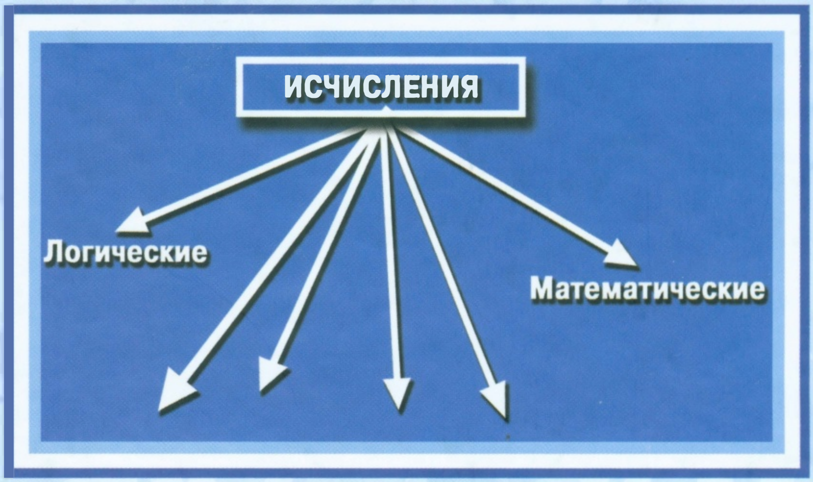
Ю.А. ШИХАНОВИЧ

ЛОГИЧЕСКИЕ и МАТЕМАТИЧЕСКИЕ исчисления



Научный мир

Ю.А. ШИХАНОВИЧ

ЛОГИЧЕСКИЕ
И
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ИСЧИСЛЕНИЯ

Учебное пособие

МОСКВА
Научный мир
2011

УДК 517 (07)
ББК 22.161я73
Ш65

Шиханович Ю.А.
Ш65 **Логические и математические исчисления.**
Учебное пособие.
– М.: Научный мир, 2011. – 256 с.: ил. 20.

ISBN 978-5-91522-246-4

В предлагаемом пособии рассказано о логических и математических исчислениях (конструкциях, в которых формализовано центральное понятие математики – понятие доказательства) и о понятии исчисления.

От читателя требуется владение материалом книги Ю.А.Шихановича «Введение в математику» (М: «Научный мир», 2005).

Кроме того, предполагается знание основных понятий и фактов теории алгоритмов. В этом отношении изложение ориентировано на книгу Ю.А.Шихановича «Минимум по теории алгоритмов для нематематиков» (М: «Научный мир», 2009).

УДК 517 (07)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-91522-246-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

А2. ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

Б. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ДОПОЛНЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Фактически словосочетание «математическая логика» употребляется в математике в двух смыслах – в широком и в узком.

В «математическую логику в широком смысле» входят, прежде всего, теория логических и математических [i] исчислений (это и есть «математическая логика в узком смысле») и теория алгоритмов, а также, например, основания математики, модальная логика и многозначные логики.

В данном пособии говорится только о «математической логике в узком смысле» – именно в этом смысле употребляется в нём словосочетание «математическая логика».

Очень желательно, чтобы читатель владел содержанием моей книги «Введение в математику» ([16] [ii]). Термины и обозначения из неё широко и постоянно используются в пособии. [iii]

Кроме того, от читателя предполагается знание основных понятий и фактов теории алгоритмов. В этом отношении изложение ориентировано на мою книгу «Минимум по теории алгоритмов для нематематиков» ([18]). [iv]

Наконец, материал пунктов 1 – 3 Введения в книгу [18] [v] (всего 11 страниц !) активнейшим образом используется почти с первых страниц пособия.

В основной части пособия (Введение и гл. I – IX) рассматриваются логические и математические исчисления.

В Дополнениях (гл. X, XI) приводятся примеры совсем других исчислений, рассказывается об общем понятии исчисления, излагаются 2 подхода к формальному описанию этого понятия.

---

[i] Очень часто говорят «логико-математических».

[ii] Число в квадратных скобках отсылает к списку «Упомянутая литература» в конце книги.

[iii] Указанная книга есть в Интернете (электронная библиотека www.iqlib.ru).

[iv] И эта книга имеется там же.

[v] Являющегося введением вовсе не только в теорию алгоритмов.

Приложение 6 «Программа» является фактически подробным оглавлением пособия, подробным указателем его содержания и может оказаться полезным для самопроверки.

В конце параграфов и глав предлагаются задачи. Две самые трудные задачи помечены звёздочкой.

В пособии имеются примечания двух видов – подстрочные примечания, или сноски, и примечания в конце. Сноски нумеруются знаками [i], [ii], [iii], … , примечания, помещённые в конце, – арабскими цифрами [1], [2], [3], … . Игнорирование примечаний, помещённых в конце, не помешает чтению пособия.

Курс, содержание которого приблизительно совпадает с содержанием этого пособия, я в 1963 – 1968 гг. читал студентам Отделения структурной и прикладной лингвистики филологического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, а в 1995 – 2009 гг. – студентам Отделения теоретической и прикладной лингвистики Института лингвистики Российского государственного гуманитарного университета.[i]

Ю.Шиханович
8 сентября 2010 г

---

[i] У меня уходило на него 45 занятий.

ВВЕДЕНИЕ

4 слова: язык, исчисление, доказательство, теорема – употребляются в этой книге в двух смыслах.

Слово «язык», во-первых, употребляется в обычном смысле: владеете ли вы папуасским языком? язык теории множеств очень удобен для построения математики. Во-вторых, очень скоро в этой книге будет введено понятие о *формализованном языке*. Иногда, желая противопоставить язык (в обычном смысле) и формализованный язык, мы будем язык (в обычном смысле) называть *метаязыком*.

В формализованном языке мы введём термины *формальное доказательство* и *формальная теорема*, причём слова «формальное», «формальная» мы чаще всего будем опускать. Поэтому слова «доказательство» и «теорема» будут иногда означать доказательство и теорему в метаязыке (так сказать, метадоказательство и метатеорема), иногда – в формализованном языке (формальное доказательство и формальная теорема). [i]

В основной части книги (Введение и главы I – IX) слово «исчисление» будет иметь тот смысл, который описан во Введении, т. е. *логическое* или *математическое* исчисление. На самом деле, это слово имеет гораздо более общий смысл; об этом смысле мы поговорим в гл. XI.

§ 1. Математическая логика

Многотомный трактат Н.Бурбаки [ii] «Начала математики» начинается фразой «Со времён греков говорить “математика” – значит говорить “доказательство”» ([1], с. 23).

---

[i] В английском оригинале книги [4] автор для доказательств в метаязыке употребляет слово demonstration, для формальных доказательств – слово proof.

[ii] Бурбаки (N.Bourbaki) – псевдоним группы французских математиков, в середине XX века поставившей себе целью с единой точки зрения изложить в одном трактате всю математику (точнее – те разделы математики, которые они считали сформировавшимися).

Таким образом, главное, что отличает математику от других наук – наличие доказательств.

А что такое доказательство? «Доказательство – это рассуждение, которое убеждает того, кто его воспринял, настолько, что он готов убеждать других с помощью *этого же рассуждения*» ([11], с. 8) [1].

Математическая логика – это раздел математики, изучающий математические [i] рассуждения математическими методами.

Главной целью математической логики является уточнение понятия доказательства, позволяющее отличить рассуждения, верные в силу своей *формы* (независимо от *содержания*), от правдоподобных и просто не верных рассуждений.

Рассмотрим 2 примера рассуждений [ii].

Пример 1. Братья имеют одну и ту же фамилию. Боря и Вася – братья. Фамилия Бори – Гришин. Следовательно, фамилия Васи – тоже Гришин.

Пример 2. Комплексные числа, отношение которых – положительное действительное число, имеют один и тот же аргумент. Отношение комплексных чисел $2+3i$ и β – положительное действительное число. Аргумент числа β равен $\frac{2\pi}{3}$. Следовательно, аргумент числа $2+3i$ тоже равен $\frac{2\pi}{3}$.

Ясно, что первое рассуждение верно, причём верно в силу одной своей формы, независимо от того, верны ли вторая и третья посылка. [iii] Ясно также, что второе рассуждение имеет ту же самую форму и, значит, также верно, причём ясно это и тем, кто не знает, что такое комплексные числа.

Чтобы верность рассуждений устанавливать не на уровне «ясно – не ясно», создаётся специальный искусственный язык – *формализованный язык*, как мы его будем называть, который будет воспроизводить логическую форму рассуждения (быть может, в ущерб лёгкости общения).

[i] И общée – формализованные.

[ii] Эти примеры заимствованы из [14] (с. 15 – 16).

[iii] Между прочим, не трудно доказать, что во втором рассуждении одна из этих посылок не верна.

§ 2. Формализованный язык

Если формализованный язык строится для уточнения, формализации понятия доказательства (такие формализованные языки мы будем также называть *исчислениями*), он имеет 3 аспекта, 3 раздела: синтактику, семантику и дедуктику (рис. 1).

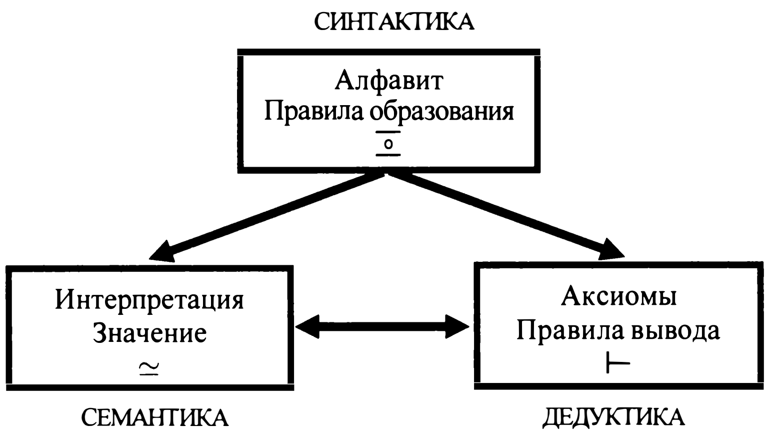


Рис. 1

1. Синтактика. Построение любого формализованного языка, любого исчисления начинается с синтактики. Синтактика является основой, базисом любого формализованного языка (исчисления). Цель синтактики – задать способ точного формулирования предложений, высказываний языка.

Синтактика состоит в задании *алфавита*, какого-то списка *исходных слов* (в этом алфавите) и *правил образования* – правил, позволяющих из одних слов образовывать другие.

При помощи исходных слов и правил образования из множества $Б^{\infty}$ слов в исходном алфавите Б выделяется подмножество, так сказать, правильно построенных слов; назовём эти правильно построенные слова *формулами*.

Это выделение производится при помощи стандартной триады определений.

Кортеж $\langle P_1, P_2, \ldots, P_n \rangle$ слов из $Б^{\infty}$ называется *формульным описанием*, если каждая из компонент этого кортежа либо является исходным словом, либо может быть получена из каких-то предыдущих компонент кортежа при помощи какого-то из правил образования.

Формульное описание называется *формульным описанием слова* Q, если его последняя компонента – Q.

Слово в алфавите Б называется *формулой*, если оно имеет формульное описание.

Когда строится синтактика некоторого формального языка (исчисления), желательно, чтобы выполнялось требование эффективности СИ: *множество формул* $\mathfrak{F}$ *должно быть разрешимо относительно своего естественного универсума* $Б^{\infty}$.

Если требование СИ выполнено, то по теореме Поста ([18]) множество $\mathfrak{F}$ (как разрешимое подмножество перечислимого множества $Б^{\infty}$) перечислимо.

Разумеется, в произвольном исчислении это требование может и не выполняться. Когда мы начнём строить конкретные исчисления, мы каждый раз должны смотреть и думать, выполнено ли для построенного нами исчисления требование СИ.

На этапе синтактики ни о каком смысле слов вообще или формул в частности говорить не корректно: в синтактике слова сравниваются между собой только по буквам, из которых они состоят, только, так сказать, по их графическому равенству (или неравенству). Поэтому главным (и единственным) знаком в синтактике является знак $\stackrel{\circ}{=}$.

Как уже было сказано выше, построение формализованного языка (исчисления) всегда начинается с построения синтактики. А вот дальше уже можно по желанию заняться его семантикой или дедуктикой.

2. Дедуктика. Цель дедуктики – уточнение понятия доказательства. Поэтому дедуктика является ядром любого исчисления.

Строится она заданием *аксиом* и конечного множества *правил вывода* (см. рис. 1).

В множестве формул $\mathfrak{F}$ каким-то образом выделяется подмножество (вообще говоря, произвольное) *аксиом*.

А что такое правило вывода?

На данном этапе изложения ответ на этот вопрос будет выглядеть, возможно, сложно. Для правил вывода в конкретных исчислениях, которые мы построим (гл. I, II, V), всё будет совершенно ясно.

Правило вывода – это рисунок вида

$$\frac{A_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_k),\ldots,A_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}{B(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}, \qquad (*)$$

в котором $\alpha_1,...,\alpha_k$ – формульные переменные (т. е. переменные, вместо которых подставляются формулы), а выражения $A_1(\alpha_1,...,\alpha_k),...,A_n(\alpha_1,...,\alpha_k)$, $B(\alpha_1,...,\alpha_k)$ – формульные формы (увы! – приходится писать так), т. е. формы, которые превращаются в формулы, когда их переменные $\alpha_1,...,\alpha_k$ заменены на какие-нибудь формулы. [i]

Выражения $A_1(\alpha_1,...,\alpha_k),...,A_n(\alpha_1,...,\alpha_k)$, стоящие в правиле $(*)$ над чертой, называются его *посылками*, выражение $B(\alpha_1,...,\alpha_k)$ – его *заключением.*

Число посылок n – произвольное натуральное число. Бывают однопосылочные правила

$$\frac{A(\alpha_1,...,\alpha_k)}{B(\alpha_1,...,\alpha_k)},$$

двухпосылочные

$$\frac{A_1(\alpha_1,...,\alpha_k),\ A_2(\alpha_1,...,\alpha_k)}{B(\alpha_1,...,\alpha_k)}$$

и т.д.

Каждое правило $(*)$ превращается в рабочий инструмент при помощи стандартного определения: формула Q называется *непосредственным следствием* формул $P_1, \ldots, P_n$ *по правилу* $(*)$, если существуют такие формулы $R_1, \ldots, R_k$, подстановка которых в формы $A_1(\alpha_1,...,\alpha_k),...,A_n(\alpha_1,...,\alpha_k)$, $B(\alpha_1,...,\alpha_k)$ вместо переменных $\alpha_1,...,\alpha_k$ превращает эти формы, соответственно, в формулы $P_1, \ldots, P_n, Q$.

Тот факт, что формула Q является непосредственным следствием формул $P_1, \ldots, P_n$ по правилу $(*)$, мы будем также передавать словами: формула Q *может быть получена* из формул $P_1, \ldots, P_n$ *по правилу* $(*)$.

Дадим, наконец, первую основополагающую стандартную триаду определений.

---

i К сожалению, на данном этапе изложения я не имею возможности привести конкретный содержательный пример.

Кортеж $\langle P_1, P_2, \ldots, P_n\rangle$ формул (данного исчисления) называется (*формальным*) *доказательством* (*в данном исчислении*), если каждая из компонент этого кортежа либо является аксиомой (данного исчисления), либо может быть получена из каких-то предыдущих компонент кортежа при помощи какого-то из правил вывода (данного исчисления). Если исчисление, о котором идёт речь, ясно из контекста, добавленные в скобках слова будем подразумевать.

(Остановись, мгновенье – ты прекрасно: мы дали абсолютно строгое определение доказательства!)

Доказательство называется *доказательством формулы* Q (в данном исчислении), если его последняя компонента – Q.

Формула Q называется *доказуемой* (в данном исчислении), если она имеет доказательство. Доказуемые формулы мы будем также называть (*формальными*) *теоремами* (данного исчисления).

Множество формул, доказуемых в исчислении И, мы будем обозначать через $\mathrm{T}_{\text{И}}$ (или просто через Т).

Тот факт, что формула Q доказуема в исчислении И, мы будем обозначать через $\underset{\text{И}}{\vdash} Q$ или через $\vdash Q$ [i].

Данная тройка определений позволяет указать неограниченное количество очевидных теорем (метатеорем!). [ii] Приведу несколько примеров.

Любая аксиома исчисления является его (формальной) теоремой (доказательством аксиомы Q является, например, кортеж $\langle Q\rangle$).

Первой компонентой любого доказательства является аксиома.

Любое начало $\langle P_1, P_2, \ldots, P_t\rangle$ $(1 \le t \le n)$ любого доказательства $\langle P_1, P_2, \ldots, P_n\rangle$ является доказательством.

Любая компонента любого доказательства доказуема.

Формула Q тогда и только тогда доказуема, когда она является некоторой компонентой некоторого доказательства.

Если $\langle P_1, P_2, \ldots, P_n\rangle$ и $\langle Q_1, Q_2, \ldots, Q_m\rangle$ – доказательства, то и кортеж $\langle P_1, P_2, \ldots, P_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_m\rangle$ является доказательством.

Когда строится дедуктика некоторого исчисления, желательно, во-первых, чтобы для множества аксиом выполнялось требование эффек-

---

[i] Букву $\vdash$ иногда называют *штопор*.

[ii] Разумеется, аналогичные очевидные теоремы верны для любой стандартной триады определений, например – для определений формульного описания, формульного описания данного слова, формулы.

тивности ДЕ$_0$: м*ножество аксиом должно быть разрешимо относительно множества формул* $\mathfrak{F}$ [i] – и, во-вторых, чтобы для каждого правила вывода (∗) выполнялось требование эффективности ДЕ$_{(*)}$: м*ножество кортежей формул* $\langle S_1, S_2, \ldots, S_n, S_{n+1}\rangle$ (правило (∗) – n-посылочное!) *таких, что* S_{n+1} *является непосредственным следствием формул* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *по правилу* (∗), *должно быть разрешимо относительно своего естественного универсума* $\mathfrak{F}^{n+1}$ (или, что равносильно, относительно множества $\mathfrak{F}^\infty$).

Опять-таки эти требования могут и не выполняться и при построении конкретных исчислений их выполнение надо проверять. Но, если как требование СИ, так и все эти требования выполнены, мы получаем 2 замечательных следствия.

Во-первых, тогда *множество доказательств разрешимо относительно своего естественного универсума* $\mathfrak{F}^\infty$ (или, что равносильно, относительно множества $(Б^\infty)^\infty$).

Если дан кортеж формул $\langle S_1, S_2, \ldots, S_n\rangle$, мы сначала проверяем, является ли S_1 аксиомой. В положительном случае переходим к S_2, в отрицательном случае заключаем, что данный кортеж – не доказательство. Перейдя к S_2, мы проверяем, является ли S_2 аксиомой и, если в исчислении есть однопосылочные правила вывода, по очереди проверяем, является ли S_2 непосредственным следствием формулы S_1 по одному из них. Если одно из этих условий выполнено, переходим к S_3. В отрицательном случае заключаем, что данный кортеж – не доказательство. Перейдя к S_3, проверяем, является ли S_3 аксиомой и может ли S_3 быть получена из каких-то предыдущих компонент кортежа при помощи какого-то из однопосылочных или двухпосылочных правил вывода. Опять-таки в положительном случае переходим к S_4, в отрицательном – заключаем, что данный кортеж – не доказательство. И т.д. – через конечное число шагов проверка будет закончена.

Итак, если для исчисления выполняются все перечисленные требования эффективности, мы можем в этом исчислении алгоритмически отличить доказательства от не-доказательств.

---

[i] Впрочем, если требование СИ также выполнено, то разрешимость множества аксиом относительно множества $\mathfrak{F}$ равносильна разрешимости множества аксиом относительно множества $Б^\infty$.

Во-вторых, тогда *множество* Т *доказуемых формул перечислимо.*[i]

В самом деле, разрешимое, по только что доказанному, множество доказательств, являясь подмножеством перечислимого множества $\mathfrak{F}^{\infty}$ (поскольку $\mathfrak{F}$ перечислимо), по теореме Поста перечислимо. Перечисляя множество доказательств и «рассыпая» каждое доказательство на компоненты, мы перечислим множество Т.

Дадим в заключение вторую основополагающую стандартную триаду определений.

Пусть Г – список формул (данного исчисления).

Кортеж $\langle P_1, P_2, \dots , P_n\rangle$ формул (данного исчисления) называется (*формальным*) *выводом из списка* Г (*в данном исчислении*), если каждая из компонент этого кортежа либо является одной из формул списка Г (формулы из Г в этом контексте тоже называют *посылками*), либо является аксиомой (данного исчисления), либо может быть получена из каких-то предыдущих компонент кортежа при помощи какого-то из правил вывода (данного исчисления).

Вывод из списка Г называется *выводом формулы* Q *из списка* Г, если его последняя компонента – Q.

Формула Q называется *выводимой из списка* Г, если она имеет вывод из списка Г.

Тот факт, что формула Q выводима в исчислении И из списка Г, мы будем обозначать через $\Gamma \underset{\text{И}}{\vdash} Q$ или через $\Gamma \vdash Q$.

Данная тройка определений тоже, конечно, позволяет указать очень много очевидных теорем.

Теоремы, аналогичные приведенным выше, предоставляю сформулировать читателю. Приведу ещё несколько примеров.

Если формула Q принадлежит списку Г, то $\Gamma \vdash Q$ (поскольку кортеж $\langle Q\rangle$ является в этом случае выводом формулы Q из списка Г). В частности, $Q \vdash Q$.

Если каждая формула списка Г принадлежит списку Г′ (в частности, если список Г′ получается перестановкой формул списка Г или добавлением к списку Г формул из списка Δ: $\Gamma' \,\overline{\underline{\circ}}\, \Delta, \Gamma$), то из $\Gamma \vdash Q$ следует $\Gamma' \vdash Q$.

[i] Для исчислений **L** (гл. V) и **AR** (гл. VIII) это множество окажется не разрешимым.

Доказуемость очень просто связана с выводимостью: если $\vdash Q$, то – для любого списка Γ – $\Gamma \vdash Q$. И вообще: *формула* Q *тогда и только тогда доказуема, когда она выводима из пустого списка*; доказуемость – это как бы частный случай выводимости.

Без всяких дополнительных требований эффективности остаются верными утверждения: *множество выводов из любого списка* Γ *разрешимо относительно своего естественного универсума* $\mathfrak{F}^{\infty}$; *множество формул, выводимых из любого списка* Γ, *перечислимо*.

Понятие выводимости позволяет дать простое определение: назовём формулы P и Q *дедуктивно равными*, если $P \vdash Q$ и $Q \vdash P$.

Главным знаком дедуктики можно назвать знак $\vdash$.[i]

ЗАДАЧА

Докажите, что если $\Gamma \vdash P_1$, $\Gamma \vdash P_2, \ldots, \Gamma \vdash P_k$ и $P_1, P_2, \ldots, P_k \vdash Q$, то $\Gamma \vdash Q$. (Отсюда при пустом списке Γ получаем: *если формула* Q *выводима из списка доказуемых формул, она доказуема*.)

3. Семантика. Дедуктика, конечно, является ядром любого формализованного языка (исчисления), но строится-то формализованный язык ради семантики. Семантика является мерой интересности, мерой полезности формализованного языка. <u>Цель семантики</u> – <u>задать способ точной оценки смысла, истинностных значений высказываний языка</u>.

Семантика задаётся *интерпретацией* (истолкованием) формул языка и состоит в установлении связи между языком и каким-то разделом математики.

В принципе для одного и того же формализованного языка можно указывать разные интерпретации (в § 4 гл. IV нам эта возможность очень пригодится), но обычно, когда формализованный язык начинает строиться, то имеется в виду некоторая конкретная – *главная* – интерпретация.

[i] Изложенный здесь способ построения дедуктики часто называют *гильбертовским* [Гильберт (D.Hilbert) – немецкий математик конца XIX – первой половины XX века]. Конкурирующий – *генценовский* – вариант предложен учеником Гильберта Генценом (G.Gentzen) – этот вариант хорошо изложен в книге [3].

Основным инструментом интерпретации является понятие *значения* – значения формулы, когда её переменным приданы какие-то значения (см. рис. 1).

В исчислениях, которые мы будем рассматривать, значениями формул будут истинностные значения.

Поскольку мы хотим, чтобы (формальное) доказательство (формальной) теоремы в исчислении служило основанием для её утверждения, для её принятия в метаязыке, назовём интерпретацию исчисления *правильной*, если, во-первых, аксиомы этого исчисления тождественно-истинны (при любых значениях своих переменных принимают значение ***и***) и, во-вторых, каждое правило вывода этого исчисления «сохраняет истину» (т. е. при любых значениях переменных, при которых все его посылки приняли значение ***и***, его заключение тоже принимает значение ***и***).

Главное свойство формул, которое нас будет интересовать в семантике, – тождественно-истинность, главное отношение между формулами – *равносильность*.

Поэтому главным знаком в семантике можно считать знак $\simeq$.

А. ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Так называют исчисления, формализующие понятия доказуемости и выводимости в математике «вообще» (в любом, так сказать, разделе математики).

А1. ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Так называют исчисления, в которых предложения математического языка рассматриваются как нерасчленяемые целые – *высказывания* (а их внутреннее устройство – субъектно-предикатная структура – игнорируется).

ГЛАВА I

ИСЧИСЛЕНИЕ К

§ 1. Синтактика

Алфавит $A_{\mathbf{K}}$ исчисления **К** состоит из бесконечного (точнее – счётного, важнее – перечислимого) перечня букв

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

называемых *высказывательными переменными*, четырёх *связок* $\rceil$, &, $\vee$, $\rightarrow$ и двух скобок – *левой скобки* (и *правой скобки*) .[i]

Бесконечную часть этого алфавита легко заменить двумя буквами – например, A, | . Если бы мы пошли этим путём, мы бы сразу ввели обозначения $A_1 \underset{Df}{\overline{\overline{\circ}}} A|$, $A_2 \underset{Df}{\overline{\overline{\circ}}} A||$, $A_3 \underset{Df}{\overline{\overline{\circ}}} A|||$, … и дальше работали со <u>словами</u> $A_1, A_2, A_3, \ldots$.

Предложенный здесь способ более удобен и общепринят.

---

[i] См. также приложение 3.

Порядок высказывательных переменных, заданный индексами, назовём *алфавитным.*

Назовём *логической длиной* слова P в этом алфавите и обозначим через лд $\lfloor P \rfloor$ число вхождений в это слово связок.

Назовём *скобочным индексом* слова P и обозначим через си $\lfloor P \rfloor$ разность между числом вхождений в это слово левой скобки и числом вхождений в это слово правой скобки.

Очевидно, лд $\lfloor PQ \rfloor =$ лд $\lfloor P \rfloor +$ лд $\lfloor Q \rfloor$, си $\lfloor PQ \rfloor =$ си $\lfloor P \rfloor +$ си $\lfloor Q \rfloor$.

Перейдём к определению формулы.

В качестве исходных слов мы возьмём высказывательные переменные.

Правил образования – по числу связок – у нас будет 4, но, поскольку на уровне синтактики двухместные связки $\&$, $\vee$, $\rightarrow$ будут «работать» одинаково, мы употребим букву ∇ [1] в качестве обозначения произвольной из этих связок.

Итак, кортеж $\langle P_1, P_2, \ldots, P_n \rangle$ слов называется *формульным описанием* (в исчислении **К**), если каждая его компонента P_i $(1 \le i \le n)$ либо является высказывательной переменной, либо $P_i \stackrel{\circ}{=} \rceil(P_j)$ для некоторого $j < i$, либо, наконец, $P_i \stackrel{\circ}{=} (P_k)\nabla(P_l)$ для некоторых $k, l < i$. (Остальные 2 определения стандартной триады можно не приводить.) [2]

П р и м е р 1. Каждый из шести кортежей:

$$\langle A_1, A_2, (A_1)\ \&\ (A_2) \rangle, \qquad \langle A_2, A_1, (A_1)\ \&\ (A_2) \rangle,$$

$$\langle A_1, A_1, A_2, A_2, (A_1)\ \&\ (A_2), (A_1)\ \&\ (A_2) \rangle,$$

$$\langle A_{10}, A_1, A_2, (A_1)\ \&\ (A_2) \rangle, \qquad \langle A_1, A_2, A_3, \rceil(A_3), (A_1)\ \&\ (A_2) \rangle,$$

$$\langle A_3, A_2, \rceil(A_3), A_1, (A_1)\ \&\ (A_2) \rangle$$

является формульным описанием формулы $(A_1)\ \&\ (A_2)$.

Это заставляет дать следующее определение: формульное описание $\alpha = \langle P_1, P_2, \ldots, P_n \rangle$ формулы Q называется *несократимым формульным описанием формулы* Q, если для любого $i \le n{-}1$ кортеж

---

[1] Эта буква называется «набла». В древнегреческом языке слово νάβλα обозначало музыкальный инструмент, подобный арфе.

$\text{пр}_{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n}\, \alpha$ ([16], гл. III, § 4) уже не является формульным описанием формулы Q (по поводу этого понятия см. ниже задачу 1).

Формулу P естественно назвать *подформулой* формулы Q, если P входит в Q (в задаче 2 указываются альтернативные варианты этого определения).

Синтактика исчисления **К** удовлетворяет требованию СИ – *множество* $\mathfrak{F}_{\mathbf{K}}$ *формул исчисления* **К** *разрешимо относительно множества слов в алфавите* A_{K} [блок-схему соответствующего предписания (алгоритма) см. на рис. 2; обосновывается это предписание при помощи теоремы о подформулах – см. ниже]. [1]

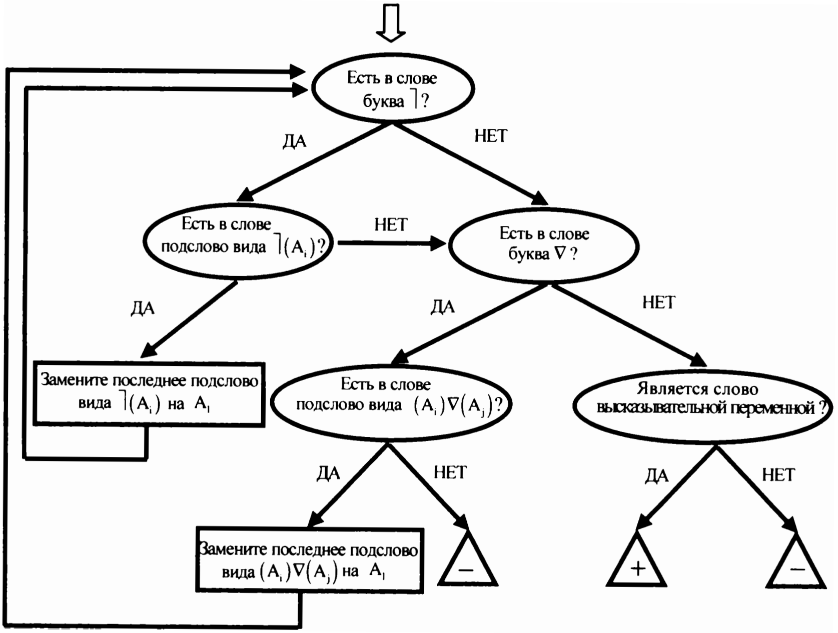


Рис. 2

Т е о р е м а   о   п р е д с т а в и м о с т и. *Любая формула либо является высказывательной переменной, либо имеет вид* ⅂(P), *где* P – *формула, либо имеет вид* (P)∇(Q), *где* P *и* Q – *формулы.*

[1] Проблему «Разрешимо ли множество формул исчисления относительно множества всех слов в алфавите исчисления?» называют иногда *синтаксической проблемой разрешения* (для данного исчисления).

Эта теорема тривиально доказывается индукцией по длине формульного описания.

Ясно, что формула не может быть представлена двумя разными способами в виде $\rceil(P)$: если $\rceil(Q) \overline{\underline{\circ}} \rceil(R)$, то (сокращаем на две буквы слева и на одну букву справа) $Q \overline{\underline{\circ}} R$.

А может ли формула быть представлена двумя разными способами в виде $(P)\nabla(Q)$? На самом деле, не может, но доказать это довольно кропотливо.

Чтобы это доказать, докажем сначала 2 «скобкологические» леммы.

Лемма 1. *Скобочный индекс любой формулы равен* 0 (попросту: в каждой формуле одинаковое количество левых и правых скобок).

Лемма тривиально доказывается индукцией по длине формульного описания.

Лемма 2. *Если слово* P *является началом* (*концом*) *формулы* α, *то* си$\llcorner \mathrm{P} \lrcorner \geq 0$ (≤ 0).

В синтактике существуют два <u>практически равноправных</u> способа доказательства: индукция по длине формульного описания и индукция по логической длине.

Для разнообразия докажем лемму 2 (о «начале») индукцией по логической длине формулы α.

Если лд$\llcorner\alpha\lrcorner = 0$, т. е. α является высказывательной переменной, то утверждение леммы очевидно: скобочный индекс обоих начал формулы α равен 0. Допустим, что для всех формул, логическая длина которых $\leq n$, доказываемое утверждение верно (стандартное предположение индукции при доказательстве индукцией по логической длине – впредь мы даже не будем его повторять), и предположим, что лд$\llcorner\alpha\lrcorner = n+1$. Тогда по теореме о представимости либо $\alpha \overline{\underline{\circ}} \rceil(\beta)$, где β – формула (меньшей логической длины!), либо $\alpha \overline{\underline{\circ}} (\beta)\nabla(\gamma)$, где β и γ – формулы (причём каждая из них имеет меньшую, чем α, логическую длину!). Рассмотрим случай $\alpha \overline{\underline{\circ}} \rceil(\beta)$. У первых двух начал формулы α (пустого и $\rceil$) скобочный индекс равен 0. си$\llcorner\rceil(\lrcorner = 1$. Если же начало P кончается где-то на формуле β, т. е. $\beta \overline{\underline{\circ}} QR$ и $P \overline{\underline{\circ}} \rceil(Q$, то по предположению индукции си$\llcorner Q\lrcorner \geq 0$ и, значит, си $\lfloor P \rfloor > 0$. Если же, наконец, $P \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \alpha$, то по лемме 1 имеем си $\lfloor P \rfloor = 0$. Случай $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (\beta)\nabla(\gamma)$ предлагаю читателю рассмотреть самостоятельно. Утверждение о «конце» очевидно вытекает из утверждения о «начале» и леммы 1.

Нам понадобятся ещё две леммы.

Лемма 3. *Если* α – *формула, то слово* (α) – *не формула.*

Для доказательства этой леммы даже не понадобится индукция – вполне хватит теоремы о представимости (и, конечно, предшествующих лемм).

Формула α имеет один из трёх видов. Что слово (A_i) не является формулой, очевидно хотя бы из теоремы о представимости. Если $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \rceil(\beta)$, где β – формула, то (α) – не формула, потому что из предположения, что $(\alpha) \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (\rceil(\beta))$ – формула, сначала по теореме о представимости получаем $(\rceil(\beta)) \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (\pi)\nabla(\rho)$, где π и ρ – формулы, а затем, сокращая, $\rceil(\beta) \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \pi)\nabla(\rho$; но, ввиду леммы 1, скобочный индекс начала $\pi)$ формулы $\rceil(\beta) \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \pi)\nabla(\rho$ равен -1, что противоречит лемме 2. Случай $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (\beta)\nabla(\gamma)$ рассматривается совершенно аналогично.

Лемма 4. *Если формула* α *является началом* (*концом*) *формулы* β, *то* $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \beta$.

И здесь индукция не понадобится.

Докажем лемму для «начала». По теореме о представимости формула β имеет один из трёх видов. В случае $\beta \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} A_i$ утверждение очевидно. Рассмотрим случай $\beta \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (\pi)\nabla(\rho)$. Нам надо показать, что формула α не может кончаться раньше последней буквы формулы β. Если формула α кончается где-то на формуле π, т. е. $\pi \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} QR$ и $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (Q$, то, с одной стороны, по лемме 1 скобочный индекс формулы α равен 0, а, с другой стороны, с учётом леммы 2, скобочный индекс слова $(Q$ больше 0. Аналогично опровергается вариант, когда формула α кончается где-то на формуле ρ. Вариант $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (\pi)$ противоречит лемме 3 (для этого она и доказана!). Варианты $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} ($, $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (\pi)\nabla$, $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (\pi)\nabla($ отпадают по теореме о представимости. Значит, $\alpha \stackrel{\circ}{=} \beta$. Случай $\beta \stackrel{\circ}{=} \rceil(\pi)$ рассматривается аналогично (в нём лемма 3 не понадобится). Для «конца» лемма доказывается аналогично.

Вот теперь нами может, наконец, быть доказана

Основная лемма (для теоремы об однозначной представимости). *Если* $(\pi)\nabla_1(\rho) \stackrel{\circ}{=} (\sigma)\nabla_2(\tau)$, *где* π, ρ, σ, τ – *формулы*, *то* $\pi \stackrel{\circ}{=} \sigma$, $\nabla_1 \stackrel{\circ}{=} \nabla_2$, $\rho \stackrel{\circ}{=} \tau$.

В самом деле, сократив первые буквы, получаем $\pi)\nabla_1(\rho) \stackrel{\circ}{=} \sigma)\nabla_2(\tau)$. Формулы π, σ – начала одного и того же слова. Ввиду леммы 4 $\pi \stackrel{\circ}{=} \sigma$. Сокращая, получаем дальше сначала $\nabla_1 \stackrel{\circ}{=} \nabla_2$, а потом $\rho \stackrel{\circ}{=} \tau$.

Оговорка «где π, ρ, σ, τ – формулы» необходима: если $\pi \underset{Df}{\stackrel{\circ}{=}} (A_1,$ $\nabla_1 \underset{Df}{\stackrel{\circ}{=}} \&$, $\rho \underset{Df}{\stackrel{\circ}{=}} A_2)) \vee (A_3$, $\sigma \underset{Df}{\stackrel{\circ}{=}} (A_1)\,\&\,(A_2)$, $\nabla_2 \underset{Df}{\stackrel{\circ}{=}} \vee$, $\tau \underset{Df}{\stackrel{\circ}{=}} A_3$, то тоже $(\pi)\nabla_1(\rho) \stackrel{\circ}{=} (\sigma)\nabla_2(\tau)$.

Теорема об однозначной представимости. *Любая формула* α *представима, причём единственным образом, в одном и только одном из трёх видов*: A_i, $\rceil(\beta)$, *где* β – *формула*, $(\beta)\nabla(\gamma)$, *где* β и γ – *формулы.*

После того, как мы установили однозначную представимость каждой формулы, можно ввести понятия главного (вхождения) логического знака формулы и непосредственных составляющих формулы.

Для формулы вида $\rceil(\beta)$ *главным вхождением логического знака* называется, естественно, пара $\langle \rceil, 0\rangle$, а *главным логическим знаком*, соответственно, знак $\rceil$. Формула β называется (единственной) *непосредственной составляющей* формулы $\rceil(\beta)$.

Для формулы вида $(\beta)\nabla(\gamma)$ *главным вхождением логического знака* называется, естественно, пара $\langle \nabla, 1_{\lfloor(\beta)\rfloor}\rangle$, а *главным логическим знаком*, соответственно, знак ∇. Формулы β и γ называются *непосредственными составляющими* формулы $(\beta)\nabla(\gamma)$.

То обстоятельство, что у некоторых формул одна непосредственная составляющая, а у некоторых – две (а у некоторых – высказывательных переменных – если угодно, ни одной), затруднит нам формулировку теоремы, к которой мы переходим.

Т е о р е м а о п о д ф о р м у л а х . *Если формула* α *является подформулой формулы* β, *то либо* $\alpha \eqcirc \beta$, *либо* α *является подформулой* (и вот тут по моему ощущению языка я вынужден раздвоить формулировку) a) *непосредственной составляющей формулы* β *в случае* $\beta \eqcirc \rceil(\pi)$; b) *одной из непосредственных составляющих формулы* β *в случае* $\beta \eqcirc (\pi)\nabla(\rho)$.[i]

Д о к а з а т е л ь с т в о . Рассмотрим случай $\beta \eqcirc (\pi)\nabla(\rho)$ (случай $\beta \eqcirc \rceil(\pi)$ предлагаю рассмотреть читателю). Если формула α начинается на первой букве формулы β, то по лемме 4 $\alpha \eqcirc \beta$. Пусть теперь она начинается где-то на формуле π. Если она и кончается на формуле π, то она является её подформулой и всё доказано. Покажем, что нигде больше она кончаться не может. Если $\pi \eqcirc QR$ и $\alpha \eqcirc R)$, то по лемме 2 $\text{си}\llcorner R\lrcorner \le 0$ и, значит, $\text{си}\llcorner R)\lrcorner < 0$ – противоречие с леммой 1. Если $\rho \eqcirc ST$ и $\alpha \eqcirc R)\nabla(S$, то, как и выше, $\text{си}\llcorner R)\lrcorner < 0$ – противоречие на этот раз с леммой 2. Так же рассматривается и вариант $\alpha \eqcirc R)\nabla(\rho)$. Если $\alpha \eqcirc (S$, то по лемме 2 $\text{си}\llcorner S\lrcorner \ge 0$ и, значит, $\text{си}\llcorner (S\lrcorner > 0$ – противоречие с леммой 1. Вариант $\alpha \eqcirc (\rho)$ противоречит лемме 3. Пусть теперь α начинается где-то на формуле ρ. Если она и кончается на формуле ρ, то она является её подформулой и всё доказано. Вариант $\alpha \eqcirc T)$ опровергается так же, как вариант $\alpha \eqcirc R)$ выше. Обращаю ваше внимание на то, что в доказательстве были использованы все 4 леммы.

С и н т а к с и ч е с к а я т е о р е м а о з а м е н е .[ii] *Если* α, β *и* γ – *формулы, то* $\mathbf{R}_{\gamma}^{<\alpha,\, n>}\llcorner\beta\lrcorner$ – *формула*[iii].

---

[i] Если кому-то чувство языка позволяет, не раздваивая формулировку, сказать просто «непосредственной составляющей формулы β» или «одной из непосредственных составляющих формулы β», флаг вам в руки. Впрочем, может, вы предложите что-нибудь другое?

[ii] Впереди ещё будут семантическая и дедуктивная теоремы о замене.

[iii] Давайте условимся, когда пара $\langle P, n\rangle$ не является вхождением в слово Q, под $\mathbf{R}_{T}^{<P,n>}\llcorner Q\lrcorner$ понимать просто Q.

Доказательство. Если формула α не является подформулой формулы β, то $\mathbf{R}_\gamma^{<\alpha,n>}\llcorner\beta\lrcorner \overset{\circ}{=} \beta$ и теорема верна. Если $\alpha \overset{\circ}{=} \beta$, $\mathbf{R}_\gamma^{<\alpha,n>}\llcorner\beta\lrcorner \overset{\circ}{=} \gamma$ и теорема тоже верна. Пусть теперь формула α является подформулой формулы β. Доказывать теорему мы будем индукцией по логической длине формулы β. Базис верен в силу сделанного замечания. Сделаем стандартное предположение индукции и предположим, что лд$\llcorner\beta\lrcorner = n+1$. Рассмотрим случай $\beta \overset{\circ}{=} \urcorner(\pi)$ (второй случай рассматривается аналогично и оставляется читателю). По теореме о подформулах либо $\alpha \overset{\circ}{=} \beta$ и всё исчерпывается сделанным в начале замечанием, либо α является подформулой формулы π, Тогда $\mathbf{R}_\gamma^{<\alpha,n>}\llcorner\beta\lrcorner \overset{\circ}{=} \mathbf{R}_\gamma^{<\alpha,n>}\llcorner\urcorner(\pi)\lrcorner \overset{\circ}{=} \urcorner(\mathbf{R}_\gamma^{<\alpha,l>}\llcorner\pi\lrcorner)$ (мы написали l вместо n; в данном случае очевидно $l = n-2$, но это совершенно не важно и впредь мы будем писать просто l, не думая о том, чему оно равно; l – это просто длина соответствующего левого крыла вхождения). По предположению индукции $\mathbf{R}_\gamma^{<\alpha,l>}\llcorner\pi\lrcorner$ – формула и, следовательно, $\mathbf{R}_\gamma^{<\alpha,n>}\llcorner\beta\lrcorner$ – формула.

Следствие. *Для любых формул* α, β *и любого* $i \in \mathbf{N}$ $\mathbf{S}_\alpha^{A_i}\llcorner\beta\lrcorner$ – *формула.*

Теорема о соответствующей скобке. *Пусть* α – *формула и* $\alpha \overset{\circ}{=} \text{б}_1\text{б}_2\ldots\text{б}_n$ – *её разложение на буквы. Тогда*

a) *если* $\text{б}_i \overset{\circ}{=}$ (, *то существует и единственное такое* $j > i$, *что* $\text{б}_j \overset{\circ}{=}$) *и слово* $\text{б}_{i+1}\text{б}_{i+2}\ldots\text{б}_{j-1}$ *является формулой*;

b) *если* $\text{б}_j \overset{\circ}{=}$) , *то существует и единственное такое* $i < j$, *что* $\text{б}_i \overset{\circ}{=}$ (*и слово* $\text{б}_{i+1}\text{б}_{i+2}\ldots\text{б}_{j-1}$ *является формулой.*

Доказательство. Докажем пункт a) (аналогичное доказательство пункта b) предоставляю читателю). Доказывать будем индукцией по логической длине формулы α. Базис верен тривиальным образом в силу ложности посылки. Сделаем стандартное предположение индукции и предположим, что лд$\llcorner\alpha\lrcorner = n+1$. Рассмотрим более длинный случай $\alpha \overset{\circ}{=} (\pi)\nabla(\rho)$ (второй случай рассматривается аналогично и оставляется читателю). Итак, возьмём произвольную левую скобку. Возможны 4 варианта: либо это – первая буква, либо это – какая-нибудь левая скобка внутри подформулы π, либо это – буква, после которой идёт ρ, либо, наконец, это – какая-нибудь левая скобка внутри подформулы ρ. Рассмотрим первый вариант. Соответствующая правая скобка очевидна, но надо ещё доказать, что никакая другая правая скобка не подойдёт. Тут надо рассмотреть 3 подварианта: какая-нибудь правая скобка внутри π, какая-нибудь правая скобка внутри ρ и последняя буква. В первом подварианте $\pi \circeq Q)R$, но тогда по лемме 4 $Q \circeq \pi$ и скобка) оказывается не «внутри π», а вышеуказанной соответствующей скобкой. Во втором подварианте $\alpha \circeq (\pi) \nabla (S)T\,)$ и формула, находящаяся «между», равна $\pi) \nabla (S$; тогда по лемме 1 $си \lfloor \pi \rfloor = 0$ и, значит, $си \lfloor \pi) \rfloor = -1$ – противоречие с леммой 2. В третьем подварианте формула, находящаяся «между», равна $\pi) \nabla (\rho$ и противоречие получается так же. Рассмотрим второй вариант: $\pi \circeq Q(R$, $\alpha \circeq (Q(R) \nabla (\rho)$. По предположению индукции для левой скобки внутри формулы π, которую мы указали, внутри формулы π существует и единственная соответствующая правая скобка: $\alpha \circeq (Q(R_1)R_2) \nabla (\rho)$, где R_1 – формула. Рассмотрение второго варианта на этом, к сожалению, не заканчивается – надо ещё показать, что никакая правая скобка вне формулы π не подойдёт. Тут опять надо рассмотреть 3 подварианта: правая скобка, идущая после формулы π, какая-нибудь правая скобка внутри ρ и последняя буква. В первом подварианте мы получаем, что формула R_1 является началом формулы $R_1)R_2$, во втором подварианте $\alpha \circeq (Q(R_1)R_2) \nabla (S)T)$ формула R_1 является началом формулы $R_1)R_2) \nabla (S$, в третьем подварианте формула R_1 является началом формулы $R_1)R_2) \nabla (\rho$; в каждом из подвариантов по лемме 4 формула R_1 должна совпасть с указанной формулой, что невозможно, поскольку в каждой из этих формул после R_1 идёт буква). Рассмотрим третий вариант. Соответствующая правая скобка очевидна, но надо ещё доказать, что никакая правая скобка внутри формулы ρ не подойдёт. Это доказывается в точности так, как в первом подварианте первого варианта. Рассмотрим, наконец, четвёртый вариант: $\rho \circeq S(T$, $\alpha \circeq (\pi) \nabla (S(T)$. По предположению индукции для левой скобки внутри формулы ρ, которую мы указали, внутри формулы ρ существует и единственная соответствующая правая скобка: $\alpha \mathrel{\underset{-}{\overset{\circ}{=}}} (\pi)\nabla(S(T_1)T_2)$, где T_1 – формула. Осталось доказать, что не подойдёт последняя буква формулы α – она не подойдёт, потому что в противном случае по лемме 4 формула T_1 должна совпасть с формулой $T_1)T_2$, что невозможно.

Рассмотрим произвольную формулу α и произвольную букву *б* в ней, являющуюся связкой.

Если *б* $\mathrel{\underset{-}{\overset{\circ}{=}}} \urcorner$, то легко доказать, что следующая буква за ней будет левой скобкой: $\alpha \mathrel{\underset{-}{\overset{\circ}{=}}} P\urcorner(Q$. По теореме о соответствующей скобке в слове Q существует и единственная правая скобка такая, что между указанными скобками стоит некоторая формула β: $\alpha \mathrel{\underset{-}{\overset{\circ}{=}}} P\urcorner(\beta)R$. Эта формула β (точнее – это вхождение формулы β в формулу α) <u>по определению</u> образует *область действия* знака $\urcorner$ (точнее – область действия рассматриваемого вхождения знака $\urcorner$).

Если *б* $\mathrel{\underset{-}{\overset{\circ}{=}}} \nabla$, то легко доказать, что слева от неё стоит правая скобка, а справа – левая: $\alpha \mathrel{\underset{-}{\overset{\circ}{=}}} P)\nabla(Q$. По теореме о соответствующей скобке в словах P и Q существуют, соответственно, единственная левая и единственная правая скобка такие, что между указанными скобками стоят некоторая формула β и некоторая формула γ: $\alpha \mathrel{\underset{-}{\overset{\circ}{=}}} R(\beta)\nabla(\gamma)S$. Эти формулы β и γ (точнее – их вхождения) <u>по определению</u> образуют *область действия* знака ∇ (точнее – область действия рассматриваемого вхождения знака ∇).

Назовём *глубиной* (вхождения) *подформулы* в формуле число связок, в область действия которых эта подформула входит. Например, формула A_1 имеет 2 вхождения в формулу $(A_1) \& ((A_1) \& (A_2))$; глубина вхождения $\langle A_1, 1\rangle$ равна 1, глубина вхождения $\langle A_1, 6\rangle$ равна 2.

Сейчас мы займёмся странноватым делом – мы зачем-то как бы продублируем определение формулы. Цель этого «дублирования» станет ясной в § 3.

Рассмотрим алфавит $A'_{\mathbf{K}}$, отличающийся от алфавита $A_{\mathbf{K}}$ только заменой высказывательных переменных на буквы

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots,$$

которые будем называть *формульными переменными*.

Из множества слов в этом алфавите выделим слова, которые будем называть *формульными схемами.*

Определение формульной схемы отличается от определения формулы только тем, что в качестве исходных слов берутся не высказывательные, а формульные переменные.

Таким образом, например, слово $(A_1)\ \&\ ((A_1)\ \&\ (A_2))$ является формулой (исчисления **К**), а слово $(\mathfrak{A}_1)\ \&\ ((\mathfrak{A}_1)\ \&\ (\mathfrak{A}_2))$ – формульной схемой.

Основное определение данного фрагмента текста, ради которого он, собственно, и написан: будем говорить, что формула α *построена по формульной схеме* Γ, если α может быть получена одновременной подстановкой вместо <u>всех</u> формульных переменных, из которых построена схема Γ, каких-нибудь формул:

$$\alpha \mathrel{\underline{\underline{\circ}}} \mathbf{S}^{\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n}_{\beta_1,\ldots,\beta_n} \llcorner \Gamma \lrcorner .$$

Пример 2. Формула $(\neg((A_1)\ \&\ (\neg(A_2)))) \to ((A_1) \vee (A_3))$ построена, например, по формульным схемам

$$(\mathfrak{A}_1)\to(\mathfrak{A}_2),\ (\mathfrak{A}_1)\to((\mathfrak{A}_2)\vee(\mathfrak{A}_3)),\ (\neg(\mathfrak{A}_1))\to(\mathfrak{A}_2),$$

$$(\neg(\mathfrak{A}_1))\to((\mathfrak{A}_2)\vee(\mathfrak{A}_3)),\ (\neg((\mathfrak{A}_1)\&(\mathfrak{A}_2)))\to(\mathfrak{A}_3),$$

$$(\neg((\mathfrak{A}_1)\&(\mathfrak{A}_2)))\to((\mathfrak{A}_3)\vee(\mathfrak{A}_4)),$$

$$(\neg((\mathfrak{A}_1)\&(\neg(\mathfrak{A}_2))))\to((\mathfrak{A}_3)\vee(\mathfrak{A}_4)).$$

Любая формула построена по схеме $\mathfrak{A}_1$ – это верное утверждение абсолютно бессодержательно и не интересно.

В заключение, перед переходом к семантике, условимся о сокращённом написании формул – об опускании некоторых скобок.

Прежде всего, условимся опускать скобки вокруг высказывательных переменных. Кроме того, условимся, что знак $\neg$ связывает теснее, чем знаки $\&, \vee, \to$, а знаки $\&$ и $\vee$ связывают теснее, чем знак $\to$.

Таким образом, формулу из примера 2 можно записать как $\neg(A_1\ \&\ \neg A_2) \to A_1 \vee A_3$.

На всякий случай подчеркну: все эти сокращённые обозначения – не формулы, а имена формул.

ЗАДАЧИ

1) Докажите, что множества компонент любых несократимых формульных описаний одной и той же формулы совпадают.

2) Докажите, что для формул α, β следующие условия 1, 2, 3 эквивалентны:

   1) формула α является подформулой формулы β;

   2) формула α является компонентой некоторого несократимого формульного описания формулы β;

   3) существуют такие формула γ, натуральное число i и целое неотрицательное число k, что $\beta \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} \mathbf{R}_{\alpha}^{<A_i, k>} \llcorner \gamma \lrcorner$.

3) Найдите алгоритм, отыскивающий в формуле главное вхождение логического знака.

4) Докажите, что для любой формулы α существует единственная биекция между множествами вхождений левой и правой скобки такая, что между соответствующими скобками лежит формула.

5) Докажите, что для любой формулы α

   a) число (вхождений) подформул на 1 больше числа (вхождений) левых скобок;

   b) число (вхождений) подформул равно сумме числа (вхождений) связок и числа (вхождений) высказывательных переменных.

6) Уточните формулировку и докажите, что 2 подформулы одной формулы не могут находиться «в общем положении».

7) Докажите, что если формула α построена по формульной схеме Γ, то любая формула $\mathbf{S}_{\beta_1, \ldots, \beta_n}^{A_1, \ldots, A_n} \llcorner \alpha \lrcorner$ тоже построена по схеме Γ.

§ 2. Семантика

Главная интерпретация: высказывательные переменные мы, естественно, будем интерпретировать как переменные, принимающие в качестве значений высказывания или, если угодно, истинностные значения, т. е. элементы множества ИЗ $= \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{л}\}$, а связки (буквы алфавита $\mathrm{A}_{\mathbf{K}}$) – как соответствующие связки в метаязыке.

Прежде чем определить основной рабочий инструмент интерпретации – понятие значения, надо ввести 2 вспомогательных понятия.

Список переменных Ш (а у нас в исчислении **К** есть только один вид переменных – высказывательные переменные) назовём *нормальным* для формулы α, если в нём содержится каждая переменная, входящая в α. Ясно, что для каждой формулы множество списков переменных, нормальных для неё, бесконечно.

Список переменных Ш, нормальный для формулы α, назовём *каноническим* для неё, если в нём нет переменных, не входящих в α, и переменные в нём расположены по алфавиту. Ясно, что для каждой формулы α канонический список переменных – единственный; обозначим его через ксп $\llcorner\alpha\lrcorner$, а число переменных в нём, т. е. число различных переменных в формуле α, обозначим через #ксп $\llcorner\alpha\lrcorner$.

Пусть α – формула, Ш – список переменных, нормальный для α, и е – *истинностный кортеж* (т. е. кортеж, компоненты которого – истинностные значения) той же длины, что Ш. В такой ситуации будем далее говорить, что i-ой переменной списка Ш *сопоставляется* i-ая компонента кортежа е. Индукцией по логической длине определим $|\alpha|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}}$ – *значение формулы* α *относительно списка переменных* Ш *на истинностном кортеже* е. Базис индукции:

$$|\mathrm{A}_i|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} \underset{Df}{=} \sigma$$

(σ – истинностное значение, сопоставленное в Ш переменной A_i).

Допустим, что для всех формул логической длины $\leq n$ значение уже определено. Тогда для формулы логической длины $n+1$ [i]

---

[i] Для обозначения связок в алфавите $\mathrm{A}_{\mathbf{K}}$ мы использовали те же буквы, которыми они обозначаются в метаязыке (что совсем не обязательно). Для большей ясности мы иногда связки в метаязыке будем обозначать буквами $\urcorner$, &, $\vee$, $\rightarrow$.

$$
\begin{aligned}
|\neg(\pi)|_{e}^{Ш} &\underset{Df}{=} \neg\,|\pi|_{e}^{Ш}\,,\\
|\pi \mathbin{\&} \rho|_{e}^{Ш} &\underset{Df}{=} |\pi|_{e}^{Ш} \mathbin{\&} |\rho|_{e}^{Ш}\,,\\
|\pi \vee \rho|_{e}^{Ш} &\underset{Df}{=} |\pi|_{e}^{Ш} \vee |\rho|_{e}^{Ш}\,,\\
|\pi \to \rho|_{e}^{Ш} &\underset{Df}{=} |\pi|_{e}^{Ш} \to |\rho|_{e}^{Ш}\,.
\end{aligned}
$$

Вот теперь в нашей главной интерпретации формулы превратились в высказывательные формы.

Очевидно (и легко доказывается), что значение любой формулы α зависит только от истинностных значений, сопоставленных входящим в неё переменным.

В частности, если переменная A[i] не входит в формулу α, то, каково бы ни было истинностное значение σ,

$$|\alpha|_{e}^{Ш} = |\alpha|_{e,\ \sigma}^{Ш,\ A}\,.$$

Это равенство можно прочесть и «справа налево»: если из списка Ш убрать переменную, не входящую в α, и, конечно, сопоставленное ей истинностное значение, это не повлияет на значение формулы.

Значит, если в списках $Ш_1$, $Ш_2$ переменным, входящим в α, сопоставляются в истинностных кортежах e_1, e_2 одинаковые истинностные значения, то

$$|\alpha|_{e_1}^{Ш_1} = |\alpha|_{e_2}^{Ш_2}\,.$$

Отсюда, в частности следует, что

$$|\alpha|_{e}^{Ш} = |\alpha|_{e'}^{ксп\llcorner\alpha\lrcorner}$$

(где e' – соответствующий истинностный кортеж).

---

[i] Мы здесь для обозначения переменной использовали метабукву. Мы часто это будем делать и впредь.

Формула α называется *тождественно-истинной*, если для любого истинностного кортежа е длины $\#\text{ксп}\lfloor\alpha\rfloor$ верно $|\alpha|_{e}^{\text{ксп}\lfloor\alpha\rfloor} = \boldsymbol{и}$. Тождественно-истинные формулы называют также *общезначимыми* и *тавтологиями*. Множество тождественно-истинных формул исчисления **К** мы будем обозначать через $\square_{\mathbf{K}}$ или просто через $\square$[1].

Формула α называется *выполнимой*, если для некоторого истинностного кортежа е длины $\#\text{ксп}\lfloor\alpha\rfloor$ верно $|\alpha|_{e}^{\text{ксп}\lfloor\alpha\rfloor} = \boldsymbol{и}$.

Формула α называется *тождественно-ложной*, если для любого истинностного кортежа е длины $\#\text{ксп}\lfloor\alpha\rfloor$ верно $|\alpha|_{e}^{\text{ксп}\lfloor\alpha\rfloor} = \boldsymbol{л}$.

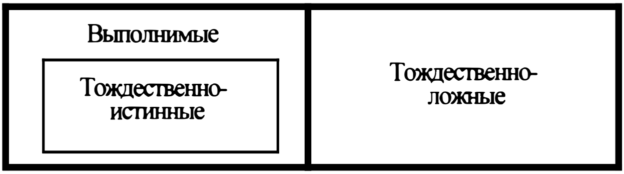


Рис. 3

Соотношение между тремя определёнными понятиями и соответствующими множествами формул показано на рис. 3.

Легко видеть, что

формула α *тогда и только тогда тождественно-истинна, когда формула* $\rceil\alpha$ *тождественно-ложна* (или *не выполнима*);

формула α *тогда и только тогда выполнима, когда формула* $\rceil\alpha$ *не тождественно-истинна*;

формула α *тогда и только тогда тождественно-ложна, когда формула* $\rceil\alpha$ *тождественно-истинна.*

Введённые понятия естественно ставят алгоритмические проблемы распознавания (ПР) общезначимости, выполнимости, тождественно-ложности.

Из только что сформулированных теоремок следует, что ПР общезначимости сводится к ПР тождественно-ложности, а ПР выполнимости и ПР тождественно-ложности сводятся к ПР общезначимости.

---

[1] Букву $\square$ я называю «прямоугольной буквой О». Буква О – первая буква слова «общезначимая».

Впрочем, к чему все эти сводимости, когда каждая из этих проблем тривиально решается методом истинностных таблиц!

Итак, все эти множества разрешимы относительно общего для них естественного универсума $\mathfrak{F}_{\mathbf{K}}$ [i].

Обозначим через ксп $\llcorner\alpha, \beta\lrcorner$ «разумное» объединение ксп $\llcorner\alpha\lrcorner$ и ксп $\llcorner\beta\lrcorner$ (объединяем, выкидываем повторения и располагаем по алфавиту).

Назовём формулы α и β *равносильными*, если для любого истинностного кортежа e длины #ксп $\llcorner\alpha, \beta\lrcorner$ верно $|\alpha|_{\mathrm{e}}^{\text{ксп}\llcorner\alpha,\beta\lrcorner} = |\beta|_{\mathrm{e}}^{\text{ксп}\llcorner\alpha,\beta\lrcorner}$.

Равносильность формул α и β будем обозначать через $\alpha \simeq \beta$.

Легко видеть, что $\alpha \simeq \beta$ тогда и только тогда, когда формула $(\alpha \to \beta)\ \&\ (\beta \to \alpha)$ тождественно-истинна.

Отсюда вытекает, что ПР равносильности сводится к ПР общезначимости (см. также задачу 1 ниже). И опять-таки: к чему эта сводимость, если ПР равносильности тривиально решается методом истинностных таблиц!

Очевидно, отношение равносильности на множестве $\mathfrak{F}_{\mathbf{K}}$ является отношением эквивалентности. (О фактормножестве по этому отношению см. задачу 2.)

Семантическая теорема о замене. *Если* α, β, γ – *формулы и* $\alpha \simeq \beta$, *то* $\mathbf{R}_{\beta}^{<\alpha,n>}\llcorner\gamma\lrcorner \simeq \gamma$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что по Синтаксической теореме о замене $\mathbf{R}_{\beta}^{<\alpha,n>}\llcorner\gamma\lrcorner$ – формула. Опять, если формула α не является подформулой формулы γ или если $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\underline{\circ}}}} \gamma$, теорема верна. Пусть формула α является подформулой формулы γ. Доказывать будем индукцией по логической длине формулы γ. Базис очевиден. Сделаем стандартное предположение индукции и пусть лд $\llcorner\gamma\lrcorner = n+1$.

Тогда либо $\gamma \mathrel{\overline{\underline{\underline{\circ}}}} \rceil(\pi)$, либо $\gamma \mathrel{\overline{\underline{\underline{\circ}}}} (\pi)\triangledown(\rho)$. Рассмотрим случай $\gamma \mathrel{\overline{\underline{\underline{\circ}}}} \rceil(\pi)$. По теореме о подформулах либо $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\underline{\circ}}}} \gamma$, либо α является подформулой формулы π. Первый подслучай рассмотрен выше. Во

---

[i] ПР общезначимости называют иногда *семантической проблемой разрешения* (для данного исчисления).

втором подслучае $\mathbf{R}_{\beta}^{<\alpha,n>}\llcorner\gamma\lrcorner \;\underline{\overline{\circ}}\; \mathbf{R}_{\beta}^{<\alpha,n>}\llcorner\,\rceil(\pi)\lrcorner \;\underline{\overline{\circ}}\; \rceil(\mathbf{R}_{\beta}^{<\alpha,l>}\llcorner\pi\lrcorner)$. По предположению индукции $\mathbf{R}_{\beta}^{<\alpha,l>}\llcorner\pi\lrcorner \simeq \pi$. Значит (к этому «значит» мы сейчас вернёмся), $\mathbf{R}_{\beta}^{<\alpha,n>}\llcorner\gamma\lrcorner \;\underline{\overline{\circ}}\; \rceil(\mathbf{R}_{\beta}^{<\alpha,l>}\llcorner\pi\lrcorner) \simeq \rceil(\pi) \;\underline{\overline{\circ}}\; \gamma$. Окончить доказательство предоставляю читателю.

Чтобы обосновать «значит», должна быть доказана тривиальная

Лемма 1. *Если* $\alpha \simeq \beta$, *то* $\rceil(\alpha) \simeq \rceil(\beta)$.

При окончании доказательства естественно возникнут ещё 6 столь же тривиальных лемм.[i] Вот одна из них:

Лемма. *Если* $\alpha \simeq \beta$, *то* $(\pi) \vee (\alpha) \simeq (\pi) \vee (\beta)$.

Семантическая теорема о подстановке

a) («в равносильные») *Если* $\alpha \simeq \beta$, *то* $\mathbf{S}_{\gamma}^{\mathrm{A}}\llcorner\alpha\lrcorner \simeq \mathbf{S}_{\gamma}^{\mathrm{A}}\llcorner\beta\lrcorner$.

b) («равносильных») *Если* $\alpha \simeq \beta$, *то* $\mathbf{S}_{\alpha}^{\mathrm{A}}\llcorner\gamma\lrcorner \simeq \mathbf{S}_{\beta}^{\mathrm{A}}\llcorner\gamma\lrcorner$.

Каждое из этих утверждений тривиально доказывается при помощи леммы, выражающей значение результата подстановки в некоторую формулу через значение этой формулы:

Основная лемма (для Семантической теоремы о подстановке). *Пусть* Ш, А *– список переменных, нормальный для формул* α *и* γ. *Тогда* $\left|\mathbf{S}_{\gamma}^{\mathrm{A}}\llcorner\alpha\lrcorner\right|_{e,\,k}^{\text{Ш},\mathrm{A}} = \left|\alpha\right|_{e,\,|\gamma|_{e,\,k}^{\text{Ш},\mathrm{A}}}^{\text{Ш},\,\mathrm{A}}$.

Доказывается эта лемма без всяких хитростей индукцией по логической длине формулы α.

Каждое из утверждений Семантической теоремы о подстановке естественно обобщается:

a′) *Если* $\alpha \simeq \beta$, *то* $\mathbf{S}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}^{\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n}\llcorner\alpha\lrcorner \simeq \mathbf{S}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}^{\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n}\llcorner\beta\lrcorner$.

b′) *Если* $\alpha_1 \simeq \beta_1, \ldots, \alpha_n \simeq \beta_n$, *то* $\mathbf{S}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}^{\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n}\llcorner\gamma\lrcorner \simeq \mathbf{S}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}^{\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n}\llcorner\gamma\lrcorner$.

Подумайте над доказательством.

---

[i] Здесь уже, в отличие от синтактики, двухместные связки надо рассматривать отдельно друг от друга.

Все важнейшие равносильности из [16], гл. V, § 1 (в частности, законы Де Моргана, закон контрапозиции, закон исключённого третьего) для формул исчисления **К**, разумеется, остаются верными, причём, ввиду утверждения a′, их достаточно доказывать для высказывательных переменных.

Например, таким образом из $A_1 \,\&\, A_2 \simeq A_2 \,\&\, A_1$ вытекает $\alpha \,\&\, \beta \simeq \beta \,\&\, \alpha$.

Пусть α – формула и ксп $\llcorner \alpha \lrcorner \overset{\circ}{=} X_1, \dots, X_n$. Положим

$$\alpha^{\urcorner} \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \mathbf{S}^{X_1, \dots, X_n}_{\urcorner X_1, \dots, \urcorner X_n} \llcorner \alpha \lrcorner \,.$$

Формулу $\alpha^{\urcorner}$ назовём *негативом* формулы α. Из утверждений b′, a′ легко следуют утверждения

$$\alpha^{\urcorner\urcorner} \simeq \alpha \,,$$
$$\alpha \simeq \beta \rightarrow \alpha^{\urcorner} \simeq \beta^{\urcorner}.$$

Для произвольной формулы α положим

$$\alpha^{*} \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \mathbf{S}^{\&, \vee}_{\vee, \&} \llcorner \alpha \lrcorner \,.$$

Формулу α^{*} назовём формулой, *двойственной* к формуле α. Очевидны утверждения

$$\alpha^{**} \overset{\circ}{=} \alpha \,,$$
$$\alpha^{*\urcorner} \overset{\circ}{=} \alpha^{\urcorner *} \,.$$

Обращаю внимание на то, что определения негатива и двойственной формулы – синтаксические.

Индукцией по логической длине доказывается

Основная лемма (для Семантического закона двойственности). *Если* α *– безимпликативная формула, то* $\alpha^{*} \simeq \urcorner(\alpha^{\urcorner})$.

Семантический закон двойственности. *Если* α, β *– безимпликативные формулы и* $\alpha \simeq \beta$, *то* $\alpha^{*} \simeq \beta^{*}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha \simeq \beta$. По свойствам негатива $\alpha^{\rceil} \simeq \beta^{\rceil}$. По лемме 1 (см. выше) $\rceil(\alpha^{\rceil}) \simeq \rceil(\beta^{\rceil})$. По Основной лемме и свойствам равносильности $\alpha^{*} \simeq \beta^{*}$.

<u>Нормальные формы</u>

В семантике формулы нас интересуют «с точностью до равносильности» – равносильные формулы для нас равноправны, мы их как бы не различаем, как бы отождествляем.

Поэтому дальше мы будем употреблять «многочленные» конъюнкции и дизъюнкции – например, $X_1 \,\&\, X_2 \,\&\, X_3 \,\&\, X_4$ или $X_1 \vee \ldots \vee X_n$, поскольку на основании задачи 3а ниже все полученные из них при помощи скобок «настоящие» формулы равносильны между собой.

Прежде всего, для любой формулы α положим

$$\alpha^{и} \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \alpha\,,$$

$$\alpha^{л} \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \rceil\alpha\,.$$

Определим две двойственные пятёрки терминов. На рис. 4 показаны логические взаимоотношения между членами каждой пятёрки. Из рисунка, в частности, видно, что 3 понятия второй строчки независимы друг от друга.

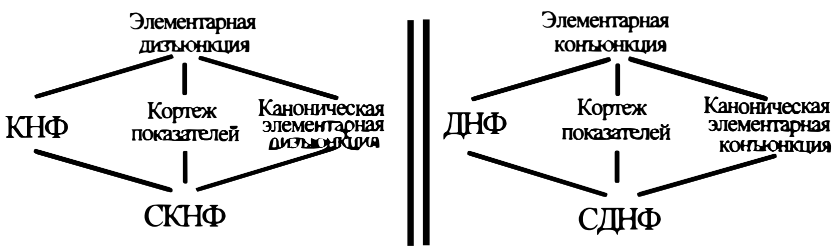


Рис. 4

Элементарная дизъюнкция – это формула вида $X_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee X_n^{\sigma_n}$ ($n \geq 2$) или формула вида X^{σ}, где $X_1, \ldots, X_n, X$ – высказывательные переменные, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma$ – истинностные значения.

Элементарная дизъюнкция называется *канонической*, если переменные в ней не повторяются и идут по алфавиту.

Кортеж $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$ называется *кортежем показателей* элементарной дизъюнкции $X_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee X_n^{\sigma_n}$ (для X^σ – кортеж $\langle \sigma \rangle$).

Формула β называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) формулы α, если $\beta \simeq \alpha$ и β является конъюнкцией элементарных дизъюнкций или элементарной дизъюнкцией.

Формула β называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ) формулы α, если $\beta \simeq \alpha$, β является конъюнкцией канонических элементарных дизъюнкций или канонической элементарной дизъюнкцией и выполняются ещё 3 условия [i]: для каждой конституэнты [ii] τ, конъюнкцией которых является формула β, ксп $\llcorner\tau\lrcorner \stackrel{\circ}{=}$ ксп $\llcorner\alpha\lrcorner$, эти конституэнты не повторяются и расположены в (алфавитном) порядке кортежей показателей [iii].

Я бы счёл неуважением к читателю, если бы явно изложил двойственную пятёрку определений – читатель, при желании, сможет это сделать не хуже меня.

Ну, а дальше для КНФ, СКНФ, ДНФ и СДНФ естественно встают вопросы о существовании, об отыскании (когда существует) и о единственности.

Поговорим сначала о ДНФ.

Разумеется, ни о какой единственности речи быть не может: если формула β является ДНФ формулы α, то формулы $\beta \vee \beta$ и $\beta \vee (A_7 \,\&\, \rceil A_7)$ также являются её ДНФ.

ДНФ существует у любой формулы: если вы сначала при помощи соответствующей равносильности элиминируете $\to$, затем, всячески применяя законы Де Моргана и закон снятия двойного отрицания, «спустите» $\rceil$ на переменные и, наконец, примените, пока это будет возможно, «дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъ-

[i] Цель этих условий – обеспечить единственность СКНФ (когда она существует).

[ii] Это слово вводится для сокращения вместо «каноническая элементарная дизъюнкция» или (см. ниже) «каноническая элементарная конъюнкция» (контекст всегда поможет различить, какой из этих двух терминов заменён).

[iii] Буква ***и***, конечно, предшествует букве ***л***.

юнкции» A & (B ∨ C) ≃ (A & B) ∨ (A & C), вы получите ДНФ исходной формулы – предоставляю читателю это доказать [i].

Прежде чем переходить к более сложному вопросу о СДНФ, сформулируем 2 леммы – назовём их *&-лемма* и *∨-лемма* (доказательство предоставляю читателям).

&-лемма. *Из всех* 2^n *истинностных кортежей длины n каноническая элементарная конъюнкция* $X_1^{\sigma_1}\& \ldots \& X_n^{\sigma_n}$ *истинна только на одном кортеже – на своём кортеже показателей* $\langle\sigma_1, \ldots, \sigma_n\rangle$.

∨-лемма. *Из всех* 2^n *истинностных кортежей длины n каноническая элементарная дизъюнкция* $X_1^{\sigma_1}\vee \ldots \vee X_n^{\sigma_n}$ *ложна только на одном кортеже – на своём кортеже антипоказателей* [ii] $\langle \rceil\sigma_1, \ldots, \rceil\sigma_n\rangle$.

1	2	3	4
$X_1 \ldots X_n$			
и…и	$X_1 \& \ldots \& X_n$	$\lvert\alpha\rvert^{X_1,\ldots,X_n}_{и,\ldots,и}$	
⋮	⋮	⋮	√
$\sigma_1 \ldots \sigma_n$	$X_1^{\sigma_1} \& \ldots \& X_n^{\sigma_n}$	$\lvert\alpha\rvert^{X_1,\ldots,X_n}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$	
⋮	⋮	⋮	√ √
л…л	$\rceil X_1 \& \ldots \& \rceil X_n$	$\lvert\alpha\rvert^{X_1,\ldots,X_n}_{л,\ldots,л}$	

Рис. 5

[i] С другой стороны, сейчас я докажу, что у любой формулы, не являющейся тождественно-ложной, существует СДНФ, а для тождественно-ложной формулы ДНФ является, например, формула $A_7 \& \rceil A_7$.

[ii] Я ввожу этот термин только здесь, но я тут же его и поясняю.

Теперь поговорим об СДНФ.

Прежде всего, у тождественно-ложной формулы СДНФ не существует, поскольку дизъюнкция канонических элементарных конъюнкций (или каноническая элементарная конъюнкция), ввиду &-леммы, не тождественно-ложна.

Пусть формула α не является тождественно-ложной и ксп $\llcorner\alpha\lrcorner \overset{\circ}{=} X_1, \dots , X_n$.

Образуем таблицу из 4 столбцов (рис. 5). В первом столбце расположим <u>по алфавиту</u> все 2^n истинностных кортежей длины n. Во втором столбце напротив каждой строчки $\langle\sigma_1, \dots ,\sigma_n\rangle$ первого столбца расположим каноническую элементарную конъюнкцию $X_1^{\sigma_1} \& \dots \& X_n^{\sigma_n}$ с кортежем показателей $\langle\sigma_1, \dots ,\sigma_n\rangle$; отметим, что все эти конституэнты расположены (сверху вниз) <u>в порядке кортежей показателей</u>. В третьем столбце напротив строчки $\langle\sigma_1, \dots ,\sigma_n\rangle$ первого столбца расположим значение $|\alpha|^{X_1,\dots,X_n}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}$. Наконец, в четвёртом столбце отметим (например, «галочкой») те строчки, в которых в третьем столбце стоит ***и***; поскольку формула α не является тождественно-ложной, такие строчки существуют.

Искомая формула β – СДНФ формулы α – является дизъюнкцией конституэнт из тех строчек второго столбца, которые отмечены в четвёртом столбце (разумеется, они выписываются слева направо в том же порядке, в котором они сверху вниз расположены во втором столбце).

Ясно, что так построенная формула β является СДНФ формулы α. Пояснений требует разве что равносильность $\beta \simeq \alpha$. На любом истинностном кортеже $\langle\sigma_1,\dots,\sigma_n\rangle$, на котором $|\alpha|^{X_1,\dots,X_n}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} =$ ***и***, по &-лемме $|\beta|^{X_1,\dots,X_n}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} =$ ***и***, поскольку соответствующую конституэнту мы включили в β. По той же причине на любом истинностном кортеже $\langle\sigma_1, \dots ,\sigma_n\rangle$, на котором $|\alpha|^{X_1,\dots,X_n}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} =$ ***л***, по &-лемме $|\beta|^{X_1,\dots,X_n}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} =$ ***л***, поскольку соответствующую конституэнту мы не включили в β.

Итак, у формулы α тогда и только тогда существует СДНФ, когда она не является тождественно-ложной, причём мы фактически указали алгоритм, как СДНФ находить.

Ясно, что для любой формулы α, для которой СДНФ существует, она единственна, поскольку в СДНФ надо включить все те и только те конституэнты, которые мы включили (если какую-то из них в формулу β не включить, то на соответствующем истинностном кортеже формула α примет значение ***и***, а формула β по &-лемме примет значение ***л***).

Заметим ещё, что СДНФ не обязательно искать при помощи истинностной таблицы. Очень часто проще сначала найти какую-нибудь ДНФ формулы α (любую!), а потом равносильными преобразованиями превратить её в СДНФ. В частности, переменные, отсутствующие в какой-нибудь элементарной конъюнкции τ, можно добавить при помощи равносильности $\tau \simeq \tau \,\&\, (A \vee \rceil A)$.

С КНФ и СКНФ всё аналогично и двойственно.

У любой формулы существует, разумеется – не единственная, КНФ. Искать её можно так же, как ДНФ, только на третьем этапе надо применять двойственный «дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции» $A \vee (B \,\&\, C) \simeq (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$.

У формулы α тогда и только тогда существует СКНФ, когда она не является тождественно-истинной, а когда она существует, она единственна. Найти её при желании можно тоже при помощи истинностной таблицы (действовать надо двойственно – см. $\vee$-лемму), а можно из любой КНФ при помощи преобразований.

Очень остроумный способ получения КНФ и СКНФ из ДНФ и СДНФ даёт Семантический закон двойственности.

Допустим, для какой-то формулы α вы хотите найти КНФ (СКНФ). Сначала элиминируйте из α связку $\rightarrow$; пусть $\alpha \simeq \beta$, где β безимпликативна. Потом для двойственной формулы β^* как-нибудь найдите ДНФ (СДНФ) γ. Оказывается, двойственная формула γ^* является КНФ (СКНФ) исходной формулы α (докажите – это очень просто).

При помощи КНФ легко узнать, является ли формула тавтологией, потому что верны 2 утверждения:

Если формула α является тавтологией, то в любой её КНФ любая элементарная дизъюнкция, конъюнкцией которых является эта КНФ, непременно содержит одновременно какую-нибудь переменную без отрицания и с отрицанием.

Если в какой-нибудь КНФ формулы α *каждая элементарная дизъюнкция, конъюнкцией которых является эта КНФ, содержит одновременно некоторую переменную без отрицания и с отрицанием, то формула* α *является тавтологией.*

Сейчас будет предложен гораздо более впечатляющий пример применения нормальных форм (точнее, СКНФ). [i]

Семантические следствия

В § 1 Введения были приведены два простеньких примера рассуждений, причём было непосредственно очевидно, что эти рассуждения верны. А если рассмотреть более сложное рассуждение?

Например: «Если я пойду завтра на первую лекцию, то должен буду встать рано. Если я пойду вечером на танцы, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, а встану рано, то я буду спать 5 часов. Мне не достаточно спать 5 часов. Следовательно, я должен или не пойти завтра на первую лекцию, или не пойти на танцы».

Верно ли это рассуждение? Вроде бы верно. Но как решить этот вопрос без «вроде бы»? А если будет предложено ещё более сложное рассуждение?

Для подобных рассуждений, т. е. для рассуждений, в которых и посылки, и заключение построены из высказываний (вспомните название раздела А1!), соединённых привычными связками [ii], предлагается следующий приём: замените высказывания, из которых построены посылки и заключение, высказывательными переменными и образуйте из полученных формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (k посылок), β (заключение) формулу $\alpha_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \alpha_k \to \beta$. Если эта формула тождественно-истинна, то рассматриваемое рассуждение разумно признать верным.

Сказанное делает естественным следующие определения: назовём формулу β *семантическим следствием* формулы α (обозначаем: $\alpha \vDash \beta$), если формула $\alpha \to \beta$ тождественно-истинна; назовём формулу β *семантическим следствием* формул $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ (обозначаем: $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \vDash \beta$), если $\alpha_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \alpha_k \vDash \beta$. [iii]

Очевидны следующие утверждения:

1) $\alpha \vDash \alpha$;

2) $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \vDash \alpha_i$ $(1 \le i \le k)$;

---

[i] Ещё одно применение формул исчисления **К** см. в приложении 1.

[ii] См. также контрпример в конце параграфа.

[iii] Букву $\vDash$ иногда называют *двойной штопор*.

3) *если* α *тождественно-истинна, то* $\beta \vDash \alpha$ *для любой формулы* β;

4) *если* $\alpha \vDash \beta$, *то* $\alpha \vDash \beta \vee \gamma$ *для любой формулы* γ;

5) *если* $\alpha \vDash \beta_1$ *и* $\alpha \vDash \beta_2$, *то* $\alpha \vDash \beta_1 \,\&\, \beta_2$;

6) *если* $\alpha \vDash \beta$ *и* $\gamma \simeq \beta$, *то* $\alpha \vDash \gamma$.

Поставим следующую задачу: дана формула α; как описать все её семантические следствия?[i]

О поставленной задаче в книге [2] говорится: «Это исчисление делает возможным успешный охват проблем, перед которыми принципиально бессильно чисто содержательное логическое мышление. К таковым принадлежит, например, проблема: как можно охарактеризовать предложения, которые вообще могут быть выведены из данных посылок» (с. 17).

Сделаем 2 уточнения постановки задачи.

Первое уточнение очевидно: ввиду утверждения 6 мы, конечно же, будем описывать семантические следствия «с точностью до равносильности», будем перечислять попарно не равносильные следствия.

Второе уточнение не столь понятно: мы будем обозревать только семантические следствия, построенные из тех же переменных, что и α.

Дело в том, что утверждение «*Если* $\alpha \vDash \beta$, *то существует такая формула* γ, *что* $\gamma \simeq \beta$ *и* ксп $\lfloor\gamma\rfloor$ = ксп $\lfloor\alpha\rfloor$» не верно. Например, $A_1 \vDash A_1 \vee A_2$, но никакая формула, построенная из A_1, не равносильна формуле $A_1 \vee A_2$ (докажите это!).

Итак, пусть α – формула и ксп $\lfloor\alpha\rfloor \;\underline{\overline{\circ}}\; X_1, \dots, X_n$.

Перечислим все попарно не равносильные семантические следствия формулы α, построенные из переменных $X_1, \dots, X_n$.

Если формула α тождественно-истинна, то её единственным семантическим следствием является (любая) тождественно-истинная формула (например, $(X_1 \vee \rceil X_1) \,\&\, \dots \,\&\, (X_n \vee \rceil X_n)$).

Если же формула α не тождественно-истинна, то у неё существует (единственная) СКНФ; пусть $\beta \;\underline{\overline{\circ}}\; \gamma_1 \,\&\, \dots \,\&\, \gamma_r$ – эта СКНФ и $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ – её конституэнты.

[i] Напоминаю, что по только что данному определению семантическое следствие нескольких формул есть семантическое следствие одной формулы – их конъюнкции.

Докажем, что у формулы α ровно 2^r (с учётом наших уточнений) семантических следствий.

Пусть $\mathfrak{A} \underset{Df}{=} \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$.

Произвольному непустому подмножеству A множества $\mathfrak{A}$ (а таких подмножеств $2^r - 1$!) сопоставим формулу δ_A – конъюнкцию всех конституэнт из A[i].

Во-первых, очевидно, что для любого такого A верно $\alpha \vDash \delta_A$.

Во-вторых, если $A \neq B$, то $\delta_A \not\simeq \delta_B$. В самом деле, если $\gamma_i \in A$ и $\gamma_i \notin B$, то по $\vee$-лемме на кортеже антипоказателей конституэнты γ_i эта конституэнта ложна, а значит, ложна и формула δ_A, а все конституэнты, входящие в B, истинны, а значит, истинна и формула δ_B.

Итак, мы набрали уже $2^r - 1$ нужных семантических следствий.

В-третьих, по утверждению 3 (любая) тождественно-истинная формула τ является семантическим следствием формулы α.

В-четвёртых, никакая формула δ_A не тождественно-истинна, потому что на кортеже антипоказателей любой конституэнты из A она ложна.

Итак, мы набрали уже 2^r нужных семантических следствий.

В-пятых, других <u>нужных</u> семантических следствий у формулы α нет. Допустим, что $\alpha \vDash \rho$, ксп$\lfloor\rho\rfloor$ = ксп$\lfloor\alpha\rfloor$ и ρ не тождественно-истинна. Докажем, что тогда существует такое непустое подмножество A множества $\mathfrak{A}$, что $\rho \simeq \delta_A$. Поскольку ксп$\lfloor\rho\rfloor$ = ксп$\lfloor\alpha\rfloor$ и ρ не тождественно-истинна, у ρ существует СКНФ $\mu \,\overline{\underline{\circ}}\, \nu_1 \,\&\, \dots \,\&\, \nu_s$, конституэнты которой построены из тех же переменных $X_1, \dots, X_n$, что и конституэнты $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ (вот то единственное место, где применяется условие «построенные из тех же переменных, что и α»). Если какая-то конституэнта ν_i не входит в $\mathfrak{A}$, то по $\vee$-лемме на кортеже антипоказателей этой конституэнты формула μ, а значит, и формула ρ ложны. а все конституэнты из $\mathfrak{A}$ истинны, а значит, истинна и формула α – противоречие с условием $\alpha \vDash \rho$.

Аналогичным путём (двойственным) можно решить ещё более фантастическую задачу – перечислить все попарно не равносильные

---

[i] Здесь мы опираемся не только на задачу 3a, но и на задачу 3b.

формулы, построенные из переменных $X_1, \ldots, X_n$, семантическим следствием каждой из которых является формула α.

В заключение приведём простенькое верное рассуждение, которое не укладывается «на ложе» исчисления **К**; поэтому его верность установить вышепредложенным приёмом нельзя: «Всякое рациональное число – действительное. 3 – рациональное число. Следовательно, 3 – действительное число».

Справляться с подобными рассуждениями мы научимся в главе V.

ЗАДАЧИ

1) Докажите, что ПР общезначимости сводится к ПР равносильности.

2) Докажите, что фактормножество множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{K}}$ по отношению равносильности есть счётное множество счётных классов.

3) Докажите, что

   a) операции конъюнкции и дизъюнкции «ассоциативны», т. е. если в «многочленном» выражении $\alpha_1 \triangledown \ldots \triangledown \alpha_n$ [i] двумя способами расставить скобки так, чтобы оба раза получились формулы, то полученные формулы будут равносильными;

   b) операции конъюнкции и дизъюнкции «коммутативны», т. е. если 2 «многочленных» выражения $\alpha_1 \triangledown \ldots \triangledown \alpha_n$ отличаются только порядком формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то эти «многочленные» формулы равносильны.

4) Сформулируйте и докажите Закон двойственности для множеств (см., например, [16], с. 83).

5) Найдите какую-нибудь ДНФ, СДНФ (если она существует), какую-нибудь КНФ и СКНФ (если она существует) для формул

   a) $X \vee \urcorner Z \rightarrow Y \,\&\, Z$;

---

[i] Здесь и ниже знак $\triangledown$ всюду обозначает конъюнкцию или всюду обозначает дизъюнкцию.

b) $(X \vee \neg Y \to X \,\&\, Z) \to [\neg(X \to \neg X) \vee Y] \,\&\, \neg Z$[i].

6) Пусть α – не тождественно-истинная формула и ксп $\lfloor \alpha \rfloor \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} X_1, \ldots, X_n$. Докажите, что формула α тогда и только тогда равносильна некоторой формуле, не содержащей $\neg$, когда в её СКНФ нет конституэнты $\neg X_1 \vee \ldots \vee \neg X_n$.

7) Перечислите семантические следствия формул A_1, $A_1 \to A_2$, построенные из переменных A_1, A_2.

[i] Квадратные скобки заменяют соответствующие круглые скобки и употреблены для облегчения чтения формул. (Лингвисты, возможно, сказали бы: квадратные и круглые скобки являются аллографами одной графемы.)

§ 3. Дедуктика

Фиксируем 10 формульных схем:

(Δ_1) $\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1)$

(Δ_2) $[\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3)] \to [(\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3)]$

(Δ_3) $\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2)$

(Δ_4) $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1$

(Δ_5) $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_2$

(Δ_6) $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$

(Δ_7) $\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$

(Δ_8) $(\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3) \to [(\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3) \to (\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3)]$

(Δ_9) $(\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to [(\mathfrak{A}_1 \to \urcorner\, \mathfrak{A}_2) \to \urcorner\, \mathfrak{A}_1]$

(Δ_{10}) $\urcorner\urcorner\, \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1$

Прежде чем идти дальше, поделюсь поверхностными – синтаксическими – наблюдениями. Во-первых, в каждой из этих 10 схем главный логический знак $\to$. Во-вторых, эти 10 схем отчётливо делятся на 4 группы: в схемах $\Delta_3 - \Delta_5$, кроме $\to$, имеется $\&$; в схемах $\Delta_6 - \Delta_8$, кроме $\to$, имеется $\vee$; в схемах Δ_9, Δ_{10}, кроме $\to$, имеется $\urcorner$ и, наконец, в схемах Δ_1, Δ_2 – только $\to$.

Формула (исчисления **К**) называется *аксиомой* (исчисления **К**), если она построена по одной из схем $\Delta_1 - \Delta_{10}$; поэтому эти формульные схемы будем впредь называть *схемами аксиом* (исчисления **К**).

Поскольку мы владеем алгоритмом отыскания главного вхождения логического знака в формуле (задача 3 в § 1), требование $ДЕ_0$, очевидно, выполнено: *множество аксиом разрешимо* относительно своего естественного универсума $\mathfrak{F}_{\mathbf{K}}$.

Кроме того, хотя бы методом истинностных таблиц, легко проверить, что *все аксиомы тождественно-истинны.*

В исчислении **K** у нас будет одно правило вывода:

$$\frac{\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_2} . \tag{MP}$$

По традиции оно называется по-латыни «модус поненс» и обозначается по первым буквам латинского оригинала MP [i].

Соответствующее рабочее определение: формула γ называется *непосредственным следствием* формул α, β *по правилу* MP (или «формула γ *может быть получена* из формул α, β *по правилу* MP»), если $\beta \mathrel{\overline{\underline{\,\circ\,}}} \alpha \to \gamma$.

Сразу очевидно, что требование $ДЕ_{MP}$ выполнено: множество троек $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ формул, для которых γ получается из α, β по правилу MP, разрешимо относительно своего естественного универсума.

Итак, для исчисления **K** все требования эффективности выполнены и, значит, *множество доказательств в исчислении* **K** *разрешимо* (относительно своего естественного универсума), а *множество доказуемых формул перечислимо.*

Кроме того, правило MP, очевидно, сохраняет общезначимость. Следовательно, наша главная интерпретация – правильная и *любая доказуемая формула тождественно-истинна*: $\mathbf{T}_{\mathbf{K}} \subseteq \Box_{\mathbf{K}}$. Верно ли обратное включение, мы узнаем в конце параграфа.

Докажем, что для произвольной формулы α формула $\alpha \to \alpha$ доказуема.

Э в р и с т и к а. Вероятно, формула $\alpha \to \alpha$ должна получиться в доказательстве из схемы Δ_2. Попробуем подставить в неё вместо переменных $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_3$ формулу α. Получаем

$$[\alpha \to (\mathfrak{A}_2 \to \alpha)] \to [(\alpha \to \mathfrak{A}_2) \to (\alpha \to \alpha)] .$$

---

[i] modus ponens – положительный способ (умозаключения).

Теперь надо подобрать такое значение переменной $\mathfrak{A}_2$, чтобы обе посылки «снялись» по нашему единственному правилу MP. Впрочем, первая посылка при любом значении переменной $\mathfrak{A}_2$ построена по схеме Δ_1. А вторую посылку легко «снять» по любой из схем Δ_1, Δ_3, Δ_6, Δ_7 . (Например, если в качестве значения переменной $\mathfrak{A}_2$ взять формулу $\gamma \vee \alpha$, где γ – любая формула, то из $\alpha \to \mathfrak{A}_2$ получится формула $\alpha \to \gamma \vee \alpha$, построенная по схеме Δ_7.) По причине, которая выяснится в гл. III, мы предпочтём сделать это по схеме Δ_1. Если в качестве значения переменной $\mathfrak{A}_2$ взять формулу $\gamma \to \alpha$, где γ – любая формула, то из $\alpha \to \mathfrak{A}_2$ получится формула $\alpha \to (\gamma \to \alpha)$, построенная по схеме Δ_1. Итак, эвристика закончена, да ещё вдобавок у нас осталась «одна степень свободы» – любая формула γ. Возьмём в качестве формулы γ формулу α.

Выпишем найденное в эвристике доказательство:

$$[\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)] \to [(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)]$$

$$\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$$

$$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$$

$$\alpha \to (\alpha \to \alpha)$$

$$\alpha \to \alpha$$

(первая формула – аксиома по схеме Δ_2, вторая – аксиома по схеме Δ_1, третья – по правилу MP из первых двух, четвёртая – аксиома по схеме Δ_1, пятая – по правилу MP из двух предыдущих).

Для дальнейшего заметим, что найденное нами доказательство состоит из 5 формул и в нём использованы только схемы аксиом Δ_1, Δ_2.

Т е о р е м а о д е д у к ц и и. [i] *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, *то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. (На всякий случай даю переформулировку: *если* $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1} \vdash \beta$ $(s \geq 0)$, *то* $\alpha_1, \dots, \alpha_s \vdash \alpha_{s+1} \to \beta$.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \rangle \qquad (1)$$

[i] Эта теорема была доказана в 1930 г. французским математиком Эрбраном (J.Herbrand). Ему было тогда 22 года. Через год он умер.

– вывод формулы β из списка Γ, α, существующий по условию (таким образом, $\gamma_n \;\underline{\underline{\circ}}\; \beta$). Образуем из кортежа (1) вспомогательный кортеж

$$\langle \alpha \to \gamma_1,\ \alpha \to \gamma_2, \ldots,\ \alpha \to \gamma_n \rangle \tag{2}$$

(таким образом, $\alpha \to \gamma_n \;\underline{\underline{\circ}}\; \alpha \to \beta$). Индукцией по длине кортежа (2) докажем, что $(\forall i\colon 1 \le i \le n)\,[\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_i\,]$ – тем самым теорема будет доказана. Но мы сделаем больше: мы укажем, чтó надо по очереди, слева направо, вставлять перед компонентами кортежа (2), так, чтобы образующийся новый кортеж всё время был выводом из Γ.

Базис индукции. Формула γ_1 в кортеже (1) либо 1) является аксиомой, либо 2) является одной из формул кортежа Γ, либо 3) является формулой α (мы будем иногда формулу α в этом контексте называть *последней посылкой*).

В случае 1 поставим перед формулой $\alpha \to \gamma_1$ формулы γ_1, $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$. Кортеж $\langle \gamma_1,\ \gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1),\ \alpha \to \gamma_1 \rangle$ является даже доказательством и, значит, выводом из Γ.

В случае 2 поставим перед формулой $\alpha \to \gamma_1$ те же 2 формулы и только что написанный кортеж снова будет выводом из Γ.

В случае 3 поставим перед формулой $\alpha \to \gamma_1 \;\underline{\underline{\circ}}\; \alpha \to \alpha$ те 4 формулы, которые вместе с формулой $\alpha \to \alpha$ образуют её доказательство и, следовательно, опять являются выводом из Γ.

Индукционный шаг. Допустим, что для некоторого $j < n$ мы уже вписали перед всеми формулами $\alpha \to \gamma_i$ $(1 \le i \le j)$ какие-то формулы так, что получившийся кортеж, оканчивающийся формулой $\alpha \to \gamma_j$, является выводом из Γ

$$\langle \ldots \ldots,\ \alpha \to \gamma_j,\ \alpha \to \gamma_{j+1}, \ldots \rangle . \tag{3}$$

Покажем, что надо вписать между формулами $\alpha \to \gamma_j$ и $\alpha \to \gamma_{j+1}$ так, чтобы получившийся кортеж, оканчивающийся формулой $\alpha \to \gamma_{j+1}$, продолжал быть выводом из Γ.

Формула γ_{j+1} в кортеже (1) либо удовлетворяет одному из трёх условий, перечисленных выше для формулы γ_1, либо 4) получается по правилу (MP) из каких-то формул γ_p, $\gamma_q \;\underline{\underline{\circ}}\; \gamma_p \to \gamma_{j+1}$ $(p, q \le j)$.

В первых трёх случаях вписываем между формулами $\alpha \to \gamma_j$ и $\alpha \to \gamma_{j+1}$ то же, что вписывали в базисе.

В случае 4 впишем между формулами $\alpha \to \gamma_j$ и $\alpha \to \gamma_{j+1}$ формулы $[\alpha \to (\gamma_p \to \gamma_{j+1})] \to [(\alpha \to \gamma_p) \to (\alpha \to \gamma_{j+1})]$ и $(\alpha \to \gamma_p) \to (\alpha \to \gamma_{j+1})$. Поскольку формулы $\alpha \to \gamma_p$ и $\alpha \to \gamma_q \overset{\circ}{=} \alpha \to (\gamma_p \to \gamma_{j+1})$ в кортеже (3) стоят не правее формулы $\alpha \to \gamma_j$, «наращенный» кортеж, оканчивающийся формулой $\alpha \to \gamma_{j+1}$, продолжает быть выводом из Γ.

Доказательство закончено (см. также задачу 1 ниже).

Снова хочу отметить, что при доказательстве мы использовали только схемы аксиом Δ_1, Δ_2.

Докажем, что для любых формул α, β, γ

$$\vdash [\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [\alpha \,\&\, \beta \to \gamma]\,. \tag{4}$$

Поскольку в нашем распоряжении находится теперь теорема о дедукции, для доказательства (4) достаточно доказать

$$\alpha \to (\beta \to \gamma) \vdash \alpha \,\&\, \beta \to \gamma\,. \tag{5}$$

Применим ещё раз тот же приём. Для доказательства (5) достаточно доказать

$$\alpha \to (\beta \to \gamma),\ \alpha \,\&\, \beta \vdash \gamma\,. \tag{6}$$

А (6) мы докажем «в лоб» – просто выпишем соответствующий вывод:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \to & (\beta \to \gamma) \\ \alpha & \& & \beta \\ \alpha \,\&\, \beta & \to & \alpha \\ & \alpha & \\ \beta & \to & \gamma \\ \alpha \,\&\, \beta & \to & \beta \\ & \beta & \\ & \gamma\,. & \end{array} \tag{7}$$

Надеюсь, вы сумеете сообразить, на каком основании стоит в этом выводе формулы γ из списка $\alpha \to (\beta \to \gamma)$, $\alpha \,\&\, \beta$ каждая формула (см. также задачу 2).

Очень полезной для доказательства утверждений вида $\Gamma \vdash \alpha$ (в частности, $\vdash \alpha$) является теорема о введении-удалении, объединяющая под одним названием 10 утверждений – 7 так называемых *пря-*

мых правил, т. е. утверждений вида $\Gamma \vdash \alpha$, и 3 *правила вспомогательного вывода*, вроде теоремы о дедукции (если существует некоторый вывод, то существует некоторый другой вывод).

Теорема о введении-удалении

	Введение	Удаление
$\to$	1, 2 $\dfrac{\Gamma,\alpha\vdash\beta}{\Gamma\vdash\alpha\to\beta}$	MP $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{A}_2$
&	3 $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{A}_1\,\&\,\mathfrak{A}_2$	4, 5 $\mathfrak{A}_1\,\&\,\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_1\,\&\,\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{A}_2$
$\vee$	6, 7 $\mathfrak{A}_1\vdash\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_2\vdash\mathfrak{A}_1\vee\mathfrak{A}_2$	8 $\dfrac{\Gamma,\alpha\vdash\delta\ \ \&\ \ \Gamma,\beta\vdash\delta}{\Gamma,\alpha\vee\beta\vdash\delta}$
$\neg$	9 $\dfrac{\Gamma,\alpha\vdash\delta\ \ \&\ \ \Gamma,\alpha\vdash\neg\delta}{\Gamma\vdash\neg\alpha}$	10 $\neg\neg\mathfrak{A}_1\vdash\mathfrak{A}_1$

По традиции импликации в правилах вспомогательного вывода написаны «вертикально»: посылки – над чертой, заключение – под чертой.

Называются эти 10 утверждений, соответственно, *правило введения* (или *удаления*) *импликации* (или *конъюнкции*, *дизъюнкции*, *отрицания*).

Разумеется, правило введения импликации – другое название теоремы о дедукции.

Число в уголке имеет двойной смысл. Во-первых, оно указывает, какую аксиому (или какие аксиомы) надо применить для доказательства соответствующего правила. Во-вторых, оно указывает, какую аксиому (или какие аксиомы) каждое правило фактически заменяет.

Разумеется, каждое из этих 10 утверждений должно быть доказано. Впрочем, правило введения импликации мы уже доказали.

Прямые правила вы легко докажете сами (тем более, что в уголке стоит подсказка).

Докажу для примера правило удаления дизъюнкции. Итак, пусть $\Gamma, \alpha \vdash \delta$ и $\Gamma, \beta \vdash \delta$. По теореме о дедукции $\Gamma \vdash \alpha \to \delta$ и $\Gamma \vdash \beta \to \delta$. Теперь нужный вывод выглядит так:

$$
\begin{array}{l}
(\Gamma)\left[\begin{array}{l}\vdots\end{array}\right. \\
\alpha \vee \beta \\
(1)\left[\begin{array}{l}\vdots \\ \alpha \to \delta\end{array}\right. \\
(2)\left[\begin{array}{l}\vdots \\ \beta \to \delta\end{array}\right. \\
(\alpha \to \delta) \to [(\beta \to \delta) \to (\alpha \vee \beta \to \delta)] \\
(\beta \to \delta) \to (\alpha \vee \beta \to \delta) \\
\alpha \vee \beta \to \delta \\
\delta
\end{array}
$$

(сначала идут посылки – список Γ и формула $\alpha \vee \beta$, затем идёт вывод (1) формулы $\alpha \to \delta$ из Γ, затем – вывод (2) формулы $\beta \to \delta$ из Γ, затем аксиома по схеме Δ_8 и трижды применённый модус поненс).

Кстати, а почему это правило так называется? Ведь вроде бы наоборот – дизъюнкция <u>появляется</u> в заключении. Потому что, чтобы по этому правилу получить заключение $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \delta$, надо сначала дизъюнкцию как бы удалить – надо сначала доказать $\Gamma, \alpha \vdash \delta$ и $\Gamma, \beta \vdash \delta$ (в метаязыке этому соответствует фраза «Рассмотрим 2 случая: α и β»).

Правило введения отрицания доказывается совершенно аналогично.

При помощи теоремы о введении-удалении очень легко доказывается, что, каковы бы ни были формулы α и β,

$$\alpha, \neg\alpha \vdash \beta \tag{8}$$

(«из противоречия следует всё, что угодно»). В самом деле, из $\alpha, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha$ и $\alpha, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg\alpha$ по правилу введения отрицания следует $\alpha, \neg\alpha \vdash \neg\neg\beta$, а затем при помощи правила удаления отрицания $\neg\neg\beta \vdash \beta$ получаем (8).

Ещё проще доказывается *закон контрапозиции*

$$\frac{\alpha \vdash \beta}{\neg\beta \vdash \neg\alpha}, \tag{9}$$

поскольку из $\neg\beta, \alpha \vdash \beta$ и $\neg\beta, \alpha \vdash \neg\beta$, по правилу введения отрицания получаем требуемое.

Наконец, отметим ещё, что при помощи схемы Δ_1 мгновенно доказывается полезное *правило добавления посылки*

$$\alpha \vdash \beta \to \alpha . \tag{10}$$

Это едва ли не главное применение схемы Δ_1.

Дедуктивная теорема о подстановке. *Если* $\Gamma \vdash \alpha$, *то, каковы бы ни были высказывательные переменные* $X_1, \ldots, X_n$ *и формулы* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, $\mathbf{S}^{X_1, \ldots, X_n}_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} \llcorner \Gamma \lrcorner \vdash \mathbf{S}^{X_1, \ldots, X_n}_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} \llcorner \alpha \lrcorner$.[i]

Если $\langle \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \rangle$ – вывод формулы α из списка Γ, существующий по условию, то $\langle \mathbf{S}^{X_1, \ldots, X_n}_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} \llcorner \delta_1 \lrcorner, \mathbf{S}^{X_1, \ldots, X_n}_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} \llcorner \delta_2 \lrcorner, \ldots, \mathbf{S}^{X_1, \ldots, X_n}_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} \llcorner \delta_n \lrcorner \rangle$ – искомый вывод формулы $\mathbf{S}^{X_1, \ldots, X_n}_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} \llcorner \alpha \lrcorner$ из списка $\mathbf{S}^{X_1, \ldots, X_n}_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} \llcorner \Gamma \lrcorner$ (в отличие от доказательства теоремы о дедукции никаких формул здесь добавлять не надо) – доказывается это индукцией по длине вывода

---

[i] Напоминаю, что Γ – список формул, т. е. слово; поэтому $\mathbf{S}^{X_1, \ldots, X_n}_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} \llcorner \Gamma \lrcorner$ не требует специального определения.

(впрочем, при этом надо использовать результат одной из ранее заданных задач).

Таким образом, например, утверждения (4), (8), (9), (10) можно было формулировать для высказывательных переменных.

В § 2 у нас уже мелькнула формула $(\alpha \to \beta)\ \&\ (\beta \to \alpha)$, построенная из формул α и β. Введём для нее синтаксическое сокращение:

$$\alpha \rightleftarrows \beta \ \underset{Df}{\overset{\circ}{=}}\ (\alpha \to \beta)\ \&\ (\beta \to \alpha)\,.$$

Формулу $\alpha \rightleftarrows \beta$ мы, естественно, будем называть *эквиваленцией* формул α и β. Назовём формулы α и β *дедуктивно эквивалентными*, если их эквиваленция доказуема.

Легко доказать, что в исчислении **K** *две формулы дедуктивно равны тогда и только тогда, когда они дедуктивно эквивалентны.*

Легко проверить также, что *отношение дедуктивной эквивалентности* на множестве $\mathfrak{F}_{\mathbf{K}}$ *является отношением эквивалентности.*

Поскольку в нашем исчислении доказуемые формулы общезначимы, *дедуктивно эквивалентные формулы равносильны.* Обратное утверждение мы пока доказать не можем.

Дедуктивная теорема о замене. *Для формул* α, β, γ

$$\alpha \rightleftarrows \beta \ \vdash\ \mathbf{R}_{\beta}^{<\alpha,\, n>} \llcorner\gamma\lrcorner \rightleftarrows \gamma\,.$$

Доказательство проводится индукцией по логической длине формулы γ и естественно приводит к необходимости доказательства 7 простых лемм, аналогичных леммам для Семантической теоремы о замене. Приведу для примера одну из них.

Лемма 1. $\alpha \rightleftarrows \beta \ \vdash\ \urcorner(\alpha) \rightleftarrows \urcorner(\beta)$.

Если формулировку Дедуктивного закона двойственности получить из формулировки Семантического закона двойственности по тому же образцу, по которому формулировка Дедуктивной теоремы о замене получается из формулировки Семантической теоремы о замене (сравните!), результатом будет неверное утверждение «*Если* α, β – *безимпликативные формулы, то* $\alpha \rightleftarrows \beta \vdash \alpha^* \rightleftarrows \beta^*$» (задача 3 ниже) – Дедуктивный закон двойственности в виде прямого правила не верен, он верен только в виде (более слабого) правила вспомогательного вывода:

Дедуктивный закон двойственности. *Если безимпликативные формулы* α и β *дедуктивно эквивалентны, то и двойственные формулы* α^*, β^* *тоже дедуктивно эквивалентны.*

Сначала (индукцией по логической длине) должна быть доказана

Основная лемма (для Дедуктивного закона двойственности). *Если* α – *безимпликативная формула, то* $\vdash \alpha^* \rightleftarrows \urcorner(\alpha^{\urcorner})$.

После этого и для Дедуктивного закона двойственности получается

Доказательство. Пусть $\vdash \alpha \rightleftarrows \beta$. По Дедуктивной теореме о подстановке $\vdash \alpha^{\urcorner} \rightleftarrows \beta^{\urcorner}$. По лемме 1 (см. выше) $\vdash \urcorner(\alpha^{\urcorner}) \rightleftarrows \urcorner(\beta^{\urcorner})$. По Основной лемме и свойствам дедуктивной эквивалентности $\vdash \alpha^* \rightleftarrows \beta^*$.

Если надо доказать утверждение вида $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то естественно, вспомнив теорему о дедукции, доказывать вместо него в принципе более простое утверждение $\Gamma, \alpha \vdash \beta$.

Если надо доказать утверждение вида $\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta$, то естественно, вспомнив правило введения конъюнкции, доказывать вместо него более простые утверждения $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \vdash \beta$.

Если надо доказать утверждение вида $\Gamma \vdash \urcorner\alpha$, то естественно, вспомнив правило введения отрицания, попытаться из списка Γ, α вывести какую-нибудь формулу и её отрицание.

Ну, а что делать, если надо доказать утверждение вида $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$? Быть может, вы ответите: «Вспомнив правило введения дизъюнкции, естественно попытаться доказать $\Gamma \vdash \alpha$ или доказать $\Gamma \vdash \beta$». Ответ с формальной точки зрения безупречный, но с практической точки зрения плохой, потому что, не говоря уж о том, что неизвестно, какое из них доказывать, чаще всего оба утверждения $\Gamma \vdash \alpha$, $\Gamma \vdash \beta$ будут недоказуемыми.

Рискну дать для этой ситуации неожиданный совет: вспомнив правило <u>удаления</u> отрицания, попытайтесь вместо утверждения $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$ доказать утверждение $\Gamma \vdash \urcorner\urcorner(\alpha \vee \beta)$. Смысл этого совета в том, что формула $\urcorner\urcorner(\alpha \vee \beta)$ имеет вид $\urcorner\pi$, а для утверждений вида $\Gamma \vdash \urcorner\pi$ выше был указан дальнейший путь.

Докажу для примера (а впрочем, этот результат нам понадобится и в доказательстве теоремы о полноте)

$$\vdash \mathrm{A}_1 \vee \urcorner\mathrm{A}_1 . \qquad (11)$$

Эвристика. Итак, попытаемся доказать утверждение $\vdash \urcorner\urcorner(\mathrm{A}_1 \vee \urcorner\mathrm{A}_1)$. Какое же «противоречие» (π и $\urcorner\pi$) нам вывести из формулы $\urcorner(\mathrm{A}_1 \vee \urcorner\mathrm{A}_1)$? Формула $\urcorner(\mathrm{A}_1 \vee \urcorner\mathrm{A}_1)$ равносильна (да, я вполне понимаю, что начинаю применять чуждый для дедуктики семантический язык, но ведь я эвристикой занимаюсь!) формуле $\urcorner\mathrm{A}_1 \,\&\, \urcorner\urcorner\mathrm{A}_1 \simeq \urcorner\mathrm{A}_1 \,\&\, \mathrm{A}_1$. Вот и попытаемся вывести из формулы $\urcorner(\mathrm{A}_1 \vee \urcorner\mathrm{A}_1)$ формулы A_1 и $\urcorner\mathrm{A}_1$. Поскольку $\urcorner(\mathrm{A}_1 \vee \urcorner\mathrm{A}_1) \simeq \urcorner\mathrm{A}_1 \,\&\, \mathrm{A}_1$, есть надежда, что это получится. Опуская дальнейшую эвристику, изложу

Доказательство. По правилу введения дизъюнкции $\urcorner\mathrm{A}_1 \vdash \mathrm{A}_1 \vee \urcorner\mathrm{A}_1$. По закону контрапозиции (9) $\urcorner(\mathrm{A}_1 \vee \urcorner\mathrm{A}_1) \vdash \urcorner\urcorner\mathrm{A}_1$. С помощью правила удаления отрицания получаем $\urcorner(\mathrm{A}_1 \vee \urcorner\mathrm{A}_1) \vdash \mathrm{A}_1$. Второе утверждение получается чуть быстрее: по правилу введения дизъюнкции $\mathrm{A}_1 \vdash \mathrm{A}_1 \vee \urcorner\mathrm{A}_1$; по закону контрапозиции (9) $\urcorner(\mathrm{A}_1 \vee \urcorner\mathrm{A}_1) \vdash \urcorner\mathrm{A}_1$. Окончание доказательства – по стандарту.

Теорема о полноте (исчисления **K**).[i] *Любая тождественно-истинная формула* (исчисления **K**) *доказуема* (в этом исчислении):

$$\square_{\mathbf{K}} \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{K}} .$$

Для произвольного списка формул $\Gamma \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и произвольного истинностного кортежа $\mathrm{e} \underset{Df}{=} \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \rangle$ той же длины положим $\Gamma^{\mathrm{e}} \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \alpha_1^{\sigma_1}, \alpha_2^{\sigma_2}, \dots, \alpha_n^{\sigma_n}$.

[i] Эта теорема была доказана американским математиком Постом (E.L.Post) в 1921 г. Объяснение названия – в § 3 гл. IV.

О с н о в н а я л е м м а (для теоремы о полноте). *Для произвольной формулы* α, *списка переменных* Ш, *нормального для формулы* α, *и истинностного кортежа* e *той же, что* Ш, *длины*

$$Ш^{e} \vdash \alpha^{|\alpha|_{e}^{Ш}}$$

(поскольку каждая переменная – формула, список переменных Ш есть список формул).

Лемма доказывается индукцией по логической длине формулы α.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Пусть α – тождественно-истинная формула и Ш $\underset{Df}{\overline{\overline{\circ}}}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – список переменных, нормальный для формулы α. Для любого i: $1 \leq i \leq n$ положим $Ш_i \underset{Df}{\overline{\overline{\circ}}} X_1, X_2, \ldots, X_i$ (в частности, $Ш_n \overline{\overline{\circ}}$ Ш). Поскольку формула α тождественно-истинна, $(\forall e \in ИЗ^n)[\,|\alpha|_e^{Ш} = \boldsymbol{u}]$. Тогда по Основной лемме $(\forall e \in ИЗ^n)[Ш^e \vdash \alpha]$. Теперь индукцией спуска по i докажем, что

$$(\forall i\colon 1 \leq i \leq n)(\forall e \in ИЗ^i)[\,Ш_i^e \vdash \alpha]\,. \tag{12}$$

<u>Базис индукции</u>: $i = n$. Надо доказать $(\forall e \in ИЗ^n)[\,Ш_n^e \vdash \alpha]$, но это доказано выше.

<u>Индукционный шаг</u>. Допустим, что для некоторого i: $1 < i \leq n$

$$(\forall e \in ИЗ^i)[\,Ш_i^e \vdash \alpha]\,. \tag{13}$$

Докажем, что

$$(\forall e \in ИЗ^{i-1})[\,Ш_{i-1}^e \vdash \alpha]\,. \tag{14}$$

Пусть $e_0 \underset{Df}{=} \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1} \rangle \in ИЗ^{i-1}$. Докажем, что

$$Ш_{i-1}^{e_0} \vdash \alpha\,. \tag{15}$$

Нарастим кортеж e_0 двумя возможными способами: $e_{01} \underset{Df}{=} \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, \boldsymbol{u} \rangle$ и $e_{02} \underset{Df}{=} \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}, \boldsymbol{л} \rangle$. По (13) $Ш_i^{e_{01}} \vdash \alpha$ и $Ш_i^{e_{02}} \vdash \alpha$. Но $Ш_i^{e_{01}} = Ш_{i-1}^{e_0}, X_i^{u} = Ш_{i-1}^{e_0}, X_i$ и $Ш_i^{e_{02}} = Ш_{i-1}^{e_0}, X_i^{л} = Ш_{i-1}^{e_0}, \neg X_i$. Следовательно,

$$Ш^{e_0}_{i-1}, X_i \vdash \alpha, \tag{16}$$

$$Ш^{e_0}_{i-1}, \rceil X_i \vdash \alpha. \tag{17}$$

Из (16) и (17) по правилу удаления дизъюнкции

$$Ш^{e_0}_{i-1}, X_i \vee \rceil X_i \vdash \alpha. \tag{18}$$

Из (18) и (11) вытекает (15) (это заключение вам надо додумать).

Итак, (14), а с ним и (12) доказаны.

Из (12) при $i = 1$ получаем $(\forall e \in ИЗ)[Ш^e_1 \vdash \alpha]$. Но $Ш_1 \overset{\circ}{=} X_1$. Значит, $X_1 \vdash \alpha$ и $\rceil X_1 \vdash \alpha$. Отсюда снова по правилу удаления дизъюнкции $X_1 \vee \rceil X_1 \vdash \alpha$. Из этого и из (11)[i] получаем $\vdash \alpha$. Теорема доказана.

Итак, $\mathbf{T_K} = \square_\mathbf{K}$: *формула в исчислении* **К** *тогда и только тогда доказуема, когда она общезначима*[ii].

Значит, *множество доказуемых формул исчисления* **К** *разрешимо* (относительно естественного универсума).

Кроме того, *формулы исчисления* **К** *тогда и только тогда дедуктивно эквивалентны, когда они равносильны.*

Наконец, *формула* β *тогда и только тогда выводима из формулы* α *в исчислении* **К**, *когда она является семантическим следствием формулы* α.

Дедуктика в исчислении **К** хорошо согласована с его семантикой.

ЗАДАЧИ

1) Дан вывод формулы β из списка Γ, α длины n. Быть может, уточнив или дополнив условие, сосчитать, сколько формул содержит вывод формулы $\alpha \to \beta$ из Γ, полученный из данного вывода при помощи алгоритма, фактически[iii] содержащегося в нашем доказательстве теоремы о дедукции.

---

[i] Желающие могут сослаться на задачу к п. 2 § 2 Введения.

[ii] ПР доказуемости (для формул данного исчисления) называется иногда *дедуктивной проблемой разрешения* (для данного исчисления).

[iii] Это слово будет объяснено в гл. II.

2) Из вывода (7) формулы γ из списка $\alpha \to (\beta \to \gamma)$, $\alpha \,\&\, \beta$ получите <u>алгоритмически</u>[i] вывод формулы $\alpha \,\&\, \beta \to \gamma$ из формулы $\alpha \to (\beta \to \gamma)$. Вычеркните из него всё, что сможете[ii]. Сколько формул у вас в этих двух выводах?

3) Найдите такие безимпликативные формулы α, β, для которых утверждение $\alpha \rightleftarrows \beta \vdash \alpha^* \rightleftarrows \beta^*$ не верно.

4) Не используя теоремы о полноте, докажите, что следующие формулы дедуктивно эквивалентны:

a) $\neg(\alpha \,\&\, \beta)$ и $\neg\alpha \vee \neg\beta$;
b) $\neg(\alpha \vee \beta)$ и $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta$;
c) $\alpha \to \beta$ и $\neg\alpha \vee \beta$;
d) $\alpha \,\&\, (\beta \vee \gamma)$ и $(\alpha \,\&\, \beta) \vee (\alpha \,\&\, \gamma)$;
e) $\alpha \,\&\, (\beta \,\&\, \gamma)$ и $(\alpha \,\&\, \beta) \,\&\, \gamma$.

---

[i] Имеется в виду алгоритм, о котором говорится в задаче 1.

[ii] Так, чтобы оставшийся кортеж по-прежнему был выводом формулы $\alpha \,\&\, \beta \to \gamma$ из формулы $\alpha \to (\beta \to \gamma)$.

ГЛАВА II

ИСЧИСЛЕНИЕ K′

Исчисление **K′** отличается от исчисления **K** только дедуктикой. У него тот же алфавит и те же правила образования (то же множество формул $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\mathbf{K}}$), т. е. та же синтактика, та же главная интерпретация и то же определение значения формулы, т. е. та же семантика, и только дедуктика у него другая.

В исчислении **K** бесконечное (разумеется, счётное) множество аксиом. В исчислении **K′** только 10 аксиом – они получаются заменой в схемах $\Delta_1 - \Delta_{10}$ формульных переменных $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3$ на высказывательные переменные A_1, A_2, A_3:

(δ_1) $A_1 \to (A_2 \to A_1)$

(δ_2) $[A_1 \to (A_2 \to A_3)] \to [(A_1 \to A_2) \to (A_1 \to A_3)]$

(δ_3) $A_1 \to (A_2 \to A_1 \,\&\, A_2)$

(δ_4) $A_1 \,\&\, A_2 \to A_1$

(δ_5) $A_1 \,\&\, A_2 \to A_2$

(δ_6) $A_1 \to A_1 \vee A_2$

(δ_7) $A_2 \to A_1 \vee A_2$

(δ_8) $(A_1 \to A_3) \to [(A_2 \to A_3) \to (A_1 \vee A_2 \to A_3)]$

(δ_9) $(A_1 \to A_2) \to [(A_1 \to \neg A_2) \to \neg A_1]$

(δ_{10}) $\neg\neg A_1 \to A_1$

Таким образом, формула $\neg\neg A_{10} \to A_{10}$, являющаяся аксиомой исчисления $\mathbf{K}$ по схеме Δ_{10}, аксиомой исчисления $\mathbf{K}'$ не является.

В исчислении $\mathbf{K}'$ будут 2 правила вывода – модус поненс (МП) и *правило подстановки*:

$$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathbf{S}^{A_i}_{\mathfrak{A}_2} \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner}. \tag{ПП}$$

Формула β называется *непосредственным следствием* формулы α *по правилу подстановки* (*может быть получена* из формулы α *по правилу подстановки*), если существуют такое $i \in \mathbf{N}$ и такая формула γ, что $\beta \mathrel{\underline{\underline{\circ}}} \mathbf{S}^{A_i}_{\gamma} \llcorner \alpha \lrcorner$.

Требование эффективности $ДЕ_{ПП}$, конечно, выполняется: чтобы узнать, можно ли формулу β получить из формулы α по правилу подстановки, достаточно по очереди подставить в α вместо каждой её переменной все формулы логической длины $\leq$ лд $\llcorner \beta \lrcorner$, построенные из переменных из ксп $\llcorner \alpha, \beta \lrcorner$, а таких формул – конечное число.

Правило подстановки, разумеется, сохраняет общезначимость (например, по Основной лемме для Семантической теоремы о подстановке).

Легко доказать, что доказуемость в исчислениях $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ совпадает: $T_{\mathbf{K}} = T_{\mathbf{K}'}$ (задача 1 ниже), хотя множества доказательств различны (задача 2). Зато выводимость в этих исчислениях различна. Например, в $\mathbf{K}'$ для любой формулы α верно $A_1 \vdash_{\mathbf{K}'} \alpha$.

А как обстоит дело с теоремой о дедукции? Теорема о дедукции в той формулировке, которая была дана для исчисления $\mathbf{K}$, не верна: если бы она была верна, то из $A_1 \vdash_{\mathbf{K}'} A_2$ следовало бы $\vdash_{\mathbf{K}'} A_1 \to A_2$, но $A_1 \vdash_{\mathbf{K}'} A_2$ верно, а $\vdash_{\mathbf{K}'} A_1 \to A_2$ не верно ($A_1 \to A_2$ не тождественно-истинна).

Чтобы для исчисления $\mathbf{K}'$ «спасти» теорему о дедукции, надо ввести 3 новых понятия.

Впрочем, первое из этих понятий – настолько естественное, что оно с трудом воспринимается как новое: *анализ* вывода $\langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle$ из списка Γ – это кортеж $\langle P_1, P_2, \ldots, P_n \rangle$, в котором P_i объясняет, на каком основании в выводе стоит формула γ_i $(1 \leq i \leq n)$.

Оснований может быть 4 вида: Аk – аксиома δ_k, Пk – k-я посылка, МП(m, n) – получено по модус поненс из γ_m и γ_n, ПП(m) – получено по правилу подстановки из γ_m.

У одного вывода может быть несколько анализов (пример скоро будет приведён), но дальнейшие понятия вводятся для объекта «вывод с анализом», т. е. для вывода с каким-то фиксированным анализом.

Пусть $\langle\gamma_1,\ldots, \gamma_i, \ldots, \gamma_j, \ldots, \gamma_n\rangle$ – вывод из списка Γ с анализом. Мы будем говорить, что формула γ_j *зависит* от формулы γ_i $(i \le j)$ в данном выводе с анализом, если либо $j = i$, либо, согласно данному анализу, γ_j получается по правилу подстановки из формулы γ_p $(i \le p < j)$, которая зависит от γ_i, либо, наконец, согласно данному анализу, γ_j получается по модус поненс из формул γ_p, γ_q $(i \le p, q < j)$, хотя бы одна из которых зависит от γ_i[i].

Про это понятие нам понадобится очень простая

Теорема. *Если* $\Delta \vdash \beta$[ii], *причём существует такой вывод* $\langle\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\rangle$ *формулы* β *из списка* Δ *с анализом, в котором последняя компонента* $\gamma_n \overset{\circ}{=} \beta$ *не зависит ни от какой формулы, входящей в этот вывод, согласно данному анализу, в качестве* i*-ой посылки*[iii], *то эту посылку можно из списка* Δ *выкинуть* (в том смысле, что для списка Δ', получающегося выкидыванием из списка Δ i-ой посылки, по-прежнему $\Delta' \vdash \beta$).

И, наконец, третье понятие. Пусть $\langle\gamma_1,\ldots, \gamma_i, \ldots,\gamma_n\rangle$ – вывод из списка Γ с анализом. Мы будем говорить, что переменная X_q *варьируется для формулы* γ_i в данном выводе с анализом, если X_q входит в γ_i и, согласно данному анализу, в какую-то формулу, зависящую от γ_i, производится подстановка вместо X_q.

Неформально говоря, переменная варьируется в данном выводе – значит, она в этом выводе выступает как настоящая переменная, т. е. как буква, вместо которой что-то подставляется.

---

[i] Это определение – по индукции. При более строгом изложении левая часть определения должна была звучать так: формула γ_{i+k} зависит от γ_i, если ... (индукция по k).

[ii] Условимся: если в этой главе под знаком выводимости не стоит имя исчисления, то подразумевается выводимость в **К'**.

[iii] Эту теорему мы очень скоро применим в ситуации, когда i-я посылка будет последней в списке посылок, и только в этой ситуации она нам и понадобится, но формулировать теорему только для этой ситуации – не культурно.

Официальный антоним: переменная остаётся *фиксированной* (*нетронутой*).

П р и м е р 1. Пусть $\Gamma \underset{Df}{\overline{\overline{\circ}}} A_1 \& A_2 \to A_3,\ A_1 \& A_2,\ A_4,\ A_4 \vee A_3$. Кортеж

$\langle A_1 \& A_2 \to A_3, A_1 \& A_2, A_3, A_4, A_3 \to A_4 \vee A_3, A_4 \vee A_3, \rceil A_1 \vee A_3, \rceil A_1 \vee \rceil A_2, A_4 \vee A_3 \rangle$ является выводом из Γ. Вот один возможный анализ (см. рис. 6):

$$\langle П1, П2, МП(1, 2), П3, ПП(4), МП(3, 5), ПП(6), ПП(7), П4 \rangle.$$

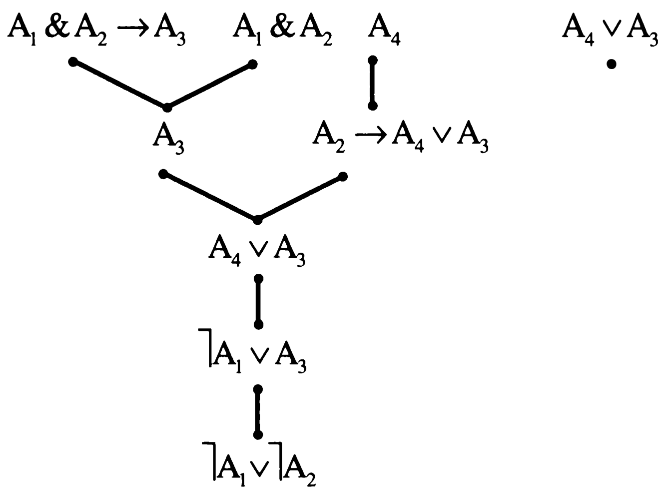


Рис. 6

Вот другой возможный анализ (см. рис. 7):

$$\langle П1, П2, МП(1, 2), П3, ПП(4), П4, ПП(6), ПП(7), П4 \rangle.$$

При первом анализе A_3 варьируется для первой компоненты вывода, при втором – не варьируется (см. также задачу 3).

Мы уже почти добрались до теоремы о дедукции. К сожалению, нам надо ввести ещё один термин.

Вывод из списка Γ с анализом назовём *хорошим*, если ни для какой формулы, входящей в этот вывод, согласно данному анализу, в качестве последней посылки, никакая переменная не варьируется.[1]

Как обычно, вслед за термином «хороший вывод из списка Γ с анализом» идут термины «*хороший вывод формулы* α из списка Γ с анализом» и «формула α *хорошо выводима* из списка Γ».

Тот факт, что формула α хорошо выводима из списка Γ, будем обозначать через $\Gamma \underset{x}{\vdash} \alpha$.

Отметим, что любая доказуемая формула хорошо выводима из любого списка. Любая формула из списка Γ хорошо выводима из Γ.

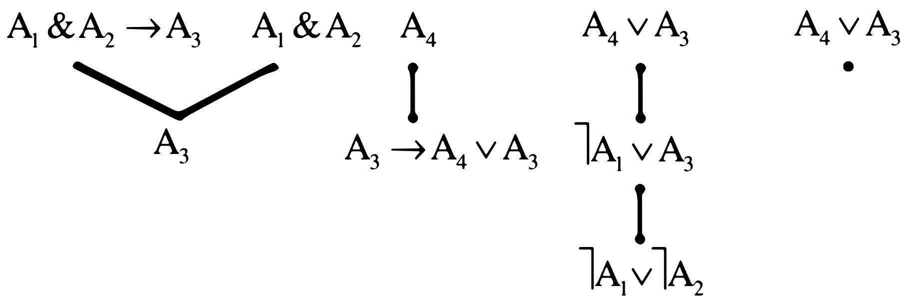


Рис. 7

Пример 2. Пусть $\Gamma \underset{Df}{\overset{o}{=}} A_1, A_2$. Кортеж $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ является выводом из Γ. Этот вывод с анализом $\langle$П1, П2, ПП(1)$\rangle$ – хороший. Этот же вывод с анализом $\langle$П1, П2, ПП(2)$\rangle$ – «плохой». Поскольку существует и хороший вывод, $A_1, A_2 \underset{x}{\vdash} A_3$.

Теорема о дедукции. *Если* $\Gamma, \alpha \underset{x}{\vdash} \beta$, *то* $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Доказательство будет идти по тому же пути, что и в § 3 гл. I. Два отличия вызваны двумя различиями между исчислениями **К** и **К′** – другими аксиомами и наличием нового правила вывода.

[1] Предложенный мной термин – конечно, очень плохой. По существу подходящим было бы что-нибудь вроде «годный для теоремы о дедукции», но какой же это термин!

На первое отличие мы среагируем использованием отмеченного выше равенства $T_{\mathbf{K}} = T_{\mathbf{K}'}$ – мы будем ссылаться на то, что если формула доказуема в исчислении **K**, то она доказуема и в исчислении **K′**.

Например, в § 3 гл. I было доказано, что любая формула вида $\alpha\to\alpha$ доказуема в **K** [i] – значит, она доказуема и в **K′**.

Со вторым отличием мы разберёмся подробно. Именно там нам и понадобится, что существует хороший вывод.

Доказательство. Пусть

$$\langle\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\rangle \tag{1}$$

– хороший вывод формулы β из списка Γ, α с анализом, существующий по условию (таким образом, $\gamma_n \stackrel{\circ}{=} \beta$). Образуем из кортежа (1) вспомогательный кортеж

$$\langle\alpha \to \gamma_1, \alpha \to \gamma_2, \ldots, \alpha \to \gamma_n\rangle \tag{2}$$

(таким образом, $\alpha \to \gamma_n \stackrel{\circ}{=} \alpha \to \beta$). Индукцией по длине кортежа (2) докажем, что $(\forall i\colon 1 \le i \le n)[\,\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_i]$ – тем самым теорема будет доказана.

Базис индукции. Формула γ_1 в кортеже (1) либо 1) является аксиомой исчисления **K′**, либо 2) является одной из формул списка Γ, либо 3) является формулой α (мы будем иногда формулу α в этом контексте называть *последней посылкой*).

В случае 1 формулы γ_1 и $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$ доказуемы в исчислении **K′**. Поэтому и формула $\alpha \to \gamma_1$ доказуема в **K′**. Значит, она выводима из любого списка.

В случае 2 формулы γ_1 и $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$ выводимы из Γ. Значит, и формула $\alpha \to \gamma_1$ выводима из Γ.

В случае 3 формула $\alpha \to \alpha$ доказуема, а значит, выводима из любого списка.

---

[i] Выписанное там доказательство в **K** формулы $\alpha\to\alpha$ не является доказательством в **K′**, поскольку первая его формула

$$[\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)] \to [(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)]$$

не является аксиомой в **K′**.

Индукционный шаг. Допустим, что для некоторого $j < n$ верно $(\forall i\colon 1 \le i \le j)[\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_i]$. Докажем, что тогда $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_{i+1}$.

Формула γ_{j+1} в кортеже (1) либо удовлетворяет одному из трёх условий, перечисленных выше для формулы γ_1, либо 4) получается по правилу МР из каких-то формул γ_p, $\gamma_q \overset{\circ}{=} \gamma_p \to \gamma_{j+1}$ $(p, q \le j)$, либо 5) получается по правилу ПП из какой-то формулы γ_p $(p \le j)$.

В первых трёх случаях доказательство – как в базисе.

В случае 4 формула

$$[\alpha \to (\gamma_p \to \gamma_{j+1})] \to [(\alpha \to \gamma_p) \to (\alpha \to \gamma_{j+1})]$$

доказуема, а формулы $\alpha \to \gamma_q \overset{\circ}{=} \alpha \to (\gamma_p \to \gamma_{j+1})$ и $\alpha \to \gamma_p$, по предположению индукции, выводимы из Γ. Значит, и формула $\alpha \to \gamma_{j+1}$ выводима из Γ.

И, наконец, новый случай – случай 5. Пусть, $\gamma_{j+1} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\pi}^{A_t}\llcorner \gamma_p \lrcorner$.

Рассмотрим 2 варианта: 1) γ_p не зависит ни от какой формулы, входящей в вывод (1) в качестве последней посылки; 2) γ_p зависит от некоторой формулы, входящей в вывод (1) в качестве последней посылки.

1) Поскольку в силу данного анализа[i] $\gamma_{j+1} \overset{\circ}{=} \mathbf{S}_{\pi}^{A_t}\llcorner \gamma_p \lrcorner$, тогда и γ_{j+1} не зависит ни от какой формулы, входящей в вывод (1) в качестве последней посылки. Так как (1) – вывод из Γ, α (здесь всё ещё не важно, что этот вывод – хороший), $\Gamma, \alpha \vdash \gamma_{j+1}$. По теореме, идущей после понятия зависимости, $\Gamma \vdash \gamma_{j+1}$. По (10) из § 3 гл. I (это утверждение верно и в $\mathbf{K}'$) $\gamma_{j+1} \vdash \alpha \to \gamma_{j+1}$. Значит, $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_{j+1}$.

2) Поскольку γ_p зависит от некоторой формулы, входящей в вывод (1) в качестве последней посылки, а (1) – хороший вывод (единственное место в доказательстве, где это используется!), A_t не входит в α. По предположению индукции $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_p$. Но

$$\alpha \to \gamma_p \vdash \mathbf{S}_{\pi}^{A_t}\llcorner \alpha \to \gamma_p \lrcorner \overset{\circ}{=} \alpha \to \mathbf{S}_{\pi}^{A_t}\llcorner \gamma_p \lrcorner \overset{\circ}{=} \alpha \to \gamma_{j+1}.$$

Значит, $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_{j+1}$. Теорема доказана.

---

[i] В задаче 1 к § 3 гл. I стоит слово «фактически», поскольку в теореме о дедукции из § 3 гл. I ничего не говорилось об анализе (мы там просто не ввели этого понятия), а в выводе без анализа это – не алгоритм.

Теорема о введении-удалении

	Введение	Удаление
$\to$	1, 2 $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash_x \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}$	MP $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2 \vdash_x \mathfrak{A}_2$
&	3 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \vdash_x \mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2$	4, 5 $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \vdash_x \mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \vdash_x \mathfrak{A}_2$
$\vee$	6, 7 $\mathfrak{A}_1 \vdash_x \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_2 \vdash_x \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$	8 $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash_x \delta \;\;\&\;\; \Gamma, \beta \vdash_x \delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \delta}$
$\rceil$	9 $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash_x \delta \;\;\&\;\; \Gamma, \alpha \vdash_x \rceil\delta}{\Gamma \vdash \rceil\alpha}$	10 $\rceil\rceil\mathfrak{A}_1 \vdash_x \mathfrak{A}_1$

В таблице дана разумная формулировка теоремы о введении-удалении для исчисления **К′**.

Между прочим, усиление теоремы о дедукции «*Если* $\Gamma, \alpha \vdash_x \beta$, *то* $\Gamma \vdash_x \alpha \to \beta$» не верно – иначе бы из $A_1, A_2 \vdash_x A_3$ (пример 2) вытекало бы сначала $A_1 \vdash_x A_2 \to A_3$, а потом $\vdash A_1 \to (A_2 \to A_3)$, но формула $A_1 \to (A_2 \to A_3)$ не тождественно-истинна.

ЗАДАЧИ

1) Докажите, что $T_{\mathbf{K}'} = T_{\mathbf{K}}$.

2) Опровергните утверждение

   a) каждое доказательство в исчислении **K** является доказательством и в исчислении **K′**;

   b) каждое доказательство в исчислении **K′** является доказательством и в исчислении **K**.

3) Определите, варьируется ли переменная A_3 для каждой компоненты вывода из примера 1 при первом и при втором анализе. То же – для переменной A_4.

4) Для списка формул Γ и для формул α, β

   a) докажите утверждение $\alpha \underset{\mathbf{K}}{\vdash} \beta \rightleftarrows \alpha \underset{\mathbf{K}'}{\overset{x}{\vdash}} \beta$;

   b) опровергните утверждение $\Gamma \underset{\mathbf{K}}{\vdash} \beta \rightleftarrows \Gamma \underset{\mathbf{K}'}{\overset{x}{\vdash}} \beta$.

ГЛАВА III

ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ В АЛФАВИТЕ $A_{К}$

Все исчисления, которые мы будем рассматривать в этой главе, имеют одинаковый алфавит – алфавит $A_{\mathbf{K}}$ исчисления **К**, те же правила образования (то же множество формул $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\mathbf{K}}$), т. е. ту же синтактику, что и исчисление **К**, ту же главную интерпретацию и то же определение значения формулы, т. е. ту же семантику, что и **К**. Различаться между собой они будут только дедуктикой.

Мы будем рассматривать два вида исчислений – **К**-подобные и **К′**-подобные.

Назовём исчисление *схемным*, если оно имеет одно правило вывода – модус поненс – и некоторое (вообще говоря, произвольное) множество формульных схем в качестве схем аксиом. Пример схемного исчисления – **К**. Обозначим класс схемных исчислений через $\mathfrak{K}_{\text{СХ}}$.

Назовём исчисление *обыкновенным*, если оно имеет 2 правила вывода – модус поненс и правило подстановки – и некоторое (вообще говоря, произвольное) множество формул в качестве аксиом. Пример обыкновенного исчисления – **К′**. Обозначим класс обыкновенных исчислений через $\mathfrak{K}_{\text{ОБ}}$.

В этой и в следующей главах мы будем рассматривать иногда схемные, иногда обыкновенные исчисления, а иногда исчисления из $\mathfrak{K}_{\text{СХ}} \cup \mathfrak{K}_{\text{ОБ}}$.

Назовём исчисления $И_1$, $И_2$ из $\mathfrak{K}_{\text{СХ}} \cup \mathfrak{K}_{\text{ОБ}}$ *эквивалентными*, если $T_{И_1} = T_{И_2}$. Разумеется, это отношение на множестве $\mathfrak{K}_{\text{СХ}} \cup \mathfrak{K}_{\text{ОБ}}$ является отношением эквивалентности.

По существу в этой и в следующей главах мы будем рассматривать исчисления из $\mathfrak{K}_{\text{СХ}} \cup \mathfrak{K}_{\text{ОБ}}$ с точностью до эквивалентности – эквивалентные исчисления для нас будут равноправными.

Назовём схемное исчисление И и обыкновенное исчисление И′ сооответствующими (друг другу), если множество аксиом в И′ получается из множества схем аксиом в И заменой формульных переменных на соответствующие высказывательные переменные. Пример соответствующих исчислений: **К** и **К′**.

Соответствующие – схемное и обыкновенное – исчисления эквивалентны (задача 1 ниже).

Рассматривая исчисления из $\mathfrak{K}_{\text{СХ}} \cup \mathfrak{K}_{\text{ОБ}}$, мы не будем исключать крайние случаи.

Назовём исчисление И из $\mathfrak{K}_{\text{СХ}} \cup \mathfrak{K}_{\text{ОБ}}$ *пустым*, если $\mathrm{T_И} = \varnothing$. Ясно, что исчисление И тогда и только тогда является пустым, когда в нём нет аксиом.

Назовём исчисление И из $\mathfrak{K}_{\text{СХ}} \cup \mathfrak{K}_{\text{ОБ}}$ *универсальным*, если $\mathrm{T_И} = \mathfrak{F}$. Примеры универсальных исчислений: схемное исчисление с единственной схемой аксиом $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ (докажите!) и обыкновенное исчисление с единственной аксиомой A_1.

Назовём исчисление И из $\mathfrak{K}_{\text{СХ}} \cup \mathfrak{K}_{\text{ОБ}}$ *классическим*, если $\mathrm{T_И} = \square$. Примеры классических исчислений: **К** и **К′**.

Классические исчисления нас будут интересовать больше всего.

Назовём исчисление И из $\mathfrak{K}_{\text{СХ}} \cup \mathfrak{K}_{\text{ОБ}}$ *предуниверсальным*, если оно – не универсальное ($\mathrm{T_И} \subset \mathfrak{F}$) и не существует «промежуточного» исчисления – такого исчисления $\mathrm{И_0}$, что $\mathrm{T_И} \subset \mathrm{T_{И_0}} \subset \mathfrak{F}$.

Ясно, что если исчисление И – пустое (универсальное, предуниверсальное, классическое), то и любое эквивалентное ему исчисление тоже – пустое (соответственно, универсальное, предуниверсальное, классическое).

Докажем, что исчисление **К** – предуниверсальное.

Допустим противное. Допустим, что существует такое (схемное) исчисление И, что

$$\mathrm{T_К} \subset \mathrm{T_И} \subset \mathfrak{F}. \tag{1}$$

Докажем, что тогда для произвольной формулы α верно $\underset{\text{И}}{\vdash} \alpha$.

Возьмём произвольную формулу $\beta \in T_И \setminus T_K$. Так как $\beta \in T_И$,

$$\underset{И}{\vdash} \beta. \tag{2}$$

Поскольку $\beta \notin T_K$, β не тождественно-истинна. Тогда для произвольного списка переменных $X_1, \dots, X_n$, нормального для β, найдётся такой истинностный кортеж $\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \rangle$, что

$$|\beta|^{X_1,\dots,X_n}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} = \boldsymbol{л}. \tag{3}$$

Для i: $1 \le i \le n$ положим

$$\gamma_i = \begin{cases} A_1 \vee \neg A_1, & \text{если } \sigma_i = \boldsymbol{и} \\ A_1 \& \neg A_1, & \text{если } \sigma_i = \boldsymbol{л} \end{cases}. \tag{4}$$

Из (4) следует, что для любого истинностного значения k

$$|\gamma_i|^{A_1}_k = \sigma_i. \tag{5}$$

Формула $\delta \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \mathbf{S}^{X_1,\dots,X_n}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n} \llcorner \beta \lrcorner$ построена из переменной A_1. Она тождественно-ложна, так как для любого истинностного значения k

$$|\delta|^{A_1}_k = |\mathbf{S}^{X_1,\dots,X_n}_{\gamma_1,\dots,\gamma_n} \llcorner \beta \lrcorner|^{A_1}_k = |\beta|^{X_1,\dots\dots,X_n}_{|\gamma_1|^{A_1}_k,\dots,|\gamma_n|^{A_1}_k} = |\beta|^{X_1,\dots,X_n}_{\sigma_1,\dots,\sigma_n} = \boldsymbol{л}$$

(второй переход требует доказательства индукцией по логической длине формулы β, третий переход – по (5), четвёртый – по (3)). Значит, формула $\neg\delta$ тождественно истинна. Следовательно, $\underset{К}{\vdash} \neg\delta$. Из (1)

$$\underset{И}{\vdash} \neg\delta. \tag{6}$$

Из (2) и задачи 2

$$\underset{И}{\vdash} \delta. \tag{7}$$

Формула $\neg\delta \to (\delta \to \alpha)$ тождественно-истинна. Следовательно, $\underset{К}{\vdash} \neg\delta \to (\delta \to \alpha)$. Из (1)

$$\underset{И}{\vdash} \neg\delta \to (\delta \to \alpha). \tag{8}$$

Из (8), (6) и (7) получаем $\underset{И}{\vdash} \alpha$.

ЗАДАЧИ

1) Докажите, что соответствующие – схемное и обыкновенное – исчисления эквивалентны.

2) Докажите, что в любом схемном исчислении верна Дедуктивная теорема о подстановке.

3) Докажите, что в любом схемном исчислении, в котором доказуема каждая формула, построенная по схемам Δ_1, Δ_2, верна теорема о дедукции.

4) Постройте схемное исчисление, в котором не верна теорема о дедукции.

5) Постройте классическое схемное исчисление с двумя схемами аксиом. (Я не знаю, существует ли классическое схемное исчисление с одной схемой аксиом.)

6)* Постройте не классическое схемное предуниверсальное исчисление.

ГЛАВА IV

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИСЧИСЛЕНИЙ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1. Непротиворечивость

Исчисление И из $\mathfrak{K}_{СХ} \cup \mathfrak{K}_{ОБ}$ НЕПРОТИВОРЕЧИВО, если в нём доказуемо не слишком МНОГО.

В каком смысле «не слишком много»? Можно рассмотреть разные «смыслы».

$1_н$) Исчисление И называется *семантически непротиворечивым*, если в нём доказуемы только тождественно-истинные формулы: $T_И \subseteq \square$.[i]

$2_н$) Исчисление И называется *непротиворечивым относительно отрицания*, если не существует такой формулы α, что $\underset{И}{\vdash} \alpha$ и $\underset{И}{\vdash} \rceil \alpha$.[ii]

$3_н$) Исчисление И называется *абсолютно непротиворечивым*, если оно не является универсальным: $T_И \subset \mathfrak{F}$.

Очевидны 2 импликации:

$$1_н \to 2_н \to 3_н. \tag{1}$$

---

[i] Конкурирующие синонимы: *семантически пригодно* (предложение А.А.Маркова) и *внешне непротиворечиво* (ведь определение апеллирует к «внешнему», по отношению к дедуктике, миру – к семантике).

[ii] Конкурирующий синоним: *внутренне непротиворечиво*.

Обратные импликации не верны: схемное исчисление с единственной схемой $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2$ непротиворечиво относительно отрицания (в нём вообще доказуемы только аксиомы, т. е. конъюнкции), но не является семантически непротиворечивым; исчисление с двумя схемами аксиом $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2$, $\rceil(\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2)$ абсолютно непротиворечиво, но не является непротиворечивым относительно отрицания.

Классические исчисления семантически непротиворечивы и, следовательно, непротиворечивы и в остальных смыслах.

Для каждой из трёх непротиворечивостей очевидно утверждение: если $T_{И_1} \subseteq T_{И_2}$ и «более богатое» (на доказуемость) исчисление $И_2$ непротиворечиво в некотором смысле, то и «более бедное» исчисление $И_1$ непротиворечиво в том же смысле.

§ 2. Интермедия

В этом вспомогательном параграфе мы будем рассматривать только обыкновенные исчисления.

Исчисление, которое получится из исчисления И добавлением к его аксиомам формулы α, обозначим через $И^{[+\alpha]}$.[i]

Рассмотрим всевозможные свойства обыкновенных исчислений.

Примеры: быть предуниверсальным, иметь 5 аксиом, быть непротиворечивым относительно отрицания, иметь в качестве первой переменной первой аксиомы букву A_7.

Сейчас мы определим операцию, которая каждому свойству сопоставит связанное с ним новое свойство.

Возьмём какое-нибудь свойство. Пусть его название (хотя это и странновато) передаётся словом «НЕжное».

Назовём исчисление И ПОзолоченным [ii], если добавление к его аксиомам любой не доказуемой в нём формулы приводит к исчислению, не являющемуся НЕжным: если формула α не доказуема в И, то исчисление $И^{[+\alpha]}$ не является НЕжным.

Например, если «НЕжное» означает «иметь 5 аксиом», то каждое НЕжное исчисление является ПОзолоченным.

Если же «НЕжное» означает «иметь в качестве первой переменной первой аксиомы букву A_7», то ни одно НЕжное исчисление не является ПОзолоченным [iii].

Если, наконец, «НЕжное» означает «быть непротиворечивым относительно отрицания», то одни НЕжные исчисления являются ПОзолоченными (например, исчисление **К′**), другие – не являются (например, исчисление с единственной аксиомой δ_1).

Целью этого параграфа являются 3 утверждения (они понадобятся нам в следующем параграфе). Я сформулирую их в виде задач.

Хочу предупредить вас, что эти задачи не трудные, если вы не испугаетесь углубиться в логический лес и <u>каждый следующий шаг будете делать по естественному пути</u>.

---

[i] Для схемного исчисления пришлось бы предварительно формулу α переделать в соответствующую формульную схему.

[ii] Точнее было бы, конечно, сказать что-нибудь вроде «ПОзолоченным относительно НЕжного», но это звучало бы ужасно.

[iii] В предположении, что добавляемую аксиому мы записываем в конце списка аксиом исходного исчисления И.

В первой задаче вышеуказанная конструкция

$$\text{НЕжное} \Rightarrow \text{ПОзолоченное}$$

будет применяться к двум свойствам – я назову их «α-НЕжное» и «β-НЕжное».

В остальных задачах мне понадобится высказывание

$$\text{Ц} \underset{Df}{\equiv} \text{«для любых исчислений } И_1, И_2\text{: если } T_{И_1} \subseteq T_{И_2}$$

$$\text{и «более богатое» (на доказуемость) исчисление } И_2 \text{ – НЕжное,}$$

$$\text{то и «более бедное» исчисление } И_1 \text{ – НЕжное»,}$$

зависящее от свойства «НЕжное».

Для одних НЕжных свойств оно может быть верным (например, для всех трёх непротиворечивостей оно верно), для других – не верным.

ЗАДАЧИ

1) Докажите, что если каждое α-НЕжное исчисление является β-НЕжным, то каждое β-ПОзолоченное исчисление является α-ПОзолоченным.

2) Докажите, что если Ц, то любое исчисление, не являющееся НЕжным, является ПОзолоченным.

3) Докажите, что если Ц, $T_{И_1} \subseteq T_{И_2}$ и «более бедное» (на доказуемость) исчисление $И_1$ – ПОзолоченное, то и «более богатое» исчисление $И_2$ – ПОзолоченное.

§ 3. Полнота

Исчисление И из $\mathfrak{K}_{\text{СХ}} \cup \mathfrak{K}_{\text{ОБ}}$ ПОЛНО, если в нём доказуемо не слишком МАЛО.

В каком смысле «не слишком мало»? Можно рассмотреть разные «смыслы».

Займёмся сначала обыкновенными исчислениями.

Из трёх НЕпротиворечивостей (§ 1) при помощи конструкции НЕжное $\Rightarrow$ ПОзолоченное из предыдущего параграфа определим 3 вида ПОлноты:

$1_{\text{п}}$) Исчисление И называется *полным относительно семантической непротиворечивости* [i], если добавление к его аксиомам любой не доказуемой в нём формулы приводит к исчислению, в котором доказуема некоторая не тождественно-истинная формула.

$2_{\text{п}}$) Исчисление И называется *полным относительно отрицания*, если добавление к его аксиомам любой не доказуемой в нём формулы приводит к исчислению, в котором для некоторой формулы α доказуемы и α, и $\rceil\alpha$ [ii].

$3_{\text{п}}$) Исчисление И называется *абсолютно полным*, если добавление к его аксиомам любой не доказуемой в нём формулы приводит к универсальному исчислению.

Из (1) в § 1 и из задачи 1 в § 2 вытекает

$$3_{\text{п}} \to 2_{\text{п}} \to 1_{\text{п}}. \tag{1}$$

Те же примеры, что в § 1, показывают, что обратные импликации не верны.

Для всех трёх непротиворечивостей верно Ц из § 2.

Поэтому из задачи 2 в § 2 вытекает, что любое исчисление, не являющееся семантически непротиворечивым, полно относительно семантической непротиворечивости; любое исчисление, не являющееся непротиворечивым относительно отрицания, полно относительно отрицания; любое исчисление, не являющееся абсолютно непротиворечивым, абсолютно полно.

---

[i] К сожалению, более простой и естественный термин «семантически полное» нам сейчас понадобится.

[ii] Конкурирующий синоним: *внутренне полное.*

Из задачи 3 в § 2 вытекает, что если $\mathrm{T}_{\text{И}_1} \subseteq \mathrm{T}_{\text{И}_2}$ и «более бедное» (на доказуемость) исчисление И_1 полно в каком-нибудь из вышеперечисленных смыслов, то и «более богатое» исчисление И_2 полно в том же смысле.

На схемные исчисления данные выше определения переносятся просто: схемное исчисление И называется *полным* в любом из вышеперечисленных смыслов, если в этом смысле полно соответствующее обыкновенное исчисление И′.

Для исчислений из $\mathfrak{K}_{\text{СХ}} \cup \mathfrak{K}_{\text{ОБ}}$ введём ещё один вид полноты:

$4_{\text{п}}$) Исчисление И называется *семантически полным*, если в нём доказуема любая тождественно-истинная формула: $\square \subseteq \mathrm{T}_{\text{И}}$.[i]

Импликация $4_{\text{п}} \rightarrow 3_{\text{п}}$ доказывается так же, как мы в гл. III доказали предуниверсальность исчисления **К**.

Таким образом, в итоге имеем

$$4_{\text{п}} \rightarrow 3_{\text{п}} \rightarrow 2_{\text{п}} \rightarrow 1_{\text{п}}. \tag{2}$$

Поскольку классические исчисления семантически полны, они полны во всех смыслах.

В заключение докажем, что *любое семантически непротиворечивое исчисление* И, *полное относительно семантической непротиворечивости, семантически полно.*

Пусть, для простоты и определённости, И – <u>обыкновенное</u> семантически непротиворечивое исчисление, полное относительно семантической непротиворечивости. Докажем, что И – семантически полное исчисление.

Пусть α – тождественно-истинная формула. Допустим, что формула α не доказуема в И.

Поскольку исчисление И полно относительно семантической непротиворечивости, в исчислении $\text{И}^{[+\alpha]}$ доказуема некоторая не тождественно-истинная формула β.

Пусть $\langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle$ – доказательство формулы β в исчислении $\text{И}^{[+\alpha]}$ (таким образом, $\gamma_n \stackrel{\circ}{=} \beta$).

---

[i] Конкурирующий синоним: *внешне полное.*

Индукцией по длине этого доказательства докажем, что каждая его компонента тождественно-истинна. Это и будет желанное противоречие.

γ_1 – аксиома исчисления $И^{[+\alpha]}$. Значит, либо γ_1 – аксиома исчисления И, либо $\gamma_1 \overset{\circ}{=} \alpha$. В первом случае γ_1 тождественно-истинна, поскольку исчисление И семантически непротиворечиво. Во втором случае γ_1 тождественно-истинна по выбору формулы α.

Тривиальный индукционный шаг предоставляю читателю.

ЗАДАЧИ

1) Докажите, что исчисление И тогда и только тогда абсолютно полно, когда оно – универсальное или предуниверсальное.

2) Докажите, что исчисление И тогда и только тогда семантически полно, когда оно – универсальное или классическое.

3)* Опровергните утверждение: абсолютно полное исчисление семантически полно.

§ 4. Независимость

Сначала мы будем говорить только об обыкновенных исчислениях.

Допустим, что какая-то из аксиом исчисления И доказуема. Зачем же держать её среди аксиом? Ясно же, что её удаление из аксиом не повлияет на множество $\mathrm{T}_{\text{И}}$ доказуемых формул.

Обозначим исчисление, полученное из исчисления И удалением аксиомы φ, через $\text{И}^{[-\varphi]}$. Заодно уж сразу (нам скоро это понадобится) обозначим исчисление, полученное из исчисления $\text{И}^{[-\varphi]}$ добавлением аксиомы $\rceil\varphi$, через $\text{И}^{[-\varphi+\rceil\varphi]}$.

Говорят, что аксиома φ исчисления И *независима* (на выбор: *в исчислении* И или *от остальных аксиом исчисления* И), если в исчислении $\text{И}^{[-\varphi]}$ доказуемо меньше, чем в исчислении И, т.е. существует такая формула α, которая доказуема в И и не доказуема в $\text{И}^{[-\varphi]}$.

Легко видеть, что аксиома φ *независима тогда и только тогда, когда она не доказуема в исчислении* $\text{И}^{[-\varphi]}$.

«Справа налево» это утверждение тривиально.

Пусть теперь формула α доказуема в И и не доказуема в $\text{И}^{[-\varphi]}$. Допустим, что формула φ доказуема в $\text{И}^{[-\varphi]}$. Пусть $\langle\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\rangle$ – доказательство формулы α в исчислении И (таким образом, $\gamma_n \overset{\circ}{=} \alpha$). Индукцией по длине этого доказательства легко доказать, что каждая его компонента доказуема в $\text{И}^{[-\varphi]}$ – это и есть желанное противоречие.

Если исчисление $\text{И}^{[-\varphi+\rceil\varphi]}$ *непротиворечиво относительно отрицания, то аксиома* φ *независима* (легко доказывается по контрапозиции).

Обратное утверждение для произвольного исчисления не верно.

П р и м е р 1. В исчислении с аксиомами δ_4, δ_5 аксиома δ_5 независима, а исчисление $\text{И}^{[-\delta 5+\rceil\delta 5]}$ не является непротиворечивым относительно отрицания.

Однако если *аксиома* φ *независима и в исчислении* $\text{И}^{[-\varphi]}$ *справедливы правила* $\dfrac{\mathfrak{A}_1 \vdash \mathfrak{A}_2 \ \boxed{\&}\ \mathfrak{A}_1 \vdash \rceil\mathfrak{A}_2}{\vdash \rceil\mathfrak{A}_1}$ *и* $\rceil\rceil\mathfrak{A}_1 \vdash \mathfrak{A}_1$ *то исчисление* $\text{И}^{[-\varphi+\rceil\varphi]}$ *непротиворечиво относительно отрицания* (доказательство предоставляю читателю).

Ну, а как обстоит дело с независимостью аксиом в «главном» нашем обыкновенном исчислении **К′**?

Каждая из его аксиом $\delta_1 - \delta_{10}$ *независима.*

Это доказывается при помощи специальной (для каждой аксиомы – своей) интерпретации.

Для аксиом $\delta_3 - \delta_{10}$ соответствующие интерпретации указаны в таблице.

		A_1	A_2	A_3
δ_3	$\vert\pi \& \rho\vert =$ *л*	***и***	***и***	
δ_4	$= \vert\rho\vert$	***л***	***и***	
δ_5	$= \vert\pi\vert$	***и***	***л***	
δ_6	$\vert\pi \vee \rho\vert = \vert\rho\vert$	***и***	***л***	
δ_7	$= \vert\pi\vert$	***л***	***и***	
δ_8	= ***и***	***л***	***л***	***л***
δ_9	$\vert\neg\pi\vert = \vert\pi\vert$	***л***	~	
δ_{10}	= ***и***	***л***		

Объясню подробно смысл этой таблицы на примере первой строки.

В первом столбце указывается название аксиомы, независимость которой доказывается при помощи этой строчки. Конкретнее – мы докажем, что в исчислении $\mathbf{K}'^{[-\delta_3]}$ аксиома δ_3 не доказуема.

Высказывательные переменные интерпретируются как элементы <u>двухэлементного</u>[i] множества. Чтобы сохранить возможность употреблять привычные слова «истинны», «ложны», «тождественно-истинны» и т.п., элементы этого множества по-прежнему будем называть ***и***, ***л***.

Все связки, кроме конъюнкции (в этой строке!), интерпретируем по-старому. Значение конъюнкции задаём так, как указано во втором столбце.

О третьем – широком, из трёх подстолбцов – столбце чуть позже.

Все аксиомы исчисления $\mathbf{K}'^{[-\delta_3]}$ тождественно-истинны. Проверять аксиомы δ_1, δ_2, $\delta_6 - \delta_{10}$ не нужно: в них конъюнкция не входит, а

---

[i] Для аксиом δ_1, δ_2, о которых разговор отдельно, двухэлементного множества не хватит.

остальные связки мы интерпретировали по-старому. Проверить надо только аксиомы δ_4, δ_5, а в них при нашей интерпретации посылка ложна и, значит, вся формула истинна.

Правила вывода у нас старые – они, как мы знаем, общезначимость сохраняют.

Итак, все аксиомы тождественно-истинны и правила вывода общезначимость сохраняют. Значит, любая формула, доказуемая в исчислении $\mathbf{K}'^{[-\delta_3]}$, тождественно-истинна.

А формула δ_3 не тождественно-истинна – при значениях переменных, указанных в третьем столбце таблицы, она принимает значение *л*.

Значит, она в исчислении $\mathbf{K}'^{[-\delta_3]}$ не доказуема. [i]

В книге [6] указана интерпретация на четырёхэлементном множестве для доказательства независимости аксиомы δ_1 и интерпретация на трёхэлементном множестве – для δ_2.

Оттуда же взяты и 8 вышеуказанных интерпретаций.

Займёмся теперь схемными исчислениями.

Первое определение повторяет предыдущее.

Говорят, что схема аксиом Φ исчисления И *независима* (на выбор: *в исчислении* И или *от остальных схем аксиом исчисления* И), если в исчислении $И^{[-\Phi]}$ доказуемо меньше, чем в исчислении И, т. е. существует такая формула α, которая доказуема в И и не доказуема в $И^{[-\Phi]}$.

Повторить теорему, которая следовала за предыдущим определением, конечно, нельзя.

Легко проверить, что схема аксиом Φ *независима тогда и только тогда, когда существует формула, построенная по схеме* Φ, *не доказуемая в исчислении* $И^{[-\Phi]}$.

Назовём схему аксиом Φ исчисления И *сильно независимой*, если *любая формула, построенная по схеме* Φ, *не доказуема в исчислении* $И^{[-\Phi]}$.

Очевидно, любая сильно независимая схема аксиом независима.

---

[i] Знак ~ , стоящий в предпоследней строке, означает, что в этом случае значение переменной A_2 можно взять любым.

П р и м е р 2. Рассмотрим исчисление И с тремя схемами аксиом: $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1 \& (\mathfrak{A}_2 \& \mathfrak{A}_3)$. Первая схема, очевидно, сильно независима. Вторая схема независима (формула $A_1 \& A_2$ не доказуема в соответствующем исчислении $И^{[-\Phi]}$), но не сильно независима (формула $A_1 \& (A_2 \& A_3)$ построена по схеме $\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2$ и доказуема в исчислении $И^{[-\Phi]}$). Наконец, третья схема не независима – любая формула, построенная по этой схеме, доказуема в соответствующем исчислении $И^{[-\Phi]}$.

Поскольку в **К′** каждая аксиома независима, в соответствующем схемном исчислении **К** каждая схема аксиом независима (задача 1).

А как насчёт сильной независимости?

Схема Δ_4 не является сильно независимой, потому что формула $A_1 \& A_1 \to A_1$ построена и по схеме Δ_4, и по схеме Δ_5.

Аналогично доказывается, что не являются сильно независимыми схемы Δ_5, Δ_6 и Δ_7.

При помощи схемы Δ_1 легко доказывается, что не являются сильно независимыми схемы Δ_2, Δ_8 и Δ_{10}.

Не являются сильно независимыми и схемы Δ_3 и Δ_9 (задачи 2, 3).

Я не знаю, является ли схема Δ_1 сильно независимой.

ЗАДАЧИ

1) Докажите, что схема аксиом **Ф** в схемном исчислении И тогда и только тогда независима, когда соответствующая аксиома φ независима в соответствующем обыкновенном исчислении И′.

2) Докажите, что схема аксиом Δ_3 исчисления **К** не является сильно независимой.

3) Докажите, что схема аксиом Δ_9 исчисления **К** не является сильно независимой.

А2. ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

Так называют исчисления, в которых при помощи понятия предиката изучается внутренняя субъектно-предикатная структура предложений математического языка.

ГЛАВА V

ИСЧИСЛЕНИЕ L

§ 1. Синтактика

Алфавит A_L исчисления **L** состоит из трёх бесконечных (счётных) перечней букв и ещё 9 букв.

Буквы первого бесконечного перечня

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

называются *высказывательными переменными.*

Хотя второй перечень тоже счётен, его буквы целесообразнее расположить в виде бесконечной таблицы с двумя входами:

$$\begin{array}{l} P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, \ldots \\ P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_3^{(2)}, \ldots \\ P_1^{(3)}, P_2^{(3)}, P_3^{(3)}, \ldots \\ \vdots \end{array}$$

Буквы этого перечня называются *предикатными переменными.* Предикатные переменные, расположенные в этой таблице в n-ой строчке

$$P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}, \ldots$$

называются *n-местными.*

Буквы третьего перечня

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

называются *предметными переменными.*

В алфавит также входят: 4 *связки* $\urcorner$ & $\vee$ $\rightarrow$
2 *квантора* $\forall$ $\exists$
2 *скобки* ( )
и *запятая* ,

Порядок высказывательных переменных, заданный индексами, порядок n-местных предикатных переменных, заданный индексами, и порядок предметных переменных, заданный индексами, назовём *алфавитным.*

Логической длиной лд $\llcorner P \lrcorner$ слова P в этом алфавите назовём число вхождений в это слово связок и кванторов.

Перейдём к определению формулы.

Слово вида $P_k^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, в котором $P_k^{(n)}$ – произвольная n-местная предикатная переменная, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – произвольный перечень n предметных переменных (им не запрещается – полностью или частично – быть одинаковыми), назовём *предикацией.*

В качестве исходных слов мы возьмём высказывательные переменные и предикации

К четырём правилам образования из исчисления **K**[i] добавим ещё два правила.

И опять-таки, поскольку на уровне синтактики оба квантора будут «работать» одинаково, мы употребим букву ⋊ в качестве обозначения произвольного из этих кванторов.

На этот раз, для разнообразия, мы дадим определение формулы не в виде стандартной триады (через определение формульного описания), а индукцией по логической длине.

Как уже сказано выше, исходные формулы, формулы логической длины 0, – высказывательные переменные и предикации.

Правила образования: 1) если α – формула, то $\urcorner(\alpha)$ – формула; 2)–4) если α, β – формулы, то $(\alpha) \triangledown (\beta)$ – формула; 5)–6) если α – формула и x – предметная переменная, то ⋊$x(\alpha)$ – формула.[3]

[i] Формально говоря, их «наполнение» – другое: теперь они применяются к формулам исчисления **L**, в частности – к предикациям.

Таким образом, слово $\exists a_1(P_1^{(1)}(a_2))$ также будет у нас формулой.

Отметим, что $\mathfrak{F}_{\mathbf{K}} \subset \mathfrak{F}_{\mathbf{L}}$.

Сначала мы для исчисления **L** как бы повторим синтактику исчисления **K** (разумеется, с необходимыми модификациями).

Синтактика исчисления **L**, конечно, тоже удовлетворяет требованию СИ – *множество* $\mathfrak{F}_{\mathbf{L}}$ *формул исчисления* **L** *разрешимо относительно множества слов в алфавите* $\mathrm{A}_{\mathbf{L}}$ (предписание, блок-схема которого изображена на рис. 2, легко дополнить до нужного предписания).

Остаётся верной и доказывается так же (модифицированная)

Теорема об однозначной представимости. *Любая формула* α *представима, причём единственным образом, в одном и только одном из пяти видов*: A_i, $P_k^{(n)}(b_1, b_2, ..., b_n)$, $\rceil(\beta)$, *где* β – *формула*, $(\beta) \triangledown (\gamma)$, *где* β *и* γ – *формулы*, $\rangle\!\!|x(\beta)$, *где* β – *формула*, x – *предметная переменная*.

Ясно, что называется главным вхождением логического знака, главным логическим знаком и непосредственной составляющей для формул нового вида.

Остаются верными теорема о подформулах (ясно, как её надо модифицировать), Синтаксическая теорема о замене и следствие из неё.

В теореме о соответствующей скобке надо изменить конец формулировки: «*слово* $б_{i+1}б_{i+2}\ldots б_{j-1}$ *является формулой или списком предметных переменных*».

Область действия кванторов определяется естественно: $\rangle\!\!|\,\widehat{x(\beta)}$.

А теперь займёмся вопросами, специфическими для исчисления **L**.

Из практического общения с математикой мы знаем, что в предложениях математического языка бывают свободные и связанные переменные (см., например, [16]).

Для исчисления **L** это определяется вполне строго.

Вхождение предметной переменной x в формулу α называется *связанным*, если оно входит в область действия квантора с той же прикванторной переменной; в противном случае это вхождение называется *свободным*.

Например, в формуле ꓘxP(x) & Q(x) [i] первое и второе вхождения переменной x – связанные, третье – свободное.

Предметная переменная x называется *свободной* (*связанной*) для формулы α, если она имеет в α хотя бы одно свободное (связанное) вхождение.

Как мы только что увидели, переменная может для данной формулы быть одновременно и свободной, и связанной.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – список всех свободных переменных формулы α, расположенных по алфавиту. Формулу

$$\forall\alpha \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \forall x_1 \ldots \forall x_n(\alpha)$$

назовём *замыканием* формулы α. Если формула α не имеет свободных предметных переменных, положим $\forall\alpha \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \alpha$.

Рассмотрим формулу ꓘx[ꓘxP(x) & Q(x)]. Вероятно, <u>интуитивно</u> ясно, что третье вхождение переменной x связано вторым вхождением квантора, а четвёртое – первым.

Дадим строгое определение. Мы будем говорить, что вхождение $\langle x, m\rangle$ переменной x в формулу α *связано вхождением квантора* $\langle$ꓘ$, n\rangle$, если либо это вхождение – прикванторное (т. е. $m = n + 1$), либо выполняются 3 условия: 1) квантор – по той же переменной (т. е. $(n + 2)$-ая буква в α есть x); 2) вхождение $\langle x, m\rangle$ переменной x входит в область действия квантора $\langle$ꓘ$, n\rangle$ [ii]; 3) из вхождений квантора, удовлетворяющих условиям 1), 2), вхождение $\langle$ꓘ$, n\rangle$ – самое правое [iii].

---

[i] В примерах мы постоянно будем использовать метабуквы. Кроме того, мы уже опускаем некоторые скобки, ещё не сформулировав соответствующего правила.

[ii] Точнее (и длиннее) это надо было бы сказать так: переменная x, стоящая в α на $(m+1)$-ом месте, входит в область действия квантора ꓘ, стоящего в α на $(n+1)$-ом месте.

[iii] В формуле из предыдущего абзаца для вхождения $\langle x, 7\rangle$ условиям 1), 2) удовлетворяют вхождения $\langle$ꓘ$, 0\rangle$ и $\langle$ꓘ$, 3\rangle$.

Вот теперь утверждения из предыдущего абзаца приобрели точный смысл (и оказались верными).

Известно, что если в метаязыке записи двух утверждений отличаются только связанными переменными, то эти утверждения имеют один и тот же смысл – какими буквами обозначать связанные переменные, не существенно. Например, $(\forall x)[x^2 \geq 0] \simeq (\forall y)[y^2 \geq 0]$.

Назовём 2 формулы конгруэнтными, если они отличаются только связанными переменными. Впрочем, эта фраза не является точным определением – она только передаёт идею.

Назовём формулы α и β *конгруэнтными*, если $1\lfloor\alpha\rfloor = 1\lfloor\beta\rfloor$ и

1) когда некоторое вхождение буквы в α не является предметной переменной, то соответствующее вхождение буквы в β[i] является той же самой буквой; 2) когда некоторое вхождение буквы в α является свободным вхождением предметной переменной, то соответствующее вхождение буквы в β является свободным вхождением той же переменной; 3) когда некоторое вхождение буквы в α является связанным вхождением предметной переменной, то соответствующее вхождение буквы в β тоже является связанным вхождением предметной переменной, причём оба эти вхождения связаны соответствующими (совпадающими по условию 1) кванторами.

Пример 1. Формула $\forall x[\exists x \mathrm{P}(x)\ \&\ \mathrm{Q}(x)]$ конгруэнтна каждой из формул $\forall x[\exists z \mathrm{P}(z)\ \&\ \mathrm{Q}(x)]$, $\forall z[\exists x \mathrm{P}(x)\ \&\ \mathrm{Q}(z)]$, $\forall u[\exists v \mathrm{P}(v)\ \&\ \mathrm{Q}(u)]$ и не конгруэнтна формуле $\forall x[\exists z \mathrm{P}(x)\ \&\ \mathrm{Q}(x)]$, так как третье вхождение переменной x в исходной формуле связано вторым вхождением квантора, а соответствующее вхождение переменной x в последней формуле связано первым вхождением квантора.

Конгруэнтность формул α и β мы будем обозначать $\alpha \operatorname{con} \beta$.

В алфавите исчисления **L** имеем 3 вида переменных.

Обычно букву называют переменной, если вместо неё собираются что-нибудь подставлять.

---

[i] Раз эти 2 формулы – слова одинаковой длины, то понятно, что такое «вхождение буквы в β, соответствующее некоторому вхождению буквы в α».

В исчислении **K** мы вовсю подставляли вместо единственного вида переменных, который там существовал, – вместо высказывательных переменных. Подставляли формулы. По следствию из Синтаксической теоремы о замене для любых формул α, β и любого $i \in \mathbf{N}$

$\mathbf{S}_{\alpha}^{A_i}\llcorner\beta\lrcorner$ – формула.

Как уже отмечалось выше, в исчислении **L** это тоже верно и говорить, по крайней мере на синтаксическом уровне, о подстановке вместо высказывательных переменных больше не о чём.

Наоборот, говорить о подстановке вместо предикатных переменных трудно и кропотливо.

Речь не идёт, конечно, о подстановке одной n-местной предикатной переменной вместо другой n-местной предикатной переменной. С такой подстановкой опять-таки никаких проблем – здесь опять всё ясно. Ясно, что $\mathbf{S}_{P_l^{(n)}}^{P_k^{(n)}}\llcorner\beta\lrcorner$ – формула, но это мало интересно.

Хотелось бы уметь в формулу вместо предикаций с одной и той же предикатной переменной подставлять другую формулу, но эти предикации могут входить в формулу с очень разными предметными переменными, причём некоторые вхождения этих предметных переменными могут быть свободными, а некоторые – связанными.

И как такую подстановку совершить?

Математики это придумали (желающие могут почитать об этом в § 34 книги [4]), но это кропотливое дело. Поэтому в этой книге мы такую подстановку рассматривать не будем.

Итак, остаются предметные переменные.

С точки зрения чисто синтаксической здесь опять-таки всё ясно – ясно, что для любой формулы α и любых предметных переменных x, y слово $\mathbf{S}_{y}^{x}\llcorner\alpha\lrcorner$ является формулой, но ведь мы-то строим исчисление не для игры с формулами, не ради синтактики как таковой. Мы строим синтактику ради семантики и дедуктики.

И вот оказывается, что с точки семантики не любая подстановка $\mathbf{S}_{y}^{x}\llcorner\alpha\lrcorner$ разумна, не любая подстановка интересна.

Во-первых, если в формулу $\forall x\mathrm{P}(x, y)$ подставить y вместо x, то с точки зрения семантики полученная формула $\forall y\mathrm{P}(y, y)$ будет иметь совсем другой смысл.

Подставлять – с точки зрения семантики – имеет смысл только вместо свободных вхождений переменной.

Давайте обозначим через $\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y}\llcorner\alpha\lrcorner$ результат замены всех <u>свободных</u> вхождений переменной x в формуле α на y.

Вот только с такой подстановкой (когда мы будем говорить о подстановке вместо предметных переменных) мы и будем далее иметь дело.

Отметим, что $\underline{\mathbf{S}}^{x}_{x}\llcorner\alpha\lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \alpha$ и что если x не входит свободно в α[i] (в частности, если x вообще не входит в α), то $\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y}\llcorner\alpha\lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \alpha$.

Но есть ещё «во-вторых».

Если в формулу $\forall y\mathrm{P}(x, y)$ подставить y вместо x, то с точки зрения семантики полученная формула $\forall y\mathrm{P}(y, y)$ тоже будет иметь совсем другой смысл.

Мы будем говорить, что *подстановка* y *вместо* x *в формулу* α <u>*допустима*</u>[ii] и будем писать $!\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y}\llcorner\alpha\lrcorner$, если никакое свободное вхождение x в формулу α не входит в область действия квантора по y.

Легко видеть, что *подстановка* y *вместо* x *в формулу* α *тогда и только тогда допустима, когда число связанных вхождений* y *в формуле* α *равно числу связанных вхождений* y *в формуле* $\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y}\llcorner\alpha\lrcorner$.

Очевидно, $!\underline{\mathbf{S}}^{x}_{x}\llcorner\alpha\lrcorner$ и, если x не входит свободно в α (в частности, если x вообще не входит в α) или y не входит связанно в α (в частности, если y вообще не входит в α), то $!\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y}\llcorner\alpha\lrcorner$.

Рассмотрим простенькую формулу $\rtimes x\mathrm{P}(x)$. Заменим в ней прикванторную переменную на новую переменную y и, разумеется, в «послекванторной» формуле проделаем подстановку $\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y}\llcorner\mathrm{P}(x)\lrcorner$. Полученная формула $\rtimes y\mathrm{P}(y)$ будет конгруэнтна исходной формуле.

Но так будет не всегда.

Оказывается, для различных переменных x, y

$$\rtimes x(\alpha) \text{ con } \rtimes y(\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y}\llcorner\alpha\lrcorner) \boxed{\rightleftarrows} !\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y}\llcorner\alpha\lrcorner \boxed{\&} [y \text{ не входит свободно в } \alpha].$$

---

[i] Отметим, что «x не входит свободно в α», «x не является свободной переменной для α» и «x не имеет свободных вхождений в α» – синонимы.

[ii] Конкурирующий синоним: *y свободно для x в формуле* α.

Значит, если y вообще не входит в α, то $\rightthreetimes x(\alpha) \text{ con } \rightthreetimes y(\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \alpha \lrcorner)$.

Таким образом, при желании мы можем заменить в произвольной формуле α все связанные переменные на <u>новые</u> (не входившие ранее в формулу α) переменные и получить конгруэнтную формулу.

Для нас пока, в этом параграфе, конгруэнтность – чисто синтаксическое понятие. Очень скоро, в следующем параграфе, мы узнаем, что конгруэнтные формулы равносильны.

Перед переходом к семантике условимся о сокращённом написании формул – об опускании некоторых скобок.

Прежде всего, условимся опускать скобки вокруг высказывательных переменных и вокруг предикаций.

Кроме того, условимся, что знаки $\urcorner$, $\forall$, $\exists$ связывают теснее, чем знаки $\&, \vee, \rightarrow$, а знаки $\&$ и $\vee$ связывают теснее, чем знак $\rightarrow$.

ЗАДАЧИ

1) Докажите, что если $\alpha \text{ con } \beta$, то $\mathbf{R}_\beta^{<\alpha,\, n>} \llcorner \gamma \lrcorner \text{ con } \gamma$.

2) Докажите, что если $\rightthreetimes x(\alpha) \text{ con } \rightthreetimes x(\beta)$, то $\alpha \text{ con } \beta$. (Между прочим, утверждение «если $\rightthreetimes x(\alpha) \text{ con } \rightthreetimes y(\beta)$, то $\alpha \text{ con } \beta$» легко опровергается.)

3) Докажите, что если y не входит свободно в α и $!\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \alpha \lrcorner$, то x не входит свободно в $\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \alpha \lrcorner$ и $!\underline{\mathbf{S}}^y_x \llcorner \underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \alpha \lrcorner \lrcorner$ и $\underline{\mathbf{S}}^y_x \llcorner \underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \alpha \lrcorner \lrcorner \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \alpha$.

§ 2. Семантика

Пора, наконец, восполнить очевидный психологический пробел.

Мы находимся в разделе «Исчисления предикатов». Мы употребили термины «предикатная переменная» и «предикация».

А что же такое – предикат?

Предикат – это просто отображение с областью прибытия $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{л}\}$.[4] *Предикат на множестве* U – это предикат с областью отправления U. *n-местный предикат на множестве* U – это предикат на множестве U^n.

Естественно определяются конъюнкция, дизъюнкция, импликация предикатов (на одном и том же множестве) и отрицание предиката.

Наиболее частый и наиболее естественный способ задания предикатов – при помощи высказывательных форм. Если $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ – высказывательная форма, то $\lambda x_1, \dots, x_n \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ – предикат.

Например, $\lambda xy[x > y]$.

Областью истинности предиката Π естественно называется множество $\Pi^{-1}(\{\boldsymbol{u}\})$ (оно, конечно, может быть и пустым).

Предикат называется *перечислимым* (*разрешимым*), если его область истинности перечислима (разрешима относительно его области отправления).

В отличие от исчисления **K** здесь будет не одна главная интерпретация, а для каждого не пустого множества U будет своя главная интерпретация – главная интерпретация на множестве U. Все они, конечно, описываются единообразно, но всё же …

Итак, пусть U – не пустое множество.

<u>Главная интерпретация на множестве U</u>: высказывательные переменные мы, естественно, будем интерпретировать как в **K**; предикатные переменные – как предикаты на U (n-местные предикатные переменные – как n-местные предикаты на U); предметные переменные – как элементы множества U; связки и кванторы (буквы алфавита $\mathrm{A_L}$) – как соответствующие связки и кванторы («для любого элемента из U», «существует такой элемент в U») в метаязыке.

Список переменных Ш назовём *нормальным* для формулы α, если в нём содержится каждая высказывательная переменная, каждая предикатная переменная и каждая <u>свободная</u> предметная переменная, входящая в α.

Список переменных Ш, нормальный для формулы α, назовём *каноническим* для неё, если в нём нет высказывательных и предикатных переменных, не входящих в α, каждое входящая в него предметная переменная свободна для α и <u>по алфавиту</u> расположены сначала высказывательные переменные, потом одноместные предикатные переменные (разумеется, если они есть), затем двухместные предикатные переменные и т. д., а после предикатных переменных – свободные предметные переменные.

Сохраним обозначения ксп $\llcorner\alpha\lrcorner$ и # ксп $\llcorner\alpha\lrcorner$.

Пусть α – формула, Ш – список переменных, нормальный для α, и е – *кортеж значений* той же длины, что Ш (в котором, разумеется, на i-ом месте стоит какое-нибудь значение i-ой переменной; какие значения может принимать каждая переменная, описано в главной интерпретации). В такой ситуации мы будем далее говорить, что i-ой переменной списка Ш *сопоставляется* i-ая компонента кортежа е.

Индукцией по логической длине определим ${}^{\mathrm{U}}|\alpha|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}}$ – *значение формулы* α, *проинтерпретированной на множестве* U, *относительно списка переменных* Ш *на кортеже значений* е.

Разумеется, для высказывательных переменных – как раньше:

$$ {}^{\mathrm{U}}\left|\,\mathrm{A}_i\right|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} \underset{Df}{=} \sigma , $$

(σ – истинностное значение, сопоставленное в Ш переменной A_i).

$$ {}^{\mathrm{U}}\left|P_k^{(n)}(b_1,b_2,\ldots,b_n)\right|_{\Pi,\quad u_1,\ldots,u_m}^{P_k^{(n)},c_1,\ldots,c_m} = \Pi\left(v_1,\ldots,v_n\right) $$

[$c_1, \ldots , c_m$ получаются выписыванием переменных слева направо из $b_1, \ldots , b_n$ <u>без повторений</u> $(1 \le m \le n)$; П – произвольный n-местный предикат на U, $u_1, \ldots , u_m$ – произвольные элементы из U (среди них может быть сколько угодно одинаковых); v_i равно тому u_j, для которого $c_j = b_i$ $(1 \le i \le n)$].

Допустим, что для всех формул логической длины $\le n$ значение уже определено. Тогда для формулы логической длины $n + 1$

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{U}}|\neg\pi|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} &\underset{Df}{=} \neg\, {}^{\mathrm{U}}|\pi|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}}, \\
{}^{\mathrm{U}}|\pi \,\&\, \rho|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} &\underset{Df}{=} {}^{\mathrm{U}}|\pi|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} \;\&\; {}^{\mathrm{U}}|\rho|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}}, \\
{}^{\mathrm{U}}|\pi \vee \rho|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} &\underset{Df}{=} {}^{\mathrm{U}}|\pi|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} \vee {}^{\mathrm{U}}|\rho|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}}, \\
{}^{\mathrm{U}}|\pi \to \rho|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} &\underset{Df}{=} {}^{\mathrm{U}}|\pi|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} \to {}^{\mathrm{U}}|\rho|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}},
\end{aligned}
$$

$$
{}^{\mathrm{U}}|\forall x(\pi)|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} = \begin{cases} \boldsymbol{и}, \text{ если } & (\forall u \in \mathrm{U})[\, {}^{\mathrm{U}}|\pi|_{\mathrm{e},\,u}^{\text{Ш},\,x} = \boldsymbol{и}] \\ \boldsymbol{л}, & \text{в противном случае} \end{cases},
$$

$$
{}^{\mathrm{U}}|\exists x(\pi)|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} = \begin{cases} \boldsymbol{и}, \text{ если } & (\exists u \in \mathrm{U})[\, {}^{\mathrm{U}}|\pi|_{\mathrm{e},\,u}^{\text{Ш},\,x} = \boldsymbol{и}] \\ \boldsymbol{л}, & \text{в противном случае} \end{cases}.
$$

Вот теперь в нашей главной интерпретации формулы превратились в высказывательные формы.

Легко доказывается, что значение любой формулы α зависит только от значений, сопоставленных входящим в неё переменным.

Значит, если в списках $\text{Ш}_1, \text{Ш}_2$ переменным, входящим в α, сопоставляются в кортежах $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ одинаковые значения, то

$$
{}^{\mathrm{U}}|\alpha|_{\mathrm{e}_1}^{\text{Ш}_1} = {}^{\mathrm{U}}|\alpha|_{\mathrm{e}_2}^{\text{Ш}_2} .
$$

Отсюда, в частности следует, что

$$
{}^{\mathrm{U}}|\alpha|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} = {}^{\mathrm{U}}|\alpha|_{\mathrm{e}'}^{\text{ксп}\llcorner\alpha\lrcorner},
$$

(где e' – соответствующий кортеж значений).

Формула α называется *тождественно-истинной* (или *общезначимой*) *на множестве* U, если при интерпретации на U для любого кортежа значений e длины $\#\text{ксп}\llcorner\alpha\lrcorner$ [i] верно ${}^{\mathrm{U}}|\alpha|_{\mathrm{e}}^{\text{ксп}\llcorner\alpha\lrcorner} = \boldsymbol{и}$.

[i] Согласованного, конечно, со списком $\text{ксп}\llcorner\alpha\lrcorner$ – каждой переменной должно сопоставляться значение из её области значений. Впредь мы это «согласование» будем подразумевать.

Формула α называется *выполнимой на множестве* U, если при интерпретации на U для некоторого кортежа значений e длины $\#\text{ксп}\lfloor\alpha\rfloor$ верно ${}^{U}|\alpha|_{c}^{\text{ксп}\lfloor\alpha\rfloor} = \boldsymbol{и}$.

Формула α называется *тождественно-ложной на множестве* U, если при интерпретации на U для любого кортежа значений e длины $\#\,\text{ксп}\lfloor\alpha\rfloor$ верно ${}^{U}|\alpha|_{e}^{\text{ксп}\lfloor\alpha\rfloor} = \boldsymbol{л}$.

Соотношение между этими понятиями и соответствующими множествами формул показано на рис. 8 [i].

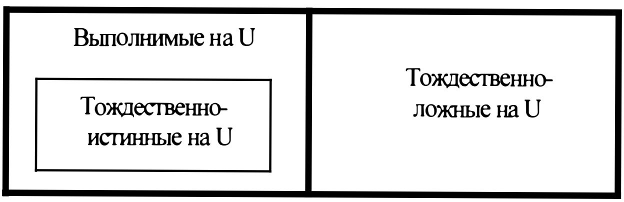


Рис. 8

Введём ещё 6 более общих понятий.

Формула α называется *тождественно-ложной*, если она тождественно-ложна на любом (не пустом) множестве.

Формула α называется *тождественно-истинной* (или *общезначимой*), если она тождественно-истинна (общезначима) на любом (не пустом) множестве.

Формула α называется *конечно-общезначимой*, если она общезначима на любом (не пустом) <u>конечном</u> множестве.

Формула α называется *выполнимой*, если она выполнима на некотором множестве.

Формула α называется *конечно-выполнимой*, если она выполнима на некотором <u>конечном</u> множестве.

Формула α называется *тавтологией*, если она может быть получена подстановкой формул исчисления **L** в некоторую тавтологию исчисления **K** [ii].

---

[i] Который по существу совпадает с рис. 3.

[ii] В исчислении **K** термины «тождественно-истинная», «общезначимая» и «тавтология» были синонимами. В исчислении **L** первые 2 термина остались синонимами, а третий термин приобрёл самостоятельный смысл.

Соотношение между этими понятиями и соответствующими множествами формул показано на рис. 9. Впрочем, ещё надо доказать, что любая тавтология общезначима (задача 3 ниже).

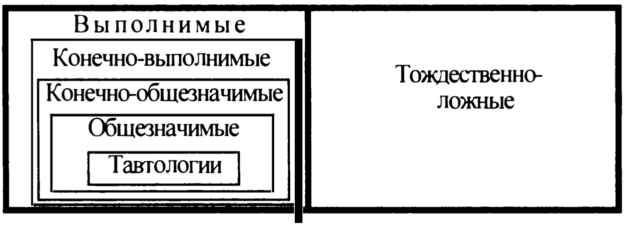


Рис. 9

Справедливы 12 тривиальнейших теорем:

Формула α *тождественно-ложна на множестве* U *тогда и только тогда, когда формула* $\neg\alpha$ *общезначима на* U.

Формула α *выполнима на множестве* U *тогда и только тогда, когда формула* $\neg\alpha$ *не общезначима на* U.

Формула α *общезначима на множестве* U *тогда и только тогда, когда формула* $\neg\alpha$ *не выполнима на* U.

Формула α *общезначима на множестве* U *тогда и только тогда, когда формула* $\neg\alpha$ *тождественно-ложна на* U.

Формула α *тождественно-ложна тогда и только тогда, когда формула* $\neg\alpha$ *общезначима.*

Формула α *выполнима тогда и только тогда, когда формула* $\neg\alpha$ *не общезначима.*

Формула α *конечно-выполнима тогда и только тогда, когда формула* $\neg\alpha$ *не конечно-общезначима.*

Формула α *конечно-общезначима тогда и только тогда, когда формула* $\neg\alpha$ *не конечно-выполнима.*

Формула α *общезначима тогда и только тогда, когда формула* $\neg\alpha$ *не выполнима.*

Формула α *общезначима тогда и только тогда, когда формула* $\neg\alpha$ *тождественно-ложна.*

Формула α *тождественно-ложна на множестве* U *тогда и только тогда, когда она не выполнима на* U.

Формула α *тождественно-ложна тогда и только тогда, когда она не выполнима.*

Впрочем, заметим, что если верна теорема $A \rightleftarrows B$, то верна и теорема $\neg A \rightleftarrows \neg B$.

Пример тождественно-ложной формулы привести легко.

Формула $P(x)$ выполнима на любом множестве; значит, в частности, она конечно-выполнима. Она не общезначима ни на каком множестве; значит, в частности, она не конечно-общезначима.

Пример выполнимой, но не конечно-выполнимой формулы приведён в задаче 4 ниже.

Из вышеперечисленных тривиальных теорем вытекает, что отрицание этой формулы конечно-общезначимо, но не общезначимо.

Формула $P(x) \to P(x)$ является тавтологией.

Формула $\forall x[P(x) \to P(x)]$ общезначима, но тавтологией не является.

Легко проверяется, что если множества U и V равномощны, то формула тогда и только тогда общезначима (выполнима) на U, когда она общезначима (выполнима) на V.

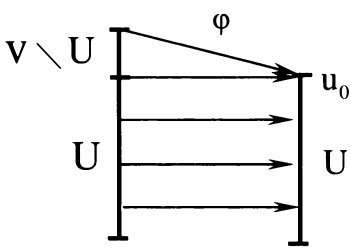


Рис. 10

Теорема 1. *Если формула* α *выполнима на множестве* U *и* $V \supset U$, *то она выполнима и на множестве* V.

Доказательство. Фиксируем в U какой-нибудь элемент u_0. Определим сюръективное отображение φ множества V на множество U (рис. 10):

$$\varphi(v) \underset{Df}{=} \begin{cases} v, & \text{если } v \in U \\ u_0, & \text{если } v \in V \setminus U \end{cases}.$$

По n-местному предикату Π на множестве U построим n-местный предикат Π' на множестве V:

$$\Pi'(v_1, \ldots, v_n) \underset{Df}{=} \Pi(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)) .$$

Индукцией по логической длине формулы доказывается лемма:

$$^{\mathrm{V}}|\alpha|^{P,x}_{\Pi',v} = {}^{\mathrm{U}}|\alpha|^{P,x}_{\Pi,\varphi(v)}$$

[в обеих частях сверху обозначена произвольная предикатная переменная P и произвольная предметная переменная x; слева снизу в качестве значения предикатной переменной взят предикат вида Π' (на V есть, конечно, и другие предикаты) и произвольный элемент v множества V; справа снизу – соответствующий предикат Π на U и элемент $\varphi(v)$ множества U]. Дальше доказательство происходит очень просто. По условию формула α выполнима на множестве U. Значит, при её интерпретации на U существуют такие значения её переменных, что $^{\mathrm{U}}|\alpha|^{P,x}_{\Pi,u} = \boldsymbol{u}$. Поскольку для $u \in \mathrm{U}$ $\varphi(u) = u$, мы можем переписать это так: $^{\mathrm{U}}|\alpha|^{P,x}_{\Pi,\varphi(u)} = \boldsymbol{u}$. По лемме $^{\mathrm{V}}|\alpha|^{P,x}_{\Pi',u} = \boldsymbol{u}$. Следовательно, формула α выполнима на V.

Итак, выполнимость переносится на надмножество.

На подмножество она не переносится – отрицание формулы, являющейся решением задачи 6, выполнимо на $(k + 1)$-элементных множествах и не выполнимо на k-элементных множествах.

Для общезначимости – наоборот.

При помощи теоремы 1 легко доказывается

Теорема 1$'$. *Если формула* α *общезначима на множестве* U *и* $\varnothing \subset \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, *то она общезначима и на множестве* V.[i]

Общезначимость переносится на (не пустое) подмножество.

На надмножество она не переносится – существует формула, общезначимая на k-элементных множествах и не общезначимая на $(k + 1)$-элементных множествах (задача 6).

В заключение этих рассмотрений красивая

[i] С помощью теоремы 1$'$ так же легко доказывается теорема 1.

Теорема Лёвенгейма.[i] *Если формула выполнима, то она выполнима на* **N**. (Альтернативная формулировка: *Если формула общезначима на* **N**, *то она общезначима.*)

Эта теорема, в частности, означает, что средствами исчисления **L**[ii] нельзя охарактеризовать конечные или несчётные множества.

Поговорим об алгоритмической природе 6 введённых нами множеств.

Впрочем, о множестве тавтологий говорить особенно нечего – легко доказывается, что оно разрешимо[iii] (задача 7), а значит, по теореме Поста, перечислимо.

В 1936 г. американский математик Чёрч доказал, что множество $\square_{\mathbf{L}}$ общезначимых формул не разрешимо[iv].

В 1950 г. Б.А.Трахтенброт[v] доказал, что множество конечно-общезначимых формул тоже не разрешимо.

Из теоремы Чёрча и одной из вышеперечисленных тривиальных теорем вытекает, что тогда и множество выполнимых формул не разрешимо. А тогда и его дополнение – множество тождественно-ложных формул – не разрешимо.

Наконец, из теоремы Трахтенброта и одной из вышеперечисленных тривиальных теорем вытекает, что множество конечно-выполнимых формул тоже не разрешимо.

Итак, все они, кроме множества тавтологий, не разрешимы.

Как мы докажем в следующем параграфе, множество $\mathrm{T}_{\mathbf{L}}$ доказуемых формул перечислимо. Из теоремы Гёделя о полноте (также см. следующий параграф) вытекает, что тогда и множество $\square_{\mathbf{L}} = \mathrm{T}_{\mathbf{L}}$ общезначимых формул перечислимо.

Отсюда и одной из вышеперечисленных тривиальных теорем вытекает, что множество тождественно-ложных формул тоже перечислимо.

---

[i] Эта теорема была доказана немецким математиком Лёвенгеймом (L.Löwenheim) в 1915 г.

[ii] Его называют *узким* исчислением предикатов.

[iii] Относительно естественного, общего для всех 6 множеств, универсума – множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{L}}$. Поэтому в этом месте текста мы будем его подразумевать.

[iv] Точнее – он это доказал про множество $\mathrm{T}_{\mathbf{L}}$ доказуемых формул, но с 1930 г. было уже известно, что эти множества совпадают.

[v] Он жил тогда в нашей стране.

Значит, по теореме Поста его дополнение – не разрешимое множество выполнимых формул – не перечислимо.

Из результата задачи 8 легко вывести, что множество конечно-выполнимых формул перечислимо.

Сейчас я докажу, что, если бы множество конечно-общезначимых формул было перечислимым, оно было бы разрешимо. Но оно не разрешимо. Следовательно, оно не перечислимо.

Прежде всего, из вышеперечисленных тривиальных теорем вытекает, что для любой формулы α верно одно и только одно из двух: либо формула α конечно-общезначима, либо формула $\neg\alpha$ конечно-выполнима. Предположим теперь, что множество конечно-общезначимых формул перечислимо. Вспомним, что множество конечно-выполнимых формул перечислимо без всяких «предположим». Если вы хотите узнать, является ли формула α конечно-общезначимой, начинайте параллельно перечислять эти 2 множества. По только что сказанному раньше или позже либо при перечислении первого множества появится формула α и вы тем самым узнаете, что она конечно-общезначима, либо при перечислении второго множества появится формула $\neg\alpha$ и вы узнаете, что формула α не конечно-общезначима.

Прежде чем расстаться с этим фрагментом текста, хочу ещё раз отметить, что множества общезначимых, конечно-выполнимых и тождественно-ложных формул <u>перечислимы и не разрешимы</u>, а множества выполнимых и конечно-общезначимых формул <u>не перечислимы</u>.

Дополнение к не перечислимому множеству выполнимых формул (множество тождественно-ложных формул) перечислимо.

Из перечислимости множества конечно-выполнимых формул и одной из вышеперечисленных тривиальных теорем легко вывести, что дополнение к не перечислимому множеству конечно-общезначимых формул перечислимо.

Пожалуй, отмечу здесь же, что множество общезначимых формул, построенных из одноместных предикатных переменных, разрешимо. Докажите это или прочитайте, например в [14].

Дальше мы для исчисления **L** как бы повторим (с необходимыми модификациями) семантику исчисления **K**.

Сохраним обозначение ксп $\llcorner\alpha, \beta\lrcorner$.

Назовём формулы α и β *равносильными на множестве* U, если при интерпретации на множестве U для любого кортежа значений e длины #ксп $\llcorner\alpha, \beta\lrcorner$ верно ${}^{U}|\alpha|_{e}^{\text{ксп}\llcorner\alpha,\beta\lrcorner} = {}^{U}|\beta|_{e}^{\text{ксп}\llcorner\alpha,\beta\lrcorner}$.

Назовём формулы α и β *равносильными*, если они равносильны на любом (не пустом) множестве. Равносильность формул α и β мы по-прежнему будем обозначать через $\alpha \simeq \beta$.

Пример 1. Формулы $P(x) \to P(y)$ и $P(x) \vee \urcorner P(x)$ равносильны на (любом) одноэлементном множестве, но не равносильны (см. также задачу 9).

По-прежнему $\alpha \simeq \beta$ тогда и только тогда, когда формула $(\alpha \to \beta) \,\&\, (\beta \to \alpha)$ тождественно-истинна.

Отношение равносильности на (любом не пустом) множестве U и просто отношение равносильности являются отношениями эквивалентности на множестве $\mathfrak{F}_{\mathbf{L}}$.

Семантическая теорема о замене. *Если* α, β, γ – *формулы и* $\alpha \simeq \beta$, *то* $\mathbf{R}_{\beta}^{<\alpha,\, n>}\llcorner\gamma\lrcorner \simeq \gamma$.

Доказывается совершенно так же. К 7 леммам, которые были нужны в исчислении **К**, добавятся ещё 2 леммы:

$$\textit{Если } \alpha \simeq \beta, \textit{ то } \exists x(\alpha) \simeq \exists x(\beta).$$

Начнём подбираться к Семантической теореме о подстановке. Как уже было сказано в § 1, подставлять мы будем вместо высказывательных и вместо предметных переменных.

Пример 2. Утверждение «*Если* $\alpha \simeq \beta$, *то* $\mathbf{S}_{\gamma}^{A}\llcorner\alpha\lrcorner \simeq \mathbf{S}_{\gamma}^{A}\llcorner\beta\lrcorner$» не верно:

$$\forall x[A \to P(x)] \simeq \forall y[A \to P(y)],$$

но

$$\forall x[P(x) \to P(x)] \not\simeq \forall y[P(x) \to P(y)].$$

Пример 3. Утверждение «*Если* $\alpha \simeq \beta$, *то* $\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \alpha \lrcorner \simeq \underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \beta \lrcorner$» не верно:

$$\forall y \mathrm{P}(x, y) \simeq \forall z \mathrm{P}(x, z),$$

но

$$\forall y \mathrm{P}(y, y) \not\simeq \forall z \mathrm{P}(y, z).$$

Семантическая теорема о подстановке

1) $(\forall \alpha \in \mathfrak{F}_{\mathbf{K}})(\forall \beta \in \mathfrak{F}_{\mathbf{K}})(\forall \gamma \in \mathfrak{F}_{\mathbf{L}})[\alpha \simeq \beta \rightarrow \mathbf{S}^{\mathrm{A}}_{\gamma} \llcorner \alpha \lrcorner \simeq \mathbf{S}^{\mathrm{A}}_{\gamma} \llcorner \beta \lrcorner]$;

2) *Если* $\alpha \simeq \beta$ и $!\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \alpha \lrcorner$, $!\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \beta \lrcorner$, *то* $\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \alpha \lrcorner \simeq \underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \beta \lrcorner$.

Каждое из этих утверждений доказывается при помощи соответствующей леммы, выражающей значение результата подстановки в некоторую формулу через значение самой этой формулы.

Лемма для пункта 1 и формулируется точно так же, как в § 2 гл. I, и доказывается точно так же, поскольку в ней подстановка производится в формулу исчисления **К**.

Для пункта 2 предлагается следующая

Основная лемма (для пункта 2 Семантической теоремы о подстановке). *Пусть* Ш, x, y – *список переменных*, *нормальный для формулы* α[1] *и* $!\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \alpha \lrcorner$. *Тогда* ${}^{\mathrm{U}}|\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \alpha \lrcorner|^{\text{Ш}, y}_{\mathrm{e},\ a} = {}^{\mathrm{U}}|\alpha|^{\text{Ш}, y, x}_{\mathrm{e},\ a,\ a}$.

Доказательство проводится обычной индукцией по логической длине формулы α. Я проведу это доказательство подробнейшим образом только для одного случая индукционного шага – когда $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \forall z(\pi)$.

Итак, нам надо доказать ${}^{\mathrm{U}}|\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \forall z(\pi) \lrcorner|^{\text{Ш}, y}_{\mathrm{e},\ a} = {}^{\mathrm{U}}|\forall z(\pi)|^{\text{Ш}, y, x}_{\mathrm{e},\ a, a}$, причём для формулы π, по предположению индукции, это утверждение верно.

Из $!\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \forall z(\pi) \lrcorner$ следует, что y и z различны.

Рассмотрим 2 случая: 1) $z \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} x$, 2) z и x различны.

---

[1] Из этого условия вытекает, что x и y различны и не входят в Ш.

В первом случае

$$^{\mathrm{U}}\Big|\,\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\forall z(\pi)\lrcorner\,\Big|^{\text{Щ},\,y}_{\text{e},\;a}={}^{\mathrm{U}}\Big|\,\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\forall x(\pi)\lrcorner\,\Big|^{\text{Щ},\,y}_{\text{e},\;a}={}^{\mathrm{U}}\Big|\,\forall x(\pi)\,\Big|^{\text{Щ},\,y}_{\text{e},\;a}=$$

$$={}^{\mathrm{U}}\Big|\,\forall x(\pi)\,\Big|^{\text{Щ},\,y,x}_{\text{e},\;a,a}={}^{\mathrm{U}}\Big|\,\forall z(\pi)\,\Big|^{\text{Щ},\,y,x}_{\text{e},\;a,\,a}.$$

Во втором случае $\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\forall z(\pi)\lrcorner \;\bar{\underline{\circ}}\; \forall z\left(\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\pi\lrcorner\right)$. Значит,

$$^{\mathrm{U}}\Big|\,\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\forall z(\pi)\lrcorner\,\Big|^{\text{Щ},\,y}_{\text{e},\;a}={}^{\mathrm{U}}\Big|\,\forall z(\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\pi\lrcorner)\,\Big|^{\text{Щ},y}_{\text{e},\;a}.$$

Когда же это значение равно $\boldsymbol{u}$? Поскольку y и z различны, ответ таков: если для любого $b\in\mathrm{U}$ верно $^{\mathrm{U}}\Big|\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner(\pi)\lrcorner\,\Big|^{\text{Ш}',y,z}_{e',\,a,b}=\boldsymbol{u}$ (если в Ш не было z, то Ш$'$ = Ш и е$'$ = е; в противном случае Ш$'$ получается выкидыванием z из Ш, а е$'$ – выкидыванием соответствующего значения из е). Но по предположению индукции $^{\mathrm{U}}\Big|\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner(\pi)\lrcorner\Big|^{\text{Ш}',\,y,\,z}_{e',\;\;a,b}={}^{\mathrm{U}}\Big|\pi\Big|^{\text{Ш}',\,y,\,z,\,x}_{e',\;\;a,b,a}$. Значит, ответ таков: если для любого $b\in\mathrm{U}$ верно $^{\mathrm{U}}\Big|\pi\Big|^{\text{Ш}',y,z,x}_{e',\;a,b,a}=\boldsymbol{u}$. По определению значения квантора общности для правой части $^{\mathrm{U}}\Big|\,\forall z(\pi)\,\Big|^{\text{Щ},\;y,x}_{\text{e},\;\;a,a}$ ответ такой же.

Выполним данное в конце § 1 обещание – докажем, что *конгруэнтные формулы равносильны*:

$$\alpha\operatorname{con}\beta\;\rightarrow\;\alpha\simeq\beta\,.$$

Доказывается это индукцией по логической длине формул α, β.[i]

Я опять проведу это доказательство только для одного случая индукционного шага[ii]:

$$\curlyvee x(\pi)\;\operatorname{con}\;\curlyvee y(\rho). \tag{0}$$

---

[i] У них одинаковая логическая длина.

[ii] Впрочем, при желании можно считать, что для двух случаев – для обоих кванторов.

Если $x \overset{\circ}{\equiv} y$, то из (0) по задаче 2 из § 1 π con ρ. Тогда по предположению индукции $\pi \simeq \rho$, откуда $\rightthreetimes x(\pi) \simeq \rightthreetimes x(\rho)$.

Пусть теперь x и y различны. Тогда из (0) x не входит свободно в ρ (1), а y не входит свободно в π (2).

Обозначим через ρ' формулу, полученную из формулы ρ заменой в ρ всех кванторов по x $[\rightthreetimes x(\alpha) \Rightarrow \rightthreetimes z(\underline{\mathbf{S}}^{x}_{z} \llcorner \alpha \lrcorner)]$ на кванторы по совсем новым переменным. Тогда по (1) x не входит в ρ' (3) и $!\underline{\mathbf{S}}^{y}_{x} \llcorner \rho' \lrcorner$ (4). Кроме того, по задаче 1 из § 1 ρ con ρ' (5). По предположению индукции $\rho \simeq \rho'$ (6). Из (5) по задаче 1 из § 1 $\rightthreetimes y(\rho)$ con $\rightthreetimes y(\rho')$ (7). Наконец, из (3) $\rightthreetimes y(\rho')$ con $\rightthreetimes x(\underline{\mathbf{S}}^{y}_{x} \llcorner \rho' \lrcorner)$ (8). Из (0), (7) и (8) $\rightthreetimes x(\pi)$ con $\rightthreetimes x(\underline{\mathbf{S}}^{y}_{x} \llcorner \rho' \lrcorner)$. По задаче 2 из § 1 π con $\underline{\mathbf{S}}^{y}_{x} \llcorner \rho' \lrcorner$. По предположению индукции $\pi \simeq \underline{\mathbf{S}}^{y}_{x} \llcorner \rho' \lrcorner$.

Пусть Ш, x, y – список переменных, нормальный для π, ρ и ρ'. Тогда по (2) Ш, x – список переменных, нормальный для π, а по (1) Ш, y – список переменных, нормальный для ρ.

$$ {}^{U}\Big|\,\pi\,\Big|^{Щ,x}_{e,\ a} = {}^{U}\Big|\,\underline{\mathbf{S}}^{y}_{x} \llcorner (\rho') \lrcorner\,\Big|^{Щ,x}_{e,\ a} = {}^{U}\Big|\,\rho'\,\Big|^{Щ,x,y}_{e,\ a,a} = {}^{U}\Big|\,\rho'\,\Big|^{Щ,y}_{e,\ a} = {}^{U}\Big|\,\rho\,\Big|^{Щ,y}_{e,\ a} $$

(второй переход, с учётом (4), совершён по только что рассмотренной Основной лемме, третий переход – по (3), четвёртый – по (6)).

Из полученного результата следует $\rightthreetimes x(\pi) \simeq \rightthreetimes y(\rho)$.

Все равносильности для формул исчисления **K** и все равносильности из [16], гл.V, § 3 для формул исчисления **L**, разумеется, остаются верными.

Хочу добавить 3 группы равносильностей.

<u>Первая группа</u>

$$\exists x(\alpha \vee \beta) \simeq \exists x(\alpha) \vee \exists x(\beta),$$

$$\forall x(\alpha \mathbin{\&} \beta) \simeq \forall x(\alpha) \mathbin{\&} \forall x(\beta).$$

<u>Вторая группа</u>

Если формула β не содержит свободно переменную x, то

$$\exists x(\alpha \vee \beta) \simeq \exists x(\alpha) \vee \beta,$$

$$\exists x(\alpha \mathbin{\&} \beta) \simeq \exists x(\alpha) \mathbin{\&} \beta,$$

$$\forall x(\alpha \mathbin{\&} \beta) \simeq \forall x(\alpha) \mathbin{\&} \beta,$$

$$\forall x(\alpha \vee \beta) \simeq \forall x(\alpha) \vee \beta.$$

<u>Третья группа</u>

Если формула β не содержит свободно переменную x, то

$$\forall x(\alpha \to \beta) \simeq \exists x(\alpha) \to \beta,$$

$$\exists x(\alpha \to \beta) \simeq \forall x(\alpha) \to \beta,$$

$$\forall x(\beta \to \alpha) \simeq \beta \to \forall x(\alpha),$$

$$\exists x(\beta \to \alpha) \simeq \beta \to \exists x(\alpha).$$

Если определение негатива $\alpha^{\rceil}$ для формулы исчисления **K** дать не в виде равенства, как в § 2 гл. I, а словами: «*Негативом* $\alpha^{\rceil}$ формулы α называется формула, полученная из формулы α заменой всех её подформул логической длины 0 на их отрицания», оно – без всяких изменений и оговорок – подойдёт и для исчисления **L**.

Остаются верными утверждения

$$\alpha^{\rceil\rceil} \simeq \alpha,$$

$$\alpha \simeq \beta \to \alpha^{\rceil} \simeq \beta^{\rceil}.$$

Определение *двойственной формулы* α^* меняется очевидным образом:

$$\alpha^* \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \mathbf{S}^{\&,\vee,\forall,\exists}_{\vee,\&,\exists,\forall}\llcorner\alpha\lrcorner .$$

По-прежнему очевидны утверждения

$$\alpha^{**} \overset{\circ}{=} \alpha ,$$
$$\alpha^{*\urcorner} \overset{\circ}{=} \alpha^{\urcorner *} .$$

Так же формулируются (хотя обозначения имеют теперь несколько иной смысл) и так же доказываются

Основная лемма (для Семантического закона двойственности). *Если* α *– безимпликативная формула, то* $\alpha^* \simeq \urcorner(\alpha^\urcorner)$.

Семантический закон двойственности. *Если* α, β *– безимпликативные формулы и* $\alpha \simeq \beta$, *то* $\alpha^* \simeq \beta^*$.

Формула β называется *предварённой нормальной формой* (ПНФ) формулы α, если $\beta \simeq \alpha$ и либо β не имеет кванторов, либо у β «все кванторы впереди», т. е. $\beta \overset{\circ}{=} \rtimes x_1 \rtimes x_2 \ldots \rtimes x_n(\gamma)$, где γ не имеет кванторов. [i]

Пример 4. Формула $A_1 \vee \urcorner A_1$ является ПНФ формулы $\forall a_1 P(a_1) \to \forall a_1 P(a_1)$.

Так что наше определение «широковато».

Никакой единственности тут нет и в помине: если формула β является ПНФ формулы α. то формула $\beta \vee (A_1 \,\&\, \urcorner A_1)$ тоже является ПНФ формулы α.

Но «существование» есть – у любой формулы есть ПНФ.

Как для данной формулы α найти какую-нибудь ПНФ?

Если формула α не имеет кванторов, то она сама является собственной ПНФ.

---

[i] Это условие равносильно требованию, чтобы никакой квантор не входил в область действия никакой связки.

Если же α имеет кванторы, то «вытащить их наружу» можно, например, по следующему пути: сначала при помощи соответствующей равносильности элиминировать $\rightarrow$, затем, всячески применяя законы Де Моргана, правила отрицания кванторов и закон снятия двойного отрицания, «спустить» $\urcorner$ на переменные и предикации, а дальше всячески применять равносильности второй группы, заменяя предварительно, если потребуется, <u>связанные</u> переменные $[\rtimes x(\alpha) \Rightarrow \rtimes z(\underline{\mathbf{S}}^{x}_{z} \llcorner \alpha \lrcorner)]$.

Разумеется, совсем не обязательно идти именно по этому пути. Например, равносильности первой и третьей группы иногда могут сильно ускорить процесс.

Пример 5.

$$\begin{aligned}\forall x\mathrm{P}(x) \vee \forall x\mathrm{Q}(x) &\simeq \forall x[\mathrm{P}(x) \vee \forall x\mathrm{Q}(x)] \simeq \forall x[\mathrm{P}(x) \vee \forall z\mathrm{Q}(z)] \simeq \\ &\simeq \forall x\forall z[\mathrm{P}(x) \vee \mathrm{Q}(z)].\end{aligned}$$

В заключение вернёмся к рассуждению, которым мы кончили § 2 гл. I: «Всякое рациональное число – действительное. 3 – рациональное число. Следовательно, 3 – действительное число».

Как установить, что это рассуждение верно?

Там мы обещали, что справляться с подобными рассуждениями мы научимся в главе V.

Сначала запишем это рассуждение на «более формальном» языке:

$$(\forall x)[\mathbf{Q}(x) \rightarrow \mathbf{R}(x)] \ \& \ \mathbf{Q}(3) \rightarrow \mathbf{R}(3) .$$

А теперь свяжем с этой записью формулу исчисления $\mathbf{L}$, для чего предикаты метаязыка заменим на предикатные переменные, числовую константу – на предметную переменную, а логические знаки метаязыка на соответствующие буквы алфавита $\mathrm{A}_{\mathbf{L}}$. Получится формула

$$\forall a_1[P_1^{(1)}(a_1) \rightarrow P_2^{(1)}(a_1)] \,\&\, P_1^{(1)}(a_2) \rightarrow P_2^{(1)}(a_2) .$$

Эта формула тождественно-истинна (задача 11). Поэтому естественно считать, что наше рассуждение верно в силу одной своей формы.

ЗАДАЧИ

1) Докажите, что если x не входит свободно в α, то

$$^{\mathrm{U}}\big|\, \exists x(\alpha)\,\big|^{\mathrm{Ш}}_{\mathrm{e}} = {}^{\mathrm{U}}\big|\,\alpha\,\big|^{\mathrm{Ш}}_{\mathrm{e}}.$$

2) Найдите значение формулы

$$\forall a_2 P_{10}^{(2)}(a_2, a_3) \to P_5^{(1)}(a_2),$$

проинтерпретированной на $\mathbf{N}$, относительно списка переменных $P_5^{(1)}$, P_{10}^2, a_2, a_3 на кортеже значений $\lambda x[x$ делится на 3], $\lambda xy[x < y]$, 10, 20.

3) Докажите, что каждая тавтология общезначима.

4) Докажите, что формула (она занимает 2 строки!)

$$\forall a_1 \forall a_2 \forall a_3 [P_1^{(2)}(a_1, a_2) \,\&\, P_1^{(2)}(a_2, a_3) \to P_1^{(2)}(a_1, a_3)]$$
$$\&\, \forall a_1 [\neg P_1^{(2)}(a_1, a_1)] \,\&\, \forall a_1 \exists a_2 [P_1^{(2)}(a_1, a_2)]$$

выполнима, но не конечно-выполнима.

5) Докажите, что формула α тогда и только тогда общезначима, когда общезначимо её замыкание $\forall\alpha$.

6) Для любого $k \in \mathbf{N}$ приведите пример формулы, общезначимой на k-элементных множествах и не общезначимой на $(k + 1)$-элементных множествах.

7) Докажите, что множество тавтологий разрешимо.

8) Докажите, что для любого конечного множества U множество формул, выполнимых (общезначимых) на U, разрешимо.

9) Приведите пример не равносильных формул, равносильных на некотором более чем одноэлементном множестве.

10) Найдите какую-нибудь ПНФ для формул

a) $\forall x\mathrm{P}(x)\ \&\ \exists x\mathrm{Q}(x)$;

b) $\rceil[\forall x\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall x\mathrm{Q}(x)]$;

c) $\forall x\mathrm{P}(x) \vee \forall y\mathrm{Q}(x,y)$.

11) Докажите, что формула

$$\forall a_1[P_1^{(1)}(a_1) \to P_2^{(1)}(a_1)] \& P_1^{(1)}(a_2) \to P_2^{(1)}(a_2)$$

общезначима.

12) Докажите, что формула $\forall x\exists y\mathrm{P}(x, y) \rightarrow \exists y\mathrm{P}(y, y)$ не общезначима. Выполнима ли она?

§ 3. Дедуктика

Схемами аксиом исчисления **L** будут, во-первых, те же 10 схем, что и в **K**:

(Δ_1) $\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1)$

(Δ_2) $[\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3)] \to [(\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3)]$

(Δ_3) $\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2)$

(Δ_4) $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1$

(Δ_5) $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_2$

(Δ_6) $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$

(Δ_7) $\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$

(Δ_8) $(\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3) \to [(\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3) \to (\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3)]$

(Δ_9) $(\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to [(\mathfrak{A}_1 \to \neg\mathfrak{A}_2) \to \neg\mathfrak{A}_1]$

(Δ_{10}) $\neg\neg\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1$

и, во-вторых, 2 специфические аксиомы:

(Δ_{11}) $\forall x(\mathfrak{A}_1) \to \underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner$

(Δ_{12}) $\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner \to \exists x(\mathfrak{A}_1)$

однако, в то время как схемы $\Delta_1 - \Delta_{10}$ являются, так сказать, «безоговорочными» схемами (любые формулы исчисления **L**, построенные по этим схемам, являются аксиомами), формулы исчисления **L**, построенные по схемам Δ_{11}, Δ_{12}, являются – по определению! – аксиомами только при условии $!\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner$.

П р и м е р 1. Формула $\forall x \exists y \mathrm{P}(x, y) \to \exists y \mathrm{P}(y, y)$ аксиомой по схеме Δ_{11} не является. По задаче 12 к § 2 эта формула не общезначима. Между прочим, общезначимая формула $\forall x \forall y \mathrm{P}(x, y) \to \forall y \mathrm{P}(y, y)$, также построенная по схеме Δ_{11}, тоже аксиомой по схеме Δ_{11} не является.

При помощи алгоритма отыскания главного вхождения логического знака в формуле легко построить алгоритм, определяющий, является ли вхождение предметной переменной в формулу свободным или связанным, а вслед за ним и алгоритм, определяющий, выполнено ли условие $!\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\alpha\lrcorner$.

Поэтому требование ДЕ_0 выполнено: *множество аксиом исчисления* **L** *разрешимо* относительно своего естественного универсума.

Очевидно, аксиомы, построенные по схемам $\Delta_1 - \Delta_{10}$, по-прежнему общезначимы.

Докажем, что аксиомы, построенные по схеме Δ_{11}, общезначимы (аналогичное утверждение для схемы Δ_{12} докажите сами).

Итак, пусть условие $!\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\alpha\lrcorner$ выполнено. Докажем, что формула $\forall x(\alpha) \to \underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\alpha\lrcorner$ общезначима.

Допустим, что ${}^{\mathrm{U}}|\forall x(\alpha)|^{\text{Ш}}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{u}$ (Ш – список переменных, нормальный для формулы α). Докажем, что ${}^{\mathrm{U}}|\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\alpha\lrcorner|^{\text{Ш}}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{u}$.

Если x не входит свободно в α, то ${}^{\mathrm{U}}|\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\alpha\lrcorner|^{\text{Ш}}_{\mathrm{e}} = {}^{\mathrm{U}}|\alpha|^{\text{Ш}}_{\mathrm{e}} = {}^{\mathrm{U}}|\forall x(\alpha)|^{\text{Ш}}_{\mathrm{e}}$ (второй переход по задаче 1 к § 2).

Пусть теперь x входит свободно в α.

Если $x \;\overline{\underline{\circ}}\; y$, то ${}^{\mathrm{U}}|\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\alpha\lrcorner|^{\text{Ш}}_{\mathrm{e}} = {}^{\mathrm{U}}|\alpha|^{\text{Ш}}_{\mathrm{e}} = {}^{\mathrm{U}}|\alpha|^{\text{Ш}',x}_{\mathrm{e}',\,a}$ (Ш′ получается выделением x из Ш, e′ – выделением из e значения, сопоставленного x). Поскольку ${}^{\mathrm{U}}|\forall x(\alpha)|^{\text{Ш}}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{u}$, по определению значения квантора общности ${}^{\mathrm{U}}|\alpha|^{\text{Ш}',x}_{\mathrm{e}',\,a} = \boldsymbol{u}$.

Если же, наконец, x и y различны (психологически главный случай!), то ${}^{\mathrm{U}}|\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\alpha\lrcorner|^{\text{Ш}}_{\mathrm{e}} = {}^{\mathrm{U}}|\underline{\mathbf{S}}^x_y\llcorner\alpha\lrcorner|^{\text{Ш}'',y}_{\mathrm{e}'',\,a} = {}^{\mathrm{U}}|\alpha|^{\text{Ш}'',y,x}_{\mathrm{e}'',\,a,a}$ (Ш″ получается из Ш выкидыванием x, если он там был, и выделением y; второй переход проделан по Основной лемме к случаю 2 Семантической теоремы о подстановке). Так как ${}^{\mathrm{U}}|\forall x(\alpha)|^{\text{Ш}}_{\mathrm{e}} = {}^{\mathrm{U}}|\forall x(\alpha)|^{\text{Ш}'',y}_{\mathrm{e}'',\,a}$, по определению значения квантора общности, ${}^{\mathrm{U}}|\alpha|^{\text{Ш}'',y,x}_{\mathrm{e}'',\,a,a} = \boldsymbol{u}$.

В исчислении $\mathbf{L}$ будут 3 правила вывода – модус поненс (МР) и 2 специфических правила: *правило обобщения*

$$\frac{\mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1 \rightarrow \forall x(\mathfrak{A}_2)} \qquad \text{(ПО)}$$

и *правило конкретизации*

$$\frac{\mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_1}{\exists x(\mathfrak{A}_2) \rightarrow \mathfrak{A}_1}. \qquad \text{(ПК)}$$

В обоих правилах ограничение: формула, подставляемая вместо формульной переменной $\mathfrak{A}_1$, не должна свободно содержать x.

Всё-таки приведу хотя бы одно из двух рабочих определений: формула β называется *непосредственным следствием* формулы α *по правилу* ПО (или «формула β *может быть получена* из формулы α *по правилу* ПО»), если существуют формула γ, не содержащая свободно x, формула δ и предметная переменная x такие, что $\alpha \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} \gamma \rightarrow \delta$ и $\beta \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} \gamma \rightarrow \forall x(\delta)$.

Требования $ДЕ_{ПО}$ и $ДЕ_{ПК}$, очевидно, выполнены.

Итак, для исчисления $\mathbf{L}$ выполнены все требования эффективности и, значит, *множество доказательств в исчислении* $\mathbf{L}$ *разрешимо* (относительно своего естественного универсума), а *множество доказуемых формул перечислимо.*

Очень легко проверяется, что все 3 правила вывода сохраняют общезначимость (к этому месту примыкает пример 2 – см. ниже).

Следовательно, наша главная интерпретация на любом (не пустом) множестве – правильная и *любая доказуемая формула общезначима*: $\mathrm{T}_{\mathbf{L}} \subseteq \square_{\mathbf{L}}$.

Об обратном включении мы поговорим в конце параграфа.

П р и м е р 2. Формула $\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{P}(x)$ общезначима, а формула $\mathrm{P}(x) \rightarrow \forall x\mathrm{P}(x)$, очевидно, нет.

Займёмся теоремой о дедукции.

В формулировке, которую она имела в исчислении $\mathbf{K}$, для исчисления $\mathbf{L}$ она, конечно, не верна: по ПО $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{P}(x) \vdash \mathrm{A} \rightarrow \forall x\mathrm{P}(x)$, а формула $[\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{P}(x)] \rightarrow [\mathrm{A} \rightarrow \forall x\mathrm{P}(x)]$, будучи не общезначимой, в исчислении $\mathbf{L}$ не доказуема.

А вот в формулировке, которую она имела в исчислении **K′**, она для исчисления **L** (разумеется, после переформулирования соответствующих определений) верна.

Повторим, модифицируя, определения, данные в гл. II.[i]

Определение *анализа* $\langle P_1, P_2, \ldots, P_n\rangle$ вывода $\langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\rangle$ из списка Γ не меняется.

Компоненты анализа имеют один из 5 видов: Аk – аксиома по схеме Δ_k, Пk – k-ая посылка, МП(m, n) – получено по модус поненс из γ_m и γ_n, ПО(m) – получено по правилу обобщения из γ_m, ПК(m) – получено по правилу конкретизации из γ_m.

Пусть $\langle \gamma_1,\ldots, \gamma_i, \ldots, \gamma_j, \ldots, \gamma_n\rangle$ – вывод из списка Γ с анализом. Мы будем говорить, что формула γ_j *зависит* от формулы γ_i $(i \le j)$ в данном выводе с анализом, если либо $j = i$, либо, согласно данному анализу, γ_j получается по правилу обобщения или по правилу конкретизации из формулы γ_p $(i \le p < j)$, которая зависит от γ_i, либо, наконец, согласно данному анализу, γ_j получается по модус поненс из формул γ_p, γ_q $(i \le p, q < j)$, хотя бы одна из которых зависит от γ_i.

Теорема, которая в гл. II шла после этого определения, остаётся верной в той же формулировке (только, разумеется, речь в ней теперь идёт о выводимости в **L**).

Пусть $\langle \gamma_1,\ldots, \gamma_i, \ldots,\gamma_n\rangle$ – вывод из списка Γ с анализом. Мы будем говорить, что предметная переменная x *варьируется для формулы* γ_i в данном выводе с анализом, если x входит свободно в γ_i и, согласно данному анализу, к какой-то формуле, зависящей от γ_i, применяется правило обобщения или правило конкретизации по x.

Четвёртое определение – *хороший* вывод из списка Γ с анализом – не меняется. Сохраним обозначение $\Gamma \underset{x}{\vdash} \alpha$.

Для доказательства теоремы о дедукции нам понадобится

Д е д у к т и в н а я т е о р е м а о п о д с т а н о в к е. *Если* $\Gamma \underset{\mathbf{K}}{\vdash} \alpha$, *то, каковы бы ни были высказывательные переменные* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ *и формулы* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *исчисления* **L**, $\mathbf{S}^{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}\llcorner\Gamma\lrcorner \underset{\substack{x\\ \mathbf{L}}}{\vdash} \mathbf{S}^{\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}\llcorner\alpha\lrcorner$.

Доказательство – то же, что в § 3 гл. I. Указанный там вывод является хорошим, потому что в нём применяется только модус поненс.

---

[i] Впрочем, первое и четвёртое определения не меняются.

Теорема о дедукции. *Если* $\Gamma, \alpha \underset{x}{\vdash} \beta$, *то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Доказательство. Пусть

$$\langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle \tag{1}$$

– хороший вывод формулы β из списка Γ, α с анализом, существующий по условию (таким образом, $\gamma_n \;\overline{\underline{\;\circ\;}}\; \beta$). Образуем из кортежа (1) вспомогательный кортеж

$$\langle \alpha \to \gamma_1,\ \alpha \to \gamma_2,\ \ldots,\ \alpha \to \gamma_n \rangle \tag{2}$$

(таким образом, $\alpha \to \gamma_n \;\overline{\underline{\;\circ\;}}\; \alpha \to \beta$). Индукцией по длине кортежа (2) докажем, что $(\forall i\colon 1 \le i \le n)[\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_i]$ – тем самым теорема будет доказана.

Базис индукции. Формула γ_1 в кортеже (1) либо 1) является аксиомой исчисления $\mathbf{L}$, либо 2) является одной из формул кортежа Γ, либо 3) является формулой α (мы будем иногда формулу α в этом контексте называть *последней посылкой*).

В случае 1 формулы γ_1 и $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$ доказуемы. Поэтому и формула $\alpha \to \gamma_1$ доказуема. Значит, она выводима из любого кортежа.

В случае 2 формулы γ_1 и $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$ выводимы из Γ. Значит, и формула $\alpha \to \gamma_1$ выводима из Γ.

В случае 3 формула $\alpha \to \alpha$ доказуема, а значит, выводима из любого кортежа.

Индукционный шаг. Допустим, что для некоторого $j < n$ $(\forall i\colon 1 \le i \le j)[\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_i]$. Докажем, что тогда $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_{j+1}$.

Формула γ_{j+1} в кортеже (1) либо удовлетворяет одному из трёх условий, перечисленных выше для формулы γ_1, либо 4) получается по правилу MP из каких-то формул γ_p, $\gamma_q \;\overline{\underline{\;\circ\;}}\; \gamma_p \to \gamma_{j+1}$ $(p, q \le j)$, либо 5) получается по правилу ПО из какой-то формулы γ_p $(p \le j)$, либо 6) получается по правилу ПК из какой-то формулы γ_p $(p \le j)$.

В первых трёх случаях доказательство – как в базисе.

В случае 4 формула

$$[\alpha \to (\gamma_p \to \gamma_{j+1})] \to [(\alpha \to \gamma_p) \to (\alpha \to \gamma_{j+1})]$$

доказуема, а формулы $\alpha \to \gamma_q \stackrel{\circ}{=} \alpha \to (\gamma_p \to \gamma_{j+1})$ и $\alpha \to \gamma_p$, по предположению индукции, выводимы из Г. Значит, и формула $\alpha \to \gamma_{j+1}$ выводима из Г.

В случае 5 пусть $\gamma_p \stackrel{\circ}{=} \eta \to \delta$, $\gamma_{j+1} \stackrel{\circ}{=} \eta \to \forall x(\delta)$ и η не содержит свободно x.

Рассмотрим два варианта: 1) γ_p не зависит ни от какой формулы, входящей в вывод (1) в качестве последней посылки; 2) γ_p зависит от некоторой формулы, входящей в вывод (1) в качестве последней посылки.

1) Поскольку в силу данного анализа γ_{j+1} получается по ПО из γ_p, тогда и γ_{j+1} не зависит ни от какой формулы, входящей в вывод (1) в качестве последней посылки. Так как (1) – вывод из Г, α (здесь всё ещё не важно, что этот вывод – хороший), $\Gamma, \alpha \vdash \gamma_{j+1}$. По теореме, идущей после понятия зависимости в гл. II, $\Gamma \vdash \gamma_{j+1}$. По Дедуктивной теореме о подстановке $\gamma_{j+1} \vdash \alpha \to \gamma_{j+1}$. Значит, $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_{j+1}$.

2) Поскольку γ_p зависит от некоторой формулы, входящей в вывод (1) в качестве последней посылки, а (1) – хороший вывод (единственное место в доказательстве, где это используется!), x не входит свободно в α. По предположению индукции

$$\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_p \stackrel{\circ}{=} \alpha \to (\eta \to \delta).$$

По Дедуктивной теореме о подстановке

$$\alpha \to (\eta \to \delta) \vdash \alpha \,\&\, \eta \to \delta.$$

Поскольку x не входит свободно ни в α, ни в η, применим ПО:

$$\alpha \,\&\, \eta \to \delta \vdash \alpha \,\&\, \eta \to \forall x(\delta).$$

Снова по Дедуктивной теореме о подстановке

$$\alpha \,\&\, \eta \to \forall x(\delta) \vdash \alpha \to (\eta \to \forall x(\delta)) \stackrel{\circ}{=} \alpha \to \gamma_{j+1}.$$

Значит, $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma_{j+1}$.

Рассмотрение случая 6 предоставляю читателю.

Вслед за теоремой о дедукции естественно идёт теорема о введении-удалении.

Теперь она объединяет 14 утверждений (добавились правила введения и удаления обоих кванторов) – 10 прямых правил и 4 правила вспомогательного вывода.

Теорема о введении-удалении

	Введение	Удаление
$\to$	1, 2 $\dfrac{\Gamma,\alpha \underset{x}{\vdash} \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}$	MP $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2 \underset{x}{\vdash} \mathfrak{A}_2$
&	3 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \underset{x}{\vdash} \mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2$	4, 5 $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \underset{x}{\vdash} \mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \underset{x}{\vdash} \mathfrak{A}_2$
$\vee$	6, 7 $\mathfrak{A}_1 \underset{x}{\vdash} \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_2 \underset{x}{\vdash} \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$	8 $\dfrac{\Gamma,\alpha \underset{x}{\vdash} \delta \;\;\&\;\; \Gamma,\beta \underset{x}{\vdash} \delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \delta}$
$\neg$	9 $\dfrac{\Gamma,\alpha \underset{x}{\vdash} \delta \;\;\&\;\; \Gamma,\alpha \underset{x}{\vdash} \neg\delta}{\Gamma \vdash \neg\alpha}$	10 $\neg\neg\mathfrak{A}_1 \underset{x}{\vdash} \mathfrak{A}_1$
$\forall$	ПО $\mathfrak{A}_1 \vdash \forall x(\mathfrak{A}_1)$	11 $\forall x(\mathfrak{A}_1) \underset{x}{\vdash} \underline{\mathbf{S}}^x_y \lfloor \mathfrak{A}_1 \rfloor$
$\exists$	12 $\underline{\mathbf{S}}^x_y \lfloor \mathfrak{A}_1 \rfloor \underset{x}{\vdash} \exists x(\mathfrak{A}_1)$	ПК $\dfrac{\Gamma,\alpha \underset{x}{\vdash} \beta}{\Gamma, \exists x(\alpha) \vdash \beta}$

Докажу для примера правило введения квантора общности.

Для произвольной формулы α и произвольной предметной переменной x я докажу $\alpha \vdash \forall x(\alpha)$.

Пусть β – произвольная аксиома, не содержащая свободно x. Тогда требуемый вывод следующий:

$$\langle \alpha, \alpha \to (\beta \to \alpha), \beta \to \alpha, \beta \to \forall x(\alpha), \beta, \forall x(\alpha) \rangle .$$

Между прочим, утверждение $\alpha \underset{x}{\vdash} \forall x(\alpha)$ не верно: если б оно было верно, то по теореме о дедукции было бы верно $\vdash \alpha \to \forall x(\alpha)$, а формула $\mathrm{P}(x) \to \forall x\mathrm{P}(x)$ не общезначима и, значит, не доказуема.

Разумеется, в соответствии со схемами Δ_{11}, Δ_{12} в правиле удаления квантора общности и в правиле введения квантора существования требуется выполнение условия $!\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner$, а в правиле удаления квантора существования, в соответствии с ПК, требуется, чтобы формула β не содержала свободно переменной x.

При помощи теоремы о введении-удалении доказываются

$$\alpha, \neg\alpha \underset{x}{\vdash} \beta , \tag{3}$$

$$\frac{\alpha \underset{x}{\vdash} \beta}{\neg\beta \vdash \neg\alpha} \ (\textit{закон контрапозиции}) , \tag{4}$$

$$\forall x(\mathfrak{A}_1) \underset{x}{\vdash} \mathfrak{A}_1 , \tag{5}$$

$$\mathfrak{A}_1 \underset{x}{\vdash} \exists x(\mathfrak{A}_1) . \tag{6}$$

и *правило подстановки вместо предметной переменной*:

$$!\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner \ \to \ \mathfrak{A}_1 \vdash \underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner . \tag{7}$$

Правило добавления посылки принимает вид

$$\alpha \underset{x}{\vdash} \beta \to \alpha . \tag{8}$$

К сожалению, наши правила вспомогательного вывода из теоремы о введении-удалении имеют тот недостаток, что выводы, существование которых они доказывают, не могут быть использованы в качестве «вспомогательных выводов» при новом применении какого-нибудь из указанных правил, потому что они утверждают только «выводимы», а не «хорошо выводимы» – они, так сказать, являются «правилами разового пользования».

Чтобы в какой-то мере ослабить этот недостаток, введём ещё одну тройку терминов.

Пусть Ш – список (предметных) переменных. Вывод из списка Γ с анализом назовём Ш–*выводом*, если ни по какой переменной, не входящей в Ш, правила обобщения и конкретизации в нём, согласно данному анализу, не применяются.

Слишком много отрицаний? Может быть, кому-нибудь больше понравится другой вариант: если, согласно данному анализу, правила обобщения и конкретизации применяются в нём разве что по переменным, входящим в Ш.

Предложу даже третий вариант: когда в нём правила обобщения и конкретизации, если, согласно данному анализу, применяются, то только по переменным, входящим в Ш.

Выбирайте – кому как понятнее.

Дальше стандартно определяются остальные члены триады: «Ш–вывод *формулы* α из списка Γ с анализом» и «формула α Ш–*выводима* из списка Γ с анализом».

Тот факт, что формула α Ш–выводима из списка Γ, мы будем обозначать через $\Gamma \overset{\text{ш}}{\vdash} \alpha$.

Рассмотрим отдельно крайний случай, когда Ш $\mathrel{\overline{\underline{\circ}}}$ Λ (Ш – пустой список).

Возможно, смысл термина «Λ–вывод» можно вывести и из общего определения, но я предпочту сформулировать это определение отдельно.

Вывод из списка Γ с анализом назовём Λ–*выводом* [i], если правила обобщения и конкретизации в нём, согласно данному анализу, не применяются.

Обозначение $\Gamma \overset{\Lambda}{\vdash} \alpha$, пожалуй, можно отдельно не объяснять.

Если $\Gamma \overset{\text{ш}}{\vdash} \alpha$ и $\alpha \overset{\text{щ}}{\vdash} \beta$, то, очевидно, $\Gamma \overset{\text{ш, щ}}{\vdash} \beta$ [ii].

---

[i] Увы, читать это, вероятно, придётся «пусто–выводом».

[ii] Здесь, конечно же, предполагается, что в списке Ш,Щ из Щ удалены буквы, входящие в Ш.

Если $\Gamma \overset{Ш}{\vdash} \alpha$ и $Ш \subseteq Щ$ [i], то $\Gamma \overset{Щ}{\vdash} \alpha$.

Отсюда вытекает, что если $\Gamma \overset{\Lambda}{\vdash} \alpha$, то для любого списка Ш $\Gamma \overset{Ш}{\vdash} \alpha$.

Нам очень полезным будет простенькое утверждение, связывающее понятия этой и предыдущей тройки: если $\Gamma \overset{\Lambda}{\vdash} \alpha$, то $\Gamma \underset{X}{\vdash} \alpha$. [ii]

Закончим перечень этих тривиальных утверждений «рисунком»

$$\Gamma \overset{\Lambda}{\vdash} \alpha \ \rightarrow \ \Gamma \overset{Ш}{\vdash} \alpha \ \rightarrow \ \Gamma \vdash \alpha .$$

Апеллируя именно к этому рисунку, мы будем иногда говорить «это – самое сильное утверждение» (имея в виду $\Gamma \overset{\Lambda}{\vdash} \alpha$), «это – более слабое утверждение» ($\Gamma \vdash \alpha$, чем $\Gamma \overset{Ш}{\vdash} \alpha$) и т. д.

Весь этот огород мы городили ради новой формулировки теоремы о дедукции и теоремы о введении-удалении.

Но сначала в слегка изменённой форме

Дедуктивная теорема о подстановке (вторая формулировка). *Если* $\Gamma \underset{K}{\vdash} \alpha$, *то, каковы бы ни были высказывательные переменные* $X_1, \ldots, X_n$ *и формулы* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *исчисления* **L**, $\mathbf{S}^{X_1,\ldots,X_n}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n} \llcorner \Gamma \lrcorner \ \overset{\Lambda}{\underset{L}{\vdash}} \ \mathbf{S}^{X_1,\ldots,X_n}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n} \llcorner \alpha \lrcorner$.

Теорема о дедукции (вторая формулировка). *Если* $\Gamma, \alpha \overset{Ш}{\underset{X}{\vdash}} \beta$ [iii], *то* $\Gamma \overset{Ш}{\vdash} \alpha \rightarrow \beta$.

Доказательство. Пусть

$$\langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \rangle \tag{9}$$

– хороший Ш–вывод формулы β из списка Γ, α с анализом, существующий по условию (таким образом, $\gamma_n \ \overline{\underline{\circ}}\ \beta$). Образуем из кортежа (9) вспомогательный кортеж

---

[i] Т. е. каждая переменная из Ш входит и в Щ.

[ii] Между прочим, обратное не верно (задача 2).

[iii] Читается это «хорошо Ш–выводима», а означает это, очевидно, что существует вывод, являющийся одновременно хорошим выводом и Ш–выводом.

$$\langle \alpha \to \gamma_1,\ \alpha \to \gamma_2,\ \ldots,\ \alpha \to \gamma_n \rangle \tag{10}$$

(таким образом, $\alpha \to \gamma_n \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \alpha \to \beta$). Индукцией по длине кортежа (10) докажем, что $(\forall i\colon 1 \le i \le n)[\,\Gamma \overset{\text{ш}}{\vdash} \alpha \to \gamma_i]$ – тем самым теорема будет доказана.

Базис индукции. Формула γ_1 в кортеже (9) либо 1) является аксиомой исчисления $\mathbf{L}$, либо 2) является одной из формул кортежа Γ, либо 3) является формулой α (мы будем иногда формулу α в этом контексте называть *последней посылкой*).

В случае 1 формулы γ_1 и $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$ доказуемы без ПО и ПК. Поэтому и формула $\alpha \to \gamma_1$ доказуема без ПО и ПК. Значит, она Λ–выводима (а следовательно, и Ш–выводима) из любого кортежа.

В случае 2 формулы γ_1 и $\gamma_1 \to (\alpha \to \gamma_1)$ Ш–выводимы из Г. Значит, и формула $\alpha \to \gamma_1$ Ш–выводима из Г.

В случае 3 формула $\alpha \to \alpha$ доказуема без ПО и ПК, а значит, Ш–выводима из любого кортежа.

Индукционный шаг. Допустим, что для некоторого $j < n$ $(\forall i\colon 1 \le i \le j)[\,\Gamma \overset{\text{ш}}{\vdash} \alpha \to \gamma_i]$. Докажем, что тогда $\Gamma \overset{\text{ш}}{\vdash} \alpha \to \gamma_{j+1}$.

Формула γ_{j+1} в кортеже (9) либо удовлетворяет одному из трёх условий, перечисленных выше для формулы γ_1, либо 4) получается по правилу MP из каких-то формул γ_p, $\gamma_q \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \gamma_p \to \gamma_{j+1}$ $(p, q \le j)$, либо 5) получается по правилу ПО из какой-то формулы γ_p $(p \le j)$, либо 6) получается по правилу ПК из какой-то формулы γ_p $(p \le j)$.

В первых трёх случаях доказательство – как в базисе.

В случае 4 формула

$$[\alpha \to (\gamma_p \to \gamma_{j+1})] \to [(\alpha \to \gamma_p) \to (\alpha \to \gamma_{j+1})]$$

доказуема без ПО и ПК, а формулы $\alpha \to \gamma_q \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \alpha \to (\gamma_p \to \gamma_{j+1})$ и $\alpha \to \gamma_p$, по предположению индукции, Ш–выводимы из Г. Значит, и формула $\alpha \to \gamma_{j+1}$ Ш–выводима из Г.

В случае 5 пусть $\gamma_p \circeq \eta \to \delta$, $\gamma_{j+1} \circeq \eta \to \forall x(\delta)$ и η не содержит свободно x. Поскольку вывод (1) является Ш–выводом, $x \in$ Ш.

Рассмотрим 2 варианта: 1) γ_p не зависит ни от какой формулы, входящей в вывод (9) в качестве последней посылки; 2) γ_p зависит от некоторой формулы, входящей в вывод (9) в качестве последней посылки.

1) Поскольку в силу данного анализа γ_{j+1} получается по ПО из γ_p, тогда и γ_{j+1} не зависит ни от какой формулы, входящей в вывод (9) в качестве последней посылки. Так как (9) – Ш–вывод из Γ, α (здесь всё ещё не важно, что этот вывод – хороший), $\Gamma, \alpha \overset{\text{Ш}}{\vdash} \gamma_{j+1}$. По теореме, идущей после понятия зависимости в гл. II, $\Gamma \overset{\text{Ш}}{\vdash} \gamma_{j+1}$. По Дедуктивной теореме о подстановке (вторая формулировка) $\gamma_{j+1} \overset{\wedge}{\vdash} \alpha \to \gamma_{j+1}$. Значит, $\Gamma \overset{\text{Ш}}{\vdash} \alpha \to \gamma_{j+1}$.

2) Поскольку γ_p зависит от некоторой формулы, входящей в вывод (9) в качестве последней посылки, а (1) – хороший вывод (единственное место в доказательстве, где это используется!), x не входит свободно в α. По предположению индукции

$$\Gamma \overset{\text{Ш}}{\vdash} \alpha \to \gamma_p \circeq \alpha \to (\eta \to \delta).$$

По той же Дедуктивной теореме о подстановке

$$\alpha \to (\eta \to \delta) \overset{\wedge}{\vdash} \alpha \,\&\, \eta \to \delta .$$

Поскольку x не входит свободно ни в α, ни в η, применим ПО:

$$\alpha \,\&\, \eta \to \delta \overset{x}{\vdash} \alpha \,\&\, \eta \to \forall x(\delta) .$$

Снова по Дедуктивной теореме о подстановке

$$\alpha \,\&\, \eta \to \forall x(\delta) \overset{\wedge}{\vdash} \alpha \to (\eta \to \forall x(\delta)) \circeq \alpha \to \gamma_{j+1} .$$

Значит, в первый момент $\Gamma \overset{\text{Ш}, x}{\vdash} \alpha \to \gamma_{j+1}$. Но $x \in$ Ш. Следовательно, $\Gamma \overset{\text{Ш}}{\vdash} \alpha \to \gamma_{j+1}$.

Рассмотрение случая 6 предоставляю читателю.

Т е о р е м а о в в е д е н и и - у д а л е н и и (вторая формулировка)

	Введение	Удаление
$\to$	1, 2 $\dfrac{\Gamma,\alpha \overset{\text{ш}}{\underset{\times}{\vdash}} \beta}{\Gamma \overset{\text{ш}}{\vdash} \alpha \to \beta}$	MP $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2 \overset{\wedge}{\vdash} \mathfrak{A}_2$
&	3 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \overset{\wedge}{\vdash} \mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2$	4, 5 $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \overset{\wedge}{\vdash} \mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \overset{\wedge}{\vdash} \mathfrak{A}_2$
$\vee$	6, 7 $\mathfrak{A}_1 \overset{\wedge}{\vdash} \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_2 \overset{\wedge}{\vdash} \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$	8 $\dfrac{\Gamma,\alpha \overset{\text{ш}}{\underset{\times}{\vdash}} \delta \quad \& \quad \Gamma,\beta \overset{\text{ш}}{\underset{\times}{\vdash}} \delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta \overset{\text{ш ш}}{\underset{\times}{\vdash}} \delta}$
$\neg$	9 $\dfrac{\Gamma,\alpha \overset{\text{ш}}{\underset{\times}{\vdash}} \delta \quad \& \quad \Gamma,\alpha \overset{\text{ш}}{\underset{\times}{\vdash}} \neg\delta}{\Gamma \overset{\text{ш ш}}{\underset{\times}{\vdash}} \neg\alpha}$	10 $\neg\neg\mathfrak{A}_1 \overset{\wedge}{\vdash} \mathfrak{A}_1$
$\forall$	ПО $\mathfrak{A}_1 \overset{x}{\vdash} \forall x(\mathfrak{A}_1)$	11 $\forall x(\mathfrak{A}_1) \overset{\wedge}{\vdash} \underline{\mathbf{S}}^{x}_{y} \lfloor \mathfrak{A}_1 \rfloor$
$\exists$	12 $\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y} \lfloor \mathfrak{A}_1 \rfloor \overset{\wedge}{\vdash} \exists x(\mathfrak{A}_1)$	ПК $\dfrac{\Gamma,\alpha \overset{\text{ш}}{\underset{\times}{\vdash}} \beta}{\Gamma, \exists x(\alpha) \overset{\text{ш}, x}{\vdash} \beta}$

Разумеется, снова в правиле удаления квантора общности и в правиле введения квантора существования требуется выполнение условия $!\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner$, а в правиле удаления квантора существования требуется, чтобы формула β не содержала свободно переменной x.

Следствия из теоремы о введении-удалении (вторая формулировка) верны в более сильной форме:

$$\alpha, \neg\alpha \overset{\Lambda}{\vdash} \beta, \tag{11}$$

$$\frac{\alpha \overset{\text{ш}}{\underset{x}{\vdash}} \beta}{\neg\beta \overset{\text{ш}}{\vdash} \neg\alpha} \ (\textit{закон контрапозиции}), \tag{12}$$

$$\forall x(\mathfrak{A}_1) \overset{\Lambda}{\vdash} \mathfrak{A}_1, \tag{13}$$

$$\mathfrak{A}_1 \overset{\Lambda}{\vdash} \exists x(\mathfrak{A}_1) \tag{14}$$

и *правило подстановки вместо предметной переменной*:

$$!\underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner \ \to \ \mathfrak{A}_1 \overset{x}{\vdash} \underline{\mathbf{S}}^x_y \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner. \tag{15}$$

Правило добавления посылки принимает вид

$$\alpha \overset{\Lambda}{\vdash} \beta \to \alpha. \tag{16}$$

П р и м е р 3. Докажем $\alpha \to \beta \overset{x}{\vdash} \exists x(\alpha) \to \exists x(\beta)$.

Э в р и с т и к а. В качестве предпоследнего шага естественно взять $\alpha \to \beta, \exists x(\alpha) \overset{x}{\vdash} \exists x(\beta)$, потому что любой x–вывод из $\alpha \to \beta, \exists x(\alpha)$ будет хорошим, так как формула $\exists x(\alpha)$ («последняя посылка») не содержит x свободно; значит, можно будет применить теорему о дедукции. К намеченному предпоследнему шагу видны 2 пути (рис. 11): можно прийти к нему от $\alpha \to \beta, \exists x(\alpha) \overset{x}{\vdash} \beta$, применив (14), а можно – от $\alpha \to \beta, \alpha \overset{\Lambda}{\vdash} \exists x(\beta)$, применив правило удаления квантора существования. Правда, не видно, как прийти к $\alpha \to \beta, \exists x(\alpha) \overset{x}{\vdash} \beta$ – прийти к нему от $\alpha \to \beta, \alpha \overset{\Lambda}{\vdash} \beta$ по правилу удаления квантора существования, к сожалению, нельзя, потому что формула β вполне может содержать x свободно[i]. А вот прийти к $\alpha\to\beta,\ \alpha \overset{\wedge}{\vdash} \exists x(\beta)$ от того же $\alpha\to\beta,\ \alpha \overset{\wedge}{\vdash} \beta$ по (14) можно.

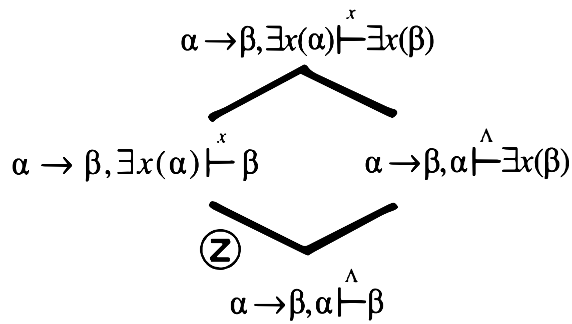


Рис. 11

Доказательство. По правилу удаления импликации $\alpha\to\beta,\ \alpha \overset{\wedge}{\vdash} \beta$. По (14) $\alpha\to\beta,\ \alpha \overset{\wedge}{\vdash} \exists x(\beta)$. По правилу удаления квантора существования $\alpha\to\beta,\ \exists x(\alpha) \overset{x}{\vdash} \exists x(\beta)$. По теореме о дедукции $\alpha\to\beta \overset{x}{\vdash} \exists x(\alpha)\to\exists x(\beta)$.

Введём снова синтаксическое сокращение:

$$\alpha \rightleftarrows \beta \ \underset{Df}{\overset{\circ}{=}}\ (\alpha\to\beta)\ \&\ (\beta\to\alpha)\,.$$

Формулу $\alpha \rightleftarrows \beta$ мы по-прежнему будем называть *эквиваленцией* формул α и β. Назовём формулы α и β *дедуктивно эквивалентными* (в исчислении **L**), если их эквиваленция доказуема (в **L**).

Легко проверяется, что если две формулы исчисления **L** дедуктивно эквивалентны, то они дедуктивно равны.

Однако, в отличие от исчисления **K**, обратное не верно.

[i] Именно это и указывает на рис. 11 «знак опасного поворота».

Пример 4. Формулы $P(x)$ и $P(y)$ дедуктивно равны (правило подстановки вместо предметной переменной), но не дедуктивно эквивалентны (формула $P(x) \to P(y)$ не общезначима).

Пример 5. Для любой формулы α формулы α и $\forall\alpha$ дедуктивно равны (правила введения и удаления квантора общности), но, вообще говоря, не дедуктивно эквивалентны (формула $P(x) \to \forall x\, P(x)$ не общезначима).

Отношение дедуктивной эквивалентности на множестве $\mathfrak{F}'_L$ тоже является отношением эквивалентности.

Утверждение $\alpha \rightleftarrows \beta \vdash \mathbf{R}_\beta^{<\alpha,\, n>}\llcorner\gamma\lrcorner \rightleftarrows \gamma$ верно для любых формул α, β, γ. «Самое сильное» утверждение $\alpha \rightleftarrows \beta \overset{\wedge}{\vdash} \mathbf{R}_\beta^{<\alpha,\, n>}\llcorner\gamma\lrcorner \rightleftarrows \gamma$ для некоторых формул α, β, γ не верно (пример подыщите сами). Верно, однако, некое «промежуточное» утверждение.

Дедуктивная теорема о замене. *Для формул* α, β, γ

$$\alpha \rightleftarrows \beta \overset{\text{Ш}}{\vdash} \mathbf{R}_\beta^{<\alpha,\, n>}\llcorner\gamma\lrcorner \rightleftarrows \gamma,$$

где Ш *– список переменных, принадлежащих какому-нибудь квантору в* γ, *в области действия которого находится отмеченное вхождение формулы* α.

Доказывается совершенно так же, как в **K**. К 7 леммам, которые были нужны там, добавятся ещё 2 леммы ($\lambda \;\underline{\underline{\circ}}\; \forall$ или $\lambda \;\underline{\underline{\circ}}\; \exists$):

$$\alpha \rightleftarrows \beta \overset{x}{\vdash} \lambda x(\alpha) \rightleftarrows \lambda x(\beta).$$

Пример 6. Утверждение

$$\forall x P(x) \rightleftarrows \forall x Q(x) \overset{\wedge}{\vdash} [\forall x P(x) \to A] \rightleftarrows [\forall x Q(x) \to A]$$

следует из только что сформулированной теоремы. С другой стороны, его можно вывести из утверждения

$$B \rightleftarrows C \vdash [B \to A] \rightleftarrows [C \to A],$$

вытекающего из Дедуктивной теоремы о замене для исчисления **K**, и Дедуктивной теоремы о подстановке для исчисления **L**. Утверждение

$$P(x) \rightleftarrows Q(x) \overset{x}{\vdash} \forall x[P(x) \to A] \rightleftarrows \forall x[Q(x) \to A]$$

тоже следует из только что сформулированной теоремы, а вторым способом его доказать нельзя.

Докажем, что *конгруэнтные формулы дедуктивно эквивалентны*

$$\alpha \ \mathrm{con}\ \beta \ \boxed{\to}\ \vdash \alpha \rightleftarrows \beta .$$

Из Дедуктивной теоремы о замене вытекает

Лемма 1. $\vdash \alpha \rightleftarrows \beta \ \to\ \vdash \gamma \rightleftarrows \mathbf{R}_{\beta}^{<\alpha,\, n>}\llcorner \gamma \lrcorner$.

Очень легко доказывается (формальное доказательство каждой импликации состоит всего из двух формул)

Лемма 2. *Если переменная* y *не входит в формулу* α, *то* $\vdash \rtimes x(\alpha) \rightleftarrows \rtimes y(\, \underline{\mathbf{S}}^{x}_{y} \llcorner \alpha \lrcorner\,)$.

Пусть $\rtimes_1 u_1, \dots , \rtimes_r u_r$ – выписанные слева направо <u>все</u> кванторы формулы α с прикванторными переменными (среди них вполне могут быть одинаковые переменные), а $\rtimes_1 v_1, \dots , \rtimes_r v_r$ – выписанные слева направо <u>все</u> кванторы формулы β с прикванторными переменными (напоминаю, что α con β).

Пусть $w_1, \dots , w_r$ – <u>различные</u> переменные, не входящие ни в α, ни в β.

Пусть формула γ получается из формулы α заменой на w_j всех вхождений переменной u_j, связанных квантором $\rtimes_j$ $(1 \le j \le r)$.

При замене в формуле β на w_j всех вхождений переменной v_j, связанных квантором $\rtimes_j$ $(1 \le j \le r)$, из конгруэнтной формулы β получится та же формула γ.

По леммам 1, 2 $\vdash \alpha \rightleftarrows \gamma$ и $\vdash \beta \rightleftarrows \gamma$. Значит, $\vdash \alpha \rightleftarrows \beta$.

Сохраняют и формулировку, и доказательство (соответствующие определения мы дали в § 2)

Дедуктивный закон двойственности. *Если безимпликативные формулы* α *и* β *дедуктивно эквивалентны, то и двойственные формулы* α^*, β^* *тоже дедуктивно эквивалентны.*

Основная лемма (для Дедуктивного закона двойственности). *Если* α – *безимпликативная формула, то* $\vdash \alpha^* \rightleftarrows \urcorner(\alpha^{\urcorner})$.

Мы уже отмечали, что $\mathrm{T}_{\mathbf{L}} \subseteq \square_{\mathbf{L}}$.

Следовательно, исчисление **L** непротиворечиво относительно отрицания – не существует такой формулы α, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \urcorner\alpha$.

Однако оно не является полным относительно отрицания – к его аксиомам можно добавлять некоторые не доказуемые формулы и расширенное исчисление будет оставаться непротиворечивым относительно отрицания.

Например, если к его аксиомам добавить такую не общезначимую (и, значит, не доказуемую) формулу α, не имеющую свободных предметных переменных, для которой формула $\urcorner\alpha$ тоже не общезначима (примеры таких формул: A_1, $\forall a_1 \mathrm{P}(a_1)$), то полученное расширенное исчисление $\mathbf{L}^{[+\alpha]}$ останется непротиворечивым относительно отрицания.

В самом деле, допустим, что $\vdash_{\mathbf{L}^{[+\alpha]}} \beta$ и $\vdash_{\mathbf{L}^{[+\alpha]}} \urcorner\beta$. Тогда $\alpha \vdash_{\mathbf{L}} \beta$ и $\alpha \vdash_{\mathbf{L}} \urcorner\beta$. Поскольку α не имеет свободных предметных переменных, $\alpha \vdash_{\overset{\mathsf{x}}{\mathbf{L}}} \beta$ и $\alpha \vdash_{\overset{\mathsf{x}}{\mathbf{L}}} \urcorner\beta$. По правилу введения отрицания $\vdash_{\mathbf{L}} \urcorner\alpha$., а это противоречит тому, что $\urcorner\alpha$ не общезначима.

Между прочим, то, что исчисление **L** не является полным относительно отрицания, – не недостаток его, а его достоинство: именно по этой причине на логической базе этого исчисления можно, добавляя те или иные аксиомы, строить разные математические исчисления. В гл. VIII мы подробно разберём один пример.

В 1930 г. Куртом Гёделем (K.Gödel) [i] была доказана

Теорема о полноте (исчисления **L**). *Любая тождественно-истинная формула* (исчисления **L**) *доказуема* (в этом исчислении):

$$\square_{\mathbf{L}} \subseteq \mathrm{T}_{\mathbf{L}}.$$

---

[i] Он жил тогда в Австрии. В 1938 г. переехал в США.

Вот что говорится по поводу этой теоремы в книге [12]:
«/…/ знаменитая *теорема Гёделя о полноте* утверждает, что все истинные формулы логики предикатов первого порядка, т. е. все законы элементарной логики предикатов, могут быть порождены некоторым исчислением; именно в этом – суть теоремы. С чисто математической точки зрения конкретное построение такого обладающего «свойством полноты» исчисления имеет уже второстепенное значение (удовлетворяющих условию теоремы полных исчислений – бесконечное количество). (С точки зрения истории науки представляет интерес тот факт, что полное исчисление предикатов было угадано логиками за несколько десятилетий до теоремы Гёделя.)» (с. 51). [5]

Эта теорема показала, что узкое исчисление предикатов (например, исчисление **L**) является той логической системой, на базе которой можно формализовывать математику.

ЗАДАЧИ

1) По правилу введения квантора общности $(\forall\alpha\in\mathfrak{F}_L)[\alpha\overset{x}{\vdash}\forall x(\alpha)]$.

Опровергните утверждение $(\forall\alpha\in\mathfrak{F}_L)[\alpha\overset{\Lambda}{\vdash}\forall x(\alpha)]$.

2) По правилу введения квантора общности $A_1\overset{a_1}{\vdash}\forall a_1(A_1)$. Поскольку A_1 не содержит a_1 свободно (и вообще не содержит никаких предметных переменных), отсюда $A_1\underset{x}{\vdash}\forall a_1(A_1)$.

Опровергните утверждение $A_1\overset{\Lambda}{\vdash}\forall a_1(A_1)$.

3) Опровергните утверждение $(\forall\alpha\in\mathfrak{F}_L)[\exists x(\alpha)\vdash\alpha]$.

4) Опровергните утверждение $\forall x\exists y P(x, y)\vdash\exists y P(y, y)$.

5) Докажите утверждение $\forall x\forall y P(x, y)\vdash\exists y P(y, y)$.

6) Не используя теоремы о полноте, докажите, что следующие формулы дедуктивно эквивалентны:

a) $\forall x \forall y\,(\alpha)$ и $\forall y \forall x(\alpha)$;

b) $\exists x(\alpha \to \beta)$ и $\forall x(\alpha) \to \exists x(\beta)$;

c) $\rceil \forall x(\alpha)$ и $\exists x \rceil (\alpha)$;

d) $\rceil \exists x(\alpha)$ и $\forall x \rceil (\alpha)$.

ГЛАВА VI

ИСЧИСЛЕНИЕ M

Можно строить исчисление **M**[6] на алфавите исчисления **L**.

При таком подходе у этих исчислений будут одинаковый алфавит, одинаковые формулы, одинаковая синтактика.

Различия начнутся с семантики.

Одну из двухместных предикатных переменных, например $P_1^{(2)}$, мы будем использовать как предикатную постоянную – при интерпретации на любом не пустом множестве U мы будем интерпретировать её как предикат равенства: при $b_1 \neq b_2$

$$^{\mathrm{U}}\Big|\, P_1^{(2)}(b_1,\, b_2)\,\Big|_{u_1, u_2}^{b_1, b_2} = \begin{cases} \boldsymbol{u}, \text{ если } & u_1 = u_2 \\ \boldsymbol{л}, \text{ если } & u_1 \neq u_2 \end{cases}$$

$$^{\mathrm{U}}\Big|\, P_1^{(2)}(b, b)\,\Big|_{u}^{b} = \boldsymbol{u}.$$

В этом случае предикацию $P_1^{(2)}(b_1, b_2)$ принято называть *равенством* и вместо $P_1^{(2)}(b_1, b_2)$ писать $b_1 = b_2$.

Часто поступают по-другому – добавляют в алфавит исчисления **L** букву = и меняют (расширяют) определение формулы: слова $b_1 = b_2$ относят к формулам и тоже называют *равенствами.* [i]

При этом подходе $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}} \subset \mathfrak{F}_{\mathrm{M}}$.

Назовём формулу исчисления **M** *эквациональной* [ii], если она не содержит ни предикатных, ни высказывательных переменных.

---

[i] Исчисление **M** называют исчислением предикатов *с равенством.*

[ii] От английского слова equational (выравненный).

Назовём формулу *смешанной*, если она содержит знак равенства и предикатную или высказывательную переменную.

Множество $\mathfrak{F}_{\mathrm{M}}$ является объединением трёх не пересекающихся подмножеств – множества $\mathfrak{F}_{\mathrm{L}}$, множества эквациональных формул и множества смешанных формул.

В исчислении **M** впервые появляются формулы, которые при интерпретации являются не высказывательными формами, а высказываниями – в исчислениях **K** и **L** таких формул не было. Это – эквациональные формулы, которые не содержат свободных предметных переменных. Назовём такие формулы *замкнутыми*. Обозначим множество замкнутых формул через $\mathfrak{F}_{\mathrm{M}}^{\text{з}}$ (рис. 12).

Рис.12

Значение замкнутой формулы α при интерпретации на множестве U обозначим просто через ${}^{\mathrm{U}}|\alpha|$. Итак,

$${}^{\mathrm{U}}|\alpha| = {}^{\mathrm{U}}|\alpha|_{\Lambda}^{\Lambda} = {}^{\mathrm{U}}|\alpha|_{e}^{\text{Ш}}$$

(любой список переменных Ш является нормальным для любой замкнутой формулы).

Для замкнутых формул к терминам «тождественно-истинная (общезначимая) на множестве U», «выполнимая на множестве U», «тождественно-ложная на множестве U» из § 2 гл. V естественно добавить термины «истинная на множестве U» и «ложная на множестве U».

Замкнутую формулу α назовем *истинной на множестве* U, если ${}^{\mathrm{U}}|\alpha| = \boldsymbol{u}$. Аналогично определяется второй термин.

П р и м е р 1. Формула $\forall a_1 \forall a_2 [a_1 = a_2]$ истинна на одноэлементных множествах и ложна на любых других множествах.

Замкнутые формулы естественно распадаются на 3 группы – 1) формулы, для которых $(\forall \mathrm{U})[\,{}^{\mathrm{U}}|\alpha| = \boldsymbol{u}]$; 2) формулы, для которых

$(\forall U)[{}^{U}|\alpha| = \text{л}]$, и 3) формулы, для которых $(\exists U)[{}^{U}|\alpha| = \boldsymbol{u}]$ и $(\exists U)[{}^{U}|\alpha| = \text{л}]$.

Пример 2. Формула $\exists a_1 \exists a_2[a_1 = a_2]$ принадлежит к первой группе, формула $\forall a_1 \forall a_2[a_1 \neq a_2]$ – ко второй[i], формула $\forall a_1 \forall a_2[a_1 = a_2]$ – к третьей.

Для замкнутых формул естественным является определение «замкнутая формула α называется *истинной*, если она истинна на любом множестве».

Для термина «ложная (замкнутая) формула», мне кажется, такой однозначной естественности нет. С разных точек зрения мне кажутся одинаково естественными 2 варианта: «замкнутая формула α называется *ложной*, если она ложна на <u>любом</u> множестве» (при таком определении формула α ложна тогда и только тогда, когда формула $\urcorner\alpha$ истинна) и «замкнутая формула α называется *ложной*, если она ложна на <u>некотором</u> множестве» (при таком определении формула α ложна тогда и только тогда, когда не является истинной).

Ясно, что замкнутая формула α истинна тогда и только тогда, когда она тождественно-истинна[ii].

Конечно же, как и в исчислении **L**, если множества U и V равномощны, то формула тогда и только тогда общезначима (выполнима, истинна, ложна) на U, когда она общезначима (выполнима, истинна, ложна) на V.

Однако, в отличие от **L**, в **M** выполнимость на надмножества не переносится (см. задачу 1 ниже).

По-другому формулируется для **M** и

Теорема Лёвенгейма. *Если формула выполнима, то она выполнима на некотором не пустом подмножестве множества* **N**. (Альтернативная формулировка: *Если формула общезначима на любом не пустом подмножестве множества* **N**, *то она общезначима*.)

Существует выполнимая, но не конечно-выполнимая формула исчисления **M** (она принадлежит к $\mathfrak{F}_L$ – задача 4 к § 2 гл. V).

---

[i] $b_1 \neq b_2$ – сокращение для $\urcorner(b_1 = b_2)$.

[ii] Термины «тождественно-истинна (общезначима)», «конечно-общезначима», «выполнима», «конечно-выполнима», «тождественно-ложна» переносятся из § 2 гл. V без изменений.

Можно доказать, что такой (выполнимой, но не конечно-выполнимой). <u>эквациональной</u> формулы не существует.

В § 2 гл. V было указано, что множество $\square_{\mathbf{L}}$ не разрешимо относительно своего естественного универсума $\mathfrak{F}_{\mathbf{L}}$. Поскольку $\mathfrak{F}_{\mathbf{L}}$ разрешимо относительно $\mathfrak{F}_{\mathbf{M}}$ («посмотри, нет ли в формуле знака равенства!»), а $\square_{\mathbf{L}} = \square_{\mathbf{M}} \cap \mathfrak{F}_{\mathbf{L}}$, из предположения о разрешимости $\square_{\mathbf{M}}$ относительно $\mathfrak{F}_{\mathbf{M}}$ вытекала бы сначала разрешимость $\square_{\mathbf{L}}$ относительно $\mathfrak{F}_{\mathbf{M}}$, а потом разрешимость $\square_{\mathbf{L}}$ относительно $\mathfrak{F}_{\mathbf{L}}$ (рис. 13) – противоречие с теоремой Чёрча. Итак, множество $\square_{\mathbf{M}}$ не разрешимо относи-

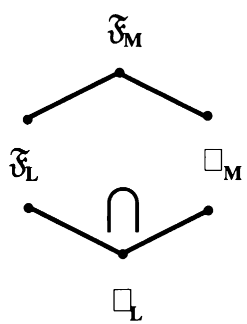


Рис. 13

тельно своего естественного универсума $\mathfrak{F}_{\mathbf{M}}$.

Поговорим, наконец, о дедуктике.

В исчислении **M** будут те же 3 правила вывода, что и в **L**.

К 12 схемам аксиом исчисления **L** будут добавлены (уже в этот момент, даже не дочитав фразу до конца, можно заключить, что в исчислении **M** будут верны теорема о дедукции и вообще вся теорема о введении-удалении) одна схема аксиом

$$(\Delta)\quad y = z \to (\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y} \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner \to \underline{\mathbf{S}}^{x}_{z} \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner\,)$$

(формула, построенная по схеме Δ, является, по определению, аксиомой, если обе подстановки допустимы: $!\underline{\mathbf{S}}_y^x \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner$ и $!\underline{\mathbf{S}}_z^x \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner$) и одна аксиома

$$(\delta)\quad a_1 = a_1.$$

Требование $ДЕ_0$ по-прежнему выполнено.

Значит, все требования эффективности выполнены.

Аксиомы, построенные по схеме Δ, общезначимы (задача 2) и аксиома δ общезначима. Значит, *доказуемые формулы общезначимы.*

Обратное утверждение тоже верно[i].

ЗАДАЧИ

1) Напишите формулу исчисления **M**, выполнимую на двухэлементных множествах и только на них.

2) Докажите, что аксиомы, построенные по схеме Δ, общезначимы.

3) Докажите, что условие $!\underline{\mathbf{S}}_y^x \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner$ и $!\underline{\mathbf{S}}_z^x \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner$ необходимо для общезначимости аксиом, построенных по схеме Δ.

4) Напишите формальное доказательство формулы $a_3 = a_3$. П р е д у п р е ж д е н и е . Это не то же самое, что «Докажите утверждение $\vdash a_3 = a_3$».

5) Докажите утверждение $\vdash a_3 = a_5 \rightarrow a_5 = a_3$.

6) Докажите утверждение $\vdash a_3 = a_5 \;\&\; a_5 = a_7 \rightarrow a_3 = a_7$.

[i] Оно вытекает из более общей формулировки теоремы Гёделя о полноте (для класса исчислений, в который входят как исчисление **L**, так и исчисление **M**).

Б. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

Так называют исчисления, формализующие понятия доказуемости и выводимости в том или ином разделе математики.

Опишем «типовое» математическое исчисление [i].

ГЛАВА VII

ИСЧИСЛЕНИЕ И

§ 1. Синтактика

Алфавит математического исчисления делится обычно на «универсальную» (общую для всех математических исчислений) и «индивидуальную» части.

В «универсальную» часть входят *предметные переменные*

$$a_1, a_2, a_3, \dots , \tag{1}$$

связки $\urcorner$ $\&$ $\vee$ $\rightarrow$, *кванторы* $\forall$ $\exists$, *скобки* ( ), *знак равенства* = и *запятая* « , » [ii].

«Индивидуальная» часть задаётся тройкой кортежей

$$\Omega = \langle\langle P_1^{(s_1)}, \dots, P_k^{(s_k)}\rangle, \langle f_1^{(t_1)}, \dots, f_l^{(t_l)}\rangle, \langle b_1, \dots, b_m\rangle\rangle$$
$$(k \geq 0,\ l \geq 0,\ m \geq 0,\ k + l > 0)$$

предикатных, функциональных и предметных постоянных. Эту тройку называют *сигнатурой* языка (исчисления).

---

[i] Математические исчисления называют также (*формальными*) *теориями*.

[ii] Последние 2 буквы иногда не входят в алфавит.

В то время как буквы в (1) являются буквами, а не метабуквами, буквы в сигнатуре Ω являются именно метабуквами.

Числа в верхних индексах, указывающие на число аргументов (число мест для подстановки), должны указываться (например, справа от каждой буквы в скобках) при задании сигнатуры.

При наличии функциональных постоянных $(l > 0)$ из множества всех слов в алфавите $\mathrm{A}_{\text{И}}$ выделяются 2 подмножества «правильно построенных» слов – *термы* [i] и *формулы*.

Формулы при интерпретации, как и прежде, будут высказывательными формами (или высказываниями). Термы при интерпретации будут «предметными» формами (или «предметами») [ii].

Термы определяются индукцией по «функциональной» длине – по числу вхождений функциональных постоянных.

Исходные термы (термы функциональной длины 0) – предметные переменные и предметные постоянные.

Если f – n-местная функциональная постоянная и $t_1, \ldots , t_n$ – термы, то $f(t_1, \ldots , t_n)$ – терм.

Формулы логической длины 0 – *предикации* $P(t_1, \ldots , t_n)$ [здесь P – n-местная предикатная постоянная и $t_1, \ldots , t_n$ – термы] и *равенства* $t_1 = t_2$ $(t_1, t_2$ – термы).

Остальные формулы определяются – при помощи связок и кванторов – как в **L**.

Если в сигнатуре функциональных постоянных нет, то единственные термы – предметные переменные и предметные постоянные.

Все вхождения переменных в термы, разумеется, объявляются свободными.

Вхождения переменных в формулу объявляются свободными или связанными по тем же правилам, что в исчислении **L**.

В дальнейшем в множестве $\mathfrak{F}_{\text{И}}$ формул исчисления И большую роль будет играть подмножество $\mathfrak{F}^{з}_{\text{И}}$ *замкнутых* формул – формул, не содержащих свободных переменных.

Поэтому сохраним определение и обозначение *замыкания* формулы: $\alpha \Rightarrow \forall\alpha$.

---

[i] С термами мы в этой книге сталкиваемся впервые.

[ii] Примеры будут только в § 2.

§ 2. Семантика

Интерпретацией математического исчисления И с сигнатурой

$$\Omega = \langle\langle P_1^{(s_1)},\dots,P_k^{(s_k)}\rangle,\ \langle f_1^{(t_1)},\dots,f_l^{(t_l)}\rangle,\ \langle b_1,\dots,b_m\rangle\rangle$$

называется четвёрка

$$\mathrm{I} = \langle \mathrm{U},\ \langle \Pi_1^{(s_1)},\dots,\Pi_k^{(s_k)}\rangle,\ \langle \varphi_1^{(t_1)},\dots,\varphi_l^{(t_l)}\rangle,\ \langle \mathrm{u}_1,\dots,\mathrm{u}_m\rangle\rangle\ ,$$

в которой U – не пустое множество (это множество называется *носителем* интерпретации I), $\Pi_i^{(s_i)}$ – s_i-местный предикат на множестве U $(1 \le i \le k)$, $\varphi_i^{(t_i)}$ – отображение[i] множества U^{t_i} в U $(1 \le i \le l)$, $u_i \in \mathrm{U}$ $(1 \le i \le m)$.

Индукцией по функциональной длине определим *значение* ${}^{\mathrm{I}}|\,\mathrm{t}\,|_e^{\text{Ш}}$ *терма* t относительно списка переменных Ш (Ш – список переменный, нормальный для терма t) на кортеже значений e (значениями переменных являются элементы множества U) при интерпретации I.

$${}^{\mathrm{I}}|\,a_i\,|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} \underset{Df}{=} \mathrm{u}$$

(где u – элемент множества U, сопоставленный в Ш переменной a_i).

$${}^{\mathrm{I}}|\,b_i\,|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} \underset{Df}{=} \mathrm{u}_i$$

(при любых Ш и e).

Допустим, что f – n-местная функциональная постоянная и значение термов $t_1, \dots, t_n$ уже определено. Тогда

$${}^{\mathrm{I}}|\,f(t_1,\dots,t_n)\,|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} \underset{Df}{=} \varphi(|\,t_1\,|_e^{\text{Ш}},\dots,|\,t_n\,|_e^{\text{Ш}}) \qquad (1)$$

(где φ – отображение из интерпретации I, сопоставленное функциональной постоянной f).

---

[i] Для простоты мы рассматриваем при интерпретации только всюду определённые функции.

Итак, при интерпретации I терм является формой, принимающей значения в U. Значением замкнутого терма является элемент множества U.

Так же просто определяется *значение* ${}^{\mathrm{I}}|\alpha|_e^{\text{Ш}}$ *формулы* α.

Значение предикации $P(t_1, \dots, t_n)$ определяется подобно (1):

$$ {}^{\mathrm{I}}|P(t_1,\dots,t_n)|_{\mathrm{e}}^{\text{Ш}} \underset{Df}{=} \Pi(|t_1|_e^{\text{Ш}},\dots,|t_n|_e^{\text{Ш}}) $$

(где П – предикат из интерпретации I, сопоставленный предикатной постоянной P).

$$ |\mathrm{t}_1=\mathrm{t}_2|_e^{\text{Ш}}=\begin{cases} \boldsymbol{\textit{и}}, \text{ если} & {}^{\mathrm{I}}|\mathrm{t}_1|_e^{\text{Ш}}={}^{\mathrm{I}}|\mathrm{t}_2|_e^{\text{Ш}} \\ \boldsymbol{\textit{л}}, \text{ если} & {}^{\mathrm{I}}|\mathrm{t}_1|_e^{\text{Ш}}\neq{}^{\mathrm{I}}|\mathrm{t}_2|_e^{\text{Ш}} \end{cases}. $$

А дальше – как в **L**.

Обычным образом определяются «формула α выполнима в интерпретации I», «формула α общезначима в интерпретации I», «(замкнутая) формула α истинна в интерпретации I» и т. д.

Интерпретации

$$ \mathrm{I}_1 = \langle \mathrm{U}_1, \langle \Pi_1^{(s_1)},\dots,\Pi_k^{(s_k)}\rangle, \langle \varphi_1^{(t_1)},\dots,\varphi_l^{(t_l)}\rangle, \langle \mathrm{u}_1,\dots,\mathrm{u}_m\rangle\rangle $$
$$ \mathrm{I}_2 = \langle \mathrm{U}_2, \langle \widehat{\Pi}_1^{(s_1)},\dots,\widehat{\Pi}_k^{(s_k)}\rangle, \langle \widehat{\varphi}_1^{(t_1)},\dots,\widehat{\varphi}_l^{(t_l)}\rangle, \langle \widehat{\mathrm{u}}_1,\dots,\widehat{\mathrm{u}}_m\rangle\rangle, $$

одного исчисления называются *изоморфными*, если существует такая биекция щ: $\mathrm{U}_1 \to \mathrm{U}_2$, которая, грубо говоря, переводит интерпретацию I_1 в интерпретацию I_2, т. е.

$$ \Pi_i^{(s_i)}(v_1,\dots,v_{s_i}) = \widehat{\Pi}_i^{(s_i)}(\text{щ}(v_1),\dots,\text{щ}(v_{s_i})) \quad (1\le i\le k) $$

$$ \text{щ}(\varphi_i^{(t_i)}(v_1,\dots,v_{t_i})) = \widehat{\varphi}_i^{(t_i)}(\text{щ}(v_1),\dots,\text{щ}(v_{t_i})) \quad (1\le i\le l) $$

$$ \text{щ}(u_i) = \widehat{u}_i \quad (1\le i\le m) $$

Легко доказать, что ${}^{\mathrm{I}_1}|\mathrm{t}|_e^{\text{Ш}} = {}^{\mathrm{I}_2}|\mathrm{t}|_{\text{щ}(e)}^{\text{Ш}}$ и ${}^{\mathrm{I}_1}|\alpha|_e^{\text{Ш}} = {}^{\mathrm{I}_2}|\alpha|_{\text{щ}(e)}^{\text{Ш}}$.

ЗАДАЧИ

1) Рассмотрим исчисление $И_1$ с сигнатурой

$$\Omega_1 = \langle\langle\Sigma^{(3)}, \Pi^{(3)}\rangle, \langle\,\rangle, \langle\,\rangle\rangle$$

(в алфавите исчисления $И_1$ запятая нужна, знак равенства не нужен) и интерпретацию [i]

$$\mathbf{I} = \langle \mathbf{N}_0, \langle \lambda xyz[x + y = z], \lambda xyz[x \bullet y = z]\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle\rangle \ .$$

a) придумайте такую формулу α исчисления $И_1$ со свободными переменными a_1, a_2, которая в интерпретации I равносильна форме $a_1 > a_2$;

b) придумайте такую формулу β исчисления $И_1$ со свободной переменной a_1, которая в интерпретации I равносильна форме «a_1 – простое число»;

c) придумайте такую формулу γ исчисления $И_1$ со свободной переменной a_1, которая в интерпретации I равносильна форме $3 \le a_1 \le 5$.

2) Рассмотрим исчисление $И_2$ с сигнатурой

$$\Omega_2 = \langle\langle\,\rangle, \langle +(2), \bullet(2)\rangle, \langle\,\rangle\rangle$$

(в алфавите исчисления $И_2$ запятая не нужна, а знак равенства нужен; термы функциональной длины 1: $x + y$ и $x \bullet y$) и 4 интерпретации:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1 &= \langle \mathbf{N}_0, \langle\,\rangle, \langle \lambda xy[x + y], \lambda xy[x \bullet y]\rangle, \langle\,\rangle\rangle,\\
\mathbf{I}_2 &= \langle \mathbf{Z}, \ \langle\,\rangle, \langle \lambda xy[x + y], \lambda xy[x \bullet y]\rangle, \langle\,\rangle\rangle,\\
\mathbf{I}_3 &= \langle \mathbf{Q}, \ \langle\,\rangle, \langle \lambda xy[x + y], \lambda xy[x \bullet y]\rangle, \langle\,\rangle\rangle,\\
\mathbf{I}_4 &= \langle \mathbf{R}, \ \langle\,\rangle, \langle \lambda xy[x + y], \lambda xy[x \bullet y]\rangle, \langle\,\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

a) придумайте такую замкнутую формулу α исчисления $И_2$, которая в интерпретации I_1 принимает значение ***и***, а в остальных интерпретациях принимает значение ***л***;

b) придумайте такую замкнутую формулу β исчисления $И_2$, которая в интерпретации I_2 принимает значение ***и***, а в остальных интерпретациях принимает значение ***л***;

---

[i] $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$.

c) придумайте такую замкнутую формулу γ исчисления $И_2$, которая в интерпретации I_3 принимает значение ***и***, а в остальных интерпретациях принимает значение ***л***;

d) придумайте такую замкнутую формулу δ исчисления $И_2$, которая в интерпретации I_4 принимает значение ***и***, а в остальных интерпретациях принимает значение ***л***.

§ 3. Дедуктика

Вы немного знакомы с аксиоматическим методом по школьному курсу геометрии. Но доказательства в этом курсе, хотя и основывались на геометрических аксиомах, проводились на основании «логики чистого разума» – при помощи интуитивно убедительных рассуждений и умозаключений.

Чёрч в [14] предложил называть такой метод – собственно математические аксиомы формулируются, а средства рассуждений не уточняются, не формализуются – *неформальным аксиоматическим методом*, а метод рассуждений, при котором и логические средства рассуждений уточнены, явно и формально заданы, – *формальным аксиоматическим методом*.

В рассматриваемом нами вопросе формальный аксиоматический метод как раз и состоит в том, что в математическом исчислении при построении дедуктики задаются логические аксиомы и правила вывода и отдельно собственно математические аксиомы (Чёрч предложил для названия собственно математических аксиом использовать окказиональный синоним – *постулаты*).

В качестве логического базиса математического исчисления – логических аксиом и правил вывода – обычно берут исчисление **L** или исчисление **M**, про которые мы уже знаем, что они семантически непротиворечивы и семантически полны.

Итак, пусть в математическом исчислении И заданы какие-то аксиомы и правила вывода. [i]

Интерпретация I исчисления И называется *моделью* этого исчисления, если его аксиомы общезначимы в I.

Легко проверяется, что если интерпретация I_1 является моделью исчисления И и интерпретации I_1, I_2 изоморфны, то интерпретация I_2 тоже является моделью этого исчисления.

Формула α исчисления И называется его *семантическим следствием*, если она общезначима в любой модели этого исчисления.

Любая аксиома исчисления И является его семантическим следствием.

---

[i] Про правила вывода мы всё-таки будем предполагать, что они сохраняют общезначимость.

Поскольку правила вывода сохраняют общезначимость, любая формула исчисления И, доказуемая в этом исчислении, также является его семантическим следствием.

Верно ли, что любое семантическое следствие исчисления доказуемо в нём, т. е. вопрос о полноте его дедуктики, о полноте исчисления – важный вопрос, индивидуально решаемый для каждого исчисления. [i]

[i] Об этом см. также следующий параграф.

§ 4. Основные свойства математических исчислений

Прежде всего, важно, имеет ли исчисление модель.

Легко проверяется, что исчисление И тогда и только тогда имеет модель, когда не существует такой формулы α, что и α, и $\neg\alpha$ являются семантическими следствиями исчисления. А следовательно, если исчисление И имеет модель, то И непротиворечиво относительно отрицания.

Отметим ещё, что в том не интересном случае, когда исчисление И не имеет моделей, любая формула тривиальным образом является его семантическим следствием.

Назовём исчисление И *семантически полным*, если каждое его семантическое следствие доказуемо в нём.

Назовём исчисление И *дедуктивно полным*, если

$$(\forall\alpha\in \mathfrak{F}^{з}_{И})[\underset{И}{\vdash}\alpha \ \vee \ \underset{И}{\vdash}\neg\alpha].$$

Назовём, наконец, исчисление И *категоричным*, если все его модели изоморфны. [7]

Докажем 2 утверждения о взаимосвязи этих понятий.

Если исчисление И *имеет модель, категорично и семантически полно, то оно дедуктивно полно.*

Доказательство. Итак, пусть исчисление И имеет модель I_0, категорично и семантически полно. Докажем, что оно семантически полно.

Пусть α – замкнутая формула исчисления И. Возможны 2 случая: 1) ${}^{I_0}|\alpha| = \boldsymbol{и}$; 2) ${}^{I_0}|\alpha| = \text{л}$.

В первом случае рассмотрим произвольную модель I исчисления И. Поскольку исчисление И категорично, модели I и I_0 изоморфны. Тогда ${}^{I}|\alpha| = {}^{I_0}|\alpha| = \boldsymbol{и}$. Следовательно, формула α является семантическим следствием исчисления И. Из семантической полноты исчисления И следует $\underset{И}{\vdash}\alpha$.

Во втором случае ${}^{I}|\neg\alpha| =$ ***и***. Дальше доказательство – как в первом случае.

Если исчисление И *имеет модель и дедуктивно полно, то оно семантически полно.*

Доказательство. Итак, пусть исчисление И имеет модель I и дедуктивно полно. Докажем, что оно семантически полно.

Пусть α – семантическое следствие исчисления И. Тогда формула α общезначима в модели I. Значит, и замкнутая формула $\forall\alpha$ общезначима в I (задача 5 к § 2 гл. V). Следовательно, ${}^{I}|\forall\alpha| =$ ***и*** и ${}^{I}|\neg\forall\alpha| =$ **л**. Из дедуктивной полноты исчисления И следует $\underset{\text{и}}{\vdash} \forall\alpha \vee \underset{\text{и}}{\vdash} \neg\forall\alpha$. Поскольку всякая доказуемая в исчислении формула является его семантическим следствием, из ${}^{I}|\neg\forall\alpha| =$ **л** следует, что второй член дизъюнкции ложен. Поэтому $\underset{\text{и}}{\vdash} \forall\alpha$, откуда $\underset{\text{и}}{\vdash} \alpha$.

ГЛАВА VIII

ИСЧИСЛЕНИЕ AR

§ 1. Синтактика

В этой главе мы будем изучать математическое исчисление **AR** [i] с сигнатурой

$$\Omega = \langle\langle\ \rangle,\ \langle +(2), \bullet(2), {}'(1)\rangle,\ \langle 0\rangle\rangle$$

(в алфавите исчисления **AR** знак равенства нужен, запятая не нужна).

Хотя с формальной точки зрения говорить в данном параграфе о носителе главной интерпретации исчисления **AR** не логично (этому место в параграфе «Семантика»), но, я думаю, читать его будет легче, если я укажу этот носитель здесь:

$$\mathbf{N}_0 \underset{Df}{=} \mathbf{N} \cup \{0\}$$

(для простоты и по традиции элементы множества $\mathbf{N}_0$ мы в этой главе будем называть *натуральными числами*).

В соответствии с § 1 гл. VII термами арифметической [ii] длины 0 являются предметные переменные и предметная постоянная 0.

Если t_1, t_2 – термы, то слова $(t_1) + (t_2)$ и $(t_1) \bullet (t_2)$ тоже являются термами.

Если t – терм, то слово $(t)'$ тоже является термом.

Среди термов для нас в дальнейшем особую роль будут играть *нумералы* – термы $0, (0)', ((0)')', (((0)')')', \ldots$

---

[i] От английского слова arithmetic (арифметика).

[ii] В этой главе мы вместо «универсального» термина «функциональная длина» (§ 1 гл. VII) будем употреблять термин «арифметическая длина».

Формулы логической длины 0 – только равенства $t_1 = t_2$ (t_1, t_2 – термы).

Стандартно вводятся термины *подтерм* и *подформула*.

Разумеется, и для множества термов и для множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{AR}}$ формул выполняется требование ДЕ$_0$.

Поскольку теперь есть 2 множества «правильно построенных слов», все синтаксические теоремы раздваиваются (а некоторые – см. ниже – и «растраиваются»).

Справедлива

Теорема об однозначной представимости

1) *Любой терм* t *положительной арифметической длины представим, причём единственным образом, в одном и только одном из трёх видов*: $(t_1) + (t_2)$, $(t_1) \bullet (t_2)$, *где* t_1, t_2 – *термы*, $(t)'$, *где* t – *терм*;

2) *Любая формула* α *представима, причём единственным образом, в одном и только одном из четырёх видов*: $t_1 = t_2$, *где* t_1, t_2 – *термы*, $\rceil(\beta)$, *где* β – *формула*, $(\beta) \nabla (\gamma)$, *где* β и γ – *формулы*, $\rightthreetimes x(\beta)$, *где* β – *формула*, x – *предметная переменная*.

Доказывается эта теорема так же, как соответствующая теорема из § 1 гл. I .

После этой теоремы определяются *главное вхождение арифметического знака* [i] (*главный арифметический знак*) в терме и *главное вхождение логического знака* (*главный логический знак*) в формуле (разумеется, легко строятся алгоритмы для их отыскания), а также *непосредственные составляющие* в терме и в формуле.

Теорема о подтермах и подформулах

1) *Если терм* t_1 *является подтермом терма* t_2, *то либо* $t_1 \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} t_2$, *либо* t_1 *является подтермом* a) *непосредственной составляющей терма* t_2 *в случае* $t_2 \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (p)'$; b) *одной из непосредственных составляющих терма* t_2 *в случаях* $t_2 \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (p) + (q)$ и $t_2 \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} (p) \bullet (q)$.

2) *Если формула* α *является подформулой формулы* β, *то либо* $\alpha \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \beta$, *либо* α *является подформулой* a) *непосредственной составляющей формулы* β *в случаях* $\beta \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \rceil(\pi)$ и $\beta \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \rightthreetimes x(\beta)$;

---

[i] Так называются в исчислении **AR** функциональные постоянные.

b) *одной из непосредственных составляющих формулы* β *в случае* $\beta \ \underline{\circ}\ (\pi) \nabla (\rho)$.

А вот в следующей теореме возможны 3 ситуации:

Синтаксическая теорема о замене

1) *Если* p, q *и* t *– термы, то* $\mathbf{R}_t^{<p,\,n} \llcorner q \lrcorner$ *– терм.*

2) *Если* p, t *– термы,* β *– формула и вхождение* $\langle p, n \rangle$ *не является прикванторным вхождением переменной, то* $\mathbf{R}_t^{<p,\,n} \llcorner \beta \lrcorner$ *– формула.*

3) *Если* α, β *и* γ *– формулы, то* $\mathbf{R}_\gamma^{<\alpha,\,n} \llcorner \beta \lrcorner$ *– формула.*

Теорему о соответствующей скобке (2 пункта) предоставляю сформулировать читателю.

Доказываются все эти теоремы – как для **K**.

После теоремы о соответствующей скобке определяются область действия (вхождения) каждого из трёх арифметических знаков и каждого из шести логических знаков.

Связанные и свободные вхождения (предметной) переменной в формулу, а также связанные и свободные переменные формулы определяются – как в **L**.

Разумеется, все вхождения переменных в терм объявляются свободными.

Определение конгруэнтных формул повторяет определение из § 1 гл. V.

Опять-таки в семантике особую роль будут играть *замкнутые термы* (термы, не имеющие переменных) и *замкнутые формулы* (формулы, не имеющие свободных переменных).

Множество $\mathfrak{F}^{з}_{\mathbf{AR}}$ замкнутых формул понадобится нам и в дедуктике.

Из Синтаксической теоремы о замене следует, что для любых термов q и t и любой переменной a слово $\mathbf{S}_t^a \llcorner q \lrcorner$ является термом. Кроме того, для любого терма t, любой формулы β и любой <u>свободной</u> переменной x формулы β слово $\underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner \beta \lrcorner$ является формулой.

Однако, как и в гл. V, с точки зрения семантики интересна не любая подстановка.

Мы будем говорить, что *подстановка терма* t *вместо* x *в формулу* β <u>*допустима*</u>[i] и будем писать $!\underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner\beta\lrcorner$, если никакое свободное вхождение x в формулу β не входит в область действия квантора по какой-нибудь переменной, входящей в терм t (то же по-другому: если после подстановки все вхождения всех переменных в t останутся в формуле $\underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner\beta\lrcorner$ свободными).

<u>Сокращения</u>

Во-первых, положим

$$\underline{1} \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} (0)' \tag{1}$$

$$\underline{2} \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} ((0)')' \tag{2}$$

$$\underline{3} \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} (((0)')')' \tag{3}$$

и т. д.

Как ни странно, но нам будет полезным и соглашение

$$\underline{0} \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} 0\,.$$

Вот теперь для любого $n \in \mathbf{N}_0$ имеет смысл выражение $\underline{n}$.

Во-вторых, для произвольных термов t_1, t_2 положим

$$t_1 < t_2 \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \exists x((t_1) + ((x)') = t_2)\,, \tag{4}$$

$$t_1 \le t_2 \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \exists x((t_1) + (x) = t_2)\,. \tag{5}$$

где x – первая по алфавиту переменная, не входящая в термы t_1, t_2.[ii] Дальше выражения $t_1 > t_2$, $t_1 \ge t_2$, $t_1 < t_2 < t_3$ определяются обычным образом.

Подчёркиваю, что эти соглашения-сокращения – синтаксические: слово $t_1 < t_2$ – никакое не высказывание, а имя формулы $\exists x((t_1) + ((x)') = t_2)$.

---

[i] Конкурирующий синоним: *терм* t *свободен для переменной* x *в формуле* β.

[ii] Те, кого очень удивили эти сокращения, вспомните о семантическом предуведомлении в начале параграфа!

Пример. Слово $\underline{2} \le \underline{1}$ есть имя формулы $\exists a_1((\underline{2}) + (a_1) = \underline{1})$, слово $a_2 < a_5$ есть имя формулы $\exists a_1((a_2) + ((a_1)') = a_5)$.

Ну, и, наконец, в-третьих,

$$t_1 \ne t_2 \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \neg(t_1 = t_2)\,,$$

$$(t_1)(t_2) \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} (t_1) \bullet (t_2)\,.$$

Как обычно, перед переходом к семантике условимся о сокращённом написании термов и формул – об опускании некоторых скобок.

Прежде всего, условимся опускать скобки вокруг переменных и вокруг постоянной 0.

Условимся вместо $((t)')'$ писать $(t)''$.

Условимся, что, как в обычной математике, знак $\bullet$ связывает теснее, чем знак $+$.

Ну, и сохраним соглашение, что знаки $\neg$, $\forall$, $\exists$ связывают теснее, чем знаки $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, а знаки $\&$ и $\vee$ связывают теснее, чем знак $\rightarrow$.

Теперь при желании определения (1), (2), (3), … можно записать поприятнее:

$$\underline{1} \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} 0'$$

$$\underline{2} \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} 0''$$

$$\underline{3} \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} 0'''$$

и т. д.

Можно записать поприятнее и (4), (5):

$$t_1 < t_2 \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \exists x(t_1 + x' = t_2),$$

$$t_1 \le t_2 \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \exists x(t_1 + x = t_2)\,.$$

§ 2. Семантика

Согласно § 2 гл. VII интерпретациями исчисления **AR** являются четвёрки

$$\mathrm{I} = \langle \mathrm{U},\ \langle\ \rangle,\ \langle \varphi^{(2)}, \psi^{(2)}, \chi^{(1)} \rangle,\ \langle \mathrm{u} \rangle \rangle\ .$$

Главной интерпретацией исчисления **AR** объявим

$$\mathrm{I}_0 \underset{Df}{=} \langle \mathbf{N}_0,\ \langle\ \rangle,\ \langle \lambda xy[x+y],\ \lambda xy[x \bullet y],\ \lambda x[x+1] \rangle, \langle 0 \rangle \rangle\ .$$

Таким образом, мы предполагаем здесь, что мы знаем, что такое натуральные числа 0, 1, 2, 3, … , что такое их сумма и произведение.

Один из возможных подходов к определению натуральных чисел и операций над ними: *натуральные числа* – это слова в однобуквенном алфавите $\llcorner | \lrcorner$, в том числе пустое слово; $m + n \underset{Df}{\overline{\circ}} mn$ (в правой части стоит конкатенация слов m и n); $m \bullet n \underset{Df}{\overline{\circ}} \mathbf{S}^{|}_{n} \llcorner m \lrcorner$.

Мы предполагаем, что знаем простейшие свойства этих операций. Например, знаем, что

$$\begin{aligned}
&(\forall n \in \mathbf{N}_0)[n + 1 \neq 0]\ ,\\
m = n &\rightleftarrows m + 1 = n + 1\ ,\\
m + 0 &= m\ ,\\
m + (n + 1) &= (m + n) + 1\ ,\\
m \bullet 0 &= 0\ ,\\
m \bullet (n + 1) &= m \bullet n + m\ .
\end{aligned}$$

Наконец, мы собираемся, когда нам понадобится, пользоваться методом математической индукции.

В § 2 гл. VII мы уже дали определение значения терма ${}^{\mathrm{I}}|\,\mathrm{t}\,|_{e}^{Ш}$ и значения формулы ${}^{\mathrm{I}}|\,\alpha\,|_{e}^{Ш}$ в общем случае. Специализировать эти определения для данной ситуации, пожалуй, нет нужды.

Поскольку мы будем рассматривать только главную интерпретацию, мы не будем это указывать. Мы опустим, в частности, имя интерпретации в обозначениях значения терма и формулы.

Определение равносильных термов и равносильных формул даётся стандартным образом.

Обычным образом доказываются

Семантическая теорема о замене

1) *Если* p, q *и* t *– термы и* $p \simeq q$, *то* $\mathbf{R}_q^{<p,\,n>} \llcorner t \lrcorner \simeq t$.

2) *Если* p, t *– термы,* β *– формула, вхождение* $\langle p, n \rangle$ *в формулу* β *не является прикванторным вхождением переменной и* $p \simeq q$, *то* $\mathbf{R}_q^{<p,\,n>} \llcorner \beta \lrcorner \simeq \beta$.

3) *Если* α, β *и* γ *– формулы и* $\alpha \simeq \beta$, *то* $\mathbf{R}_\beta^{<\alpha,\,n>} \llcorner \gamma \lrcorner \simeq \gamma$.

Семантическая теорема о подстановке

1) *Если* $p \simeq q$, *то* $\underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner p \lrcorner \simeq \underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner q \lrcorner$.

2) *Если* $\alpha \simeq \beta$ и $!\underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner \alpha \lrcorner, !\underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner \beta \lrcorner$, *то* $\underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner \alpha \lrcorner \simeq \underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner \beta \lrcorner$.

Основная лемма

(для Семантической теоремы о подстановке)

1) *Пусть* Ш, x *– список переменных, нормальный для термов* p *и* t. *Тогда* $|\,\underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner p \lrcorner\,|_{\text{е, к}}^{Ш,x} = |\,p\,|_{\text{е},|t|_{\text{е, к}}^{Ш,x}}^{Ш,x}$.

2) *Пусть* Ш, x *– список переменных, нормальный для формулы* α *и терма* t. *Тогда, если* $!\underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner \alpha \lrcorner$, *то* $|\,\underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner \alpha \lrcorner\,|_{\text{е, к}}^{Ш,x} = |\,\alpha\,|_{\text{е},|t|_{\text{е, к}}^{Ш,x}}^{Ш,x}$.

Разумеется, конгруэнтные формулы тоже равносильны.

Назовём формулу исчисления **AR** *общезначимой* (*истинной*), если она общезначима (истинна) в главной интерпретации I_0 [i]. Обозначим множество общезначимых (истинных) формул через □ (через И).

$$И = \mathfrak{F}^{з}_{\mathbf{AR}} \cap □ \qquad (1)$$

Поскольку множество $\mathfrak{F}^{з}_{\mathbf{AR}}$ разрешимо относительно естественного универсума $\mathfrak{F}_{\mathbf{AR}}$, из (1) следует, что разрешимость множества □ (относительно $\mathfrak{F}_{\mathbf{AR}}$) влечёт разрешимость множества И.

Очевидно, что формула α тогда и только тогда общезначима, когда её замыкание $\forall\alpha$ истинно. Отсюда следует, что разрешимость множества И влечёт разрешимость множества □.

Итак, *множество* □ *тогда и только тогда разрешимо*, *когда разрешимо множество* И.

Поскольку множество $\mathfrak{F}^{з}_{\mathbf{AR}}$ перечислимо, из (1) следует, что перечислимость множества □ влечёт перечислимость множества И. Обратная импликация тоже верна (задача 3 ниже).

Значит, *множество* □ *тогда и только тогда перечислимо*, *когда перечислимо множество* И.

Полезно отметить, что ни про одно из этих множеств мы пока не знаем, разрешимо ли оно, и не знаем, перечислимо ли оно.

ЗАДАЧИ

1) Докажите, что для любых натуральных чисел k и l

   a) $|\underline{k} + \underline{l}| = |\underline{k+l}|$;

   b) $|\underline{k} \bullet \underline{l}| = |\underline{k \bullet l}|$.

2) Докажите, что $\left|\underline{\mathbf{S}}^{x}_{\underline{k}} \llcorner\alpha\lrcorner\right|^{Ш}_{e} = |\alpha|^{Щ,\ x}_{e,\ k}$.

3) Докажите, что если множество И перечислимо, то множество □ перечислимо.

---

[i] Обращаю внимание на разницу в определениях общезначимой формулы в логическом и в математическом исчислениях.

§ 3. Дедуктика

В исчислении **AR** будут те же 3 правила вывода, что и в **L**.

Схемами аксиом исчисления **AR** будут, во-первых, те же 10 схем, что и в **К**:

$(\Delta_1)\ \ \mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1)$

$(\Delta_2)\ \ [\mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3)] \to [(\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3)]$

$(\Delta_3)\ \ \mathfrak{A}_1 \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2)$

$(\Delta_4)\ \ \mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1$

$(\Delta_5)\ \ \mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_2$

$(\Delta_6)\ \ \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$

$(\Delta_7)\ \ \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$

$(\Delta_8)\ \ (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3) \to [(\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3) \to (\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_3)]$

$(\Delta_9)\ \ (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to [(\mathfrak{A}_1 \to \neg\mathfrak{A}_2) \to \neg\mathfrak{A}_1]$

$(\Delta_{10})\ \ \neg\neg\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1$

во-вторых, слегка модифицированные схемы из **L**:

$(\Delta_{11})\ \ \forall x(\mathfrak{A}_1) \to \underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner$

$(\Delta_{12})\ \ \underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner \to \exists x(\mathfrak{A}_1)$

(вместо переменной x подставляется терм t; формулы, построенные по этим схемам, являются аксиомами, если $!\underline{\mathbf{S}}_t^x \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner$);

в-третьих, *схема математической индукции*

$(\Delta_{13})\ \ \underline{\mathbf{S}}_0^x \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner \,\&\, \forall x(\mathfrak{A}_1 \to \underline{\mathbf{S}}_{x'}^x \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner) \to \mathfrak{A}_1$

(отмечу, что подстановки $\underline{\mathbf{S}}^x_0 \llcorner \alpha \lrcorner$ и $\underline{\mathbf{S}}^x_{x'} \llcorner \alpha \lrcorner$ всегда – при любых α, x – допустимы);

и, в-четвёртых, ещё 8 аксиом:

(δ_1) $a_1' = a_2' \to a_1 = a_2$

(δ_2) $\rceil(a_1' = 0)$

(δ_3) $a_1 = a_2 \to (a_1 = a_3 \to a_2 = a_3)$

(δ_4) $a_1 = a_2 \to a_1' = a_2'$

(δ_5) $a_1 + 0 = a_1$

(δ_6) $a_1 + a_2' = (a_1 + a_2)'$

(δ_7) $a_1 \bullet 0 = 0$

(δ_8) $a_1 \bullet a_2' = a_1 \bullet a_2 + a_1$

Требование ДЕ_0, конечно, выполнено: *множество аксиом* исчисления **AR** *разрешимо* (относительно $\mathfrak{F}_{\mathbf{AR}}$).

Требования $\text{ДЕ}_{\text{МР}}$, $\text{ДЕ}_{\text{ПО}}$, $\text{ДЕ}_{\text{ПК}}$ по-прежнему выполнены.

Значит, *множество доказательств в* **AR** *разрешимо* (относительно естественного универсума), *множество* $\mathrm{T}_{\mathbf{AR}}$ *доказуемых формул перечислимо.*

Аксиомы, построенные по схемам $\Delta_1 - \Delta_{10}$, по-прежнему общезначимы.

Общезначимость аксиом, построенных по схемам Δ_{11}, Δ_{12}, надо проверить заново – это проделывается примерно так же, как в § 3 гл. V.

Общезначимость аксиом $\delta_1 - \delta_8$ очевидна (см. § 2).

Докажем, что аксиомы, построенные по схеме Δ_{13}, общезначимы.

Допустим, что $|\underline{\mathbf{S}}^x_0 \llcorner \alpha \lrcorner|^{\text{Ш}}_{\text{е}} = \boldsymbol{u}$ и $|\forall x(\alpha \to \underline{\mathbf{S}}^x_{x'} \llcorner \alpha \lrcorner|^{\text{Ш}}_{\text{е}} = \boldsymbol{u}$ (Ш – список переменных, нормальный для формулы α).

Докажем, что $|\alpha|^{\text{Ш}}_{\text{е}} = \boldsymbol{u}$.

Если x не входит свободно в α, то $\alpha \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} \underline{\mathbf{S}}^x_0 \llcorner \alpha \lrcorner$.

Пусть теперь x входит свободно в α.

Методом математической индукции докажем, что

$$(\forall n \in \mathbf{N}_0)[|\alpha|^{Ш',x}_{e',\,n} = \boldsymbol{u}]$$

(Ш′ получается выделением x из Ш, е′ – выделением из е значения, сопоставленного x).

<u>Базис индукции</u>. Докажем, что $|\alpha|^{Ш,x}_{e,\,0} = \boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} = |\underline{\mathbf{S}}^x_0 \llcorner \alpha \lrcorner|^{Ш}_{e} = |\underline{\mathbf{S}}^x_0 \llcorner \alpha \lrcorner|^{Ш'}_{e'} = |\underline{\mathbf{S}}^x_0 \llcorner \alpha \lrcorner|^{Ш',x}_{e',\,0} = |\alpha|^{Ш',x}_{e',\,0}$$

[при последнем переходе использована Основная лемма (для Семантической теоремы о подстановке) и то, что $|0| = 0$].

<u>Индукционный шаг</u>. Допустим, что $|\alpha|^{Ш',x}_{e',\,k} = \boldsymbol{u}$. Докажем, что $|\alpha|^{Ш',x}_{e',\,k+1} = \boldsymbol{u}$. Поскольку $|\forall x(\alpha \rightarrow \underline{\mathbf{S}}^x_{x'} \llcorner \alpha \lrcorner)|^{Ш}_{e} = |\forall x(\alpha \rightarrow \underline{\mathbf{S}}^x_{x'} \llcorner \alpha \lrcorner)|^{Ш'}_{e'}$, из второго условия $|\alpha \rightarrow \underline{\mathbf{S}}^x_{x'} \llcorner \alpha \lrcorner|^{Ш',x}_{e',\,k} = \boldsymbol{u}$. Из предположения индукции $|\underline{\mathbf{S}}^x_{x'} \llcorner \alpha \lrcorner|^{Ш',x}_{e',\,k} = \boldsymbol{u}$.

$$\boldsymbol{u} = |\underline{\mathbf{S}}^x_{x'} \llcorner \alpha \lrcorner|^{Ш',x}_{e',\,k} = |\alpha|^{Ш',x}_{e',\,|x'|^{Ш,x}_{e,\,k}} = |\alpha|^{Ш',x}_{e',\,|x'|^x_k} = |\alpha|^{Ш',x}_{e',\,k+1}.$$

(второй переход – по той же Основной лемме).

Итак, *любая доказуемая формула общезначима*: $\mathrm{T}_{\mathbf{AR}} \subseteq \square_{\mathbf{AR}}$.

Без изменений переносятся из исчисления **L** все понятия, связанные с выводимостью – вывод с анализом, зависимость формул в выводе, варьируемая переменная, хороший вывод, Ш–вывод.

Вводим стандартное синтаксическое сокращение

$$\alpha \rightleftarrows \beta \;\underset{Df}{\overset{\circ}{=}}\; (\alpha \rightarrow \beta) \,\&\, (\beta \rightarrow \alpha)$$

и термин «формулы α и β дедуктивно эквивалентны».

Остаётся в силе Дедуктивная теорема о подстановке (обе формы), только её надо так сформулировать, чтобы после подстановки в формуле не осталось высказывательных переменных (поскольку их нет в алфавите исчисления **AR**).

Дедуктивная теорема о подстановке (вторая формулировка). *Если* $\Gamma \underset{\mathbf{K}}{\vdash} \alpha$ *и список высказывательных переменных* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ *является нормальным для всех формул из* Γ *и формулы* α, *то, каковы бы ни были формулы* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *исчисления* **AR**, $\mathbf{S}^{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n}_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} \llcorner \Gamma \lrcorner \overset{\Lambda}{\underset{\mathbf{AR}}{\vdash}} \mathbf{S}^{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n}_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n} \llcorner \alpha \lrcorner$.

Не формально суть этой теоремы можно передать так: все доказуемости и выводимости, которые были верны в **K**, верны и в **AR**.

И хотя все доказуемости и выводимости, которые были верны в **L**, по существу верны и в **AR**, выразить этот факт такой же простой теоремой мы не можем, поскольку мы в этой книге «не проходили» подстановку вместо предикатных переменных и поэтому у нас нет алгоритмического перехода от формул в **L** к формулам в **AR**.

Например, для любой формулы α из **L** $\neg\forall x(\alpha) \underset{\mathbf{L}}{\vdash} \exists x \neg(\alpha)$. Для любой формулы α из **AR** тоже верно $\neg\forall x(\alpha) \underset{\mathbf{AR}}{\vdash} \exists x \neg(\alpha)$ и доказывается это утверждение абсолютно так же, как первое утверждение, но вывести второе утверждение из первого мы не можем.

В **AR** остаётся в силе без всяких изменений теорема о дедукции (обе формы) и доказывается она абсолютно так же, но опять-таки вывести её из теоремы о дедукции для **L** мы не можем.

Теорема о введении-удалении верна и в **AR**, но правило удаления квантора общности и правило введения квантора существования, соответствующие схемам Δ_{11}, Δ_{12}, требуют такой же модификации, как выше: вместо переменной x подставляется терм t (и, разумеется, то же ограничение).

Отметим ещё очень важное для дальнейшего модифицированное *правило подстановки вместо предметной переменной*

$$!\mathbf{S}^{x}_{t} \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner \;\to\; \mathfrak{A}_1 \overset{x}{\vdash} \mathbf{S}^{x}_{t} \llcorner \mathfrak{A}_1 \lrcorner \;.$$

Каждое из правил теоремы о введении-удалении практически заменяет какую-то из схем аксиом (или какое-то правило вывода). В исчислении **AR** мы добавили схему математической индукции Δ_{13}. Укажем соответствующее *правило индукции*

$$\frac{\Gamma \overset{\text{ш}}{\vdash} \underline{\mathbf{S}}^{x}_{0}\llcorner\alpha\lrcorner \quad \& \quad \Gamma, \alpha \overset{\text{щ}}{\underset{x}{\vdash}} \underline{\mathbf{S}}^{x}_{x'}\llcorner\alpha\lrcorner}{\Gamma \overset{\text{ш, щ}, x}{\vdash} \alpha}\,.$$

Первое из «посылочных» утверждений мы будем опять называть *базисом индукции*, второе – *индукционным шагом*.

Отметим для дальнейшего, что при применении правила индукции по x в результирующем выводе над «штопором» появляется x.

Фундамент «здания формальной арифметики» – исчисления **AR** – мы построили. Начнём строить «здание» – доказывать утверждения вида $\Gamma \vdash \alpha$ (в частности, $\vdash \alpha$).

Из школьного курса геометрии вы, возможно, помните, что порядок, в котором доказываются теоремы, существен – при доказывании некоторой теоремы пользоваться можно только уже доказанными теоремами.

Поэтому я сейчас сформулирую и занумерую (т-1, т-2, т-3, ...) теоремы, которыми мы по порядку займёмся.

<u>Свойства равенства</u>

(т-1) $\vdash a_1 = a_1$

(т-2) $\vdash a_1 = a_2 \to a_2 = a_1$

(т-3) $\vdash a_1 = a_2 \;\&\; a_2 = a_3 \to a_1 = a_3$

(т-4) $\vdash a_1 = a_2 \to a_1' = a_2'$

(т-5) $\vdash a_1 = a_2 \to a_1 + a_3 = a_2 + a_3$

(т-6) $\vdash a_1 = a_2 \to a_3 + a_1 = a_3 + a_2$

(т-7) $\vdash a_1 = a_2 \to a_1 \bullet a_3 = a_2 \bullet a_3$

(т-8) $\vdash a_1 = a_2 \to a_3 \bullet a_1 = a_3 \bullet a_2$

(т-9) $\vdash a_1 = a_2 \to (a_1 = a_3 \to a_2 = a_3)$

(т-10) $\vdash a_1 = a_2 \to (a_3 = a_1 \to a_3 = a_2)$

Леммы для Дедуктивной теоремы о замене
(p, q, t – термы)

(т-11) $p = q \overset{\wedge}{\vdash} p' = q'$

(т-12) $p = q \overset{\wedge}{\vdash} p + t = q + t$

(т-13) $p = q \overset{\wedge}{\vdash} t + p = t + q$

(т-14) $p = q \overset{\wedge}{\vdash} p \bullet t = q \bullet t$

(т-15) $p = q \overset{\wedge}{\vdash} t \bullet p = t \bullet q$

(т-16) $p = q \overset{\wedge}{\vdash} p = t \rightleftarrows q = t$

(т-17) $p = q \overset{\wedge}{\vdash} t = p \rightleftarrows t = q$

(т-1) 2 подстановки в δ_3: $a_1 + 0 = a_1 \to (a_1 + 0 = a_1 \to a_1 = a_1)$. δ_5 : $a_1 + 0 = a_1$. 2 раза применяем MP: $a_1 = a_1$.

(т-2) Докажем $a_1 = a_2 \vdash a_2 = a_1$ и применим теорему о дедукции. Требуемый вывод (в нём использована т-1):

$$a_1 = a_2$$
$$a_1 = a_2 \to (a_1 = a_3 \to a_2 = a_3)$$
$$a_1 = a_3 \to a_2 = a_3$$
$$a_1 = a_1 \to a_2 = a_1$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1$$

Но ведь, чтобы можно было применить теорему о дедукции, вывод должен быть хорошим. Можно проанализировать предложенный вывод и убедиться, что он – хороший. Но мы поступим проще: вместо $a_1 = a_2 \vdash a_2 = a_1$ докажем $a_4 = a_5 \vdash a_5 = a_4$. Все подстановки в построенном выводе будут делаться либо в аксиомы $\delta_1 - \delta_8$, либо в уже доказанные теоремы (впрочем, пока доказана только т-1), т. е. только вместо переменных a_1, a_2, a_3, а они в посылку $a_4 = a_5$ не входят и, значит, вывод будет хорошим.

На этот раз мы выписывать новый вывод не будем, а впредь сразу будем переходить к новым переменным.

(т-3) Докажем $a_4 = a_5$, $a_5 = a_6 \vdash a_4 = a_6$. Требуемый вывод (в нём использована т-2):

$$\begin{array}{rcl} a_5 = a_4 & \to & (a_5 = a_6 \to a_4 = a_6) \\ a_4 & = & a_5 \\ & \vdots & \\ a_5 & = & a_4 \\ a_5 = a_6 & \to & a_4 = a_6 \\ a_5 & = & a_6 \\ a_4 & = & a_6 \end{array}$$

Теперь, когда мы получили в своё распоряжение т-3, мы будем вывод (или часть вывода) вида $\langle \ldots, t_1 = t_2, t_2 = t_3, t_3 = t_4, t_4 = t_5, \ldots \rangle$ записывать в виде привычной *цепи равенств* $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5$, поскольку $t_1 = t_2,\ t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$. Надо только обосновать выводимость (или доказуемость) каждого равенства.

(т-4) Это просто аксиома δ_4 .

(т-5) Докажем $a_4 = a_5 \vdash a_4 + a_6 = a_5 + a_6$ индукцией по a_6. В базисе индукции надо доказать $a_4 = a_5 \vdash a_4 + 0 = a_5 + 0$

$$a_4 + 0 = a_4 = a_5 = a_5 + 0$$

(при последнем переходе использованы δ_5 и т-2). В индукционном шаге надо доказать $a_4 = a_5$, $a_4 + a_6 = a_5 + a_6 \vdash a_4 + a_6' = a_5 + a_6'$.

$$a_4 + a_6' = (a_4 + a_6)' = (a_5 + a_6)' = a_5 + a_6'$$

(при втором переходе использованы вторая посылка и δ_4, при третьем – δ_6 и т-2).

(т-6) будет доказываться сложно. Положим

$A(a_4, a_5) \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} a_4 = a_5 \to a_6 + a_4 = a_6 + a_5$. Нам надо доказать

$\vdash A(a_4, a_5)$. Если доказывать это утверждение индукцией по a_4, то в индукционном шаге понадобится доказывать утверждение

$A(a_4, a_5) \underset{x}{\vdash} A(a_4', a_5)$. Если последнее утверждение доказывать индукцией по a_5, то в итоге над «штопором» появится a_5, а $A(a_4, a_5)$ содержит a_5 свободно и доказать существование хорошего вывода нам не удастся. Поэтому вместо (1) $\vdash A(a_4, a_5)$ будем доказывать (2) $\vdash \forall a_5 A(a_4, a_5)$ (рис. 14) – поскольку $\forall a_5 A(a_4, a_5) \vdash A(a_4, a_5)$, этого достаточно.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}(11)\ \vdash A(0,a_5')\\ (7)\vdash A(0,0)\quad (8)\ A(0,a_5)\underset{x}{\vdash} A(0,a_5')\end{array}}{\begin{array}{c}(5)\vdash A(0,a_5)\\ (3)\vdash \forall a_5 A(0,a_5)\end{array}}\,a_5 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}(12)\ \vdash A(a_4',0) \qquad (13)\ A(a_4,a_5)\overset{\wedge}{\vdash} A(a_4',a_5')\\ (9)\ \forall a_5 A(a_4,a_5)\vdash A(a_4',0)\qquad (10)\ \forall a_5 A(a_4,a_5),\ A(a_4',a_5)\underset{x}{\vdash} A(a_4',a_5')\end{array}}{\begin{array}{c}(6)\ \forall a_5 A(a_4,a_5)\overset{a_5}{\vdash} A(a_4',a_5)\\ (4)\ \forall a_5 A(a_4,a_5)\underset{x}{\vdash} \forall a_5 A(a_4',a_5)\end{array}}\,a_5}{\begin{array}{c}(2)\vdash \forall a_5 A(a_4,a_5)\\ (1)\vdash A(a_4,a_5)\end{array}}\,a_4$$

Рис. 14

Докажем (2) индукцией по a_4. В базисе нам надо доказать (3) $\vdash \forall a_5 A(0, a_5)$. Вместо этого докажем (5) $\vdash A(0, a_5)$. Поскольку $A(0, a_5) \vdash \forall a_5 A(0, a_5)$, этого достаточно. Утверждение (5) докажем индукцией по a_5. Базисом является утверждение (7) $\vdash A(0,0)$, индукционным шагом – утверждение (8) $A(0, a_5) \underset{x}{\vdash} A(0, a_5')$. Мы докажем даже (11) $\vdash A(0, a_5')$. Вернёмся к индукционному шагу в доказательстве (2). Упомянутым индукционным шагом является утверждение (4) $\forall a_5 A(a_4, a_5) \underset{x}{\vdash} \forall a_5 A(a_4', a_5)$. Вместо (4) докажем (6) $\forall a_5 A(a_4, a_5) \overset{a_5}{\vdash} A(a_4', a_5)$. Поскольку $A(a_4', a_5) \overset{a_5}{\vdash} \forall a_5 A(a_4', a_5)$ и $\forall a_5 A(a_4, a_5)$ не содержит a_5 свободно (ради этого места мы весь этот «обходной огород» городили), нам этого достаточно. (6) мы тоже будем доказывать индукцией по a_5. Базисом этой индукции является утверждение (9) $\forall a_5 A(a_4, a_5) \vdash A(a_4', 0)$. Опять-таки докажем даже (12) $\vdash A(a_4', 0)$. Индукционным шагом является утверждение (10) $\forall a_5 A(a_4, a_5), A(a_4', a_5) \underset{x}{\vdash} A(a_4', a_5')$. Наконец, вместо (10) докажем (13) $A(a_4, a_5) \overset{\wedge}{\vdash} A(a_4', a_5')$. Легко видеть, что (13) влечёт (10).

Подведём итог: чтобы доказать (1), нам достаточно доказать (7), (11), (12) и (13).

(7) $\vdash 0 = 0 \to a_6 + 0 = a_6 + 0$. Из т-1 вытекает $\vdash a_6 + 0 = a_6 + 0$, а потом при помощи Δ_1 наращиваем посылку.

(11) $\vdash 0 = a_5' \to a_6 + 0 = a_6 + a_5'$. Вместо этого докажем $0 = a_5' \vdash a_6 + 0 = a_6 + a_5'$. Из $0 = a_5'$ при помощи т-2 выводим $a_5' = 0$, а затем, используя δ_2, из $a_5' = 0$, $\rceil(a_5' = 0)$ выводим «всё, что угодно», например $a_6 + 0 = a_6 + a_5'$.

(12) $\vdash a_4' = 0 \to a_6 + a_4' = a_6 + 0$ доказывается аналогично (даже т-2 не понадобится).

(13) $a_4 = a_5 \to a_6 + a_4 = a_6 + a_5 \vdash a_4' = a_5' \to a_6 + a_4' = a_6 + a_5'$. Докажем $a_4 = a_5 \to a_6 + a_4 = a_6 + a_5$, $a_4' = a_5' \vdash a_6 + a_4' = a_6 + a_5'$. Из $a_4' = a_5'$ при помощи δ_1 получаем $a_4 = a_5$, затем из первой посылки получаем $a_6 + a_4 = a_6 + a_5$. Далее

$$a_6 + a_4' = (a_6 + a_4)' = (a_6 + a_5)' = a_6 + a_5'$$

(при втором переходе использована δ_4, при третьем – т-2 и δ_6).

(т-7) и (т-8) – мультипликативные аналоги (т-5) и (т-6). Доказываются аналогично.

(т-9) – это аксиома δ_3.

(т-10) при помощи т-2 доказывается тривиально.

Доказательство лемм (т-11) – (т-17) предоставляю читателю.

Дедуктивная теорема о замене

1) *Для термов* p, q, t

$$p = q \underset{\mathsf{X}}{\vdash} t = \mathbf{R}_q^{<p,\, n>} \llcorner t \lrcorner .$$

2) *Если* p, q *– термы,* γ *– формула и вхождение* $\langle p, n \rangle$ *в формулу* γ *не является прикванторным вхождением переменной, то*

$$p = q \overset{\text{Ш}}{\vdash} \mathbf{R}_q^{<p,\, n>} \llcorner \gamma \lrcorner \rightleftarrows \gamma ,$$

где Ш *– список переменных, принадлежащих какому-нибудь квантору в* γ*, в области действия которого находится отмеченное вхождение терма* p.

3) *Для формул* α, β, γ

$$\alpha \rightleftarrows \beta \overset{\text{Ш}}{\vdash} \mathbf{R}_{\beta}^{<\alpha,\, n>} \llcorner\gamma\lrcorner \rightleftarrows \gamma ,$$

где Ш – *список переменных, принадлежащих какому-нибудь квантору в* γ, в области действия которого находится отмеченное вхождение формулы α.

<u>Свойства сложения и умножения</u>

(т-18) $\vdash \ (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$

(т-19) $\vdash \ a_1' + a_2 = (a_1 + a_2)'$

(т-20) $\vdash \ a_1 + a_2 = a_2 + a_1$

(т-21) $\vdash \ a_1 \bullet (a_2 + a_3) = a_1 \bullet a_2 + a_1 \bullet a_3$

(т-22) $\vdash \ (a_1 \bullet a_2) \bullet a_3 = a_1 \bullet (a_2 \bullet a_3)$

(т-23) $\vdash \ a_1' \bullet a_2 = a_1 \bullet a_2 + a_2$

(т-24) $\vdash \ a_1 \bullet a_2 = a_2 \bullet a_1$

(т-25) $\vdash \ a_1 + 0 = a_1$

(т-26) $\vdash \ a_1 \bullet 0 = 0$

(т-27) $\vdash \ a_1 + \underline{1} = a_1'$

(т-28) $\vdash \ a_1 \bullet \underline{1} = a_1$

(т-29) $\vdash \ a_1 + a_2 = 0 \ \rightarrow \ a_1 = 0 \ \& \ a_2 = 0$

(т-30) $\vdash \ a_1 \bullet a_2 = 0 \ \rightarrow \ a_1 = 0 \vee a_2 = 0$

(т-31) $\vdash \ a_1 + a_2 = \underline{1} \ \rightarrow \ a_1 = \underline{1} \vee a_2 = \underline{1}$

(т-32) $\vdash \ a_1 \bullet a_2 = \underline{1} \ \rightarrow \ a_1 = \underline{1} \ \& \ a_2 = \underline{1}$

(т-33) $\vdash \ a_1 + a_3 = a_2 + a_3 \ \rightarrow \ a_1 = a_2$

(т-34) $\vdash \ a_3 \neq 0 \ \rightarrow \ (a_1 \bullet a_3 = a_2 \bullet a_3 \ \rightarrow \ a_1 = a_2)$

(т-18) Докажем $\vdash (a_4 + a_5) + a_6 = a_4 + (a_5 + a_6)$ индукцией по a_6. В базисе требуется доказать $\vdash (a_4 + a_5) + 0 = a_4 + (a_5 + 0)$.

$$(a_4 + a_5) + 0 = a_4 + a_5 = a_4 + (a_5 + 0)$$

(второй переход – по δ_5, т-2 и Дедуктивной теореме о замене). В индукционном шаге требуется доказать утверждение

$$(a_4 + a_5) + a_6 = a_4 + (a_5 + a_6) \vdash (a_4 + a_5) + a_6' = a_4 + (a_5 + a_6').$$

$$(a_4 + a_5) + a_6' = [(a_4 + a_5) + a_6]' = [a_4 + (a_5 + a_6)]' = \\ = a_4 + (a_5 + a_6)' = a_4 + (a_5 + a_6')$$

(второй переход – из посылки по Дедуктивной теореме о замене, третий – по δ_6 и т-2, последний – по δ_6, т-2 и Дедуктивной теореме о замене).

(т-19) является леммой для т-20. Докажем $\vdash a_4' + a_5 = (a_4 + a_5)'$ индукцией по a_5. В базисе требуется доказать $\vdash a_4' + 0 = (a_4 + 0)'$.

$$a_4' + 0 = a_4' = (a_4 + 0)'$$

(второй переход – по δ_5, т-2 и Дедуктивной теореме о замене). В индукционном шаге требуется доказать утверждение $a_4' + a_5 = (a_4 + a_5)' \vdash a_4' + a_5' = (a_4 + a_5')'$

$$a_4' + a_5' = (a_4' + a_5)' = ((a_4 + a_5)')' = (a_4 + a_5')'$$

(второй переход – из посылки по Дедуктивной теореме о замене, третий – по δ_6, т-2 и Дедуктивной теореме о замене).

(т-20) Докажем $\vdash a_4 + a_5 = a_5 + a_4$ индукцией по a_4. В базисе требуется доказать $\vdash 0 + a_5 = a_5 + 0$. А это утверждение мы, в свою очередь, докажем индукцией по a_5. Базис $\vdash 0 + 0 = 0 + 0$ вытекает из т-1. В индукционном шаге (для базиса) надо доказать $0 + a_5 = a_5 + 0 \vdash 0 + a_5' = a_5' + 0$.

$$0 + a_5' = (0 + a_5)' = (a_5 + 0)' = a_5' = a_5' + 0.$$

В индукционном шаге для основного утверждения надо доказать $a_4 + a_5 = a_5 + a_4 \vdash a_4' + a_5 = a_5 + a_4'$.

$$a_4' + a_5 = (a_4 + a_5)' = (a_5 + a_4)' = a_5 + a_4'$$

(первый переход – по т-19, второй переход – из посылки по Дедуктивной теореме о замене, третий – по δ_6 и т-2).

И т. д.

Познакомлю я вас ещё, пожалуй, с разновидностью доказательства по индукции[i] – с так называемой *индукцией разбором случаев*, легко доказываемой при помощи правила индукции:

$$\frac{\vdash \underline{\mathbf{S}}^x_0 \llcorner\alpha\lrcorner \;\; \& \vdash \underline{\mathbf{S}}^x_{x'} \llcorner\alpha\lrcorner}{\vdash \alpha}.$$

(т-29) Положим $\mathrm{A}(a_4, a_5) \underset{Df}{\overline{\overline{\circ}}} a_4 + a_5 = 0 \rightarrow a_4 = 0 \,\&\, a_5 = 0.$

Докажем (1) $\vdash \mathrm{A}(a_4, a_5)$ индукцией разбором случаев по a_4. Для этого достаточно доказать (2) $\vdash \mathrm{A}(0, a_5)$ и (3) $\vdash \mathrm{A}(a_4', a_5)$ (рис. 15). Каждое из этих утверждений мы тоже докажем индукцией разбором случаев по a_5. В итоге получается 4 утверждения: (4) $\vdash \mathrm{A}(0, 0)$, (5) $\vdash \mathrm{A}(0, a_5')$, (6) $\vdash \mathrm{A}(a_4', 0)$ и (7) $\vdash \mathrm{A}(a_4', a_5')$. Утверждение (4) доказывается совсем легко. Утверждения (5), (6), (7) – при помощи δ_2 – доказываются тоже легко.

Доказывая в **AR** утверждения вида $\Gamma \vdash \alpha$ (в частности, $\vdash \alpha$), можно установить много фактов из арифметики натуральных чисел.

Можно, например, доказать, что множество простых чисел бесконечно: для этого нужно написать формулу α исчисления **AR** с одной свободной переменной n, равносильную форме «n – простое число» (в задаче 1b к § 2 гл. VII фактически ставилась эта цель), и доказать утверждение $\vdash \forall m \exists n(n > m \;\&\; \alpha)$.

А что вообще можно доказать о натуральных числах таким способом? Любую ли «арифметическую истину» можно установить таким путём?

Мы об этом поговорим в следующем параграфе и в гл. IX.

[i] Имеется в виду, конечно, «формальная индукция», индукция внутри исчисления **AR**.

$$\dfrac{\dfrac{(4)\vdash A(0,0)\qquad (5)\vdash A(0,a_5')}{(2)\vdash A(0,a_5)}\,a_5 \qquad \dfrac{(6)\vdash A(a_4',0)\qquad (7)\vdash A(a_4',a_5')}{(3)\vdash A(a_4',a_5)}\,a_5}{(1)\vdash A(a_4,a_5)}\,a_4$$

Рис.15

Формализованные вычисления

Будем говорить, что s-местный предикат $A^{(s)}$ на множестве $\mathbf{N}_0$ *нумерически выражается* парой $\langle\alpha, \langle x_1, \ldots, x_s\rangle\rangle$, в которой α – формула исчисления **AR**, а $x_1, \ldots, x_s$ – список переменных, минимальный нормальный для α [1], если для любого кортежа $\langle k_1, \ldots, k_s\rangle \in \mathbf{N}_0^s$

$$1)\ A(k_1, \ldots, k_s) = \boldsymbol{u} \ \rightarrow\ \vdash \underline{\mathbf{S}}^{x_1,\ldots,x_s}_{\underline{k_1},\ldots,\underline{k_s}}\llcorner\alpha\lrcorner\,,$$

$$2)\ A(k_1, \ldots, k_s) = \boldsymbol{л} \ \rightarrow\ \vdash \urcorner\, \underline{\mathbf{S}}^{x_1,\ldots,x_s}_{\underline{k_1},\ldots,\underline{k_s}}\llcorner\alpha\lrcorner\,.$$

Будем говорить, что предикат $A^{(s)}$ *нумерически выразим* в исчислении **AR**, если существует пара описанного вида, которая его нумерически выражает.

Если пара $\langle\alpha, \langle x_1, \ldots, x_s\rangle\rangle$ нумерически выражает предикат $A^{(s)}$ и $y_1, \ldots, y_s$ – такие (различные) переменные, что $!\underline{\mathbf{S}}^{x_i}_{y_i}\llcorner\alpha\lrcorner$ ($i = 1, \ldots, s$), то пара $\langle \underline{\mathbf{S}}^{x_1,\ldots,x_s}_{y_1,\ldots,y_s}\llcorner\alpha\lrcorner, \langle y_1, \ldots, y_s\rangle\rangle$ тоже нумерически выражает предикат $A^{(s)}$.

Поэтому, если предикат $A^{(s)}$ нумерически выразим в исчислении **AR**, то для любого списка $y_1, \ldots, y_s$ переменных найдётся такая формула α, что пара $\langle\alpha, \langle y_1, \ldots, y_s\rangle\rangle$ нумерически выражает предикат $A^{(s)}$.

Таким образом, вторая компонента нумерически выражающей пары не принципиальна.

(См. также задачи 3 – 6 ниже.)

Пусть переменная x входит свободно в формулу α. Положим

$$\exists! x(\alpha) \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \exists x(\alpha) \,\&\, \forall y \forall z(\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y}\llcorner\alpha\lrcorner \,\&\, \underline{\mathbf{S}}^{x}_{z}\llcorner\alpha\lrcorner \rightarrow y = z),$$

[1] Т. е. такой нормальный список, в котором нет лишних переменных.

где y – первая, а z – вторая по алфавиту переменная, отличная от x и не входящая свободно в α, подстановка которой вместо x в формулу α допустима.

Если x – единственная свободная переменная формулы α, то $\exists!x(\alpha)$ – замкнутая формула. Ясно, что формула $\exists!x(\alpha)$ истинна тогда и только тогда, когда существует единственное натуральное число k, для которого $|\alpha|^x_k = \boldsymbol{u}$.

(См. также задачу 7.)

Будем говорить, что отображение $f^{(s)}$ типа $\mathbf{N}_0^s \to \mathbf{N}_0$ *нумерически выражается* парой $\langle\alpha, \langle x_1, \dots, x_s, w\rangle\rangle$, в которой α – формула исчисления **AR**, а $x_1, \dots, x_s, w$ – список переменных, минимальный нормальный для α, если для любого кортежа $\langle k_1, \dots, k_s\rangle \in \mathbf{N}_0^s$

$$1)\ \vdash\ \underline{\mathbf{S}}^{x_1,\dots,x_s,w}_{\underline{k_1},\dots,\underline{k_s},\underline{f(k_1,\dots,k_s)}} \llcorner\alpha\lrcorner\ ,$$

$$2)\ \vdash\ \exists!w(\underline{\mathbf{S}}^{x_1,\dots,x_s}_{\underline{k_1},\dots,\underline{k_s}} \llcorner\alpha\lrcorner\ ).$$ [i]

Будем говорить, что отображение $f^{(s)}$ *нумерически выразимо* в исчислении **AR**, если существует пара описанного вида, которая его нумерически выражает.

(См. также задачи 8 – 11.)

В следующем параграфе нам понадобится

Т е о р е м а I. *Любая примитивно-рекурсивная функция* $f^{(1)}$ *типа* $\mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ *нумерически выразима в исчислении* **AR**.

Впрочем, это верно для любой примитивно-рекурсивной функции ([4], § 49). И более того: *всюду определённая функция* f типа $\mathbf{N}_0^s \to \mathbf{N}_0$ *тогда и только тогда нумерически выразима в исчислении* **AR**, *когда* f *обще-рекурсивна* ([4], § 59).

---

[i] Если оставить только условие 1, то для <u>любого</u> отображения $f^{(s)}$ будет годиться <u>одна и та же</u> пара $\langle(x_1 = x_1)\&\dots\&(x_s = x_s)\&(w = w), \langle x_1, \dots, x_s, w\rangle\rangle$.

ЗАДАЧИ

1) Докажите утверждение $\vdash (a_1 = 0) \vee \exists\, a_2(a_1 = a_2')$.

2) Докажите, что формулы $a_1 \leq a_2$ и $(a_1 < a_2) \vee (a_1 = a_2)$ дедуктивно эквивалентны.

3) Пусть пара $\langle \alpha, \langle x_1, \dots, x_s \rangle\rangle$ нумерически выражает предикат $\mathrm{A}^{(s)}$, а пара $\langle \beta, \langle x_1, \dots, x_s \rangle\rangle$ – предикат $\mathrm{B}^{(s)}$. Докажите, что

   a) пара $\langle \alpha \mathbin{\&} \beta, \langle x_1, \dots, x_s \rangle\rangle$ нумерически выражает предикат $\mathrm{A} \mathbin{\&} \mathrm{B}$;

   b) пара $\langle \alpha \vee \beta, \langle x_1, \dots, x_s \rangle\rangle$ нумерически выражает предикат $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$;

   c) пара $\langle \alpha \to \beta, \langle x_1, \dots, x_s \rangle\rangle$ нумерически выражает предикат $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$.

4) Пусть пара $\langle \alpha, \langle x_1, \dots, x_s \rangle\rangle$ нумерически выражает предикат $\mathrm{A}^{(s)}$. Докажите, что пара $\langle \neg\alpha, \langle x_1, \dots, x_s \rangle\rangle$ нумерически выражает предикат $\neg\mathrm{A}$.

5) Докажите, что предикат $\lambda xy[x = y]$ нумерически выражается парой $\langle a_1 = a_2, \langle a_1, a_2 \rangle\rangle$.

6) Докажите, что предикат $\lambda xy[x < y]$ нумерически выражается парой $\langle a_1 < a_2, \langle a_1, a_2 \rangle\rangle$.

7) Допустим, что подстановка термов t_1, t_2 вместо переменной x в формулу α допустима и t_1, t_2 не содержат переменных y, z, описанных в определении $\exists! x(\alpha)$. Докажите, что

   a) $\underline{\mathbf{S}}^{x}_{t_1} \llcorner \alpha \lrcorner\,,\ \underline{\mathbf{S}}^{x}_{t_2} \llcorner \alpha \lrcorner\,,\ \exists! x(\alpha) \overset{y,\,z}{\vdash} t_1 = t_2$;

   b) $t_1 \neq t_2,\ \underline{\mathbf{S}}^{x}_{t_1} \llcorner \alpha \lrcorner\,,\ \exists! x(\alpha) \overset{y,\,z}{\vdash} \neg\, \underline{\mathbf{S}}^{x}_{t_2} \llcorner \alpha \lrcorner$.

8) Пусть пара $\langle \alpha, \langle x_1, \dots, x_s, w \rangle\rangle$ нумерически выражает отображение $f^{(s)}$.

   a) Докажите, что $f(k_1,\dots,k_s) = l \ \rightleftarrows\ \vdash \underline{\mathbf{S}}^{x_1,\dots,x_s,w}_{\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_s,\underline{l}} \llcorner \alpha \lrcorner$;

b) Докажите, что $f(k_1,\dots,k_s) \neq l \rightleftarrows \vdash \neg\, \mathbf{S}^{x_1,\dots,x_s,w}_{\underline{k}_1,\dots,\underline{k}_s,\underline{l}} \llcorner \alpha \lrcorner$;

c) Докажите, что пара $\langle \alpha, \langle x_1, \dots, x_s, w\rangle\rangle$ нумерически выражает предикат $\lambda u_1, \dots ,u_s,v[f(u_1,\dots, u_s) = v]$ [i].

9) Докажите, что функция $\lambda x(x + 1)$ нумерически выражается парой $\langle a_1' = a_2, \langle a_1, a_2\rangle\rangle$.

10) Докажите, что функция $\lambda xy(x + y)$ нумерически выражается парой $\langle a_1 + a_2 = a_3, \langle a_1, a_2, a_3\rangle\rangle$.

11) Докажите, что функция $\lambda xy(x \bullet y)$ нумерически выражается парой $\langle a_1 \bullet a_2 = a_3, \langle a_1, a_2, a_3\rangle\rangle$.

[i] Этот предикат называется *представляющим предикатом* функции f.

§ 4. Основные свойства исчисления AR

В § 3 мы установили, что множество Т перечислимо и что

$$\mathrm{T} \subseteq \square . \qquad (1)$$

Следовательно, главная интерпретация I_0 исчисления **AR** является его моделью.

Значит, исчисление **AR** имеет модель и непротиворечиво относительно отрицания. [8]

Теорема 1. *Если множество* $\square$ *не перечислимо, то исчисление* **AR** *не является дедуктивно полным.*

Доказательство. Если множество $\square$ не перечислимо, то, ввиду перечислимости множества Т и (1), $\mathrm{T} \subset \square$. Пусть $\alpha \in \square \setminus \mathrm{T}$.

Перейдём к замкнутой формуле $\forall\alpha$. Если бы она была доказуема, из правила удаления квантора общности следовала бы доказуемость формулы α, но $\alpha \notin \mathrm{T}$. Поскольку $\alpha \in \square$, формула $\forall\alpha$ тоже общезначима. Значит, формула $\rceil\forall\alpha$ не доказуема.

Теорема 2. *Если множество* Т *не разрешимо* (относительно естественного универсума $\mathfrak{F}$), *то исчисление* **AR** *не является дедуктивно полным.*

Доказательство. Допустим, что исчисление **AR** является дедуктивно полным. Тогда легко узнать, доказуема ли произвольная формула α: начинай перечислять множество Т; при этом, ввиду дедуктивной полноты, раньше или позже появится одна и только одна из формул $\forall\alpha$, $\rceil\forall\alpha$. В первом случае формула α доказуема, во втором – не доказуема (если б она была доказуема, она, а вслед за ней и формула $\forall\alpha$ была бы общезначимой, что противоречит доказуемости формулы $\rceil\forall\alpha$).

Перейдём к более серьёзным теоремам. Для их доказательства, кроме (1) и теоремы I в § 3, нам понадобится

Теорема II. *Любое не пустое перечислимое множество натуральных чисел имеет примитивно-рекурсивный пересчёт* ([7], § 5) .

Теорема 3. *Множество* $\square_{\mathbf{AR}}$ *общезначимых формул не перечислимо.*

Доказательство. Возьмём «универсальную отмычку» – перечислимое, но не разрешимое (относительно $\mathbf{N}_0$) множество A натуральных чисел. Тогда его дополнение $\overline{A}$ не перечислимо. По теореме II множество A имеет примитивно-рекурсивный пересчёт $\varphi^{(1)}$. По теореме I функция φ нумерически выражается некоторой парой $\langle\alpha, \langle x, y\rangle\rangle$. Введём теперь функцию ψ очень необычного типа $\mathbf{N}_0 \to \mathrm{A}^{\infty}_{\mathbf{AR}}$: $\psi(n) \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \urcorner\exists x(\alpha(x, \underline{n}))$.

[В этом и в следующем доказательствах я хочу для большей наглядности употреблять обозначения, которых я до сих пор избегал:

$$\alpha(x, y) \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \alpha\,,$$

$$\alpha(x, \underline{n}) \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \underline{\mathbf{S}}^{y}_{\underline{n}} \llcorner \alpha(x, y) \lrcorner\,,$$

$$\alpha(\underline{k}, \underline{n}) \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \underline{\mathbf{S}}^{x}_{\underline{k}} \llcorner \alpha(x, \underline{n}) \lrcorner\,.$$

Иначе я должен был написать: $\psi(n) \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} \urcorner\exists x(\underline{\mathbf{S}}^{y}_{\underline{n}} \llcorner \alpha \lrcorner)$]

Функция ψ, очевидно, вычислима (чтобы вычислить $\psi(n)$, надо в формулу $\urcorner\exists x(\alpha)$ вместо y подставить нумерал $\underline{n}$). Я сейчас докажу равенство $\overline{A} = \psi^{-1}(\square)$. Поскольку полный прообраз перечислимого множества при вычислимой функции перечислим, а множество $\overline{A}$ не перечислимо, отсюда вытекает, что и множество $\square$ не перечислимо.

Равенство $\overline{A} = \psi^{-1}(\square)$ докажем двумя включениями.

Допустим, что $n \in \overline{A}$. Докажем, что $n \in \psi^{-1}(\square)$, т. е. что $\psi(n) \in \square$. Допустим противное: $\psi(n) \notin \square$. Тогда из определения $\psi(n)$ и того, что $\psi(n)$ – замкнутая формула, вытекает

$$\exists x(\alpha(x, \underline{n})) \in \square\,. \tag{2}$$

По определению значения формулы вида $\exists x(\pi)$ существует такое $k \in \mathbf{N}_0$, что

$$\alpha(\underline{k}, \underline{n}) \in .\square \qquad (3)$$

Из (3) и задачи 8b к § 3 вытекает

$$\varphi(k) = n \qquad (4)$$

(если $\varphi(k) \neq n$, то $\vdash \neg\alpha(\underline{k}, \underline{n})$, а это противоречит (3)). Из (4)

$$n \in \mathrm{A}\,. \qquad (5)$$

Противоречие с $n \in \overline{A}$.

Допустим теперь, что $n \in \psi^{-1}(\square)$, т. е. что $\psi(n) \in \square$. Докажем, что $n \in \overline{A}$. Допустим противное:

$$n \in \mathrm{A}\,. \qquad (6)$$

Тогда существует такое $k \in \mathbf{N}_0$, что

$$\varphi(k) = n\,. \qquad (7)$$

Из задачи 8a к § 3

$$\vdash \alpha(\underline{k}, \underline{n})\,. \qquad (8)$$

Значит, $\alpha(\underline{k}, \underline{n}) \in \square$. Опять-таки по определению значения формулы вида $\exists x(\pi)$ $\exists x(\alpha(x, \underline{n})) \in \square$ – противоречие с $\psi(n) \in \square$.

Т е о р е м а 4. *Множество* $\mathrm{T}_{\mathbf{AR}}$ *доказуемых формул не разрешимо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Снова возьмём «универсальную отмычку» – перечислимое, но не разрешимое (относительно $\mathbf{N}_0$) множество A натуральных чисел. По теореме II множество A имеет примитивно-рекурсивный пересчёт $\varphi^{(1)}$. По теореме I функция φ нумерически выражается некоторой парой $\langle\alpha, \langle x, y\rangle\rangle$. Введём функцию χ типа $\mathbf{N}_0 \to \mathrm{A}^{\infty}_{\mathbf{AR}} : \chi(n) \underset{Df}{\overline{\overline{\circ}}} \exists x(\alpha(x, \underline{n}))$.

Функция χ, очевидно, всюду вычислима[i]. Я сейчас докажу равенство $\mathrm{A} = \chi^{-1}(\mathrm{T})$. Поскольку полный прообраз разрешимого множества при всюду вычислимой функции разрешим, а множество A не разрешимо, отсюда вытекает, что и множество T не разрешимо.

[i] Функция ψ тоже, конечно, всюду вычислима, но там нам это было не важно.

Равенство $A = \chi^{-1}(T)$ докажем тоже двумя включениями. Здесь даже не понадобится предполагать противное.

Допустим, что $n \in A$, т. е. (6). Как и в предыдущем доказательстве, мы из (6) получаем сначала (7), а потом (8). Из (8) по правилу введения квантора существования получаем $\vdash \exists x(\alpha(x, \underline{n}))$, т. е. $\chi(n) \in T$.

Допустим теперь, что $\chi(n) \in T$. Значит, $\chi(n) \in$ □, т. е. $\exists x(\alpha(x, \underline{n})) \in$ □. Мы получили (2). Как и в предыдущем доказательстве, из (2) получаем (3), потом (4), потом (5), т. е. $n \in A$.

Т е о р е м а 5. *Исчисление* **AR** *не является дедуктивно полным.*

На выбор: из теорем 1 и 3 или из теорем 2 и 4.

Итак, исчисление **AR** не является дедуктивно полным (см. также гл. IX).

Не является оно и категоричным – в 1933 г. норвежский математик Сколем доказал существование счётных моделей исчисления **AR**, не изоморфных нашей главной интерпретации.[i]

В этой книге мы подробно рассматривали логические исчисления **K** и **L** и математическое исчисление **AR**.

В исчислении высказываний **K** множество T = □ (теорема Поста о полноте) разрешимо.

В исчислении предикатов **L** множество T = □ (теорема Гёделя о полноте) перечислимо, но не разрешимо (теорема Чёрча).

В исчислении **AR** множество T перечислимо, но не разрешимо, а множество □ даже не перечислимо и T ⊂ □.

---

[i] О нестандартных моделях Сколема очень увлекательно рассказывается в популярной статье В.А.Успенского [10].

ГЛАВА IX
ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ

§ 1. Узкая формулировка

В 1931 г. Куртом Гёделем была доказана

Теорема о неполноте (исчисления **AR**). *Исчисление* **AR** *не является дедуктивно полным.*

Быть может, вам захочется возразить: но ведь мы доказали эту теорему в предыдущей главе.

Ну, во-первых, не совсем доказали, доказали не полностью – наше доказательство опиралось на теоремы I, II, которые мы в этой книге не доказали.

Во-вторых, теорема II говорит о перечислимых множествах, а это понятие Пост придумал-открыл только в 1943 г.

Здесь я хочу изложить сначала идею, а потом и схему гёделевского доказательства.

Сначала – идея.

Всмотримся внимательнее в исчисление **AR**.

В исчислении **AR** у нас есть, во-первых, буквы (буквы алфавита $A_{\mathbf{AR}}$), во-вторых, слова (слова в алфавите $A_{\mathbf{AR}}$; нас интересуют, конечно, не все слова, а только термы и формулы, но давайте пока отвлечёмся от этого) и, в-третьих, кортежи из слов (нас, опять-таки, интересуют не все кортежи, а только доказательства и выводы, но и здесь мы пока отвлечёмся от этого).

Таким образом, в исчислении **AR** мы имеем дело с множеством (давайте для краткости положим $A \underset{Df}{\overset{\circ}{=}} A_{\mathbf{AR}}$) $\widehat{A} \cup A^{\infty} \cup (A^{\infty})^{\infty}$.

Перенумеруем элементы этого множества.

Замкнутые формулы исчисления **AR** при интерпретации являются высказываниями о натуральных числах.

Но некоторые натуральные числа являются номерами элементов множества $\widehat{A} \cup A^{\infty} \cup (A^{\infty})^{\infty}$, а значит, некоторые натуральные числа являются номерами термов, формул (в частности, замкнутых формул!), доказательств и т. д.

Номера замкнутых формул – с точки зрения лица, знающего нумерацию – являются номерами высказываний о формулах и доказательствах.

Допустим, нам удалось построить замкнутую формулу α, которая – опять-таки с точки зрения лица, знающего нумерацию – выражает собственную недоказуемость. (Как это можно сделать, рассказывается дальше.)

В этом основной замысел гёделевского доказательства.

Тогда, во-первых, формула α истинна (если бы она была ложной, это бы означало, что она доказуема, и получилось бы, что в исчислении **AR** доказуема ложная формула, а мы знаем, что любая доказуемая формула общезначима).

Значит, во-вторых, формула α не доказуема.

В-третьих, формула $\rceil\alpha$ ложна и, следовательно, не доказуема.

Теорема доказана!

Теперь – схема доказательства.

Итак, занумеруем элементы множества $\widehat{A} \cup A^{\infty} \cup (A^{\infty})^{\infty}$.

Сейчас я выпишу 16 букв, а в скобках укажу номера, которые я им назначаю: a (3) $|$ (5) 0 (7) $+$ (9) $\bullet$ (11) $'$ (13) $=$ (15) & (17) $\vee$ (19) $\rightarrow$ (21) $\rceil$ (23) $\forall$ (25) $\exists$ (27) [i] «(» (29) «)» (31) «,» (33).

Обозначим через p_n n-ое простое число ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ и т. д.).

Представим себе предметную переменную a_i как слово $a\underbrace{||\ldots|}_{i \text{ палочек}}$ и, учитывая номера букв a и $|$, назначим ей номером число $2 \cdot p_1^3 \cdot p_2^5 \cdot p_3^5 \cdot \ldots \cdot p_{i+1}^5$. Вот теперь мы занумеровали все буквы алфавита A.

[i] Последние 3 буквы этого перечня – чтобы отличать их от букв метаязыка! – нам придётся заключать в кавычки.

Рассмотрим произвольное слово $б_1 б_2 \ldots б_к$ в алфавите А (его буквы нами уже занумерованы); пусть номером буквы $б_i$ является число n_i. Тогда в качестве номера этого слова мы назначим число $2^2 \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$. Мы занумеровали элементы множества A^∞.

Рассмотрим, наконец, произвольный кортеж $\langle P_1, P_2, \ldots, P_l\rangle$ слов в алфавите А; пусть номером слова P_i является число m_i. Тогда, учитывая запятую между словами, номером этого кортежа слов назначим число $2^3 \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{33} \cdot p_3^{m_2} \cdot p_4^{33} \cdot \ldots \cdot p_{2l-1}^{m_l}$.

Нумерация элементов множества $\widehat{\mathrm{A}} \cup \mathrm{A}^\infty \cup (\mathrm{A}^\infty)^\infty$ закончена. Разумеется, эта нумерация – не всюду определённая (например, числа 35 и 2^4 не являются ничьими номерами).

Для дальнейшего важно, что эта нумерация – вычислимая и что её область определения разрешима (относительно $\mathbf{N}_0$).[i]

Если число k является номером некоторой формулы, обозначим эту формулу через α_k.

Определим на $\mathbf{N}_0$ двухместный предикат П:

$$\Pi(k, l) \underset{Df}{\equiv} [k - \text{номер некоторой формулы}]\ \& $$

$$\&\ [l - \text{номер некоторого доказательства формулы } \mathbf{S}_{\underline{k}}^{a_1} \llcorner \alpha_k \lrcorner\ ].$$

Основная лемма. *Предикат* П *нумерически выразим в* **AR**. ([4], §§ 42, 52)

Пусть пара $\langle \beta, \langle a_1, a_2\rangle\rangle$ нумерически выражает предикат П. Замкнутую формулу $\beta(\underline{k}, \underline{l})$ [ii] естественно интерпретировать как высказывание $\Pi(k, l)$.

От формулы $\beta(a_1, a_2) \underset{Df}{\bar{\bar{\circ}}} \beta$ перейдём к формуле

$$\gamma(a_1) \underset{Df}{\bar{\bar{\circ}}} \forall a_2 \rceil \beta(a_1, a_2).$$

---

[i] Совершенно не принципиально, что взята именно эта нумерация. Годится любая нумерация, обладающая указанными свойствами. Эту (и подобные – я не буду уточнять, что это значит) нумерацию называют *гёделевской*.

[ii] Я снова употребляю те же более вольные обозначения, которые я употребил в предыдущем параграфе.

Замкнутая формула $\gamma(\underline{k}) \stackrel{\circ}{=} \forall a_2 \neg\beta(\underline{k}, a_2)$ интерпретируется как $[k$ – номер некоторой формулы$]$ & [формула $\underline{\mathbf{S}}_{\underline{k}}^{a_1} \llcorner \alpha_k \lrcorner$ не доказуема].

Обозначим номер формулы γ через p; тогда $\gamma \stackrel{\circ}{=} \alpha_p$.

Перейдём, наконец, от формулы $\gamma(a_1) \stackrel{\circ}{=} \alpha_p(a_1)$ к формуле

$$\delta \underset{Df}{\stackrel{\circ}{=}} \underline{\mathbf{S}}_{\underline{p}}^{a_1} \llcorner \alpha_p \lrcorner \stackrel{\circ}{=} \alpha_p(\underline{p}) \stackrel{\circ}{=} \forall a_2 \neg\beta(\underline{p}, a_2)\,.$$ [i]

Формула δ означает, что $\underline{\mathbf{S}}_{\underline{p}}^{a_1} \llcorner \alpha_p \lrcorner$, т. е. δ, не доказуема.

[i] Внимательный читатель должен почувствовать запах канторовского диагонального метода.

§ 2. Широкие формулировки

Читателю естественно спросить–возразить: ну, хорошо, исчисление **AR** не является дедуктивно полным; ну, так надо его дополнить, добавить аксиом или просто взять другие аксиомы, другие правила вывода, другое исчисление.

В этом параграфе мы увидим, что при очень небольших требованиях к исчислению ситуация сохраняется: *если исчисление достаточно богато и непротиворечиво, то оно не является дедуктивно полным.*

В данный момент я не претендую ни на какую точность употребляемых выражений – я стараюсь как можно шире описать ситуацию.

Начнём медленно подбираться к точности. [i]

В математических исчислениях обычно есть *алфавит,* причем в множестве всех слов в этом алфавите тем или иным способом выделяются такие «правильно построенные слова» (давайте по-прежнему называть их *формулами*), которые при интерпретации являются либо высказывательными формами, либо высказываниями.

Те формулы, которые при интерпретации являются всегда истинными формами, назовём *общезначимыми*, а те формулы, которые при интерпретации являются высказываниями, – *замкнутыми*.

Кроме того, весь этот разговор мы затеяли ради дедуктивной полноты, поэтому естественно предположить, что среди формул каким-то способом выделяются *доказуемые* (ни о каких аксиомах, правилах вывода, доказательствах мы ничего не говорим).

Кроме указанных четырёх множеств должен быть какой-то аналог отрицания формулы (иначе, как сформулировать определение дедуктивной полноты?), т. е. какой-то аналог перехода $\alpha \Rightarrow \neg\alpha$.

Наконец, мне ещё понадобится какой-то аналог замыкания формулы, аналог перехода $\alpha \Rightarrow \forall\alpha$.

Итак, пусть И – исчисление с алфавитом А (в данную секунду мы ничего больше о нём не предполагаем).

Назовём *каркасом* исчисления семёрку

$$\langle \text{А},\ \mathfrak{F},\ \text{З},\ \square,\ \text{Т}, \varphi, \psi \rangle\ ,$$

[i] Совсем другой – замечательный – подход к этим вопросам изложен в брошюре В.А.Успенского [9].

в которой А – алфавит, $\mathfrak{F}$ – множество слов в алфавите А и З, □, Т – его подмножества (рис. 16), φ – отображение типа $\mathfrak{F} \to$ З, ψ – отображение типа $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$.

$$A^{\infty} \supseteq \mathfrak{F} \begin{matrix} \supseteq \text{З} \\ \supseteq \square \\ \supseteq \text{Т} \end{matrix}$$

Рис.16

Чтобы как-то говорить о множествах[i] $\mathfrak{F}$, З, □, Т, назовём элементы множества $\mathfrak{F}$ *формулами*, элементы множеств З, □ и Т – соответственно, *замкнутыми*, *общезначимыми* и *доказуемыми* (Т – от слова «теорема») формулами.

Для любой формулы α назовём $\varphi(\alpha)$ *замыканием* формулы α, $\psi(\alpha)$ – *отрицанием* формулы α.

Назовём каркас исчисления *нормальным*, если он удовлетворяет 6 условиям:

1) $\rceil(\exists\alpha\in \mathfrak{F})\,[\,\alpha\in \square \;\;\&\;\; \psi(\alpha)\in \square]$;

2) $\qquad \alpha\in \text{Т} \;\rightleftarrows\; \varphi(\alpha)\in \text{Т}$;

3) $\qquad \alpha\in \square \;\rightarrow\; \varphi(\alpha)\in \square$;

4) множество Т перечислимо;

5) функция φ вычислима;

6) функция ψ вычислима.

Исчисление И, в котором фиксирован некоторый каркас, назовём *исчислением с каркасом*.

Назовём исчисление И с каркасом *дедуктивно полным*, если $(\forall\alpha\in \text{З})[\alpha\in \text{Т} \;\vee\; \psi(\alpha)\in \text{Т}]$.

Назовём исчисление И с каркасом *семантически непротиворечивым*, если Т $\subseteq$ □.

Назовём исчисление И с каркасом *семантически богатым*, если множество □ общезначимых формул не перечислимо.

---

[i] А также, конечно, имея в виду подразумеваемую интерпретацию этой конструкции.

Назовём исчисление И с каркасом *дедуктивно богатым*, если множество Т доказуемых формул не разрешимо относительно множества всех формул $\mathfrak{F}$.

Прежде чем я сформулирую пятое (и последнее) определение, хочу обратить ваше внимание на то, что для «обычных» математических исчислений (т. е. таких, которые описаны в гл. VII) каркас – с тем обозначением и смыслом компонент, которые фактически указаны выше – условиям 1, 3, 5, 6 удовлетворяет всегда; если выполнены требования эффективности, удовлетворяет условию 4; если в основе лежит обычный логический базис, удовлетворяет условию 2.

Кроме того, определение дедуктивной полноты повторяет данное выше, а остальные 3 определения при подразумеваемом смысле компонент очень естественны.

Суть последнего определения: исчисление И с каркасом содержит арифметику, если в нём выразима любая примитивно-рекурсивная функция $f^{1)}$ типа $\mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$. Оно, к сожалению, будет тяжеловесным.

Мы будем говорить, что исчисление И с каркасом *содержит арифметику*, если для любой примитивно-рекурсивной функции $f^{1)}$ типа $\mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ найдётся такое вычислимое отображение щ типа $\mathbf{N}_0 \to \mathfrak{F}$, что выполнены 2 условия:

$$1)\quad f(k) = n \ \to \ щ(n) \in \mathrm{T}\,;$$

$$2)\ щ(n) \in \mathrm{T} \ \to \ (\exists k \in \mathbf{N}_0)[f(k) = n]\,.$$

Исчисление **AR** содержит арифметику, потому что если функция f нумерически выражается парой $\langle \alpha, \langle x, y\rangle\rangle$, то отображение щ:

$$щ(n) \underset{Df}{\overline{\overline{\circ}}} \exists x(\alpha(x, \underline{n}))$$

– искомое (см. доказательство теоремы 4 в § 4 гл. VIII).

Вот теперь – для исчислений с каркасом – я могу придать точный смысл (и даже 3 смысла) утверждению, неформально сформулированному в начале параграфа.

Т е о р е м а 1 о н е п о л н о т е. *Если исчисление* И *с нормальным каркасом семантически богато и семантически непротиворечиво, то оно не является дедуктивно полным.*

Доказательство. Итак, пусть множество □ не перечислимо и $T \subseteq$ □. Ввиду условия 4 $T \subset$ □. Пусть $\alpha \in$ □ $\setminus T$. По определению каркаса $\varphi(\alpha) \in$ З. Если $\varphi(\alpha) \in T$, то, ввиду условия 2, $\alpha \in T$. Если же $\psi(\varphi(\alpha)) \in T$, то $\psi(\varphi(\alpha)) \in$ □. Поскольку $\alpha \in$ □, ввиду условия 3 $\varphi(\alpha) \in$ □ – противоречие с условием 1.

Теорема 2 о неполноте. *Если исчисление* И *с нормальным каркасом дедуктивно богато и семантически непротиворечиво, то оно не является дедуктивно полным.*

Доказательство. Допустим, что исчисление И семантически непротиворечиво и дедуктивно полно. Докажем, что оно не является дедуктивно богатым. Итак, $T \subseteq$ □ и $(\forall\alpha \in \text{З})[\alpha \in T \ \vee \ \psi(\alpha) \in T]$. Докажем, что множество T разрешимо относительно множества $\mathfrak{F}$. Возьмём произвольную формулу α. Во-первых, по определению каркаса $\varphi(\alpha) \in$ З. Во-вторых, ввиду условий 5 и 6 мы можем по α найти $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\varphi(\alpha))$. Ввиду дедуктивной полноты $\varphi(\alpha) \in T \ \vee \ \psi(\varphi(\alpha)) \in T$. Ввиду $T \subseteq$ □ и условия 1 выполняется только одно из этих условий. Ввиду условия 4 можно начать перечислять множество T. В силу только что сказанного при этом перечислении раньше или позже появится одна и только одна из формул $\varphi(\alpha)$, $\psi(\varphi(\alpha))$. Если появится $\varphi(\alpha)$, то ввиду условия 2 $\alpha \in T$. Если же появится $\psi(\varphi(\alpha))$, то $\alpha \notin T$. В самом деле, допустим противное: $\alpha \in T$. Тогда, ввиду условия 2, $\varphi(\alpha) \in T$. Из $T \subseteq$ □ получаем $\varphi(\alpha) \in$ □ & $\psi(\varphi(\alpha)) \in$ □ – противоречие с условием 1.

Теорема 3 о неполноте. *Если исчисление* И *с нормальным каркасом содержит арифметику и семантически непротиворечиво, то оно не является дедуктивно полным.*

Теорема 3 будет следовать из теоремы 2, если будет доказана

Лемма. *Если исчисление* И *с каркасом*[i] *содержит арифметику, то оно дедуктивно богато.*

Доказательство. Возьмём «универсальную отмычку» – перечислимое, но не разрешимое (относительно $\mathbf{N}_0$) множество A натуральных чисел. По теореме II из § 4 гл. VIII множество A имеет примитивно-рекурсивный пересчёт $f^{(1)}$. Поскольку исчисление И со-

[i] Нормальность каркаса мне здесь даже не понадобится.

держит арифметику, найдётся такое отображение щ типа $\mathbf{N}_0 \to \mathfrak{F}$, что выполнены указанные в определении 2 условия. Докажем, что $A =$ щ$^{-1}(T)$ – отсюда будет вытекать, что T не разрешимо. Пусть $n \in A$. Тогда существует такое $k \in \mathbf{N}_0$, что $f(k) = n$. Значит, по условию 1 щ$(n) \in T$, $n \in$ щ$^{-1}(T)$. Пусть теперь $n \in$ щ$^{-1}(T)$. Тогда щ$(n) \in T$. Значит, по условию 2 существует такое $k \in \mathbf{N}_0$, что $f(k) = n$. Следовательно, $n \in A$.

Вот что говорится по поводу теоремы Гёделя о неполноте в книге [12]:

«Другая знаменитая теорема Гёделя – *теорема о неполноте* – утверждает, что множество всех истинных формул арифметики (а значит, и множество всех общезначимых формул логики предикатов второго порядка) не может быть порождено никаким исчислением».

Вот как формулирует эту теорему в статье [5] Ю.И.Манин: «*Полного финитно описываемого набора аксиом арифметики не существует*».

Там же о значении этой теоремы он пишет:

«Успехи математики и математизированных областей знания приводили многих глубоких мыслителей к надежде на существование нескольких универсальных законов, из которых все остальные истины могут быть выведены чисто теоретически. /…/ После работы Гёделя, однако, мы можем быть уверенными в беспочвенности этих надежд. Если даже оставить в стороне вопрос, насколько сложен мир, мы знаем, что метод дедуктивных выводов недостаточно мощен. Его не хватает даже на то, чтобы вывести из конечного числа принципов все истинные утверждения о целых числах, формулируемые на языке школьной алгебры: таков смысл теоремы Гёделя.

Это осознание глубокой ограниченности дедуктивных рассуждений и вообще «механических» методов поиска истины стало особенно актуальным в эпоху экспансии ЭВМ.

Изложенная точка зрения на теорему Гёделя даёт основание считать её существенным вкладом естественных наук в фонд гуманитарных. По значению и глубине с ним можно сравнивать, пожалуй, только анализ квантовомеханических представлений о «дополнительности» и «неопределённости», распространённый Нильсом Бором далеко за пределы физики микромира. Не исключено, что оба этих круга идей

– логики и квантовой механики – в применении к теории познания имеют глубинную связь. Дело в том, что «принципы запрета» Гёделя относятся к строго детерминированным процессам рассуждения, тогда как квантовая механика как раз очерчивает границы наивного детерминизма. Вероятно, работа мозга проходит вне этих границ».

ДОПОЛНЕНИЯ

ГЛАВА X

ДРУГИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Ассоциативные исчисления

Фиксируем алфавит из 4 букв

$$\llcorner \vDash, \vdash, \to, \; ; \lrcorner .$$

Этот алфавит мы будем называть *постоянным алфавитом* (для ассоциативных исчислений).[i]

Правило ассоциативного исчисления – это слово вида $\alpha \to \beta$, где α и β – слова, не содержащие букв постоянного алфавита, а $\to$ – буква постоянного алфавита. *Правило в алфавите* Б – это такое правило, левая и правая части которого – слова в алфавите Б.

Ассоциативное исчисление – это пара $\langle Б, \mathfrak{R} \rangle$, в которой Б – алфавит, а $\mathfrak{R}$ – список правил в алфавите Б:

$$\mathfrak{R} \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \alpha_1 \to \beta_1; \alpha_2 \to \beta_2; \ldots ; \alpha_k \to \beta_k .$$

Мы будем говорить, что слово P <u>*непосредственно*</u> *переводится* в слово Q (или что слово Q <u>*непосредственно*</u> *выводится* из слова P) и писать $P \vDash Q$, если $Q \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \mathbf{R}^{<\alpha_i,\, n>}_{\beta_i} \llcorner P \lrcorner$ для некоторых i: $1 \le i \le k$ и n.

Кортеж слов $\langle P_1, P_2, \ldots, P_n \rangle$ называется *выводом* (в данном ассоциативном исчислении), если каждая компонента этого кортежа, начиная со второй, непосредственно выводится из предыдущей.

---

[i] Назвав алфавит постоянным, мы тем самым заявляем, что его буквы не будут входить ни в какие рассматриваемые в этом параграфе алфавиты.

Вывод $\langle P_1, P_2, \ldots, P_n\rangle$ называется *выводом из слова* U, если U $\underline{\overline{\circ}}$ P_1, и *выводом слова* V, если V $\underline{\overline{\circ}}$ P_n.

Мы будем говорить, что слово P *переводится* в слово Q (или что слово Q *выводится* из слова P) и писать $P \vdash Q$, если существует вывод слова Q из слова P.

Сетка основных аспектов (синтактика – семантика – дедуктика), с которой мы подходили к логическим и математическим исчислениям, здесь оказывается не адекватной. Никакой разумной синтактики здесь нет – все слова равноправны. Семантика (в смысле истинности – ложности) здесь тоже отсутствует.

Остаётся только дедуктика.

Множество выводов (в данном ассоциативном исчислении), конечно, разрешимо (относительно естественного универсума), множество слов, выводимых из данного слова, перечислимо.

Естественно возникают алгоритмические проблемы распознавания выводимости (переводимости).

При помощи перечислимого, но не разрешимого множества довольно легко строится ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой распознавания выводимости.

§ 2. Двухсторонние ассоциативные исчисления

Ассоциативное исчисление $\langle Б, \mathfrak{R} \rangle$ называется *двухсторонним*, если в нём, наряду с каждым правилом $\alpha \to \beta$, имеется и правило $\beta \to \alpha$.

Значит, в двухстороннем ассоциативном исчислении Q выводимо из P тогда и только тогда, когда P выводимо из Q.

Поэтому для двухсторонних ассоциативных исчислений применяются обычно другая терминология и другая символика: вместо пары правил $\alpha \to \beta$, $\beta \to \alpha$ пишут $\alpha \leftrightarrow \beta$, вместо слова *правило* употребляют слово *подстановка*, вместо *непосредственно переводится* (*непосредственно выводится*) говорят *смежно*.

Определение *вывода* не меняют, но вот определение выводимости (взаимной, конечно, выводимости) меняют.

Говорят, что слово Q *эквивалентно* слову P и пишут $P \sim Q$, если либо P и Q выводимы одно из другого, либо $P \overline{\underline{\circ}} Q$.

При таком определении отношение «быть эквивалентными», конечно, является отношением эквивалентности и можно перейти к фактормножеству по этому отношению.

Двухсторонние ассоциативные исчисления тесно связаны с так называемой общей алгеброй (с полугруппами и группами – см., например, [17]) – отсюда их название.

В то время как построить пример ассоциативного исчисления с неразрешимой проблемой распознавания выводимости довольно легко (в § 1 был даже указан путь к этому примеру), построить двухстороннее ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой распознавания эквивалентности трудно.

В 1946 г. и в 1947 г. Пост и А.А.Марков независимо построили примеры таких исчислений.

Обычно ассоциативные исчисления и двухсторонние ассоциативные исчисления называют по-другому (так сложилось исторически): исчисления, которые в этой книге названы двухсторонними ассоциативными исчислениями, называют просто *ассоциативными исчислениями*, а исчисления, которые в этой книге названы ассоциативными исчислениями, называют *односторонними ассоциативными исчислениями*.

§ 3. Порождающие грамматики

Фиксируем алфавит из 4 букв

$$\llcorner s_0,\ \vdash,\ \to,\ ;\lrcorner\ .$$

Этот алфавит мы будем называть *постоянным алфавитом* (для порождающих грамматик).

Порождающая грамматика [i] – это тройка $\Gamma = \langle Б, Ш, \mathfrak{R} \rangle$, в которой Б и Ш – алфавиты, не имеющие общих букв, а $\mathfrak{R}$ – список правил. Правила в порождающих грамматиках тоже (§ 1) имеют вид $\alpha \to \beta$, но α и β – слова в алфавите $БШs_0$.

Алфавит Б называется *основным* алфавитом, алфавит Ш – *вспомогательным* алфавитом.[ii]

Определения вывода и выводимости из § 1 сохраняются.

Языком, порождаемым грамматикой Г, называется множество

$$L(\Gamma) \underset{Df}{=} \mathcal{E}\{P \in Б^{\infty} \mid s_0 \vdash P\}.$$

В введённом обозначении L – буква [iii], Г – метабуква.

Наконец, раскрою карты – поясню смысл этой конструкции.

Главная интерпретация предложенной конструкции: буквы алфавита Б – словоформы некоторого языка, буквы алфавита Ш – его грамматические категории. Цель конструкции – написать такие правила, чтобы порождались правильные предложения этого языка (в первую очередь – синтаксически правильные) [iv]. Все предложения, некоторые, как можно больше.

Порождающие грамматики изучают в математической лингвистике (есть такой раздел математики).

Разумеется, по существу порождающие грамматики – ассоциативные исчисления, но формально ассоциативное исчисление – пара, а порождающая грамматика – тройка.

---

[i] Иногда говорят также – *порождающая грамматика Хомского*. Хомский (N.Chomsky) – современный американский лингвист.

[ii] Часто основной алфавит называют *терминальным*, тогда вспомогательный алфавит называют *нетерминальным*.

[iii] Первая буква английского слова language (язык)

[iv] s – первая буква английского слова sentence (предложение).

§ 4. Исчисление регулярных выражений

Пусть $Б \underset{Df}{=} \lfloor б_1, б_2, \ldots, б_n \rfloor$ – алфавит.

Построим *исчисление регулярных выражений в алфавите* Б.

В алфавите этого исчисления будет $n + 8$ букв:

$$б_1, б_2, \ldots, б_n$$
$$\Lambda, \varnothing$$
$$\cup, \bullet$$
$$[\,,\,]$$
$$(\,,\,)$$

Имея в виду последующую главную интерпретацию, буквы первых двух строк естественно назвать *предметными постоянными*, буквы третьей строки – двухместными *функциональными постоянными*, а обе буквы четвёртой строки – (одной) *одноместной функциональной постоянной* (см. приложение 4). Ну, а скобки они *скобки* и есть.

В множестве слов в этом алфавите выделим слова, которые будем называть *регулярными выражениями* (на языке основной части книги это – термы).

Исходные регулярные выражения – $n + 2$ однобуквенных слова – предметные постоянные (по-старому: термы функциональной длины 0).

А дальше по индукции: 1)–2) если ш, щ – регулярные выражения, отличные от $\varnothing$, то (ш $\cup$ щ) и (ш $\bullet$ щ) – регулярные выражения; 3) если ш – регулярное выражение, отличное от $\varnothing$, то [ш] – регулярное выражение.

Дальше, по образцу § 1 гл. I, можно строить синтактику – доказать, например, Синтаксическую теорему о замене, теорему о соответствующей скобке и т. д. [i]

Но мы займёмся семантикой, никакой дедуктики в этом исчислении не будет – мы строим его ради изучения регулярных языков (см. приложение 5).

Индукцией по функциональной длине [ii] определим значение |ш| регулярного выражения ш.

---

[i] Впрочем, начать всё-таки надо с теоремы об однозначной представимости.

[ii] *Функциональной длиной* регулярного выражения ш естественно назвать число вхождений в слово ш букв $\cup$, $\bullet$, [.

Значением каждого регулярного выражения будет, естественно, некоторый регулярный язык.

Значением предметных постоянных $б_1, б_2, \ldots, б_n, \Lambda$ будут, соответственно, языки $\{б_1\}, \{б_2\}, \ldots, \{б_n\}, \{\Lambda\}$. Значением предметной постоянной $\varnothing$ будет пустой язык $\varnothing$.

А дальше по индукции: если ш, щ – регулярные выражения, отличные от $\varnothing$, и $|ш| = Ш$, $|щ| = Щ$, то $|(ш \cup щ)| = Ш \cup Щ$, $|(ш \bullet щ)| = Ш \bullet Щ$; если ш – регулярное выражение, отличное от $\varnothing$, и $|ш| = Ш$, то $|[ш]| = [Ш]$.

Дальше, по образцу § 2 гл. I, можно строить семантику, в первую очередь ввести понятие равносильных регулярных выражений.

В заключение сформулирую (ш – регулярное выражение, отличное от $\varnothing$).

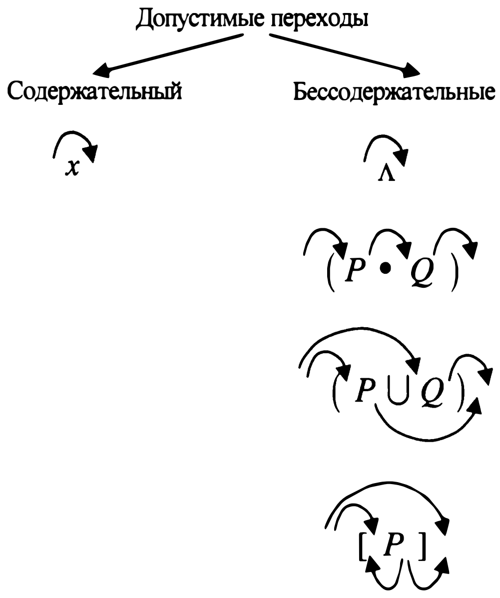


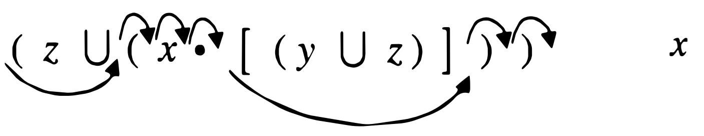
Рис.17

Критерий принадлежности к регулярному языку $|ш|$

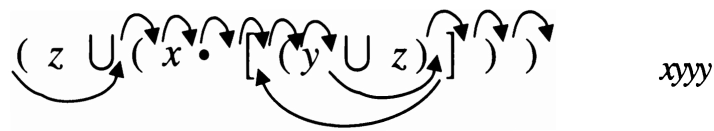
Слово Р *тогда и только тогда принадлежит к языку* $|ш|$, *когда* Р *порождается некоторой тропинкой через регулярное выражение* ш.

Дам необходимые пояснения. Предположим, что мы «стоим» перед регулярным выражением ш и начинаем совершать *допустимые пере-*

ходы по правилам, указанным на рис. 17 (на этом рисунке P и Q обозначают регулярные выражения, x – букву алфавита Б). Переходы делятся на содержательные и бессодержательные. Совершая очередной содержательный переход, выписывайте букву через которую вы перешли. Совершая бессодержательный переход, ничего не выписывайте. Если в выражении ш есть хотя бы одна пара квадратных скобок (единственное место, где есть переход справа налево), вы можете ходить по этому выражению, сколько вам вздумается. Когда вы дойдёте до конца слова (перейдёте через последнюю букву), у вас окажется выписанным некоторое слово P. Это слово и называется в



a)



b)

Рис. 18

критерии *словом*, *порождённым* *пройденной вами* *тропинкой*.

Впрочем, может случиться, что в вашей тропинке не было ни одного содержательного перехода. В этом случае условимся словом, порождённым данной тропинкой, считать пустое слово Λ.

П р и м е р. На рис.18 изображены 2 тропинки через регулярное выражение $(z \cup (x \bullet [(y \cup z)]))$. Первая тропинка порождает слово x. Вторая, в зависимости от того, сколько раз вы будете возвращаться назад, породит любое слово вида $xy\ldots y$.

§ 5. Исчисление рекурсивных функций

Алфавит исчисления состоит из двух бесконечных перечней букв и ещё 6 букв:

предметные переменные: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

функциональные переменные: $f_1, f_2, f_3, \ldots$

предметная постоянная 0

функциональная постоянная $'$

предикатная постоянная $=$

2 *скобки* ( )

запятая ,

Среди слов в этом алфавите выделяются термы и равенства.

Исходные термы – предметные переменные и 0.

Индукционный шаг: 1) если t – терм, то t' – терм.

2) если f – функциональная переменная и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ – терм.

Пример 1. $f_3(0)$, $f_3(0, 0)$, $f_3(0, 0, 0)$ – термы.

Равенства – это слова вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 – термы.

Впрочем, мы ещё будем рассматривать списки равенств, называемые по традиции *системами равенств*.

Среди термов выделим *нумералы* – $0, 0', 0'', 0''$,

Как и в **AR,** введём сокращения $\underline{1} \underset{Df}{\overline{\circ}} 0'$, $\underline{2} \underset{Df}{\overline{\circ}} 0''$, $\underline{3} \underset{Df}{\overline{\circ}} 0'''$, ...,

а также $\underline{0} \underset{Df}{\overline{\circ}} 0$.

Замкнутые термы – термы без переменных – только нумералы.

Дальше можно построить обычную синтактику, например, доказать Синтаксическую теорему о замене.

В семантике главная интерпретация очевидна из названия.

Значение $|\,t\,|_e^{Ш}$ терма определяется очевидным образом, но только для тех термов, в которые никакая функциональная переменная не входит с разным числом аргументов.

Таким образом, у нас не каждый терм будет иметь значение – но ведь мы собрались изучать и не всюду определённые функции.

Значение равенства определяется естественно.

Наконец, дедуктика.

Никаких аксиом и, соответственно, никаких доказательств у нас не будет – будут только выводы из систем равенств, определяемые стандартно (как в § 2 Введения).

Впрочем, надо указать ещё правила вывода.

Правил вывода будет два – однопосылочное *правило подстановки*

$$\frac{\alpha}{\mathbf{S}^{a_i}_{\underline{k}}\llcorner\alpha\lrcorner}$$

и двухпосылочное *правило замены*

$$\frac{p=q,\ f(\underline{k}_1,\ldots,\underline{k}_s)=\underline{l}}{p=\mathbf{R}_l^{<f(\underline{k}_1,\ldots,\underline{k}_s),\ n>}\llcorner q\lrcorner}\,.$$

В первом правиле α – равенство. Во втором правиле требуется, чтобы термы p и q не содержали предметных переменных.

Основное определение. Пусть $\varphi^{(s)}$ – функция типа $\mathbf{N}_0^s \to \mathbf{N}_0$ и Γ – система равенств, последнее из которых начинается функциональной переменной (назовём её f), которая во все равенства системы Γ входит только с s аргументами. Говорят, что функция φ *определяется системой равенств* Γ, если

$$\varphi(k_1,\ldots,k_s)=l \rightleftarrows \Gamma\vdash f(\underline{k}_1,\ldots,\underline{k}_s)=\underline{l}\,.$$

Пример 2. Функция $\lambda xy(x + y)$ определяется системой равенств[i]

$$f_1(a_1,0) = a_1,$$
$$f_1(a_1,a_2') = f_1(a_1,a_2)'\,.$$

Ясно, что любая система равенств, удовлетворяющая вышеуказанному условию, задаёт некоторую вычислимую, а значит – частично-рекурсивную, функцию.

[i] Ср. с аксиомами δ_5, δ_6 исчисления **AR**.

Верно, однако, и обратное.

Основное утверждение. *Функция* φ *типа* $\mathbf{N}_0^s \to \mathbf{N}_0$ *тогда и только тогда частично-рекурсивна, когда она определяется некоторой системой равенств*

ГЛАВА XI

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИСЧИСЛЕНИЙ

В обзоре-справочнике «Теория алгоритмов: основные открытия и приложения» ([12]) авторы в части I перечисляют выделенные ими «основные открытия,[i] связанные с общими понятиями алгоритма и исчисления», и третье из 18 указанных ими «открытий» формулируют так:

«Общее понятие исчисления /…/ столь же фундаментально, как и понятие алгоритма, и должно рассматриваться отдельно от каких бы то ни было формальных уточнений. Понятие исчисления отражает и обобщает интуитивное представление об индуктивном порождении множества /…/ .

Грубо говоря, исчисление есть конечный список "*разрешительных*" *правил*, называемых также *порождающими правилами* / … / или *правилами вывода*. Эти правила р а з р е ш а ю т переходить от одних конструктивных объектов к другим (в то время как правила алгоритма п о в е л е в а ю т совершать такие переходы).»[ii]

Исчисление – это р а з р е ш е н и е конструировать конструктивные объекты некоторого рода или некоторых родов.

Например, исчисление **AR** – это разрешение конструировать термы, формулы и доказуемые формулы. Ассоциативное исчисление – это разрешение конструировать выводы и такие пары $\langle P, Q\rangle$, что $P \vdash Q$. Порождающая грамматика – это разрешение конструировать слова порождаемого этой грамматикой языка. Исчисление регулярных

[i] При этом авторы отмечают, что «в качестве открытия могло выступать и формирование понятия, и доказательство теоремы, и создание теории, и даже постановка проблемы» ([12], с.9).

[ii] Авторы связывают с понятием исчисления ещё 2 «открытия».

выражений – это разрешение конструировать регулярные выражения. Исчисление рекурсивных функций – это разрешение конструировать для функции φ типа $\mathbf{N}_0^s \to \mathbf{N}_0$, заданной системой равенств, верные равенства вида $\varphi(k_1, \dots, k_s) = l$.

Пример совсем из другой области: шахматная игра (если отвлечься от её «игровых» аспектов – состязательности и т. п.) является исчислением – правила игры разрешают переходить от позиции к другим позициям.

§ 1. Исчисления Поста

В 1943 г. Пост предложил некую конструкцию[i], которая, по его замыслу, может служить – в некотором смысле – общим видом для всех исчислений.

Фиксируем (на весь этот параграф) перечень букв $x_1, x_2, x_3, \dots$ Назовём эти буквы *операционными переменными*.

Пусть $Б \underset{Df}{=} \llcorner б_1, б_2, \dots, б_n \lrcorner$ – алфавит.

Строка Поста в алфавите Б – это слово вида

$$P_1 x_{i_1} P_2 x_{i_2} \dots P_{n-1} x_{i_{n-1}} P_n \quad (n \geq 2),$$

где $P_1, P_2, \dots, P_n$ – слова в алфавите Б, а буквы между ними – операционные переменные.

При $n = 2$ получаем строки $P_1 x P_2$, Px, xP, P.

Правило Поста в алфавите Б – это рисунок вида

$$\frac{\begin{matrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{matrix}}{\alpha_{k+1}} \qquad (*)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ – строки Поста, причём каждая операционная переменная, входящая в заключение α_{k+1}, входит в какую-нибудь из посылок $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

[i] В математической литературе эта конструкция называется «канонические системы Поста».

Мы будем говорить, что слово B *получается* из слов $A_1, \ldots , A_k$ *по правилу* (*) [или что слово B *является непосредственным следствием* слов $A_1, \ldots , A_k$ *по правилу* (*)], если существуют такие слова в алфавите Б, подстановка которых вместо операционных переменных в строки $\alpha_{1,\ldots,}\ \alpha_k$, α_{k+1} превращает их, соответственно, в слова $A_1, \ldots , A_k, B$.

Пример 1. Старый добрый модус поненс в виде правила Поста выглядит так:

$$\frac{\begin{array}{c} x_1 \\ (x_1) \to (x_2) \end{array}}{x_2}$$

Исчисление Поста – это тройка $\Pi \underset{Df}{=} \langle Б, \Sigma, \mathfrak{R} \rangle$, в которой Б – алфавит (будем называть его *алфавитом исчисления* П), Σ – множество слов в алфавите Б (будем называть эти слова *аксиомами исчисления* П), $\mathfrak{R}$ – список правил Поста в алфавите Б (эти правила мы, естественно, будем называть *правилами вывода исчисления* П).

Про исчисление П мы будем также говорить, что П – исчисление <u>в</u> алфавите Б. Про исчисление Поста П′ с алфавитом Б′, являющимся надалфавитом алфавита Б, мы будем говорить, что П′ – исчисление <u>над</u> алфавитом Б.

Стандартным образом (как в § 2 Введения) вводятся 2 тройки терминов, связанные с понятиями *доказательства* (в исчислении П) и *вывода из списка*.

Только для исчислений Поста – подчёркнуто алогичных (поскольку они претендуют на универсальность, на всеохватность, в них нет и не будет никакой синтактики и никакой семантики; в частности, в них не будет никаких «правильно построенных» слов – формул и т. п.) – более адекватными, вместо «доказательство», «доказуемая» (формула), являются термины «порождающая цепочка», «порождаемое слово». Их мы и будем впредь применять.

Легко доказать, что для каждого правила вывода исчисления соответствующее требование эффективности выполнено.

Если вдобавок для множества аксиом Σ выполнено требование ДЕ$_0$, то множество порождающих цепочек разрешимо (относительно естественного универсума), множество слов, порождаемых в исчислении П (обозначим его через $\widehat{\Pi}$), перечислимо, множество выводов из любого списка Γ тоже разрешимо и множество слов, выводимых в исчислении Π из списка Γ (обозначим его через $\widehat{\Pi}(\Gamma)$), перечислимо.

Пусть $Ш$ – алфавит. Обозначим через $\widehat{\Pi}_Ш$ множество слов в алфавите $Ш$, порождаемых в исчислении Π (таким образом, $\widehat{\Pi}_Ш = \widehat{\Pi} \cap Ш^\infty$), и через $\widehat{\Pi}_Ш(\Gamma)$ – множество $\widehat{\Pi}(\Gamma) \cap Ш^\infty$. Очевидно, эти множества тоже перечислимы.

Главное понятие параграфа: множество слов $\mathfrak{M}$ называется *порождаемым по Посту*, если существуют такое исчисление Поста Π и такой алфавит $Ш$, что $\mathfrak{M} = \widehat{\Pi}_Ш$.

Из вышесказанного следует, что любое множество слов, порождаемое по Посту, перечислимо.

Можно доказать, что верно и обратное: любое перечислимое множество слов в некотором алфавите порождаемо по Посту.

Отсюда и вытекает утверждение Поста об исчислениях Поста[i] – тезис Поста: поскольку множества слов, порождаемые в произвольном исчислении, перечислимы (а это эмпирический факт, полученный перебором того, что математики называют исчислениями), *любое исчисление <u>можно заменить на</u> некоторое исчисление Поста, порождающее то же множество.*[ii]

Четвёртое из 18 указанных ими «открытий»[iii] авторы книги [12] формулируют так: «Открытие здесь состоит в самой возможности предъявить класс исчислений, одновременно точно очерченный и *представительный*, т. е. содержащий исчисление, эквивалентное любому наперёд заданному исчислению».

Проиллюстрирую сказанное примерами.

Пример 2. Исчисление Поста Π_1 с алфавитом A_K, множеством аксиом, совпадающим с множеством высказывательных переменных, и четырьмя правилами

$$\frac{\begin{array}{c}x_1\\ x_2\end{array}}{(x_1)\nabla(x_2)}$$

---

[i] Напоминаю, что терминология в этом параграфе принадлежит мне, а не Посту.

[ii] К подчёркнутым словам мы вернёмся в следующем параграфе.

[iii] См. преамбулу к главе.

$$\frac{x_1}{\neg(x_1)}$$

порождает множество формул исчисления **К**.

Пример 3. Исчисление Поста П с алфавитом $\mathrm{A}_{\mathbf{K}} \cup \{\lozenge\}$, множеством аксиом $\{\lozenge \mathrm{A}_1, \lozenge \mathrm{A}_2, \lozenge \mathrm{A}_3, \ldots\}$, четырьмя «проромбленными» правилами из примера 2 (в каждом из них и перед посылками, и перед заключением надо поставить $\lozenge$), десятью «частично проромбленными» правилами, соответствующими десяти схемам аксиом – покажу на примере схемы Δ_1, как их надо «частично проромбить»:

$$\frac{\begin{array}{c}\lozenge x_1 \\ \lozenge x_2\end{array}}{(x_1) \to ((x_2) \to (x_1))}$$

и (не изменённым!) правилом из примера 1 по существу порождает доказуемые формулы, а именно $\mathrm{T}_{\mathbf{K}} = \widehat{\Pi}_{\mathrm{A}_{\mathbf{K}}}$.

Может показаться, что для множества $\mathrm{T}_{\mathbf{L}}$ соответствующее исчисление Поста не построишь – ведь, например, там же не любая формула, построенная по схеме Δ_{11}, является аксиомой, там же должны выполняться некоторые условия.

На самом деле, это всё-таки можно – попробуйте придумать.

§ 2. Исчисления по Успенскому [9]

Прежде всего, хочу обратить внимание читателя на разницу в названиях предыдущего и данного параграфа. Разумеется, она не случайна: Пост предложил некую новую конструкцию, которая, по его мнению, может служить универсальной формой для исчислений, ложем, на которое можно уложить любое исчисление; В.А.Успенский никакой новой конструкции не строит – он указывает единую точку зрения на исчисления, на то, чем все они, по его мнению, являются.

Кроме того, в отличие от Поста, В.А.Успенский явно опирается на понятие алгоритма.

Перейдём к формальному изложению.

Пусть $\text{Б} \underset{Df}{=} \llcorner б_1, б_2, \dots, б_n \lrcorner$ – алфавит.

Правило по Успенскому в алфавите Б – это тройка

$$\langle \mathfrak{A}^{(s+1)}, \langle k_1, k_2, \dots, k_s\rangle, l\rangle,$$

в которой $\mathfrak{A}^{(s+1)}$ – всюду определённый алгоритм типа $(\text{Б}^{\infty})^{s+1} \to \{\text{да, нет}\}$ [i], $k_1, k_2, \dots, k_s, l \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{N}_0$.

Алгоритм $\mathfrak{A}$ называется *тестом* правила, числа $k_1, k_2, \dots, k_s$ – его *входными адресами*, число l – его *выходным адресом*, число s – его *глубиной*.

Правило глубины 0 имеет вид

$$\langle \mathfrak{A}^{(1)}, \langle\ \rangle, l\rangle$$

и называется *аксиомным*.

Исчисление по Успенскому – это тройка $\text{У} \underset{Df}{=} \langle \text{Б}, n, \mathfrak{R}\rangle$, в которой Б – алфавит (будем называть его *алфавитом исчисления* У), n – натуральное число (будем называть его *составностью исчисления* У), $\mathfrak{R}$ – список правил по Успенскому в алфавите Б (эти правила мы, естественно, будем называть *правилами исчисления* У).

Про исчисление У мы будем также говорить, что У – исчисление <u>в</u> алфавите Б. Про исчисление по Успенскому У′ с алфавитом Б′, являющимся надалфавитом алфавита Б, мы будем говорить, что У′ – исчисление <u>над</u> алфавитом Б.

---

[i] Таким образом, алгоритм $\mathfrak{A}$ является распознавателем.

Кортеж пар $\langle\langle A_1, q_1\rangle, \ldots, \langle A_p, q_p\rangle\rangle$ $(A_i \in Б^\infty, 1 \le q_i \le n)$ называется *порождающей цепочкой* (или *доказательством*) в исчислении У, если для каждой пары $\langle A_i, q_i\rangle$ $(1 \le i \le p)$ либо 1) среди правил исчисления существует аксиомное правило $\langle \mathfrak{A}^{(1)}, \langle\ \rangle, q_i\rangle$, для которого $\mathfrak{A}(A_i)$ = да; либо 2) среди правил исчисления существует правило $\langle \mathfrak{A}^{(s+1)}, \langle q_{k_1}, q_{k_2}, \ldots, q_{k_s}\rangle, q_i\rangle$, для которого $1 \le k_1, k_2, \ldots, k_s \le i-1$, такое, что $\mathfrak{A}(A_{k_1}, \ldots, A_{k_s}, A_i)$ = да.

Мы будем говорить, что слово A *порождается* исчислением У *на i–ом месте*, если в исчислении У существует такая порождающая цепочка, одной из компонент которой является пара $\langle A, i\rangle$.

Обозначим через $\widehat{У}_i$ множество слов, порождаемых исчислением У на i-ом месте.

Таким образом, каждое n-составное исчисление[1] порождает n множеств $\widehat{У}_i$ $(1 \le i \le n)$. Впрочем, эти множества могут совпадать и быть пустыми.

Легко понять, что для каждого исчисления по Успенскому У множество порождающих цепочек разрешимо (относительно естественного универсума), а значит, каждое из множеств $\widehat{У}_i$ перечислимо.

Термины «входные адреса», «выходной адрес» становятся естественными после таких утверждений:

1) *Если* $\langle \mathfrak{A}^{(s+1)}, \langle k_1, k_2, \ldots, k_s\rangle, l\rangle$ – *правило исчисления* У, $\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_s, Q)$ = да *и* $P_i \in \widehat{У}_{k_i}$ $(1 \le i \le s)$, *то* $Q \in \widehat{У}_l$.

2) *Если* $\langle \mathfrak{A}^{(1)}, \langle\ \rangle, l\rangle$ – *аксиомное правило исчисления* У *и* $\mathfrak{A}(Q)$ = да, *то* $Q \in \widehat{У}_l$.

Слово A естественно назвать *аксиомой* исчисления У, если в этом исчислении существует такое аксиомное правило $\langle \mathfrak{A}^{(1)}, \langle\ \rangle, l\rangle$, для которого $\mathfrak{A}(A)$ = да.

Главное понятие параграфа: множество слов $\mathfrak{M}$ называется *порождаемым по Успенскому*, если оно порождается некоторым исчислением по Успенскому на некотором месте.

Из вышесказанного следует, что любое множество слов, порождаемое по Успенскому, перечислимо.

---

[1] Т. е. исчисление с составностью n.

Из примера 1 (см. ниже) можно вывести, что любое множество слов, порождаемое по Посту, порождаемо и по Успенскому. Из сказанного в предыдущем параграфе вытекает, что любое перечислимое множество порождаемо и по Успенскому.

Ну, и зачем всё это?

Тезис Успенского: *Любое исчисление* (при надлежащем изложении) ***являетсяi*** [i] *исчислением по Успенскому* (т. е., грубо говоря, набором алгоритмов).

Проиллюстрируем этот тезис на примере рассмотренных ранее исчислений.

Пример 1. Пусть $\Pi \underset{Df}{=} \langle Б, \Sigma, \mathfrak{R} \rangle$ – исчисление Поста с разрешимым (относительно естественного универсума) множеством аксиом. Вполне можно считать это исчисление односоставным (порождается только множество $\widehat{\Pi}$) исчислением по Успенскому $У \underset{Df}{=} \langle Б, 1, \mathfrak{R}_1 \rangle$, в котором множество Σ заменяется на аксиомное правило $\langle \mathfrak{A}^{(1)}, \langle\ \rangle, 1 \rangle$ с тестом, разрешающим множество Σ, а каждое правило

$$\frac{\begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{matrix}}{\alpha_{k+1}} \qquad (*)$$

заменяется на правило $\langle \mathfrak{A}^{(k+1)}, \langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle, 1 \rangle$ с тестом, узнающим, получается ли слово B из слов $A_1, \ldots, A_k$ по правилу $(*)$ [ii]. Очевидно, $\widehat{\Pi} = \widehat{У}_1$.

Пример 2. В исчислении **К** порождаются 2 множества – $\mathfrak{F}_{\mathbf{K}}$ и $T_{\mathbf{K}}$. Вполне можно считать это исчисление двухсоставным исчислением по Успенскому $У \underset{Df}{=} \langle Б, 2, \mathfrak{R} \rangle$, в котором 7 правил – аксиомное правило $\langle \mathfrak{A}^{(1)}, \langle\ \rangle, 1 \rangle$ с тестом, узнающим, является ли слово, поданное на вход, высказывательной переменной, правило

---

[i] А в тезисе Поста утверждалось «можно заменить на».

[ii] Сообразите-докажите, что такой распознаватель существует.

$\langle \mathfrak{A}^{(2)}, \langle 1 \rangle, 1\rangle$ глубины 1 с тестом, узнающим по паре слов $\langle P, Q\rangle$, верно ли $Q \,\underline{\circ}\, \rceil(P)$, 3 правила $\langle \mathfrak{A}^{(3)}, \langle 1, 1\rangle, 1\rangle$ глубины 2 с тестами, узнающими по тройке слов $\langle P, Q, R\rangle$, верно ли $R \,\underline{\circ}\, (P) \nabla (Q)$, аксиомное правило $\langle \mathfrak{A}^{(1)}, \langle\ \rangle, 2\rangle$ с тестом, узнающим, является ли слово, поданное на вход, аксиомой исчисления **K**[i], и правило $\langle \mathfrak{A}^{(3)}, \langle 2, 2\rangle, 2\rangle$ глубины 2 с тестом, узнающим по тройке слов $\langle P, Q, R\rangle$, верно ли $Q \,\underline{\circ}\, (P) \to (R)$[ii].Очень легко доказать, что

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{K}} = \widehat{\mathrm{Y}}_1 \text{ и } \mathrm{T}_{\mathbf{K}} = \widehat{\mathrm{Y}}_2 \,. \tag{1}$$

Пример 3. Поскольку оба множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{K}}$ и $\mathrm{T}_{\mathbf{K}}$ разрешимы (относительно множества $\mathrm{A}^{\infty}_{\mathbf{K}}$), для исчисления **K** можно также указать обладающее свойством (1) исчисление по Успенскому всего с 2 аксиомными правилами – правилом $\langle \mathfrak{A}^{(1)}, \langle\ \rangle, 1\rangle$, тест которого узнаёт, является ли поданное на вход слово формулой исчисления **K**, и правилом $\langle \mathfrak{A}^{(1)}, \langle\ \rangle, 2\rangle$, тест которого узнаёт, является ли поданное на вход слово доказуемой формулой исчисления **K**.

Для исчисления **L** тоже не трудно построить двухсоставное исчисление по Успенскому, обладающее свойством

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{L}} = \widehat{\mathrm{Y}}_1 \text{ и } \mathrm{T}_{\mathbf{L}} = \widehat{\mathrm{Y}}_2 \,,$$

но, поскольку по теореме Чёрча множество $\mathrm{T}_{\mathbf{L}}$ не разрешимо (относительно соответствующего универсума), это можно сделать только первым способом (как в примере 2).

[i] Каждый раз вы должны сообразить-доказать, что такой распознаватель существует.

[ii] Но не по любой тройке, а по тройке первые 2 компоненты которой принадлежат $\widehat{\mathrm{Y}}_2$ (оба входных адреса равны 2).

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Булевы функции

Пусть $\mathrm{I} \underset{Df}{=} \{0, 1\}$. Отображения типа $\mathrm{I}^n \to \mathrm{I}$ $(n \in \mathbf{N})$ называются (n-местными) *булевыми*[1] *функциями*.

Ну, и чего ради мы вдруг в этой книге о них заговорили?

Дело в том, что булевы функции очень удобно задавать формулами исчисления **К**.

Обозначим через φ биекцию типа $\mathrm{I} \to \text{ИЗ}$, для которой $\varphi(0) = \boldsymbol{л}$, $\varphi(1) = \boldsymbol{и}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ – формула исчисления **К** и ксп$\lfloor \mathfrak{A} \rfloor \stackrel{\circ}{=} \mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$.

$$\begin{tikzcd}
\langle a_1,\dots,a_n\rangle \arrow[r, "\lambda\mathfrak{A}"] \arrow[d, "\varphi"'] & b \\
\langle e_1,\dots,e_n\rangle \arrow[r, "\mathfrak{A}"] & |\mathfrak{A}|^{\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n}_{e_1,\dots,e_n} \arrow[u, "\varphi^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Рис. 19

Обозначим через $\lambda\mathfrak{A}$ n-местную булеву функцию, значение которой на кортеже $\langle a_1,\dots,a_n\rangle \in \mathrm{I}^n$ задаётся равенством (рис. 19)

$$\lambda\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n) \underset{Df}{=} \varphi^{-1}(|\mathfrak{A}|^{\mathrm{X}_1,\dots,\ \mathrm{X}_n}_{\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_n)}).$$

Функция $\lambda\mathfrak{A}$ называется функцией, *присоединённой* к формуле $\mathfrak{A}$. Мы будем также говорить,что формула $\mathfrak{A}$ *задаёт* (*реализует*) булеву функцию f, если $\mathrm{f} = \lambda\mathfrak{A}$.

Заметим, что любая формула $\mathfrak{A}$ задаёт функцию $\lambda\mathfrak{A}$.

Когда 2 формулы задают одну и ту же функцию?

П р и м е р 1. Обозначим через f и g функции, присоединённые, соответственно, к формулам $\mathrm{A}_1 \vee \rceil \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_2$ и $\mathrm{A}_3 \vee \rceil \mathrm{A}_3 \to \mathrm{A}_2$. Эти формулы равносильны, а $\mathrm{f} \neq \mathrm{g}$, так как $\mathrm{f}(1, 0) = 0$ (напоминаю, что $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ – канонический список переменных, переменные в нём расположены по алфавиту), а $\mathrm{g}(1, 0) = 1$.

---

[1] Буль (G.Boole) – английский математик и логик середины XIX века, один из основоположников математической логики.

Пример 2. Формулы A_1 и A_2 не равносильны, а $\lambda A_1 = \lambda A_2$.

1	2
$a_1 \ldots a_n$	$f(a_1,\ldots,a_n)$
1 … 1	b_1
1 … 0	b_2
⋮	⋮
0 … 0	b_{2^n}

$\xrightarrow{\varphi}$

1	2	3
$A_1 \ldots A_n$		
и … ***и***	$\varphi(b_1)$	$A_1 \& \ldots \& A_n$
и … ***л***	$\varphi(b_2)$	$A_1 \& \ldots \& \neg A_n$
⋮	⋮	⋮
л … ***л***	$\varphi(b_{2^n})$	$\neg A_1 \& \ldots \& \neg A_n$

Рис. 20

Легко доказать, что *формулы <u>от одних и тех же переменных</u> тогда и только тогда задают одну и ту же булеву функцию, когда они равносильны.*

С другой стороны, *для произвольной булевой функции* f *существует задающая её формула исчисления* **K**.

Если n-местная функция f тождественно равна 0, то её задаёт (любая) тождественно-ложная формула от переменных (для определённости) $A_1, \ldots, A_n$.

В противном случае из таблицы значений функции f, в левой части которой наборы из «нулей» и «единиц» упорядочены по алфавиту, причём 1 считается предшествующей 0, при помощи биекции φ составьте соответствуюшую истинностную таблицу и в её третьем столбце выпишите канонические элементарные конъюнкции с кортежем показателей из первого столбца (рис. 20). Дизъюнкция тех конституэнт из третьего столбца, перед которыми во втором столбце стоит ***и*** (такие строчки существуют, поскольку функция f не равна тождественно 0), является искомой формулой.

О булевых функциях можно прочесть, например, в гл. 1 книги [20]. Кое-что о них также говорится в приложении 2.

2. Булевы алгебры в исчислении высказываний [i]

Кроме множества $\mathfrak{F}$ всех формул исчисления **К** нам понадобится ещё множество $\mathfrak{F}_n$ формул, построенных из переменных $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Обозначим через Ξ и через Ξ_n фактормножества, соответственно, множества $\mathfrak{F}$ и множества $\mathfrak{F}_n$ по отношению равносильности.

Наконец, обозначим через Φ множество всех булевых функций, а через Φ_n – множество n-местных булевых функций.

Как известно, кольцоид $\langle\Phi_n, +, \cdot\rangle$ является булевой решёткой. (На множестве Φ не видно естественно определяемых операций.)

На множествах $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_n$ естественно рассмотреть операции $\vee$ и $\&$.

Кольцоид $\langle \mathfrak{F}, \vee, \& \rangle$ «никакими свойствами не обладает». Этой шутливой фразой я хочу сказать, что ни одна из его основных операций ни коммутативна ($A_1 \& A_2$ и $A_2 \& A_1$ – это разные, хотя и равносильные, формулы), ни ассоциативна. Поэтому этот кольцоид ни кольцом, ни решёткой (в частности, булевой решёткой) не является.

С другой стороны, отношение равносильности на множестве $\mathfrak{F}$ является конгруэнцией в кольцоиде $\langle \mathfrak{F}, \vee, \& \rangle$. Поэтому можно рассмотреть факторкольцоид этого кольцоида по отношению равносильности. Носителем указанного факторкольцоида является множество Ξ, операции определяются в нём стандартным образом.

Легко проверить, что кольцоид $\langle\Xi, \vee, \&\rangle$ является булевой решёткой.

Кольцоид $\langle \mathfrak{F}_n, \vee, \& \rangle$ тоже «никакими свойствами не обладает» (в том же смысле). Он тоже не является ни кольцом, ни решёткой (в частности, булевой решёткой).

Но опять отношение равносильности на множестве $\mathfrak{F}_n$ является конгруэнцией в кольцоиде $\langle \mathfrak{F}_n, \vee, \& \rangle$. Носителем факторкольцоида этого кольцоида по отношению равносильности является множество Ξ_n, операции в нём опять определяются стандартным образом.

---

[i] В этом дополнении используются сведения из общей алгебры (см., например, книгу [17] – я применяю терминологию именно этой книги). «Булева алгебра» и «булева решётка» – синонимы.

Кольцоид $\langle \Xi_n, \vee, \& \rangle$ тоже является булевой решёткой. Это легко проверить непосредственно, но можно применить теорему об эпиморфизмах кольцоидов (отображение ψ: $\mathfrak{A} \to \lambda\mathfrak{A}$ множества $\mathfrak{F}_n$ в множество Φ_n является эпиморфизмом кольцоида $\langle \mathfrak{F}_n, \vee, \& \rangle$ на булеву решётку $\langle \Phi_n, +, \cdot \rangle$) и получить не только, что кольцоид $\langle \Xi_n, \vee, \& \rangle$ является булевой решёткой, но и что кольцоид $\langle \Xi_n, \vee, \& \rangle$ изоморфен булевой решётке $\langle \Phi_n, +, \cdot \rangle$.

3. Исчисления высказываний в разных алфавитах

Иногда в исходный алфавит берут другой набор связок [i].

Пример 1. Исходный набор: $\rceil, \to$ ([14], § 20). Если к схемам аксиом $(\Delta_1), (\Delta_2)$ добавить схему $(\rceil\mathfrak{A}_1 \to \rceil\mathfrak{A}_2) \to (\mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_1)$, получается классическое исчисление.

Пример 2. Исходный набор: $\rceil, \vee$ ([2]). Вводим синтаксическое сокращение: $\alpha \to \beta \underset{Df}{\overline{\underline{\circ}}} \rceil\alpha \vee \beta$. Если к схеме (Δ_6) добавить схемы

$\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \to \mathfrak{A}_2 \vee \mathfrak{A}_1$, $\quad (\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2) \to (\mathfrak{A}_3 \vee \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_3 \vee \mathfrak{A}_2)$, $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1$, получается классическое исчисление.

Пример 3. Включим в исходный набор связку $\to$ и логическую константу **f** [ii] ([14], § 10). Вводим синтаксическое сокращение: $\rceil\alpha \underset{Df}{\overline{\underline{\circ}}} \alpha \to \mathbf{f}$. При наборе схем аксиом $(\Delta_1), (\Delta_2)$, (Δ_{10}) получается классическое исчисление.

Лукасевич [iii] придумал, как обойтись без скобок.

Если, например, взять набор связок исчисления **K** и при определении формульного описания вместо «$P_i \overline{\underline{\circ}} \rceil(P_j)$ для некоторого $j < i$, либо, наконец, $P_i \overline{\underline{\circ}} (P_k) \nabla (P_l)$» написать «$P_i \overline{\underline{\circ}} \rceil P_j$ для некоторого $j < i$, либо, наконец, $P_i \overline{\underline{\circ}} \nabla P_k P_l$», получится определение формулы, удовлетворяющее условию однозначной представимости.

---

[i] Разумеется, каждый раз берут полный набор связок – такой, через который остальные связки семантически выражаются.

[ii] Первая буква английского слова false (ложный).

[iii] Лукасевич (J. Łukasiewicz) – польский математик конца XIX – первой половины XX века.

4. Операции над языками

Пусть $Б \underset{Df}{=} \llcorner б_1, б_2, \ldots, б_n \lrcorner$ – алфавит.

Подмножества множества $Б^\infty$ слов в алфавите Б называют *языками в алфавите* Б.

Таким образом, языки (в данном алфавите) – это множества. Значит, к ним можно применять любые операции, которые применяют к множествам – объединение, пересечение, разность, дополнение (до $Б^\infty$) и т. д.

Но языки – это не просто множества, а множества, элементами которых являются слова. Поэтому к ним можно применять и некоторые специфические операции.

Рассмотрим 3 такие операции.

Исходя из конкатенации слов, естественно определим *конкатенацию* Ш • Щ языков Ш и Щ, как множество конкатенаций слов из Ш со словами из Щ.

Как и операция конкатенации слов, операция конкатенации языков тоже ассоциативна:

$$(Ц \bullet Ш) \bullet Щ = Ц \bullet (Ш \bullet Щ)\,.$$

Значит, это верно и для любого (конечного) числа языков. Поэтому можно ввести понятие степени языка:

$$Щ^n \underset{Df}{=} \underbrace{Щ \cdot \ldots \cdot Щ}_{n\text{ языков}} \quad (n \geq 2),$$

$$Щ^1 \underset{Df}{=} Щ,$$

$$Щ^0 \underset{Df}{=} \{\Lambda\}.$$

Отталкиваясь от этих определений, назовём *итерацией* языка Щ язык

$$[Щ] \underset{Df}{=} \bigcup_{n=0}^{\infty} Щ^n\,.$$

Для любого языка Щ $\Lambda \in [Щ]$.

Назовём *проекцией слова* Р *на алфавит* В и обозначим через $пр_В Р$ слово (быть может, пустое!), которое получится, если из слова Р вычеркнуть все буквы, не принадлежащие алфавиту В.

Назовём *проекцией языка* Щ *на алфавит* В и обозначим через $\text{пр}_\text{В}$Щ множество проекций слов из Щ на алфавит В.

Опять-таки, если Щ $\neq \varnothing$, $\Lambda \in \text{пр}_\text{В}$Щ.

5. Регулярные языки

Пусть $\text{Б} \underset{Df}{=} \llcorner б_1, б_2, \ldots, б_n \lrcorner$ – алфавит.

Язык Щ в алфавите Б называется *регулярным*, если он либо пуст, либо может быть получен из языков $\{б_1\}, \{б_2\}, \ldots, \{б_n\}, \{\Lambda\}$ при помощи операций объединения, конкатенации и итерации.

Легко, конечно, переформулировать это определение в виде стандартной триады: регулярное описание, регулярное описание данного языка, регулярный язык.

Класс регулярных языков в алфавите Б занимает промежуточное место между классом конечных языков в алфавите Б и классом разрешимых (относительно Б^{∞}) языков в алфавите Б: каждый конечный язык регулярен, существуют бесконечные регулярные языки (например, Б^{∞}), каждый регулярный язык разрешим – всё это легко доказывается.

Немного труднее привести доказательный пример разрешимого, но не регулярного языка (таким является, например, язык, состоящий из слов, длина которых есть квадрат натурального числа).

6. Программа

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Математическая логика

Доказательство.

Математическая логика.

§2. Формализованный язык

1. Синтактика.

Алфавит.

Исходные слова. Правила образования.

Формульное описание. Формульное описание данного слова. Формула. Обозначение: $\mathfrak{F}$.

Требование эффективности СИ.

2. Дедуктика.

Аксиомы, правила вывода.

Посылки, заключение, непосредственное следствие.

Доказательство (формальное доказательство), доказательство данной формулы, доказуемая формула (формальная теорема). Обозначения: $\underset{\text{И}}{\vdash} Q$, $\text{Т}_{\text{И}}$.

Простейшие свойства доказуемости.

Требования эффективности ДЕ_0, $\text{ДЕ}_{(*)}$.

Разрешимость множества доказательств, перечислимость множества доказуемых формул.

Вывод из данного списка формул, вывод данной формулы из данного списка, формула, выводимая из данного списка. Обозначение: $\Gamma \underset{\text{И}}{\vdash} Q$.

Простейшие свойства выводимости. Выводимость и доказуемость.

Разрешимость множества выводов из данного списка, перечислимость множества формул, выводимых из данного списка.

Дедуктивно равные формулы.

3. Семантика.
Интерпретация (значение).
Правильная интерпретация. Главная интерпретация.

А. ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

А1. ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

ГЛАВА I

ИСЧИСЛЕНИЕ К

§ 1. Синтактика

Алфавит $A_К$. Высказывательные переменные (алфавитный порядок).

Логическая длина слова (лд $\lfloor P \rfloor$). Скобочный индекс слова (си $\lfloor P \rfloor$).

Формула. Несократимое формульное описание. Подформула (3 определения).

Синтаксическая проблема разрешения; разрешимость множества формул.

Теорема о представимости. Теорема об однозначной представимости.

Главное вхождение логического знака (главный логический знак), отыскание его. Непосредственные составляющие.

Теорема о подформулах. Синтаксическая теорема о замене. Теорема о соответствующей скобке.

Область действия (вхождения) логического знака. Глубина (вхождения) подформулы.

Алфавит $A'_К$. Формульные переменные.

Формульная схема. Формула, построенная по данной формульной схеме.

Опускание скобок.

§ 2. Семантика

Главная интерпретация.

Список переменных, нормальный (канонический) для данной формулы. Обозначения: ксп $\lfloor\alpha\rfloor$, # ксп $\lfloor\alpha\rfloor$, ксп $\lfloor\alpha, \beta\rfloor$.

Значение данной формулы относительно данного списка переменных на данном истинностном кортеже. Обозначение: $|\alpha|_{е}^{ш}$.

Тождественно-истинная (общезначимая) формула, тавтология. Выполнимая (тождественно-ложная) формула.

Семантическая проблема разрешения; разрешимость множества тавтологий.

Равносильные формулы.

Семантическая теорема о замене. Семантическая теорема о подстановке.

Важнейшие равносильности. Законы Де Моргана. Закон контрапозиции. Закон исключенного третьего.

Негатив данной формулы ($\alpha^{\rceil}$). Формула, двойственная к данной формуле (α^{*}). Семантический закон двойственности.

Нормальные формы. Элементарная дизъюнкция (конъюнкция). Каноническая элементарная дизъюнкция (конъюнкция), Кортеж показателей элементарной дизъюнкции (конъюнкции). Конъюнктивная (дизъюнктивная) нормальная форма данной формулы. Совершенная конъюнктивная (совершенная дизъюнктивная) нормальная форма данной формулы. Существование, единственность, отыскание нормальных форм.

Семантическое следствие. Обозначения: $\alpha \vDash \beta$; $\alpha_1,\ldots,\alpha_к \vDash \beta$. Обзор всех семантических следствий данной формулы.

§ 3. Дедуктика

Схемы аксиом, аксиомы. Правило вывода MP.

Выполнение требований эффективности. Правильность главной интерпретации.

Теорема о дедукции. Теорема о введении-удалении. Закон контрапозиции. Правило добавления посылки. Дедуктивная теорема о подстановке.

Эквиваленция формул. Дедуктивно эквивалентные формулы.

Дедуктивная теорема о замене. Дедуктивный закон двойственности.

Теорема о полноте.

Дедуктивная проблема разрешения. Равносильность и дедуктивная эквивалентность.

ГЛАВА II

ИСЧИСЛЕНИЕ К′

Аксиомы. Правила вывода МР и ПП.

Выполнение требований эффективности. Правильность главной интерпретации.

Доказуемость в исчислениях **К′** и **К**.

Выводимость. Вывод из данного списка с анализом. Зависимость формул в выводе. Переменная, варьируемая (фиксированная, нетронутая) для данной формулы.

Хороший вывод. Обозначение: $\Gamma \vdash_{x} \alpha$.

Теорема о дедукции. Теорема о введении-удалении.

ГЛАВА III

ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ В АЛФАВИТЕ $А_К$

Схемное (обыкновенное) исчисление. Соответствующие исчисления.

Эквивалентные исчисления. Эквивалентность соответствующих – схемного и обыкновенного – исчислений.

Классическое исчисление. Универсальное исчисление. Предуниверсальное исчисление. Пустое исчисление.

Предуниверсальность классических исчислений.

ГЛАВА IV

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИСЧИСЛЕНИЙ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1. Непротиворечивость

Непротиворечивость: семантическая, относительно отрицания, абсолютная.

Соотношение между различными видами непротиворечивости. Непротиворечивость классических исчислений.

§ 2. Интермедия

Конструкция: НЕжное $\Rightarrow$ ПОзолоченное.

§ 3. Полнота

Полнота: относительно семантической непротиворечивости, относительно отрицания, абсолютная, семантическая.

Соотношение между различными видами полноты. Полнота классических исчислений.

Непротиворечивость и полнота.

§ 4. Независимость

Независимость аксиомы в обыкновенном исчислении. Непротиворечивость и независимость. Независимость аксиом исчисления **К**′.

Независимость (сильная независимость) схемы аксиом в схемном исчислении. Независимость (сильная независимость) схем аксиом исчисления **К**.

А2. ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

ГЛАВА V

ИСЧИСЛЕНИЕ L

§ 1. Синтактика

Алфавит A_L. Высказывательные, предикатные, предметные переменные. Алфавитный порядок.

Логическая длина слова.

Формула. Предикация. Подформула.

Синтаксическая проблема разрешения; разрешимость множества формул.

Теорема об однозначной представимости. Главное вхождение логического знака (главный логический знак). Непосредственные составляющие.

Теорема о подформулах. Синтаксическая теорема о замене. Теорема о соответствующей скобке. Область действия (вхождения) логического знака. Глубина (вхождения) подформулы.

Связанное (свободное) вхождение. Связанные (свободные) переменные данной формулы. Замыкание формулы. Вхождение переменной, связанное данным вхождением квантора. Конгруэнтные формулы.

Подстановка вместо предметной (высказывательной) переменной. Допустимая подстановка. Обозначения: $\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y}\llcorner\alpha\lrcorner$, $!\underline{\mathbf{S}}^{x}_{y}\llcorner\alpha\lrcorner$.

Опускание скобок.

§ 2. Семантика

Предикат. Предикат на множестве U. n-местный предикат на множестве U. Предикаты и высказывательные формы. Область истинности предиката. Перечислимый (разрешимый) предикат.

Главная интерпретация на данном множестве.

Список переменных, нормальный (канонический) для данной формулы.

Значение данной формулы, проинтерпретированной на некотором множестве, относительно данного списка переменных на данном кортеже значений. Обозначение: ${}^{U}|\alpha|^{\text{ш}}_{e}$.

Формула, выполнимая (общезначимая, тождественно-ложная) на данном множестве; конечно-выполнимая (конечно-общезначимая) формула; выполнимая (общезначимая, тождественно-ложная) формула. Тавтология; общезначимость тавтологий. Связь между выполнимостью на данном множестве (конечно-выполнимостью, выполнимостью) и общезначимостью на данном множестве (конечно-общезначимостью, общезначимостью). Связь между общезначимостью формулы и общезначимостью ее замыкания. Сохранение выполнимости (общезначимости) при переходе к равномощному множеству, подмножеству, надмножеству. Теорема Лёвенгейма (без доказательства).

Теорема Чёрча (без доказательства). Теорема Трахтенброта (без доказательства). Разрешимость множества формул, общезначимых на данном конечном множестве. .

Формулы, равносильные на данном множестве; равносильные формулы.

Семантическая теорема о замене. Семантическая теорема о подстановке. Равносильность конгруэнтных формул.

Важнейшие равносильности.

Негатив данной формулы. Формула, двойственная к данной формуле. Семантический закон двойственности.

Предваренная нормальная форма данной формулы (существование, единственность, отыскание).

§ 3. Дедуктика

Схемы аксиом, аксиомы. Правила вывода МР, ПО, ПК.

Выполнение требований эффективности. Правильность главных интерпретаций.

Общезначимость доказуемых формул.

Выводимость. Вывод из данного списка с анализом. Зависимость формул в выводе. Варьируемая переменная.

Хороший вывод. Ш–вывод. Обозначения: $\Gamma \vdash_{\text{x}} \alpha$, $\Gamma \overset{\text{ш}}{\vdash} \alpha$, $\Gamma \overset{\wedge}{\vdash} \alpha$.

Дедуктивная теорема о подстановке. Теорема о дедукции. Теорема о введении-удалении. Правило подстановки вместо предметной переменной.

Эквиваленция формул. Дедуктивно эквивалентные формулы. Дедуктивное равенство и дедуктивная эквивалентность.

Дедуктивная теорема о замене. Дедуктивная эквивалентность конгруэнтных формул. Дедуктивный закон двойственности.

Теорема Гёделя о полноте (без доказательства).

ГЛАВА VI

ИСЧИСЛЕНИЕ М

Равенство. Эквациональная (смешанная) формула. Замкнутая формула.

Формула, истинная (ложная) на данном множестве; истинная (ложная) формула. Сохранение выполнимости (общезначимости, истинности) при переходе к равномощному множеству. Теорема Лёвенгейма (без доказательства).

Схемы аксиом, аксиомы.

Б. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

ГЛАВА VII

ИСЧИСЛЕНИЕ И

§ 1. Синтактика

Сигнатура: предикатные, функциональные и предметные постоянные.

Термы и формулы.

Замкнутые термы и формулы.

§ 2. Семантика

Интерпретация, носитель интерпретации.

Значение терма ${}^{\mathrm{I}}|\,t\,|_{e}^{\text{Ш}}$ и формулы ${}^{\mathrm{I}}|\,\alpha\,|_{e}^{\text{Ш}}$.

Изоморфные интерпретации.

§ 3. Дедуктика

Формальный (неформальный) аксиоматический метод.

Аксиомы (постулаты).

Модель исчисления. Изоморфные интерпретации и модели.

Семантическое следствие. Доказуемые формулы и семантические следствия.

§ 4. Основные свойства математических исчислений

Наличие модели.

Непротиворечивость относительно отрицания.

Исчисление семантически полное, дедуктивно полное, категоричное. Соотношение между различными видами полноты.

ГЛАВА VIII

ИСЧИСЛЕНИЕ AR

§ 1. Синтактика

Сигнатура.

Арифметическая (логическая) длина слова.

Нумерал.

Теорема об однозначной представимости. Главное вхождение арифметического знака (главный арифметический знак) в терме, отыскание его; главное вхождение логического знака (главный логический знак) в формуле, отыскание его. Непосредственные составляющие терма (формулы).

Теорема о подтермах и подформулах. Синтаксическая теорема о замене. Теорема о соответствующей скобке. Область действия (вхождения) арифметического (логического) знака.

Связанное (свободное) вхождение в формулу (в терм). Замкнутая формула (замкнутый терм).

Подстановка терма вместо переменной в формулу (в терм). Допустимая подстановка.

Сокращения.

Опускание скобок.

§ 2. Семантика

Интерпретация. Главная интерпретация.

Выполнимая (общезначимая, истинная) формула. Семантическая проблема разрешения.

Равносильные термы (формулы). Семантическая теорема о замене. Семантическая теорема о подстановке. Равносильность конгруэнтных формул.

Разрешимость и перечислимость множества € общезначимых формул и множества И истинных формул.

§ 3. Дедуктика

Схемы аксиом, аксиомы. Правила вывода. Выполнение требований эффективности. Правильность главной интерпретации.

Выводимость. Хороший вывод. Ш-вывод.

Дедуктивная теорема о подстановке.

Теорема о дедукции. Теорема о введении-удалении. Правило подстановки вместо предметной переменной.

Правило индукции. Индукция разбором случаев.

Свойства равенства. Дедуктивная теорема о замене.

Свойства сложения и умножения.

Формализованные вычисления. Нумерическая выразимость предиката. Влияние логических операций на нумерическую выразимость. Нумерическая выразимость простейших предикатов. Обозначение: $\exists! x(\alpha)$. Нумерическая выразимость всюду определенной функции. Нумерическая выразимость функции и нумерическая выразимость ее представляющего предиката. Нумерическая выразимость простейших функций.

§ 4. Основные свойства исчисления AR

Непротиворечивость исчисления **AR**.
Неперечислимость множества общезначимых формул.
Неразрешимость множества доказуемых формул.
Неполнота исчисления **AR**.

ГЛАВА IX
ТЕОРЕМА ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ

§ 1. Узкая формулировка

Идея и схема доказательства Гёделя. Гёделевская нумерация.

§ 2. Широкие формулировки

Каркас исчисления. Нормальный каркас. Исчисление с каркасом.

Исчисление с каркасом дедуктивно полное, семантически непротиворечивое, семантически богатое, дедуктивно богатое, содержащее арифметику.

ГЛАВА X
ДРУГИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Ассоциативные исчисления.

Вывод. Выводимость

§ 2. Двухсторонние ассоциативные исчисления

Эквивалентность слов.

§ 3. Порождающие грамматики

Язык, порождаемый грамматикой.

§ 4. Исчисление регулярных выражений

Критерий принадлежности к регулярному языку.

§ 5. Исчисление рекурсивных функций

Функция, определяемая системой равенств.
Критерий частично-рекурсивности.

ГЛАВА XI
ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИСЧИСЛЕНИЙ

§ 1. Исчисления Поста

Операционные переменные.

Строка Поста в данном алфавите. Правило Поста в данном алфавите. Непосредственное следствие по данному правилу.

Исчисление Поста. Алфавит исчисления. Исчисление в данном алфавите (над данным алфавитом). Аксиомы исчисления. Правила вывода исчисления. Выполнение требований эффективности.

Порождаемость (доказуемость). Выводимость. Обозначения: $\frown{\Pi}$, $\frown{\Pi}(\Gamma)$, $\frown{\Pi}_{Ш}$, $\frown{\Pi}_{Ш}(\Gamma)$.

Множество слов, порождаемое по Посту.

Порождаемые по Посту и перечислимые множества.

Тезис Поста.

§ 2. Исчисления по Успенскому

Правило по Успенскому в данном алфавите. Тест правила. Глубина правила. Входные адреса. Выходной адрес. Аксиомное правило.

Исчисление по Успенскому. Алфавит исчисления. Исчисление в данном алфавите (над данным алфавитом). Составность исчисления. Правила исчисления.

Порождающая цепочка (доказательство). Слово (множество слов), порождаемое данным исчислением на данном месте. Множества слов, порождаемые данным исчислением. Разрешимость множества доказательств. Перечислимость множеств, порождаемых данным исчислением.

Множество слов, порождаемое по Успенскому.

Порождаемые по Успенскому и перечислимые множества.

Тезис Успенского.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Булевы функции

Булева функция. Функция $\lambda\mathfrak{A}$, присоединенная к формуле $\mathfrak{A}$. Формула, задающая (реализующая) данную функцию. Формулы, задающие одну и ту же функцию. Существование формулы, задающей произвольную булеву функцию.

2. Булевы алгебры в исчислении высказываний

3. Исчисления высказываний в разных алфавитах

Бесскобочная запись Лукасевича.

4. Операции над языками

Язык в данном алфавите.

Конкатенация языков. Итерация языка. Проекция языка на алфавит.

5. Регулярные языки

Примечания

§ 1 ВВЕДЕНИЯ

[1] Первая известная мне подобная формулировка напечатана в 1965 г.: «Доказательство – это рассуждение, которое убеждает» ([15], с. 108). В 1967 г. В.А.Успенский развил её: «Доказательство (в общепринятом употреблении этого слова) – это всего лишь рассуждение, которое должно убедить нас настолько, что мы сами готовы убеждать с его помощью других» ([8], с. 8). Приведенная выше формулировка, относящаяся к 2009 г., кажется мне более совершенной.

§ 1 главы I

[2] Часто дают альтернативное определение: $P_i \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} (\rceil P_j)$, $P_i \mathrel{\underline{\overline{\circ}}} (P_k \nabla P_l)$. Разумеется, эти определения не равносильны: слово $(A_1) \& (A_2)$ является формулой по нашему определению и не является формулой по альтернативному определению, а слово $(A_1 \& A_2)$ – наоборот. Однако для этого определения однозначная представимость (см. ниже) тоже верна и ПРАКТИЧЕСКИ (я не буду уточнять, что это значит) эти определения равноправны.

§ 1 главы V

[3] Здесь очень важная развилка – разрешить или не разрешить навешивать кванторы на предикатные переменные. Языки (исчисления), в которых, как в данной книге, это не разрешается, называются языками (исчислениями) *первого порядка.* Те, в которых разрешается, – языками (исчислениями) *второго порядка.* Скажем, математический анализ нельзя изложить на языке первого порядка – одну из аксиом (например, «теорему о точной границе» – см. [15]) на этом языке сформулировать нельзя. О языках (исчислениях) второго порядка можно прочесть в [2] и в [14]. Популярное изложение связанных с этим вопросов – в [10].

§ 2 главы V

[4] Похожие понятия: булева функция (приложение 1), характеристическая функция и алгоритм-распознаватель ([18]).

§ 3 главы V

[5] С оригинальным доказательством Гёделя можно познакомиться по книгам [2], [6], [14].

В 1949 г. американский математик Л.Генкин придумал более простое доказательство теоремы Гёделя о полноте (в 1953 г. оно было упрощено немецким математиком Г.Хазенъегером). С этим доказательством можно познакомиться по книгам [3], [13].

Глава VI

[6] На всякий случай хочу предупредить читателя: обозначения главных логических исчислений в этой книге: **K** (**K′**), **L**, **M** – ни в малейшей степени не являются общепринятыми. Это придуманные мной учебные обозначения.

§ 4 главы VII

[7] Исчисление, описывающее понятие группы, не категорично – это очень хорошо. Значит, существует много не изоморфных групп. Значит, теория групп – богатая и интересная теория.

Исчисление (правда, второго порядка), описывающее понятие действительного числа (поле действительных чисел), категорично. Это очень здорово! Это большой успех математики (и математиков). Значит, понятие действительного числа удалось описать.

§ 4 главы VIII

[8] В доказательстве непротиворечивости исчисления **AR** (§ 3 гл.VIII) я, вопреки установке Гильберта, апеллирую к интерпретации. Доказательства, не прибегающие к интерпретации, были получены Генценом в 1936 г. и П.С.Новиковым в 1943 г.

§ 2 главы XI

[9] С содержанием данного параграфа я, вероятно, познакомился когда-то (лет эдак 50 назад) на лекциях В.А.Успенского. Мне не известно, опубликовано ли это где-нибудь. Соответственно, за содержание параграфа В.А.Успенский ответственности не несёт. Все употреблённые в параграфе термины (вроде «правило по Успенскому», «исчисление по Успенскому», «тезис Успенского») принадлежат мне.

УПОМЯНУТАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. «Теория множеств»
(М.: «Мир», 1965).

2. Гильберт Д. и Аккерман В. «Основы теоретической логики»
(М.: ИЛ, 1947).

3. Гладкий А.В. «Математическая логика»
(М.: РГГУ, 1998).

4. Клини С.К. «Введение в метаматематику»
(М.: ИЛ, 1957).

5. Манин Ю.И. «Теорема Гёделя»
(«Природа», 1975, №12, с. 80 – 87). [Перепечатано в книге «Математика как метафора» (М.: МЦНМО, 2008)].

6. Новиков П.С. «Элементы математической логики»
(М.: ФМ, 1959).

7. Успенский В.А. «Лекции о вычислимых функциях»
(М.: ФМ, 1960).

8. Успенский В.А. Предисловие к сборнику переводов «Математика в современном мире»
(М.: «Мир», 1967). [Отрывок из этого предисловия перепечатан в книге Владимир Успенский «Апология математики» (СПб.: «Амфора», 2009), цитируемая фраза – на с. 14.]

9. Успенский В.А. «Теорема Гёделя о неполноте»
(М.: «Наука», ФМ, 1982;
серия «Популярные лекции по математике», вып. 57).

10. Успенский В.А. «Семь размышлений на темы философии математики»
[в книге Владимир Успенский «Апология математики» (СПб.: «Амфора», 2009) – дополненное издание статьи, напечатанной в сборнике «Закономерности развития современной математики. Методологические аспекты» (М.: «Наука», 1987)].

11. Успенский В.А. «Простейшие примеры математических доказательств»
(М.: МЦНМО, 2009; библиотека «Математическое просвещение», вып. 34). [Перепечатано в книге Владимир Успенский «Апология математики» (СПб.: «Амфора», 2009)]

12. Успенский В.А., Семёнов А.Л. « Теория алгоритмов: основные открытия и приложения»
(М.: «Наука», ФМ, 1987; библиотечка программиста.)

13. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. « Вводный курс математической логики»
(М.: ФМ, 2004).

14. Чёрч А. «Введение в математическую логику, том первый»
(М.: ИЛ, 1960).

15. Шиханович Ю.А. «Введение в современную математику (начальные понятия)»
(М.: «Наука», ФМ, 1965).

16. Шиханович Ю.А. «Введение в математику»
(М.: «Научный мир», 2005).

17. Шиханович Ю.А. «Группы, кольца, решётки»
(СПб.: «Кирцидели», 2006).

18. Шиханович Ю.А. «Минимум по теории алгоритмов для нематематиков»
(М.: «Научный мир», 2009).

19. Шиханович Ю.А. «Начальные главы математического анализа в полуформальном изложении»
(М.: «Научный мир», 2010).

20. Яблонский С.В. «Введение в дискретную математику»
(М.: «Наука», ФМ, 1979).

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

Г

Д

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Я

***

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

А. Константы

Б. Синтаксические

В. Семантические

Г. Дедуктивные

Д. Прочие

Для заметок

Учебное пособие

Юрий Александрович ***ШИХАНОВИЧ***

ЛОГИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

«Научный мир»
Тел./факс: +7 (495) 691-2847; +7 (499) 973-2513
E-mail: naumir@benran.ru E-mail: naumir@naumir.ru.

Internet: http://www.naumir.ru
http://www.bookish.ru

Подписано к печати 23.12.2010
Формат 60×90/16
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Печ. л. 16
Тираж 1000 экз. Заказ 111
Издание отпечатано в типографии
ООО «Галлея-Принт»
Москва, ул. 5-я Кабельная, 2-б