представить в виде дерева следующим образом:

$$\begin{array}{c}\Delta\\ \hline\hline \mathcal{A}(f)\\ \hline (f)\mathcal{A}(f)\end{array}\ \supset$$

Наконец, обсудим содержательный смысл ***правила удаления квантора существования*** $\exists$у.

Если мы располагаем утверждением «Существует (быть может, не единственный) объект, обладающий свойством $\mathcal{A}$» (символически: (Ex) $\mathcal{A}(x)$), а требуется доказать некоторое утверждение $\mathcal{C}$, то доказательство мы обычно начинаем со слов: «Пусть x — *произвольный* элемент такой, что $\mathcal{A}(x)$. Исходя из этого допущения докажем, что имеет место $\mathcal{C}$». После того как это доказательство завершено, считаем, что требуемое утверждение $\mathcal{C}$ полностью обосновано при условии (Ex) $\mathcal{A}(x)$ (вне зависимости от допущения $\mathcal{A}(x)$). При этом принципиально важными являются два следующих ограничения. Во-первых, предложение $\mathcal{C}$ не должно зависеть от x (т. е. $\mathcal{C}$ не содержит x свободно). Действительно, если это ограничение не выполнено, будет доказано всего лишь то, что $\mathcal{C}(x)$ выполняется для того самого x, который обладает свойством $\mathcal{A}$. Во-вторых, если при доказательстве $\mathcal{C}$ кроме допущения $\mathcal{A}(x)$ используются какие-то другие допущения Δ, то в них не должны накладываться никакие условия на x, иначе x уже не будет произвольным. Эти два требования найдут отражение в виде двух специальных условий в п. ($\mathbf{P_4}$) определения PN-Δ-F-вывода.

П р и м е р. Пусть требуется доказать следующее утверждение «Если существует прямая, параллельная каждой из данных прямых l_1 и l_2, то эти прямые параллельны друг другу». Обозначим через $\mathcal{A}(l)$ предложение «$l \parallel l_1$ и $l \parallel l_2$» со свободной переменной l, а через $\mathcal{C}$ — предложение «$l_1 \parallel l_2$», не содержащее свободно l. Доказав утверждение «если $l \parallel l_1$ и $l \parallel l_2$, то $l_1 \parallel l_2$», делаем вывод, что из существования прямой, параллельной l_1 и l_2, следует, что эти прямые параллельны.

Итак, введены обозначения:

$\mathcal{C}$ есть предложение «$l_1 \parallel l_2$»;

$\mathcal{A}(l)$ есть предложение «$l \parallel l_1$ и $l \parallel l_2$».

Дано (точнее, *допустим*): $(\mathsf{E}l)\ \mathcal{A}(l)$.

Требуется доказать (*докажем*): $\mathcal{C}$.

Доказательство начинаем со слов: «Пусть l — какая-либо прямая, параллельная прямым l_1 и l_2, т. е. пусть $\mathcal{A}(l)$. Докажем, что тогда прямые l_1 и l_2 параллельны (т. е. $\mathcal{C}$)».

Доказав, что $l_1 \parallel l_2$ ($\mathcal{C}$) исходя из допущения $\mathcal{A}(l)$, считаем, что $\mathcal{C}$ доказано при одном условии: $(\mathsf{E}l)\ \mathcal{A}(l)$. Это рассуждение можно представить в виде дерева следующим образом:

$$\dfrac{(\mathsf{E}l)(l \parallel l_1 \mathbin{\&} l \parallel l_2) \qquad \dfrac{[l \parallel l_1 \mathbin{\&} l \parallel l_2]^1}{\overline{\overline{l_1 \parallel l_2}}}}{l_1 \parallel l_2}\,{\scriptstyle(1)},$$

или, используя введенные обозначения, более схематично:

$$\dfrac{(\mathsf{E}l)\mathcal{A}(l) \qquad \dfrac{[\mathcal{A}(l)]^1}{\overline{\overline{\mathcal{C}}}}}{\mathcal{C}}\,{\scriptstyle(1)},$$

где запись $\dfrac{\mathcal{A}(l)}{\overline{\overline{\mathcal{C}}}}$ обозначает доказательство предложения «Если $l \parallel l_1$ и $l \parallel l_2$, то $l_1 \parallel l_2$». Номер 1, как и прежде, показывает от какого допущения и когда происходит освобождение. ○

Пример. Требуется доказать утверждение «Если существует формула, которой равносильна каждая из двух данных формул F_1 и F_2, то $F_1 \equiv F_2$».

$\mathcal{C}$: $F_1 \equiv F_2$.

$\mathcal{A}(F)$: $F \equiv F_1 \mathbin{\&} F \equiv F_2$.

Доказав $\mathcal{C}$ исходя из допущения $\mathcal{A}(F)$, считаем, что $\mathcal{C}$ доказано при одном условии: $(\mathsf{E}F)\ \mathcal{A}(F)$.

Это содержательное доказательство можно представить в виде следующего дерева:

$$\dfrac{(\mathsf{E}F)(F \equiv F_1 \mathbin{\&} F \equiv F_2) \qquad \dfrac{[F \equiv F_1 \mathbin{\&} F \equiv F_2]^1}{\overline{\overline{F_1 \equiv F_2}}}}{F_1 \equiv F_2}\,{\scriptstyle(1)} \quad ○$$

Отметим еще раз, что все ограничения, о которых шла речь при обсуждении содержательного смысла предикатных правил, будут отражены в определении PN-Δ-F вывода.

§4.2. Определение дерева PN-вывода

Теперь введем понятие ***дерева* PN-*вывода с корнем* F *и множеством зеленых листьев*** Δ или, кратко, PN-Δ-F-*вывода*.

В индуктивном определении PN-Δ-F-вывода, как и в пропозициональном случае, в шаге индукции каждому PN-правилу (включая правила введения и удаления связок) соответствует свой пункт.

! Индуктивное определение PN-Δ-F-***вывода*** получается из соответствующего определения N_k-Δ-F-вывода заменой всюду N_k на PN, а ЯЛВ на ЯЛП и *добавлением* в шаге индукции следующих четырех пунктов (A, C — произвольные формулы ЯЛП; Δ, Δ_1, Δ_2 — произвольные конечные множества формул ЯЛП; x — произвольная предметная переменная; $A(t)$ — результат подстановки терма t в формулу A вместо x):

(P_1) Если $\mathcal{D}^{\Delta}_{A}$ есть PN-Δ-A-вывод и переменная x не входит свободно ни в одну формулу из Δ, то $\dfrac{\mathcal{D}^{\Delta}_{A}}{\forall x\ A}$ есть PN-Δ-$\forall x\ A$-вывод.

(P_2) Если $\mathcal{D}^{\Delta}_{A(t)}$ есть PN-Δ-$A(t)$-вывод и t — A-x-допустимый терм, то $\dfrac{\mathcal{D}^{\Delta}_{A(t)}}{\exists x\ A}$ есть PN-Δ-$\exists x\ A$-вывод.

(P_3) Если $\mathcal{D}^{\Delta}_{\forall x\ A}$ есть PN-Δ-$\forall x\ A$-вывод и t — A-x-допустимый терм, то $\dfrac{\mathcal{D}^{\Delta}_{\forall x A}}{A(t)}$ есть PN-Δ-$A(t)$-вывод.

(P_4) Если $\mathcal{D}^{\Delta_1}_{\exists xA}$ есть PN-Δ_1-$\exists xA$-вывод, $\mathcal{D}^{\Delta_2}_{C}$ есть PN-Δ_2-C-вывод, переменная x не входит свободно в формулу C и ни в одну формулу из множества $\Delta_2 \setminus \{A\}$, то $\dfrac{\mathcal{D}^{\Delta_1}_{\exists xA} \quad \mathcal{D}^{\Delta_2}_{C}}{C}$ есть PN-Δ-C-вывод, где $\Delta = \Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\})$.

Всякий PN-Δ-F-вывод будем также иногда называть *деревом* PN-*вывода* или просто PN-*выводом*.

Замечание. Ограничения на применение правил заключения в определении PN-Δ-F-вывода играют существенную роль. В чем она заключается — обсуждается в § 4.3. ❍

Примеры деревьев PN-вывода

Рассмотрим несколько примеров деревьев PN-вывода.

П р и м е р. Построим PN-$\varnothing$-F-вывод для следующей формулы $F \rightleftharpoons \forall x\ P(x) \supset \forall y\ P(y)$, где P — одноместный предикатный символ:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\ P(x)]^1}{P(y)}\,{\scriptstyle \forall у\ (**)}}{\forall y\ P(y)}\,{\scriptstyle \forall в\ (*)}}{\forall x\ P(x) \supset \forall y\ P(y)}\,{\scriptstyle \supset в\ (1)} \qquad [\forall x\ P(x)]^1$$

Проверим законность применения кванторных правил. Во-первых, при применении правила ($\forall$у), которое помечено (**), терм y является $P(x)$-x-допустимым. Во-вторых, при применении правила ($\forall$в), которое помечено (*), $\Delta = \{\forall x\ P(x)\}$ и y не входит свободно в формулу $\forall x\ P(x)$. Таким образом, все требования выполнены и искомое дерево вывода построено. ❍

П р и м е р. Построим PN-$\varnothing$-F-вывод для следующей формулы $F \rightleftharpoons \exists x\ P(x) \supset \exists y\ P(y)$, где P — одноместный предикатный символ:

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\ P(x)]^1 \qquad \dfrac{[P(x)]^2}{\exists y\ P(y)}\,{\scriptstyle \exists в\ (**)}}{\exists y\ P(y)}\,{\scriptstyle \exists у\ (2)(*)}}{\exists x\ P(x) \supset \exists y\ P(y)}\,{\scriptstyle \supset в\ (1)} \qquad \begin{matrix}[P(x)]^2 \\ \\ [\exists x\ P(x)]^1\end{matrix}$$

Проверим законность применения кванторных правил. Во-первых, при применении правила ($\exists$в), которое помечено (**), терм x является $P(y)$-y-допустимым. Во-вторых, при применении правила

(∃у), которое помечено (*), переменная x не входит свободно в формулу $\exists y\, P(y)$, а $\Delta_2 \setminus \{P(x)\} = \varnothing$. ❍

Пример. Построим PN-Δ-F-вывод при $\Delta = \{\neg\exists x A(x)\}$, а $F \rightleftharpoons \forall x\, \neg A(x)$, где $A(x)$ − произвольная формула:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]^1}{\exists x\, A(x)}\,{\scriptstyle \exists\text{в}\,(**)} \qquad \neg\exists x\, A(x)}{\neg A(x)}\,{\scriptstyle \neg\text{в}\,(1)}}{\forall x\, \neg A(x)}\,{\scriptstyle \forall\text{в}\,(*)} \qquad [A(x)]^1$$

Убедимся в законности применения кванторных правил. Во-первых, при использовании правила (∃в), помеченного (**), терм x является $A(x)$-x-допустимым. Во-вторых, при использовании правила (∀в), которое помечено (*), множество $\Delta = \{\neg\exists x\, A(x)\}$, а переменная x не входит свободно в формулу $\neg\exists x\, A(x)$. Аналогично пропозициональному случаю, после построения этого дерева можно сказать, что доказано утверждение «Из формулы $\neg\exists x\, A(x)$ PN-выводима формула $\forall x\, \neg A(x)$», и записывается это так: $\neg\exists x\, A(x) \vdash_{\text{PN}} \forall x\, \neg A(x)$. ❍

➤ Отметим, что дерево формул $\dfrac{A}{\forall x A}$ является PN-выводом только в том случае, когда x не входит свободно в формулу A, в то время как дерево формул $\dfrac{\forall x A}{A}$ является PN-выводом для любой формулы A.

Например, рассмотрим дерево формул $\dfrac{P(x)}{\forall x P(x)}$. Это дерево формул построено по схеме (∀в). Однако оно не удовлетворяет условию п. **(P_1)** определения PN-Δ-F-вывода, поскольку переменная x входит свободно в формулу $P(x)$. Следовательно, это дерево формул не является PN-выводом. В то же время дерево формул $\dfrac{\forall x P(x)}{P(x)}$, очевидно, является деревом PN-вывода, построенным по правилу (∀у), поскольку терм x допустим для подстановки в формулу $P(x)$ вместо переменной x.

§4.3. Отношение PN-выводимости и его свойства

! Формулу F будем называть PN-***выводимой из множества формул*** Γ и писать $\Gamma \vdash_{PN} F$, если существует PN-Δ-F-вывод такой, что $\Delta \subseteq \Gamma$.

! Формулу F будем называть PN-***выводимой*** (или PN-*доказуемой*) и писать $\vdash_{PN} F$, если существует PN-$\varnothing$-F-вывод (т.е. PN-вывод формулы F с пустым множеством зеленых листьев).

Очевидно, отношение PN-выводимости рефлексивно, монотонно и транзитивно. Это отношение также обладает всеми свойствами, связанными с правилами введения и удаления связок, которыми обладает отношение N_k-выводимости (см. § 2.5). В частности, для PN имеет место теорема дедукции[1].

Кроме того, отношение $\vdash_{PN}$ обладает дополнительными свойствами.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Отношение PN-выводимости обладает следующими свойствами, связанными с кванторными правилами[2]:

1) $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash (A)^x_t}$, где терм t является A-x-допустимым;

2) $\dfrac{\Gamma \vdash (A)^x_t}{\Gamma \vdash \exists x A}$, где терм t является A-x-допустимым;

3) $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}$, где x не входит свободно в формулы из Γ;

4) $\dfrac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, \exists x A \vdash C}$, где x не входит свободно в C и формулы из Γ.

---

[1] В исчислении предикатов гильбертовского типа теорема дедукции верна только при дополнительных ограничениях (см. § 4.6).

[2] В дальнейшем эти свойства будут расценены как сохранение кванторными правилами отношения PN-выводимости.

Здесь символ $\vdash$ обозначает отношение PN-выводимости $\vdash_{\mathrm{PN}}$, $(A)^x_t$ — результат подстановки терма t в формулу A вместо x, а A — произвольная формула, Γ — произвольное множество формул ЯЛП$_\sigma$, x — произвольная предметная переменная, t — произвольный терм, удовлетворяющие условиям, указанным в п. 1—4.

Читателю не составит большого труда доказать эти свойства самостоятельно.

В § 3.4 было введено понятие предикатной подстановки в пропозициональную формулу и доказано, что всякая предикатная подстановка в тавтологию общезначима. Докажем еще одну теорему о предикатных подстановках в тавтологию.

! **ТЕОРЕМА.** Всякая предикатная подстановка в тавтологию выводима в PN[1].

Доказательство. Пусть пропозициональная формула F — тавтология, $\omega = (p_1, ..., p_n)$ — ее допустимый список и $A_1, ..., A_n$ — предикатные формулы. Докажем, что предикатная формула $(F)^{p_1, ..., p_n}_{A_1, ..., A_n}$ — результат предикатной подстановки в формулу F — является PN-выводимой формулой.

Обозначим через F^* формулу $(F)^{p_1, ..., p_n}_{A_1, ..., A_n}$.

Поскольку формула F — тавтология, то она N_k-выводима. Пусть $\mathcal{D}^{\varnothing}_{F}$ — некоторый N_k-$\varnothing$-F-вывод. Для каждой входящей в этот N_k-вывод пропозициональной формулы B обозначим через B^* предикатную формулу, которую получают из B подстановкой в нее вместо переменных $p_1, ..., p_n$ предикатных формул $A_1, ..., A_n$ соответственно, а вместо каждой переменной, не входящей в ω (если таковые имеются), формулы A_1. Заменим в дереве N_k-вывода $\mathcal{D}^{\varnothing}_{F}$ каждую входящую в него формулу B на соответствующую предикатную формулу B^*. Обозначим полученное в результате указанной замены дерево предикатных формул через $\mathcal{D}^{\varnothing}_{F^*}$. Так как в дереве вывода $\mathcal{D}^{\varnothing}_{F}$ применялись только правила введения и удаления связок, то и в дереве $\mathcal{D}^{\varnothing}_{F^*}$ применяются только те же самые бескванторные правила, для которых нет ограничений. Таким обра-

[1] В этой теореме принципиальную роль играет то, что PN — *классическая* предикатная система естественного вывода.

зом, полученное дерево $\mathcal{D}^{\varnothing}_{F^*}$ является PN-$\varnothing$-F^*-выводом, а значит, $\vdash_{\mathrm{PN}} F^*$. ❐

Замечание 1. Более аккуратно доказательство можно провести следующим образом: сначала с помощью принципа индукции для $\mathrm{N_k}$-выводов следует доказать утверждение

$$(F)\ (\Gamma)\ (\Gamma \vdash_{\mathrm{N_K}} F \to \Gamma^* \vdash_{\mathrm{PN}} F^*),$$

а затем взять $\Gamma = \varnothing$. Здесь Γ^* − множество формул, каждая из которых получена путем указанной предикатной подстановки в соответствующую формулу множества Γ. ❍

Существенность ограничений на применение кванторных правил

➤ В определении PN- Δ-F-вывода в каждом из п. **(P$_1$)−(P$_4$)** накладываются ограничения на применение кванторных правил при построении деревьев PN-вывода. Оказывается, если отказаться хотя бы от одного из ограничений, то будут выводимыми некоторые необщезначимые формулы. В то же время в § 4.5 будет доказано, что PN-выводимы только общезначимые формулы.

Если при использовании правила ∀в отказаться от ограничения в п. **(P$_1$)**, то придется признать деревом вывода следующее дерево формул: $\dfrac{P(x)}{\forall x\ P(x)}$. Тогда по правилу ⊃в будет выводимой формула $P(x) \supset \forall x\ P(x)$, которая не является общезначимой.

Если при использовании правила ∃в отказаться от ограничения в п. **(P$_2$)**, то придется признать деревом вывода следующее дерево формул: $\dfrac{\forall y\ Q(y, y)}{\exists x\ \forall y\ Q(x, y)}$. Тогда по правилу ⊃в будет выводимой формула $\forall y\ Q(y, y) \supset \exists x\ \forall y\ Q(x, y)$, которая не является общезначимой.

Если при использовани правила ∀у отказаться от ограничения в п. **(P$_3$)**, то придется признать деревом вывода следующее дерево формул: $\dfrac{\forall x\ \exists y\ Q(x, y)}{\exists y\ Q(y, y)}$. Но тогда по правилу ⊃в будет выводимой формула $\forall x\ \exists y\ Q(x, y) \supset \exists y\ Q(y, y)$, которая не является общезначимой.

Наконец, если при использовании правила $\exists$у отказаться от ограничений в п. **(P$_4$)**, то придется признать деревом вывода следующее дерево формул: $\dfrac{\exists x P(x) \quad [P(x)]^1}{P(x)}$. Тогда по правилу $\supset$в будет выводимой формула $\exists x\, P(x) \supset P(x)$, которая также не является общезначимой.

Доказательство того, что приведенные в качестве примеров формулы необщезначимы, оставляем читателю как несложное, но полезное упражнение.

Замечание 2. Хотя $P(x) \nvdash_{\mathrm{PN}} \forall x\, P(x)$, можно доказать, что для любой формулы A:

1) $\vdash_{\mathrm{PN}} A$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{\mathrm{PN}} \forall x\, A$;

2) $\vdash_{\mathrm{PN}} A$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{\mathrm{PN}} A'$, где A' – замыкание формулы A (см. теорему о замыкании в § 5.2). ○

Примеры деревьев PN-вывода

Рассмотрим еще несколько важных **примеров** деревьев PN-вывода.

1. $\exists x\, \neg A \vdash_{\mathrm{PN}} \neg\forall x\, A$

$$\dfrac{\exists x \neg A \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x\, A]^2}{A}\,{\scriptstyle \forall\text{у}} \qquad [\neg A]^1}{\neg\forall x A}\,{\scriptstyle \neg\text{в}\ (2)}}{\neg\forall x A}\,{\scriptstyle \exists\text{у}\ (1)}$$

2. $\forall x\, \neg A \vdash_{\mathrm{PN}} \neg\exists x\, A$

$$\dfrac{\forall x\, \neg A \qquad \dfrac{[\exists x\, A]^1 \qquad \dfrac{[A]^2 \qquad \dfrac{\forall x\, \neg A}{\neg A}\,{\scriptstyle \forall\text{у}}}{\neg\forall x \neg A}\,{\scriptstyle \neg\text{у}}}{\neg\forall x \neg A}\,{\scriptstyle \exists\text{у}\ (2)}}{\neg\exists x A}\,{\scriptstyle \neg\text{в}\ (1)}$$

3. $\neg\forall x\, A \vdash_{\mathrm{PN}} \exists x\, \neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^2}{\exists x \neg A}\,{\scriptstyle \exists\text{в}} \qquad [\neg\exists x\, \neg A]^1}{\neg\neg A}\,{\scriptstyle \neg\text{в}\,(2)}}{A}}{\forall x\, A}\,{\scriptstyle \forall\text{в}} \qquad \neg\forall x\, A}{\neg\neg\exists x\, \neg A}\,{\scriptstyle \neg\text{в}\,(1)}}{\exists x\, \neg A}$$

4. $\forall x\,(A \,\&\, B) \vdash_{PN} \forall x\,A \,\&\, \forall x\,B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(A \,\&\, B)}{A \,\&\, B}}{A}}{\forall x\,A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\,(A \,\&\, B)}{A \,\&\, B}}{B}}{\forall x\,B}}{\forall xA \,\&\, \forall xB}$$

5. $\forall x\,A \,\&\, \forall x\,B \vdash_{PN} \forall x\,(A \,\&\, B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall xA \,\&\, \forall xB}{\forall x\,A}}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall xA \,\&\, \forall xB}{\forall x\,B}}{B}}{A \,\&\, B}}{\forall x\,(A \,\&\, B)}$$

6. $\forall x\,A \lor \forall x\,B \vdash_{PN} \forall x\,(A \lor B)$

$$\dfrac{\forall x\,A \lor \forall x\,B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\,A]^1}{A}}{A \lor B}}{\forall x(A \lor B)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\,B]^1}{B}}{A \lor B}}{\forall x(A \lor B)}}{\forall x(A \lor B)}\ \lor\text{у}\ (1)$$

7. $\exists x\,(A \lor B) \vdash_{PN} \exists x\,A \lor \exists x\,B$

$$\dfrac{\exists x(A \lor B) \qquad \dfrac{[A \lor B]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^2}{\exists x\,A}}{\exists x\,A \lor \exists x\,B} \qquad \dfrac{\dfrac{[B]^2}{\exists x\,B}}{\exists x\,A \lor \exists x\,B}}{\exists x\,A \lor \exists x\,B}\ \lor\text{у}\ (2)}{\exists x\,A \lor \exists x\,B}\ \exists\text{у}\ (1)$$

8. $\exists x\,A \lor \exists x\,B \vdash_{PN} \exists x\,(A \lor B)$

$$\dfrac{\exists x\,A \lor \exists x\,B \qquad \dfrac{[\exists x\,A]^1 \quad \dfrac{\dfrac{[A]^2}{A \lor B}}{\exists x(A \lor B)}}{\exists x(A \lor B)}\ \exists y\ (2) \qquad \dfrac{[\exists x\,B]^1 \quad \dfrac{\dfrac{[B]^3}{A \lor B}}{\exists x(A \lor B)}}{\exists x(A \lor B)}\ \exists\text{у}\ (3)}{\exists x(A \lor B)}\ \lor\text{у}\ (1)$$

9. $\forall x\,(A \supset B) \vdash_{PN} \forall x\,A \supset \forall x\,B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x\,A]^1}{A} \qquad \dfrac{\forall x(A \supset B)}{A \supset B}}{B}}{\forall x\,B}}{\forall x\,A \supset \forall x\,B}\ \supset\text{в}\ (1)$$

❍

УПРАЖНЕНИЕ

Докажите построением дерева PN-вывода (A, B — произвольные формулы ЯЛП):

1) если $\vdash_{PN} A \supset B$, то $\vdash_{PN} \forall x\, A \supset \forall x\, B$;

2) если $\vdash_{PN} A \supset B$, то $\vdash_{PN} \exists x\, A \supset \exists x\, B$;

3) если $\vdash_{PN} A \sim B$, то $\vdash_{PN} \forall x\, A \sim \forall x\, B$;

4) если $\vdash_{PN} A \sim B$, то $\vdash_{PN} \exists x\, A \sim \exists x\, B$.

§4.4. Принцип индукции для PN-выводов

Понятие сохранения PN-правилом отношения ρ (где ρ — отношение между конечными множествами формул и формулами ЯЛП) для всех бескванторных правил заключения можно определить аналогично тому, как это сделано для N-правил в § 2.6. Добавим четыре новых пункта для кванторных правил.

Определение ***сохранения*** PN-***правилом отношения*** **ρ**. Будем говорить, что:

1) *правило* ∀в *сохраняет отношение* ρ, если для любой формулы A и для любого множества формул Δ, ни в одну из формул которого не входит свободно x, выполняется условие $\dfrac{\Delta\rho A}{\Delta\rho\forall xA}$ (если $\Delta\rho A$, то $\Delta\rho\forall xA$);

2) *правило* ∃в *сохраняет отношение* ρ, если для любого множества формул Δ, любой формулы A и любого A-x-допустимого терма t выполняется условие $\dfrac{\Delta\rho A(t)}{\Delta\rho\exists xA}$;

3) *правило* ∀у *сохраняет отношение* ρ, если для любого множества формул Δ, любой формулы A и любого A-x-допустимого терма t выполняется условие $\dfrac{\Delta\rho\forall xA}{\Delta\rho A(t)}$;

4) *правило* ∃у *сохраняет отношение* ρ, если для любых множеств формул Δ_1 и Δ_2 и любой формулы C таких, что ни в одну формулу из множества $\Delta_2 \setminus \{A\}$ и в формулу C не входит свободно x, выполняется условие $\dfrac{\Delta_1\rho\exists xA;\ \Delta_2\rho C}{(\Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\}))\rho C}$.

Соответствующие свойства отношения PN-выводимости $\vdash_{\text{PN}}$ (из § 4.3) означают, что все PN-правила сохраняют отношение $\vdash_{\text{PN}}$, а соответствующие свойства отношения семантического следования в логике предикатов $\vDash_{\text{ЛП}}$ (из § 3.6) означают, что все PN-правила сохраняют отношение $\vDash_{\text{ЛП}}$. Все PN-правила сохраняют также отношение $\mathfrak{M}$-следования для любой интерпретации $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ.

Замечание. Можно доказать, что если отношение ρ рефлексивно, транзитивно и монотонно, то:

1) правило ∀у сохраняет отношение ρ тогда и только тогда, когда для любой формулы A и любого A-x-допустимого терма t выполняется условие $\forall x A \rho A(t)$;

2) правило ∃в сохраняет отношение ρ тогда и только тогда, когда для любой формулы A и любого A-x-допустимого терма t выполняется условие $A(t) \rho \exists x A$;

3) правило ∃у сохраняет отношение ρ тогда и только тогда, когда для любых Δ, A и C таких, что x не входит свободно ни в одну формулу из Δ и в формулу C, выполняется $\dfrac{\Delta, A \rho C}{\Delta, \exists x A \rho C}$. ❍

В § 2.6 сформулирован и доказан принцип индукции для пропозициональных систем естественного вывода. Использование этого принципа позволило существенно упростить доказательства многих важных теорем о свойствах таких систем.

Сформулируем и докажем теперь аналогичный принцип индукции для предикатных систем естественного вывода, суть которого заключается в следующем:

➤➤ При определенных условиях на отношение ρ, *множество зеленых листьев всякого дерева* PN-*вывода находится в отношении* ρ *с его корнем.*

! **ТЕОРЕМА** (*принцип индукции для* PN-*выводов*, *первая форма*). Пусть ρ – отношение между конечными множествами формул и формулами ЯЛП.

Если 1) ρ рефлексивно и монотонно,

и 2) все PN-правила сохраняют отношение ρ,

то для любых Δ, F и любого PN-Δ-F-вывода выполняется $\Delta \rho F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать возвратной индукцией по натуральному параметру k (высоте дерева) следующее утверждение:

Каковы бы ни были натуральное число k, множество формул Δ, формула F и дерево PN-Δ-F-*вывода высоты k, выполняется* $\Delta\rho F$.

Символически это утверждение можно записать так:

$$(k)\ (\mathcal{D})\ (\Delta)\ (F)\ (\mathcal{D} = \mathcal{D}_F^\Delta\ \&\ h(\mathcal{D}) = k \to \Delta\rho F).$$

Базис индукции. Пусть $\mathcal{D}_F^\Delta$ есть PN-Δ-F-вывод высоты 0, т. е. $\mathcal{D}_F^\Delta$ есть формула F и $\Delta = \{F\}$. Тогда $\Delta\rho F$ в силу рефлексивности ρ.

Шаг индукции. Пусть k — произвольное натуральное число. Допустим, что для любых Δ и F и для любого PN-Δ-F-вывода, высота которого не превосходит k, имеет место $\Delta\rho F$ (*предположение индукции*).

Пусть Δ — произвольное множество формул, F — произвольная формула и $\mathcal{D}_F^\Delta$ — произвольный PN-Δ-F-вывод, высота которого равна $k + 1$. Докажем, что $\Delta\rho F$.

Рассмотрим все возможные случаи построения дерева $\mathcal{D}_F^\Delta$ в соответствии с индуктивным определением PN-Δ-F-вывода.

Рассуждения в пунктах, относящихся к бескванторным PN-правилам, аналогичны рассуждениям, проведенным для соответствующих правил при доказательстве принципа индукции для N_k-выводов (§ 2.6). Остается рассмотреть четыре случая кванторных правил:

1. Пусть $\mathcal{D}_F^\Delta$ получено по правилу $\forall$в, т. е. $\mathcal{D}_F^\Delta = \dfrac{\mathcal{D}_A^\Delta}{\forall xA}$, $F \rightleftharpoons \forall x\,A$ и переменная x не входит свободно ни в одну формулу из Δ. Тогда высота $\mathcal{D}_A^\Delta$ равна k и, согласно предположению индукции, $\Delta\rho A$. Отсюда, поскольку правило $\forall$в сохраняет ρ, получаем $\Delta\rho\forall xA$, т. е. $\Delta\rho F$.

2. Пусть $\mathcal{D}_F^\Delta$ получено по правилу $\exists$в, т. е. $\mathcal{D}_F^\Delta = \dfrac{\mathcal{D}_{A(t)}^\Delta}{\exists xA}$, $F \rightleftharpoons \exists x\,A$ и терм t — A-x-допустим. Тогда высота $\mathcal{D}_{A(t)}^\Delta$ равна k, а значит, согласно предположению индукции, $\Delta\rho A(t)$. Отсюда, поскольку правило $\exists$в сохраняет ρ, получаем $\Delta\rho\exists xA$, т. е. $\Delta\rho F$.

3. Случай правила ∀у рассматривается аналогично п. 2.

4. Пусть дерево вывода $\mathcal{D}_F^{\Delta}$ получено с помощью правила ∃у, т. е. $\mathcal{D}_F^{\Delta} = \dfrac{\mathcal{D}_{\exists xA}^{\Delta_1} \quad \mathcal{D}_C^{\Delta_2}}{C}$, переменная x не входит свободно ни в одну формулу из множества $\Delta_2 \setminus \{A\}$ и в формулу C, $F \rightleftharpoons C$, $\Delta = \Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\})$. Тогда высоты деревьев $\mathcal{D}_{\exists xA}^{\Delta_1}$ и $\mathcal{D}_C^{\Delta_2}$ не превосходят k, а значит, согласно предположению индукции, $\Delta_1 \rho \exists xA$ и $\Delta_2 \rho C$. Отсюда, поскольку правило ∃у сохраняет ρ, получаем $\Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\}) \rho C$, т. е. $\Delta \rho F$.

Этим завершается рассмотрение всех возможных случаев построения дерева $\mathcal{D}_F^{\Delta}$ и доказательство теоремы. ❐

★ Условие монотонности отношения ρ используется для пунктов, относящихся к бескванторным правилам (см. доказательство принципа индукции для N_c-выводов, § 2.6). Если немного подкорректировать *определение понятия сохранения* PN-*правилами отношения* ρ в соответствии с утверждениями I—IV § 2.6, отмеченными ★, можно совсем отказаться от требования монотонности в формулировке принципа индукции в первой форме. ✩

Будем говорить, что ***отношение*** PN-***выводимости согласовано с отношением*** ρ, если для любого конечного множества формул Γ и любой формулы F из выводимости $\Gamma \vdash_{PN} F$ следует $\Gamma \rho F$, т. е. если

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{PN} F \to \Gamma \rho F).$$

Следствием принципа индукции для PN-выводов в первой форме является следующая теорема, которая существенно облегчает доказательство утверждений вида: «Каковы бы ни были конечное множество формул Γ и PN-выводимая из Γ формула F, множество формул Γ находится в отношении ρ с F» или, другими словами: «Отношение PN-выводимости согласовано с отношением ρ».

! **ТЕОРЕМА** (*принцип индукции для* PN-*выводов*, *вторая форма*).
Если 1) ρ рефлексивно и монотонно,
и 2) все PN-правила сохраняют отношение ρ,
то отношение PN-выводимости согласовано с отношением ρ.

Доказательство. Пусть Γ и F — такие, что $\Gamma \vdash_{PN} F$, а $\mathcal{D}_F^{\Delta}$ — PN-Δ-F-вывод такой, что $\Delta \subseteq \Gamma$. Тогда, в силу первой формы принципа индукции для PN-выводов, $\Delta\rho F$. Отсюда, в силу монотонности ρ, делаем вывод, что $\Gamma\rho F$. ❐

Благодаря принципу индукции для PN-выводов (во второй форме) получаем *достаточное условие для согласованности отношения* $\vdash_{\text{PN}}$ *с рефлексивным и монотонным отношением* ρ. Таким условием является условие сохранения отношения ρ всеми PN-правилами.

Аналогично случаю пропозициональных систем, использование принципа индукции для PN-выводов существенно упрощает доказательство многих важных теорем о свойствах предикатных систем.

Теперь введем понятие производного PN-правила аналогично тому, как это было сделано для систем N_k и N_i.

! Схему R называют *производным* PN-*правилом*, если она сохраняет отношение PN-выводимости.

Аналогично пропозициональному случаю легко доказать, что прямая схема $\dfrac{\mathcal{F}_1 \ldots \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}}$ является производным PN-правилом тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \vdash_{\text{PN}} \mathcal{F}$.

Согласно этому критерию, можно доказать построением соответствующих деревьев PN-вывода, что, например, следующие схемы являются производными PN-правилами (A, B, C – произвольные формулы ЯЛП):

1) $\dfrac{A(t) \quad \forall x\,(A(x) \supset B(x))}{B(t)}$, где терм t $A{\supset}B$-x-допустим;

2) $\dfrac{\forall x\,(A(x) \supset B(x)) \quad \neg B(t)}{\neg A(t)}$, где терм t $A{\supset}B$-x-допустим;

3) $\dfrac{\forall x\,(C \supset A)}{C \supset \forall x A}$, где x не входит свободно в C;

4) $\dfrac{\forall x\,(A \supset C)}{\exists x A \supset C}$, где x не входит свободно в C;

5) $\dfrac{\begin{matrix}[A(x)]\\ B \,\&\, \neg B\end{matrix}}{\neg\exists x A(x)}$ – с ограничениями, аналогичными ограничениям для правила ∃у.

Также можно построением деревьев вывода доказать, что для любых предикатных формул A и C, если переменная x не входит свободно в C, то:

1) $\dfrac{\vdash_{PN} C \supset A}{\vdash_{PN} C \supset \forall x A}$; 2) $\dfrac{\vdash_{PN} A \supset C}{\vdash_{PN} \exists x A \supset C}$; 3) $\dfrac{\vdash A(x) \supset B \& \neg B}{\vdash \neg \exists x\ A(x)}$.

§4.5. Основные характеристики предикатных систем

При построении предикатной системы естественного вывода в качестве языка системы можно взять любой фрагмент ЯЛП, сохранив те же правила заключения. Предикатную систему с языком ЯЛП$_\sigma$ будем обозначать через P$_\sigma$N. Для всякой такой системы справедливы все утверждения, доказанные выше для системы PN, в частности справедлив принцип индукции для P$_\sigma$N-выводов.

Систему P$_\sigma$N называют ***семантически корректной***, если всякая P$_\sigma$N-выводимая формула является общезначимой.

Систему P$_\sigma$N называют ***противоречивой,*** если существует формула ЯЛП$_\sigma$, выводимая в P$_\sigma$N вместе со своим отрицанием, и *непротиворечивой*, если такой формулы не существует.

! **ТЕОРЕМА** (*о семантической корректности систем* P$_\sigma$N). Всякая P$_\sigma$N-выводимая формула является общезначимой.

Доказательство. Сначала докажем, что отношение P$_\sigma$N-выводимости согласовано с отношением семантического следования в ЛП. Действительно, во-первых, отношение $\models_{ЛП}$ рефлексивно и монотонно. Во-вторых, согласно свойствам семантического следования в ЛП, все P$_\sigma$N-правила сохраняют отношение $\models_{ЛП}$ (см. § 3.6). Следовательно, в силу принципа индукции для P$_\sigma$N-выводов (во второй форме), отношение P$_\sigma$N-выводимости согласовано с отношением семантического следования в логике предикатов:

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{P_\sigma N} F \to \Gamma \models_{ЛП} F).$$

Отсюда при пустом Г получаем

$$(F)\ (\vdash_{P_\sigma N} F \rightarrow\ \models F),$$

что и требовалось. ❐

➤➤ **Замечание 1**. Как уже отмечалось, отказ от ограничений в пунктах **(P_1)−(P_4)** определения PN-Δ-*F*-вывода ведет к потере семантической корректности системы. ❍

СЛЕДСТВИЕ. Всякая предикатная система $P_\sigma N$ непротиворечива.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что система $P_\sigma N$ противоречива, и пусть формула F такая, что $\vdash_{P_\sigma N} F$ и $\vdash_{P_\sigma N} \neg F$. Тогда, по теореме о семантической корректности системы $P_\sigma N$, формулы F и $\neg F$ обе общезначимы, что невозможно. Следовательно, система $P_\sigma N$ непротиворечива. ❐

Синтаксическое доказательство непротиворечивости системы PN

Приведенное доказательство непротиворечивости всякой системы $P_\sigma N$, опирающееся на семантическую корректность этой системы, носит семантический характер. В связи с этим более ценным является следующее синтаксическое доказательство непротиворечивости всякой системы $P_\sigma N$.

! **ТЕОРЕМА.** Всякая предикатная система $P_\sigma N$ непротиворечива.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим индуктивно отображение h множества формул ЯЛП$_\sigma$ во множество формул ЯЛВ:

Базис индукции. Каковы бы ни были n-местный предикатный символ P_k^n (n, k = 1, 2, ...) и термы ЯЛП$_\sigma$ $t_1, ..., t_n$,

$$h(P_k^n(t_1, ..., t_n)) = p_1,$$

где p_1 − пропозициональная переменная.

Шаг индукции. Пусть A и B − произвольные формулы ЯЛП$_\sigma$ и $h(A)$, $h(B)$ определены. Тогда:

а) $h(A \oplus B) = h(A) \oplus h(B)$, где $\oplus$ есть любая из связок &, $\vee$, $\supset$;

б) $h(\neg A) = \neg h(A)$;

в) $h(\forall x\, A) = h(A)$;

г) $h(\exists x\, A) = h(A)$.

Говоря неформально, для всякой формулы A формула $h(A)$ получается из A «стиранием» кванторов и заменой каждой элементарной формулы на пропозициональную переменную p_1.

П р и м е р. $h(\exists x_1 P_1^1(x_1) \supset \forall x_2 \neg P_2^2(c_1, f_1^1(x_2))) = p_1 \supset \neg p_1$. ❍

Теперь докажем, что:

1) $h((A)_t^x) = h(A)$ для любых переменной x, терма t и формулы A;

2) если $\Gamma \vdash_{PN} A$, то $h(\Gamma) \vdash_{N_к} h(A)$ для любой формулы A и любого множества Γ формул ЯЛП$_\sigma$, где $h(\Gamma) \leftrightharpoons \{h(F) \mid F \in \Gamma\}$;

3) если $\vdash_{PN} A$, то $\vdash_{N_к} h(A)$ для любой формулы A ЯЛП$_\sigma$.

Доказательство утверждения п. 1 проведем индукцией по построению формулы ЯЛП$_\sigma$. Если A – элементарная формула, то $(A)_t^x$ – также элементарная формула. Следовательно, согласно определению отображения h (базис), $h((A)_t^x) = p_1$ и $h(A) = p_1$. Пусть A и B – произвольные формулы ЯЛП$_\sigma$ и пусть $h((A)_t^x) = h(A)$, $h((B)_t^x) = h(B)$ (предположение индукции). Тогда $h((A \oplus B)_t^x) = h((A)_t^x \oplus (B)_t^x) = h((A)_t^x) \oplus h((B)_t^x) = h(A) \oplus h(B) = h(A \oplus B)$, где $\oplus$ – любая из связок &, $\vee$, $\supset$. Для формулы $\neg A$ рассуждение проводится аналогично.

Перейдем к формулам с внешним вхождением квантора общности. Если квантор берется по той же переменной x, вместо которой подставляется терм t, т. е. формула имеет вид $\forall x\, A$, то $(\forall x\, A)_t^x = \forall x\, A$, а значит, $h((\forall x\, A)_t^x) = h(\forall x\, A) = h(A)$. Если квантор берется по какой-нибудь переменной y, отличной от x, то, согласно определению подстановки терма в формулу, $(\forall y\, A)_t^x = \forall y\, (A)_t^x$. Тогда $h((\forall y\, A)_t^x) = h(\forall y (A)_t^x) = h((A)_t^x) = h(A)$.

Для квантора $\exists$ рассуждение проводится аналогично.

Для доказательства утверждения 2 воспользуемся принципом индукции для PN-выводов (во второй форме). Отношение ρ зададим следующим образом: каковы бы ни были формула A и множество формул Γ языка ЯЛП$_\sigma$

$$\Gamma \rho A \xleftrightarrow{def} h(\Gamma) \vdash_{N_к} h(A).$$

Поскольку отношение $\vdash_{N_к}$ рефлексивно и монотонно, то ρ также рефлексивно и монотонно. Остается проверить, что все PN-правила сохраняют отношение ρ. Рассмотрим правило &в. Допустим, что $h(\Gamma) \vdash_{N_к} h(A)$ и $h(\Gamma) \vdash_{N_к} h(B)$. Тогда, в силу свойств отношения N_k-выводимости, $h(\Gamma) \vdash_{N_к} h(A)$ & $h(B)$. Согласно определению h, имеем $h(A)$ & $h(B) = h(A$ & $B)$. Следовательно, $h(\Gamma) \vdash_{N_к} h(A$ & $B)$. Для остальных бескванторных правил рассуждение проводится аналогично.

Перейдем к кванторным правилам. Сначала рассмотрим правило $\forall$в. Пусть x не входит свободно ни в одну формулу из Δ, и $h(\Delta) \vdash_{N_к} h(A)$. Тогда, поскольку $h(\forall x\ A) = h(A)$, выполняется $h(\Delta) \vdash_{N_к} h(\forall x\ A)$.

Перейдем к правилу $\exists$в. Пусть $h(\Delta) \vdash_{N_к} h((A)_t^x)$. Согласно определению отображения h, $h((A)_t^x) = h(A)$ и $h(\exists x\ A) = h(A)$. Следовательно, $h(\Delta) \vdash_{N_к} h(\exists x\ A)$.

Теперь рассмотрим правило $\forall$у. Пусть $h(\Delta) \vdash_{N_к} h(\forall x\ A)$. Тогда $h(\Delta) \vdash_{N_к} h((A)_t^x)$, поскольку $h(\forall x\ A) = h(A)$ и $h((A)_t^x) = h(A)$.

Наконец, рассмотрим правило $\exists$у. Пусть $h(\Delta_1) \vdash_{N_к} h(\exists x\ A)$ и $h(\Delta_2) \vdash_{N_к} h(C)$. Докажем, что $h(\Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\})) \vdash_{N_к} h(C)$. Рассмотрим два случая: $A \in \Delta_2$ и $A \notin \Delta_2$. В случае, когда $A \notin \Delta_2$, справедливы равенства $\Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\}) = \Delta_1 \cup \Delta_2$ и $h(\Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\})) = h(\Delta_1) \cup h(\Delta_2)$. Поскольку $h(\Delta_2) \vdash_{N_к} h(C)$, то и $h(\Delta_1) \cup h(\Delta_2) \vdash_{N_к} h(C)$, а значит, и $h(\Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\})) \vdash_{N_к} h(C)$. Рассмотрим случай, когда $A \in \Delta_2$. Заметим, что поскольку $h(\exists x\ A) = h(A)$, то $h(\Delta_1) \vdash_{N_к} h(A)$. Обозначим через $\dfrac{h(\Delta_1)}{\overline{h(A)}}$ дерево N_k-вывода, соответствующее этой выводимости, а через $\dfrac{h(\Delta_2)}{\overline{h(C)}}$ – дерево N_k-вывода, соответствующее выводимости $h(\Delta_2) \vdash_{N_к} h(C)$. Представим множество Δ_2 следующим образом: $\Delta_2 = \{A\} \cup (\Delta_2 \setminus \{A\})$, т. е. выделим лист A. Очевидно, $h(\Delta_2) = \{h(A)\} \cup (h(\Delta_2) \setminus \{h(A)\})$. Это позволяет дерево вывода $\dfrac{h(\Delta_2)}{\overline{h(C)}}$ представить так: $\dfrac{h(A) \quad h(\Delta_2) \setminus \{h(A)\}}{\overline{h(C)}}$. Надстроив в этом дереве над формулой $h(A)$ дерево N_k-вывода $\dfrac{h(\Delta_1)}{\overline{h(A)}}$, получим следующее дерево N_k-вывода:

$$\dfrac{\dfrac{h(\Delta_1)}{\overline{h(A)}} \quad h(\Delta_2) \setminus \{h(A)\}}{\overline{h(C)}}$$

Таким образом, $h(\Delta_1) \cup (h(\Delta_2) \setminus \{h(A)\}) \vdash_{N_к} h(C)$. Поскольку $h(\Delta_1) \cup (h(\Delta_2) \setminus \{h(A)\}) = h(\Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\}))$, получаем требуемую выводимость: $h(\Delta_1 \cup (\Delta_2 \setminus \{A\})) \vdash_{N_к} h(C)$.

Наконец, утверждение п. 3 получаем из п. 2 при $\Gamma = \varnothing$.

Теперь завершим доказательство непротиворечивости $P_\sigma N$, рассуждая приведением к нелепости. Предположим, что система $P_\sigma N$ противоречива. Пусть F – формула сигнатуры σ такая, что $\vdash_{PN} F$ и $\vdash_{PN} \neg F$. Тогда, в силу только что доказанного утверждения п. 3, $\vdash_{N_к} h(F)$ и $\vdash_{N_к} \neg h(F)$, что невозможно, поскольку система N_k непротиворечива. ❒

УПРАЖНЕНИЕ

Выясните, будет ли противоречивой система, которая отличается от PN тем, что в определении дерева вывода отсутствуют ограничения на применение кванторных правил.

Теорема о полноте PN

Ранее было доказано, что всякая $P_\sigma N$-доказуемая формула является общезначимой. Верно ли обратное? Другими словами, достаточно ли полон список $P_\sigma N$-правил для того, чтобы для всякой общезначимой формулы можно было построить дерево $P_\sigma N$-вывода этой формулы с пустым множеством зеленых листьев? Оказывается, что ответ на этот вопрос положительный. Этот результат был получен К. Гёделем для классического исчисления предикатов гильбертовского типа, равнообъемного классической предикатной системе естественного вывода. Еще раз отметим, что теорема о полноте относительно класса общезначимых формул имеет место именно для классической предикатной системы. Соответствующее утверждение для интуиционистской предикатной системы неверно.

! **ТЕОРЕМА.** (*о семантической полноте* $P_\sigma N$). Всякая общезначимая формула $ЯЛП_\sigma$ является $P_\sigma N$-доказуемой[1].

Теорема приводится без доказательства, поскольку доказательство ее весьма сложное и выходит за рамки курса.

Объединяя теоремы о семантической корректности и семантической полноте $P_\sigma N$, получаем следующее утверждение, обычно и называемое *теоремой Гёделя о полноте классического исчисления предикатов*[2]: для всякой предикатной системы $P_\sigma N$ в ней доказуемы те и только те формулы $ЯЛП_\sigma$, которые общезначимы.

Другими словами, класс $P_\sigma N$-доказуемых формул совпадает с классом общезначимых формул $ЯЛП_\sigma$.

Неразрешимость PN. Теорема Чёрча

! Систему $P_\sigma N$ называют ***разрешимой системой,*** если существует алгоритм, который по всякой формуле $ЯЛП_\sigma$ позволяет определить, является ли эта формула $P_\sigma N$-доказуемой.

Ранее (см. § 2.7) было установлено, что пропозициональная система N_k разрешима. Оказывается, что аналогичное утверждение для классической системы PN неверно.

Обозначим через P_0N предикатную систему, языком которой служит язык *чистой логики предикатов* – язык, содержащий все предикатные символы ЯЛП, но не содержащий функциональных символов и предметных констант. Систему P_0N называют *чистым исчислением предикатов*. Систему PN, язык которой содержит все предикатные символы, все функциональные символы и все предметные константы называют также *насыщенным исчислением предикатов*.

---

[1] Найти доказательство теоремы о полноте можно, например, в [3] или [10].

[2] Традиционно теоремой Гёделя о полноте называют аналогичное утверждение для исчисления предикатов гильбертовского типа.

❗ **ТЕОРЕМА** (*Чёрч*). Системы P_0N и PN неразрешимы.

Доказательство этой теоремы использует средства теории алгоритмов и выходит за рамки программы курса математической логики[1)].

Замечание 2. Можно доказать, что чистое исчисление одноместных предикатов (т. е. такое исчисление, сигнатура языка которого содержит все одноместные предикатные символы и только их) разрешимо. ❍

§4.6. Исчисления предикатов гильбертовского типа

Классическое исчисление предикатов *гильбертовского типа* $P_\sigma K$ задается следующим образом. Языком исчисления $P_\sigma K$ служит ЯЛП$_\sigma$. Бесконечное множество аксиом задается, во-первых, схемами аксиом классического исчисления высказываний K (см. § 2.13) и, во-вторых, каковы бы ни были формула A ЯЛП$_\sigma$, переменная x и A-x-допустимый терм t, являются аксиомами следующие формулы:

$$\forall x\, A \supset A(t), \quad A(t) \supset \exists x\, A.$$

Исчисление $P_\sigma K$ имеет следующие три правила вывода:

$$1)\ \frac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \supset \mathcal{B}}{\mathcal{B}}; \quad 2)\ \frac{C \supset \mathcal{A}}{C \supset \forall x \mathcal{A}}; \quad 3)\ \frac{\mathcal{A} \supset C}{\exists x \mathcal{A} \supset C},$$

где в правилах 2 и 3 переменная x не входит свободно в C.

Определение $P_\sigma K$-Г-вывода и принцип индукции для $P_\sigma K$-Г-выводимых формул формулируются аналогично тому, как это делалось для исчисления высказываний K (см. § 2.13).

Используя принципы индукции для $P_\sigma N$-выводов и для $P_\sigma K$-Г-выводимых формул, можно доказать, что системы $P_\sigma K$ и $P_\sigma N$ (т. е. $P_\sigma N_k$) равнообъемны, аналогично тому, как была доказана равнообъемность систем K и N_k. Отсюда получаем, что при всяком σ исчисление предикатов $P_\sigma K$ семантически корректно, непротиворечиво, семантически полно. Впрочем, все эти результаты можно получить независимо от аналогичных результатов для системы

[1)] Найти доказательство неразрешимости исчисления предикатов можно, например, в [10] или [3].

$P_\sigma N$, что обычно и делается, если исчисление $P_\sigma K$ взято за основу при изложении теории доказательств (см., например, [10], [7]).

Замечание. Теорему дедукции в том виде, в каком она имеет место для исчисления высказываний K, на случай исчисления предикатов PK перенести нельзя. Формулировку и доказательство модификации теоремы дедукции для исчисления предикатов PK можно найти во всех традиционных учебниках по математической логике, где исчисления гильбертовского типа взяты за основу изложения ([10], [7]). Слабая форма теоремы дедукции для PK такова: если формула A замкнута и $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$. ○

§4.7. Анализ логической структуры доказательств

Рассмотрим примеры доказательств, представленных в виде дерева. Это позволит для каждого из доказательств выявить характер логических взаимосвязей между его членами и поможет проанализировать его логическую структуру.

П р и м е р 1. Рассмотрим доказательство одного из свойств делимости целых чисел.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если хотя бы одно из двух чисел a и b делится на c, то их произведение ab делится на c.

Символически это утверждение записывают так:

$$c \mid a \vee c \mid b \to c \mid ab.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c \mid a$ или $c \mid b$. Докажем разбором случаев, что тогда $c \mid ab$. Допустим, что $c \mid a$. Согласно определению, это означает, что найдется такое k, что $a = kc$. Пусть k_0 такое число, что $a = k_0c$, тогда $ab = (k_0c)b$, а значит, $ab = (k_0b)c$. Следовательно, $c \mid ab$. При допущении $c \mid b$ аналогично доказывается, что $c \mid ab$. Таким образом, в обоих случаях $c \mid ab$. ❐

Теперь, восстановив пропущенные ссылки и логические переходы, представим это доказательство в виде дерева.

Сначала отобразим только рассуждение разбором случаев:

$$\dfrac{\dfrac{[c\mid a\vee c\mid b]^1 \quad \dfrac{[c\mid a]^2}{\overline{c\mid ab}} \quad \dfrac{[c\mid b]^2}{\overline{c\mid ab}}}{c\mid ab}\,{\scriptstyle \vee\text{у}\ (2)}}{c\mid a\vee c\mid b\to c\mid ab}\,{\scriptstyle \supset\text{в}\ (1)} \qquad (1)$$

Дереву (1) соответствует следующее дерево формул, т. е. можно считать, что дерево (1) построено по следующей схеме:

$$\dfrac{\dfrac{[A\vee B]^1 \quad \dfrac{[A]^2}{C} \quad \dfrac{[B]^2}{C}}{C}\;{\scriptstyle \vee\text{у }(2)}}{A\vee B\supset C}\;{\scriptstyle \supset\text{в }(1)} \qquad (1')$$

Таким образом, в этом рассуждении были использованы два правила заключения: удаление дизъюнкции $\vee$у и введение импликации $\supset$в.

В дереве (1) были использованы обозначения $\dfrac{c\mid a}{c\mid ab}$ и $\dfrac{c\mid b}{c\mid ab}$ для деревьев вывода предложения $c \mid ab$ из допущений $c \mid a$ и $c \mid b$ соответственно.

Построим теперь первое из этих деревьев (второе строится аналогично):

$$\dfrac{\dfrac{c\mid a \quad \dfrac{\dfrac{}{c\mid a\leftrightarrow \exists k(a=kc)}}{c\mid a\to \exists k(a=kc)}}{\exists k(a=kc)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[a=k_0c]^3}{ab=(k_0c)b}}{ab=(k_0b)c}}{\exists k(ab=kc)} \quad \dfrac{\dfrac{}{\exists k(ab=kc)\leftrightarrow c\mid ab}}{\exists k(ab=kc)\to c\mid ab}}{c\mid ab}}{c\mid ab}\;{\scriptstyle (3)} \qquad (2)$$

При построении дерева (2) на последнем шаге было использовано правило удаления квантора существования $\exists$у.

В дереве (2) формулы $c\mid a \to \exists k\,(a = kc)$ и $\exists k\,(ab = kc) \to c\mid ab$ являются символическими записями утверждений, имеющих место в силу определения отношения делимости.

Кроме того, здесь используются следующие обозначения:

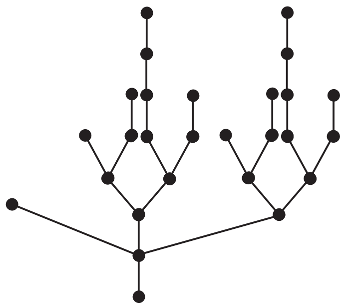
$$\dfrac{[a=k_0c]^3}{ab=(k_0c)b} \text{ для дерева } \dfrac{[a=k_0c]^3 \quad \dfrac{\dfrac{}{\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x=y\to xz=yz)}}{a=k_0c\to ab=(k_0c)b}}{ab=(k_0c)b}$$

и

$$\dfrac{ab=(k_0c)b}{ab=(k_0b)c} \text{ для дерева } \dfrac{ab=(k_0c)b \quad \dfrac{\dfrac{}{\forall x\,\forall y\,\forall z\,((xy)z=(xz)y)}}{(k_0c)b=(k_0b)c}}{ab=(k_0b)c}$$

Здесь в качестве допущений фигурируют формулы, выражающие известные свойства равенства и операции умножения.

Если деревья (1) и (2), приведенные выше, соединить воедино, то, очевидно, получится весьма громоздкое дерево. Приведем здесь лишь граф, отражающий структуру этого дерева как частично упорядоченного множества:



П р и м е р 2. Рассмотрим доказательство еще одного простого свойства делимости целых чисел.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если каждое из чисел a и b делится на c, то сумма $a + b$ делится на c.

Символически это утверждение записывают так:

$$c \mid a \ \&\ c \mid b \to c \mid (a + b).$$

В сокращенном (свернутом) виде, отражая лишь два последних шага, доказательство в виде дерева можно представить следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{c \mid b}{\exists k\ (b = kc)} \qquad \dfrac{\dfrac{c \mid a}{\exists k\ (a = kc)} \qquad \dfrac{[a = k_1c]^1\ \ [b = k_2c]^2}{c \mid (a + b)}}{c \mid (a + b)}\ \exists\text{у}\ (1)}{c \mid (a + b)}\ \exists\text{у}\ (2)$$

Здесь дважды использовано правило удаления квантора существования.

Приведем более подробное доказательство этого утверждения, представленное в виде дерева. В этом дереве сокращения, символизируемые двойной чертой, устраняются при помощи вставок, отражающих дистрибутивность умножения относительно сложения, транзитивность равенства, а также теорему о почленном сложении равенств.

$$\dfrac{\dfrac{c \mid b}{\exists k(b=kc)} \quad \dfrac{\dfrac{c \mid a}{\exists k(a=kc)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[a=k_1c]^1\ [b=k_2c]^2}{a=k_1c\ \&\ b=k_2c} \quad \dfrac{\overline{\forall a\forall b\forall c(a=b\ \&\ c=d\to a+c=b+d)}}{a=k_1c\ \&\ b=k_2c\to a+b=k_1c+k_2c}}{a+b=k_1c+k_2c} \quad \overline{k_1c+k_2c=(k_1+k_2)c}}{a+b=(k_1+k_2)c}}{\exists k(a+b=kc)} \quad \overline{\exists k(a+b=kc)\to c \mid (a+b)}}{c \mid (a+b)}}{c \mid (a+b)}\,(1)}{c \mid (a+b)}\,(2)$$

Глава 5

ТЕОРИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§5.1. Аксиоматические математические теории

➤ При построении аксиоматической математической теории одни утверждения объявляют исходными (и называют ***аксиомами*** или *постулатами* теории), а другие утверждения доказывают, выводят из исходных с помощью рассуждений по логическим правилам (такие утверждения называют ***теоремами*** этой теории). Такой метод построения математических теорий называется ***аксиоматическим методом***.

Впервые этот метод был использован в III веке до н. э. при изложении элементарной геометрии. В «Началах» Евклида изложение построено именно таким методом. Среди пяти постулатов Евклида наибольшую известность получил пятый постулат, точнее эквивалентное ему утверждение, известное как «аксиома о параллельных». В дальнейшем список аксиом уточнялся и дополнялся. Работа по аксиоматическому построению геометрии была завершена Гильбертом и Пашем в XIX веке. Многократно предпринимались попытки доказать аксиому о параллельных с помощью остальных аксиом. Однако эти усилия не увенчались успехом, что привело к мысли о независимости этой аксиомы (т. е. о невозможности такого доказательства).

Большую роль в развитии аксиоматического метода сыграло построение Н. И. Лобачевским в 1826 году неевклидовой геометрии[1)], один из постулатов которой был несовместим с аксиомой о параллельных. В дальнейшем средствами евклидовой геометрии были построены различные модели геометрии Лобачевского. Эти результаты показали, что аксиома о параллельных не зависит от остальных аксиом геометрии. Не менее важным явился вывод о

[1)] Независимо от Лобачевского к этому открытию пришел в 1832 году Я. Больяй.

том, что геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива геометрия Евклида.

Построение моделей неевклидовой геометрии показало, что при аксиоматическом построении теорий можно достаточно свободно выбирать аксиомы, не ориентируясь на описание какой-то конкретной предметной области, а затем рассматривать различные модели этих теорий.

Позже были предложены аксиоматические построения таких важнейших теорий, как арифметика натуральных чисел (см. § 5.6) и теория множеств (см. § 5.7).

Однако при таком построении математических теорий (неформальных теорий) не уточняются логические средства, используемые в доказательствах. Точное описание логического аппарата является одной из основных составляющих *формальных математических теорий*. Для математически точного описания логического аппарата теории используют формальный логический язык. Таким языком может служить язык первого порядка, на котором возможно в виде формул записать все аксиомы теории, а также ее теоремы. С помощью этого же языка можно также выразить используемые в доказательствах логические средства.

➤➤ Итак, существенными чертами, отличающими формальные теории от неформальных, являются:

1) использование формального языка;

2) точное описание логических средств теории.

Формальные теории, которые возникают при формализации неформальных аксиоматических математических теорий, относятся к так называемым *теориям первого порядка*[1]. Всякая теория первого порядка обычно строится на базе некоторого логического исчисления (исчисления предикатов). Если теория первого порядка строится на базе исчисления гильбертовского типа, то логические средства выражаются в ней в виде логических аксиом и правил вывода. Если теория первого порядка строится на базе систем естественного вывода, то все логические средства выражаются только в виде правил вывода (правил заключений). Теории первого порядка, построенные на базе систем естественного вывода, и будут изучаться в этой главе.

---

[1] Формальные теории также называют логико-математическими исчислениями или прикладными исчислениями.

§5.2. Теории первого порядка

➤ Всякая ***теория первого порядка***[1] Т определяется четырьмя компонентами: формальным языком $Я_Т$, множеством аксиом $Ax_Т$, правилами заключения и определением формального вывода. Языком всякой теории первого порядка Т служит некоторый язык первого порядка, а множество ее аксиом $Ax_Т$ представляет собой некоторое множество формул языка этой теории $Я_Т$, возможно пустое ($Ax_Т \subseteq \mathcal{F}r_{Я_Т}$). Аксиомы теории Т, т. е. формулы из множества $Ax_Т$, будем кратко называть **Т-*аксиомами***.

Правилами заключения всякой теории первого порядка Т служат правила классической предикатной системы естественного вывода PN (PN-правила)[2].

В изучаемых нами ранее дедуктивных логических системах аксиомы отсутствовали. Наличие аксиом в теориях первого порядка изменит определение дерева вывода. Сначала расширим понятие дерева формул.

Теперь будем считать, что для всякой формулы A графический объект $\overline{A}$ является деревом формул высоты 0.

Пусть Т – произвольная теория первого порядка, F – произвольная формула и Δ – произвольное конечное множество формул $Я_Т$. Введем понятие ***дерева*** Т-***вывода с корнем*** F ***и множеством зеленых листьев*** Δ или, кратко, *Т-Δ-F-вывода*.

Определение **Т-Δ-F-*вывода*** получают из определения PN-Δ-F-вывода (§ 4.2) заменой слов «формула ЯЛП» на слова «формула $Я_Т$», а «PN-Δ-F-вывод» – на «Т-Δ-F-вывод», а также добавлением второго пункта в базис индукции, в результате чего базис формулируется следующим образом.

[1] В теориях первого порядка, в отличие от теорий более высокого порядка, языками служат языки первого порядка. Большинство теорий высших порядков может быть переведено на язык первого порядка (ЯЛП). Таким образом, теорий первого порядка вполне достаточно для формализации известных математических теорий (см. [10], [3]).

[2] Как уже отмечалось, мы будем рассматривать только теории первого порядка на базе предикатных систем естественного вывода. Вопросы, связанные с теориями первого порядка на базе исчислений гильбертовского типа, изложены, например, в [10], [7], [11].

Базис индукции.

1.1. Всякая формула F языка $Я_Т$ есть Т-Δ-*F-вывод*, где $\Delta = \{F\}$.

1.2. Для всякой Т-аксиомы A дерево формул $\overline{A}$ есть Т-$\varnothing$-*A-вывод*.

Пусть F – произвольная формула языка $Я_Т$, а Γ – произвольное, быть может пустое, конечное множество формул языка $Я_Т$.

Будем говорить, что ***из множества формул*** Γ Т-***выводима формула*** F, и писать $\Gamma \vdash_T F$, если существует Т-Δ-F-вывод такой, что $\Delta \subseteq \Gamma$.

Формулу F языка $Я_Т$ будем называть Т-***теоремой*** (Т-*доказуемой* формулой) и писать $\vdash_T F$, если существует Т-$\varnothing$-*F-вывод*. Всякий Т-$\varnothing$-F-вывод будем называть Т-***доказательством*** формулы F.

➤ Очевидно, всякая Т-аксиома A является Т-доказуемой формулой, а ее Т-доказательство имеет вид $\overline{A}$.

В дальнейшем для краткости иногда будем говорить просто *теория* вместо *теория первого порядка*, если это не будет вызывать недоразумений.

➤ Поскольку у всех теорий первого порядка правила заключения и определение вывода одинаковы, можно считать, что каждая теория первого порядка полностью задается парой $< \sigma, Ax_T >$.

Задавая теорию, будем говорить, что Т – теория сигнатуры σ с множеством аксиом Ax_T, и записывать это следующим образом: $T = < \sigma, Ax_T >$.

Теории первого порядка называют также *элементарными теориями*.

Приведем несколько примеров теорий первого порядка, используя при задании сигнатуры символы, традиционно употребляемые для обозначения отношений, операций и констант в соответствующих неформальных теориях, а также привычную форму записи формул с этими символами.

➤ **Пример.** Всякая предикатная система естественного вывода $P_\sigma N$ является теорией первого порядка с пустым множеством аксиом. ❍

Пример. *Теория равенства* TE.

Сигнатура языка TE содержит единственный символ – двуместный предикатный символ = .

Аксиомы теории равенства:
(re′) $\forall x\,(x = x)$ (рефлексивность равенства);
(si′) $\forall x\,\forall y\,(x = y \supset y = x)$ (симметричность равенства);
(tr′) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x = y\ \&\ y = z \supset x = z)$ (транзитивность равенства). ❍

Замечание 1. Здесь и в следующих примерах для простоты записи вместо x_1, x_2, x_3 будем писать x, y, z соответственно. ❍

Пример. *Теория строгого упорядочения* SOrd.

Сигнатура языка этой теории содержит один двуместный предикатный символ: $\sigma = \{ < \}$; функциональные символы и предметные константы отсутствуют: $\sigma_f = \sigma_c = \varnothing$.

Аксиомами этой теории служат следующие формулы:

$\forall x\,\neg(x < x)$;

$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x < y\ \&\ y < z \supset x < z)$.

Эти формулы выражают соответственно иррефлексивность и транзитивность отношения строгого порядка. Легко доказать, что в этой теории доказуема формула $(x < y \supset \neg(y < x))$. ❍

Пример. *Теория частично упорядоченных множеств* Ord.

Сигнатура языка этой теории состоит из двух двуместных предикатных символов $=$ и $\leqslant$. Аксиомами этой теории являются следующие формулы:

$\forall x\,(x \leqslant x)$ (рефлексивность отношения $\leqslant$);

$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x \leqslant y\ \&\ y \leqslant z \supset x \leqslant z)$ (транзитивность отношения $\leqslant$);

$\forall x\,\forall y\,(x \leqslant y\ \&\ y \leqslant x \supset x = y)$ (антисимметричность отношения $\leqslant$);

$\forall x\,(x = x)$ (рефлексивность $=$);

$\forall x\,\forall y\,(x = y \supset y = x)$ (симметричность $=$);

$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x = y\ \&\ y = z \supset x = z)$ (транзитивность $=$);

$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x = y \supset (x \leqslant z \supset y \leqslant z))$ (левая подстановочность равенства);

$\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x = y \supset (z \leqslant x \supset z \leqslant y))$ (правая подстановочность равенства).

Теория *линейно упорядоченных множеств* LOrd получается из предыдущей теории добавлением к аксиомам новой формулы:

$\forall x\,\forall y\,(x \leqslant y \vee y \leqslant x)$. ❍

Пример. *Теория групп* TG (*элементарная теория групп*).

Сигнатура $Я_{TG}$ состоит из двуместного предикатного символа $=$, двуместного функционального символа $*$ и константы e.

Аксиомы TG:
(G_1) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,((x * y) * z = x * (y * z))$;
(G_2) $\forall x\,(x * e = x)$;
(G_3) $\forall x\,\exists y\,(x * y = e)$;
(re′) $\forall x\,(x = x)$;

(si′) $\forall x\, \forall y\, (x = y \supset y = x)$;

(tr′) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \,\&\, y = z \supset x = z)$;

(G_{ins}) $\forall x\, \forall y\, \forall z (x = y \supset x * z = y * z \,\&\, z * x = z * y)$.

Первая из этих аксиом выражает ассоциативность операции $*$, вторая характеризует e как нейтральный элемент, третья выражает существование для каждого элемента симметричного ему элемента. Следующие четыре аксиомы TG описывают равенство, выражая соответственно рефлексивность, симметричность, транзитивность и подстановочность равенства.

Теория *абелевых групп* TAG, кроме аксиом TG, имеет еще одну аксиому:

$$\forall x\, \forall y\, (x * y = y * x),$$

которая выражает коммутативность операции $*$. ❍

Замечание 2. Можно доказать, что в TG доказуемы следующие формулы:

1) $\forall x\, (e * x = x)$;

2) $\forall x\, \forall y\, (x * y = e \supset y * x = e)$;

3) $\forall x\, \exists! y\, (x * y = e)$;

4) $\forall x\, \forall y\, \exists! z\, (x * z = y)$. ❍

П р и м е р. *Теория полей* TF.

Сигнатура $Я_{TF}$ состоит из двуместного предикатного символа =, двуместных функциональных символов $\cdot$ и $+$, констант 0 и 1. Аксиомами TF являются следующие формулы:

(F_1) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x + y) + z = x + (y + z))$;

(F_2) $\forall x\, (x + 0 = x)$;

(F_3) $\forall x\, \exists y\, (x + y = 0)$;

(F_4) $\forall x\, \forall y\, (x + y = y + x)$;

(F_5) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$;

(F_6) $\forall x\, (x \cdot 1 = x)$;

(F_7) $\forall x\, \forall y\, (x \cdot y = y \cdot x)$;

(F_8) $\forall x\, (x \neq 0 \supset \exists y\, (x \cdot y = 1))$;

(F_9) $\neg(0 = 1)$.

Кроме того, аксиомами TF являются формулы (re′), (si′), (tr′) и формулы, выражающие подстановочность равенства:

$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \supset x \cdot z = y \cdot z \,\&\, z \cdot x = z \cdot y)$;

$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \supset x + z = y + z \,\&\, z + x = z + y)$. ❍

Замечание 3. Можно доказать, что в TF доказуемы, например, следующие формулы:

1) $\forall x\, (x \cdot 0 = 0)$;

2) $\forall x\, \forall y\, (x \cdot y = 0 \supset x = 0 \vee y = 0)$. ❍

Поскольку правилами заключения всякой теории T служат PN-правила, отношение T-выводимости $\vdash_{\mathrm{T}}$ обладает теми же свойствами, что и отношение $\vdash_{\mathrm{PN}}$ (см. § 4.3).

ТЕОРЕМА (*о замыкании*). Каковы бы ни были теория T и формула F языка этой теории, формула F является T-теоремой тогда и только тогда, когда T-теоремой является ее замыкание F'.

Символически это утверждение можно записать так:

$$(\mathrm{T})\ (F)\ (\vdash_{\mathrm{T}} F \leftrightarrow\ \vdash_{\mathrm{T}} F').$$

Доказательство. Достаточно доказать, что формула F является T-теоремой тогда и только тогда, когда T-теоремой является формула $\forall x\, F$:

$$(\mathrm{T})\ (F)\ (\vdash_{\mathrm{T}} F \leftrightarrow\ \vdash_{\mathrm{T}} \forall x\, F).$$

Пусть формула F является T-теоремой и $\overline{\overline{F}}$ – обозначение какого-либо T-$\varnothing$-F-вывода. Тогда дерево

$$\dfrac{\overline{\overline{F}}}{\forall x F}\,\forall\text{в}$$

является T-$\varnothing$-$\forall x F$-выводом, поскольку условие на применение правила $\forall$в выполнено (множество зеленых листьев дерева $\overline{\overline{F}}$ пусто, а значит, не содержит свободно x). Таким образом, $\vdash_{\mathrm{T}} \forall x\, F$.

Докажем обратное. Пусть T-теоремой является формула $\forall x F$ и $\overline{\overline{\forall x F}}$ – обозначение какого-нибудь T-$\varnothing$-$\forall x F$-вывода. Тогда дерево

$$\dfrac{\overline{\overline{\forall x\, F}}}{F}\,\forall\text{у}$$

является T-$\varnothing$-F-выводом, поскольку условие на применение правила $\forall$у выполнено (терм x является F-x-допустимым). Таким образом, $\vdash_{\mathrm{T}} F$. ❐

Обсудим содержательный смысл теоремы о замыкании. При формулировке математических теорем принято опускать содержательные кванторы общности (кванторные слова *любой, всякий* и т. п.), стоящие в начале утверждения. Так, например, формулировку теоремы Пифагора обычно начинают со слов: «В прямоугольном треугольнике...» При этом подразумевают следующее: «В *любом* прямоугольном треугольнике...» Фактически, опускание содержательных кванторов общности в начале утверждения является нормой (традицией) естественного математического языка. Можно считать, что теорема о замыкании является отражением этой нормы на формальном уровне.

Для теорий первого порядка имеет место принцип индукции для Т-выводов в двух формах.

ТЕОРЕМА (*принцип индукции для* Т-*выводов*, *первая форма*). Пусть Т — произвольная теория, ρ — рефлексивное и монотонное отношение между конечными множествами формул и формулами $Я_{\mathrm{T}}$. Тогда, если для всякой Т-аксиомы A выполняется $\varnothing\rho A$ и все PN-правила сохраняют отношение ρ, то для любых Δ, F и любого Т-Δ-F-вывода выполняется $\Delta\rho F$.

ТЕОРЕМА (*принцип индукции для* Т-*выводов*, *вторая форма*). Пусть Т — произвольная теория, ρ — рефлексивное и монотонное отношение между конечными множествами формул и формулами $Я_{\mathrm{T}}$. Тогда, если для всякой Т-аксиомы A выполняется $\varnothing\rho A$ и все PN-правила сохраняют отношение ρ, то отношение Т-выводимости согласовано с отношением ρ, т. е.

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_{\mathrm{T}} F \to \Gamma\rho F).$$

Доказательство принципа индукции для Т-выводов (в обеих формах) совершенно аналогично доказательству принципа индукции для PN-выводов.

Теорию Т′ той же сигнатуры (т. е. с тем же языком), что и теория Т, называют ***расширением*** теории Т, если всякая Т-теорема является Т′-теоремой:

$$(F)\ (\vdash_{\mathrm{T}} F \to \vdash_{\mathrm{T}'} F).$$

Всякая теория Т сигнатуры σ является расширением $\mathrm{P}_\sigma\mathrm{N}$ — теории с пустым множеством аксиом, поскольку всякая $\mathrm{P}_\sigma\mathrm{N}$-выводимая формула является Т-теоремой:

$$(\mathrm{T})\ (F)\ (\vdash_{\mathrm{P}_\sigma\mathrm{N}} F \to \vdash_{\mathrm{T}} F).$$

Действительно, если языком теории Т служит $ЯЛП_\sigma$, то, очевидно, всякое $\mathrm{P}_\sigma\mathrm{N}$-доказательство является Т-доказательством.

Теории T_1 и T_2 с одним и тем же языком[1] называют ***равнообъемными*** *теориями*, если совпадают классы их теорем.
Символически это определение можно записать так:

$$T_1 \sim T_2 \xleftrightarrow{def} (F)\,(\vdash_{T_1} F \leftrightarrow \vdash_{T_2} F).$$

Очевидно, теории T_1 и T_2 равнообъемны тогда и только тогда, когда каждая из них является расширением другой.

ТЕОРЕМА (*о расширении теории*)**.** Пусть T и T′ — теории одинаковой сигнатуры. Теория T′ является расширением теории T тогда и только тогда, когда каждая T-аксиома доказуема в T′.

Доказательство. Пусть теория T′ является расширением теории T. Тогда каждая T-аксиома является T-теоремой, а следовательно, и T′-теоремой.

Теперь докажем обратное. Допустим, что каждая T-аксиома является T′-теоремой, и докажем, что каждая T-теорема является T′-теоремой. Сначала докажем, что отношение $\vdash_T$ согласовано с отношением $\vdash_{T'}$. Воспользуемся принципом индукции для T-выводов во второй форме, взяв в качестве отношения ρ рефлексивное и монотонное отношение $\vdash_{T'}$. По условию для каждой T-аксиомы A выполняется $\vdash_{T'} A$, т. е. $\varnothing \rho A$. Кроме того, очевидно, все PN-правила сохраняют отношение T′-выводимости. Следовательно, отношение $\vdash_T$ согласовано с отношением $\vdash_{T'}$:

$$(\Gamma)\,(F)\,(\Gamma \vdash_T F \to \Gamma \vdash_{T'} F),$$

откуда при $\Gamma = \varnothing$ получаем, что

$$(F)\,(\vdash_T F \to \vdash_{T'} F),$$

т. е. теория T′ является расширением теории T. ❐

СЛЕДСТВИЕ 1 (*критерий равнообъемности теорий*). Теории первого порядка T_1 и T_2 (с одним и тем же языком) равнообъемны

[1] Понятия равнообъемных теорий и расширения теории можно ввести и для теорий с разными языками (см., например, [19]).

тогда и только тогда, когда каждая T_1-аксиома является T_2-теоремой и наоборот.

! СЛЕДСТВИЕ 2 (*теорема о замыкании аксиом*). Пусть Т — произвольная теория. Тогда:

1) если каждую незамкнутую Т-аксиому заменить на ее замыкание, то получится теория, равнообъемная данной;

2) если каждую Т-аксиому вида $\forall x\, A$ заменить на формулу A, то получится теория, равнообъемная данной.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из критерия равнообъемности и теоремы о замыкании. ❐

Аналогично при формулировке аксиом неформальной аксиоматической теории можно опускать неформальные кванторы общности, стоящие в начале аксиомы, или, наоборот, добавлять их, получая при этом равнообъемную теорию.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть A — произвольная формула языка теории Т. Теория Т + A равнообъемна теории Т тогда и только тогда, когда формула A является Т-теоремой:

$$(A)\ (\mathrm{T} + A \sim \mathrm{T} \leftrightarrow\ \vdash_{\mathrm{T}} A),$$

где Т + A — теория, полученная из Т добавлением к ее аксиомам формулы A.

Теперь докажем теорему, которая позволяет свести проблему доказуемости в теории Т + A к проблеме доказуемости в теории Т.

! ТЕОРЕМА (*первая теорема о редукции*). Пусть Т — теория первого порядка, F — произвольная формула $Я_{\mathrm{T}}$, A — произвольная *замкнутая* формула $Я_{\mathrm{T}}$. Формула F является (Т + A)-теоремой тогда и только тогда, когда F выводима в теории Т из формулы A, т. е. если A — *замкнута*, то

$$(F)\ (\vdash_{\mathrm{T}+A} F \leftrightarrow A \vdash_{\mathrm{T}} F).$$

Доказательство. Пусть F — произвольная формула, A — замкнутая формула $Я_{\mathrm{T}}$ и $\vdash_{\mathrm{T}+A} F$. Рассмотрим какой-либо (Т + A)-$\varnothing$-F-вывод. Если в нем формула A не используется в качестве аксиомы, то это дерево формул является также Т-$\varnothing$-F-выводом, а значит, $A \vdash_{\mathrm{T}} F$. Рассмотрим теперь случай, когда в (Т + A)-$\varnothing$-F-выводе формула A используется в качестве аксиомы.

Обозначим этот вывод через $\dfrac{\overline{A}}{\overline{\overline{F}}}$. Заменим в этом дереве каждое вхождение $\overline{A}$ — «накрытой» чертой формулы A, на вхождение формулы A, т. е. «раскроем» каждое вхождение формулы A. Получим дерево с зеленым листом A, которое обозначим через $\dfrac{A}{\overline{\overline{F}}}$. Для того чтобы утверждать, что полученное дерево формул является Т-$\{A\}$-F-выводом, необходимо проверить законность использования правил $\forall$в и $\exists$у, т. е. проверить, не нарушились ли ограничивающие условия при использовании этих правил. Проделанная операция могла повлечь расширение за счет формулы A множества Δ в случае правила $\forall$в и множества Δ_2 в случае правила $\exists$у. Однако, поскольку формула A замкнута, новых свободных вхождений переменных в формулы из соответствующих множеств не появится. Таким образом, $A \vdash_{\mathrm{T}} F$.

Докажем обратное. Пусть $A \vdash_{\mathrm{T}} F$. Обозначим через $\dfrac{A}{\overline{\overline{F}}}$ некоторый Т-$\{A\}$-F-вывод. Рассмотрим дерево, которое получается из дерева $\dfrac{A}{\overline{\overline{F}}}$ «накрытием» каждого вхождения зеленого листа A (если таковые имеются), т. е. заменой его на $\overline{A}$. Полученное в результате такой операции дерево обозначим $\dfrac{\overline{A}}{\overline{\overline{F}}}$. По сравнению с деревом $\dfrac{A}{\overline{\overline{F}}}$, при каждом применении кванторных правил в дереве $\dfrac{\overline{A}}{\overline{\overline{F}}}$ множества Δ и Δ_2 могут только уменьшиться. Следовательно, условия на применение кванторных правил не нарушатся. Таким образом, получено дерево (Т + A)-$\varnothing$-F-вывода, а значит, $\vdash_{\mathrm{T}+A} F$. ❐

Замечание 4. Более строго доказательство можно провести с помощью принципа индукции для выводов. ❍

Замечание 5. Условие замкнутости формулы A использовалось при доказательстве только одного из условных утверждений:

$$(F)\ (\vdash_{\mathrm{T}+A} F \rightarrow A \vdash_{\mathrm{T}} F).$$

Чтобы показать существенность этого условия, рассмотрим следующий пример. Пусть Т есть PN, A есть $P(x)$, а F есть $\forall x\ P(x)$. Очевидно, формула $\forall x P(x)$ выводима в теории PN + $P(x)$, как замыкание аксиомы. Однако $P(x) \nvdash_{\mathrm{PN}} \forall x\ P(x)$.

Обратное утверждение верно для любой формулы A:

$$(A)\ (F)\ (A \vdash_{\mathrm{T}} F \to \ \vdash_{\mathrm{T}+A} F).\ \bigcirc$$

В качестве следствий только что доказанной теоремы и теоремы о замыкании аксиом (Т + A ~ Т + A') получаем следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Т – теория первого порядка. Каковы бы ни были формулы F и A языка теории Т, формула F является теоремой теории Т + A тогда и только тогда, когда F Т-выводима из A'.

Символически:

$$(A)\ (F)\ (\ \vdash_{\mathrm{T}+A} F \leftrightarrow A' \vdash_{\mathrm{T}} F). \tag{1}$$

Замечание 6. Поскольку $A' \vdash_{\mathrm{T}} F$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{\mathrm{T}} A' \supset F$, утверждение (1) эквивалентно утверждению

$$(A)\ (F)(\vdash_{\mathrm{T}+A} F \leftrightarrow \ \vdash_{\mathrm{T}} A' \supset F).\ \bigcirc \tag{1$'$}$$

Пусть Т – теория сигнатуры σ, а Г – произвольное множество формул сигнатуры σ. Обозначим через Т + Г теорию, полученную из Т добавлением к ее аксиомам всех формул из множества Г. Тогда Т = PN + Ax_{T} для любой теории Т.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Т = $< \sigma, Ax_{\mathrm{T}} >$ – теория, все аксиомы которой – замкнутые формулы. Какова бы ни была формула F сигнатуры σ, формула F является теоремой теории Т тогда и только тогда, когда F PN-выводима из множества Ax_{T}[1)].

Символически:

$$(F)\ (\vdash_{\mathrm{T}} F \leftrightarrow Ax_{\mathrm{T}} \vdash_{\mathrm{PN}} F).$$

[1)] Если мы не хотим в данном следствии ограничиваться теориями с конечным множеством аксиом, то следует отказаться от условия конечности множества Г в определении отношения выводимости (при этом все свойства отношения выводимости сохранятся).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, во всякое дерево Т-$\varnothing$-F-вывода входит лишь конечное множество аксиом теории Т. Во-вторых, во всяком PN-Ax_T-F-выводе лишь конечное множество Т-аксиом является зелеными листьями этого дерева. Далее достаточно несколько раз применить следствие 1, перебирая в качестве формулы A одну за другой все Т-аксиомы, входящие в дерево Т-$\varnothing$-F-вывода[1]. ❐

! Теорию первого порядка Т называют ***противоречивой***, если существует формула F языка этой теории такая, что $\vdash_T F$ и $\vdash_T \neg F$, и ***непротиворечивой*** в противном случае.

Докажем еще одну важную теорему, устанавливающую связь между доказуемостью в Т замкнутой формулы F и противоречивостью теории Т + $\neg F$.

! **ТЕОРЕМА** (*вторая теорема о редукции* (*для непротиворечивости*)).

Для любой замкнутой формулы F языка $Я_T$ формула F является Т-теоремой тогда и только тогда, когда теория Т + $\neg F$ противоречива.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть F – произвольная замкнутая формула $Я_T$ и $\vdash_T F$. Тогда F доказуема и в расширении теории Т: $\vdash_{T+\neg F} F$. Кроме того, очевидно, $\vdash_{T+\neg F} \neg F$. Следовательно, теория Т + $\neg F$ противоречива.

Докажем обратное. Пусть F замкнута и теория Т + $\neg F$ противоречива. Докажем, что $\vdash_T F$. Пусть B – формула, выводимая в теории Т + $\neg F$ вместе со своим отрицанием: $\vdash_{T+\neg F} B$ и $\vdash_{T+\neg F} \neg B$. Поскольку F замкнута, по первой теореме о редукции $\neg F \vdash_T B$ и $\neg F \vdash_T \neg B$. Обозначим через $\dfrac{\neg F}{\overline{B}}$ и $\dfrac{\neg F}{\overline{\neg B}}$ соответствующие деревья Т-вывода. Тогда дерево

$$\cfrac{\cfrac{\dfrac{[\neg F]^1}{\overline{B}} \quad \dfrac{[\neg F]^1}{\overline{\neg B}}}{\neg\neg F}\ {\scriptstyle \neg\text{в}\ (1)}}{F}\ {\scriptstyle \neg\neg\text{у}}$$

является Т-$\varnothing$-F-выводом. Таким образом, $\vdash_T F$. ❐

---

[1] Следствие 2 показывает, что понятие *теории первого порядка* можно ввести иначе. Пусть Ax – произвольное множество замкнутых формул сигнатуры σ. *Теорией первого порядка с множеством аксиом* Ax можно называть класс всех формул, выводимых из Ax в $P_\sigma N$ (см., например, [18]).

Замечание 7. В первой части доказательства условие замкнутости формулы F не было использовано, т. е. справедливо следующее: для любой формулы F, если $\vdash_T F$, то теория $T + \neg F$ противоречива:

$$(F)\ (\vdash_T F \to T + \neg F \text{ противоречива}). ○$$

! **СЛЕДСТВИЕ 1.** Пусть F – произвольная формула языка теории Т. Формула F является Т-теоремой тогда и только тогда, когда теория $T + \neg F'$ противоречива (где $\neg F'$ – отрицание замыкания формулы F).

В символической записи:

$$(F)\ (\vdash_T F \leftrightarrow T + \neg F' \text{ противоречива}).$$

Иногда удобнее использовать другие, эквивалентные формы:

$$(F)\ (\nvdash_T F \leftrightarrow T + \neg F' \text{ непротиворечива});$$

$$(F)\ (\nvdash_T \neg F' \leftrightarrow T + F \text{ непротиворечива}).$$

Заметим, что последнее утверждение позволяет обосновать непротиворечивость всякой теории с одной аксиомой, если отрицание ее замыкания недоказуемо в PN. Например, непротиворечива каждая из теорий, единственной аксиомой которой является любая из следующих формул: $P_1^1(x)$, $\exists x P_1^1(x)$, $\exists x P_1^1(x) \supset \forall x P_1^1(x)$, где P_1^1 – одноместный предикатный символ.

Неразрешимым предложением *теории* Т называют всякую замкнутую формулу F языка этой теории такую, что ни сама F, ни ее отрицание $\neg F$ не являются Т-теоремами.

! **СЛЕДСТВИЕ 2** (*критерий неразрешимости предложения*). Пусть Т – произвольная теория, а F – замкнутая формула языка теории Т. Формулы F и $\neg F$ недоказуемы в Т тогда и только тогда, когда теории $T + F$ и $T + \neg F$ непротиворечивы:

$$\nvdash_T F \text{ и } \nvdash_T \neg F \leftrightarrow T + F \text{ и } T + \neg F \text{ непротиворечивы}.$$

Т-*аксиому* A называют ***зависимой*** *от остальных* Т-*аксиом*, если она является теоремой теории $T - A$, которую получают из Т удалением формулы A из множества Т-аксиом, т. е. если $\vdash_{T-A} A$.

Т-*аксиому* A называют ***независимой*** *от остальных* Т-*аксиом*, если она не является теоремой теории Т − A, т. е. если $\nvdash_{T\text{-}A} A$.

! **ТЕОРЕМА** (*критерий независимости* Т-*аксиомы*). Замкнутая аксиома A теории Т не зависит от остальных Т-аксиом тогда и только тогда, когда непротиворечива теория, которую получают из Т заменой аксиомы A на ее отрицание $\neg A$.

Доказательство. Пусть A – замкнутая аксиома теории Т. Согласно второй теореме о редукции, $\nvdash_{T\text{-}A} A$ тогда и только тогда, когда теория (Т − A) + $\neg A$ непротиворечива. ❐

СЛЕДСТВИЕ. Если аксиома A теории Т незамкнута, то она не зависит от остальных аксиом теории Т тогда и только тогда, когда теория (Т − A) + $\neg A'$ непротиворечива.

§5.3. Модели теорий первого порядка

Моделью теории первого порядка Т называют всякую интерпретацию $\mathfrak{M}$ языка $Я_T$, в которой истинны все Т-теоремы. Символически это можно записать так:

$$\mathfrak{M} - \text{модель } T \xleftrightarrow{def} (F)\ (\vdash_T F \to\ \vDash_{\mathfrak{M}} F).$$

Произвольную модель теории Т будем обозначать через $\mathfrak{M}_T$. Итак, каждая Т-теорема истинна во всякой модели теории Т:

$$(F)\ (\vdash_T F \to (\mathfrak{M}_T)\ (\vDash_{\mathfrak{M}_T} F)).$$

Поэтому, для того чтобы доказать, что формула F не является теоремой теории Т, достаточно построить такую модель $\mathfrak{M}$ теории Т, в которой формула F опровержима ($\nvDash_{\mathfrak{M}} F$).

Как доказать, что та или иная интерпретация $\mathfrak{M}$ языка теории Т является моделью этой теории? Оказывается, достаточно убедиться в том, что всякая Т-аксиома истинна в $\mathfrak{M}$.

! **ТЕОРЕМА** (*критерий модели теории*). Интерпретация $\mathfrak{M}$ языка $Я_Т$ является моделью теории Т тогда и только тогда, когда в ней истинны все Т-аксиомы.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ – интерпретация $Я_Т$.

Если интерпретация $\mathfrak{M}$ является моделью теории Т, то в ней истинны все Т-теоремы, в частности все Т-аксиомы.

Докажем обратное. Пусть все Т-аксиомы истинны в интерпретации $\mathfrak{M}$. Докажем, что в $\mathfrak{M}$ истинны все теоремы теории Т.

Сначала, используя принцип индукции для Т-выводов (во второй форме), докажем, что отношение $\vdash_T$ согласовано с отношением $\mathfrak{M}$-следования $\vDash_{\mathfrak{M}}$. Действительно, отношение $\vDash_{\mathfrak{M}}$ рефлексивно и монотонно, а все PN-правила сохраняют отношение $\mathfrak{M}$-следования $\vDash_{\mathfrak{M}}$ (см. § 3.6). Кроме того, если A – Т-аксиома, то по условию, $\vDash_{\mathfrak{M}} A$. Следовательно,

$$(\Gamma)\ (F)\ (\Gamma \vdash_T F \to \Gamma \vDash_{\mathfrak{M}} F).$$

Отсюда при $\Gamma = \varnothing$ получаем

$$(F)\ (\vdash_T F \to \vDash_{\mathfrak{M}} F),$$

т. е. $\mathfrak{M}$ – модель теории Т. ❒

Примеры.

1. Всякая интерпретация сигнатуры σ является моделью теории $P_\sigma N$, как теории с пустым множеством аксиом.
2. Всякое множество с отношением эквивалентности является моделью теории равенства TE.
3. Всякая группа является моделью теории групп TG.
4. Всякое поле является моделью теории полей TF. ❍

Теорема Гёделя о полноте

Какая связь существует между доказуемостью формулы F в теории Т и истинностью F в моделях этой теории? Мы уже знаем, что если $\vdash_T F$, то формула F истинна во всякой модели теории Т. Верно ли обратное? Прежде чем ответить на этот вопрос, сформулируем следующую очень важную теорему.

! **ТЕОРЕМА** (*о существовании модели*, Гёдель[1], 1930). Всякая непротиворечивая теория первого порядка имеет счетную модель.

Доказательство этой теоремы весьма сложно и выходит за рамки данного курса[2]. Однако ссылаться на эту теорему мы будем.

➤ Верно ли обратное: верно ли, что если теория Т имеет модель, то Т непротиворечива?

В подтверждение положительного ответа обычно приводят следующее рассуждение: если $\mathfrak{M}$ – модель Т, то, предположив, что $\vdash_{\mathrm{T}} F$ и $\vdash_{\mathrm{T}} \neg F$ для некоторой формулы F, получаем, что $\models_{\mathfrak{M}} F$ и $\models_{\mathfrak{M}} \neg F$, а это невозможно. Однако такое доказательство непротиворечивости теории Т, имеющей модель, носит относительный характер. В действительности доказано лишь то, что Т непротиворечива, если непротиворечива та неформальная теория, средствами которой построена модель Т.

Теперь, используя теорему о существовании модели, докажем теорему о полноте для теорий, также доказанную Гёделем в 1930 году[3].

! **ТЕОРЕМА** (*о полноте для теорий первого порядка*, Гёдель, 1930). Какова бы ни была формула F языка $Я_{\mathrm{T}}$, F является Т-теоремой тогда и только тогда, когда она истинна в любой модели теории Т.

Символически эту теорему можно записать следующим образом:

$$(F)\ (\vdash_{\mathrm{T}} F \leftrightarrow (\mathfrak{M}_{\mathrm{T}})\ (\models_{\mathfrak{M}_{\mathrm{T}}} F)),$$

где $\mathfrak{M}_{\mathrm{T}}$ – обозначение произвольной модели теории Т.

Доказательство. Если формула F является Т-теоремой, то согласно определению модели теории, F истинна в любой модели теории Т.

Докажем обратное утверждение, используя теорему о существовании модели. Пусть F – формула, истинная во всякой модели теории Т. Докажем, что $\vdash_{\mathrm{T}} F$. Допустим, что $\nvdash_{\mathrm{T}} F$. Тогда по теоре-

[1] Курт Гёдель (1906–1978) – австрийский логик, математик, внесший огромный вклад в развитие математической логики.

[2] Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [10] и [3]. Эту теорему часто рассматривают как одну из форм теоремы о полноте.

[3] Теорему о существовании модели часто также называют теоремой о полноте для теорий, поскольку можно доказать, что она эквивалентна теореме о полноте для теорий.

ме о замыкании $\nvdash_{\mathrm{T}} F'$. Отсюда следует, что теория $\mathrm{T} + \neg F'$ непротиворечива в силу второй теоремы о редукции. Следовательно, по теореме о существовании модели теория $\mathrm{T} + \neg F'$ имеет модель. Пусть $\mathfrak{M}$ – модель $\mathrm{T} + \neg F'$. В этой модели истинны все аксиомы T, а значит, $\mathfrak{M}$ является также моделью теории T. Следовательно, согласно условию, F истинна в этой модели T. Но тогда и ее замыкание F' истинно в $\mathfrak{M}$. Кроме того, формула $\neg F'$, как аксиома теории $\mathrm{T} + \neg F'$, также истинна в модели $\mathfrak{M}$ этой теории. Итак, мы получили, что в $\mathfrak{M}$ истинны как формула F', так и ее отрицание $\neg F'$, чего быть не может. Таким образом, $\vdash_{\mathrm{T}} F$. ❐

Рассматривая в качестве теории T теорию PN, как следствие получаем теорему Гёделя о полноте предикатной системы PN.

! **СЛЕДСТВИЕ.** Формула F ЯЛП является PN-доказуемой тогда и только тогда, когда она общезначима:

$$(F)\ (\vdash_{\mathrm{PN}} F \leftrightarrow\ \vDash_{\text{ЛП}} F).$$

Рассмотрим класс всех групп. Можно ли построить такую теорию первого порядка, которая описывала бы данный класс в следующем смысле: класс теорем этой теории совпадает с классом формул, истинных во всех группах?

Пусть зафиксирован некоторый класс $\mathcal{M}$ алгебраических систем – интерпретаций ЯЛП$_\sigma$. ***Элементарной теорией класса*** $\mathcal{M}$ называют теорию первого порядка, класс теорем которой совпадает с множеством формул ЯЛП$_\sigma$, истинных в каждой интерпретации из $\mathcal{M}$.

Например, теория первого порядка TG, согласно теореме Гёделя о полноте, представляет собой элементарную теорию класса всех групп.

Согласно теореме Гёделя о полноте, всякая непротиворечивая теория первого порядка является элементарной теорией некоторого класса алгебраических систем, а именно класса всех моделей этой теории. В то же время элементарную теорию какого-либо класса $\mathcal{M}$ можно рассматривать как теорию первого порядка, аксиомами которой являются все формулы, истинные в каждой интерпретации из $\mathcal{M}$. Однако всегда ставится вопрос о нахождении простой (например, конечной) аксиоматики для такой теории.

§5.4. Характеристики теорий первого порядка

К основным характеристикам теорий первого порядка будем относить непротиворечивость, эффективную аксиоматизированность, разрешимость и полноту. Представляют интерес и такие характеристики, как категоричность, независимость системы аксиом, дедуктивная полнота и полнота относительно модели.

! Напомним, что теорию первого порядка T называют ***противоречивой***, если существует формула языка этой теории такая, что она сама и ее отрицание являются T-теоремами, и ***непротиворечивой***, если такой формулы не существует.

Аналогично тому как это делалось для систем N_i и N_k (с помощью правила $\neg$у), можно доказать, что теория T противоречива тогда и только тогда, когда всякая формула $Я_T$ является T-теоремой.

Язык $Я_T$ теории T называют ***разрешимым языком***, если существует алгоритм, позволяющий по любому слову в алфавите $Я_T$ выяснить, является ли оно формулой $Я_T$.

Теорию первого порядка T (с разрешимым языком) называют ***эффективно аксиоматизированной***, если существует алгоритм, позволяющий по любой формуле F языка $Я_T$ выяснить, является ли она T-аксиомой (т. е. если разрешимо[1] множество ее аксиом).

Отметим, что все рассмотренные ранее теории являются эффективно аксиоматизированными.

Замечание 1. Можно доказать, что:

1) если теория T эффективно аксиоматизирована, то разрешимо понятие T-доказательства, т. е. существует алгоритм, позволяющий по любому дереву формул $Я_T$ выяснить, является ли оно T-доказательством;

2) если теория T эффективно аксиоматизирована, то множество T-теорем перечислимо[2].

---

[1] Подмножество E множества M называют ***разрешимым множеством***, если существует алгоритм, позволяющий по любому элементу множества M выяснить, принадлежит ли он множеству E.

[2] Говорят, что множество E ***перечислимо***, если $E = \varnothing$ или существует алгоритм $\mathfrak{B}$, перерабатывающий каждое натуральное число в некоторый элемент E, причем для каждого элемента x из E существует натуральное число n, которое $\mathfrak{B}$ перерабатывает в x.

Для доказательства этих утверждений требуются определенные знания из области теории алгоритмов, что выходит за рамки нашего курса. ❍

! Теорию первого порядка T (с разрешимым $Я_T$) называют ***разрешимой теорией***, если существует алгоритм, позволяющий по любой формуле F языка $Я_T$ определить, является ли она T-теоремой (т. е. если разрешимо множество ее теорем).

П р и м е р ы. Теория абелевых групп TAG, теория линейно упорядоченных множеств LOrd, теория равенства TE – разрешимые теории. Теория PN, теория групп TG – неразрешимые теории. ❍

! Теорию первого порядка T называют ***полной теорией***, если для любой замкнутой формулы F языка этой теории сама формула F или ее отрицание $\neg F$ являются T-теоремами, т. е. $\vdash_T F$ или $\vdash_T \neg F$[1]. В противном случае теорию называют ***неполной***.

Заметим, что требование замкнутости формулы F в определении полной теории является существенным.

ТЕОРЕМА. Всякая полная эффективно аксиоматизированная теория первого порядка разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть T – эффективно аксиоматизированная полная теория[2]. Построим алгоритм, разрешающий множество ее теорем. Пусть A – произвольная формула языка этой теории. Построим ее замыкание A'. Поскольку T – полная теория, то формула A' (замыкание формулы A) или ее отрицание $\neg A'$ являются T-теоремами. Множество T-теорем перечислимо (см. замечание 1). Перечисляя T-теоремы с помощью соответствующего алгоритма $\mathfrak{B}_T$, проверяем каждую теорему на совпадение ее с формулами A' и $\neg A'$. В силу теоремы о замыкании, если среди T-теорем встретилась формула A', то $\vdash_T A$, а если встретилась формула $\neg A'$, то $\nvdash_T A$. ❐

---

[1] Иногда, определяя полную теорию, требуют, чтобы теория была непротиворечивой.

[2] Предполагаем, что теория T непротиворечива, так как в противном случае в ней доказуема любая формула, и T разрешима тривиальным образом.

П р и м е р ы.

1. Теория PN неполна, поскольку в ней недоказуемы замкнутые формулы $\forall x P(x)$ и $\neg\forall x P(x)$.

2. Теория групп TG неполна, поскольку в ней недоказуемы замкнутые формулы $\forall x\, \forall y\, (x * y = y * x)$ и $\neg\forall x\, \forall y\, (x * y = y * x)$.

3. Теория полей TF неполна, поскольку в ней недоказуемы замкнутые формулы $\exists x\, (x^2 = 1 + 1)$ и $\neg\exists x\, (x^2 = 1 + 1)$.

Несложно показать, что теории TAG, LOrd также являются неполными.

Среди неполных теорий имеются как разрешимые, так и неразрешимые. Например, неполными являются неразрешимые теории PN и TG, а также разрешимые теории TAG, LOrd. ❍

Заметим, что неполнота теории не является ее недостатком, поскольку обеспечивает разнообразие ее моделей. Если теория первого порядка предназначена для описания алгебраических систем с разными свойствами (таковой является, например, теория групп), то вполне естественно, что такая теория неполна.

➤ В качестве **п р и м е р а** полной теории приведем *теорию плотных линейно упорядоченных множеств без первого и последнего элементов*. Сигнатура теории содержит два двуместных предикатных символа $=$ и $<$. Следующие формулы являются аксиомами этой теории:

$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x < y \;\&\; y < z \supset x < z)$ (транзитивность $<$);

$\forall x\, \forall y\, (x = y \supset \neg(x < y))$ (строгий порядок);

$\forall x\, \forall y\, (x = y \vee x < y \vee y < x)$ (линейность порядка);

$\forall x\, \exists y\, \exists z\, (x < y \;\&\; z < x)$ (без первого и последнего элемента);

$\forall x\, \forall y\, (x < y \supset \exists z\, (x < z \;\&\; z < y))$ (плотность).

Кроме того, аксиомами являются формулы, описывающие равенство:

(re′) $\forall x\, (x = x)$;

(si′) $\forall x\, \forall y\, (x = y \supset y = x)$;

(tr′) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \;\&\; y = z \supset x = z)$

и формулы, выражающие сохранение порядка при замене на равные:

$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \supset (x < z \supset y < z))$;

$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \supset (z < x \supset z < y))$.

Эта теория полна и разрешима. Множество рациональных чисел **Q** с отношением строгого порядка является счетной моделью этой теории. Можно доказать, что все нормальные[1] счетные моде-

[1] См. далее § 5.5.

ли данной теории изоморфны этой модели. Множество действительных чисел **R** с отношением строгого порядка является несчетной моделью этой теории. ❍

Теорию первого порядка T называют категоричной в мощности $\mathfrak{m}$ (или $\mathfrak{m}$-*категоричной*), если все ее нормальные модели мощности $\mathfrak{m}$ изоморфны[1].

Можно доказать, что теория плотных линейно упорядоченных множеств без первого и последнего элементов категорична в счетной мощности (счетно-категорична) и не является категоричной ни в какой несчетной мощности.

Если F – формула $Я_T$, как и прежде будем обозначать через T + F теорию, которую получают из T в результате добавления формулы F к аксиомам T в качестве новой аксиомы (т. е. теорию с множеством аксиом $Ax_T \cup \{F\}$).

Теорию первого порядка T называют ***дедуктивно полной***, если, присоединив к ее аксиомам любую недоказуемую в T формулу F языка $Я_T$ в качестве новой аксиомы, получим противоречивую теорию T + F, т. е. если

$$(F)\ (\nvdash_T F \to \mathrm{T} + F \text{ противоречива}).$$

Например, теория PN ($P_\sigma N$) не является дедуктивно полной. Действительно, если рассмотреть теорию $P_\sigma N + A$, где A – формула ЯЛП$_\sigma$ такая, что $\nvdash_{P_\sigma N} A$ и $\nvdash_{P_\sigma N} \neg A'$, то теория $P_\sigma N + A$ непротиворечива.

Связь между такими характеристиками теорий первого порядка, как полнота, дедуктивная полнота и полнота относительно модели отражена в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА. Теория T полна тогда и только тогда, когда она дедуктивно полна.

Доказательство. Допустим, что T полна и докажем, что она дедуктивно полна. Пусть формула F недоказуема в T: $\nvdash_T F$. Тогда по теореме о замыкании $\nvdash_T F'$. Следовательно, в силу полноты T, $\vdash_T \neg F'$. Тогда формула $\neg F'$ доказуема и в расширении T: $\vdash_{T+F} \neg F'$. Вместе с тем $\vdash_{T+F} F$, а значит, и $\vdash_{T+F} F'$. Таким образом,

[1] Изоморфизм двух интерпретаций одинаковой сигнатуры понимают как изоморфизм двух алгебраических систем (структур).

$\vdash_{T+F} F'$ и $\vdash_{T+F} \neg F'$, т. е. теория Т + F противоречива. Следовательно, теория Т дедуктивно полна.

Докажем обратное. Допустим, что Т дедуктивно полна. Докажем, что Т полна. Пусть F – произвольная замкнутая недоказуемая в Т формула: $\nvdash_T F$. Тогда, в силу дедуктивной полноты Т, теория Т + F противоречива. По второй теореме о редукции (о непротиворечивости) следует, что $\vdash_T \neg F$. Таким образом, Т полна. ❐

Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольная модель теории Т. Теорию первого порядка Т называют ***полной относительно модели*** $\mathfrak{M}$, если всякая $\mathfrak{M}$-истинная формула $Я_T$ является Т-теоремой, т. е. если

$$(F)\ (\vDash_{\mathfrak{M}} F \to \vdash_T F).$$

Легко видеть, что всякая теория Т полна относительно модели $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда класс Т-теорем совпадает с классом $\mathfrak{M}$-истинных формул:

$$(F)\ (\vDash_{\mathfrak{M}} F \leftrightarrow \vdash_T F).$$

ТЕОРЕМА. Пусть Т – произвольная теория первого порядка. Тогда:

1) если Т полна, то Т полна относительно всякой своей модели;

2) если Т полна относительно некоторой своей модели, то Т полна.

Доказательство.

1. Пусть Т – полная теория, а $\mathfrak{M}$ – ее произвольная модель. Докажем, что всякая $\mathfrak{M}$-истинная формула языка Т является Т-теоремой. Пусть формула F истинна в $\mathfrak{M}$: $\vDash_{\mathfrak{M}} F$. Тогда в $\mathfrak{M}$ истинно и ее замыкание F', а его отрицание $\neg F'$ ложно. Поскольку формула $\neg F'$ ложна в модели теории Т, она недоказуема в Т: $\nvdash_T \neg F'$. Следовательно, в силу полноты Т, является доказуемой в Т формула F', а значит, доказуема в Т и сама формула F: $\vdash_T F$.

2. Допустим, что теория Т полна относительно некоторой своей модели $\mathfrak{M}$. Докажем, что Т полна. Пусть F – замкнутая недоказуемая в Т формула. Докажем, что ее отрицание $\neg F$ является Т-теоремой. Поскольку $\nvdash_T F$ и теория Т полна относительно $\mathfrak{M}$, то F ложна в $\mathfrak{M}$. Кроме того, F замкнута, а значит, в $\mathfrak{M}$ истинна

$\neg F$. Следовательно, в силу полноты Т относительно $\mathfrak{M}$, формула $\neg F$ доказуема в Т. ❒

СЛЕДСТВИЕ. Теория Т полна относительно некоторой своей модели тогда и только тогда, когда Т полна относительно всякой своей модели.

Замечание 2. Теорема равносильна следующему утверждению, записанному в символической форме:

$$(\mathrm{T})\ (\mathfrak{M}_{\mathrm{T}})\ (\mathrm{T}\ \text{полна относительно}\ \mathfrak{M}_{\mathrm{T}} \leftrightarrow \mathrm{T}\ \text{полна}). \ \circ$$

§5.5. Теории первого порядка с равенством

Практически во всех достаточно глубоких неформальных теориях присутствует предикат равенства, обозначаемый символом =. Предложение $x = y$ является истинным тогда и только тогда, когда объекты x и y совпадают. Можно выделить следующие основные свойства равенства. Во-первых, всякий предмет равен самому себе (рефлексивность), что можно выразить формулой $\forall x\,(x = x)$. Во-вторых, равные (совпадающие) объекты нельзя различить в том смысле, что если что-то присуще одному из равных объектов, то оно присуще и другому. Иными словами, если некоторым свойством обладает один из равных объектов, то им обладает и другой. Символически это можно записать следующим образом:

$$(\mathcal{P})\ (x)\ (y)\ (x = y \to (\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(y))).$$

Как это записать на языке первого порядка? Свойства объектов (предметов) можно выражать с помощью формул этого языка, однако не всякое свойство $\mathcal{P}$ выразимо таким образом. Мы вынуждены ограничиться лишь теми свойствами, которые выразимы формулами ЯЛП. Записанная ниже схема формул (ins) при указанных ограничениях выражает, что равное всегда можно заменить равным.

Теорией первого порядка с равенством называют всякую теорию первого порядка Т, среди предикатных символов которой имеется двуместный предикатный символ (для определенности будем считать, что это P_1^2, но вместо $P_1^2(t_1, t_2)$ будем писать $t_1 = t_2$), и в которой являются доказуемыми следующие формулы:
(re) $x = x$ (рефлексивность равенства);

(ins) $x = y \supset (A(x, x) \supset A(x, y))$ (подстановочность равенства), где x и y − произвольные предметные переменные; $A(x, x)$ − произвольная формула языка $Я_{\text{Т}}$; $A(x, y)$ − результат замены в $A(x, x)$ каких-либо (не обязательно всех) свободных вхождений x вхождениями y, при условии, что заменяемые вхождения x не лежат в области действия никакого квантора по y.

Замечание 1. В качестве формулы, выражающей рефлексивность равенства, достаточно вместо схемы $x = x$ с произвольной переменной x, использовать формулу $x_1 = x_1$ с фиксированной переменной x_1. Однако для упрощения техники мы этого делать не будем. ○

Свойства теорий первого порядка с равенством

Остановимся на некоторых общих свойствах теорий первого порядка с равенством. Сначала докажем, что в таких теориях доказуемы формулы, выражающие рефлексивность (re), симметричность (si) и транзитивность (tr) равенства.

! **ТЕОРЕМА 1.** Во всякой теории первого порядка с равенством Т для любых предметных переменных x, y, z являются Т-теоремами формулы (re), (si) и (tr):

1) $\vdash_{\text{T}} x = x$;

2) $\vdash_{\text{T}} x = y \supset y = x$;

3) $\vdash_{\text{T}} x = y \;\&\; y = z \supset x = z$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения п. 1 гарантирована определением теории с равенством.

Для доказательства утверждения п. 2 рассмотрим следующее дерево Т-вывода:

$$\dfrac{\dfrac{}{x = x}\,\scriptstyle(\text{re}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[x = y]^1 \qquad \dfrac{}{x = y \supset (x = z \supset y = z)}\,\scriptstyle(\text{ins})}{x = z \supset y = z}\,\scriptstyle\supset\text{у}}{\forall z(x = z \supset y = z)}\,\scriptstyle\forall\text{в}}{x = x \supset y = x}\,\scriptstyle\forall\text{у}}{\dfrac{y = x}{x = y \supset y = x}\,\scriptstyle\supset\text{в}\,(1)}\,\scriptstyle\supset\text{у}\;.$$

В этом дереве вывода формула $x = y \supset (x = z \supset y = z)$ получена по схеме (ins), в которой в качестве формулы $A(x, x)$ взята формула $x = z$, а в качестве $A(x, y)$ − формула $y = z$.

Для доказательства утверждения п. 3 рассмотрим следующее дерево Т-вывода:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x = y \,\&\, y = z]^1}{y = z} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[x = y \,\&\, y = z]^1}{x = y}}{y = x}\,(\mathrm{si}) \qquad \dfrac{}{y = x \supset (y = z \supset x = z)}\,(\mathrm{ins})}{y = z \supset x = z}}{x = z}}{x = y \,\&\, y = z \supset x = z}\,\supset\text{в}\ (1)$$

В этом дереве вывода формула $y = x \supset (y = z \supset x = z)$ получена по схеме (ins), в которой в качестве формулы $A(y, y)$ взята формула $y = z$, а в качестве $A(x, y)$ − формула $x = z$ (здесь x и y поменялись местами). ❐

СЛЕДСТВИЕ. Во всякой теории первого порядка с равенством Т для любых предметных переменных x, y, z являются Т-теоремами формулы (re′), (si′) и (tr′), являющиеся замыканиями формул (re), (si) и (tr) соответственно:

1) $\vdash_{\mathrm{T}} \forall x\, (x = x)$;

2) $\vdash_{\mathrm{T}} \forall x\, \forall y\, (x = y \supset y = x)$;

3) $\vdash_{\mathrm{T}} \forall x\, \forall y\, \forall z\, (x = y \,\&\, y = z \supset x = z)$.

ТЕОРЕМА 2. Во всякой теории с равенством для любых термов t, r, s языка этой теории выполняется:

($\mathrm{re_t}$) $\vdash_{\mathrm{T}} t = t$;

($\mathrm{si_t}$) $\vdash_{\mathrm{T}} t = r \supset r = t$;

($\mathrm{tr_t}$) $\vdash_{\mathrm{T}} t = r \,\&\, r = s \supset t = s$.

Доказательство. Докажем утверждение ($\mathrm{re_t}$) построением соответствующего Т-вывода:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x = x}\,(\mathrm{re})}{\forall x\ (x = x)}\,\forall\text{в}}{t = t}\,\forall\text{у}$$

На первый взгляд кажется, что для доказательства утверждения ($\mathrm{si_t}$) достаточно, опираясь на утверждение п. 2 теоремы 1, дважды воспользоваться правилом ∀у, сначала подставив терм t вместо x, а затем терм r вместо y. Однако результат такой последовательной подстановки может отличаться от результата одновременной подстановки (который нам и нужен). Например, если в терм t входит переменная y, то при подстановке терма r вместо y при повторном применении правила ∀у придется подставлять r не только вместо изначальных вхождений y, но и вместо возможных новых вхождений y, что совсем нежелательно. Избежать этой ситуации можно следующим образом. Фиксируем произвольные термы t и r. Поскольку выводимость утверждения п. 2 в теореме 1 справедлива для любых переменных, мы можем выбрать такие переменные, которые не входят в термы t и r. Без потери общности можно считать, что такими переменными являются x и y. Теперь, при соблюдении указанных ограничений, можно построить соответствующее дерево Т-вывода:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\ \forall y\ (x = y \supset y = x)}}{\forall y\ (t = y \supset y = t)}\ \forall\text{у}}{t = r \supset r = t}\ \forall\text{у}$$

Поскольку переменные x и y не входят в термы t и r, оба применения правила ∀у законны (нет нарушений известных ограничений).

Аналогичным образом, используя утверждение п. 3 и применяя три раза правило ∀у, можно доказать (tr_t). ❐

Только что доказанную теорему можно получить в качестве следствия следующего более общего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ (*о подстановках в доказуемые формулы*).

1. Каковы бы ни были Т-доказуемая бескванторная формула $A(x_1)$ с единственной переменной x_1 и терм t языка теории Т, формула $A(t)$ также Т-доказуема: $\vdash_T A(x_1) \to (t)(\vdash_T A(t))$.

2. Каковы бы ни были Т-доказуемая бескванторная формула $A(x_1, x_2)$ с двумя переменными x_1, x_2 и термы t, r языка теории Т, формула $A(t, r)$ также Т-доказуема (где $A(t, r)$ − результат одновременной замены в формуле A каждого вхождения x_1 и x_2 на вхождения термов t, r соответственно): $\vdash_T A(x_1, x_2) \to (t)\ (r)(\vdash_T A(t, r))$.

Доказательство этого утверждения (построением дерева Т-вывода) оставляем читателю. Отметим лишь следующее. При доказательстве утверждения п. 2 следует учесть, что результат одновременной подстановки двух термов в формулу A с двумя или более свободными переменными $(A)^{x_1\ x_2}_{t\ \ r}$ может не совпадать с результатом последовательной подстановки этих же термов в формулу A, т. е. вообще говоря, $(A)_{t\ r}^{x_1 x_2} \neq ((A)_t^{x_1})_r^{x_2}$. Для избежания так называемой коллизии переменных нужно сначала переименовать переменные x_1 и x_2, перейдя к переменным, не входящим в термы t и r, а затем делать нужную подстановку.

Замечание 2. Аналогичное утверждение можно доказать для бескванторной формулы с тремя или более переменными. ❍

➤ В силу теоремы 1 во всякой модели $\mathfrak{M}$ теории с равенством T двуместный предикат, соответствующий предикатному символу =, определяет на носителе M отношение эквивалентности.

! Модель теории с равенством T называют ***нормальной моделью***, если предикатный символ = интерпретируется как отношение совпадения, т. е. символу = отвечает предикат равенства.

! **ТЕОРЕМА** (*Гёделя о существовании модели* (*о полноте*) *для теорий с равенством*). Всякая непротиворечивая теория первого порядка с равенством имеет нормальную модель.

При построении теорий первого порядка схему (ins) обычно не используют в качестве схемы аксиом, поскольку класс формул, построенных по этой схеме, весьма сложен и плохо обозрим. Следующая теорема предоставляет простое и удобное достаточное условие того, что теория является теорией с равенством. Оказывается, достаточно проверить, что условие подстановочности равенства выполняется для элементарных формул и термов.

ТЕОРЕМА 3 (*о достаточном условии теории с равенством*)[1].

Пусть для теории T выполняются следующие условия:

1) какова бы ни была переменная x,

(re) $\vdash_{\mathrm{T}} x = x$;

2) каковы бы ни были предикатный символ P_m^n, функциональный символ f_m^n, набор переменных (не обязательно различных) $(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$, переменная z_i, для каждого i ($i = 1, \ldots, n$):

($\mathrm{i_p}$) $\vdash_{\mathrm{T}} y_i = z_i \supset (P_m^n(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n) \supset P_m^n(y_1, \ldots, z_i, \ldots, y_n))$;

($\mathrm{i_f}$) $\vdash_{\mathrm{T}} y_i = z_i \supset (f_m^n(y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n) = f_m^n(y_1, \ldots, z_i, \ldots, y_n))$.

Тогда теория T является теорией с равенством.

---

[1] Доказательство этой теоремы читатель при желании может найти, например, в [3], [10].

Замечание 3. Этой теоремой удобно пользоваться, когда сигнатура $Я_Т$ содержит конечное число предикатных и функциональных символов. В этом случае достаточно взять в качестве аксиом конечное число формул вида, описанного в п. 2. Среди них должны присутствовать и следующие формулы, выражающие левую и правую подстановочность равенства:

$$x = y \supset (x = z \supset y = z) \quad \text{и} \quad x = y \supset (z = x \supset z = y),$$

где x, y, z — произвольные переменные.

Однако вместо этой пары формул в качестве аксиом обычно используют пару формул (si) и (tr), выражающих симметричность и транзитивность равенства. ❍

Примеры.

1. Теориями первого порядка с равенством являются теории TE, TG, TF, Ord.

2. Нормальными моделями TG являются группы, и только они; нормальными моделями TF являются поля, и только они; и т. п. ❍

§5.6. Формальная арифметика

Арифметика натуральных чисел (элементарная теория чисел) является одной из фундаментальных областей математики. Аксиоматическое неформальное построение арифметики было разработано независимо друг от друга в конце XIX века Р. Дедекиндом и Дж. Пеано[1].

➤ Рассмотрим систему аксиом, известную под названием *системы аксиом Пеано*. Ее исходные понятия — натуральное число, 0 (ноль) и число x', (непосредственно) следующее за x (подразумевается, что $'$ есть одноместная операция, т. е. из $x = y$ следует $x' = y'$).

P1. 0 есть натуральное число.

P2. Если x — натуральное число, то и следующее за ним x' — натуральное число.

P3. 0 не следует ни за каким натуральным числом.

P4. Если x и y — натуральные числа и $x' = y'$, то $x = y$.

P5. Каково бы ни было свойство натуральных чисел $\mathcal{P}$, *если* 0 обладает этим свойством и для всякого натурального числа x, обладающего свойством $\mathcal{P}$, число x' также обладает свойством $\mathcal{P}$, *то* свойством $\mathcal{P}$ обладают все натуральные числа (***аксиома индукции***).

---

[1] Рихард Дедекинд (1831—1916) — немецкий математик.

Джузеппе Пеано (1858—1932) — итальянский математик.

➤➤ Используя символы метаязыка, эти аксиомы можно записать существенно короче следующим образом ($\mathbf{N}$, 0, $'$ — обозначения исходных понятий; x — переменная по множеству $\mathbf{N}$; $\mathcal{P}$ — переменная по множеству свойств натуральных чисел):

P1. $0 \in \mathbf{N}$.

P2. $(x)\ (x' \in \mathbf{N})$.

P3. $(x)\ (x' \neq 0)$.

P4. $(x)\ (y)\ (x' = y' \to x = y)$.

P5. $(\mathcal{P})\ (\mathcal{P}(0)\ \&\ (x)\ (\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x')) \to (x)\ \mathcal{P}(x))$.

В доказательствах теорем вида $(x)\ \mathcal{P}(x)$, основанных на аксиоме индукции (принципе индукции), принято доказательство предложения $\mathcal{P}(0)$ называть базисом индукции, а доказательство предложения $(x)\ (\mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x'))$ — шагом индукции.

Все теоремы элементарной теории чисел можно доказать, используя эту аксиоматику. Точнее, при использовании некоторого фрагмента теории множеств, этой системы аксиом достаточно для систематического построения элементарной теории чисел.

➤➤ Опишем теорию первого порядка, которая формализует аксиоматическую систему Пеано (неформальную арифметику). Эту теорию первого порядка называют ***формальной арифметикой***. Обозначим ее символом Ar.

Построим эту теорию, задав пару $< \sigma, Ax_{\mathrm{Ar}} >$. Язык теории Ar имеет сигнатуру $\sigma = \{ P_1^2,\ f_1^2,\ f_2^2,\ f_1^1,\ c_1\}$.

Введем привычные обозначения. Пусть t_1 и t_2 — произвольные термы $Я_{\mathrm{Ar}}$. Тогда:

$$0 \leftrightharpoons c_1;\ \ t_1 + t_2 \leftrightharpoons f_1^2(t_1, t_2);\ \ t_1 \cdot t_2 \leftrightharpoons f_2^2(t_1, t_2);\ \ t_1' \leftrightharpoons f_1^1(t_1);$$

$$t_1 = t_2 \leftrightharpoons P_1^2(t_1, t_2);\ \ t_1 \neq t_2 \leftrightharpoons \neg P_1^2(t_1, t_2).$$

Иногда для наглядности будем использовать скобки: $(t_1 + t_2)$, $(t_1 \cdot t_2)$, $(t_1)'$ и $(t_1 = t_2)$.

Следующие формулы являются аксиомами Ar:

(Ar_1) $x_1 = x_2 \supset (x_1 = x_3 \supset x_2 = x_3)$;

(Ar_2) $x_1 = x_2 \supset x_1' = x_2'$;

(Ar_3) $\neg(0 = x_1')$;

(Ar_4) $x_1' = x_2' \supset x_1 = x_2$;

(Ar_5) $x_1 + 0 = x_1$;

(Ar_6) $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$;

(Ar_7) $x_1 \cdot 0 = 0$;

(Ar_8) $x_1 \cdot x_2' = (x_1 \cdot x_2) + x_1$;

(Ar_9) $A(0)\ \&\ \forall x\ (A(x) \supset A(x')) \supset \forall x\ A(x)$,

где x – произвольная предметная переменная, $A(x)$ – произвольная формула $Я_{Ar}$; $A(0)$ и $A(x')$ – формулы, полученные подстановкой термов 0 и x' вместо переменной x в формулу $A(x)$.

Ar_9 представляет собой схему формул, называемую *схемой индукции*, по которой можно построить бесконечно много аксиом. Эта схема формализует содержательный принцип математической индукции.

Нетрудно доказать построением дерева Ar-вывода, что в Ar является производным следующее правило:

$$(R_{ind}) \qquad \frac{A(0) \quad \forall x\ (A(x) \supset A(x'))}{\forall x\ A(x)},$$

где A – произвольная формула $Я_{Ar}$; x – произвольная переменная.

Схема Ar_9 не вполне соответствует пеановской аксиоме индукции P5. Эта схема позволяет иметь дело лишь со свойствами натуральных чисел, выражаемыми формулами $Я_{Ar}$, а таковых счетное множество. В то же время в аксиоме P5 квантор общности предполагается по всем свойствам натуральных чисел, а этих свойств континуум. Такое несоответствие ведет к тому, что у Ar существуют неизоморфные модели, в то время как все модели неформальной пеановской арифметики изоморфны.

Поясним содержательный смысл остальных аксиом Ar. Формула Ar_3 выражает аксиому Пеано P3, формула Ar_4 выражает аксиому P4. Формулы Ar_5–Ar_8 выражают индуктивное определение сложения и умножения. В системе аксиом Пеано соответствующих аксиом нет, поскольку использование интуитивной теории множеств позволяет вывести существование операций + и $\cdot$ с нужными свойствами. Аксиомы Пеано P1 и P2 не нуждаются в специальном выражении на формальном уровне, поскольку наличие в $Я_{Ar}$ символа константы 0 и функционального символа $'$ обеспечивает истинность этих аксиом в любой интерпретации $Я_{Ar}$. Первые две аксиомы Ar_1 и Ar_2 выражают свойства предикатного символа = (подстановочность равенства), они обеспечивают выполнение в моделях Ar основных свойств равенства. Схема Ar_9, как уже было отмечено, формализует содержательный принцип математической индукции, т. е. аксиому P5.

Замечание 1. Технически более удобно рассматривать в качестве аксиом не приведенные выше формулы Ar_1–Ar_8, а простейшие схемы, построенные из x, y, z – обозначений произвольных переменных (см. [3]).

Термы 0, 0', 0'' и т. д. естественно рассматривать как изображения соответственно натуральных чисел 0, 1, 2, и т. д. В соответствии с этим обозначим терм $0\overbrace{''\cdots'}^{n\ раз}$ через $\overline{n}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Иногда для единообразия удобно использовать символ $\overline{0}$ вместо 0. ○

Интерпретации языка Ar. Модели Ar

Стандартной интерпретацией языка формальной арифметики Ar будем называть интерпретацию $\mathfrak{N} = \langle \mathbf{N}, =, +, \cdot, ', 0 \rangle$, где $\mathbf{N}$ − множество натуральных чисел[1] с обычными операциями сложения, умножения, перехода к следующему натуральному числу и константой ноль; предикатный символ P_1^2 интерпретируется как отношение равенства (совпадения).

➤➤ Стандартную интерпретацию принято считать моделью Ar и называть ее ***стандартной моделью*** формальной арифметики. Однако проверить истинность всех аксиом Ar в стандартной интерпретации $\mathfrak{N}$ мы не можем (точнее, не можем проверить истинность схемы индукции, несмотря на ее интуитивную ясность). В связи с этим можно признавать $\mathfrak{N}$ моделью Ar в той степени, в которой мы верим, что в $\mathfrak{N}$ истинна схема индукции Ar_9.

Приведем еще два **п р и м е р а** интерпретаций $Я_{Ar}$:

1) $\mathfrak{N}_1 = \langle \{0, -1, -2, \ldots\}, =, +, \bullet, {}^*, 0 \rangle$, где + есть обычное сложение, $x \bullet y = -x \cdot y$, $x^* = x - 1$ для любых целых неположительных чисел x и y;

2) $\mathfrak{N}_2 = \langle \{1, 2, 3, \ldots\}, =, \oplus, \bullet, {}^*, 1 \rangle$, где $x \oplus y = x + y - 1$, $x \bullet y = (x - 1)\cdot(y - 1)$, $x^* = x + 1$ для любых положительных целых чисел x и y, 1 − интерпретация символа 0.

Несложно доказать, что обе эти интерпретации изоморфны стандартной. ○

➤➤ ***Нестандартной моделью*** Ar называют всякую нормальную модель этой теории, неизоморфную стандартной.

Можно доказать, что существуют бесконечные нестандартные модели Ar любой мощности, в том числе счетные (см. [7], [10] и [1]).

---

[1] Под натуральными числами можно понимать, например, слова в алфавите |. Слова |, ||, |||, ... обозначают при таком подходе соответственно 0, 1, 2, 3, ... Операции определяются индуктивно (см. [9]).

Выразительные возможности языка арифметики

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие выразительные возможности языка теории Ar.

Будем говорить, что формула F языка $Я_{Ar}$ с n свободными переменными *выражает* в стандартной интерпретации $\mathfrak{N}$ арифметический n-местный предикат $\mathcal{P}$ (т. е. предикат на множестве **N**), если эта формула в $\mathfrak{N}$ задает предикат $\tilde{F}$, совпадающий с предикатом $\mathcal{P}$.

Запишем на языке Ar формулы, выражающие на $Я_{Ar}$ известные арифметические предикаты:

1) формула $\exists z\ (y = x \cdot z)$ выражает в $\mathfrak{N}$ предикат делимости: для любых натуральных n и m $\tilde{D}(n, m) =$ И тогда и только тогда, когда $n \mid m$;

2) формула $Pr(x) \leftrightharpoons \forall y\ (\exists z\ (x = y \cdot z) \supset y = \bar{1} \vee y = x)\ \&\ \neg(x = \bar{1})$ выражает в $\mathfrak{N}$ предикат «n — простое число» — для любого натурального n $\widetilde{Pr}(n) =$ И тогда и только тогда, когда n является простым;

3) формула $\exists z\ (y = x + z)$ выражает в $\mathfrak{N}$ предикат $\leqslant$;

4) формула $\exists z\ (y = x + z\ \&\ z \neq 0)$ выражает в $\mathfrak{N}$ предикат $<$.

Можно доказать, что является Ar-теоремой формула $Я_{Ar}$, выражающая теорему о делении с остатком (о существовании и единственности частного и остатка при делении):

$$\forall x\ \forall y\ (y \neq 0 \supset \exists_1 u\ \exists_1 v\ (x = y \cdot u + v\ \&\ v < y)),$$

где $\exists_1 x\ A(x) \leftrightharpoons \exists x\ A(x)\ \&\ \forall x\ \forall y\ (A(x)\ \&\ A(y) \supset x = y)$.

На языке Ar можно выразить следующие более сильные формы принципа индукции.

1. Принцип возвратной индукции: если для любого натурального x из того, что свойством $\mathcal{P}$ обладают все натуральные числа, меньшие x, вытекает, что им обладает и само число x, то свойством $\mathcal{P}$ обладают все натуральные числа.

Запишем это утверждение в виде формулы $Я_{Ar}$:

$$\forall x\ (\forall y\ (y < x \supset A(y)) \supset A(x)) \supset \forall x\ A(x).$$

2. Принцип наименьшего числа: всякое непустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент. Другими словами: если свойством $\mathcal{P}$ обладает хотя бы одно натуральное число, то существует наименьшее число среди всех натуральных чисел, обладающих этим свойством. Это утверждение можно записать в виде формулы следующим образом:

$$\exists x\, A(x) \supset \exists y\, (A(y)\ \&\ \forall z\, (z < y \supset \neg A(z))),$$

где $z < y \leftrightharpoons \exists x\, (y = x + z\ \&\ x \neq 0)$.

Можно доказать, что эти формулы являются Ar-теоремами. Оказывается, для всех известных теорем элементарной теории чисел, записанных в виде формул языка $Я_{\mathrm{Ar}}$, можно построить деревья Ar-вывода, доказав тем самым, что они являются Ar-теоремами. Исключениями служат те теоремы теории чисел, в формулировках которых используются неэлементарные понятия, или доказательства которых используют, скажем, средства теории функций комплексного переменного (например, теорема Дирихле).

Формальная арифметика — теория с равенством

Можно доказать, что Ar является теорией с равенством.

ТЕОРЕМА. В Ar доказуемы формулы (re), (si) и (tr):

1) $\vdash_{\mathrm{Ar}} x_1 = x_1$;

2) $\vdash_{\mathrm{Ar}} x_1 = x_2 \supset x_2 = x_1$;

3) $\vdash_{\mathrm{Ar}} x_1 = x_2\ \&\ x_2 = x_3 \supset x_1 = x_3$.

Доказательство. В силу утверждения о подстановках в доказуемые бескванторные формулы (§ 5.5), всякая одновременная подстановка термов в аксиомы Ar доказуема в Ar.

Для простоты записи вместо x_1, x_2, x_3 будем использовать буквы x, y, z.

1. Докажем, что $\vdash_{\mathrm{Ar}} x = x$ построением дерева Ar-вывода:

$$\dfrac{\dfrac{}{x+0=x}\,\mathrm{Ar}_5 \qquad \dfrac{\dfrac{}{x+0=x}\,\mathrm{Ar}_5 \qquad \dfrac{}{x+0=x \supset (x+0=x \supset x=x)}\,\mathrm{Ar}_1}{x+0=x \supset x=x}\,\supset\text{у}}{x=x}\,\supset\text{у}$$

2. Докажем, что $\vdash_{\mathrm{Ar}} x = y \supset y = x$, построив соответствующее дерево Ar-вывода:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x=x}\,(\mathrm{re}) \qquad \dfrac{[x=y]^1 \qquad \dfrac{}{x=y \supset (x=x \supset y=x)}\,\mathrm{Ar}_1}{x=x \supset y=x}\,\supset\text{у}}{y=x}\,\supset\text{у}}{x=y \supset y=x}\,\supset\text{в}\ (1)$$

Замечание 2. Формула $x = y \supset (x = x \supset y = x)$ является подстановкой в аксиому Ar_1 и, согласно утверждению о подстановках в доказуемые формулы, является Ar-доказуемой. Именно это и отражает двойная черта над рассматриваемой формулой. ❍

3. Для доказательства утверждения $\vdash_{\text{Ar}} x = y \;\&\; y = z \supset x = z$, рассмотрим следующее дерево Ar-вывода:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x=y\,\&\,y=z]^1}{y=z}{\scriptstyle\&\text{у}} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{[x=y\,\&\,y=z]^1}{x=y}{\scriptstyle\&\text{у}} \\ \hline\hline y=x\end{array}{\scriptstyle(\text{si})} \qquad \begin{array}{c} \\ \hline\hline y=x\supset(y=z\supset x=z)\end{array}{\scriptstyle\text{Ar}_1}}{y=z\supset x=z}{\scriptstyle\supset\text{у}}}{x=z}{\scriptstyle\supset\text{у}}}{x=y\,\&\,y=z\supset x=z}{\scriptstyle\supset\text{в (1)}}$$

Здесь мы использовали обозначение $\begin{array}{c}x=y\\ \hline\hline y=x\end{array}$ для Ar-дерева, соответствующего выводимости $x = y \vdash_{\text{Ar}} y = x$ (см. п. 2). ❒

СЛЕДСТВИЕ. Для любых термов t, r и s языка Ar следующие формулы выводимы в Ar:

1) $t = t$;

2) $t = r \supset r = t$;

3) $t = r \;\&\; r = s \supset t = s$.

Для доказательства достаточно сослаться на только что доказанную теорему и утверждение о подстановках в доказуемые бескванторные формулы из § 5.5.

Для доказательства того, что Ar — теория с равенством, согласно критерию теории с равенством осталось показать, что

$\vdash_{\text{Ar}} x = y \supset x + z = y + z$;

$\vdash_{\text{Ar}} x = y \supset z + x = z + y$;

$\vdash_{\text{Ar}} x = y \supset x \cdot z = y \cdot z$;

$\vdash_{\text{Ar}} x = y \supset z \cdot x = z \cdot y$.

Доказательство этих утверждений оставляем читателю[1].

Можно доказать, что для любых термов t, r и s языка Ar следующие формулы выводимы в Ar:

1) $t = r \supset t + s = r + s$;

2) $t = 0 + t$;

[1] Доказательство этих утверждений, как и последующих утверждений о выводимости формул, выражающих основные свойства операций для формальной арифметики на базе гильбертовского исчисления предикатов можно найти, например, в [10].

3) $t' + r = (t + r)'$;
4) $t + r = r + t$;
5) $t = r \supset s + t = s + r$;
6) $(t + r) + s = t + (r + s)$;
7) $0 \cdot t = 0$;
8) $t' \cdot r = t \cdot r + r$;
9) $t \cdot r = r \cdot t$;
10) $t = r \supset s \cdot t = s \cdot r$;
11) $\overline{1} \cdot t = t$.

Формулы, выражающие другие известные свойства арифметических операций, а также свойства неравенств и отношения делимости (см., например, [9]), также могут быть доказаны в Ar.

Неполнота формальной арифметики

Теперь мы подошли вплотную к тому, чтобы выяснить, насколько адекватна теория Ar неформальной арифметике. Точнее, выясним, каковы ответы на следующие вопросы:

1. Всякая ли формула, истинная в стандартной интерпретации $\mathfrak{N}$, является Ar-теоремой?

2. Полна ли теория Ar, т. е. для всякой ли замкнутой формулы F языка $Я_{Ar}$ в Ar доказуема она сама или ее отрицание?

3. Разрешима ли теория Ar? Непротиворечива ли теория Ar?

Гильберт надеялся получить положительные ответы на эти вопросы, однако его надежды не оправдались. В 1931 году молодой австрийский математик Курт Гёдель (1906—1978) получил удивительные результаты.

➤ Суть этих результатов заключается в следующем:

1) существуют формулы, истинные в стандартной интерпретации, но недоказуемые в Ar;

2) если теория Ar непротиворечива, то существуют замкнутые формулы, которые недоказуемы и неопровержимы в Ar;

3) неполнота Ar вызвана не тем, что Ar несовершенна, а тем, что построение полной теории, удовлетворяющей некоторым естественным условиям, в принципе невозможно.

Изложение результатов Гёделя с полным доказательством в рамках нашего курса невозможно. Однако, опуская доказательства некоторых утверждений, требующих использования технического аппарата теории алгоритмов, можно изложить идейную часть доказательства теорем Гёделя.

Арифметизация формальных языков

Гёдель в 1930 году для решения поставленных задач предложил пронумеровать все символы, термы, формулы $Я_{Ar}$ и выводы в Ar таким образом, чтобы можно было заменить утверждения о теории Ar эквивалентными утверждениями о натуральных числах, которые затем выразить в Ar. Эта идея сыграла ключевую роль в доказательстве Гёделем теорем о неполноте Ar, а также при решении ряда важных проблем математической логики.

Пусть $a_1 \dots a_m$ есть алфавит формального языка Я.

Арифметизацией формального языка Я называют всякое инъективное отображение g множества E всех букв алфавита языка Я, всех слов и всех конечных последовательностей слов в этом алфавите во множество **N**, удовлетворяющее следующим условиям:
1) g — эффективно вычислимая функция, т. е. существует алгоритм, который каждое α из E перерабатывает в $g(\alpha)$;
2) существует алгоритм, который по каждому натуральному n позволяет установить, является ли n значением g при некотором α из E, и в случае, когда является, построить тот объект α, для которого $n = g(\alpha)$.

Будем использовать букву α для обозначения произвольного элемента из E.

Натуральное число $g(\alpha)$ называют *гёделевым номером* α.

Рассмотрим один из способов построения такой функции g:

1. Если α есть буква a_i ($i = 1, \dots, m$), то

$$g(a_i) = 2i + 1,\ i = 1, \dots, m.$$

2. Если α есть слово в алфавите языка Я (для простоты записи будем считать, что $\alpha \rightleftharpoons a_1 \dots a_n$), то

$$g(\alpha) = 2^{g(a_1)} \cdot 3^{g(a_2)} \cdot \dots \cdot p_n^{g(a_n)},$$

где p_n — n-е простое число при пересчете всех простых чисел в порядке возрастания ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ...).

3. Если α есть $X_1, \dots, X_k$ — конечная последовательность слов в алфавите Я, то

$$g(\alpha) = 2^{g(X_1)} \cdot 3^{g(X_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{g(X_k)}.$$

Всякое дерево формул языка Я можно закодировать некоторым словом в алфавите этого языка[1]. Если некоторый способ та-

[1] Один из способов кодирования деревьев формул словами рассмотрен в [3].

кого кодирования фиксирован, то назовем *гёделевым номером дерева формул* номер слова, кодирующего это дерево.

Представимость арифметических предикатов в теории Ar

Будем называть n-местным ***арифметическим предикатом*** всякое отображение вида $\mathbf{N}^n \to \{И, Л\}$.

Арифметический предикат местности n называют ***разрешимым предикатом***, если существует алгоритм, позволяющий по произвольному набору натуральных чисел $(k_1, ..., k_n)$ выяснить, какое значение принимает предикат на этом наборе: И или Л.

Арифметический n-местный предикат $\mathcal{P}$ называют *представимым в* Ar, если существует формула $F(x_1, ..., x_n)$ языка Ar с n свободными переменными такая, что для любого набора натуральных чисел $(k_1, ... ,k_n)$ выполняются условия:

1) если $\mathcal{P}(k_1, ..., k_n) = И$, то $\vdash_{\mathrm{Ar}} F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$;

2) если $\mathcal{P}(k_1, ..., k_n) = Л$, то $\vdash_{\mathrm{Ar}} \neg F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$.

Замечание 3. Условие $\vdash_{\mathrm{Ar}} \neg F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$, используемое в определении представимого в Ar предиката, неравносильно условию $\nvdash_{\mathrm{Ar}} F(\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_n})$. ❍

П р и м е р ы. Можно доказать, что:

1) формула $x_1 = x_2$ представляет в Ar предикат равенства = ;

2) формула $\exists x_3\,(x_1 + x_3 = x_2\ \&\ x_3 \neq 0)$ представляет в Ar предикат <;

3) формула $\exists x_3\,(x_1 + x_3 = x_2)$ представляет в Ar предикат ≤;

4) формула $\exists x_3\ (x_2 = x_1 \cdot x_3)$ представляет в Ar предикат делимости. ❍

Несложно доказать, что конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание представимых в Ar предикатов также представимы в Ar.

Можно доказать, что для любого представимого в Ar предиката $\mathcal{P}$ и любой представляющей его в Ar формулы F этот предикат совпадает с предикатом $\tilde{F}$, порождаемым формулой F в стандартной интерпретации $\mathfrak{N}$.

ТЕОРЕМА. Всякий разрешимый предикат представим в Ar[1].

---

[1] Эту теорему несложно доказать на неформальном уровне.

ТЕОРЕМА. Если Ar непротиворечива, то всякий представимый в Ar арифметический предикат разрешим[1].

Можно доказать, что следующие предикаты разрешимы[2], а значит, представимы в Ar:

1) $\mathcal{F}r(n)$ – «n есть гёделев номер формулы»;

2) $\mathcal{A}x(n)$ – «n есть гёделев номер аксиомы Ar»;

3) $\mathcal{D}_1(n)$ – «n есть гёделев номер дерева вывода в Ar»;

4) $\mathcal{D}_2(n, m)$ – «n есть гёделев номер дерева вывода в Ar формулы с гёделевым номером m».

Теорема Гёделя о неполноте Ar

К. Гёделю в 1931 году удалось построить замкнутую формулу, такую что ни она сама, ни ее отрицание недоказуемы в Ar, доказав тем самым неполноту Ar. Напомним, что всякую замкнутую формулу, недоказуемую в теории вместе со своим отрицанием, называют *неразрешимым предложением* этой теории.

Перейдем к построению этой формулы. Введем сначала двуместный арифметический предикат $\mathcal{W}$, который играет особую роль в доказательстве теоремы Гёделя (будем называть его *гёделевым предикатом*). Предикат $\mathcal{W}$ зададим следующим предложением с двумя переменными:

«n есть гёделев номер некоторой формулы A с единственной свободной переменной x_1, а m есть гёделев номер дерева вывода в Ar формулы $A(\overline{n})$».

Гёделев предикат $\mathcal{W}$ обладает следующими свойствами[3]:

1) предикат $\mathcal{W}$ разрешим;

2) предикат $\mathcal{W}$ представим в Ar.

Пусть $W(x_1, x_2)$ – формула с двумя переменными x_1 и x_2, представляющая в Ar предикат $\mathcal{W}$, т. е. для любых натуральных чисел k_1, k_2:

1) если $\mathcal{W}(k_1, k_2) =$ И, то $\vdash_{\mathrm{Ar}} W(\overline{k_1}, \overline{k_2})$;

2) если $\mathcal{W}(k_1, k_2) =$ Л, то $\vdash_{\mathrm{Ar}} \neg W(\overline{k_1}, \overline{k_2})$.

---

[1] Более точную формулировку этой теоремы получают из данной формулировки заменой слов «предикат разрешим» на слова «предикат рекурсивен». В доказательстве этой теоремы используют средства теории алгоритмов, что выходит за рамки нашего курса. Это доказательство можно найти, например, в [10].

[2] Доказательство того, что эти предикаты разрешимы (точнее говоря, рекурсивны), можно найти, например, в [10].

[3] Доказательство можно найти, например, в [10].

Построим формулу с единственной свободной переменной x_1:

$$G_1(x_1) \leftrightharpoons \forall x_2 \neg W(x_1, x_2).$$

Обозначим через m – гёделев номер формулы $G_1(x_1)$. Подставив терм $\overline{m}$ в формулу $G_1(x_1)$, получим новую формулу $G_1(\overline{m})$. Обозначим ее через G, т. е.

$$G \leftrightharpoons \forall x_2 \neg W(\overline{m}, x_2).$$

Пусть T – теория, в языке которой есть термы, изображающие натуральные числа: $\overline{0}$, $\overline{1}$, ..., $\overline{n}$, ...

Гёдель ввел следующую характеристику теорий первого порядка.

Теорию T называют ***ω-противоречивой***, если существует формула $A(x)$ языка T с одной свободной переменной x такая, что:

1) $\vdash_{\mathrm{T}} A(\overline{0})$, $\vdash_{\mathrm{T}} A(\overline{1})$, ..., $\vdash_{\mathrm{T}} A(\overline{n})$, ... (т. е. $\vdash_{\mathrm{T}} A(\overline{n})$ для любого натурального n);

2) $\vdash_{\mathrm{T}} \exists x \neg A(x)$.

Теорию T называют ω-*непротиворечивой*, если формулы, удовлетворяющей условиям 1 и 2, не существует.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если теория T ω-непротиворечива, то она непротиворечива.

Доказательство. Допустим, что T ω-непротиворечива, но противоречива. Пусть P_k^n – какой-нибудь предикатный символ $Я_{\mathrm{T}}$. Обозначим через $A(x)$ формулу $P_k^n(x, ..., x)$. Тогда, так как в T выводимы все формулы, для любого натурального n $\vdash_{\mathrm{T}} A(\overline{n})$ и $\vdash_{\mathrm{T}} \exists x \neg A(x)$. Следовательно, T ω-противоречива, что противоречит допущению. ❐

Заметим, что обратное неверно. В предположении, что Ar непротиворечива, можно привести пример непротиворечивого, но ω-противоречивого расширения Ar. Этот пример будет приведен позже.

! **ТЕОРЕМА** (*Гёделя о неполноте* Ar, 1931).

1. Если Ar непротиворечива, то $\nvdash_{\mathrm{Ar}} G$.
2. Если Ar ω-непротиворечива, то $\nvdash_{\mathrm{Ar}} \neg G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Предположим, что Ar непротиворечива. Допустим, что $\vdash_{Ar} G$. Пусть $\mathcal{D}$ есть некоторый Ar-$\varnothing$-G-вывод, а p его гёделев номер. Поскольку $G = G_1(\overline{m})$, то p есть гёделев номер некоторого Ar-доказательства $\mathcal{D}$ формулы $G_1(\overline{m})$, где m есть гёделев номер формулы $G_1(x_1)$. Согласно определению гёделева предиката $\mathcal{W}$, получаем, что $\mathcal{W}(m, p) =$ И. Поскольку формула $W(x_1, x_2)$ представляет предикат $\mathcal{W}$ в Ar, то $\vdash_{Ar} W(\overline{m}, \overline{p})$. С другой стороны, согласно допущению, $\vdash_{Ar} G$, т. е. $\vdash_{Ar} \forall x_2 \neg W(\overline{m}, x_2)$, откуда по правилу $\forall$у получаем, что $\vdash_{Ar} \neg W(\overline{m}, \overline{p})$. Итак, получили, что $\vdash_{Ar} W(\overline{m}, \overline{p})$ и $\vdash_{Ar} \neg W(\overline{m}, \overline{p})$, а это противоречит предположению о непротиворечивости Ar.

2. Предположим, что Ar ω-непротиворечива. Допустим, что $\vdash_{Ar} \neg G$, т. е. $\vdash_{Ar} \neg\forall x_2 \neg W(\overline{m}, x_2)$. Тогда, используя производное PN-правило де Моргана, получаем, что $\vdash_{Ar} \exists x_2 \neg\neg W(\overline{m}, x_2)$.

Вместе с тем из допущения об ω-непротиворечивости Ar следует, что Ar непротиворечива. Отсюда, учитывая, что $\vdash_{Ar} \neg G$, получаем: $\nvdash_{Ar} G$. Следовательно, никакое натуральное число не является гёделевым номером Ar-$\varnothing$-G-вывода. Это означает, что $\mathcal{W}(m, n) =$ Л для любого n. Отсюда, согласно определению представимого в Ar предиката, для любого натурального n верно $\vdash_{Ar} \neg W(\overline{m}, \overline{n})$. В силу предположения об ω-непротиворечивости Ar, получаем, что $\nvdash_{Ar} \exists x_2 \neg\neg W(\overline{m}, x_2)$. Таким образом, пришли к противоречию: $\vdash_{Ar} \exists x_2 \neg\neg W(\overline{m}, x_2)$ и $\nvdash_{Ar} \exists x_2 \neg\neg W(\overline{m}, x_2)$, что и завершает доказательство. ❒

Замечание 4. Если Ar непротиворечива, то, согласно теореме Гёделя, $\nvdash_{Ar} G$. Следовательно, по второй теореме редукции, теория Ar + $\neg G$ непротиворечива. В то же время, если Ar ω-непротиворечива, то $\nvdash_{Ar} \neg G$, а значит, Ar + G непротиворечива. ❍

Замечание 5. Можно доказать, что теория Ar + $\neg G$ непротиворечива, но ω-противоречива. ❍

➤ Выясним, что представляет собой высказывание $\widetilde{G}$, соответствующее гёделевской неразрешимой формуле G в стандартной интерпретации $\mathfrak{N}$. Замкнутая формула G, построенная Гёделем, если ее прочитать в упрощенном виде в стандартной интерпретации, представляет собой предложение «не существует доказательства формулы G в теории Ar». Таким образом, G «говорит» о своей собственной недоказуемости в Ar (содержательно выражает свою собственную недоказуемость в Ar).

➤ Здесь просматривается аналогия с известным *парадоксом лжеца*. Суть его в следующем. Некто говорит: «Я лгу» (точнее, «То, что я сейчас говорю, есть ложь»). Таким образом, имеем предложение, говорящее о своей собственной ложности. Несложные рассуждения показывают, что это предложение не может быть ни истинным, ни ложным. Если неформальные рассуждения, которые приводят к парадоксу лжеца, формализовать, т. е. перевести на язык Ar, заменив при этом истинность на доказуемость в Ar, то никакого противоречия не возникает, но оказывается возможным построить замкнутую формулу, недоказуемую и неопровержимую в Ar (в предположении, что Ar ω-непротиворечива).

Позже, в 1936 году, Россер доказал, что достаточно ограничиться предположением о простой непротиворечивости Ar. Правда, доказательство неполноты Ar при этом несколько усложнилось. Построенная Россером замкнутая формула G_R, недоказуемая и неопровержимая в Ar, сложнее, чем гёделева формула G.

! **ТЕОРЕМА** (*Гёделя в форме Россера*). Если Ar непротиворечива, то существует такая замкнутая формула, что ни она, ни ее отрицание недоказуемы в Ar.

Существенная неполнота Ar

Итак, гёделевская замкнутая формула G истинна в стандартной интерпретации, но недоказуема в Ar (в предположении, что Ar непротиворечива).

Первое, что приходит в голову — для «исправления» ситуации добавить к аксиомам Ar формулу G в качестве новой аксиомы.

Оказывается, что для теории Ar + G также можно построить неразрешимое предложение аналогично тому, как это было сделано для самой Ar. Более того, имеет место следующая теорема.

! **ТЕОРЕМА** (*обобщение теоремы Гёделя о неполноте*). Всякое непротиворечивое эффективно аксиоматизированное расширение Ar неразрешимо и неполно.

Замечание 6. Используя обобщение теоремы Гёделя о неполноте Ar, можно в качестве упражнения доказать, что:

1) множество формул, истинных в стандартной интерпретации языка Ar, неразрешимо;

2) не существует эффективно аксиоматизированной элементарной теории, класс всех теорем которой совпадает с классом формул, истинных в стандартной интерпретации $\mathfrak{N}$. ○

Вторая теорема Гёделя о неполноте

Можно построить замкнутую формулу Con_{Ar} языка Ar, которой в стандартной интерпретации соответствует утверждение о непротиворечивости Ar, т. е. о несуществовании формулы, выводимой в Ar вместе со своим отрицанием[1]. Другими словами, формула Con_{Ar} содержательно выражает утверждение о непротиворечивости Ar (см., например, [10]): $|\widetilde{Con_{\mathrm{Ar}}}|$ = И тогда и только тогда, когда Ar непротиворечива. Такого типа формулу можно построить неединственным образом.

★ Рассмотрим пример построения формулы типа Con_{Ar}. Элементарная теория Ar непротиворечива тогда и только тогда, когда $\nvdash_{\mathrm{Ar}} \overline{0} = \overline{1}$. В самом деле, в Ar доказуема формула $\neg(\overline{0} = \overline{1})$, а значит, Ar противоречива тогда и только тогда, когда $\vdash_{\mathrm{Ar}} \overline{0} = \overline{1}$.

Таким образом, следующие три высказывания эквивалентны:

1) Ar непротиворечива;

2) $\nvdash_{\mathrm{Ar}} \overline{0} = \overline{1}$ (формула $\overline{0} = \overline{1}$ недоказуема в Ar);

3) никакое натуральное число не является гёделевым номером вывода формулы $\overline{0} = \overline{1}$.

Выразим на языке Ar последнее из этих утверждений.

Мы обозначили через $\mathcal{D}_2$ предикат, задаваемый предложением «*n* есть гёделев номер дерева вывода в Ar формулы с гёделевым номером *m*». Обозначим через q_0 – гёделев номер формулы $\overline{0} = \overline{1}$. Формула $\overline{0} = \overline{1}$ недоказуема в Ar тогда и только тогда, когда для всякого натурального m $\mathcal{D}_2(m, q_0)$ = Л: $(m)\ (\neg\mathcal{D}_2(m, q_0))$.

---

[1] Обозначение *Con* происходит от англ. *consistency* – «непротиворечивость, совместность».

Предикат $\mathcal{D}_2$ разрешим, а значит, представим в Ar. Пусть $D_2(x_1, x_2)$ – формула со свободными переменными x_1 и x_2, представляющая предикат $\mathcal{D}_2$ в Ar. Рассмотрим формулу $\forall x_1 \neg D_2(x_1, \overline{q_0})$. Прочтением этой формулы в стандартной интерпретации $\mathfrak{N}$ служит высказывание «Никакое натуральное число не является гёделевым номером вывода формулы $\overline{0} = \overline{1}$».

Таким образом, формула $\forall x_1 \neg D_2(x_1, \overline{q_0})$ служит примером формулы типа Con_{Ar}, т. е. в стандартной интерпретации ей соответствует высказывание, истинное тогда и только тогда, когда Ar непротиворечива.

Другим примером формулы типа Con_{Ar} является формула

$$\neg\exists x_1 \exists x_2 \exists y \exists z\ (D_2(y, x_1)\ \&\ D_2(z, x_1)\ \&\ N(x_1, x_2)),$$

где $N(x_1, x_2)$ – формула, представляющая предикат $\mathcal{N}$, который задается предложением: «n есть гёделев номер некоторой формулы A, а m есть гёделев номер формулы $\neg A$». ✰

! **ТЕОРЕМА** (*вторая теорема Гёделя*). Если Ar непротиворечива, то $\nvdash_{\mathrm{Ar}} Con_{\mathrm{Ar}}$.

Изложим идею доказательства. Теорема Гёделя о неполноте Ar гласит, что если Ar непротиворечива, то $\nvdash_{\mathrm{Ar}} G$. Формализуем это утверждение. В результате получим формулу $Con_{\mathrm{Ar}} \supset G$. Ее прочтение в стандартной интерпретации как раз и представляет собой первую часть теоремы Гёделя. Можно, формализовав и само доказательство теоремы Гёделя, построить Ar-вывод формулы $Con_{\mathrm{Ar}} \supset G$ и, доказать тем самым, что $\vdash_{\mathrm{Ar}} Con_{\mathrm{Ar}} \supset G$. Допустим теперь, что Ar непротиворечива и докажем, что $\nvdash_{\mathrm{Ar}} Con_{\mathrm{Ar}}$. Предположим, что $\vdash_{\mathrm{Ar}} Con_{\mathrm{Ar}}$. Тогда по правилу $\supset$у получаем, что $\vdash_{\mathrm{Ar}} G$, а это противоречит первой теореме Гёделя о неполноте.

➤ **Замечание 7**. Если Ar непротиворечива, то формула Con_{Ar} истинна в стандартной интерпретации $\mathfrak{N}$, но невыводима в Ar. ❍

➤ **Замечание 8**. Можно доказать, что если элементарная теория Ar непротиворечива, то $\nvdash_{\mathrm{Ar}} \neg Con_{\mathrm{Ar}}$. Таким образом, если Ar непротиворечива, то $\nvdash_{\mathrm{Ar}} Con_{\mathrm{Ar}}$ и $\nvdash_{\mathrm{Ar}} \neg Con_{\mathrm{Ar}}$, т. е. замкнутая формула Con_{Ar} является неразрешимым в Ar предложением, как и формула G. ❍

Значение второй теоремы Гёделя

Вторая теорема Гёделя говорит о том, что если теория Ar непротиворечива, то в ней недоказуема формула, содержательно утверждающая непротиворечивость Ar. Таким образом, вторая теорема Гёделя означает следующее:

➤ *Если* Ar *непротиворечива, то доказательство ее непротиворечивости не может быть проведено средствами самой теории* Ar (*средствами, формализуемыми в* Ar).

Это свидетельствует о том, что центральный пункт программы Гильберта[1] — доказательство непротиворечивости основных теорий надежными средствами — в принципе невыполним. Даже если надежными считать все средства формальной арифметики, то этого не хватает для доказательства непротиворечивости формальной арифметики[2].

§ 5.7. Элементарная теория ZF

Существуют различные аксиоматизации теории множеств. Наибольшую известность из них получила система аксиом *Цермело—Френкеля.*

Впервые аксиоматика теории множеств была предложена Э. Цермело[3] (1908). В дальнейшем она была развита и дополнена рядом ученых, в том числе А. Френкелем[4] (1922).

Рассмотрим теорию первого порядка ZF, называемую ***теорией Цермело—Френкеля***. Эта теория является формализацией неформальной аксиоматической теории множеств, предложенной Цермело и Френкелем.

Сигнатура языка теории ZF состоит из одного двуместного предикатного символа P_1^2. Содержательно этот символ понимают (интерпретируют) как отношение принадлежности, а предметные переменные интерпретируют (на интуитивном уровне) как переменные по множествам. В связи с этим введем привычные обозначения:

$$x \in y \leftrightharpoons P_1^2(x, y) \ \text{ и } \ x \notin y \leftrightharpoons \neg P_1(x, y).$$

---

[1] Программа Гильберта изложена в § 6.3.

[2] Генцен в 1936 году доказал непротиворечивость Ar. Однако при доказательстве непротиворечивости Ar Генцен использовал средства теории порядковых чисел, неформализуемые в Ar (трансфинитную индукцию) (см., например, [10]).

[3] Э. Цермело (1871—1953) — немецкий математик.

[4] А. Френкель (1891—1965) — израильский математик.

Среди исходных (т. е. указанных в σ) предикатных символов языка $Я_{ZF}$ отсутствует предикатный символ =, однако равенство определимо в этой теории. Введем обозначение

$$x = y \leftrightharpoons \forall z\,(z \in x \sim z \in y),$$

где z – переменная, отличная от x и y.

Пользуясь средствами PN, можно доказать, что формулы, выражающие рефлексивность, симметричность и транзитивность равенства, являются ZF-выводимыми. Можно также доказать, что ZF-выводима правая подстановочность равенства

$$\forall x\,\forall y\,(x = y \supset \forall z\,(z \in x \supset z \in y)).$$

При этом левая подстановочность равенства не может быть доказана чисто логически, т. е. только средствами PN. Поэтому необходима аксиома, выражающая это свойство равенства (см. далее ZF_1).

Введем также следующие обозначения:

$x \subseteq y \leftrightharpoons \forall z\,(z \in x \supset z \in y)$ (x есть подмножество y);

$\exists_1 x\, A(x) \leftrightharpoons \exists x\,(A(x)\,\&\,\forall y\,(A(y) \supset y = x))$ (существует единственное множество x такое, что $A(x)$).

В дальнейшем будем обозначать произвольные предметные переменные буквами x, y, z, u, v, w, f, a, b, возможно, с индексами.

Аксиомы ZF

Перечислим формулы, являющиеся аксиомами ZF, и дадим их неформальное толкование.

ZF_1 (***аксиома протяженности***): $\forall x\,\forall y\,(x = y \supset \forall z\,(x \in z \supset y \in z))$ (левая подстановочность равенства).

Замечание 1. Если ZF сразу строится как теория с равенством, то аксиома ZF_1 (ее называют аксиомой *объемности*) имеет вид

$$\forall x\,\forall y\,(\forall z\,(z \in x \sim z \in y) \supset x = y)$$

(если два множества состоят из одних и тех же элементов, то они равны). ❍

ZF_2 (***аксиома пары***): $\forall a\,\forall b\,\exists y\,\forall x\,(x \in y \sim (x = a \vee x = b))$ (для любых двух множеств a и b существует множество, называемое неупорядоченной парой, элементами которого являются a и b и только они).

Введя обозначение

$$y = \{a, b\} \leftrightharpoons \forall x\,(x \in y \sim (x = a \vee x = b)),$$

эту аксиому можем записать короче:

$$\forall a\,\forall b\,\exists y\,(y = \{a, b\}).$$

ZF_3 (***аксиома множества-суммы***):

$$\forall a\, \exists y\, \forall x\, (x \in y \sim \exists u\, (x \in u \,\&\, u \in a))$$

(для всякого множества a существует множество, называемое множеством-суммой, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат элементам множества a).

Введя обозначение

$$y = \cup\, a \leftrightharpoons \forall x\, (x \in y \sim \exists u\, (x \in u \,\&\, u \in a)),$$

эту аксиому можем записать короче:

$$\forall a\, \exists y\, (y = \cup a).$$

ZF_4 (***аксиома степени***):

$$\forall a\, \exists y\, \forall x\, (x \in y \sim x \subseteq a)$$

(для каждого множества a существует множество, называемое булеаном a, состоящее из тех и только тех элементов, которые являются подмножествами a).

Используя обозначение

$$y = \boldsymbol{B}(a) \leftrightharpoons \forall x\, (x \in y \sim x \subseteq a),$$

эту аксиому можем записать короче:

$$\forall a\, \exists y\, (y = \boldsymbol{B}(a)).$$

Замечание 2. Аксиомы ZF_2–ZF_4 представляют собой частные случаи принципа свертывания[1]. Среди аксиом ZF отсутствует схема формул, выражающая *принцип свертывания*:

$$\exists y\, \forall x\, (x \in y \sim A(x)),$$

где $A(x)$ – произвольная формула, не содержащая y. Однако следующая аксиома ZF выражает утверждение, называемое *ограниченным принципом свертывания.* ❍

ZF_5 (***аксиома свертывания***)[2]:

$$\forall a\, \exists y\, \forall x\, (x \in y \sim x \in a \,\&\, A(x)),$$

где $A(x)$ – произвольная формула, не содержащая y (для любого множества a существует множество y, состоящее из тех и только тех элементов x множества a, для которых выполняется $\tilde{A}(x)$).

---

[1] *Принцип свертывания* заключается в том, что для любого свойства **P** считается существующим множество, состоящее из тех и только тех объектов, которые обладают свойством **P** (см. § 6.1).

[2] Эту аксиому также называют *аксиомой выделения*.

Введем следующие обозначения:

$y = \varnothing \leftrightharpoons \forall x\,(x \notin y)$;

$y = \{a\} \leftrightharpoons \forall x\,(x \in y \sim x = a)$;

$y = a \cup b \leftrightharpoons \forall x\,(x \in y \sim (x \in a \vee x \in b))$;

$y = a \cap b \leftrightharpoons \forall x\,(x \in y \sim (x \in a \,\&\, x \in b))$;

$y = < a, b > \leftrightharpoons \forall x\,(x \in y \sim x = \{a\} \vee x = \{a, b\})$;

$y = a_1 \times a_2 \leftrightharpoons \forall x\,(x \in y \sim \exists z_1 \exists z_2\,(z_1 \in a_1 \,\&\, z_2 \in a_2 \,\&\, x = < z_1, z_2 >))$.

Теперь удобно ввести обозначения для известных множеств, точнее, ввести новые константы и функциональные символы[1]. Для этого сначала необходимо доказать, что формулы, выражающие существование и единственность соответствующих множеств, являются ZF-теоремами.

Используя только аксиомы $\mathrm{ZF}_1 - \mathrm{ZF}_5$, можно доказать:

$\vdash_{\mathrm{ZF}} \exists_1 y\, \forall x\,(x \notin y)$;

$\vdash_{\mathrm{ZF}} \forall a\, \forall b\, \exists_1 y\,(y = \{a, b\})$;

$\vdash_{\mathrm{ZF}} \forall a\, \exists_1 y\,(y = \{a\})$;

$\vdash_{\mathrm{ZF}} \forall a\, \exists_1 y\,(y = \boldsymbol{B}(a))$;

$\vdash_{\mathrm{ZF}} \forall a\, \exists_1 y\,(y = \cup\, a)$;

$\vdash_{\mathrm{ZF}} \forall a\, \forall b\, \exists_1 y\,(y = a \cup b)$;

$\vdash_{\mathrm{ZF}} \forall a\, \forall b\, \exists_1 y\,(y = a \cap b)$;

$\vdash_{\mathrm{ZF}} \forall a\, \forall b\, \exists_1 y\,(y = a \times b)$.

Предполагая доказанными эти утверждения, можем ввести следующие обозначения: $\varnothing$, $\{a, b\}$, $\{a\}$, $\boldsymbol{B}(a)$, $\cup a$, $a \cup b$, $a \cap b$, $a \times b$.

Введем также обозначение для упорядоченной пары[2]:

$$< a, b > \leftrightharpoons \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Можно доказать основное свойство упорядоченной пары:

$$\vdash_{\mathrm{ZF}} < a_1, a_2 > = < b_1, b_2 > \supset (a_1 = b_1 \,\&\, a_2 = b_2).$$

---

[1] Подробнее о введении новых функциональных символов и констант см., например, в [10].

[2] Впервые такое определение упорядоченной пары предложил в начале 20-х годов XX века польский математик К. Куратовский (1896–1980).

Докажем, например, построением ZF-вывода, что в ZF выводима формула, выражающая существование пустого множества: $\vdash_{ZF} \exists y\, \forall x\, (x \notin y)$.

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\forall a\, \exists y\, \forall x\, (x \in y \sim x \in a \,\&\, x \neq x)}\,ZF_5}{\exists y\, \forall x\, (x \in y \sim x \in a \,\&\, x \neq x)}\,\forall\text{у}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{x = x}} \qquad \dfrac{\dfrac{[x \in y]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x (x \in y \sim x \in a \,\&\, x \neq x)]^1}{x \in y \sim x \in a \,\&\, x \neq x}\,\forall\text{у}}{x \in y \supset x \in a \,\&\, x \neq x}\,\&\text{у}}{x \in a \,\&\, x \neq x}\,\supset\text{у}}{x \neq x}\,\&\text{у}}{x \notin y}\,\neg\text{в}\,(2)}{\forall x\, (x \notin y)}\,\forall\text{в}}{\exists y\, \forall x\, (x \notin y)}\,\exists\text{в}
}{\exists y \forall x (x \notin y)}\,\exists\text{у}\,(1)
$$

Единственность пустого множества выражается формулой

$$\forall x\, (x \notin y) \,\&\, \forall x\, (x \notin z) \supset \forall u\, ((u \in y \supset u \in z) \,\&\, (u \in z \supset u \in y))$$

или, используя для заключения импликации обозначение $y = z$,

$$\forall x\, (x \notin y) \,\&\, \forall x\, (x \notin z) \supset y = z.$$

Можно доказать построением дерева ZF-вывода, что эта формула также является ZF-теоремой.

Докажем теперь, что ZF-выводима формула, выражающая существование объединения двух множеств:

$$
\dfrac{\dfrac{\genfrac{}{}{2pt}{0}{\dfrac{\dfrac{}{\forall c\, \exists y\, \forall x\, (x \in y \sim x \in c \,\&\, (x \in a \vee x \in b))}\,ZF_5}{\exists y\, \forall x\, (x \in y \sim x \in \cup\{a, b\} \,\&\, (x \in a \vee x \in b))}\,\forall\text{у}}{\exists y\, \forall x\, (x \in y \sim x \in a \vee x \in b)}}{\forall b\, \exists y\, \forall x\, (x \in y \sim x \in a \vee x \in b)}\,\forall\text{в}}{\forall a\, \forall b\, \exists y\, \forall x\, (x \in y \sim x \in a \vee x \in b)}\,\forall\text{в}
$$

Здесь двойная черта означает, что пропущена часть дерева ZF-вывода, которую можно восстановить, пользуясь теоремой об эквивалентной замене и следующим утверждением:

$$\vdash_{ZF} ((x \in a \vee x \in b) \,\&\, x \in \cup\{a, b\}) \sim (x \in a \vee x \in b).$$

Можно также доказать, что ZF-выводима формула, выражающая единственность объединения двух множеств:

$$x = a \cup b \,\&\, y = a \cup b \supset x = y.$$

ZF_6 (***аксиома бесконечности***):

$$\exists y\, (\forall x\, (x = \varnothing \supset x \in y) \,\&\, \forall x\, (x \in y \supset \forall u\, (u = x \cup \{x\} \supset u \in y)))$$

(существует стандартное бесконечное множество).

Предполагая доказанным существование и единственность пустого множества и объединения двух множеств, можем довольно коротко записать эту аксиому:

$$\exists y\,(\varnothing \in y\ \&\ \forall x\,(x \in y \supset x \cup \{x\} \in y)).$$

Элементами стандартного бесконечного множества являются следующие множества:

$$\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}\},\ \ldots$$

(очевидно, $\varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ и т. д.)

Если рассмотреть эти множества как изображения в ZF натуральных чисел, то можно построить модель Ar и развить всю арифметику натуральных чисел. При этом все аксиомы Ar (точнее, их переводы на $Я_{ZF}$) будут ZF-теоремами.

Аксиома бесконечности − центральная аксиома для классической математики.

ZF_7 (***аксиома регулярности***)[1]:

$$\forall a\,(a \neq \varnothing \supset \exists y\,(y \in a\ \&\ \forall z\,(z = y \cap a \supset z = \varnothing)))$$

(всякое непустое множество a имеет элемент (множество), не имеющий общих элементов с a, т. е. минимальный в смысле отношения $\in$).

Предполагая доказанным существование и единственность пересечения двух множеств, можем записать эту аксиому короче:

$$\forall a\,(a \neq \varnothing \supset \exists y\,(y \in a\ \&\ y \cap a = \varnothing)).$$

Благодаря аксиоме регулярности удается избежать известных парадоксов (противоречий) теории множеств.

Используя аксиому ZF_7, докажем ZF-выводимимость формулы, выражающей, что никакое множество не является элементом самого себя:

$$\vdash_{ZF} \neg\exists x\,(x \in x) \text{ или, что эквивалентно, } \vdash_{ZF} \forall x\,(x \notin x).$$

Построим соответствующее дерево ZF-вывода:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\overline{x\in\{x\}}}}{\{x\}\neq\varnothing}\quad\dfrac{\overline{\forall a(a\neq\varnothing\supset\exists b(b\in\{a\}\,\&\,b\cap\{a\}=\varnothing))}}{\{x\}\neq\varnothing\supset\exists b(b\in\{x\}\,\&\,b\cap\{x\}=\varnothing)}}{\exists b(b\in\{x\}\,\&\,b\cap\{x\}=\varnothing)}\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[b\in\{x\}\,\&\,b\cap\{x\}=\varnothing]^1}{b\in\{x\}}}{b=x}\quad\dfrac{[(b\in\{x\}\,\&\,b\cap\{x\}=\varnothing)]^1}{b\cap\{x\}=\varnothing}}{x\cap\{x\}=\varnothing}\quad\dfrac{[x\in x]^2\quad\overline{\overline{x\in\{x\}}}}{x\cap\{x\}\neq\varnothing}}{x\notin x}\neg\text{в}(2)}{x\notin x}\exists\text{у}(1)$$

$$\dfrac{x\notin x}{\forall x(x\notin x)}\forall\text{в}$$

[1] Эту аксиому называют также *аксиомой ограничения* или *аксиомой фундирования.*

Замечание 3. Используя аксиому регулярности, можно доказать построением дерева ZF-вывода:

$$\vdash_{ZF} \neg \exists x\, \exists y\, (x \in y \,\&\, y \in x). \;\bigcirc$$

Для того чтобы кратко записать следующую аксиому, выразим на языке ZF свойство «быть функцией»:

$$\mathrm{Fnc}(f) \leftrightharpoons \forall u\, (u \in f \supset \exists x\, \exists y\, (u = \langle x, y \rangle))\, \&$$
$$\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (\langle x, y \rangle \in f \,\&\, \langle x, z \rangle \in f \supset y = z).$$

Введем привычное обозначение:

$$y = f(x) \leftrightharpoons \mathrm{Fnc}(f)\, \&\, \forall u\, (u = \langle x, y \rangle \supset u \in f).$$

ZF_8 (***аксиома замещения***)[1]:

$$\forall a\, \forall f\, (\mathrm{Fnc}(f) \supset \exists b\, \forall y\, (y \in b \sim \exists x\, (x \in a \,\&\, y = f(x))))$$

(для любого множества a и любой функции f существует множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые являются образами элементов множества a при отображении f).

ZF_9 (***аксиома выбора***):

$$\forall a\, (\forall y\, (y \in a \supset y \neq \varnothing)\, \&\, \forall y\, \forall z\, (y \in a \,\&\, z \in a \,\&\, z \neq y \supset y \cap z = \varnothing) \supset$$
$$\supset \exists b\, \forall y\, (y \in a \supset \exists_1 u (u \in y \cap b)))$$

(для любого множества a непустых попарно непересекающихся множеств существует множество b, которое содержит в точности по одному элементу из каждого множества, являющегося элементом a).

Аксиома выбора была предложена Э. Цермело в 1904 г.

Замечание 4. Такая формулировка аксиомы выбора не исключает того, что множество выбора помимо выбранных из множества a элементов содержит еще какие-то элементы. Однако приведенную формулировку можно дополнить (продолжить) словами «и ничего, кроме этих элементов», получив при этом равнообъемную теорию. Формула, соответствующая такой формулировке, имеет вид

$$\forall a\, (\forall y\, (y \in a \supset y \neq \varnothing)\, \&\, \forall y\, \forall z\, (y \in a \,\&\, z \in a \,\&\, z \neq y \supset y \cap z = \varnothing) \supset$$
$$\supset \exists b\, \forall y\, (y \in b \sim \exists w\, (w \in a \,\&\, \{y\} = w \cap b))).$$

Для доказательства достаточно рассмотреть формулу

$$\forall a\, (\forall y\, (y \in a \supset y \neq \varnothing)\, \&\, \forall y\, \forall z\, (y \in a \,\&\, z \in a \,\&\, z \neq y \supset y \cap z = \varnothing) \supset$$
$$\supset \exists b\, \forall y\, (y \in b \sim y \in \cup a \,\&\, \forall y\, (y \in a \supset \exists_1 u\, (u \in y \cap b)))).$$

---

[1] Эта аксиома была предложена А. Френкелем (1922). Ее называют также *аксиомой подстановки*.

Можно вместо формулы ZF_9 использовать и такую формулу:

$$\forall a\ \exists f\ (\mathrm{Fnc}(f)\ \&\ \forall x\ (x \in a\ \&\ x \neq \varnothing \supset \exists y\ (y = f(x)\ \&\ y \in x))).$$

Эта формула выражает формулировку аксиомы выбора в терминах функций: для любого множества a существует функция f (функция выбора) такая, что $f(x) \in x$ для всякого непустого элемента x из множества a.

Основные свойства теории ZF

1. ZF — очень сильная теория. Все обычные способы рассуждений, принятые в математике, формализованы в ZF. В рамках теории ZF можно развить всю арифметику натуральных чисел, при этом все аксиомы Ar (точнее, их переводы на $Я_{ZF}$) являются ZF-теоремами. Средствами ZF можно также развить теорию целых, рациональных чисел, основные разделы анализа. Все известные теоремы классической математики можно формализовать и вывести в ZF. Благодаря аксиоме ZF_8, предложенной Френкелем, можно полностью развить теорию кардинальных чисел.

2. Все известные парадоксы не проходят в ZF.

3. Если ZF непротиворечива, то ее непротиворечивость нельзя доказать средствами ZF.

4. Если ZF непротиворечива, то она неполна и неразрешима.

Аксиома выбора

Теперь остановимся более подробно на аксиоме выбора[1)].

Аксиому выбора относят к самым знаменитым и наиболее оспариваемым утверждениям теории множеств. Чем же вызвана ее известность?

Во-первых, аксиома выбора имеет чисто экзистенциональный характер, и ее использование ведет к неэффективным конструкциям и доказательствам. Во-вторых, использование аксиомы выбора в общей формулировке приводит к странным результатам, противоречащим интуиции (см. § 6.2).

Встает вопрос: можно ли отказаться от использования аксиомы выбора?

Во многих областях математики действительно можно без нее обойтись. Например, она не нужна там, где объектами являются натуральные числа, конечные множества, алгоритмы, компьютерные программы. Не используют аксиому выбора и при работе с логическими исчислениями, где объектами являются формулы — слова в фиксированном алфавите. Математики-конструктивисты в

[1)] Аксиома выбора обсуждается также в § 6.2.

своих построениях и рассуждениях обходятся без аксиомы выбора (см. § 6.4).

➤ В то же время некоторые известные результаты теории множеств и математического анализа доказывают с помощью аксиомы выбора. Перечислим некоторые из таких теорем:

1. Определения предела функции по Коши (на языке ε-δ) и по Гейне (через пределы последовательностей) эквивалентны.

2. Если x – предельная точка множества E, то существует последовательность точек из E, отличных от x, сходящаяся к x.

3. Всякое векторное пространство имеет базис.

4. У всякого поля существует, и притом единственное с точностью до изоморфизма, алгебраическое замыкание.

5. Всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество.

6. Счетное объединение счетных множеств счетно.

7. Мера Лебега обладает свойством счетной аддитивности.

8. Любые два множества сравнимы по мощности.

9. Существует неизмеримое по Лебегу числовое множество.

Сначала была надежда получить доказательства этих утверждений без аксиомы выбора, однако впоследствии было доказано, что это невозможно. Поэтому отказ от аксиомы выбора повлек бы ощутимые потери для классической математики.

➤ Позже были *обнаружены утверждения, эквивалентные аксиоме выбора*. Приведем некоторые из них:

1. Всякое множество может быть вполне упорядочено, т. е. упорядочено таким образом, чтобы всякое его непустое подмножество имело наименьший элемент (*теорема Цермело* или принцип вполне упорядочения).

2. Если в частично упорядоченном множестве E всякая цепь (т. е. всякое линейно упорядоченное подмножество) ограничена сверху, то E имеет максимальный элемент (*лемма Цорна* или принцип максимальности).

3. Всякое бесконечное множество E равномощно множеству $E \times E$.

Все эти обстоятельства вызвали интерес к аксиоме выбора, многочисленные споры и исследования роли и места аксиомы выбора (АВ) в аксиоматическом построении теории множеств. Основными при этом являлись два вопроса:

1) о совместимости АВ с остальными аксиомами ZF;

2) о независимости АВ от остальных аксиом ZF.

Обозначим через ZF* – элементарную теорию, которую получают из ZF удалением АВ, т. е. теорию с аксиомами ZF_1–ZF_8 (ZF без аксиомы выбора). Теперь основные вопросы можно переформулировать так:

1) непротиворечива ли ZF* + AB (если ZF* непротиворечива)?

2) является ли AB теоремой ZF*?

Если ZF* + AB противоречива, то следует подвергнуть сомнению все результаты, доказываемые с помощью AB.

Если AB – теорема ZF*, то все «странности» результатов, полученных с помощью AB, следует отнести на счет каких-то аксиом ZF*. Напомним, что в силу теоремы о редукции, AB является теоремой ZF* тогда и только тогда, когда теория ZF* + ¬AB противоречива.

Проблема континуума

К истории аксиомы выбора примыкает так называемая *проблема континуума.*

В 1878 году Кантор выдвинул предположение о том, что всякое бесконечное подмножество множества мощности континуума либо равномощно множеству натуральных чисел **N**, либо имеет мощность континуума.

➤➤ В дальнейшем гипотеза континуума (или ***континуум-гипотеза***) получила такую формулировку:

Не существует множества с мощностью, промежуточной между счетной и континуальной.

Символически континуум-гипотезу можно записать так:

$$\neg(\mathsf{E}M)\ (|\mathbf{N}| < |\,M\,| < |[0;\ 1]|)$$

или

$$\neg(\mathsf{E}M)\ (\aleph_0 < |\,M\,| < 2^{\aleph_0}).$$

➤➤ В 1900 году Гильберт сформулировал ***обобщенную континуум-гипотезу:***

Для любого бесконечного множества E не существует множества с мощностью, промежуточной между мощностью E и мощностью $\boldsymbol{B}(E)$ – множества всех подмножеств множества E. Символически обобщенную континуум-гипотезу можно записать так:

$$(E)\ \neg(\mathsf{E}M)\ (|\,E\,| < |\,M\,| < |\boldsymbol{B}(E)|),$$

где E – переменная по классу *бесконечных* множеств.

Относительно континуум-гипотезы и обобщенной континуум-гипотезы долго оставалась нерешенной проблема выводимости их в ZF и совместности с аксиомами ZF. Задачу доказать континуум-гипотезу Гильберт назвал первой в списке из 23 основных нерешенных проблем математики (на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году).

Важнейшие результаты о непротиворечивости и независимости в основаниях теории множеств

В итоге многолетних исследований в основаниях теории множеств был получен ряд важнейших результатов, связанных с аксиомой выбора и гипотезой континуума, которые пролили свет на роль этих утверждений в теории множеств, на их взаимосвязь с другими принципами этой теории.

Прежде чем перейти к изложению этих результатов, введем следующие обозначения:

КГ – формула $Я_{ZF}$, выражающая континуум-гипотезу;

ОКГ – формула $Я_{ZF}$, выражающая обобщенную континуум-гипотезу.

Напомним, что АВ – обозначение аксиомы выбора ZF_9.

➤➤ Перечислим важнейшие результаты, связанные с аксиомой выбора и гипотезой континуума:

1. Если теория ZF* непротиворечива, то теория ZF* + АВ + + ОКГ непротиворечива (Гёдель, 1938–40).

Из этого результата вытекает, что если ZF* непротиворечива, то:

$$\nvdash_{ZF^*} \neg АВ,\ \nvdash_{ZF} \neg ОКГ,\ \nvdash_{ZF} \neg КГ.$$

2. Формула ОКГ $\supset$ АВ является ZF*-теоремой (Серпинский, 1947).

3. Если теория ZF* непротиворечива, то:

а) теория ZF* + ¬АВ непротиворечива;

б) теория ZF* + АВ + ¬КГ непротиворечива (Коэн, 1961–63).

Из этих результатов вытекает, что если ZF* непротиворечива, то:

а′) $\nvdash_{ZF^*}$ АВ; б′) $\nvdash_{ZF}$ КГ и $\nvdash_{ZF}$ ОКГ.

Таким образом, если ZF* непротиворечива, то

$$\nvdash_{ZF^*} АВ,\ \nvdash_{ZF^*} \neg АВ,\ \nvdash_{ZF} КГ,\ \nvdash_{ZF} \neg КГ,\ \nvdash_{ZF} ОКГ,\ \nvdash_{ZF} \neg ОКГ.$$

Если теория ZF* непротиворечива, то добавляя к ZF* всевозможные комбинации из АВ (или ¬АВ) и КГ (или ¬КГ), будем получать непротиворечивые теории:

ZF* + АВ + КГ;

ZF* + АВ + ¬КГ;

ZF* + ¬АВ + КГ;

ZF* + ¬АВ + ¬КГ.

Таким образом, АВ и КГ полностью не зависят от аксиом ZF*.

УПРАЖНЕНИЕ

Докажите, что:

1) ZF* + ¬АВ + ОКГ – противоречивая теория;

2) ZF* + ¬АВ + ¬ОКГ – непротиворечивая теория.

Глава 6

ПРОБЛЕМЫ ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ[1)]

§ 6.1. Парадоксы теории множеств

На протяжении XIX века велась работа по созданию оснований математики и, прежде всего, математического анализа. В этой работе принимали активное участие крупные математики XIX века, такие как Больцано, Вейерштрасс, Дедекинд и др.

Важнейшим событием в истории математики явилось создание теории множеств немецким математиком Георгом Кантором (1845–1918) в последней четверти XIX века.

Теоретико-множественный подход, получивший широкое развитие в конце XIX века, позволил возвести математику на прочном и, казалось, надежном *фундаменте* — канторовой теории множеств [12]. Развитие канторовой теории множеств привело к возможности выразить в терминах этой теории все основные математические понятия. Такие понятия, как натуральное число, целое число, рациональное число, функция, фундаментальная последовательность, действительное число, стало возможным определить в теоретико-множественных терминах, т. е. в конечном итоге рассматривать как некоторые множества.

Стройность канторовой теории стимулировала построение на ее основе математического анализа, в частности создание теории интегрирования Лебега. Удобство обращения с теоретико-множественными объектами обеспечивалось использованием привычных, традиционных логических средств.

Возможность построения математики на теоретико-множественном фундаменте Гильберт характеризовал как «рай для математиков», а уже построенную на этой основе часть математики называл «симфонией бесконечного».

[1)] При написании этой главы были использованы материалы лекций Ф. А. Кабакова, статьи и книги, указанные в конце главы. Ссылки в этой главе даются на литературу именно из этого списка.

Восторги сменились шоковым состоянием, когда была обнаружена противоречивость канторовой теории множеств.

На рубеже XIX—XX веков были открыты так называемые парадоксы теории множеств. Термин *парадокс* происходит от греческого παραδοξοζ — «странный, неожиданный, противоречащий общему мнению». В логике как синоним используется термин *антиномия*, происходящий от греческого αντινομια — «против закона» («противоречие в законе»).

➤ Сущность ***парадокса*** заключается в том, что с помощью логически правильных рассуждений удается обосновать (доказать средствами данной теории) одновременно некоторое утверждение и его отрицание, т. е. *противоречие*. Это означает противоречивость данной теории. По законам логики в противоречивой теории доказуемо «все, что угодно», т. е. любое утверждение.

Наиболее известным парадоксом теории множеств является *парадокс Рассела*[1)]. Прежде чем изложить его суть, заметим, что среди множеств есть такие множества, которые являются элементами самих себя (например, множество всех множеств), и такие множества, которые не являются собственными элементами (например, множество натуральных чисел).

➤ *Парадокс Рассела* (1902). Пусть S — множество всех множеств, которые не являются элементами самих себя: $S = \{x \mid x \notin x\}$. Возникает вопрос: является множество S своим собственным элементом или нет? ($S \in S$?)

Покажем, соблюдая привычные правила логики, что доказуемо каждое из двух утверждений: $S \in S$ и $S \notin S$.

Прежде всего отметим, что, согласно определению множества S,

$$(x)\ (x \in S \leftrightarrow x \notin x),\text{ а следовательно, } S \in S \leftrightarrow S \notin S.$$

Отсюда получаем:

$$S \in S \to S \notin S; \tag{а}$$

$$S \notin S \to S \in S. \tag{б}$$

1. Сначала докажем приведением к нелепости, что $S \notin S$. Допустим, что $S \in S$. Тогда с учетом (а) получаем, что $S \notin S$; а это противоречит допущению $S \in S$. Таким образом, $S \notin S$.

2. Докажем теперь, что $S \in S$. Действительно, уже доказано, что $S \notin S$. Отсюда, учитывая (б), сразу получаем: $S \in S$.

Итак, доказаны оба утверждения: $S \in S$ и $S \notin S$.

---

1) Бертран Рассел (1872—1970) — английский философ, логик, математик.

Замечание 1. Можно построить деревья этих двух доказательств. Учитывая, что символ $\leftrightarrow$ обозначает конъюнкцию двух импликаций, получаем дерево доказательства утверждения $\mathrm{S} \notin \mathrm{S}$:

$$\cfrac{[\mathrm{S}\in \mathrm{S}]^1 \qquad \cfrac{[\mathrm{S}\in \mathrm{S}]^1 \qquad \cfrac{\cfrac{(x)\ (x\in \mathrm{S}\leftrightarrow x\notin x)}{\mathrm{S}\in \mathrm{S}\leftrightarrow \mathrm{S}\notin \mathrm{S}}\,\forall\text{у}}{\mathrm{S}\in \mathrm{S}\to \mathrm{S}\notin \mathrm{S}}\,\&\text{у}}{\mathrm{S}\notin \mathrm{S}}\,\supset\text{у}}{\mathrm{S}\notin \mathrm{S}}\,\neg\text{в}\ (1) \tag{1}$$

Обозначив построенное дерево через $\dfrac{(x)\ (x\in \mathrm{S}\leftrightarrow x\notin x)}{\mathrm{S}\notin \mathrm{S}}$, построим дерево вывода утверждения $\mathrm{S} \in \mathrm{S}$:

$$\cfrac{\cfrac{(x)\ (x\in \mathrm{S}\leftrightarrow x\notin x)}{\mathrm{S}\notin \mathrm{S}} \qquad \cfrac{\cfrac{(x)\ (x\in \mathrm{S}\leftrightarrow x\notin x)}{\mathrm{S}\in \mathrm{S}\leftrightarrow \mathrm{S}\notin \mathrm{S}}\,\forall\text{у}}{\mathrm{S}\notin \mathrm{S}\to \mathrm{S}\in \mathrm{S}}\,\&\text{у}}{\mathrm{S}\in \mathrm{S}}\,\supset\text{у}\ \bigcirc \tag{2}$$

Замечание 2. Конструкция, использованная в парадоксе Рассела, близка к конструкции известного *парадокса брадобрея*: «В деревне живет цирюльник, который бреет тех и только тех, кто не бреет себя сам. Кто бреет самого цирюльника?» ❍

➤ *Парадокс Кантора* (1899). Пусть U − множество всех множеств, а $\boldsymbol{B}(\mathrm{U})$ − множество всех его подмножеств. По теореме Кантора мощность всякого множества меньше мощности множества всех его подмножеств. Следовательно, $|\mathrm{U}| < |\boldsymbol{B}(\mathrm{U})|$, а значит, $|\mathrm{U}| \leqslant |\boldsymbol{B}(\mathrm{U})|$, но $|\mathrm{U}| \neq |\boldsymbol{B}(\mathrm{U})|$. Кроме того, $|\boldsymbol{B}(\mathrm{U})| \leqslant |\mathrm{U}|$, поскольку $\boldsymbol{B}(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{U}$. Следовательно, по теореме Кантора−Бернштейна, $|\mathrm{U}| = |\boldsymbol{B}(\mathrm{U})|$. Таким образом, имеем следующее противоречие: $|\mathrm{U}| = |\boldsymbol{B}(\mathrm{U})|$ и $|\mathrm{U}| \neq |\boldsymbol{B}(\mathrm{U})|$.

Были также обнаружены и другие парадоксы (см., например, [6], [10]).

Открытие парадоксов теории множеств поставило перед математиками проблему: выяснить, в чем состоит причина парадоксов. Мнения математиков по этому поводу разделились. До сих пор не найдено такого решения этой проблемы, которое удовлетворило бы всех.

Принцип свертывания

Первые выводы из парадоксов заключались в следующем. Если проанализировать парадокс Рассела, то можно заметить, что при задании множества S была использована очень распространенная в математике конструкция, позволяющая образовывать множества с помощью тех или иных свойств объектов. Желая задать какое-либо множество, мы часто пишем $M = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}$, где $\mathcal{P}$ — некоторое свойство объектов. Задавая таким образом множества, мы пользуемся так называемым принципом свертывания.

! ***Принцип свертывания*** заключается в том, что для любого свойства $\mathcal{P}$ считается существующим множество, состоящее из тех и только тех объектов, которые обладают свойством $\mathcal{P}$. Символически принцип свертывания можно записать следующим образом:

$$(\mathsf{E}M)\ (x)\ (x \in M \leftrightarrow \mathcal{P}(x)),$$

где $\mathcal{P}$ — произвольное свойство.

Поскольку принцип свертывания используют для задания множества S в парадоксе Рассела, а также в ряде других парадоксов, именно в этом принципе была усмотрена причина парадоксов.

Замечание 3. Вернемся к деревьям доказательства (1) и (2) в парадоксе Рассела. Оба дерева в качестве допущения (зеленого листа) имеют предложение

$$(x)\ (x \in \mathrm{S} \leftrightarrow x \notin x).$$

Таким образом, оба рассуждения неявно исходят из предположения, что множество S с указанным свойством существует:

$$(\mathsf{E}s)\ (x)\ (x \in s \leftrightarrow x \notin x),$$

где s выступает как переменная по совокупности всех множеств. Если использование этого допущения сделать явным, то выявляется следующая логическая структура рассуждения:

$$\dfrac{[(\mathsf{E}s)\ (x)\ (x\in s\leftrightarrow x\notin x)]^1 \qquad \dfrac{\dfrac{[(x)\ (x\in s\leftrightarrow x\notin x)]^2}{s\in s} \quad \dfrac{[(x)\ (x\in s\leftrightarrow x\notin x)]^2}{s\notin s}}{F\,\&\,\neg F}\,\neg\text{у}}{\dfrac{F\,\&\,\neg F}{\neg(\mathsf{E}s)\ (x)\ (x\in s\leftrightarrow x\notin x)}\,\neg\text{в}^*(1)}\,\exists\text{у}\ (2)$$

Здесь F — произвольная формула, не содержащая свободно s (что требуется для применения правила $\exists$у даже на неформальном уровне). В этом дереве на неформальном уровне применяется условное правило $\neg$в*, эквивалентное правилу $\neg$в: $\dfrac{\overset{[\mathcal{A}]}{\mathcal{B} \,\&\, \neg\mathcal{B}}}{\neg\mathcal{A}}\,{\scriptstyle \neg\text{в}^*}$.

Кроме того, для деревьев (1) и (2) соответственно использованы обозначения

$$\dfrac{(x)\ (x \in s \leftrightarrow x \notin x)}{\overline{s \notin s}} \quad \text{и} \quad \dfrac{(x)\ (x \in s \leftrightarrow x \notin x)}{\overline{s \in s}}$$

Итак, только средствами логики доказано следующее утверждение:

$$\neg(\mathsf{E}s)\ (x)\ (x \in s \leftrightarrow x \notin x).$$

В то же время, согласно принципу свертывания,

$$(\mathsf{E}s)\ (x)\ (x \in s \leftrightarrow x \notin x).$$

Таким образом, имеем противоречие с принципом свертывания, а значит, теория, имеющая принцип свертывания в качестве аксиомы, противоречива. ❍

➤➤ Цермело в 1908 году предложил ограничить принцип свертывания, добавив к условию $\mathcal{P}(x)$, определяющему множество M, дополнительное условие: элементы M берутся из некоторого заданного множества E, существование которого обосновано надежными средствами (выведено из некоторого списка аксиом). Символически ***ограниченный принцип свертывания*** можно записать следующим образом:

$$(\mathsf{E}M)\ (x)\ (x \in M \leftrightarrow \mathcal{P}(x)\ \&\ x \in E).$$

Заметим, что в действительности, задавая множество, мы часто пишем: $M = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$.

Именно *ограниченный принцип свертывания* был взят в качестве одной из аксиом системы, предложенной Цермело и дополненной Френкелем при аксиоматическом построении теории множеств. В аксиоматической теории Цермело−Френкеля (ZF) никакие известные парадоксы не проходят (см. § 5.7).

Однако избавление от обнаруженных парадоксов не спасает и не страхует теорию множеств от новых парадоксов. Хотелось бы иметь гарантию того, что в дальнейшем не будут обнаружены новые парадоксы. Поэтому по-прежнему оставалась актуальной задача «спасения» математики. Фактически перед математиками стояла задача переосмысления логических средств, используемых в математических рассуждениях, надежности этих средств и соответствия их существу математики.

Гарантировать невозможность противоречий в математической теории могло лишь доказательство непротиворечивости этой теории.

§6.2. Кризис оснований математики

Открытие парадоксов ознаменовало начало кризиса оснований математики на рубеже XIX и XX веков. Однако сущность кризиса не исчерпывалась только парадоксами, а заключалась в следующем.

Во-первых, к концу XIX века среди математиков наметились существенные расхождения во взглядах на основные математические понятия и принципы, а также на логические принципы, используемые в математике.

Во-вторых, возникли расхождения во взглядах на выбор путей избавления от парадоксов.

Наконец, и по-видимому это самое главное, существовали принципиальные трудности обоснования непротиворечивости математики, ее «спасения», многие из которых не преодолены до сих пор.

Критика некоторых теоретико-множественных принципов

Параллельно с открытием парадоксов (и независимо от этого) был подвергнут критике целый ряд теоретико-множественных и логических принципов.

Эта критика прежде всего была направлена на абстракцию актуальной бесконечности. ***Абстракция актуальной бесконечности*** разрешает рассматривать «завершенные» бесконечные совокупности одновременно существующих объектов (т. е. рассматривать бесконечные множества как завершенные объекты, образования, представленные сразу всеми своими элементами). Эта абстракция позволяет считать, что все акты построения бесконечного множества состоялись и бесконечное множество «готово предстать перед нашим умственным взором».

Эта фантастическая абстракция не имеет аналогов в реальной жизни, поскольку реально невозможно завершить бесконечный процесс построения бесконечного множества.

Неприятие абстракции актуальной бесконечности началось задолго до открытия парадоксов, чуть ли не с античных времен. Критическое отношение к абстракции актуальной бесконечности поддерживали такие математики, как Гаусс, Коши и Кронекер.

В обсуждении ограничений математических абстракций определенными рамками активное участие принимали Борель, Лебег, Бэр и Пуанкаре. Наиболее непримиримым критиком классического теоретико-множественного подхода стал голландский математик Брауэр. К этой критике позже присоединился Г. Вейль.

Другим теоретико-множественным принципом, вызывавшим многочисленные споры среди математиков, явилась знаменитая ***аксиома выбора***. Впервые она была явно сформулирована Цермело в 1904 году. Напомним формулировку *аксиомы выбора*: каково бы ни было непустое семейство $\mathfrak{A}$ (попарно непересекающихся) непустых множеств, существует множество B, содержащее в точности по одному элементу из каждого элемента семейства $\mathfrak{A}$.

Споры вокруг аксиомы выбора были вызваны следующими обстоятельствами. С одной стороны, очевидность утверждения. С другой — неэффективность понимания существования множества выбора B, а также странные результаты, получаемые с использованием аксиомы выбора.

Ситуация осложнялась тем, что аксиому выбора используют при доказательстве многих известных теорем (см. § 5.7). Сначала была надежда доказать эти утверждения без аксиомы выбора, однако впоследствии было доказано, что это невозможно.

➤➤ Итак, *суть критики в адрес аксиомы выбора* заключалась в следующем.

Во-первых, аксиома выбора носит неэффективный характер — совершенно неясно, как устроено множество выбора B.

Во-вторых, аксиома выбора дает возможность получить поразительные, странные с позиции здравого смысла результаты. Один из наиболее известных результатов такого рода, полученных с помощью аксиомы выбора, — доказательство того, что всякий шар можно разбить на конечное число частей, из которых перемещением в пространстве можно составить два точно таких же шара![1)]

Одни математики пытались вывести аксиому выбора из остальных аксиом теории множеств, другие призывали отказаться от нее. Оказалось, что вывести ее невозможно. Невозможно и отказаться от аксиомы выбора без существенных потерь. Это было доказано в уточненном виде средствами математической логики (см. § 5.7).

[1)] Это так называемый парадокс Банаха—Тарского (1920). Термин «парадокс» применяется к этому результату ввиду его поразительной странности.

Критика некоторых логических законов традиционной логики

Основными объектами критики стали такие логические законы, как закон исключенного третьего $A \vee \neg A$ (его латинское название – ***tertium non datur***), закон снятия двойного отрицания $\neg\neg A \supset A$, а следовательно, и опирающийся на него метод доказательства от противного (см. § 2.10).

➤➤ Математические рассуждения, использующие без ограничений законы исключенного третьего и снятия двойного отрицания, называют *классическими*, а традиционную логику, включающую эти законы, ***классической логикой***. Непризнание универсальности законов $A \vee \neg A$ и $\neg\neg A \supset A$, а значит, вообще говоря, и метода доказательства от противного, характерно для так называемой ***интуиционистской логики***, которую позже стали также называть *конструктивной логикой*.

Эти законы исторически возникли при рассуждениях о конечных множествах и в дальнейшем необоснованно, по мнению критиков этих законов, были перенесены в рассуждения о бесконечных множествах.

Такая позиция тесно связана с особым эффективным пониманием логических связок, в частности дизъюнкции, а также утверждений о существовании.

Дизъюнкцию $A \vee B$ считают эффективно обоснованной, если обоснован хотя бы один из ее членов. При таком понимании дизъюнкции закон исключенного третьего $A \vee \neg A$ не может быть признан в качестве универсального. Классически же для доказательства $A \vee B$ достаточно установить $\neg(\neg A \ \& \ \neg B)$, т. е. опровергнуть утверждение о неверности обоих ее членов.

Утверждение о существовании объекта с заданным свойством $\mathcal{P}$ считают эффективно обоснованным, если построен сам объект, обладающий требуемым свойством, или, по крайней мере, предъявлен способ потенциально осуществимого построения такого объекта.

При таком понимании утверждений о существовании признаются лишь эффективные доказательства *теорем существования*, т. е. теорем, которые утверждают существование какого-то объекта с заданным свойством.

➤➤ Доказательство теоремы о существовании является ***эффективным доказательством***, если предъявлен объект (или способ его построения) и доказано, что этот объект обладает требуемым свойством (см. § 2.10). Неэффективные доказательства неприемлемы с позиций конструктивно мыслящих математиков.

➤➤ *Метод доказательства от противного*, опирающийся на закон снятия двойного отрицания, является одним из источников неэффективных доказательств теорем существования (см. § 2.10), а потому не признается математиками, стоящими на конструктивных позициях.

Сущность критики закона исключенного третьего

Сначала приведем два примера.

➤ **Пример** (Ван Дален, [16]).

Рассмотрим следующее утверждение и его доказательство.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Существуют два иррациональных числа a и b такие, что число a^b рационально.

Доказательство. Доказательство проведем разбором случаев. Рассмотрим число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Если число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рационально, то достаточно положить $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$. Если число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ иррационально, то достаточно положить $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $b = \sqrt{2}$. Тогда $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$, т. е. a^b — рациональное число. Таким образом, мы доказали, что требуемые a и b существуют в обоих случаях. ❐

Это короткое доказательство обладает не очень приятной особенностью: по завершении его так и не проясняется ситуация — чему же равны a и b. Из этого доказательства невозможно извлечь информацию о том, какой именно из указанных случаев имеет место. Причина заключается в использовании при разборе случаев дизъюнктивного предложения «$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \boldsymbol{Q}$ или $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \boldsymbol{Q}$», имеющего структуру закона исключенного третьего $A \vee \neg A$. Именно благодаря использованию этого классического закона, приведенное доказательство носит неэффективный характер и является типичным образцом так называемого доказательства «чистого существования».

Замечание. На самом деле ту же теорему можно доказать и эффективно, предъявив соответствующие a и b. Действительно, в области теории чисел получен результат[1)], из которого следует, что $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ —

---

1) А. О. Гельфонд и Т. Шнайдер в 1934 г. доказали, что если α — алгебраическое число, неравное 0 и 1, а β — алгебраическое иррациональное число, то α^β — трансцендентное число.

трансцендентное, а следовательно, иррациональное число. Таким образом, можно вполне определенно взять $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $b = \sqrt{2}$.

Приведем еще одну пару требуемых чисел: $a = \sqrt{3}$, $b = \log_3 4$. Можно доказать, что каждое из этих чисел иррационально. При этом $a^b = \sqrt{3}^{\log_3 4} = \sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} 2} = 2$ – рациональное число.

В рассмотренном случае, кроме классического неэффективного доказательства, удается найти и эффективное доказательство. Однако это не всегда возможно. ○

Пример (А. Гейтинг, [3]).

Рассмотрим два синтаксически одинаковых определения двух натуральных чисел k и l:

1) k есть наибольшее простое число, такое, что $k - 1$ тоже просто; если же такого числа не существует, то $k = 1$.

2) l есть наибольшее простое число, такое, что $l - 2$ также просто; если же такого числа не существует, то $l = 1$.

Ясно, что определение 1 задает число $k = 3$, а определение 2 не дает нам значение l, так как проблема близнецов[1] пока не решена.

Математики, мыслящие классически, принимают оба определения. Конструктивно мыслящие математики определение 2 не принимают. ○

Рассмотрим общие соображения, приведшие критиков закона исключенного третьего $A \vee \neg A$ к выводу о неправомерности переноса этого закона, возникшего при рассуждениях о конечных множествах, на множества бесконечные.

Закон исключенного третьего утверждает, что для всякого предложения $\mathcal{A}$ верно $\mathcal{A}$ или не-$\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{P}$ – одноместный предикат на множестве E такой, что для любого x из E можно эффективно определить, обладает элемент x свойством $\mathcal{P}$ или нет (т. е. $\mathcal{P}$ – *разрешимый* предикат). Рассмотрим теперь в качестве $\mathcal{A}$ предложение $(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x)$ т.е. «Существует элемент множества E, обладающий свойством $\mathcal{P}$». Тогда $\neg\mathcal{A}$ есть предложение $\neg(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x)$. Согласно закону исключенного третьего, получаем:

$$(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x) \vee \neg(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x).$$

Если E – конечное множество, то можно исследовать все его

[1] Близнецы – два простых числа, разность между которыми равна 2.

элементы, перебрав их по очереди, и в результате выяснить, $(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x)$ или же $(x)\ \neg\mathcal{P}(x)$. Поскольку E конечно, то такой перебор, в принципе, закончится. Это дает возможность считать, что закон исключенного третьего справедлив, если E — конечное множество.

Если же множество E бесконечно, то процесс перебора элементов E для нахождения элемента с заданным свойством может никогда не закончится. Если повезет, то можно натолкнуться на элемент x такой, что $\mathcal{P}(x)$. Но проверка может продолжаться и неограниченно долго, то ли потому, что до искомого элемента мы еще не дошли, то ли потому, что его вовсе не существует.

В некоторых случаях удается доказать приведением к нелепости, что $\neg(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x)$. Однако нет никаких оснований утверждать, что в общем случае будет обоснована какая-то одна из этих двух возможностей. Именно поэтому интуиционисты считают, что для бесконечных множеств нет оснований признавать всегда истинным предложение $(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x) \vee \neg(\mathsf{E}x)\ \mathcal{P}(x)$.

➤ Разногласия среди математиков по поводу логических законов свидетельствовали о необходимости изучения логических средств, используемых в математике, и пересмотра этих средств. Эти разногласия способствовали развитию идеи *неединственности логики* как системы логических принципов, приведшей в результате к созданию *неклассических логик*. Важнейшей из неклассических логик является интуиционистская логика.

➤ После того как стало ясно, что для решения назревших проблем и разногласий недостаточно избавиться от известных парадоксов (что удалось в определенной степени сделать с помощью теории Цермело—Френкеля), математики продолжали искать выход из создавшейся ситуации. В результате были предложены различные *пути выхода из кризиса*.

Остановимся на двух из них — наиболее значительных, сыгравших определяющую роль в развитии математической логики. Один из этих путей был предложен Гильбертом, а другой — Брауэром, возглавившим интуиционистское направление в математике.

§6.3. Программа Гильберта обоснования математики

Гильберт прекрасно осознавал всю сложность ситуации, возникшей в основаниях математики «благодаря» канторовой теории множеств. Тем не менее в 1925 году он писал:

«Никто не может изгнать нас из математического рая, созданного для нас Кантором» [4]. Гильберт хотел сохранить классическую математику вместе с канторовой теорией множеств, найдя средства обезоружить критиков классических принципов.

➤➤ Гильберт считал, что:

– недопустимо отказываться от таких классических принципов, как абстракция актуальной бесконечности, и логических законов исключенного третьего и снятия двойного отрицания;

– необходимо получить обоснование непротиворечивости математики, точнее, непротиворечивости основных математических теорий;

– обоснование непротиворечивости математики должно использовать только надежные средства, не вызывавшие сомнений (и иметь характер математического доказательства).

Идея «спасения» классической математики разрабатывалась Гильбертом начиная с 1904 года и вылилась в целую *программу*.

➤➤ *Основная задача* заключалась в следующем: для доказательства непротиворечивости математической теории (т. е. невозможности доказать некоторое утверждение $\mathcal{A}$ и его отрицание $\neg\mathcal{A}$) необходимо дать *математическое уточнение* понятиям математического *доказательства* и математической *теории*.

Такое уточнение можно осуществить с помощью *метода формализации*. Идея формализации математических теорий играла фундаментальную роль в программе Гильберта обоснования математики.

Метод формализации

В основе метода формализации лежит следующее важнейшее обстоятельство. Какой-либо текст может быть признан доказательством в некоторой неформальной теории в том и только в том случае, когда каждое составляющее его предложение, за исключением аксиом, ранее доказанных теорем и промежуточных допущений, является следствием предшествующих предложений по каким-либо правилам логики (более традиционно: каждое предложение, составляющее доказательство, является аксиомой, или ранее доказанной теоремой, или промежуточным допущением, или следствием предшествующих предложений по каким-либо правилам логики). Соответствует или нет умозаключение правилам логики, зависит исключительно от его *формы*, а вовсе не от его содержания. Другими словами, правильность или ошибочность математического рассуждения не зависит от его содержания, а целиком и полностью определяется его формой. Поэтому при изучении рассуждений их форма отделяется от содержания и становится объектом специального изучения. При этом используются специальные формальные логические языки и строятся формальные логические системы.

➤ *Суть **метода формализации*** заключается в следующем.

Во-первых, для каждой неформальной математической теории может быть построен достаточно богатый по своим выразительным возможностям формальный язык, позволяющий записать в виде формулы этого языка любое предложение рассматриваемой неформальной теории (в частности, аксиомы этой теории).

Во-вторых, логический аппарат, логические средства, используемые в математических доказательствах, могут быть точно описаны с помощью формальных логических систем (исчислений) с точно указанным перечнем логических аксиом, которые представляют собой формулы формального логического языка, и логических правил вывода. Как позже показал Генцен, можно строить логические системы только с помощью правил вывода.

В результате каждой неформальной математической теории ставится в соответствие некоторая *формальная теория* Т, которая является формализацией данной неформальной теории. Всякое предложение на языке неформальной теории можно записать в виде формулы на формальном языке $Я_Т$, и обратно, всякая формула $Я_Т$ может быть «переведена» на неформальный язык. Содержательным доказательствам в неформальной теории соответствуют формальные выводы (*формальные доказательства*) в теории Т, которые служат формализацией этих содержательных (*неформальных*) доказательств. Причем выводы в теории Т и сама теория Т являются точно определенными математическими объектами.

➤ Итак, *техническая сторона* метода формализации заключается в следующем: для *формализации* содержательной математической теории:

1) строят формальный язык $Я_Т$, на котором в виде формул могут быть записаны предложения теории, в частности аксиомы теории;

2) точно описывают с помощью $Я_Т$ логические средства в виде логических аксиом (специального вида формул $Я_Т$) и/или правил вывода;

3) благодаря построенной (заданной) таким образом формальной теории доказательства неформальной теории превращаются в формальные выводы в Т.

➤ **Замечание**. Д. Гильберт использовал такой тип формализации, при котором логические средства описывались с помощью логических аксиом, одного пропозиционального правила вывода *modus ponens* ($\supset$у) и двух кванторных правил. Формальные выводы в этих системах представляют собой последовательности формул, удовлетворяющие определенным условиям, — линейные выводы. Такие исчисления и соответствующий тип формализации принято называть *гильбертовскими* (см. § 2.13 и 4.6). Позже Генценом был предложен другой тип формализации, по существу более естественный и лучше отражающий структуру обычных неформальных доказательств. При таком типе формализации все логические средства задаются только с помощью правил вывода (правил заключения), а формальные выводы представляют собой деревья формул, удовлетворяющие определенным четко описанным условиям, — деревья вывода. Такие исчисления и такой тип формализации называют *генценовскими*. Гильберт не ставил перед собой цель достижения естественности при формализации теории. Главным для него было математически точно описать математические доказательства и теории. ❍

В результате формализации каждой задаче обоснования непротиворечивости конкретной математической теории ставится в соответствие точная математическая задача: доказать непротиворечивость формальной теории Т, формализующей данную неформальную теорию, т. е. доказать невозможность двух выводов в Т, один из которых является выводом некоторой формулы A, а другой — выводом формулы $\neg A$. Объекты этой задачи математически точно описаны, т. е. являются математическими объектами.

Фактически, противоречивость или непротиворечивость теории зависит исключительно от синтаксического строения предложений, которые являются ее аксиомами, а вовсе не от их математического содержания.

Остановимся еще на одном важном обстоятельстве в программе Гильберта.

Финитная установка Гильберта

➤ Существенную роль в гильбертовской программе играли требования к тем средствам, которые допускались для использования при доказательстве непротиворечивости теорий.

Доказательства непротиворечивости изучаемых теорий должны удовлетворять определенным требованиям: нельзя использовать те объекты, утверждения, средства и принципы, которые подвергались критике (во избежание порочного круга).

Во-первых, объекты доказательства должны быть потенциально обозримыми (формулы $Я_Т$ и выводы в Т, являясь графическими объектами, удовлетворяют этому условию). Во-вторых, в рассуждениях не должны использоваться такие принципы, как абстракция актуальной бесконечности, аксиома выбора, неограниченный принцип свертывания, логические законы исключенного третьего, снятия двойного отрицания и метод доказательства от противного.

Эти требования называют ***финитизмом*** или *финитной установкой* программы Гильберта.

Формальные теории, непротиворечивость которых нужно доказать, становятся объектами изучения области математики, которую Гильберт назвал ***метаматематикой*** или ***теорией доказательств***. Именно с разработкой теории доказательств, предпринятой Гильбертом в начале XX века, связано становление математической логики как самостоятельной математической дисциплины. Следует, правда, отметить, что построение формального логического языка началось еще до Гильберта. Особую роль в этом сыграли работы Г. Фреге[1)], Б. Рассела, Дж. Пеано, Де Моргана, Дж. Буля.

О доказательствах непротиворечивости методом построения модели

➤ Вопросы, связанные с непротиворечивостью теорий, рассматривались и до Гильберта. Однако использовавшийся для доказательства непротиворечивости *метод моделей* в данном случае оказался ненадежным. Часто предлагаемая модель опиралась на такие разделы теории множеств, которые предполагали абстракцию актуальной бесконечности, надежность которой как раз и вызывала сомнения. Доказательство непротиворечивости теории методом построения ее модели является относительным. Теория, для которой построена модель, непротиворечива, если непротиворечива та теория, в рамках которой построена модель. Модель Клейна (1871) неевклидовой геометрии Лобачевского сводит вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского к вопросу о непротиворечивости евклидовой геометрии. Непротиворечивость евклидовой геометрии можно свести к непротиворечивости теории действительных чисел. Каждый раз вопрос сводится к доказательству непротиворечивости той теории, средствами которой строится модель. Как доказать непротиворечивость теории действительных чисел и арифметики? Гильберт искал прямой путь доказательства непротиворечивости этих теорий.

[1)] Г. Фреге предложил в 1879 г. аксиоматические логические исчисления. Такие исчисления принято называть *гильбертовскими* потому, что они получили широкое распространение именно благодаря Д. Гилберту, позже использовавшему эти исчисления в своих книгах и в программе обоснования математики.

Судьба программы Гильберта

Доказательство непротиворечивости арифметики (натуральных чисел) является одной из основных задач, поскольку ее можно рассматривать в качестве основы классической математики, благодаря так называемой арифметизации анализа и теории функций.

В 1931 году австрийский математик Курт Гёдель (1906—1978) доказал теорему, которая нанесла удар по программе Гильберта. Согласно этой теореме, если формальная арифметика непротиворечива, то доказать ее непротиворечивость невозможно, если пользоваться лишь средствами, формализуемыми в этой теории (и которые естественно считать финитными). Аналогичное утверждение справедливо для любой, достаточно богатой теории, содержащей арифметику.

Роль результатов Гёделя в судьбе программы Гильберта такова: они свидетельствуют о том, что программа Гильберта в принципе невыполнима в своем центральном пункте. Однако важнейшую роль в математике играет гильбертовский метод формализации, с помощью которого был получен ряд важных результатов о независимости, в частности о независимости аксиомы выбора (см. § 5.7).

Позже в 1936 году Г. Генцену все же удалось доказать непротиворечивость арифметики (используя при этом деревья вывода), правда, средствами, выходящими за рамки средств, формализуемых в арифметике, и не являющимися финитными.

Современные специалисты в области математической логики пытаются пересмотреть требования к финитности доказательства непротиворечивости, а именно, смягчить их таким образом, чтобы признать надежными некоторые существующие доказательства непротиворечивости арифметики.

§6.4. Интуиционизм. Конструктивизм

Особенно непримиримо и последовательно критиковал классический теоретико-множественный подход голландский математик Л. Э. Я. Брауэр (1881—1966). Позже к этой критике присоединился Г. Вейль («О философии математики», 1934). Наряду с этой критикой Брауэр предложил собственную программу выхода из кризиса и концепцию построения математики, что положило начало развитию направления, названного *интуиционизмом*.

Говоря об интуиционизме, мы остановимся только на описании позиций его сторонников по поводу теоретико-множественных и логических принципов, которые были подвергнуты критике со стороны части математиков.

➤ В основу концепции Брауэра и его сторонников были положены следующие принципы:

– отказ от абстракции актуальной бесконечности;

– эффективное понимание дизъюнкции и утверждений о существовании;

– отказ от логических законов исключенного третьего и снятия двойного отрицания как от универсальных законов.

Особый акцент делался на том, что математические умственные построения должны быть *интуитивно* понятными и вести к *интуитивно* ясным результатам.

Важнейший пункт критики классической логики со стороны Брауэра, его сторонников и последователей касался закона исключенного третьего. Сущность этой критики была изложена в § 6.2.

С развитием интуиционистского направления в математике возникла задача разработки особой интуиционистской логики. Большую роль в распространении идей Брауэра сыграл его ученик и последователь голландский математик А. Гейтинг (1898–1980). Гейтинг решил задачу формализации интуиционистской логики. Именно он создал в 20-х годах XX века интуиционистское исчисление, известное как исчисление Гейтинга[1]. Он продемонстрировал, что интуиционистская логика имеет статус, независимый от интуиционистской философии и вполне понятный классическому математику.

Интуиционистская критика привлекла внимание к вопросу конструктивности в математике.

В определенном смысле развитием идей интуиционистского направления в математике явилось *конструктивное направление*, которое возглавил один из крупнейших отечественных математиков, логик А. А. Марков (1903–1979). Это направление возникло приблизительно на той же критической базе, что и интуиционистское направление. Однако конструктивисты не разделяют философские взгляды и не принимают некоторые теории интуиционистов.

➤ *Конструктивное направление* в математике может быть охарактеризовано следующими основными чертами (см. [7], [9]):

---

[1] Исчисление высказываний Гейтинга – это исчисление гильбертовского типа, равнообъемное системе естественного вывода N_i. Оно рассмотрено в § 2.13.

1) в качестве объектов изучения выступают *конструктивные объекты* (достаточно ограничиться основным типом конструктивных объектов – словами в том или ином алфавите) и конструктивные процессы, при обращении с которыми допускается *абстракция потенциальной осуществимости,* но полностью исключается *абстракция актуальной бесконечности*;

2) интуитивные понятия «эффективности», «вычислимости» и т. п. связываются с точным понятием *алгорифма*;

3) используется конструктивное понимание математических суждений, учитывающее специфику конструктивных объектов.

В рамках конструктивного направления получили развитие различные области математики, составившие так называемую *конструктивную математику.* Например, в конструктивном анализе построены значительные фрагменты анализа в рамках конструктивной концепции [7].

Интуиционистская логика, возникшая в результате проблем оснований математики, с развитием компьютеров получила применение в теоретическом программировании (*computer science*). Интуиционистская логика кодифицирует конструктивные умения и способности человека, что и объясняет ее применение в построении сложных компьютерных программ.

Два основных типа мышления в математике

Разногласия среди математиков по поводу логических законов свидетельствовали о необходимости изучения логических средств, используемых в математике, и пересмотра этих средств. Эти разногласия способствовали развитию идеи *неединственности логики* как системы логических принципов, приведшей в результате к созданию *неклассической логики.*

Расхождения во взглядах на логические средства, используемые в математике, сохраняются и до сих пор и проявляются в существовании двух основных типов мышления в математике – классического и конструктивного (неклассического). Только в настоящее время былая конфронтация между представителями этих двух типов мышления переросла в мирное сосуществование. Каждое из существующих направлений обогатило науку новыми концепциями и результатами. Взаимодействие этих направлений позволило четко выделить их методологические различия. Каждый, кто занимается математикой в настоящее время (будь то ученый-математик или преподаватель-математик), имеет возможность осознавать, какими логическими средствами он пользуется в данный момент – эффективными или чисто экзистенциональными. Значение такой возможности трудно переоценить.

В чем же заключается принципиальное различие между этими двумя основными типами мышления в математике?

➤ Обычно выделяют (см., например, [7]) две основные черты, наиболее характерные для *классического* или *теоретико-множественного мышления*:

1) допущение такой далеко идущей абстракции, как ***абстракция актуальной бесконечности***, позволяющей рассматривать «завершенные» бесконечные совокупности одновременно существующих объектов (т. е. рассматривать бесконечные множества как завершенные объекты, независимо от процесса построения этих объектов);

2) свободное применение при рассуждениях о бесконечных совокупностях обычных *правил традиционной логики* (в первую очередь, закона исключенного третьего, закона снятия двойного отрицания, используемых без всяких ограничений).

Можно добавить еще такую черту, как использование аксиомы выбора, которое приводит к неэффективным доказательствам и построениям.

➤ *Неклассический тип мышления* характеризуется:

1) полным отказом от абстракции актуальной бесконечности;

2) использованием вместо нее ***абстракции потенциальной бесконечности***, которая позволяет рассматривать бесконечные множества как нечто развивающееся, находящееся в процессе построения[1]. Одновременно с ней применяют ***абстракцию потенциальной осуществимости***, позволяющую отвлекаться от ограниченности наших возможностей в пространстве, времени и материале;

3) эффективным пониманием основных математических суждений;

4) требованием эффективности доказательств теорем существования и непризнанием неэффективных доказательств и построений в математике;

5) отказом от использования закона исключенного третьего и закона снятия двойного отрицания при рассуждениях о бесконечных множествах.

Еще раз перечислим различия в логических средствах, используемых представителями классического и неклассического направлений в математике.

---

[1] Так, при построении натурального ряда, какое бы натуральное число мы ни построили, прибавляя единицу, мы получим новое натуральное число, имея таким образом возможность рассуждать о сколь угодно больших натуральных числах.

Классическая логика и опирающийся на нее *классический тип мышления* характеризуются, *во-первых*, использованием закона исключенного третьего как универсального, применимого без каких-либо ограничений в рассуждениях о бесконечных множествах; *во-вторых*, использованием закона снятия двойного отрицания и существенно опирающегося на него правила доказательства от противного.

Для ***конструктивной*** *(интуиционистской)* ***логики*** и опирающегося на нее *неклассического типа мышления* характерно непризнание универсальности законов $A \vee \neg A$ и $\neg\neg A \supset A$, а значит, вообще говоря, и доказательств от противного. Такая позиция тесно связана со специфическим, эффективным пониманием дизъюнкции и утверждений о существовании (§ 6.2).

Существование двух основных типов мышления и соответствующих им направлений в математике Б. А. Кушнер расценивает как проявление «интереснейшего феномена», состоящего «в совершенно разном ощущении истины» разными математиками. «Является ли это отражением многообразия проявления самой истины или так выражается существенная неоднозначность восприятия ее человеческим духом – трудно сказать...» (см. [8]).

Два основных типа мышления в математике – это некая реальность в области математического познания, реальность, с которой нужно считаться и которой нужно отдавать должное в математическом образовании. Изучение нами в курсе математической логики двух логических систем является отражением существования двух основных типов мышления в математике.

Литература к главе «Проблемы оснований математики»

1. *Вейль Г.* Математическое мышление. – М.: Наука, 1989. – 400 с.

2. *Гейтинг А.* Обзор исследований по основаниям математики. – М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 96 с.

3. *Гейтинг А.* Интуиционизм. Введение. – М.: Мир, 1965. – 200 с.

4. *Гильберт Д.* Основания геометрии.– М.– Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948. – 492 с.

5. *Гильберт Д.* Проблемы обоснования математики // [4]. С. 389–399.

6. *Клини С.* Введение в метаматематику. Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1957. – 526 с.

7. *Кушнер Б. А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. – М.: Наука, 1973. – 448 с.

8. *Кушнер Б. А.* Аренд Гейтинг: Краткий очерк жизни и творчества. С. 121–135 // Методологический анализ оснований математики.– М.: Наука, 1988. – 176 с.

9. *Марков А. А.* О конструктивной математике. Труды матем. ин–та АН СССР им. В. А. Стеклова. Т. 67, изд. АН СССР, 1962. С. 8–14.

10. *Марков А. А.* О логике конструктивной математики. Вестник МГУ, сер. матем.-мех., № 2. – 1970. С. 7–29.

11. Математическая энциклопедия в 5 т. – М.: СЭ, 1977 –1985 г.

12. *Нагорный Н. М.* Вместо предисловия ко второму изданию. С. VII–XLIV // Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгорифмов. – М.: Фазис, 1995. – 448 с.

13. *Нагорный Н. М.* Андрей Андреевич Марков и его конструктивное направление в математике. С. V–XLVIII // Марков А. А. Избранные труды. Т.1. Математика, механика, физика. – М.: МЦНМО, 2002.

14. *Френкель А.*, *Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. – М.: Мир, 1966.

15. *Шанин Н. А.* О конструктивном понимании математических суждений. Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. Т.52, изд. АН СССР. 1958. С. 266–311.

16. *Dirk van Dalen*. Lectures on Intuitionism. – Lect. Notes Math., 1973, 337, p. 1–94.

Литература

1. *Верещагин Н. К., Шень А.* Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2000.

2. *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. — М.: Наука, 1967. С. 9—74.

3. *Гладкий А. В.* Математическая логика. — М.: Российский государственный гуманитарный университет, 1998. — 480 с.

4. *Гладкий А. В.* Введение в современную логику. — М.: МЦНМО, 2001. — 200 с.

5. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. — М.: Наука, 1979. — 320 с.

6. *Клини С.* Введение в метаматематику. — М.: ИЛ, 1957. — 526 с.

7. *Клини С.* Математическая логика. — М.: Мир, 1973. — 480 с.

8. *Лавров И. А., Максимова Л. Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 256 с.

9. *Марков А. А.* Элементы математической логики. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 80 с.

10. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. — 3-е изд. — М.: Наука, 1984. — 320 с.

11. *Новиков П. С.* Элементы математической логики. — М.: Наука, 1973. — 400 с.

12. *Новиков П. С.* Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. — М.: Наука, 1977. — 328 с.

13. *Правиц Д.* Натуральный вывод. — М.: ЛОРИ, 1997. — 108 с.

14. *Тимофеева И. Л.* Некоторые замечания о методе доказательства от противного //Математика в школе. — 1994, № 3. С. 36—38.

15. *Тимофеева И. Л.* Математическая логика в вопросах и задачах. — М.: Прометей, 2002. — 112 с.

16. *Тимофеева И. Л.* О пропозициональных системах натурального вывода. МПГУ. — М., 2000. — 73 с.— Деп. в ВИНИТИ.

17. *Тимофеева И. Л.* Принцип индукции для натуральных выводов // Научные труды математического факультета МПГУ. Юбилейный сборник (100 лет). — М.: Прометей, 2000. С. 131—137.

18. *Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е.* Вводный курс математической логики. — 2-е изд.— М.: Физматлит, 2002. — 128 с.

19. *Шенфилд Дж.* Математическая логика. — М.: Наука, 1975. — 528 с.

20. *Dirk van Dalen*. Logic and Structure. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997. — 217 p.

21. *Игошин В. И.* Математическая логика и теория алгоритмов. — М.: Академия, 2004. — 448 с.

22. *Игошин В. И.* Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. — М.: Академия, 2005. — 304 с.

Предметныйуказатель

Указатель обозначений и символов

Именнойуказатель

Учебное издание

Тимофеева Ирина Леонидовна

Математическая логика

Курс лекций

Ответственный редактор *Н. В. Валуева*
Редактор *Г. Н. Борисова*
Корректор *Е. В. Морозова*
Технический редактор *Л. Б. Чуева*
Компьютерная верстка *С. В. Сухарева, Е. П. Хазовой*

Подписано в печать 15.01.2007. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 19,00. Тираж 1000 экз. Заказ № Т-000.

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательство "КДУ"», 119234, г. Москва, а/я 587
Тел./факс: (495) 939-40-36, 939-44-91
E-mail: kdu@kdu.ru; http://www.kdu.ru