ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ
АКАДЕМИЯ НАУК МОЛДОВЫ

И. В. БЕЛОУСОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

матрицы и определители

Кишинев: 2007

CZU 512.643(075.8)

Б 43

Данное учебное пособие является частью курса лекций, которые автор на протяжении ряда лет читает на экономическом факультете Славянского университета РМ. Оно адресовано учащимся лицеев, колледжей и студентам нематематических факультетов университетов, изучающих линейную алгебру. Подробное изложение рассматриваемого в пособии материала, детальное доказательство всех без исключения теорем, следствий и замечаний сопровождается большим количеством примеров, приводимых с решениями. Все это делает пособие доступным для понимания неподготовленным читателем. Для его чтения достаточно знания лишь элементарной математики.

Редактор: академик АНМ В. И. Арнаутов

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

Белоусов, Игорь

Элементы линейной алгебры: Матрицы и определители: [pentru uzul studenţilor] / Игорь Белоусов. - Ch.: S. n., 2007 (Tipogr. "Valinex"SA). - 132 p.

Bibliogr. pag. 132 (5 tit.)

ISBN 978-9975-68-049-3

20 ex.

512.643(075.8)

ISBN 978-9975-68-049-3

Оглавление

Светлой памяти моих родителей,
Людмилы и Виктора Белоусовых,
посвящаю эту книгу.

Автор

1 Основные сведения о матрицах

Определение *Матрицей* A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, функций или алгебраических выражений, содержащая m строк и n столбцов. Числа m и n определяют *размер* матрицы. Условимся обозначать матрицы прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D, $\ldots$. Числа, функции или алгебраические выражения, образующие матрицу, называются *матричными элементами*. Будем обозначать их строчными буквами с двумя индексами. Первый индекс i=1,2,...,m указывает номер строки, а второй индекс j=1,2,...,n — номер столбца, в которых располагается соответствующий элемент. Таким образом,

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} . \qquad (1.1)$$

Здесь и в некоторых последующих формулах под символом матрицы указан ее размер. Часто используется обозначение $A = (a_{ij})$ матрицы (1.1), в котором i=1,2,...,m и j=1,2,...,n.

Определение Две матрицы A и B одинакового размера называются *равными*, если они совпадают поэлементно, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i=1,2,...,m и j=1,2,...,n.

Определение Матрица $A = (a_{11}\, a_{12}\, \ldots a_{1n})$, состоящая из одной строки, называется *матрицей–строкой*, а матрица

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} ,$$

состоящая из одного столбца, — *матрицей–столбцом*.

Определение Матрица называется *квадратной* n–го порядка, если число ее строк равно числу столбцов и равно n:

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

— квадратная матрица третьего порядка.

Определение Матричные элементы a_{ii} квадратной матрицы $\underset{n\times n}{A}$ называются *диагональными* $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Определение Последовательность a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} диагональных матричных элементов образует *главную диагональ* квадратной матрицы, идущую из ее левого верхнего угла в правый нижний угол. Последовательность a_{n1}, $a_{(n-1)2}$, ..., a_{1n} матричных элементов образует *побочную диагональ* квадратной матрицы, идущую из ее левого нижнего угла в правый верхний угол.

Определение Если все *недиагональные* элементы квадратной матрицы равны нулю, т. е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то такая матрица называется *диагональной*.

Пример 1.2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

— диагональная матрица второго порядка,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

— диагональная матрица третьего порядка.

Определение Если у диагональной матрицы n–го порядка E все диагональные элементы равны единице, то такая матрица называется *единичной* матрицей n–го порядка.

Пример 1.3

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица третьего порядка.

Определение Матрица любого размера называется *нулевой*, или *нуль–матрицей*, если все ее элементы равны нулю:

$$\underset{m \times n}{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В отличие от чисел, где число 0 единственно, нулевых матриц бесконечно много, т. к. каждому размеру матриц соответствует нулевая матрица этого размера.

2 Операции над матрицами и их свойства

2.1 Умножение матрицы на число

Определение *Произведением* λA *матрицы* $A = (a_{ij})$ *на число* λ называется матрица $B = (b_{ij})$, элементы которой

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

для всех i=1,2,…,m и j=1,2,…,n.

Пример 2.1 Если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \text{то} \qquad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 15 & 12 & -15 \end{pmatrix}.$$

Следствие *Общий множитель всех элементов матрицы можно вынести за знак матрицы.*

Пример 2.2

$$\begin{pmatrix} 15 & 5 & 0 \\ 20 & -5 & 0 \\ 30 & 15 & 40 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

2.2 Сложение матриц

Определение *Суммой* $A + B$ двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$, элементы которой

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

для всех i=1,2,...,m и j=1,2,...,n.

Пример 2.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 8 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 12 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно правилу сложения матриц $A+O = A$, где A — произвольная матрица, а O — нулевая матрица того же размера, что и A.

2.3 Вычитание матриц

Определение *Разность* $A - B$ двух матриц одинакового размера определяется с помощью операции умножения матрицы B на число -1 и последующего сложения матриц A и $(-1)\,B$, т. е.

$$A - B = A + (-1)B\,.$$

Некоторые свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами. В частности, из определений операций умножения матрицы на число и сложения матриц следует, что

1. $A + B = B + A$ — свойство коммутативности при сложении матриц.

   Доказательство. Так как операция сложения определена только для матриц одинакового размера, причем сумма матриц является матрицей того же размера, что и слагаемые матрицы, то очевидно, что размер матрицы $A + B = F$ равен размеру матрицы $B + A = G$.

Докажем, что и все элементы матрицы F равны соответствующим элементам матрицы G. Из определения суммы двух матриц следует, что

$$f_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = g_{ij}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. Согласно определению равенства матриц, это означает, что $F = G$, т. е. $A + B = B + A$.

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ — свойство ассоциативности при сложении матриц.

   Доказательство. Нетрудно убедиться, что размер матрицы $(A + B) + C$ совпадает с размером матрицы $A + (B + C)$ (см. доказательство предыдущего свойства).

   Докажем, что все элементы матрицы $(A + B) + C$ равны соответствующим элементам матрицы $A + (B + C)$. Предварительно введем обозначения

$$A + B = F\,, \qquad B + C = G$$

   и определим новые матрицы

$$L = F + C = (A + B) + C\,, \qquad Q = A + G = A + (B + C)\ .$$

   Из определения операции сложения матриц следует, что

$$l_{ij} = f_{ij} + c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} = a_{ij} + g_{ij} = q_{ij}$$

   для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. Согласно определению равенства матриц, это означает, что $L = Q$, т. е. $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. $(\lambda\mu)\,A = \lambda\,(\mu A)$ — свойство ассоциативности при умножении чисел и матрицы.

   Доказательство. Отметим, что согласно определению операция умножения матрицы на число не изменяет ее размера. Поэтому матрицы

$$(\lambda\mu)\,A = F \qquad \text{и} \qquad \lambda\,(\mu A) = G$$

   имеют один и тот же размер.

Докажем что все элементы матрицы F равны соответствующим элементам матрицы G. Введем обозначение

$$\mu A = L\,.$$

Тогда

$$G = \lambda L\,.$$

Из определения операции умножения матрицы на число следует, что

$$f_{ij} = (\lambda\mu)\,a_{ij} = \lambda\,(\mu a_{ij}) = \lambda l_{ij} = g_{ij}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. В соответствии с определением равенства матриц, это означает, что $F = G$, т. е. $(\lambda\mu)\,A = \lambda\,(\mu A)$.

4. $\lambda\,(A + B) = \lambda A + \lambda B$ — свойство дистрибутивности при умножении суммы матриц на число.

Доказательство. Так как при умножении матрицы на число ее размер сохраняется, а операция сложения матриц определена только для матриц одинакового размера, то очевидно, что размер матрицы $\lambda\,(A + B)$ равен размеру матрицы $\lambda A + \lambda B$.

Докажем, что все элементы матрицы $\lambda\,(A + B)$ равны соответствующим элементам матрицы $\lambda A + \lambda B$. Введем обозначения

$$(A + B) = F, \qquad \lambda A = L, \qquad \lambda B = Q$$

и определим новые матрицы:

$$G = \lambda F = \lambda\,(A + B)\;,$$

$$R = L + Q = \lambda A + \lambda B\,.$$

Из определения операций сложения матриц и умножения матрицы на число следует, что

$$g_{ij} = \lambda f_{ij} = \lambda\,(a_{ij} + b_{ij}) = \lambda a_{ij} + \lambda b_{ij} = l_{ij} + q_{ij} = r_{ij}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. В соответствии с определением равенства матриц, это означает, что $G = R$, т. е.

$$\lambda\,(A + B) = \lambda A + \lambda B\,.$$

5. $(\lambda+\mu)\,A = \lambda A + \mu A$ — свойство дистрибутивности при умножении суммы чисел на матрицу.

   Доказательство. Очевидно, что размер матрицы $(\lambda+\mu)\,A$ совпадает с размером матрицы $\lambda A + \mu A$ (см. доказательство предыдущего свойства).

   Докажем, что все элементы матрицы $(\lambda+\mu)\,A$ равны соответствующим элементам матрицы $\lambda A + \mu A$. Введем обозначения

$$(\lambda+\mu)\,A = F, \qquad \lambda A = L, \qquad \mu A = Q$$

   и определим новую матрицу:

$$R = L + Q = \lambda A + \mu A\,.$$

   Из определения операций сложения матриц и умножения матрицы на число следует, что

$$f_{ij} = (\lambda+\mu)\,a_{ij} = \lambda a_{ij} + \mu a_{ij} = l_{ij} + q_{ij} = r_{ij}$$

   для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$. В соответствии с определением равенства матриц, это означает, что $F = R$, т. е.

$$(\lambda+\mu)\,A = \lambda A + \mu A\,.$$

Пример 2.4 Вычислить $A+B$ и $-(A+B)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A+B = \begin{pmatrix} 2+0 & 3-2 & 5-7 \\ 1-1 & 4+2 & -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix},$$

$$-(A+B) = -\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.5 Найти сумму матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сумма не существует т. к. матрицы A и B имеют разные размеры.

Пример 2.6 Вычислить $C = 5A - 2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} C &= 5\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= 5\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 5 & 20 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 4 & -10 \\ 0 & -12 & 8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 19 & 15 \\ 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

<u>Замечание</u> 2.1 Введенное нами понятие матриц, которые можно сравнивать между собой и для которых определены операции сложения, вычитания и умножения на число, позволяет представить совокупность различных алгебраических соотношений в компактной, "матричной" форме. Например, 4 соотношения

$$\begin{array}{ccccc} 2a_1 & + & b_1 & = & 3c_1\,, \\ 2a_2 & + & 3b_2 & = & 6c_2\,, \\ 6a_3 & + & b_3 & = & 3c_3\,, \\ 8a_4 & + & 5b_4 & = & 9c_4\,, \end{array} \tag{2.1}$$

в которых a_i, b_i и c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — некоторые числа, можно представить в виде одного матричного соотношения

$$2A + B = 3C\,, \tag{2.2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 3a_3 & 4a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 3b_2 \\ b_3 & 5b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 2c_2 \\ c_3 & 3c_4 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Из уравнения (2.2) нетрудно выразить матрицу A через матрицы B и C. Прибавим к левой и правой частям (2.2) матрицу $-B$. Так как $B - B = O$, а $2A + O = 2A$, то мы получим:

$$2A = -B + 3C\,. \tag{2.4}$$

Очевидно, что как и в случае чисел, преобразование матричного уравнения (2.2) к виду (2.4) представляет собой простой перенос матрицы B в правую часть равенства (2.2) с изменением знака коэффициента при ней (равного единице) на противоположный.

Из (2.4) найдем, что

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2A = \frac{1}{2} \left(-B + 3C \right) .$$

Учитывая свойство дистрибутивности при умножении суммы матриц на число, а также свойство ассоциативности при умножении чисел и матрицы, получим окончательно:

$$A = (-1/2)\ B + (3/2)\ C\,. \tag{2.5}$$

Заметим, что (2.5) может быть получено из (2.4) простым умножением на число $1/2$.

Подставляя в (2.5) матрицы A, B и C из (2.3) и учитывая определение равенства двух матриц, найдем:

$$\begin{array}{rcrcl} 2\,a_1 & = & -\,b_1 & + & 3\,c_1\,, \\ 2\,a_2 & = & -3\,b_2 & + & 6\,c_2\,, \\ 6\,a_3 & = & -\,b_3 & + & 3\,c_3\,, \\ 8\,a_4 & = & -5\,b_4 & + & 9\,c_4\,. \end{array} \tag{2.6}$$

Из (2.6) получим:

$$\begin{array}{rcrcr} a_1 & = & (-1/2)\ b_1 & + & (3/2)\ c_1\,, \\ a_2 & = & (-3/2)\ b_2 & + & 3\,c_2\,, \\ a_3 & = & (-1/6)\ b_3 & + & (1/2)\ c_3\,, \\ a_4 & = & (-5/8)\ b_4 & + & (9/8)\ c_4\,. \end{array}$$

Эти же выражения можно было бы получить и с помощью той же последовательности преобразований каждого из четырех уравнений (2.1).

Таким образом, использование матричной формы записи позволяет избежать многократного повторения одних и тех же преобразований алгебраических выражений. Это обстоятельство играет важную роль при решении систем алгебраических уравнений, которые также можно представить в матричной форме.

Пример 2.7 Решить систему матричных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2X - 3Y & = & \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}, \\ X + 2Y & = & \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

Решение. Выразим матрицу X из второго уравнения системы (2.7):

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} - 2Y\,. \tag{2.8}$$

Подставим это выражение в первое из уравнений (2.7). В результате получим:

$$7Y = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Умножив (2.9) на число 1/7, найдем:

$$Y = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.8), найдем:

$$X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -11 & -13 \\ 26 & -29 \end{pmatrix}.$$

2.4 Умножение матриц

В дальнейшем всякая сумма вида $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ будет сокращенно обозначаться как $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i$. Если рассматривается сумма слагаемых a_{ij}, зависящих от двух индексов $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$, то для ее вычисления можно сначала найти суммы элементов с фиксированным первым индексом, т. е. суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, а затем сложить все эти суммы. В результате мы получим для суммы всех элементов a_{ij} запись $\sum\limits_{i=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \right)$. Можно, однако, сначала сложить слагаемые a_{ij} с фиксированным вторым индексом, а затем уже складывать полученные суммы: $\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \right)$. Следовательно,

$\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}\right)$, т. е. *в двойной сумме можно менять порядок суммирования*. Поэтому в дальнейшем мы будем опускать скобки при записи двойной суммы, полагая, что $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}$.

Определение *Умножение* матрицы A на матрицу B определено, лишь когда число столбцов первой матрицы в произведении равно числу строк второй. Тогда *произведением* матриц $\underset{m\times k}{A}\,\underset{k\times n}{B}$ называется матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме попарных произведений элементов i–й строки матрицы A на соответствующие элементы j–го столбца матрицы B, т. е.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj} \qquad (2.11)$$

для всех $i=1,2,\ldots,m$ и $j=1,2,\ldots,n$.

Обратим внимание на размеры матрицы C: *число строк матрицы–произведения совпадает с числом строк первой, а число столбцов — с числом столбцов второй из перемножаемых матриц* (см. Рис. 1).

$$\underset{m\times k}{A}\quad\underset{k\times n}{B}\quad=\quad\underset{m\times n}{C}$$

Рис. 1

Пример 2.8 Вычислить произведение матриц AB, если

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&4&-5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&4\\3&-3&1\\1&0&2\end{pmatrix}.$$

Решение. Определим размер матрицы–произведения: $\underset{2\times 3}{A}\,\underset{3\times 3}{B}=\underset{2\times 3}{C}$. Вычислим элементы матрицы–произведения:

$$C=\begin{pmatrix}1+6+3&2-6+0&4+2+6\\5+12-5&10-12+0&20+4-10\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -4 & 12 \\ 12 & -2 & 14 \end{pmatrix} .$$

Пример 2.9 Вычислить произведение матриц AB, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7/2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} .$$

Решение. Определим размер матрицы-произведения $\underset{3\times 2}{A}\,\underset{2\times 2}{B} = \underset{3\times 2}{C}$. Вычислим элементы матрицы–произведения:

$$C = \begin{pmatrix} 2-1 & (7/2)-(3/2) \\ 0+2 & 0+3 \\ 2+1 & (7/2)+(3/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} .$$

Пример 2.10 Вычислить произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = (1 \ -1 \ 2 \ 2) .$$

Решение.

$$\underset{3\times 1}{A}\,\underset{1\times 4}{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 & 6 \\ -2 & 2 & -4 & -4 \\ 5 & -5 & 10 & 10 \end{pmatrix} .$$

Пример 2.11 Вычислить произведения матриц AB и AC, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Решение.

$$\underset{1\times 4}{A}\,\underset{4\times 1}{B} = (2-2+0-5) = (-5) ,$$

Произведение $\underset{1\times 4}{A}\,\underset{3\times 1}{C}$ не существует т. к. число столбцов матрицы A (равное четырем) не равно числу строк матрицы C (равному трем).

Имеют место следующие свойства:

1. *Свойство дистрибутивности относительно суммы матриц*: если сумма $B + C$ и произведение AB существуют, то $A\,(B + C) = AB + AC$.

   Доказательство. В самом деле, если сумма $B + C$ существует, то это означает, что матрицы B, C и

   $$F = B + C$$

   имеют один и тот же размер. Поэтому, если определено произведение

   $$AB = L\,,$$

   то определены произведения

   $$AC = Q, \qquad AF = G$$

   и сумма

   $$R = L + Q\,,$$

   причем матрицы G и R имеют один и тот же размер.

   Пусть k — число столбцов матрицы A. Используя правила сложения и умножения матриц, получаем, что

   $$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{s=1}^{k} a_{is} f_{sj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}\,(b_{sj} + c_{sj}) = \\ &= \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj} + \sum_{s=1}^{k} a_{is} c_{sj} = l_{ij} + q_{ij} = r_{ij} \end{aligned}$$

   для всех i=1,2,…,m и j=1,2,…,n. В соответствии с определением равенства матриц, это означает, что $G = R$, т. е. $A\,(B + C) = AB + AC$.

   Аналогично можно доказать, что если сумма $A + B$ и произведение AC существуют, то $(A + B)\,C = AC + BC$.

2. *Свойство ассоциативности относительно числового множителя*: если произведение AB существует, то $\lambda\,(AB) = (\lambda A)\,B = A\,(\lambda B)$.

Доказательство. Так как при умножении матрицы на число ее размеры не меняются, то из предположения о существовании произведения
$$AB = F$$
следует, что произведения
$$LB = U \qquad \text{и} \qquad AQ = V\,,$$
в которых
$$L = \lambda A \qquad \text{и} \qquad Q = \lambda B\,,$$
также существуют. При этом матрицы U,V и
$$\lambda F = G$$
имеют один и тот же размер.

Пусть k — число столбцов матрицы A. Используя определения операций произведения матриц и умножения матрицы на число, получаем, что
$$g_{ij} = \lambda f_{ij} = \lambda \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj} = \sum_{s=1}^{k} \lambda a_{is} b_{sj} = \sum_{s=1}^{k} l_{is} b_{sj} = u_{ij}\,,$$
$$g_{ij} = \lambda f_{ij} = \lambda \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \lambda b_{sj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} q_{sj} = v_{ij}$$
для всех i=1,2,...,m и j=1,2,...,n. В соответствии с определением равенства матриц, это означает, что $G = U = V$, т. е. $\lambda\,(AB) = (\lambda A)\,B = A\,(\lambda B)$.

3. *Свойство ассоциативности при умножении матриц*: если произведения AB и BC существуют, то $A\,(BC) = (AB)\,C$.

Доказательство. Выберем размеры матриц A, B и C таким образом, чтобы произведения $BC = F$ и $AB = G$ существовали:
$$\underset{k\times l}{B}\,\underset{l\times n}{C} = \underset{k\times n}{F}\,, \qquad \underset{m\times k}{A}\,\underset{k\times l}{B} = \underset{m\times l}{G}\,.$$
Тогда произведения
$$\underset{m\times k}{A}\,\underset{k\times n}{F} = \underset{m\times n}{L}$$

и

$$\underset{m\times l}{G}\underset{l\times n}{C} = \underset{m\times n}{Q}$$

также существуют и являются матрицами одного и того же размера.

Докажем, что все элементы матрицы L равны соответствующим элементам матрицы Q. Используя определение операции умножения матриц, получим, что

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \sum_{s=1}^{k} a_{is} f_{sj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \sum_{r=1}^{l} b_{sr} c_{rj} = \\ &= \sum_{r=1}^{l} \left(\sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sr} \right) c_{rj} = \sum_{r=1}^{l} g_{ir} c_{rj} = q_{ij} \end{aligned}$$

для всех i=1,2,...,m и j=1,2,...,n. В соответствии с определением равенства матриц, это означает, что $L = Q$, т. е. $A\,(BC) = (AB)\,C$.

Операция умножения матриц имеет ряд специфических свойств, отличающих ее от аналогичной операции для обычных чисел.

- *Если произведение матриц AB существует, то произведение BA может не существовать.*

Пример 2.12 Вычислить произведения AB и BA, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\underset{2\times 3}{A}\underset{3\times 3}{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 & -7 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, т. к. число столбцов матрицы B (равное трем) не равно числу строк матрицы A (равному двум).

- *Если даже произведения AB и BA существуют, то они могут оказаться матрицами разных размеров.*

Пример 2.13 Вычислить произведения матриц AB и BA, если

$$A = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)\ , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} .$$

Решение.

$$\underset{1\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{B} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) = \left(\sum_{s=1}^{n} a_s b_s\right) ,$$

$$\underset{n\times 1}{B}\,\underset{1\times n}{A} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} (a_1\ a_2\ \dots\ a_n) = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \dots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \dots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \dots & b_na_n \end{pmatrix} .$$

Замечание 2.2 В примерах 2.11 и 2.13 возникают *матрицы размера* 1×1*, состоящие из одной строки и одного столбца. Эти матрицы не могут быть отождествлены с обычными числами:* $\underset{1\times 1}{A} = (a_{11}) \neq a_{11}$. В самом деле, согласно данному на стр. 7 определению, на произвольное число λ можно умножить любую матрицу, в то время как на матрицу размера 1×1 можно умножить справа лишь матрицу–столбец, а слева — лишь матрицу–строку.

Пример 2.14 Вычислить произведения матриц AB и BA, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Решение.

$$\underset{2\times 3}{A}\,\underset{3\times 2}{B} = \underset{2\times 2}{C} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 2\cdot 3 + 1\cdot 5 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 0\cdot 3 + 3\cdot 5 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix} ,$$

$$\underset{3\times 2}{B}\,\underset{2\times 3}{A} = \underset{3\times 3}{D} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 2+3\cdot 0 & 0\cdot 1+3\cdot 3 & 0\cdot 1+3\cdot 2 \\ 1\cdot 2+5\cdot 0 & 1\cdot 1+5\cdot 3 & 1\cdot 1+5\cdot 2 \\ (-1)\cdot 2+1\cdot 0 & (-1)\cdot 1+1\cdot 3 & (-1)\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Легко понять, что *оба произведения AB и BA существуют и являются матрицами одинакового размера лишь в случае квадратных матриц A и B одного и того же порядка*[1]*. Однако, даже в этом случае коммутативный (переместительный) закон умножения может не иметь места, т. е. AB может не равняться BA.*

Пример 2.15 По данным

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

найти AB и BA.
Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O\,,$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $AB \neq BA$. Из данного примера видно, что *из равенства $AB = O$ еще не следует, что $A = O$ или $B = O$!*

Нетрудно убедиться, что при умножении единичная матрица играет ту же роль, что и число 1 при умножении чисел: единичная матрица n–го порядка перестановочна с любой квадратной матрицей A того же порядка, причем

$$AE = EA = A\,. \tag{2.12}$$

[1] Действительно, каждое из произведений $\underset{n\times m}{A}\,\underset{k\times l}{B}$ и $\underset{k\times l}{B}\,\underset{n\times m}{A}$ существует, если $m = k$ и $l = n$. Они будут матрицами одного и того же размера, если $n = k$ и $l = m$. Таким образом, $m = n = k = l$, т. е. A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка.

Чтобы доказать это, введем обозначения: $AE = F$, $EA = G$. Используя правило умножения матриц и определение единичной матрицы

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad i = j\,, \\ 0, & \text{при} \quad i \neq j\,, \end{cases} \tag{2.13}$$

находим, что для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$f_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} e_{sj} = a_{ij}\,, \qquad g_{ij} = \sum_{s=1}^{n} e_{is} a_{sj} = a_{ij}\,.$$

Обратим внимание на то, что *квадратная матрица E является единственной матрицей, удовлетворяющей условию (2.12) при ее умножении на любую квадратную матрицу A того же порядка*. Действительно, если бы существовала еще матрица E' с таким же свойством, то мы имели бы $E'E = E'$, $E'E = E$, т. е. $E' = E$.

<u>**Замечание**</u> **2.3** Отметим, что с помощью единичной матрицы *операция умножения матрицы на число λ может быть представлена как умножение этой матрицы на некоторую другую матрицу*:

$$\begin{aligned} \lambda \underset{m\times n}{A} &= \lambda \left(\underset{m\times m}{E}\, \underset{m\times n}{A} \right) = \left(\lambda \underset{m\times m}{E} \right) \underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{\Lambda}\, \underset{m\times n}{A}\,, \\ \lambda \underset{m\times n}{A} &= \lambda \left(\underset{m\times n}{A}\, \underset{n\times n}{E} \right) = \underset{m\times n}{A} \left(\lambda \underset{n\times n}{E} \right) = \underset{m\times n}{A}\, \underset{n\times n}{\Lambda}\,, \end{aligned}$$

где Λ — диагональная матрица вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

<u>**Замечание**</u> **2.4** Если $AB = O$ *при любом* B, то $A = O$. Если $AB = O$ *при любом* A, то $B = O$.

Доказательство. В самом деле, выбирая в качестве матрицы B единичную матрицу E, получим: $A = AE = O$. Полагая же $A = E$, найдем: $B = EB = O$.

Пример 2.16 Вычислить произведения $A(\alpha)\,A(\beta)$ и $A(\beta)\,A(\alpha)$ если

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала найдем произведение $A(\alpha)\,A(\beta)$:

$$A(\alpha)\,A(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Для того, чтобы найти $A(\beta)\,A(\alpha)$, достаточно в произведении $A(\alpha)\,A(\beta)$ выполнить замену $\alpha \leftrightarrow \beta$. Из результата (2.14) видно, что полученное выражение симметрично относительно указанной замены. Поэтому $A(\beta)\,A(\alpha) = A(\alpha)\,A(\beta)$.

Пример 2.17 Доказать, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

перестановочна с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 3\epsilon - 3\alpha - \gamma & \epsilon - 3\beta - \delta & \epsilon \end{pmatrix},$$

в которой α, β, γ, δ, ϵ — произвольные действительные числа.
Решение.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 3\epsilon - 3\alpha - \gamma & \epsilon - 3\beta - \delta & \epsilon \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 6\epsilon - 3\alpha - \gamma & 2\epsilon - 3\beta - \delta & 2\epsilon \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$BA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 3\epsilon - 3\alpha - \gamma & \epsilon - 3\beta - \delta & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 6\epsilon - 3\alpha - \gamma & 2\epsilon - 3\beta - \delta & 2\epsilon \end{pmatrix} = AB\,.$$

2.5 Возведение в степень

Целой положительной степенью a^m $(m > 1)$ числа a называется произведение m чисел, равных a, т. е. $a^m = \underbrace{a\,a\,\ldots\,a}_{m\ \text{раз}}$, причем $a^0 = 1$ если $a \neq 0$. Аналогичную операцию можно определить и в случае матриц, понимая под целой положительной степенью A^m матрицы A произведение $A^m = \underbrace{AA\ldots A}_{m\ \text{раз}}$. Это произведение имеет смысл лишь в случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк той же самой матрицы A. Поэтому операцию возведения матрицы в целую положительную степень удается определить только для квадратных матриц.

Определение Под *нулевой степенью* квадратной матрицы A понимается единичная матрица того же порядка что и A, т. е. $A^0 = E$. *Целой положительной степенью* A^m $(m > 0)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т. е.

$$A^m = \underbrace{AA\ldots A}_{m\ \text{раз}}\,.$$

Имеют место следующие соотношения:
1. $A^m A^k = A^{m+k}$.
Доказательство.

$$A^m A^k =$$

$$
= \begin{cases}
\underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}}\underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ раз}} = \underbrace{AA\ldots A}_{m+k \text{ раз}} = A^{m+k} & \text{при} \quad m \neq 0,\, k \neq 0\,, \\
E\,\underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ раз}} = \underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ раз}} = A^k = A^{0+k} & \text{при} \quad m = 0,\, k \neq 0\,, \\
\underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}}E = \underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}} = A^m = A^{m+0} & \text{при} \quad m \neq 0,\, k = 0\,, \\
EE = A^0 = A^{0+0} & \text{при} \quad m = 0,\, k = 0\,,
\end{cases}
$$

т. е. $A^m A^k = A^{m+k}$.

2. $\left(A^m\right)^k = A^{mk}$.

Доказательство.

$$
\left(A^m\right)^k =
$$

$$
= \begin{cases}
\begin{array}{c}
\underbrace{A^m A^m \ldots A^m}_{k \text{ раз}} = \\
= \underbrace{\underbrace{A^m \ldots A^m}_{m \text{ раз}}\underbrace{A^m \ldots A^m}_{m \text{ раз}}\cdots\underbrace{A^m \ldots A^m}_{m \text{ раз}}}_{k \text{ раз}} = \\
= \underbrace{AA\ldots A}_{mk \text{ раз}} = A^{mk}
\end{array} & \text{при} \quad m \neq 0,\, k \neq 0\,, \\
\left(A^0\right)^k = E^k = \underbrace{EE\ldots E}_{k \text{ раз}} = E = A^0 & \text{при} \quad m = 0,\, k \neq 0\,, \\
\left(A^m\right)^0 = E = A^0 & \text{при} \quad m \neq 0,\, k = 0\,, \\
\left(A^0\right)^0 = E^0 = E = A^0 & \text{при} \quad m = 0,\, k = 0\,,
\end{cases}
$$

т. е. $\left(A^m\right)^k = A^{mk}$.

Пример 2.18 Найти A^n, если

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Решение. Имеем:

$$
A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O\,,
$$

$$
A^n = A^2 A^{n-2} = OA^{n-2} = O \quad \text{при } n \geq 3\,.
$$

Этот пример показывает, что *из равенства* $A^m = O$ *еще не следует, что* $A = O$*!*

Пример 2.19 Вычислить $f(A)$, если $f(x) = x^2 - x - x^0$ и

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$f(A) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.20 Найти действительные числа p и q, при которых матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет уравнению $A^3 = pA^2 + qA$.

Решение. Имеем:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Подставим (2.15) и (2.16) в уравнение $A^3 = pA^2 + qA$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p & 0 & 2p \\ 0 & 1p & 0 \\ 2p & 0 & 2p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q & 0 & q \\ 0 & q & 0 \\ q & 0 & q \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Из (2.17) получим следующую систему уравнений для определения p и q:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2p+q & = & 4\,, \\ p+q & = & 1\,. \end{array} \right. \tag{2.18}$$

Решая эту систему, находим: $p = 3$, $q = -2$.

Пример 2.21 Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где a — некоторое действительное число.

1. Вычислить A^n.

2. Показать, что матрица A удовлетворяет уравнению $2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + x^0 = O$, в котором O — нулевая матрица того же порядка, что и A.

3. Доказать, что матрица A перестановочна с матрицей

   $$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

   в которой α, β — произвольные действительные числа.

4. Найти $\sum\limits_{m=1}^{n} A^m$.

Решение.

1.
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A^4 = AA^3 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Приведенные равенства позволяют нам предположить, что для любого $n = 1, 2, \ldots$

   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Чтобы убедиться в этом, докажем, что из справедливости формулы (2.19) для произвольного значения n следует ее справедливость и для значения $n+1$:

$$A^{n+1} = AA^n = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)\,a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученный результат означает, что если формула (2.19) справедлива для $n=4$, то она справедлива и при $n=5$; если (2.19) справедлива для $n=5$, то она справедлива и при $n=6$ и т. д.. Используемый способ доказательства называется *методом математической индукции*.

2. Подставив найденные выражения для A^n $(n=1,2,3,4)$ в уравнение $2x^4-3x^3+x^2-x+x^0=O$, получим:

$$2\begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-3+1-1+1 & 8a-9a+2a-a+0 \\ 0 & 2-3+1-1+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O\,.$$

3. Докажем, что $AB=BA$. Имеем:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta+\alpha a \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha a+\beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = AB\,.$$

4. Вычислим $\sum_{m=1}^{n} A^m$:

$$\sum_{m=1}^{n} A^m = \sum_{m=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & ma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=1}^{n} 1 & a\sum\limits_{m=1}^{n} m \\ 0 & \sum\limits_{m=1}^{n} 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} n & as_n \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{m=1}^{n} m = \underbrace{1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n}_{n \text{ слагаемых}} = \\ &= \frac{n\,(n+1)}{2} \end{aligned} \tag{2.20}$$

— сумма первых n слагаемых арифметической прогрессии[2]. Имеем:

$$\sum_{m=1}^{n} A^m = n \begin{pmatrix} 1 & (n+1)\,a/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6 Транспонирование матрицы

Определение Переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка, называется *транспонированием* матрицы. Матрица

$$\underset{n\times m}{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

является *транспонированной* к матрице

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица $A = (a_{ij})$ имеет размер $m \times n$, то транспонированная матрица $A^T = \left(a_{ij}^T\right)$ имеет размер $n \times m$, причем матричные элементы $a_{ij}^T = a_{ji}$.

[2]Сумму первых n слагаемых арифметической прогрессии $1, 2, 3, \ldots$ нетрудно вычислить. Для этого расположим слагаемые в сумме $s_n = 1+2+ +3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$ в обратном порядке: $s_n = n+(n-1)+ +(n-2)+\ldots+3+2+1$. Складывая оба представленных выражения для s_n, найдем $2s_n = (n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1) = = n\,(n+1)$. Следовательно, $s_n = n\,(n+1)\,/2$.

Пример 2.22 Матрица

$$\underset{3\times 2}{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

является транспонированной к матрице

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} .$$

Пример 2.23 Матрица–строка

$$A = (a_{11}\, a_{12}\, \ldots a_{1n})$$

при транспонировании переходит в матрицу–столбец:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} .$$

Наоборот, матрица–столбец

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

при транспонировании переходит в матрицу–строку:

$$B^T = (b_{11} b_{21}\, \ldots b_{n1}) .$$

Имеют место следующие свойства, связанные с операцией транспонирования:

1. $\left(A^T\right)^T = A$.

   Доказательство. Если матрица A имеет размер $m\times n$, то транспонированная к ней матрица

   $$F = A^T$$

будет иметь размер $n \times m$. Соответственно, транспонированная к F матрица

$$G = F^T = \left(A^T\right)^T$$

будет иметь тот же размер, что и матрица A, т. е. $m \times n$. Таким образом, размеры матриц в левой и правой частях равенства $\left(A^T\right)^T = A$ совпадают и равны $m \times n$. Докажем, равенство соответствующих элементов этих матриц. Для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$ имеем:

$$g_{ij} = f_{ji} = a_{ij}\ .$$

Следовательно, $G = A$, т. е. $\left(A^T\right)^T = A$.

2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Доказательство. Пусть матрица A имеет размер $m \times n$. Согласно определению операции умножения матрицы на число, матрица

$$F = \lambda A$$

имеет тот же размер, что и A, т. е. $m \times n$. Тогда транспонированная к F матрица

$$G = F^T = (\lambda A)^T$$

будет иметь размер $n \times m$.

Транспонированная к A матрица

$$L = A^T$$

имеет размер $n \times m$. Согласно определению операции умножения матрицы на число, матрица λA^T имеет тот же размер, что и A^T, т. е. $n \times m$.

Таким образом, размеры матриц в левой и правой частях равенства $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ совпадают и равны $n \times m$. Докажем, равенство соответствующих элементов этих матриц. Для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$ имеем:

$$g_{ij} = f_{ji} = \lambda a_{ji} = \lambda l_{ij}\ .$$

Следовательно, $G = \lambda L$, т. е. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

3. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Доказательство. Сумма матриц A и B определена, если эти матрицы имеют один и тот же размер. Пусть матрица A имеет размер $m \times n$. Тогда матрицы B и

$$F = A + B$$

также имеют размер $m \times n$.

Матрицы

$$G = F^T = (A+B)^T \,,$$

$L = A^T$, $Q = B^T$ и сумма $R = L + Q = A^T + B^T$ будут иметь размер $n \times m$. Таким образом, размеры матриц в левой и правой частях равенства $(A+B)^T = A^T + B^T$ совпадают и равны $n \times m$. Докажем, равенство соответствующих элементов этих матриц. Для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$ имеем:

$$g_{ij} = f_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = l_{ij} + q_{ij} = r_{ij} \,.$$

Следовательно, $G = R$, т. е. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Доказательство. Пусть матрица A имеет размер $m \times k$, а матрица B — $k \times n$, так, что произведение AB определено, причем матрица

$$F = AB$$

имеет размер $m \times n$. Тогда транспонированная к F матрица

$$G = F^T = (AB)^T$$

будет иметь размер $n \times m$.

Матрицы

$$L = A^T \qquad \text{и} \qquad Q = B^T$$

имеют размеры $k \times m$ и $n \times k$, соответственно. Поэтому произведение QL определено, причем матрица

$$R = QL = B^T A^T$$

имеет размер $n \times m$.

Таким образом, размеры матриц в левой и правой частях равенства $(AB)^T = B^T A^T$ совпадают и равны $n \times m$. Докажем, равенство соответствующих элементов этих матриц. Для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$ имеем:

$$g_{ij} = f_{ji} = \sum_{s=1}^{k} a_{js} b_{si} = \sum_{s=1}^{k} b_{si} a_{js} = \sum_{s=1}^{k} q_{is} l_{sj} = r_{ij} \,.$$

Следовательно, $G = R$, т. е. $(AB)^T = B^T A^T$.

Определение Квадратная матрица A называется *симметричной*, если $A^T = A$, т. е. $a_{ji} = a_{ij}$.

В частности, симметричной является любая диагональная матрица.

Пример 2.24

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 5 & -2 & 7 \\ -4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

— симметричная матрица 3–го порядка.

Определение Квадратная матрица A называется *антисимметричной* [3], если $A^T = -A$, т. е. $a_{ji} = -a_{ij}$.

Согласно данному определению, диагональные матричные элементы антисимметричной матрицы равны нулю, т. е. $a_{ii} = 0$.

Пример 2.25 Матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \\ -7 & -5 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

является антисимметричной матрицей 4–го порядка.

Отметим некоторые свойства операций над симметричными и антисимметричными матрицами:

[3] Антисимметричные матрицы иногда называют *кососимметричными*.

1. Если A и B — симметричные (антисимметричные) матрицы, то и $A+B$ — симметричная (антисимметричная) матрица.

   Доказательство. Действительно, если A и B — симметричные матрицы, то
$$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B\,.$$
   Если же A и B — антисимметричные матрицы, то
$$(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B)\;.$$

2. Если A — симметричная (антисимметричная) матрица, то λA также является симметричной (антисимметричной) матрицей.

   Доказательство. Действительно, если A — симметричная матрица, то
$$(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A = (\lambda A)\;.$$
   Если же A — антисимметричная матрица, то
$$(\lambda A)^T = \lambda A^T = -\lambda A = -(\lambda A)\;.$$

3. Произведение AB двух симметричных или двух антисимметричных матриц A и B есть матрица симметричная при $AB = BA$ и антисимметричная при $AB = -BA$.

   Доказательство. Пусть A и B — симметричные (антисимметричные) матрицы. Тогда
$$(AB)^T = B^T A^T = BA\,.$$
   Отсюда получаем, что $(AB)^T = AB$ при $AB = BA$, и $(AB)^T = -AB$, если $AB = -BA$.

4. Если A — симметричная матрица, то и A^m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ — симметричная матрица. Если A — антисимметричная матрица, то A^m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ является симметричной матрицей при четном m и антисимметричной — при нечетном.

Доказательство. Действительно, пусть A — симметричная матрица. Тогда

$$(A^m)^T = \Bigg(\underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}}\Bigg)^T = \underbrace{A^T A^T \ldots A^T}_{m \text{ раз}} = \underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}} = A^m\,.$$

Если A — антисимметричная матрица, то

$$\begin{aligned}(A^m)^T &= \Bigg(\underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}}\Bigg)^T = \underbrace{A^T A^T \ldots A^T}_{m \text{ раз}} = \underbrace{(-A)(-A)\ldots(-A)}_{m \text{ раз}} \\ &= \underbrace{(-A)(-A)\ldots(-A)}_{m \text{ раз}} = (-1)^m \underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}} = (-1)^m A^m\,.\end{aligned}$$

5. Произвольную квадратную матрицу A можно представить в виде суммы
$$A = A^{(s)} + A^{(a)}$$
матриц
$$A^{(s)} = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) \qquad \text{и} \qquad A^{(a)} = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)\,,$$
из которых $A^{(s)}$ является симметричной, а $A^{(a)}$ — антисимметричной.

Доказательство. Действительно,

$$A^{(s)T} = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T + A\right) = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = A^{(s)}\,,$$

$$A^{(a)T} = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T - A\right) = -\frac{1}{2}\left(A - A^T\right) = -A^{(a)}\,.$$

3 Определители квадратных матриц

Предварительно введем некоторые вспомогательные понятия.

Определение Пусть каждое из чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ принимает одно из значений $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, причем среди этих чисел нет совпадающих. В этом случае говорят, что последовательность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ является некоторой *перестановкой* степени n чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Число всех перестановок степени n равно $n!$.

Определение Образуем из последовательности чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ всевозможные пары α_i, α_j и будем говорить, что пара α_i, α_j образует *инверсию*, если $\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$, т. е. если в перестановке бóльшее число предшествует меньшему.

Число инверсий, образованных всеми парами, которые можно составить из $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$, будем обозначать символом

$$N\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n\right) .$$

Укажем простой способ нахождения числа инверсий в перестановке. Определим число чисел, расположенных перед числом 1, и зачеркнем 1. Затем определим в полученной перестановке число чисел, расположенных перед числом 2, и зачеркнем 2. Продолжая этот процесс и складывая все полученные числа, получим полное число инверсий в данной перестановке.

Пример 3.1 Определить число инверсий в перестановке

$$5, 2, 1, 4, 3\,.$$

Решение. Имеем последовательно:

$$\begin{array}{lcl}
5,2,1,4,3 & — & 2 \text{ числа перед } 1\,, \\
5,2,4,3 & — & 1 \text{ число перед } 2\,, \\
5,4,3 & — & 2 \text{ числа перед } 3\,, \\
5,4 & — & 1 \text{ число перед } 4\,, \\
5 & — & 0 \text{ чисел перед } 5\,.
\end{array}$$

Таким образом, $N\left(5, 2, 1, 4, 3\right) = 2 + 1 + 2 + 1 + 0 = 6$.

Определение *Знак* [4] $\operatorname{sign}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ перестановки α_1, α_2, …, α_n определяется как

$$(-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)}.$$

Определение Перестановка называется *четной*, если она имеет четное число инверсий (т. е. sign $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$) и *нечетной* — если нечетное (т. е. sign $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = -1$).

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу n–го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

С каждой такой матрицей свяжем определенную численную характеристику, называемую определителем, соответствующим данной матрице. В дальнейшем мы будем говорить об элементах, строках и столбцах определителя, подразумевая под этими терминами соответственно элементы, строки и столбцы отвечающей этому определителю матрицы.

Определение *Определителем $|A|$ матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или определителем первого порядка,* называется число Δ_1, равное матричному элементу a_{11}:

$$\Delta_1 = |A| = a_{11}. \tag{3.2}$$

Определение *Определителем $|A|$ матрицы второго порядка $A = (a_{ij})$, или определителем второго порядка,* называется число Δ_2, определяемое формулой:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3.3}$$

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются членами определителя. Таким образом, определитель второго порядка представляет собой алгебраическую сумму 2! членов, каждый из которых представляет собой произведение 2-х матричных элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Один из членов определителя входит в алгебраическую сумму со знаком "+", а другой — со знаком "−".

[4] Знак перестановки иногда называют ее *сигнатурой*.

Определение *Определителем* $|A|$ *матрицы третьего порядка* $A = (a_{ij})$, *или определителем третьего порядка,* называется число Δ_3, определяемое формулой:

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\,. \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что определитель третьего порядка представляет собой алгебраическую сумму 3! членов, каждый из которых представляет собой произведение 3-х матричных элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Три члена определителя входят в алгебраическую сумму со знаком “+” и три — со знаком “−”.

Обратим внимание на то, что в формулах (3.2)–(3.4) все члены определителя представлены в виде произведений

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2}\, \ldots\, a_{n\alpha_n} \quad (n = 1, 2, 3)\,, \tag{3.5}$$

в которых перемножаемые матричные элементы упорядочены определенным образом, а именно: индексы матричных элементов, указывающие номер строки определителя располагаются в порядке возрастания. Нетрудно заметить, что если при данном порядке расположения матричных элементов в произведении индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ образуют четную перестановку, то соответствующий член определителя входит в алгебраическую сумму со знаком “+”, а если нечетную — со знаком “−”.

Это правило можно сформулировать в геометрических терминах. Соединим отрезком любые два элемента определителя, не принадлежащие одной и той же строке или столбцу. Будем говорить, что данный отрезок имеет *положительный наклон*, если его правый конец расположен ниже левого, и *отрицательный наклон*, если наоборот.

Проведем всевозможные отрезки, соединяющие попарно матричные элементы, являющиеся сомножителями в каком-либо члене (3.5) определителя. Если при этом число всех отрезков, имеющих отрицательный наклон, четно, то соответствующий член определителя входит в алгебраическую сумму со знаком “+”, а если нечетно, то со знаком “−”. Действительно, наличие отрезка отрицательного наклона, соединяющего элементы $a_{i\,\alpha_i}$ и $a_{j\,\alpha_j}$, означает при $i < j$, что $\alpha_i > \alpha_j$, т. е.

имеется инверсия в перестановке вторых индексов (см. Рис. 2).

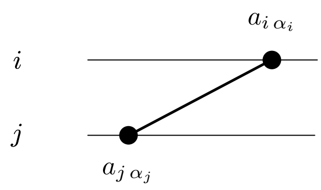

Рис. 2

Таким образом, для вычисления определителя необходимо выполнить следующие операции.

1. Соединить отрезками каждый элемент определителя всеми возможными способами с другими элементами. При этом соединяемые элементы не должны принадлежать одной и той же строке или одному и тому же столбцу. Тогда каждый из $n!$ способов соединения дает соответствующий член определителя, содержащий произведение n соединяемых элементов.

2. Установить знак каждого члена определителя. Для этого определить полное число отрезков отрицательного наклона при каждом способе соединения. Если это число четное, то знак соответствующего члена положительный, а если нечетное — отрицательный.

Воспользуемся сформулированным правилом для вычисления определителя второго порядка. В этом случае возможны лишь 2! способов соединения, изображенных на Рис. 3:

1. элемент a_{11} соединяется с элементом a_{22} отрезком положительного наклона;

2. элемент a_{12} соединяется с элементом a_{21} отрезком отрицательного наклона.

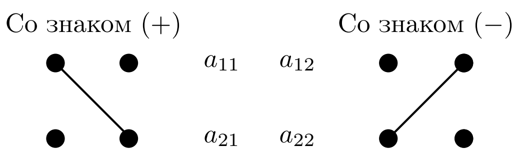

Рис. 3

В результате мы приходим к выражению (3.3).

Рассмотрим теперь случай определителя третьего порядка. Установим возможные способы соединения элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Для этого переберем последовательно все элементы первой строки.

1. Элемент a_{11} может быть соединен:
   (a) с элементом a_{22} и тогда третьим элементом в соединении должен быть элемент a_{33} (имеется 0 отрезков отрицательного наклона);
   (b) с элементом a_{23} и тогда третьим элементом в соединении должен быть элемент a_{32} (имеется 1 отрезок отрицательного наклона).
2. Элемент a_{12} может быть соединен:
   (a) с элементом a_{21} и тогда третьим элементом в соединении должен быть элемент a_{33} (имеется 1 отрезок отрицательного наклона);
   (b) с элементом a_{23} и тогда третьим элементом в соединении должен быть элемент a_{31} (имеется 2 отрезка отрицательного наклона).
3. Элемент a_{13} может быть соединен:
   (a) с элементом a_{21} и тогда третьим элементом в соединении должен быть элемент a_{32} (имеется 2 отрезка отрицательного наклона);

(b) с элементом a_{22} и тогда третьим элементом в соединении должен быть элемент a_{31} (имеется 3 отрезка отрицательного наклона).

Таким образом, имеется 3! способов соединения, изображенных на Рис. 4.

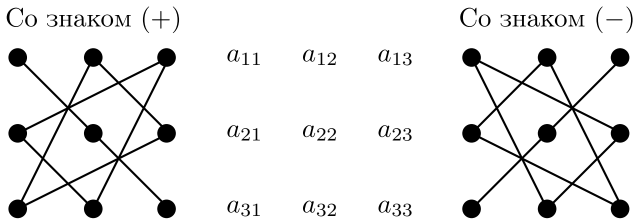

Рис. 4

В результате мы приходим к выражению (3.4).

Пример 3.2 Вычислить определитель

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} .$$

Решение. Имеем: $\Delta_2 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7$.

Пример 3.3 Вычислить определитель

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} .$$

Решение. Имеем:

$$\Delta_3 = +1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5 .$$

Установленные выше правила вычисления определителей 1–го, 2–го и 3–го порядков можно принять за основу для построения определителей произвольного (n–го) порядка.

Определение *Определителем* $|A|$ *квадратной матрицы* n*–го порядка* $A = (a_{ij})$, *или определителем* n*–го порядка,* называется число, равное алгебраической сумме $n!$ членов, каждый из которых является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем знак каждого члена определяется как $(-1)^N$, где N — число инверсий в перестановке из номеров столбцов элементов матрицы в произведении, если при этом номера строк образуют возрастающую последовательность n чисел:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^N a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}\,, \qquad (3.6)$$

где сумма берется по всем перестановкам $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ чисел $1, 2, \dots, n$.

Часто для обозначения определителя $|A|$ квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ используется обозначение [5] $\det A$ или $\det(a_{ij})$.

Замечание 3.1 Из данного определения следует, что *если какая–либо строка (или столбец) определителя состоит из одних нулей, то такой определитель равен нулю.*

Пример 3.4 Является ли произведение $a_{13}a_{24}a_{41}a_{23}a_{55}$ членом определителя

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}?$$

Решение. В произведении

$$a_{13}\underline{a_{24}}a_{41}\underline{a_{23}}a_{55}$$

содержатся два элемента из второй строки (a_{24} и a_{23}) и, следовательно, оно не может быть членом данного определителя.

[5] Обозначение происходит от английского слова *determinant* — определитель

Пример 3.5 Является ли произведение $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ членом определителя

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} ?$$

Решение. Произведение

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65} = a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$$

содержит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца данного определителя и, следовательно, является его членом.

Пример 3.6 С каким знаком в определитель 6–го порядка входит член

$$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65} \ ?$$

Решение. Упорядочим матричные элементы в произведении таким образом, чтобы их первые индексы располагались в порядке возрастания: $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$. Тогда вторые индексы образуют перестановку

$$4, 3, 1, 2, 6, 5 \, .$$

Определим число содержащихся в ней инверсий. Имеем последовательно:

$$\begin{array}{lcl} 4,3,1,2,6,5 & — & 2 \text{ числа перед } 1\,, \\ 4,3,2,6,5 & — & 2 \text{ числа перед } 2\,, \\ 4,3,6,5 & — & 1 \text{ число перед } 3\,, \\ 4,6,5 & — & 0 \text{ чисел перед } 4\,, \\ 6,5 & — & 1 \text{ число перед } 5\,, \\ 6 & — & 0 \text{ чисел перед } 6\,. \end{array}$$

Таким образом, $N\,(4\,3\,1\,2\,6\,5) = 2{+}2{+}1{+}0{+}1{+}0 = 6$. Следовательно, перестановка является четной и рассматриваемый член $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ входит в определитель со знаком “+”.

Пример 3.7 Вычислить определитель треугольной матрицы, элементы которой $a_{ij} = 0$ при $i > j$:

$$\Delta_{tr}^{(>)}(n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} . \qquad (3.7)$$

Решение. Будем рассматривать только ненулевые члены данного определителя.

Переберем последовательно элементы различных строк определителя (3.7), начиная с n–й строки. Единственным не равным нулю элементом этой строки является a_{nn}. Он войдет как сомножитель в каждый из рассматриваемых членов определителя.

$(n-1)$–я строка содержит два не равных нулю элемента: $a_{(n-1)(n-1)}$ и $a_{(n-1)n}$. Однако, элемент $a_{(n-1)n}$ располагается в том же столбце, что и a_{nn} и поэтому не может войти в виде сомножителя ни в один из рассматриваемых членов (3.7). Таким образом, ненулевые члены определителя (3.7) содержат в качестве сомножителя число $a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}$.

Очевидно, что из $(n-2)$–й строки только элемент $a_{(n-2)(n-2)}$ может войти в виде сомножителя в отличные от нуля члены определителя.

Продолжая этот процесс, мы найдем, что определитель (3.7) равен произведению ее диагональных элементов

$$a_{11}a_{22}\dots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn} \, ,$$

взятым со знаком “+”, т. к. вторые индексы матричных элементов в этом произведении располагаются в возрастающей последовательности, если в такой же последовательности расположены их первые индексы. Имеем:

$$\Delta_{tr}^{(>)}(n) = a_{11}a_{22}\dots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn} \, . \qquad (3.8)$$

Замечание 3.2 Отметим, что результат (3.8) остается справедливым и в частном случае *определителя диагональной матрицы:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}\,.$$

Отсюда следует, что *определитель единичной матрицы n–го порядка E_n* равен единице , т. е. $|E_n| = \underbrace{1\cdot 1\ldots\cdot 1}_{n\ \text{раз}} = 1$.

С ростом порядка определителя n резко возрастает число его членов $n!$. Поэтому для вычисления определителей высокого порядка нецелесообразно использовать данное выше определение. В этих случаях следует применить формулы, позволяющие понизить порядок определителя. Эти формулы будут рассмотрены ниже.

4 Свойства определителей

4.1 Операция транспонирования

Теорема 4.1 *При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется:* $\left|A^T\right| = |A|$.

Доказательство. Действительно, определители $\left|A^T\right|$ и $|A|$ состоят из одних и тех же членов, каждый из которых является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Поэтому достаточно убедиться, что одинаковые члены содержатся в этих определителях с одним и тем же знаком. Для этого заметим, что определитель

$$\left|A^T\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

может быть получен из определителя

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

посредством зеркального отражения всех его элементов относительно главной диагонали.

Введем в рассмотрение некоторую прямоугольную систему координат, для которой главная диагональ определителя является биссектрисой II–го и IV–го координатных углов (см. Рис. 5). Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$ на плоскости XOY. Очевидно, что зеркально отраженной относительно биссектрисы II–го и IV–го координатных углов будет точка $M'(x', y') = M'(-y, -x)$. Таким образом, в результате зеркального отражения координаты точки меняются местами и изменяют свой знак на противоположный.

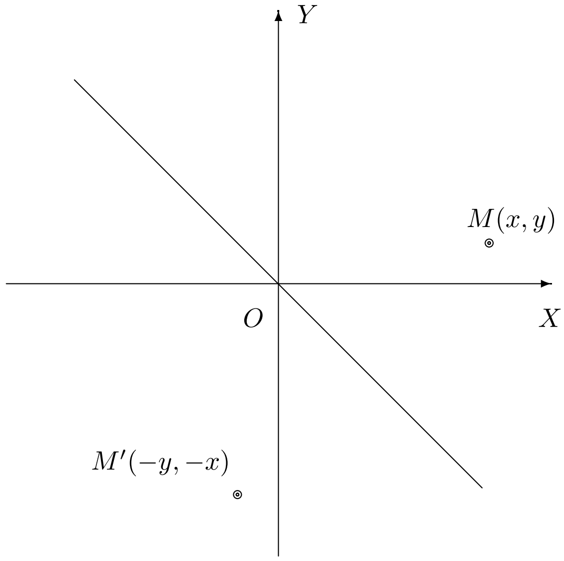

Рис. 5

Рассмотрим теперь некоторый отрезок AB на плоскости XOY (см. Рис. 6). Его зеркальным отражением относительно биссектрисы II–го и IV–го координатных углов будет отрезок A′B′. Если $y_1 < y$, когда $x_1 > x$, то AB имеет положительный наклон в смысле данного выше определения. Но тогда из равенств $x' = -y$, $y' = -x$, $x'_1 = -y_1$, $y'_1 = -x_1$ следует, что $y'_1 < y'$, когда $x'_1 > x'$, т. е. отрезок A′B′ также имеет положительный наклон. Аналогично, можно убедиться, что отрезок с отрицательным наклоном при зеркальном отражении переходит в отрезок с таким же наклоном. Но тогда число отрезков с отрицательным наклоном, соединяющих элементы данного члена определителя, не изменяется в результате зеркального отражения элементов относительно главной диагонали, т. е. в результате операции транспонирования. Следовательно, не изменяется и знак этого члена определителя. Таким образом, знаки всех членов сохраняются. Поэтому и величина определителя остается неизменной.

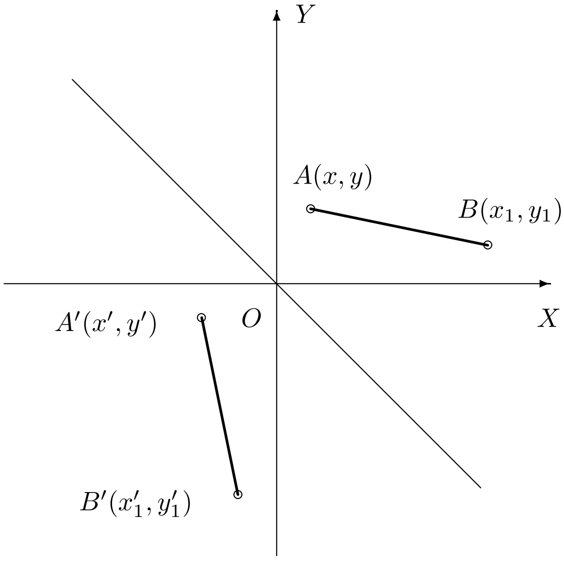

Рис. 6

<u>Замечание</u> 4.1 Теорема 4.1 устанавливает *равноправие строк и столбцов определителя.* Поэтому дальнейшие свойства мы будем формулировать и доказывать только для строк.

Пример 4.1 Вычислить определитель треугольной матрицы, элементы которой $a_{ij} = 0$ при $i < j$:

$$\Delta_{tr}^{(<)}(n) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Решение. Согласно Теореме 4.1, значение определителя $\Delta_{tr}^{(<)}(n)$ не изменится, если его строки и столбцы поменять местами с сохранением порядка, т. е. перейти к определителю транспонированной матрицы:

$$\Delta_{tr}^{(<)}(n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{(n-1)1} & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{(n-1)2} & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{n(n-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Но тогда, используя результат (3.8) из Примера 3.7, найдем, что

$$\Delta_{tr}^{(<)}(n) = a_{11}a_{22}\dots a_{(n-1)(n-1)}a_{nn}.$$

4.2 Перестановка строк и столбцов

Теорема 4.2 *При перестановке местами двух строк матрицы ее определитель сохраняет свою абсолютную величину, но меняет знак на противоположный.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда переставляются две соседние строки, например i–я и $(i+1)$–я. Очевидно, что определитель, полученный в результате такой перестановки строк, будет состоять из тех же самых членов, что и исходный. Каждый из них представляет собой произведение матричных элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца и, следовательно, обязательно содержит в качестве сомножителей по одному элементу, принадлежащему i–й и $(i+1)$–й строкам. Поэтому произвольный член определителя можно представить в виде

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2}\, \ldots\, a_{i\alpha_i}\, a_{(i+1)\,\alpha_{(i+1)}}\, \ldots\, a_{n\alpha_n}\,. \tag{4.3}$$

При перестановке i–й и $(i+1)$–й строк этот член перейдет в

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2}\, \ldots\, a_{(i+1)\,\alpha_i}\, a_{i\,\alpha_{(i+1)}}\, \ldots\, a_{n\alpha_n}\,. \tag{4.4}$$

При этом, однако, происходит нарушение установленного порядка расположения матричных элементов в произведении, в соответствии с которым их первые индексы должны располагаться в возрастающей последовательности. Этот порядок можно восстановить, если в произведении (4.4) поменять местами сомножители $a_{(i+1)\,\alpha_i}$ и $a_{i\,\alpha_{(i+1)}}$. В результате, член (4.4) преобразованного определителя перепишется в виде

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2}\, \ldots\, a_{i\alpha_{(i+1)}}\, a_{(i+1)\,\alpha_i}\, \ldots\, a_{n\alpha_n}\,. \tag{4.5}$$

Поэтому, если $\alpha_i > \alpha_{(i+1)}$ и, следовательно, до перестановки i–й и $(i+1)$–й строк пара чисел α_i и $\alpha_{(i+1)}$ образовывала инверсию в последовательности α_1, α_2, …, α_i, $\alpha_{(i+1)}$, …, α_n, то после перестановки строк определителя эта инверсия исчезает. Наоборот, если $\alpha_i < \alpha_{(i+1)}$ и, следовательно, до перестановки i–й и $(i+1)$–й строк пара чисел α_i и $\alpha_{(i+1)}$ не составляла инверсии в последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \alpha_{(i+1)}, \ldots, \alpha_n$, то после перестановки строк определителя эта инверсия возникнет. Из сравнения (4.3) и (4.5) видно, что в результате рассматриваемого преобразования определителя все инверсии в последовательности α_1, α_2, …, α_n, не связанные с парой чисел α_i и $\alpha_{(i+1)}$, сохраняются и новые инверсии, не связанные с этой парой, не возникают.

Эти утверждения следуют и из геометрического представления инверсии в перестановке вторых индексов матричных элементов как отрезка отрицательного наклона, соединяющего два элемента из разных строк определителя. Действительно, если отрезок, соединяющий элементы $a_{i\alpha_i}$ и $a_{(i+1)\,\alpha_{(i+1)}}$, принадлежащие, соответственно, i–й и $(i+1)$–й строкам определителя, имеет положительный наклон (см. Рис. 7a), то после перестановки этих строк его наклон станет отрицательным (см. Рис. 7b). Наоборот, отрезок отрицательного наклона после перестановки строк приобрел бы положительный наклон.

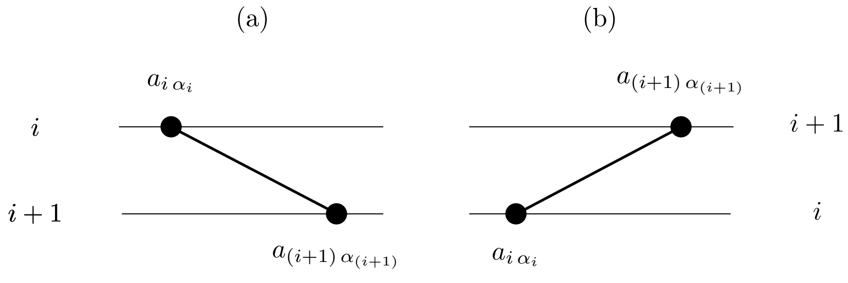

Рис. 7

Очевидно, что отрезки, соединяющие элементы i–й и $(i+1)$–й строк с элементами других строк определителя, а также отрезки, соединяющие элементы других строк определителя между собой, не изменяют своего наклона при перестановке i–й и $(i+1)$–й строк. Таким образом, при перестановке i–й и $(i+1)$–й строк полное число инверсий в последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \alpha_{(i+1)}, \ldots, \alpha_n$ вторых индексов матричных элементов, образующих члены определителя, изменяется на единицу. Поэтому каждый член определителя, а следовательно, и сам определитель при перестановке строк меняет знак на противоположный.

Если переставляются не соседние строки, а, например, i–я и $(i+k)$–я, то такую перестановку можно представить как последовательность k перестановок i–й строки с $(i+1)$–й, $(i+2)$–й, …, $(i+k)$–й, а затем $(k-1)$ перестановок $(i+k)$–й строки с $(i+k-1)$–й, $(i+k-2)$–й, …, $(i+1)$–й. При этом знак определителя поменяется нечетное число $k+(k-1) = (2k-1)$ раз и, следовательно, изменится на противоположный.

На Рис. 8 в качестве примера изображена последовательность операций, выполняемых при перестановке i–й и $(i+4)$–й строк определителя. Сначала следует переставить i–ю строку с $(i+1)$–й, $(i+2)$–й, $(i+3)$–й и $(i+4)$–й (Рис. 8(a)). Затем $(i+4)$–ю строку переставим с $(i+3)$–й, $(i+2)$–й и $(i+1)$–й (Рис. 8(b)). В результате этих $4+3=7$ операций придем к определителю, у которого i–я и $(i+4)$–я строки поменялись местами (Рис. 8(c)).

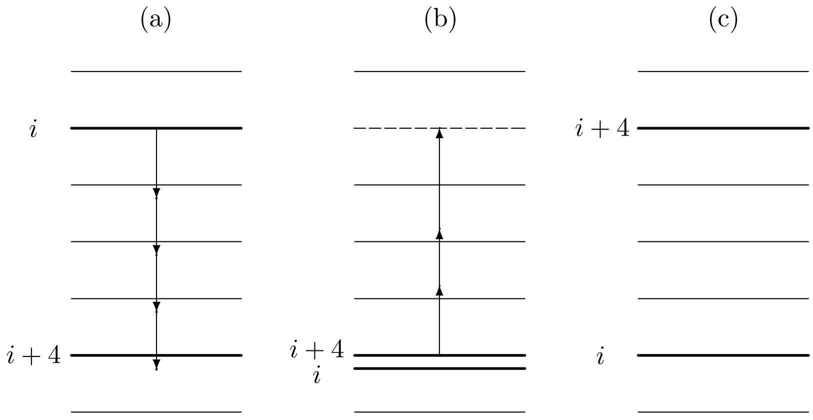

Рис. 8

Следствие *Определитель, имеющий две одинаковые строки, равен нулю.*

Доказательство. Перестановка этих строк не меняет вида определителя. С другой стороны, согласно доказанному, он должен изменить свой знак. Таким образом, $\Delta = -\Delta$ и, следовательно, $\Delta = 0$.

4.3 Линейность

Теорема 4.3 *Если все элементы i–й строки определителя $|A|$ представлены в виде линейной комбинации двух слагаемых*

$$a_{ij} = \lambda_1 b_{ij}^{(1)} + \lambda_2 b_{ij}^{(2)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

с коэффициентами λ_1 и λ_2, то определитель $|A|$ равен такой же линейной комбинации двух определителей:

$$|A| = \lambda_1 \left|B^{(1)}\right| + \lambda_2 \left|B^{(1)}\right| , \tag{4.6}$$

у каждого из которых все строки, кроме i–й, такие же, как и у исходного определителя $|A|$, а i-е строки определителей $\left|B^{(1)}\right|$ и $\left|B^{(2)}\right|$ состоят из элементов $b_{ij}^{(1)}$ и $b_{ij}^{(2)}$, соответственно.

Доказательство. В соответствии с определением, данным на стр. 42, определитель $|A|$ можно представить в виде:

$$|A| = \sum (-1)^N \ a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{(i-1)\alpha_{(i-1)}} a_{i\alpha_i} a_{(i+1)\alpha_{(i+1)}} \dots a_{n\alpha_n} \ , \qquad (4.7)$$

где сумма берется по всем перестановкам

$$\alpha_1, \, \alpha_2, \, \dots, \, \alpha_{(i-1)}, \, \alpha_i, \, \alpha_{(i+1)}, \, \dots \alpha_n \ \ ,$$

а N — число инверсии в каждой такой перестановке.

Согласно условиям теоремы,

$$a_{i\alpha_i} = \lambda_1 b^{(1)}_{i\alpha_i} + \lambda_2 b^{(2)}_{i\alpha_i} \, . \qquad (4.8)$$

Подставляя (4.8) в правую часть (4.7), получим:

$$|A| = \sum (-1)^N \ a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{(i-1)\alpha_{(i-1)}} \Big(\lambda_1 b^{(1)}_{i\alpha_i} +$$

$$+ \lambda_2 b^{(2)}_{i\alpha_i} \Big) a_{(i+1)\alpha_{(i+1)}} \dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \lambda_1 \sum (-1)^N \ a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{(i-1)\alpha_{(i-1)}} b^{(1)}_{i\alpha_i} a_{(i+1)\alpha_{(i+1)}} \dots a_{n\alpha_n} +$$

$$+ \lambda_2 \sum (-1)^N \ a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{(i-1)\alpha_{(i-1)}} b^{(2)}_{i\alpha_i} a_{(i+1)\alpha_{(i+1)}} \dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \lambda_1 \left| B^{(1)} \right| + \lambda_2 \left| B^{(2)} \right| \, .$$

Замечание 4.2 Теорему 4.3 можно сформулировать в более общей форме: *если все элементы i–й строки определителя $\left|A^{(M)}\right|$ представлены в виде линейной комбинации любого фиксированного числа M слагаемых*

$$a^{(M)}_{ij} = \sum_{l=1}^{M} \lambda_l b^{(l)}_{ij} \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad (4.9)$$

с коэффициентами λ_l $(l = 1, 2, \dots, M)$, то определитель $\left|A^{(M)}\right|$ равен такой же линейной комбинации определителей:

$$\left|A^{(M)}\right| = \sum_{l=1}^{M} \lambda_l \left|B^{(l)}\right| \, , \qquad (4.10)$$

у каждого из которых все строки, кроме i–й, такие же, как и у исходного определителя $\left|A^{(M)}\right|$, а i–я строка определителя $\left|B^{(l)}\right|$ состоит из элементов $b^{(l)}_{ij}$.

Доказательство. Сгруппируем слагаемые в сумме (4.9) следующим образом:

$$a_{ij}^{(M)} = \sum_{l=1}^{M-1} \lambda_l b_{ij}^{(l)} + \lambda_M b_{ij}^{(M)} = a_{ij}^{(M-1)} + \lambda_M b_{ij}^{(M)}\,, \tag{4.11}$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда, в соответствии с Теоремой 4.3,

$$\left|A^{(M)}\right| = \left|A^{(M-1)}\right| + \lambda_M \left|B^{(M)}\right|\,, \tag{4.12}$$

причем

$$\left|A^{(1)}\right| = \lambda_1 \left|B^{(1)}\right|\,. \tag{4.13}$$

Соотношения типа (4.12) называются *рекуррентными соотношениями*.

Из (4.11) и (4.13) находим:

$$\left|A^{(2)}\right| = \left|A^{(1)}\right| + \lambda_2 \left|B^{(2)}\right| = \lambda_1 \left|B^{(1)}\right| + \lambda_2 \left|B^{(2)}\right|\,,$$

$$\left|A^{(3)}\right| = \left|A^{(2)}\right| + \lambda_3 \left|B^{(3)}\right| = \lambda_1 \left|B^{(1)}\right| + \lambda_2 \left|B^{(2)}\right| + \lambda_3 \left|B^{(3)}\right| \quad \text{и т.д.}\,. \tag{4.14}$$

Равенства (4.13)–(4.14) позволяют предположить, что для любого $M = 1, 2, \ldots$ имеет место равенство

$$\left|A^{(M)}\right| = \sum_{l=1}^{M} \lambda_l \left|B^{(l)}\right|\,. \tag{4.15}$$

Чтобы убедиться в этом, воспользуемся методом математической индукции. Докажем, что из справедливости формулы (4.15) для произвольного значения M следует ее справедливость и для значения $M+1$. Пусть

$$a_{ij}^{(M+1)} = \sum_{l=1}^{M} \lambda_l b_{ij}^{(l)} + \lambda_{M+1} b_{ij}^{(M+1)} = a_{ij}^{(M)} + \lambda_{M+1} b_{ij}^{(M+1)}\,,$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда из Теоремы 4.3 и предположения (4.15) следует, что

$$\begin{aligned} \left|A^{(M+1)}\right| &= \left|A^{(M)}\right| + \lambda_{M+1} \left|B^{(M+1)}\right| = \\ &= \sum_{l=1}^{M} \lambda_l \left|B^{(l)}\right| + \lambda_{M+1} \left|B^{(M+1)}\right| = \sum_{l=1}^{M+1} \lambda_l \left|B^{(l)}\right|\,. \end{aligned}$$

Согласно методу математической индукции (см. стр. 28) этот результат означает, что формула (4.15) справедлива при любом $M = 1, 2, \ldots$.

Следствие 1 *Умножение всех элементов некоторой строки определителя на число λ равносильно умножению определителя на λ.* Иными словами, *общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно вынести за знак определителя.*

В частности, в соответствии с правилом умножения матрицы A на число λ, имеем $|\lambda A| = \lambda^n\,|A|$, где n — порядок определителя $|A|$.

Доказательство. Этот результат является частным случаем Теоремы 4.3 при $\lambda_2 = 0$.

Следствие 2 *Если элементы двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

Доказательство. Согласно Следствию 1, коэффициент пропорциональности можно вынести за знак определителя. В результате получим определитель с двумя одинаковыми строками, который в силу Следствия из Теоремы 4.2 равен нулю.

Следствие 3 *Определитель не изменится, если к элементам некоторой его строки прибавить соответствующие элементы любой другой строки, умноженные на произвольное число λ.*

Доказательство. В самом деле, Теорема 4.3 позволяет представить полученный в результате такого прибавления определитель в виде суммы двух определителей, первый из которых совпадает с исходным, а второй содержит две пропорциональные строки и в силу Следствия 2 из Теоремы 4.2 равен нулю.

Замечание 4.3 Следствие 2 является частным случаем более общего утверждения: *если все элементы какой-либо строки определителя являются линейной комбинацией соответствующих элементов других его строк, то определитель равен нулю.*

Доказательство. Пусть элементы i–й строки определителя $|A|$ имеют вид линейной комбинации его l–й, m–й, …, s–й строк:

$$a_{ij} = \lambda a_{lj} + \mu a_{mj} + \ldots + \eta a_{sj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ l, m, \ldots, s \neq i)\ .$$

Согласно Замечанию 4.2, данный определитель можно представить в виде такой же линейной комбинации

$$|A| = \lambda\,|A_l| + \mu\,|A_m| + \ldots + \eta\,|A_s|$$

определителей $|A_l|$, $|A_m|$, $\ldots$, $|A_m|$, у которых i–я строка совпадает с l–й, m–й, $\ldots$, s–й строками, соответственно. В силу Следствия из Теоремы 4.2 эти определители равны нулю как имеющие две одинаковые строки. Следовательно и $|A| = 0$.

Замечание 4.4 Более общая формулировка Следствия 3 следующая: *определитель не изменится, если к элементам его i–й строки прибавить соответствующие элементы l–й строки, умноженные на число λ, затем элементы m–й строки, умноженные на число μ, $\ldots$, элементы s–й строки, умноженные на число η (l,m,$\ldots$,$s \neq i$).*

Доказательство. В самом деле, выполняя эти операции последовательно и принимая во внимание Следствие 3, мы получим исходный определитель.

Пример 4.2 Найти, при каких значениях числа x

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0\ .$$

Решение. Используя Теорему 4.3, выделим из $\Delta(x)$ определители, содержащие две одинаковые строки. Согласно Следствию из Теоремы 4.2, такие определители равны нулю. Поэтому получаем последовательно:

$$\begin{aligned}\Delta(x) \;&=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = \\ &=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} =\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} .$$

Оставшийся определитель имеет треугольный вид и, согласно (3.7), (3.8), равен

$$\Delta(x) = -x\,(1-x)\,(2-x)\ .$$

Таким образом, уравнение $\Delta(x) = 0$ имеет три корня:

$$x = 0, 1, 2\,.$$

Заметим, что исходный определитель можно сразу привести к треугольному виду, если элементы его первой строки умножить на -1 и затем прибавить к соответствующим элементам 2–й, 3–й и 4–й строк. Согласно Следствию 3, указанное преобразование не меняет величины определителя.

Пример 4.3 Вычислить определитель

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix} ,$$

где a — некоторое действительное число.

Решение. Приведем определитель к треугольному виду. Для этого умножим элементы 1–й строки определителя на -1 и прибавим их к соответствующим элементам 2–й и 3–й строк. Имеем:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & -a & a \\ 0 & 2a & -2a \\ 0 & 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a^3\,.$$

Пример 4.4 Вычислить определитель

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix} ,$$

где x — некоторое действительное число.
Решение. Прибавим элементы 1–й строки определителя к соответствующим элементам 3–й строки:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} .$$

Поменяем местами 2–й и 3–й столбцы определителя. Согласно Теореме 4.2 и Замечанию 4.1, при этом преобразовании определитель изменит свой знак на противоположный:

$$\Delta_3 = -\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2x\,. \tag{4.16}$$

Мы получили в правой части (4.16) определитель, имеющий треугольный вид. Поэтому $\Delta_3 = -(-x)(-1)2 = -2x$.

4.4 Определитель произведения матриц

Теорема 4.4 *Определитель произведения двух квадратных матриц A и B одного и того же порядка равен произведению их определителей:*

$$|AB| = |A| \cdot |B|\ . \tag{4.17}$$

Доказательство. Рассмотрим определитель произведения AB квадратных матриц A и B:

$$\det AB = \det\left(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} b_{\alpha j}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum\limits_{\alpha_1=1}^{n} a_{1\alpha_1} b_{\alpha_1 1} & \sum\limits_{\alpha_1=1}^{n} a_{1\alpha_1} b_{\alpha_1 2} & \ldots & \sum\limits_{\alpha_1=1}^{n} a_{1\alpha_1} b_{\alpha_1 n} \\ \sum\limits_{\alpha_2=1}^{n} a_{2\alpha_2} b_{\alpha_2 1} & \sum\limits_{\alpha_2=1}^{n} a_{2\alpha_2} b_{\alpha_2 2} & \ldots & \sum\limits_{\alpha_2=1}^{n} a_{2\alpha_2} b_{\alpha_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{\alpha_n=1}^{n} a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n 1} & \sum\limits_{\alpha_n=1}^{n} a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n 2} & \ldots & \sum\limits_{\alpha_n=1}^{n} a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n n} \end{vmatrix} . \tag{4.18}$$

Применяя к каждой из строк определителя в правой части (4.18) Теорему 4.3, сформулированную в наиболее общей форме в Замечании 4.2, получаем последовательно:

$$\det AB =$$

$$= \sum_{\alpha_1=1}^{n} a_{1\alpha_1} \begin{vmatrix} b_{\alpha_1 1} & b_{\alpha_1 2} & \dots & b_{\alpha_1 n} \\ \sum\limits_{\alpha_2=1}^{n} a_{2\alpha_2} b_{\alpha_2 1} & \sum\limits_{\alpha_2=1}^{n} a_{2\alpha_2} b_{\alpha_2 2} & \dots & \sum\limits_{\alpha_2=1}^{n} a_{2\alpha_2} b_{\alpha_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{\alpha_n=1}^{n} a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n 1} & \sum\limits_{\alpha_n=1}^{n} a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n 2} & \dots & \sum\limits_{\alpha_n=1}^{n} a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\alpha_1=1}^{n} a_{1\alpha_1} \sum_{\alpha_2=1}^{n} a_{2\alpha_2} \begin{vmatrix} b_{\alpha_1 1} & b_{\alpha_1 2} & \dots & b_{\alpha_1 n} \\ b_{\alpha_2 1} & b_{\alpha_2 2} & \dots & b_{\alpha_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{\alpha_n=1}^{n} a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n 1} & \sum\limits_{\alpha_n=1}^{n} a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n 2} & \dots & \sum\limits_{\alpha_n=1}^{n} a_{n\alpha_n} b_{\alpha_n n} \end{vmatrix} =$$

$$= \dots =$$

$$= \sum_{\alpha_1=1}^{n} a_{1\alpha_1} \sum_{\alpha_2=1}^{n} a_{2\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_n=1}^{n} a_{n\alpha_n} \begin{vmatrix} b_{\alpha_1 1} & b_{\alpha_1 2} & \dots & b_{\alpha_1 n} \\ b_{\alpha_2 1} & b_{\alpha_2 2} & \dots & b_{\alpha_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\alpha_n 1} & b_{\alpha_n 2} & \dots & b_{\alpha_n n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\dots,\,\alpha_n=1}^{n} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n} \begin{vmatrix} b_{\alpha_1 1} & b_{\alpha_1 2} & \dots & b_{\alpha_1 n} \\ b_{\alpha_2 1} & b_{\alpha_2 2} & \dots & b_{\alpha_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\alpha_n 1} & b_{\alpha_n 2} & \dots & b_{\alpha_n n} \end{vmatrix}. \qquad (4.19)$$

Заметим, что в сумме в правой части (4.19) достаточно учитывать лишь такие произведения $a_{1\alpha_1}\ a_{2\alpha_2}\ \dots\ a_{n\alpha_n}$ элементов матрицы A, у которых все вторые индексы α_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ отличаются друг от друга. Действительно, при совпадении каких-либо двух индексов α_i и α_j $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ определитель в правой части (4.19) обращается в нуль, так как в этом случае он имеет две одинаковые строки.

Таким образом, суммирование в правой части (4.19) фактически проводится по всем возможным перестановкам $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ чисел 1,2,…, n, а само выражение (4.19) представляет собой сумму $n!$ слагаемых, каждое из которых включает в себя произведение n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца.

Рассмотрим в сумме (4.19) слагаемое, отвечающее расположению чисел α_1,α_2, …,α_n в возрастающей последовательности 1,2,…,n, при которой перестановка $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ не содержит инверсий. Очевидно, что в этом случае определитель в правой части (4.19) является определителем матрицы B.

Если какая-то пара чисел α_i и α_j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ образует инверсию, то поменяв местами в определителе в правой части (4.19) α_i–ю и α_j–ю строки, мы получим определитель матрицы B, умноженный на $(-1)^1$.

Если перестановка $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ содержит две инверсии, то очевидно, что дважды поменяв местами соответствующие строки определителя в правой части (4.19), мы получим определитель матрицы B, умноженный на $(-1)^2$.

Продолжая эти рассуждения и далее, нетрудно убедиться, что определитель в правой части (4.19) равен $(-1)^N |B|$, где N — число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Вынося общий множитель $|B|$ всех слагаемых в (4.19) за знак суммы, найдем:

$$\det AB = |B| \sum (-1)^N a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \,, \tag{4.20}$$

где сумма берется по всем перестановкам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Но согласно определению (3.6) данная сумма представляет собой не что иное, как определитель $|A|$ матрицы A. Следовательно,

$$\det AB = \det A \cdot \det B \,.$$

Следствие 1 *Определитель произведения любого фиксированного числа n квадратных матриц одного и того же порядка $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равен произведению определителей этих матриц, т. е.*

$$|A_1 A_2 \ldots A_n| = |A_1|\,|A_2| \ldots |A_n| \,. \tag{4.21}$$

Доказательство. Определим матрицу

$$C^{(n)} = A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n \,,$$

которую можно представить в виде

$$C^{(n)} = C^{(n-1)} A_n \,,$$

причем

$$C^{(1)} = A_1 \,. \tag{4.22}$$

Тогда
$$\left|C^{(1)}\right| = |A_1| \tag{4.23}$$
и согласно Теореме 4.4
$$\left|C^{(n)}\right| = \left|C^{(n-1)}\right| \cdot |A_n| \qquad \text{при} \quad n \neq 1\,. \tag{4.24}$$
Из (4.24) находим:
$$\begin{aligned} \left|C^{(2)}\right| &= \left|C^{(1)}\right| \cdot |A_2| = |A_1| \cdot |A_2|\,, \\ \left|C^{(3)}\right| &= \left|C^{(2)}\right| \cdot |A_3| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3|\,, \\ \left|C^{(4)}\right| &= \left|C^{(3)}\right| \cdot |A_4| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| \quad \text{и т.д.}\,. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Формулы (4.23) и (4.25) позволяют нам предположить, что для любого $n = 1, 2, \ldots$
$$\left|C^{(n)}\right| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|\,. \tag{4.26}$$
Чтобы убедиться в этом, докажем, что из справедливости формулы (4.26) для произвольного значения n следует ее справедливость и для значения $n+1$:
$$\left|C^{(n+1)}\right| = \left|C^{(n)}\right| \cdot |A_{n+1}| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|\,.$$

Согласно методу математической индукции (см. стр. 28) этот результат означает, что формула (4.26) справедлива при любом $n = 1, 2, \ldots$.

<u>Следствие</u> 2 *Определитель целой положительной степени квадратной матрицы A равен той же степени определителя $|A|$ этой матрицы, т. е.*
$$|A^n| = |A|^n \qquad \text{для любого } n = 1, 2, \ldots\,.$$
Доказательство. Действительно, полагая в (4.21)
$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A\,,$$
найдем:
$$|A^n| = \left|\underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ раз}}\right| = \underbrace{|A| \cdot |A| \cdot \ldots \cdot |A|}_{n \text{ раз}} = |A|^n\,.$$

<u>Замечание</u> 4.5 Из Теоремы 4.4 следует, что $|AB| = |BA|$, *даже если* $AB \neq BA$.

5 Миноры и алгебраические дополнения

Определение *Минором* $\mathcal{M}_{ij}$ *элемента* a_{ij} *квадратной матрицы* n–го порядка A называется определитель $(n-1)$–го порядка, получающийся из определителя матрицы A вычеркиванием i–й строки и j–го столбца (той строки и того столбца, на пересечении которых располагается элемент a_{ij}).

Определение *Алгебраическим дополнением* $\mathcal{A}_{ij}$ *элемента* a_{ij} матрицы n–го порядка A называется число, определяемое выражением

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\mathcal{M}_{ij}\,. \tag{5.1}$$

Согласно определению, алгебраическое дополнение какого-либо матричного элемента совпадает с его минором, когда сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых располагается данный элемент, является четным числом, и отличается от минора знаком, если эта сумма — число нечетное.

Пример 5.1 Минор $\mathcal{M}_{23}$ матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \underline{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

равен

$$\mathcal{M}_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}\,.$$

Очевидно, что число миноров матричных элементов любой квадратной матрицы равно самому числу этих элементов (т. е. n^2 для матрицы n–го порядка).

Пример 5.2 Найти миноры всех элементов матрицы третьего порядка (см. Пример 3.3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем:

$$\mathcal{M}_{11}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\,,\qquad \mathcal{M}_{12}=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3\,,$$
$$\mathcal{M}_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1\,,\qquad \mathcal{M}_{21}=\begin{vmatrix}-1&1\\1&2\end{vmatrix}=-3\,,$$
$$\mathcal{M}_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1\,,\qquad \mathcal{M}_{23}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-2\,,$$
$$\mathcal{M}_{31}=\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}=-2\,,\qquad \mathcal{M}_{32}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\,,$$
$$\mathcal{M}_{33}=\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=3\,.$$

Замечание 5.1 *Алгебраические дополнения $\mathcal{A}_{ij}$ квадратной матрицы n–го порядка A связаны с алгебраическими дополнениями $\mathcal{A}^T_{ij}$ транспонированной к ней матрицы A^T соотношением*

$$\mathcal{A}_{ij}=\mathcal{A}^T_{ji}\qquad (i,j=1,2,\ldots,n)\,. \tag{5.2}$$

Доказательство. В самом деле, согласно (5.1) алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_{ij}$ матрицы A имеет вид

$$\mathcal{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\mathcal{M}_{ij}\,,$$

где $\mathcal{M}_{ij}$ — определитель матрицы $(n-1)$–го порядка M, получаемой из A вычеркиванием i–й строки и j–го столбца.

Аналогично,

$$\mathcal{A}^T_{ji}=(-1)^{j+i}\tilde{\mathcal{M}}_{ji}\,,$$

где $\tilde{\mathcal{M}}_{ji}$ — определитель матрицы $(n-1)$–го порядка $\tilde{M}$, получаемой из A^T вычеркиванием j–й строки и i–го столбца.

Но j–я строка матрицы A^T является в то же время j–м столбцом матрицы A, а i–й столбец A^T является i–й строкой A. Поэтому $\tilde{M}=M^T$ и, согласно Теореме 4.1,

$$\tilde{\mathcal{M}}_{ji}=\left|M^T\right|=|M|=\mathcal{M}_{ij}\,.$$

Следовательно, $\mathcal{A}_{ij}=\mathcal{A}^T_{ji}$.

Теорема 5.1 [6] *Определитель Δ_n квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения, т. е.*

$$\Delta_n = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\mathcal{A}_{is} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{5.3}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный определитель n–го порядка

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}\,. \tag{5.4}$$

Каждый член определителя обязательно содержит в виде сомножителя только один из элементов его первой строки a_{1j} $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, (5.4) можно представить в виде суммы

$$\Delta_n = a_{11}\bar{\mathcal{A}}_{11} + a_{12}\bar{\mathcal{A}}_{12} + \ldots + a_{1n}\bar{\mathcal{A}}_{1n}\,. \tag{5.5}$$

Рассмотрим множитель $\bar{\mathcal{A}}_{11}$ при элементе a_{11}. Очевидно, что он представляет собой алгебраическую сумму $(n-1)!$ членов, каждый из которых является произведением $(n-1)$ матричных элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца исходного определителя за исключением первой строки и первого столбца, на пересечении которых располагается сам элемент a_{11}. Упорядочим матричные элементы в этих произведениях таким образом, чтобы их первые индексы располагались в порядке возрастания: $a_{2\alpha_2}a_{3\alpha_3}\ldots a_{n\alpha_n}$. Поскольку второй индекс элемента a_{11} $(\alpha_1 = 1)$ не образует инверсий в перестановке α_1, α_2, …, α_n, составленной из вторых индексов матричных элементов в каждом из содержащих a_{11} членов $a_{11}a_{2\alpha_2}a_{3\alpha_3}\ldots a_{n\alpha_n}$ исходного определителя Δ_n, то очевидно, что знак каждого члена в выражении для $\bar{\mathcal{A}}_{11}$ определяется как $(-1)^N$, где N — число инверсий в перестановке α_2, α_3, …, α_n из $(n-1)$ номеров столбцов матричных элементов в произведении $a_{2\alpha_2}a_{3\alpha_3}\ldots a_{n\alpha_n}$, если при этом номера строк образуют возрастающую последовательность $(n-1)$ чисел $(2, 3, \ldots, n)$. Но тогда $\bar{\mathcal{A}}_{11}$ представляет собой не что иное, как определитель $(n-1)$–го порядка, получающийся из исходного вычеркиванием 1–й строки и 1–го столбца, т. е. минор матричного элемента a_{11}: $\bar{\mathcal{A}}_{11} = \mathcal{M}_{11}$.

[6] Данная теорема является частным случаем более общей теоремы Лапласа.

Найдем теперь множитель $\bar{\mathcal{A}}_{12}$ при элементе a_{12} в сумме (5.5). Для этого поменяем местами 1–й и 2–й столбцы определителя (5.4). Тогда в преобразованном определителе элемент a_{12} займет положение элемента a_{11} исходного определителя. Используя Теорему 4.2, Замечание 4.1 и представление (5.5) исходного определителя (5.4), получаем:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\Delta_n = -a_{11}\bar{\mathcal{A}}_{11} - a_{12}\bar{\mathcal{A}}_{12} - \dots - a_{1n}\bar{\mathcal{A}}_{1n} \,. \tag{5.6}$$

Повторяя рассуждения, приведенные ранее при определении $\bar{\mathcal{A}}_{11}$, найдем, что $-\bar{\mathcal{A}}_{12} = \mathcal{M}_{12}$.

Пронося третий столбец исходного определителя на место второго, а затем и на место первого столбца, найдем, что $\bar{\mathcal{A}}_{13} = \mathcal{M}_{13}$. Продолжая этот процесс, нетрудно установить, что $\bar{\mathcal{A}}_{1,j} = \mathcal{M}_{1,j}$, если для того, чтобы разместить j–й столбец на месте 1–го, его необходимо последовательно переставить с четным числом $1, 2, \dots, (j-1)$ столбцов, и $\bar{\mathcal{A}}_{1,j} = -\mathcal{M}_{1,j}$ — если с нечетным. В первом случае j должно быть нечетным числом, а во втором — четным. Следовательно, общее выражение для коэффициентов $\bar{\mathcal{A}}_{1j}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ разложения произвольного определителя n–го порядка (5.4) по элементам 1–й строки можно представить в форме:

$$\bar{\mathcal{A}}_{1,j} = (-1)^{1+j}\mathcal{M}_{1,j} \,. \tag{5.7}$$

Для того, чтобы разложить определитель по элементам любой строки, достаточно переставить эту строку на место первой, учитывая, что при каждой перестановке строк определитель меняет знак на противоположный. В качестве примера разложим определитель (5.4) по элементам второй строки. Используя разложение (5.5) определителя (5.4) и полученный ранее результат (5.7), представим определитель

$$\Delta'_n = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

в виде

$$\Delta'_n = a_{21}(-1)^{1+1}\mathcal{M}_{21} + a_{22}(-1)^{1+2}\mathcal{M}_{22} + \dots + a_{2n}(-1)^{1+n}\mathcal{M}_{2n} \,.$$

Но тогда

$$\Delta_n = -\Delta'_n =$$
$$= -a_{21}(-1)^{1+1}\mathcal{M}_{21} - a_{22}(-1)^{1+2}\mathcal{M}_{22} - \ldots - a_{2n}(-1)^{1+n}\mathcal{M}_{2n} =$$
$$= a_{21}(-1)^{2+1}\mathcal{M}_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}\mathcal{M}_{22} + \ldots + a_{2n}(-1)^{2+n}\mathcal{M}_{2n} =$$
$$= a_{21}\bar{\mathcal{A}}_{21} + a_{22}\bar{\mathcal{A}}_{22} + \ldots + a_{2n}\bar{\mathcal{A}}_{2n}\,,$$

где

$$\bar{\mathcal{A}}_{2,j} = (-1)^{2+j}\mathcal{M}_{2,j}\,.$$

Аналогично, можно разложить Δ_n по элементам третьей строки. Для этого переставим ее сначала со второй строкой определителя, а затем с первой строкой. В результате получим:

$$\Delta_n = a_{31}\bar{\mathcal{A}}_{31} + a_{32}\bar{\mathcal{A}}_{32} + \ldots + a_{3n}\bar{\mathcal{A}}_{3n}\,,$$

где

$$\bar{\mathcal{A}}_{3,j} = (-1)^{3+j}\mathcal{M}_{3,j}\,.$$

Очевидно, что разложение определителя по элементам i–й строки будет иметь вид:

$$\Delta_n = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\bar{\mathcal{A}}_{is} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

При этом коэффициенты разложения являются алгебраическими дополнениями элементов определителя Δ_n:

$$\bar{\mathcal{A}}_{i,j} = (-1)^{i+j}\mathcal{M}_{i,j} = \mathcal{A}_{i,j}\,.$$

Следствие *Сумма произведений n произвольных чисел*

$$b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n$$

на алгебраические дополнения элементов любой строки определителя n–го порядка Δ_n равна определителю $\Delta_n^{(b)}$, полученному из Δ_n заменой элементов этой строки числами $b_1,\, b_2,\, \ldots,\, b_n$.

Доказательство. Действительно, разлагая $\Delta_n^{(b)}$ по элементам строки, состоящей из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$, получим сумму их произведений на алгебраические дополнения этой строки.

Теорема 5.2 *Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя n–го порядка на алгебраические дополнения элементов другой его строки равна нулю, т. е.*

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}\mathcal{A}_{js} = 0 \qquad \text{при} \quad i,j = 1,2,\ldots,n \quad \text{и} \quad i \neq j\,. \tag{5.8}$$

Доказательство. Рассмотрим определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и вспомогательный определитель

$$\Delta'_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}\,,$$

полученный из Δ_n заменой j–й строки на i–ю. Согласно Следствию из Теоремы 4.2, определитель $\Delta'_n = 0$ как имеющий две одинаковые строки. С другой стороны, его можно вычислить, разлагая по элементам j–й строки. Используя Теорему 5.1, находим:

$$\Delta'_n = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\mathcal{A}_{js} = 0 \qquad \text{при} \quad i,j = 1,2,\ldots,n \quad \text{и} \quad i \neq j\,.$$

Замечание 5.2 Результаты теорем 5.1 и 5.2 можно объединить формулой

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}\mathcal{A}_{js} = \Delta_n \delta_{ij} \qquad \text{при} \quad i,j = 1,2,\ldots,n\,, \tag{5.9}$$

в которой δ_{ij} — *символ Кронекера*:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j \end{cases} . \tag{5.10}$$

<u>**Замечание**</u> **5.3** Согласно Замечанию 4.1, Теоремы 5.1 и 5.2 в равной степени применимы как к строкам, так и к столбцам определителя. В последнем случае формула (5.9) приобретает вид:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sj} \mathcal{A}_{si} = \Delta_n \delta_{ij} \qquad \text{для} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{5.11}$$

Пример 5.3 Вычислить произвольный определитель второго порядка, разложив его по элементам первого столбца.

Решение. Имеем последовательно:

$$\begin{aligned} \Delta_2 \quad &= \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\mathcal{A}_{11} + a_{21}\mathcal{A}_{21} = \\ &= \quad a_{11} \left(-1\right)^{1+1} \mathcal{M}_{11} + a_{21} \left(-1\right)^{2+1} \mathcal{M}_{21} = \\ &= \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \,. \end{aligned}$$

Полученное выражение совпадает с определением (3.3).

Пример 5.4 Вычислить произвольный определитель третьего порядка, разложив его по элементам первой строки.

Решение. Имеем:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\mathcal{A}_{11} + a_{12}\mathcal{A}_{12} + a_{13}\mathcal{A}_{13} =$$

$$= a_{11} \left(-1\right)^{1+1} \mathcal{M}_{11} + a_{12} \left(-1\right)^{1+2} \mathcal{M}_{12} + a_{13} \left(-1\right)^{1+3} \mathcal{M}_{13} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12} \left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13} \left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \,.$$

Это выражение совпадает с (3.4).

6 Вычисление определителей

Вычисление определителей второго и третьего порядков удобно проводить, используя геометрические правила, изображенные на рисунках 3 и 4. Приведем два основных способа вычисления определителей высших порядков.

6.1 Приведение определителя к треугольному виду

Используя доказанные в п. 4 свойства определителей, можно преобразовать исходный определитель к треугольному виду (3.7). Согласно (3.8), такой определитель равен простому произведению диагональных матричных элементов. Этот способ вычисления был использован нами в Примерах 4.2 – 4.3. Для более детального его обсуждения рассмотрим определитель общего вида

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad (6.1)$$

и преобразуем его таким образом, чтобы все матричные элементы, расположенные ниже главной диагонали, обратились в нуль.

Если все элементы первого столбца исходного определителя равны нулю, то, согласно Замечанию 3.1, такой определитель равен нулю. Предположим, что по крайней мере один из элементов первого столбца отличен от нуля. Переставляя строки определителя с учетом Теоремы 4.2, можно добиться, чтобы этот элемент расположился в левом верхнем углу определителя. Меняя индексацию матричных элементов, мы получим определитель вида (6.1), в котором $a_{11} \neq 0$. Умножим элементы его первой строки на $-a_{k1}/a_{11}$ и прибавим их к соответствующим элементам k–й строки (для каждого k=2,3,4,...,n). Согласно Следствию 3 из Теоремы 4.3, это преобразование не меняет значения определителя. В результате получим определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(1)} & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2}^{(1)} & a_{(n-1)3}^{(1)} & \dots & a_{(n-1)(n-1)}^{(1)} & a_{(n-1)n}^{(1)} \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{n(n-1)}^{(1)} & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}, \qquad (6.2)$$

в котором

$$a_{kl}^{(1)} = a_{kl} - \frac{a_{k1}a_{1l}}{a_{11}} \qquad (k, l = 2, 3, 4, \dots, n)$$

— новые матричные элементы, полученные после первого шага преобразования определителя (6.1) к треугольному виду. Обратим внимание на то, что в первом столбце определителя (6.2) все матричные элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю.

Дальнейшие преобразования не затрагивают элементов первой строки и первого столбца определителя (6.2).

Если все элементы второго столбца определителя (6.2), расположенные ниже его первой строки (т. е. элементы $a_{22}^{(1)}$, $a_{32}^{(1)}$, $\dots$, $a_{n2}^{(1)}$) равны нулю, то такой определитель равен нулю. В самом деле, разлагая (6.2) по элементам первого столбца, получим: $\Delta_n = a_{11}\Delta_n^{(1)}$, где

$$\Delta_n^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(1)} & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2}^{(1)} & a_{(n-1)3}^{(1)} & \dots & a_{(n-1)(n-1)}^{(1)} & a_{(n-1)n}^{(1)} \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{n(n-1)}^{(1)} & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Если $a_{22}^{(1)} = a_{32}^{(1)} = \dots = a_{n2}^{(1)} = 0$, то, согласно Замечанию 3.1, $\Delta_n^{(1)} = 0$ и, следовательно, $\Delta_n = 0$.

Предположим, что по крайней мере один из элементов $a_{22}^{(1)}$, $a_{32}^{(1)}$, …, $a_{n2}^{(1)}$ отличен от нуля. Переставим строки определителя (6.2) с учетом Теоремы 4.2 таким образом, чтобы этот элемент расположился во второй строке и во втором столбце определителя. Меняя индексацию матричных элементов, мы получим определитель вида (6.2), в котором $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Умножим элементы его второй строки на $-a_{k2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ и прибавим их к соответствующим элементам k–й строки (для каждого k=3,4,…,n). В результате получим определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{(n-1)3}^{(2)} & \dots & a_{(n-1)(n-1)}^{(2)} & a_{(n-1)n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{n(n-1)}^{(2)} & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix}, \qquad (6.3)$$

в котором

$$a_{kl}^{(2)} = a_{kl}^{(1)} - \frac{a_{k2}^{(1)} a_{2l}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \qquad (k, l = 3, 4, \dots, n)$$

— новые матричные элементы, полученные после второго шага преобразования исходного определителя к треугольному виду. Заметим, что уже и в первом и во втором столбцах определителя (6.3) все матричные элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю.

Дальнейшие преобразования не затрагивают элементов первой и второй строки, а также первого и второго столбца определителя (6.3).

Продолжая процесс последовательного обращения в нуль матричных элементов, расположенных ниже главной диагонали определителя, после $(r-1)$–го шага $(r \leq n)$ получим:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2r}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3r}^{(2)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{r(n-1)}^{(r-1)} & a_{rn}^{(r-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (6.4)$$

где

$$a_{kl}^{(r-1)} = a_{kl}^{(r-2)} - \frac{a_{k(r-1)}^{(r-2)} a_{(r-1)l}^{(r-2)}}{a_{(r-1)(r-1)}^{(r-2)}} \qquad (k, l = r, r+1, \dots, n)\ .$$

При $r < n$ определитель $\Delta_n = 0$, так как содержит строки, состоящие из одних нулей. Если же $r = n$, то (6.4) принимает треугольный вид

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (6.5)$$

и, как следует из Примера 3.7, равен произведению диагональных матричных элементов:

$$\Delta_n = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n-1)}\,. \qquad (6.6)$$

6.2 Понижение порядка определителя

Теорема 5.1 позволяет представить определитель n–го порядка в виде алгебраической суммы n определителей $(n-1)$–го порядка, каждый из которых, в свою очередь, может быть представлен в виде алгебраической суммы $(n-1)$ определителей $(n-2)$–го порядка и т. д.. Очевидно, что разложение определителя следует проводить по элементам той строки (или того столбца), которая содержит наибольшее количество нулей. Если же все матричные элементы определителя отличны от нуля, то можно, используя свойства определителя, преобразовать его таким образом, чтобы какая-либо строка или столбец содержали бы только один отличный от нуля матричный элемент. В этом случае, согласно Теореме 5.1, исходный определитель n–го порядка с точностью до знака равен простому произведению указанного матричного элемента на определитель $(n-1)$–го порядка, получаемый из преобразованного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых находится этот элемент. В частности, определитель n–го порядка (6.1) после первого шага проведенных выше преобразований имеет вид (6.2) и в соответствии с Теоремой 5.1 его разложение по элементам первого столбца приводит к результату:

$$\Delta_n = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(1)} & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)2}^{(1)} & a_{(n-1)3}^{(1)} & \dots & a_{(n-1)(n-1)}^{(1)} & a_{(n-1)n}^{(1)} \\ a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{n(n-1)}^{(1)} & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}. \tag{6.7}$$

После второго шага определитель (6.1) в правой части (6.7) приобретает вид

$$\Delta_{n-1}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)3}^{(2)} & \dots & a_{(n-1)(n-1)}^{(2)} & a_{(n-1)n}^{(2)} \\ 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{n(n-1)}^{(2)} & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix}. \tag{6.8}$$

Его разложение по элементам первого столбца дает

$$\Delta_{n-1}^{(1)} = a_{22}^{(1)} \begin{vmatrix} a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)3}^{(2)} & \dots & a_{(n-1)(n-1)}^{(2)} & a_{(n-1)n}^{(2)} \\ a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{n(n-1)}^{(2)} & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix}. \tag{6.9}$$

Продолжая эту процедуру, получим для определителя Δ_n уже известный нам результат (6.6).

Пример 6.1 Вычислить определитель 5–го порядка

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. В третьем столбце данного определителя уже имеются два нуля. Чтобы получить в этом столбце еще два нуля, умножим пятую строку на 3 и прибавим ко второй, а затем умножим эту же строку на -4 и прибавим к четвертой. После этой операции получим:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам третьего столбца:

$$\Delta_5 = (-1)^{3+5}(-1) \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем определитель в правой части полученного выражения. Умножим его вторую строку на 2 и прибавим к первой. Затем умножим эту же строку на -3 и прибавим к третьей. И наконец, умножим вторую строку на -2 и прибавим к четвертой. Преобразованный таким образом определитель разложим по элементам первого столбца. Имеем:

$$\Delta_5 = - \begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} =$$

$$= -\,(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Элементы второй строки определителя в правой части полученного выражения кратны числу 2, а элементы третьей строки — числу 3. Вынося общие множители каждой из указанных строк за знак определителя, находим:

$$\Delta_5 = 2\cdot 3\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 13 & -17 & -13 \\ 12 & -11 & -8 \end{vmatrix}.$$

Прибавим теперь элементы второй строки к соответствующим элементам первой:

$$\Delta_5 = 6\begin{vmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 13 & -17 & -13 \\ 12 & -11 & -8 \end{vmatrix}.$$

Элементы первой строки кратны числу 4, которое можно вынести за знак определителя:

$$\Delta_5 = 6\cdot 4\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 13 & -17 & -13 \\ 12 & -11 & -8 \end{vmatrix}.$$

Разложим полученный определитель по элементам первой строки:

$$\Delta_5 = 24\left(-2\begin{vmatrix} 13 & -13 \\ 12 & -8 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 13 & -17 \\ 12 & -11 \end{vmatrix}\right).$$

Элементы первой строки первого из определителей 2–го порядка в правой части данного выражения кратны числу 13, а элементы второй строки этого же определителя кратны числу 4. Вынося эти числа за знак определителя, получим:

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= 24\left(-2\cdot 13\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 13 & -17 \\ 12 & -11 \end{vmatrix}\right) \\ &= 24\,[-104 + (-143 + 204)] = -1032\,. \end{aligned}$$

Пример 6.2 Вычислить определитель 4–го порядка

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} .$$

Решение. Преобразуем исходный определитель таким образом, чтобы в 3–ей строке содержался только один отличный от нуля матричный элемент. Для этого умножим все элементы 3–го столбца на -4 и прибавим их к соответствующим элементам 1–го столбца, затем умножим все элементы 3–го столбца на 2 и прибавим их к соответствующим элементам 2–го столбца. Раскладывая преобразованный определитель по элементам 3-ей строки, найдем:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} .$$

Полученный определитель 3–го порядка можно вычислить, используя графическое правило, изображенное на Рис. 3, или с помощью Теоремы 5.1. Удобно, однако, предварительно упростить этот определитель, преобразовав его таким образом, чтобы 2–я строка содержала только один отличный от нуля матричный элемент. Для этого элементы 3–го столбца умножим на -13 и прибавим к соответствующим элементам 1–го столбца, а затем умножим элементы 3–го столбца на 4 и прибавим к соответствующим элементам 2–го столбца. Разложив преобразованный определитель по элементам 3–го столбца, найдем:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} .$$

Элементы 1–го столбца полученного определителя 2–го порядка кратны числу -8, а элементы второго столбца — числу 18. Вынося эти числа за знак определителя, получим окончательно:

$$\Delta_4 = (-1) \cdot (-8) \cdot 18 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 18 \cdot (10 - 11) = -144 .$$

7 Обратная матрица

Для любого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1}, такое, что $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Аналогичное понятие удается ввести и для некоторых квадратных матриц. Пусть A — квадратная матрица n–го порядка, а E — единичная матрица того же порядка.

Определение Матрица B называется *правой обратной* к матрице A, если в результате умножения A на B справа получается единичная матрица того же порядка, что и A, т. е.

$$AB = E\,. \tag{7.1}$$

Определение Матрица C называется *левой обратной* к матрице A, если в результате умножения A на C слева получается единичная матрица того же порядка, что и A, т. е.

$$CA = E\,. \tag{7.2}$$

Очевидно, что обратные матрицы B и C сами являются квадратными и того же порядка, что и A. Введение двух обратных матриц (правой и левой), а не одной, как это имеет место в случае обычных чисел, связано с отсутствием свойства коммутативности при перемножении матриц. Нетрудно, однако, убедиться в том, что *если определенные согласно (7.1) и (7.2) матрицы B и C существуют, то они совпадают между собой, т. е. $C = B$.*

Действительно, т. к. порядки матриц B, C и E совпадают, то согласно (2.12)

$$CE = C \qquad \text{и} \qquad EB = B\,.$$

Тогда, учитывая свойство ассоциативности при перемножении матриц (см. стр. 18), получаем:

$$C = CE = C\,(AB) = (CA)\,B = EB = B\,.$$

Докажем, что *матрица B, удовлетворяющая условиям*

$$AB = BA = E\,,$$

является единственной.

Предположим, что существует такая матрица $Q \neq B$, что $AQ = QA = E$. Но тогда $Q = QE = Q\,(AB) = (QA)\,B = EB = B$, т. е. мы пришли к противоречию. Таким образом, матрица $Q \neq B$, удовлетворяющая условиям $AQ = QA = E$, не существует.

Принимая во внимание единственность матрицы B, являющейся как правой, так и левой обратной к матрице A, в дальнейшем мы будем опускать термины "правая" и "левая" и говорить просто об обратной матрице, которую мы по аналогии с обычными числами обозначим символом A^{-1}. Тогда, имея в виду соотношения (7.1) и (7.2), мы приходим к следующему определению обратной матрицы:

Определение Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной к матрице* A, если в результате умножения A на A^{-1} как справа, так и слева, получается единичная матрица того же порядка, что и A, т. е.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E\,. \tag{7.3}$$

7.1 Необходимое и достаточное условия существования обратной матрицы

Условие $a \neq 0$ является необходимым и достаточным для существования обратного числа a^{-1}. Выясним условия существования обратной матрицы. Предварительно введем понятие невырожденной квадратной матрицы.

Определение Квадратная матрица A, определитель которой $|A|$ отличен от нуля ($|A| \neq 0$), называется *невырожденной*; в противном случае (т. е. когда $|A| = 0$) матрица называется *вырожденной* [7].

Согласно Следствию 1 из Теоремы 4.4

- произведение матриц, хотя бы одна из которых вырожденная, является вырожденной матрицей;
- произведение любых невырожденных матриц является невырожденной матрицей.

Теорема 7.1 *Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная.*

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что квадратная матрица A имеет обратную A^{-1}. Тогда, согласно определению (7.3),

[7]Невырожденную матрицу также называют *неособенной*, а вырожденную матрицу — *особенной*

$A^{-1}A = = AA^{-1} = E$. Применяя к произведению $A^{-1}A$ формулу (4.17), получим

$$\left|A^{-1}\right| |A| = \left|A^{-1}A\right| = |E| = 1\,.$$

Следовательно, $\left|A^{-1}\right| \neq 0$ и $|A| \neq 0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $|A| \neq 0$. Покажем, что в этом случае существует обратная матрица A^{-1}, определяемая равенствами (7.3). Для этого перепишем (5.9) и (5.11) в виде:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}\mathcal{A}_{js} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}\mathcal{A}_{si} = |A|\,\delta_{ij} \qquad (i,j = 1,2,\ldots,n)\,. \tag{7.4}$$

Разделим (7.4) на $|A|$ и введем в рассмотрение матрицу

$$B = \frac{1}{|A|}\tilde{A}\,. \tag{7.5}$$

Матрицу n–го порядка $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ с элементами $\tilde{a}_{ij} = \mathcal{A}_{ji}$, составленными из алгебраических дополнений $\mathcal{A}_{ij}$ матрицы A $(i,j = 1,2,\ldots,n)$, в дальнейшем будем называть *присоединенной*. Ее явный вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{21} & \ldots & \mathcal{A}_{n1} \\ \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{22} & \ldots & \mathcal{A}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{1n} & \mathcal{A}_{2n} & \ldots & \mathcal{A}_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

С помощью (7.5) равенства (7.4) можно переписать в виде

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} = \sum_{s=1}^{n} b_{is}a_{sj} = \delta_{ij} \qquad (i,j = 1,2,\ldots,n)\,. \tag{7.7}$$

или представить в матричной форме[8]:

$$AB = BA = E\,. \tag{7.8}$$

Сравнивая (7.3) и (7.8) и принимая во внимание, что обратная матрица A^{-1}, если она существует, является единственной, получаем, что $A^{-1} = B$. Теорема доказана.

[8]Из формул (2.13) и (5.10) видно, что матричные элементы единичной матрицы n–го порядка $E = (e_{ij})$ можно представить с помощью символа Кронекера: $e_{ij} = \delta_{ij}$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$.

Заметим, что присоединенную матрицу легко получить, если исходную матрицу A сначала транспонировать, а затем в транспонированной матрице A^T заменить все матричные элементы a_{ij}^T их алгебраическими дополнениями $\mathcal{A}_{ij}^T$. В самом деле, учитывая что согласно Замечанию 5.1 $\mathcal{A}_{ij}^T = \mathcal{A}_{ji}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, в результате такого преобразования мы придем к матрице (7.6).

Для нахождения обратной матрицы необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. Найти определитель $|A|$ исходной матрицы A. Если $|A| = 0$, то матрица A вырожденная и, следовательно, обратная матрица A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Транспонировать исходную матрицу A.

3. Заменить в в транспонированной к A матрице A^T все элементы a_{ij}^T их алгебраическими дополнениями $\mathcal{A}_{ij}^T$. В результате получим присоединенную матрицу $\tilde{A}$.

4. Найти обратную матрицу A^{-1} умножив $\tilde{A}$ на число $1/|A|$:
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}\ . \tag{7.9}$$

5. Проверить правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, используя ее определение (7.3).

Пример 7.1 Найти матрицу, обратную к
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ . \tag{7.10}$$

Решение.

1. Определитель матрицы $|A| = 5 \neq 0$ (см. Пример 3.3), т. е. матрица A — невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$\mathcal{A}_{11} = 1,\ \mathcal{A}_{12} = -3,\ \mathcal{A}_{13} = 1,\ \mathcal{A}_{21} = 3,\ \mathcal{A}_{22} = 1,$$

$$\mathcal{A}_{23} = -2,\ \mathcal{A}_{31} = -2,\ \mathcal{A}_{32} = 1,\ \mathcal{A}_{33} = 3\,.$$

3. Составим обратную матрицу с помощью формул (7.9) и (7.6):

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\ . \tag{7.11}$$

4. Перемножая матрицы (7.10) и (7.11), убеждаемся в правильности полученного результата.

Недостатком сформулированного метода построения обратной матрицы является его громоздкость. Действительно, если исходная матрица A n–го порядка, то для нахождения A^{-1} необходимо вычислить один определитель n–го порядка и n^2 алгебраических дополнений, т. е. определителей $(n-1)$–го порядка.

7.2 Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований строк

Рассмотрим другой, менее трудоемкий способ отыскания обратной матрицы, который в дальнейшем будем называть *методом элементарных преобразований строк матрицы*.

Выполним следующее преобразование исходной матрицы A. Умножим ее i–ю строку $(i = 1, 2, \ldots, n)$ на некоторое число λ_{ii}, а все оставшиеся (j–е) строки $(j = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq i)$ прибавим к i–й строке, предварительно умножив их на некоторые числа λ_{ij}. Очевидно, что данное преобразование можно представить как переход от матрицы A к матрице $F = \Lambda A$, где $\Lambda = (\lambda_{ij})$:

$$\lambda_{ii}a_{is} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} \lambda_{ij}a_{js} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}a_{js} = f_{is} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)\ . \tag{7.12}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи преобразования (7.12).

1. Пусть $\lambda_{ij} = \lambda_{ii}\delta_{ij}$, т. е. отличными от нуля могут быть только диагональные элементы матрицы Λ. Очевидно, что в данном случае преобразование (7.12) эквивалентно умножению строк исходной матрицы на числа λ_{ii}:

$$f_{is} = \lambda_{ii} a_{is}\,.$$

2. Пусть
$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j\,, \\ \lambda & \text{при} \quad i = k,\ j = l\,, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях}\,, \end{cases}$$
где λ — некоторое действительное число, а k и l — фиксированные числа, принимающие значения 1, 2, …,n, причем $k \neq l$. В этом случае
$$f_{is} = \begin{cases} a_{ks} + \lambda a_{ls} & \text{при} \quad i = k\,, \\ a_{is} & \text{при} \quad i \neq k\,, \end{cases}$$
т. е. преобразованная матрица отличается от исходной тем, что ко всем элементам k–й строки прибавляются соответствующие элементы l–й строки, умноженные на число λ.

3. Пусть
$$\lambda_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k,\ j = l\,, \\ 1 & \text{при} \quad i = l,\ j = k\,, \\ 1 & \text{при} \quad i = j \neq k, l\,, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях}\,, \end{cases}$$
где k и l — некоторые фиксированные числа, принимающие значения 1, 2,…,n, причем $k \neq l$. Тогда
$$f_{is} = \begin{cases} a_{ls} & \text{при} \quad i = k\,, \\ a_{ks} & \text{при} \quad i = l\,, \\ a_{is} & \text{при} \quad i \neq k, l\,, \end{cases}$$
т. е. преобразованная матрица отличается от исходной тем, что на месте k–й строки в ней располагается l–я, а на месте l–й — k–я. Иными словами, в результате преобразования k–я и l–я строки поменялись местами.

Выберем числа λ_{ij} таким образом, чтобы преобразованная матрица оказалась единичной:

$$F = E\,. \tag{7.13}$$

Последнее равенство означает, что матричные элементы

$$f_{ij} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\ . \tag{7.14}$$

Возникает естественный вопрос: существуют ли в действительности такие числа λ_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, что в результате указанного преобразования исходная матрица A переходит в единичную? Для того, чтобы ответить на него, перепишем равенство (7.13) с учетом определения матрицы F:

$$\Lambda A = E\,. \tag{7.15}$$

Таким образом, преобразование (7.12), (7.14) существует, если существует матрица Λ, удовлетворяющая условию (7.15). Принимая во внимание определение (7.3) обратной матрицы A^{-1}, ее единственность и Теорему 7.1, приходим к заключению, что преобразование (7.12), (7.14) существует и единственно, если исходная матрица A является невырожденной, причем

$$\Lambda = A^{-1}\,. \tag{7.16}$$

Образуем теперь *расширенную матрицу* $(A|E)$, объединяющую исходную матрицу A и единичную матрицу E той же размерности, что и A. Преобразуем $(A|E)$ указанным выше способом. Учитывая (7.16) и (7.3), имеем:

$$\Lambda\,(A|E) = (\Lambda A|\Lambda E) = (E|\Lambda) = \left(E|A^{-1}\right)\ ,$$

т. е., в результате преобразования матрица $(A|E)$ переходит в матрицу $\left(E|A^{-1}\right)$:

$$(A|E) \xrightarrow{\Lambda} \left(E|A^{-1}\right)\ .$$

Таким образом, *если удается отыскать преобразование исходной матрицы A, переводящее ее в единичную, то это же преобразование переводит единичную матрицу в матрицу, обратную к A.* Указанное преобразование может состоять из ряда последовательных операций:

1. *Умножения любой строки на число* $\lambda \neq 0$.

2. *Прибавление любой строки, умноженной на число λ, к другой строке.* При этом остальные строки остаются неизменными.

3. *Перестановки двух строк между собой*. При этом остальные строки остаются неизменными.

Определение Расширенные матрицы $(A|B)$ и $(A_1|B_1)$ называются *эквивалентными по строкам* и обозначаются

$$(A|B) \overset{\Lambda}{\sim} (A_1|B_1) \ ,$$

если $(A_1|B_1)$ получается из $(A|B)$ конечным числом *элементарных преобразований* типа 1–3.

Пример 7.2 Методом элементарных преобразований строк найти матрицу, обратную к данной (см. Пример 7.1):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \tag{7.17}$$

Решение. Составим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) . \tag{7.18}$$

Преобразуем ее таким образом, чтобы матрица в левой части (7.18) превратилась в единичную. Сначала добьемся, чтобы в нуль обратились все элементы левой матрицы, расположенные ниже диагонального элемента $a_{11} = 1$. Для этого умножим первую строку (7.18) на -2 и прибавим ее ко второй строке. Затем, умножим ту же строку на -1 и прибавим ее к третьей строке. В результате придем к матрице

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) . \tag{7.19}$$

Разделив вторую строку (7.19) на число 3, получим:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) . \tag{7.20}$$

Преобразуем (7.20) таким образом, чтобы все элементы левой матрицы, расположенные выше и ниже диагонального элемента $a_{22} = 1$, обратились в нули. Для этого сначала прибавим вторую строку расширенной матрицы (7.20) к ее первой строке, а затем, предварительно умножив ту же строку на -2, прибавим ее к третьей строке. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccr|rrc} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 1/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right). \tag{7.21}$$

Умножим третью строку (7.21) на число $3/5$:

$$\left(\begin{array}{ccr|rrr} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{array}\right). \tag{7.22}$$

Преобразуем (7.22) таким образом, чтобы все элементы левой матрицы, расположенные выше диагонального матричного элемента $a_{33} = 1$ обратились в нули. Для этого умножим третью строку матрицы (7.22) на $-2/3$ и прибавим ее к первой строке. Затем, умножив ту же строку на $1/3$, прибавим ее ко второй строке. Найдем:

$$\left(\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{array}\right). \tag{7.23}$$

Матрица в левой части (7.23) является единичной. Следовательно, в правой части (7.23) располагается обратная к A матрица. Вынося общий множитель $1/5$ всех элементов A^{-1} за знак матрицы, найдем окончательно:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Этот результат совпадает с полученным другим методом в Примере 7.1.

Пример 7.3 Методом элементарных преобразований строк найти матрицу, обратную к данной:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.24}$$

Решение. Составим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{7.25}$$

Преобразуем ее таким образом, чтобы матрица в левой части (7.25) превратилась в единичную. Сначала добьемся, чтобы в нуль обратились все элементы левой матрицы, расположенные ниже диагонального элемента $a_{11} = 1$. Для этого умножим вторую строку (7.25) на -1 и прибавим ее к первой строке:

$$\left(\begin{array}{ccr|crc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{7.26}$$

Теперь добьемся, чтобы в нуль обратились все элементы в левой части (7.26), расположенные выше диагонального элемента $a_{33} = 1$. Для этого сначала прибавим третью строку расширенной матрицы (7.26) к первой строке, а затем вычтем ее из второй строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|crr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{7.27}$$

В левой части (7.27) — единичная матрица, следовательно, в правой части (7.27) располагается матрица, обратная к (7.24):

$$B^{-1} = \left(\begin{array}{crr} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Перемножая B и B^{-1}, получим единичную матрицу третьего порядка, что подтверждает правильность полученного результата.

Пример 7.4 Методом элементарных преобразований строк найти матрицу, обратную к матрице

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right). \tag{7.28}$$

Преобразуем ее таким образом, чтобы матрица в левой части (7.28) превратилась в единичную. Сначала поменяем местами 1–ю и 2–ю строки расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right). \tag{7.29}$$

Добьемся, чтобы элемент в левой части (7.29), расположенный выше диагонального элемента $a_{33} = 1$, обратился в нуль. Для этого умножим вторую строку матрицы (7.29) на -2 и прибавим ее к первой строке:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Таким образом,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перемножая C и C^{-1} убеждаемся, что $CC^{-1} = E$.

Пример 7.5 Методом элементарных преобразований строк найти матрицу, обратную к матрице

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.30}$$

если она существует.

Решение. Составим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \tag{7.31}$$

Преобразуем ее таким образом, чтобы матрица в левой части (7.31) превратилась в единичную. Сначала добьемся, чтобы в нуль обратились все элементы левой матрицы, расположенные ниже диагонального элемента $a_{11} = 1$. Для этого умножим первую строку (7.31) на -2

и прибавим ее ко второй строке. Затем умножим первую строку (7.31) на -1 и прибавим ее к третьей. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{7.32}$$

Третья строка матрицы в левой части (7.32) состоит из одних нулей. Поэтому нет никакой возможности, используя элементарные преобразования, привести эту матрицу к единичной. Следовательно, обратная к (7.30) матрица не существует. Действительно, матрица (7.30) содержит две одинаковые строки и согласно Следствию из Теоремы 4.2, ее определитель равен нулю. Таким образом, матрица (7.30) является вырожденной. Согласно Теореме 7.1, для такой матрицы не существует обратной.

Пример 7.6 Методом элементарных преобразований строк найти матрицу, обратную к диагональной матрице

$$F = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \tag{7.33}$$

где a, b, c и d — некоторые действительные числа.

Решение. Определитель матрицы (7.33) равен произведению ее диагональных матричных элементов:

$$|F| = abcd\,.$$

Поэтому матрица (7.33) является невырожденной и, следовательно, имеет обратную, лишь если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Составим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{7.34}$$

Преобразуем ее таким образом, чтобы матрица в левой части (7.34) превратилась в единичную. Для этого разделим первую строку (7.34) на a, вторую строку — на b, третью строку — на c и четвертую строку — на d. В результате получим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & (1/a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (1/b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (1/c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (1/d) \end{array}\right),$$

в правой части которой располагается матрица

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{d} \end{pmatrix}. \qquad (7.35)$$

Перемножая (7.33) и (7.35) убеждаемся, что $FF^{-1} = E$.

7.3 Нахождение обратной матрицы методом Жордана–Гаусса

Для более удобного использования метода элементарных преобразований строк расширенной матрицы $(A|E)$ сформулируем геометрические правила, позволяющие относительно просто вычислять матричные элементы на каждом шаге преобразований.

Определение Будем говорить, что столбец произвольной матрицы является *единичным*, если один из принадлежащих ему элементов равен единице, а все остальные равны нулю.

Примеры единичных столбцов:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Замечание</u> 7.1 Единичная матрица состоит из разных единичных столбцов, которые располагаются в ней в такой последовательности, чтобы равные единице матричные элементы принадлежали главной диагонали этой матрицы, а все остальные ее элементы равнялись нулю:

$$E = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{7.36}$$

Очевидно, что любую квадратную матрицу состоящую из разных единичных столбцов можно перестановкой строк или столбцов преобразовать к единичной матрице.

Запишем расширенную матрицу $(A|E)$ указав в явном виде лишь элементы, расположенные на пересечении i–й и r–й строк и j–го и s–го столбцов матриц A и E $(i, j, r, s = 1, 2, \ldots, n, \;\; i \neq r, \; j \neq s)$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{is} & \ldots & \ldots & e_{ij} & \ldots & e_{is} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \ldots & a_{rj} & \ldots & \boxed{a_{rs}} & \ldots & \ldots & e_{rj} & \ldots & e_{rs} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{array}\right). \tag{7.37}$$

Используя операции, перечисленные на стр. 82, преобразуем расширенную матрицу (7.37) таким образом, чтобы ее левая часть превратилась в единичную матрицу.

Заметим, что любой столбец матрицы $A = (a_{ij})$ должен содержать по крайней мере один отличный от нуля элемент. В противном случае, согласно Замечанию 3.1, матрица A является вырожденной и, следовательно, обратная к ней матрица не существует. Пусть, например, элемент a_{rs}, принадлежащий r–й строке и s–му столбцу матрицы A отличен от нуля: $a_{rs} \neq 0$. Поместим его в рамку (см. (7.37)) и в дальнейшем будем называть *разрешающим* элементом. Строку и столбец расширенной матрицы, на пересечении которых располагается разрешающий элемент, будем также называть *разрешающими*.

Добьемся , чтобы разрешающий столбец стал единичным. Для этого сначала разделим разрешающую стоку на разрешающий элемент:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\dots & a_{ij} & \dots & a_{is} & \dots & \dots & e_{ij} & \dots & e_{is} & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\dots & a_{rj}^{(1)} & \dots & 1 & \dots & \dots & e_{rj}^{(1)} & \dots & e_{rs}^{(1)} & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots
\end{array}\right). \tag{7.38}$$

Здесь

$$a_{rj}^{(1)} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}, \qquad e_{rj}^{(1)} = \frac{e_{rj}}{a_{rs}}, \qquad e_{rs}^{(1)} = \frac{e_{rs}}{a_{rs}}. \tag{7.39}$$

Далее, прибавим к элементам i–й строки матрицы (7.38) соответствующие элементы ее r–й строки, предварительно умноженные на $-a_{is}$. В результате получим расширенную матрицу, левая часть которой содержит единичный столбец:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\dots & a_{ij}^{(1)} & \dots & 0 & \dots & \dots & e_{ij}^{(1)} & \dots & e_{is}^{(1)} & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\dots & a_{rj}^{(1)} & \dots & 1 & \dots & \dots & e_{rj}^{(1)} & \dots & e_{rs}^{(1)} & \dots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots
\end{array}\right), \tag{7.40}$$

Элементы разрешающей строки этой матрицы определяются формулами (7.39), а все остальные — выражениями:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{is}a_{rj}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}} = \frac{a_{rs}a_{ij} - a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}, \tag{7.41}$$

$$e_{ij}^{(1)} = e_{ij} - a_{is}e_{rj}^{(1)} = e_{ij} - \frac{a_{is}e_{rj}}{a_{rs}} = \frac{a_{rs}e_{ij} - a_{is}e_{rj}}{a_{rs}}, \tag{7.42}$$

$$e_{is}^{(1)} = e_{is} - a_{is}e_{rs}^{(1)} = e_{is} - \frac{a_{is}e_{rs}}{a_{rs}} = \frac{a_{rs}e_{is} - a_{is}e_{rs}}{a_{rs}}, \tag{7.43}$$

Этим завершается первый шаг преобразований расширенной матрицы $(A|E)$ к виду $\big(E|A^{-1}\big)$.

Обратим внимание на то, что элементы (7.41) матрицы, расположенной в левой части (7.40), могут быть получены сразу из (7.37) с помощью следующего геометрического *правила "прямоугольника"*. Рассмотрим прямоугольник, диагональю которого является отрезок, соединяющий искомый элемент a_{ij} с разрешающим элементом a_{rs}. В вершинах этого прямоугольника располагаются элементы a_{ij}, a_{is}, a_{rj}, a_{rs} (см. Рис. 9). Заметим, что в числителе выражения (7.41) содержится алгебраическая сумма двух слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение двух матричных элементов, расположенных по диагоналям в вершинах рассматриваемого прямоугольника. Произведение, включающее в себя разрешающий элемент, входит в алгебраическую сумму со знаком (+), а оставшееся произведение — со знаком (−). Разделив указанную алгебраическую сумму на разрешающий элемент a_{rs} получим матричный элемент $a_{ij}^{(1)}$ матрицы (7.40).

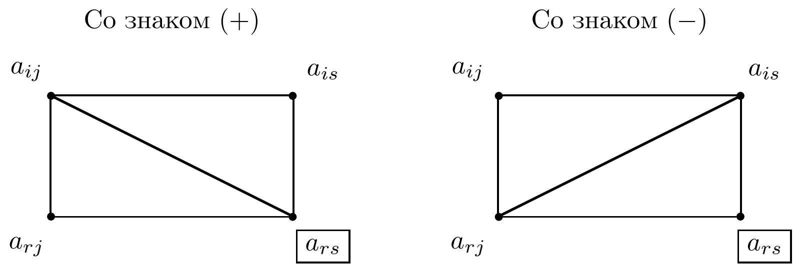

Рис. 9

Вычисление элементов $e_{ij}^{(1)}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, расположенных в правой части матрицы (7.40) и определяемых формулами (7.42), (7.43), также может быть выполнено с помощью правила прямоугольника (см. Рис. 10).

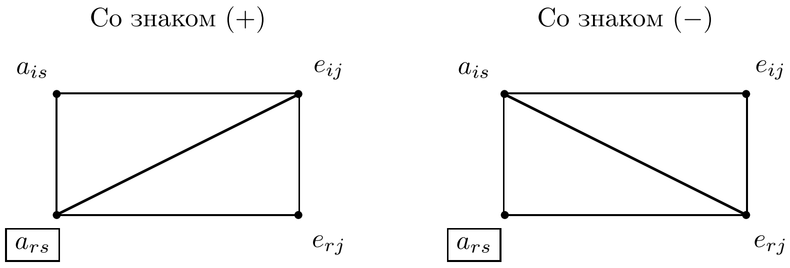

Рис. 10

Таким образом, для преобразования матрицы (7.37) к виду (7.40) достаточно выполнить следующие операции.

1. Элементы разрешающей строки разделить на разрешающий элемент.

2. На месте разрешающего элемента записать число 1. Все остальные элементы разрешающего столбца следует положить равными нулю.

3. Для вычисления оставшихся элементов расширенной матрицы воспользоваться правилом прямоугольника.

Все строки и столбцы матрицы в левой части (7.40) должны содержать по крайней мере один отличный от нуля элемент. В противном случае, матрица A является вырожденной и, следовательно, обратная к ней матрица не существует. Пусть, например, элемент $a_{pq}^{(1)}$, не принадлежащий r–й строке и s–му столбцу матрицы в левой части (7.40) отличен от нуля: $a_{pq}^{(1)} \neq 0$ ($p \neq r$, $q \neq s$). Выберем его в качестве нового разрешающего элемента и приступим ко второму шагу преобразований. Используя перечисленные операции, преобразуем (7.44) таким образом, чтобы новый разрешающий столбец (q–й) стал единичным. Существенно, что при этом единичный s–й столбец матрицы в левой части (7.44) не изменится. Для того, чтобы доказать это, запишем расширенную матрицу $(A|E)$ указав в явном виде элементы, расположенные на пересечении i–й, p–й, r–й строк и j–го, q–го, s–го столбцов матриц A и E ($i, j, p, q, r, s = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq p, r$, $j \neq q, s$, $p \neq r$, $q \neq s$):

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\cdots & a_{iq}^{(1)} & \cdots & a_{ij}^{(1)} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & e_{iq}^{(1)} & \cdots & e_{ij}^{(1)} & \cdots & e_{is}^{(1)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\cdots & \boxed{a_{pq}^{(1)}} & \cdots & a_{pj}^{(1)} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & e_{pq}^{(1)} & \cdots & e_{pj}^{(1)} & \cdots & e_{ps}^{(1)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\cdots & a_{rq}^{(1)} & \cdots & a_{rj}^{(1)} & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & e_{rq}^{(1)} & \cdots & e_{rj}^{(1)} & \cdots & e_{rs}^{(1)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots
\end{array}\right). \tag{7.44}
$$

Согласно формулам (7.41) и (7.39):

$$
\begin{aligned}
a_{is}^{(2)} &= \frac{a_{pq}^{(1)} a_{is}^{(1)} - a_{iq}^{(1)} a_{ps}^{(1)}}{a_{pq}^{(1)}}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n;\ i \neq p)\ , \\
a_{ps}^{(2)} &= \frac{a_{ps}^{(1)}}{a_{pq}^{(1)}}.
\end{aligned}
$$

Но $a_{is}^{(1)} = \delta_{ir}$ при $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Поэтому при $p \neq r$

$$
a_{is}^{(2)} = \delta_{ir}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)\ ,
$$

т.е. после второго шага преобразований единичный столбец матрицы (7.40) не изменится, если новый разрешающий элемент не принадлежит прежним разрешающим строке и столбцу.

Выбирая каждый раз разрешающие элементы по одному из каждой строки и каждого столбца левой части матрицы (7.37) и выполняя аналогичные преобразования, после n–го шага получим в левой части расширенной матрицы матрицу, состоящую из разных единичных столбцов. Согласно Замечанию 7.1, простой перестановкой строк эта матрица может быть преобразована к единичной. Тогда, в соответствии с методом элементарных преобразований строк, в правой части расширенной матрицы расположится матрица A^{-1}, обратная к матрице A.

Для контроля за вычислениями матричных элементов на каждом шаге преобразований удобно ввести в расширенную матрицу (7.37) дополнительный столбец,

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|c}
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\dots & a_{ij} & \dots & a_{is} & \dots & \dots & e_{ij} & \dots & e_{is} & \dots & \Sigma_i \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\dots & a_{rj} & \dots & \boxed{a_{rs}} & \dots & \dots & e_{rj} & \dots & e_{rs} & \dots & \Sigma_r \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right), \tag{7.45}$$

произвольный матричный элемент которого Σ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ равен сумме элементов i–й строки матрицы (7.37):

$$\Sigma_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\,. \tag{7.46}$$

Тогда после первого шага преобразований получим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|c}
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\dots & a_{ij}^{(1)} & \dots & 0 & \dots & \dots & e_{ij}^{(1)} & \dots & e_{is}^{(1)} & \dots & \Sigma_i^{(1)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\dots & a_{rj}^{(1)} & \dots & 1 & \dots & \dots & e_{rj}^{(1)} & \dots & e_{rs}^{(1)} & \dots & \Sigma_r^{(1)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right), \tag{7.47}$$

в которой матричный элемент

$$\Sigma_i^{(1)} = \frac{a_{rs}\Sigma_i - a_{is}\Sigma_r}{a_{rs}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{7.48}$$

последнего столбца этой матрицы по-прежнему представляет собой сумму элементов i–й строки матрицы (7.40). В самом деле,

$$\Sigma_i^{(1)} = \Sigma_i - \frac{a_{is}}{a_{rs}}\Sigma_r =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\right) - \frac{a_{is}}{a_{rs}}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{rj} + \sum_{j=1}^{n} e_{rj}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij} - \frac{a_{is}}{a_{rs}} a_{rj} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(e_{ij} - \frac{a_{is}}{a_{rs}} e_{rj} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} e_{ij}^{(1)} \,.$$

Пример 7.7 Методом Жордана–Гаусса найти матрицу, обратную к данной (см. Примеры 7.1, 7.2):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \,. \tag{7.49}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr|r} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{5} & 0 & -3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 3/5 & -2/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 1/5 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 & 7/5 \end{array} \right) .$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \,.$$

Этот результат совпадает с результатами, полученными в Примерах 7.1, 7.2.

Пример 7.8 Методом Жордана–Гаусса найти матрицу, обратную к данной (см. Пример 7.3):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{7.50}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) .$$

Следовательно,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Этот результат совпадает с полученным в Примере 7.3.

Пример 7.9 Методом Жордана–Гаусса найти матрицу, обратную к матрице

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.51}$$

(см. Пример 7.4).

Решение.

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) .$$

Следовательно,
$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$
Этот результат совпадает с полученным в Примере 7.4.

Пример 7.10 Методом Жордана–Гаусса найти матрицу, обратную к матрице
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \tag{7.52}$$
если она существует.

Решение.
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr|r} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) . \tag{7.53}$$
Третья строка матрицы в левой части (7.53) состоит из одних нулей. Следовательно, обратная к (7.52) матрица не существует (см. Пример 7.5).

7.4 Свойства невырожденных матриц

Отметим следующие свойства:

1. $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

   Доказательство. Используя Теорему 4.4, находим:
   $$\left|A^{-1}\right| |A| = \left|A^{-1}A\right| = |E| .$$
   Но определитель единичной матрицы любого размера равен единице (см. стр. 45), поэтому
   $$\left|A^{-1}\right| |A| = 1$$
   и следовательно, $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

   Доказательство. Действительно, умножая это равенство на A^{-1} справа и учитывая определение матрицы, обратной к матрице A^{-1}, получим:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}\left(A^{-1}\right) = E\,. \tag{7.54}$$

   С другой стороны, из определения матрицы, обратной к матрице A, следует, что

$$A\left(A^{-1}\right) = E\,. \tag{7.55}$$

   Принимая во внимание единственность обратной матрицы из (7.54) и (7.55), получаем, что $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

3. $(A^m)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^m$.

   Доказательство. В самом деле, из определения матрицы, обратной к матрице A^m, следует, что

$$(A^m)^{-1} A^m = E$$

   или

$$(A^m)^{-1} \underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}} = E\,.$$

   Умножим это равенство справа на

$$\left(A^{-1}\right)^m = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{m \text{ раз}}\,.$$

   Имеем:

$$(A^m)^{-1} \underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ раз}} \underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{m \text{ раз}} = \left(A^{-1}\right)^m\,.$$

   Учитывая, что $AA^{-1} = E$, получим: $(A^m)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^m$.

4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

   Доказательство. Действительно, из определения матрицы, обратной к матрице (AB), следует, что

$$(AB)^{-1}(AB) = E\,.$$

Умножая это равенство справа на произведение $B^{-1}A^{-1}$ и учитывая, что $BB^{-1} = E$ и $AA^{-1} = E$, получим: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

5. $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

Доказательство. Транспонируя равенства $A^{-1}A = E$ и $AA^{-1} = E$, учтем Свойство 4 операции транспонирования (см. стр. 32) и очевидное соотношение $E^T = E$. В результате получим:

$$E = \left(A^{-1}A\right)^T = A^T \left(A^{-1}\right)^T \tag{7.56}$$

и

$$E = \left(AA^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}\right)^T (A)^T \,. \tag{7.57}$$

Принимая во внимание определение обратной матрицы и ее единственность, из (7.56) и (7.57) находим, что $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

8 Ранг матрицы

Рассмотрим произвольную матрицу A размера $m \times n$ и натуральное число k, такое, что $k \leq \min\{m, n\}$. Вычеркивая в матрице A произвольным образом $(m-k)$ строк и $(n-k)$ столбцов, можно “выкроить” из нее квадратные *подматрицы* (т. е. матрицы, хотя бы один из размеров которых меньше соответствующего размера исходной матрицы) k–го порядка. Определители этих подматриц называют *минорами* k–го порядка данной матрицы.

Определение *Минором k–го порядка*[9] матрицы A называется определитель k–го порядка с элементами, расположенными на пересечении любых k строк и любых k столбцов матрицы A.

[9]Данное определение минора k–го порядка обобщает приведенное на стр. 61 определение *минора матричного элемента квадратной матрицы*. В последнем случае из квадратной матрицы n–го порядка вычеркиваются не любые, а вполне определенные одна строка и один столбец (на пересечении которых располагается заданный матричный элемент). В результате получается минор $(n-1)$–го порядка.

Полное число миноров k–го порядка, которые можно "выкроить" из матрицы A размера $m \times n$, составляет $C_m^k C_n^k$, где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

— число сочетаний из n элементов по k.

Например, из матрицы $\underset{3\times 4}{A}$ можно получить 12 миноров первого, 18 миноров второго и 4 минора третьего порядков.

Так как, согласно определению, минор k–го порядка представляет собой не что иное, как определитель k–го порядка, т. е. некоторое число, то очевидно, что одна и та же матрица может иметь равные миноры различных порядков.

Пример 8.1 Два минора 2–го порядка

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{и} \quad M_2' = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

равны минору 3–го порядка

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

этой же матрицы.

Замечание 8.1 Произвольный минор k–го порядка может равняться нулю или быть отличным от нуля. Докажем, что *если все миноры k–го порядка матрицы $\underset{m\times n}{A}$ равны нулю, то равны нулю и все ее миноры более высокого порядка.*

Доказательство. Если $k = \min\{m, n\}$, то миноров $(k+1)$–го порядка просто не существует. Если же $k < \min\{m, n\}$, то согласно Теореме 5.1 разложение *любого* минора $(k+1)$–го порядка данной матрицы по элементам $(k+1)$–й строки представляет собой алгебраическую сумму произведений элементов $(k+1)$–й строки на соответствующие миноры k–го порядка, которые, согласно исходному предположению, равны нулю. Поэтому равны нулю и все миноры $(k+1)$–го порядка. Это, в свою очередь, влечет за собой равенство нулю всех миноров $(k+2)$–го, $(k+3)$–го и, наконец, $(k+l)$–го порядка, где $l = \min\{m,n\} - k$.

Если среди матричных элементов a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ имеются отличные от нуля, то всегда можно указать натуральное число r, обладающее следующими свойствами:

1. Матрица A имеет отличный от нуля минор r–го порядка.

2. Всякий минор матрицы A, имеющий порядок $r+1$ или выше (если таковые вообще существуют), равен нулю.

Число r, обладающее указанными свойствами, называется *рангом* матрицы A. Иными словами, *рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы*. Ранг матрицы A обозначается как $r(A)$ или $\operatorname{rang} A$.

Из данного определения следует, что:

1. Ранг произвольной матрицы A не превосходит наименьший из ее размеров:
$$r(A) \le \min\{m,n\}\ .$$

2. Если все элементы матрицы A равны нулю, то ранг такой матрицы равен нулю.

3. Если A — невырожденная квадратная матрица n–го порядка, то ее ранг совпадает с порядком матрицы: $r = n$.

Теорема 8.1 *Ранг подматрицы не может превосходить ранг матрицы.*

Доказательство. Пусть $\underset{m_1\times n_1}{A_1}$ — подматрица матрицы $\underset{m\times n}{A}$. Предположим, что $r(A) < r(A_1)$. Согласно определению ранга матрицы, число $r(A_1)$ есть наивысший порядок отличных от нуля миноров подматрицы A_1 матрицы A. Но всякий минор подматрицы является в то же время и минором самой матрицы. Следовательно, матрица A имеет отличный от нуля минор порядка $r(A_1)$. Но тогда ее ранг не может быть меньше, чем $r(A_1)$. Таким образом, предполагая выполнение неравенства $r(A) < r(A_1)$ мы пришли к противоречию. Следовательно, имеет место неравенство $r(A_1) \le r(A)$.

Неравенство $r\left(A_1\right) \leq r\left(A\right)$ связано с тем, что матрица A имеет большее число строк или столбцов, чем ее подматрица A_1 и, следовательно, большее число миноров одного и того же порядка. Кроме того, матрица A может иметь и миноры более высокого порядка, чем минимальный размер ее подматрицы A_1, ограничивающий максимальной порядок ее миноров. Миноры матрицы A, не являющиеся одновременно минорами ее подматрицы A_1, могут оказаться отличными от нуля. Поэтому ранг матрицы либо превосходит ранг любой ее подматрицы, либо равен ему.

Тот минор r–го порядка, который отличен от нуля, называется *базисным минором* матрицы A. Строки и столбцы, на пересечении которых располагается базисный минор, называются, соответственно, *базисными строками* и *базисными столбцами*. Все остальные строки и столбцы матрицы будем называть *небазисными*. Подчеркнем, что под базисной строкой матрицы понимается отнюдь не отдельный ее фрагмент, входящий в базисный минор, а вся строка целиком. Это же замечание относится и к понятию базисного столбца.

Вообще говоря, у матрицы A может оказаться несколько базисных миноров, но все они имеют один и тот же порядок r. Понятия базисных и небазисных строк или столбцов матрицы имеет смысл только по отношению к какому-либо конкретному базисному минору, т. е. если по отношению к одному минору какая-либо строка является базисной, то по отношению к другому минору она может быть и небазисной. К обсуждению вопроса о неоднозначности выбора базисных строк и столбцов мы еще вернемся в Замечании 10.1.

Если ранг матриц A размера $m \times n$ равен r, то полное число миноров r–го порядка, которые можно “выкроить” из A, равно произведению $C_m^r C_n^r$, однако, не обязательно все эти миноры являются базисными, т. к. некоторые из них могут равняться нулю.

Пример 8.2 Вычислить ранг матрицы

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right).$$

Решение. Матрица A имеет четвертый порядок, поэтому $r\left(A\right) \leq 4$. Она является вырожденной матрицей, т. к. содержит два нулевых столбца, т. е. два столбца, все элементы которых равны нулю. Кроме того, вырожденными являются и все квадратные подматрицы 3–го порядка, т. к. они имеют по одному нулевому столбцу. Таким образом, $r\,(A) \leq 2$.

Очевидно, что мы могли бы с самого начала отбросить нулевые столбцы матрицы A и вместо нее рассматривать матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix},$$

ранг которой $r(\tilde{A}) \leq 2$. В самом деле, миноры, включающие в себя фрагменты нулевого столбца (или строки) исходной матрицы, сами содержат нулевой столбец (или строку) и, следовательно, равны нулю.

Любые два минора 2–го порядка матрицы $\tilde{A}$ содержат пропорциональные столбцы и поэтому их определители равны нулю. Следовательно, $r(\tilde{A}) \leq 1$. Поскольку, однако, $\tilde{A}$ имеет отличные от нуля элементы, ее ранг $r(\tilde{A}) = r\,(A) = 1$.

Пример 8.3 Определить ранг матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Данная матрица имеет один нулевой столбец (второй) и одну нулевую строку (третью). Отбрасывая нулевые строки и столбцы, получим невырожденную матрицу 2–го порядка

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

определитель которой равен -5. Таким образом, ранг данной матрицы равен 2.

Пример 8.4 Определить ранг матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

и найти все ее базисные миноры.

Решение. Наименьший из размеров матрицы D равен 4. Следовательно, $r\,(D) \leq 4$. Вычислим определитель матрицы, получаемой из (8.1) вычеркиванием двух последних столбцов:

$$\Delta_4^{(1)} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -45\,.$$

Таким образом, $\Delta_4^{(1)} \neq 0$ и, следовательно, $r\,(D) = 4$.

Полное число матриц 4–го порядка, которые можно получить из (8.1) вычеркиванием любых двух столбцов, равно $C_4^4 C_6^4 = 15$. Вычислим определители этих матриц:

$$\Delta_4^{(2)} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 45\,, \qquad \Delta_4^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$\Delta_4^{(4)} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 12\,, \qquad \Delta_4^{(5)} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 15\,,$$

$$\Delta_4^{(6)} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 90\,, \qquad \Delta_4^{(7)} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -39\,,$$

$$\Delta_4^{(8)} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -60\,, \qquad \Delta_4^{(9)} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 30\,,$$

$$\Delta_4^{(10)} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 12\,, \qquad \Delta_4^{(11)} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\,,$$

$$\Delta_4^{(12)} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9\,, \quad \Delta_4^{(13)} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 60\,,$$

Таким образом, только миноры $\Delta_4^{(1)}$, $\Delta_4^{(2)}$ и $\Delta_4^{(4)}$ — $\Delta_4^{(15)}$ являются базисными.

Замечание 8.2 *При нахождении базисных строк и столбцов матрицы и вычислении ее ранга строки и столбцы можно переставлять произвольным образом.*

Доказательство. В самом деле, в произвольной матрице A выделим r базисных строк и столько же базисных столбцов. Элементы, расположенные на пересечении базисных строк и столбцов образуют подматрицу, определитель которой является базисным минором. Эту подматрицу можно "выкроить" из A, вычеркивая в ней все *небазисные* строки и столбцы. При этом безразлично, вычеркиваются ли такие строки и столбцы сразу или же после их произвольной перестановки.

Перестановка *базисных* строк (столбцов) исходной матрицы A означает такую же перестановку соответствующих строк (столбцов) указанной подматрицы и, согласно Теореме 4.2, способна изменить лишь знак базисного минора.

9 Линейная зависимость строк и столбцов матрицы

Произвольная матрица

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

при помощи горизонтальных прямых может быть разбита на отдельные подматрицы, каждая из которых представляет собой матрицу–строку размера $1 \times n$. Таким образом, имеется возможность рассмотрения исходной матрицы как некоторой новой матрицы–столбца

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m \end{pmatrix} , \tag{9.2}$$

элементами которой являются m указанных строк:

$$\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 = (a_{11}\, a_{12}\, \dots\, a_{1n}) \ , \\ \mathbf{r}_2 = (a_{21}\, a_{22}\, \dots\, a_{2n}) \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{r}_m = (a_{m1}\, a_{m2}\, \dots\, a_{mn}) \ . \end{array} \tag{9.3}$$

Для обозначения элементов (9.3) матрицы (9.2) используется жирная буква $\mathbf{r}$ [10], снабженная одним индексом, указывающим в каком порядке располагаются строки в (9.2). Тем самым подчеркивается, что эти элементы являются, вообще говоря, матрицами, а не числами, функциями или алгебраическими выражениями.

В соответствии с определением, данным на стр. 5, две строки матрицы будем считать равными, если они совпадают поэлементно, т. е. $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_l$, если $a_{kj} = a_{lj}$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$.

Арифметические операции над строками матрицы (умножение на число, сложение) выполняются в соответствии с определениями, приведенными в п. 2:

$$\lambda\mathbf{r}_k = (\lambda a_{k1}\, \lambda a_{k2}\, \dots\, \lambda a_{kn}) \ , \tag{9.4}$$

[10] Обозначение происходит от английского слова *row* — строка, ряд.

$$\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_l = (a_{k1} + a_{l1}\, a_{k2} + a_{l2}\, \dots a_{kn} + a_{ln})\ . \tag{9.5}$$

<u>**Определение**</u> Строка $\mathbf{r}$ называется *линейной комбинацией s строк* $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s$, если существуют такие числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_s$, что

$$\mathbf{r} = \lambda_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2 + \dots + \lambda_s\mathbf{r}_s\,. \tag{9.6}$$

Частными случаями линейной комбинации являются сумма строк (когда $\lambda_1 = \lambda_2 =\ \dots = \lambda_s = 1$) и произведение строки на число (когда $s = 1$).

Если в линейной комбинации (9.6) положить

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0\,,$$

то в результате получим $\mathbf{r} = \mathbf{O}$, где

$$\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)$$

— *нулевая строка*. Может оказаться, что правая часть (9.6) равна нулевой строке и когда не все коэффициенты $\lambda_i = 0$, где $i = 1, 2, \dots, s$. В этом случае говорят, что строки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s$ являются линейно зависимыми.

<u>**Определение**</u> Строки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s$ матрицы называются *линейно зависимыми*, если найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация $\mathbf{r} = \lambda_1\mathbf{r}_1 + +\lambda_2\mathbf{r}_2 + \dots + \lambda_s\mathbf{r}_s$ равна нулевой строке, т. е.

$$\lambda_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2 + \dots + \lambda_s\mathbf{r}_s = \mathbf{O}\,. \tag{9.7}$$

Пример 9.1 Строки матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 9 & 7 & 5 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы, так как они связаны соотношением

$$4\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_3 + 2\mathbf{r}_4 = \mathbf{O}\,,$$

в котором все коэффициенты отличны от нуля. Между строками данной матрицы существуют и другие линейные зависимости, в которых некоторые из коэффициентов равны нулю, например,

$$2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 + 0\mathbf{r}_4 = \mathbf{O}\,, \qquad \text{или} \qquad 0\mathbf{r}_1 + 3\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_4 = \mathbf{O}\,.$$

Пример 9.2 Доказать, что если матрица состоит из одной строки $\mathbf{r}_1$, то эта строка будет линейно зависимой тогда и только тогда, когда $\mathbf{r}_1 = \mathbf{O}$.

Решение. Действительно, если $\mathbf{r}_1 = \mathbf{O}$, то, например, при $\lambda_1 = 1$ будет $\lambda_1\mathbf{r}_1 = \mathbf{O}$. Обратно, если $\lambda_1\mathbf{r}_1 = \mathbf{O}$ и $\lambda_1 \neq 0$, то, в соответствии с (9.4), $\mathbf{r}_1 = \mathbf{O}$.

Строки, не являющиеся линейно зависимыми, называются линейно независимыми. Можно дать и "самостоятельное" определение линейной независимости строк:

Определение Если линейная комбинация строк

$$\mathbf{r} = \lambda_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2 + \ldots + \lambda_s\mathbf{r}_s$$

равна нулевой строке тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\lambda_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, то строки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_s$ называются *линейно независимыми*.

Пример 9.3 Доказать, что строки единичной матрицы n–го порядка

$$E_n = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right)$$

линейно независимы.

Решение. Составим равенство

$$\lambda_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{r}_n = \mathbf{O}\,, \tag{9.8}$$

в котором

$$\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right)\,, \\ \mathbf{r}_2 = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right)\,, \\ \mathbf{r}_3 = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \end{array} \right)\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{r}_n = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

— строки единичной матрицы n–го порядка. Принимая во внимание (9.4) и (9.5), получим, что

$$\left(\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

т. е. равенство (9.8) имеет место только когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Следовательно, строки единичной матрицы линейно независимы.

<u>**Замечание**</u> **9.1** *Характер линейных зависимостей между строками матрицы не меняется при произвольной перестановке ее строк или столбцов*

Доказательство. Предположим, что произвольные строки $\mathbf{r}_p$, $\mathbf{r}_q, \ldots, \mathbf{r}_s$ матрицы $\underset{m\times n}{A} = (a_{ij})$ линейно независимы. Это означает, что соотношение

$$\lambda_p \mathbf{r}_p + \lambda_q \mathbf{r}_q + \ldots + \lambda_s \mathbf{r}_s = \mathbf{O} \tag{9.9}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $\lambda_p = \lambda_q = \ldots = \lambda_s = 0$. Очевидно, что это условие не зависит от того, в каком порядке располагаются строки в матрице.

Для того, чтобы убедиться, что строки $\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q, \ldots, \mathbf{r}_s$ останутся линейно независимыми и после произвольной перестановки столбцов матрицы, заметим, что в соответствии с правилами (9.4) и (9.5) равенство (9.9) представляет собой не что иное, как компактную форму записи совокупности n равенств

$$\lambda_p a_{pj} + \lambda_q a_{qj} + \ldots + \lambda_s a_{sj} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{9.10}$$

каждое из которых соответствует отдельному значению индекса j, указывающего номер столбца, в котором располагается соответствующий матричный элемент. Очевидно, что изменение порядка расположения столбцов в матрице равносильно простой перестановке равенств с различным значением индекса j и не меняет совокупности условий (9.10) в целом.

Если между произвольными строками $\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q, \ldots, \mathbf{r}_s$ матрицы A имеется линейная зависимость, то она сохранится и после произвольной перестановки ее строк и столбцов. В самом деле, если бы после перестановки строк и столбцов матрицы строки $\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_q, \ldots, \mathbf{r}_s$ оказались линейно независимыми, то, выполняя все преобразования в обратном порядке, мы в соответствии с уже доказанным получили бы линейную независимость этих строк в исходной матрице A, т. е. пришли бы к противоречию.

Теорема 9.1 *Строки матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда одна из них является линейной комбинацией остальных строк.*

Доказательство. Действительно, пусть одна из строк $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_s$, например последняя, является линейной комбинацией остальных, т. е.

$$\mathbf{r}_s = \lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 + \ldots + \lambda_{s-1} \mathbf{r}_{s-1} .$$

Это равенство можно переписать в виде:

$$\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 + \ldots + \lambda_{s-1} \mathbf{r}_{s-1} + (-1)\, \mathbf{r}_s = \mathbf{O} . \qquad (9.11)$$

Соотношение (9.11) означает, что существует линейная комбинация строк $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_s$, коэффициенты которой не все равны нулю (например, коэффициент при $\mathbf{r}_s$ равен -1) и которая равна нулевой строке. Следовательно, строки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_s$ являются линейно зависимыми.

Докажем теперь обратное утверждение: если строки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_s$ — линейно зависимы, т. е. равенство

$$\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2 + \ldots + \lambda_s \mathbf{r}_s = \mathbf{O}$$

имеет место хотя бы при одном λ_i из всего набора $i = 1, 2, \ldots, s$, отличном от нуля, то по меньшей мере одна из строк является линейной комбинацией остальных. Пусть для определенности в (9.7) $\lambda_s \neq 0$. Тогда получим равенство

$$\mathbf{r}_s = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_s}\right) \mathbf{r}_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_s}\right) \mathbf{r}_2 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s}\right) \mathbf{r}_{s-1} ,$$

которое можно переписать в форме

$$\mathbf{r}_s = \tilde{\lambda}_1 \mathbf{r}_1 + \tilde{\lambda}_2 \mathbf{r}_2 + \ldots + \tilde{\lambda}_{s-1} \mathbf{r}_{s-1} ,$$

где $\tilde{\lambda}_i = -\left(\lambda_i / \lambda_s\right)$; $i = 1, 2, \ldots, (s-1)$. Таким образом, если $\lambda_s \neq 0$, то s–я строка является линейной комбинацией остальных строк.

Данная теорема проясняет происхождение термина “линейная зависимость”.

Теорема 9.2 *Если часть строк матрицы линейно зависимы, то и все эти строки линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть, например, строки $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, …, $\mathbf{r}_{s-1}$ линейно зависимы. Это означает, что равенство

$$\lambda_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2 + \ldots + \lambda_{s-1}\mathbf{r}_{s-1} = \mathbf{O}$$

имеет место и в случае, когда не все числа λ_i равны нулю. Тогда условие

$$\lambda_1\mathbf{r}_1 + \lambda_2\mathbf{r}_2 + \ldots + \lambda_{s-1}\mathbf{r}_{s-1} + \lambda_s\mathbf{r}_s = \mathbf{O}$$

будет выполняться при тех же значениях λ_i $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$, не равных одновременно нулю, и при $\lambda_s = 0$. Следовательно, строки $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, …, $\mathbf{r}_s$ линейно зависимы.

Следствие 1 *Если среди строк матрицы имеется нулевая строка, то эти строки линейно зависимы.*

Доказательство. Этот вывод следует из Теоремы 9.2 и доказанного в Примере 9.2 утверждения о том, что нулевая строка матрицы является линейно зависимой.

Следствие 2 *Если среди строк матрицы имеются пропорциональные, то все они линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть две произвольные строки матрицы $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{O}$ и $\mathbf{r}_j \neq \mathbf{O}$ пропорциональны, т. е. существует такое число C, что

$$\mathbf{r}_j = C\mathbf{r}_i\,. \tag{9.12}$$

Тогда $C \neq 0$ и

$$1\mathbf{r}_j - C\mathbf{r}_i = \mathbf{O}\,,$$

т. е. строки $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$ линейно зависимы.

Отметим, что значение $C = 1$ отвечает случаю двух одинаковых строк: $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_i$.

Замечание 9.2 *Понятие линейной зависимости применимо не только к строкам, но и к столбцам матрицы.* Произвольную матрицу (9.1) вертикальными прямыми можно разбить на отдельные подматрицы, каждая из которых представляет собой матрицу–столбец размера $m \times 1$. Таким образом, имеется возможность представить A как некоторую новую матрицу–строку

$$A = (\mathbf{c}_1\,\mathbf{c}_2\,\ldots\,\mathbf{c}_n)\ , \tag{9.13}$$

элементами которой являются n матриц–столбцов:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \ldots, \quad \mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (9.14)$$

Для обозначения элементов (9.14) матрицы (9.13) используется жирная буква $\mathbf{c}$ [11], снабженная одним индексом, указывающим в каком порядке располагаются столбцы в (9.13). Этим подчеркивается, что указанные элементы являются, вообще говоря, матрицами, а не числами, функциями или алгебраическими выражениями.

Два столбца матрицы равны, если они совпадают поэлементно, т. е. $\mathbf{c}_k = \mathbf{c}_l$, если $a_{ik} = a_{il}$ для всех i=1,2,…,m.

Арифметические операции над столбцами матрицы:

$$\lambda\mathbf{c}_k = \begin{pmatrix} \lambda a_{1k} \\ \lambda a_{2k} \\ \vdots \\ \lambda a_{mk} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_k + \mathbf{c}_l = \begin{pmatrix} a_{1k} + a_{1l} \\ a_{2k} + a_{2l} \\ \vdots \\ a_{mk} + a_{ml} \end{pmatrix}.$$

Линейная комбинация k столбцов $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k$ матрицы имеет вид:

$$\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2 + \ldots + \lambda_k\mathbf{c}_k\,.$$

Повторяя рассуждения, нетрудно убедиться, что *Замечание 9.1, Теоремы 9.1, 9.2 и следствия из последней в равной степени справедливы как для строк, так и для столбцов матрицы*. Последующий материал излагается только для строк. Для столбцов изложение аналогично.

[11] Обозначение происходит от английского слова *column* — столбец, колонка.

10 Теорема о базисном миноре

Теорема 10.1 (о базисном миноре)

1. *Базисные строки матрицы линейно независимы.*
2. *Любая небазисная строка матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк.*

Доказательство. Пусть ранг матрицы $\underset{m\times n}{A}$ равен r. Доказываемая теорема содержит утверждения о наличии (или, наоборот, отсутствии) линейных зависимостей между строками матрицы. Согласно Замечанию 9.1 эти зависимости сохраняются при произвольной перестановке ее строк (или столбцов). Поэтому, не ограничивая общности доказательства, можно считать, что строки и столбцы исходной матрицы уже переставлены таким образом, чтобы ее базисный минор Δ_r расположился в левом верхнем углу матрицы:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Здесь индексы матричных элементов указывают на их местоположение не в исходной, а в уже преобразованной указанным образом матрице.

Заметим, что строки базисного минора либо совпадают с базисными строками матрицы (при $r = n$), либо состоят из отдельных их фрагментов, соответствующих базисным столбцам матрицы (при $r < n$). Поэтому, в соответствии с правилами (9.4) и (9.5), линейная зависимость между базисными строками матрицы означает такую же линейную зависимость между строками базисного минора Δ_r.

Предположим, что первые r строк преобразованной матрицы линейно зависимы. Тогда строки определителя Δ_r также являются линейно зависимыми и, согласно Теореме 9.1, по крайней мере одна из его строк является линейной комбинацией остальных. Согласно Замечанию 4.3 такой определитель равен нулю. Таким образом, предположение о линейной зависимости базисных строк противоречит условию, что базисный минор отличен от нуля. Следовательно, базисные строки линейно независимы.

Докажем, что всякая i–я строка преобразованной матрицы $(r < i \leq m)$ является линейной комбинацией первых r строк. Для этого построим вспомогательный определитель $(r+1)$–го порядка, получающийся "окаймлением" минора Δ_r соответствующими элементами i–й строки и j–го столбца:

$$\Delta_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix},$$

При любом $j = 1,2,\dots,n$ определитель $\Delta_{r+1} = 0$. Действительно, если $j > r$, то Δ_{r+1} является минором $(r+1)$–го порядка матрицы A и, следовательно, равен нулю. Если же $j \leq r$, то определитель Δ_{r+1} имеет два одинаковых столбца и равен нулю в силу Следствия из Теоремы 4.2 и Замечания 4.1.

Разложим Δ_{r+1} по элементам последнего (j–го) столбца:

$$\Delta_{r+1} = a_{1j}\mathcal{A}_{1j} + a_{2j}\mathcal{A}_{2j} + \ldots + a_{rj}\mathcal{A}_{rj} + a_{ij}\mathcal{A}_{ij} = 0\,. \tag{10.1}$$

Алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_{ij} \neq 0$, т. к. оно совпадает с базисным минором: $\mathcal{A}_{ij} = \Delta_r$. Алгебраические дополнения

$$\mathcal{A}_{sj} = (-1)^{s+(r+1)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(s-1)\,1} & a_{(s-1)\,2} & \dots & a_{(s-1)\,r} \\ a_{(s+1)\,1} & a_{(s+1)\,2} & \dots & a_{(s+1)\,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \end{vmatrix} \equiv \mathcal{A}_s$$

зависят от индекса $s = 1, 2, \ldots, r$ и не зависят от индекса j. Поэтому они обозначены как $\mathcal{A}_s$.

Разделив (10.1) на $\mathcal{A}_{ij}$, получим:

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{r} \left(-\frac{\mathcal{A}_s}{\Delta_r}\right) a_{sj}\ . \tag{10.2}$$

Поскольку равенство (10.2) выполняется для всех $j = 1,2,\ldots,n$, то его можно переписать в компактном виде

$$\mathbf{r}_i = \sum_{s=1}^{r} \lambda_s \mathbf{r}_s \,, \tag{10.3}$$

где $\lambda_s = -\,(\mathcal{A}_s/\Delta_r)$. Таким образом, i–я строка матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк.

<u>**Замечание**</u> **10.1** Отметим, что *выбор базисных строк матрицы неоднозначен*. Действительно, рассмотрим произвольную матрицу

$$\underset{m\times n}{A} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_l \\ \vdots \\ \lambda_l\mathbf{r}_l + \lambda_p\mathbf{r}_p + \ldots + \lambda_q\mathbf{r}_q \\ \vdots \\ \mathbf{r}_p \\ \vdots \\ \mathbf{r}_q \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{m-1} \\ \mathbf{r}_m \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \ 1\text{–я строка,} \\ \leftarrow \ 2\text{–я строка,} \\ \qquad\vdots \\ \leftarrow \ l\text{–я строка,} \\ \qquad\vdots \\ \leftarrow \ i\text{–я строка,} \\ \qquad\vdots \\ \leftarrow \ p\text{–я строка,} \\ \qquad\vdots \\ \leftarrow \ q\text{–я строка,} \\ \qquad\vdots \\ \leftarrow \ (m-1)\text{–я строка,} \\ \leftarrow \ m\text{–я строка,} \end{array} \tag{10.4}$$

у которой l–я, p–я, …, q–я строки — базисные, а i–я строка является их линейной комбинацией:

$$\mathbf{r}_i = \lambda_l\mathbf{r}_l + \lambda_p\mathbf{r}_p + \ldots + \lambda_q\mathbf{r}_q \,. \tag{10.5}$$

Пусть, например, $\lambda_l \neq 0$. Тогда мы можем исключить l–ю строку из числа базисных и принять в качестве таковых i–ю, p–ю, …, q–ю строки. Чтобы убедиться в этом, докажем, что i–я, p–я, …, q–я строки линейно независимы. Для этого подставим (10.5) в равенство

$$\alpha_i\mathbf{r}_i + \alpha_p\mathbf{r}_p + \ldots + \alpha_q\mathbf{r}_q = \mathbf{O} \,. \tag{10.6}$$

Получим:

$$\alpha_i\lambda_l\mathbf{r}_l + (\alpha_i\lambda_p + \alpha_p)\,\mathbf{r}_p + \ldots + (\alpha_i\lambda_q + \alpha_q)\,\mathbf{r}_q = \mathbf{O}\,. \qquad (10.7)$$

Так как по условию l–я, p–я, ..., q–я строки — базисные, то они линейно независимы и, следовательно, соотношение (10.7) может иметь место только когда

$$\alpha_i\lambda_l = 0\,, \quad (\alpha_i\lambda_p + \alpha_p) = 0\,, \quad \ldots\,, \quad (\alpha_i\lambda_q + \alpha_q) = 0\,. \qquad (10.8)$$

Учитывая, что $\lambda_l \neq 0$, из (10.8) находим: $\alpha_i = \alpha_p = \ldots = \alpha_q = 0$. Таким образом, равенство (10.6) имеет место только когда все коэффициенты α_i, α_p, ..., α_q равны нулю. Следовательно, i–я, p–я, ..., q–я строки линейно независимы и могут быть выбраны в качестве базисных. При этом, согласно (10.5), уже l–я строка может быть представлена как линейная комбинация базисных строк:

$$\mathbf{r}_l = \left(\frac{1}{\lambda_l}\right)\mathbf{r}_i + \left(-\frac{\lambda_p}{\lambda_l}\right)\mathbf{r}_p + \ldots + \left(-\frac{\lambda_q}{\lambda_l}\right)\mathbf{r}_q\,.$$

Неоднозначность в выборе базисных строк связана с тем, что одна и та же матрица может иметь более одного базисного минора.

Из приведенного обсуждения, в частности, следует, что если одна из строк матрицы является линейной комбинацией других ее строк, то такую строку можно не включать в число базисных. Поэтому, если задача состоит лишь в нахождении ранга матрицы, а не в определении возможных совокупностей ее базисных строк, то при ее решении такую строку можно не принимать во внимание. Иными словами, *если одна из строк матрицы является линейной комбинацией других ее строк, то эту строку можно вычеркнуть из матрицы, не меняя ее ранга*.

Рассмотрим некоторые следствия из Теоремы 10.1. Если базисный минор матрицы $\underset{m\times n}{A}$ имеет порядок $r < m$, то по меньшей мере одна из строк этой матрицы не является базисной. Но тогда эта строка может быть представлена в виде линейной комбинации r базисных строк. Поэтому согласно Теореме 9.1 строки данной матрицы линейно зависимы. Если же $r = m$, то все строки матрицы — базисные и, следовательно, линейно независимы. Отсюда следует, что

1. *Если ранг матрицы A меньше, чем число ее строк, то строки матрицы линейно зависимы. Если ранг матрицы равен числу ее строк, то все ее строки линейно независимы.*

2. *Всякие $r+1$ строк матрицы A ранга r линейно зависимы.*
3. *Ранг любой матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк.*

Теорема 10.1 и следствия из нее могут быть сформулированы и по отношению к столбцам матрицы. Для того, чтобы убедиться в этом, докажем теорему:

Теорема 10.2 *Максимальное количество линейно независимых столбцов матрицы совпадает с максимальным количеством ее линейно независимых строк и равно рангу этой матрицы.*

Доказательство. Выделим в матрице $\underset{m\times n}{A}$ произвольный минор. Его можно рассматривать как определитель некоторой квадратной подматрицы l–го порядка M_l $(l \leq \min\{m,\, n\})$ матрицы A.

Транспонируем матрицу A, т.е. перейдем от A к матрице A^T, строки которой являются столбцами матрицы A. При этом произвольный элемент a_{ij} подматрицы M_l, расположенный на пересечении i–й строки и j–го столбца матрицы A, перейдет в элемент a_{ji} подматрицы M_l^T матрицы A^T и расположится на пересечении j–й строки и i–го столбца этой матрицы. Таким образом, при транспонировании матрицы A ее подматрица M_l переходит в подматрицу M_l^T матрицы A^T. Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим произвольную матрицу A, изображенную на Рис. 11, где в качестве M_3 выбрана помещенная в рамку подматрица 3–го порядка, элементы которой пронумерованы.

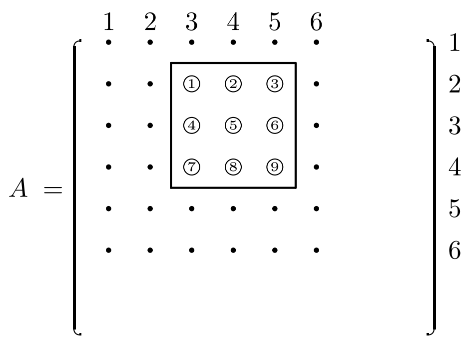

Рис. 11

Матрица A^T, транспонированная к A, изображена на Рис. 12.

$$
A^T = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & 4 & 7 & \cdot & \cdot \\
\cdot & 2 & 5 & 8 & \cdot & \cdot \\
\cdot & 3 & 6 & 9 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
$$

Рис. 12

Из рисунков видно, что при транспонировании матрицы A ее подматрица M_3 переходит в подматрицу M_3^T матрицы A^T.

Согласно Теореме 4.1 $\left|M_l^T\right| = |M_l|$ и, следовательно, транспонирование матрицы не меняет значений ее миноров. Тем самым сохраняется и наивысший порядок отличного от нуля минора, определяющий ранг данной матрицы. С другой стороны, ранг матрицы A равен максимальному числу ее линейно независимых строк, или, что тоже самое, столбцов матрицы A^T.

Следствие *Ранг матрицы не меняется при ее транспонировании.*

Важным следствием из Теоремы 10.1 является формулировка *необходимого и достаточного условия равенства нулю определителя*:

Теорема 10.3 *Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда по крайней мере одна из его строк является линейной комбинацией других.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу A произвольного определителя n–го порядка $\Delta_n = |A|$. Если $\Delta_n = 0$, то ранг этой матрицы $r(A) < n$. Поэтому кроме r базисных строк матрица A имеет по меньшей мере одну строку, не относящуюся к числу базисных. Согласно Теореме 10.1 эта строка является линейной комбинацией базисных строк. В состав линейной комбинации можно включить и все оставшиеся строки рассматриваемого определителя, выбрав коэффициенты при них равными нулю.

Обратное утверждение о том, что определитель равен нулю, если какая-либо строка определителя является линейной комбинацией других его строк, составляет содержание Замечания 4.3.

<u>**Замечание**</u> **10.2** Согласно Теореме 9.1, если одна из строк матрицы представляет собой линейную комбинацией остальных, то все эти строки вместе являются линейно зависимыми. Поэтому Теорему 10.3 можно сформулировать в несколько иных терминах: *определитель равен нулю тогда и только тогда, когда между его строками существует линейная зависимость.*

Понятно, что в формулировке Теоремы 10.3 можно говорить не о строках, а о столбцах определителя.

11 Подсчет ранга матрицы и нахождение базисного минора

В общем случае нахождение ранга матрицы перебором всех ее миноров — достаточно трудоемкая процедура. Более простой способ решения этой задачи основан на *элементарных преобразованиях* исходной матрицы A, сохраняющих ее ранг и приводящих A к так называемому ступенчатому виду. Поскольку, согласно Следствию из Теоремы 10.2, ранг матрицы не меняется при ее транспонировании, мы определим эти преобразования только для строк матрицы. К указанным преобразованиям относятся:

1. *Отбрасывание нулевой строки или столбца.*

   В самом деле, нулевая строка не может быть включена в число базисных строк, т. к. согласно Следствию 1 из Теоремы 9.2 в этом случае базисные строки оказались бы линейно зависимыми, что находится в противоречии с Теоремой 10.1. На возможность отбрасывания нулевой строки или нулевого столбца матрицы при нахождении ее ранга обращалось внимание при рассмотрении Примера 8.2.

2. *Перестановка двух строк между собой. Остальные строки при этом остаются неизменными.*

   Это утверждение составляет содержание Замечания 8.2. Оно непосредственно следует и из Теоремы 10.1, согласно которой ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк. Это число не зависит от того, в каком порядке располагаются строки в матрице.

3. *Умножение любой строки на число* $\lambda \neq 0$.

   В самом деле, умножение любой строки матрицы на число $\lambda \neq 0$ не может изменить максимальное число ее линейно независимых строк, равное рангу этой матрицы.

4. *Вычеркивание строки, являющейся линейной комбинацией других строк.*

   Это утверждение обосновывается в Замечании 10.1.

5. *Прибавление к одной строке матрицы другой строки, умноженной на число* $\lambda \neq 0$.

   Действительно, пусть, например, к q–й строке матрицы (10.4) прибавляется ее p–я строка, умноженная на $\lambda \neq 0$. В результате этой операции мы получим новую матрицу A'. Если при этом и q–я и p–я строки матрицы (10.4) входят в число базисных строк, то согласно Следствию 3 из Теоремы 4.3 такое преобразование не меняет значения базисного минора. Если же только p–я строка матрицы A относится к числу базисных строк, то q–я строка является их линейной комбинацией. Она останется линейной комбинацией базисных строк и после прибавления к ней p–й (базисной) строки, умноженной на λ. Но согласно пункту 4 такую строку можно вычеркнуть при нахождении ранга матрицы. Пусть теперь q–я строка является базисной, а p–я — нет. В результате преобразования $\mathbf{r}_q \to \mathbf{r}_q + \lambda\mathbf{r}_p$ базисный минор Δ_r матрицы (10.4) перейдет в минор Δ'_r матрицы A', который отличается от Δ_r тем, что вместо элементов строки $\mathbf{r}_q$ он содержит соответствующие элементы строки $\mathbf{r}_q + \lambda\mathbf{r}_p$. Согласно Теореме 4.3 $\Delta'_r = \Delta_r + \lambda\Delta_r^{(1)}$, где определитель r–го порядка $\Delta_r^{(1)}$ отличается от Δ_r тем, что вместо элементов q–й строки содержит соответствующие элементы строки $\mathbf{r}_p$. Так как p–я строка матрицы, не входящая в число базисных, может быть представлена в виде линейной комбинации r

базисных строк, то согласно Теореме 10.3 $\Delta_r^{(1)} = 0$ и $\Delta'_r = \Delta_r$. Таким образом, во всех трех случаях в результате преобразования $\mathbf{r}_q \to \mathbf{r}_q + \lambda \mathbf{r}_p$ базисный минор матрицы (10.4) не претерпевает изменений и, следовательно, $r(A) = r(A')$.

6. *Транспонирование матрицы.*

   Это утверждение составляет содержание Следствия из Теоремы 10.2.

Замечание 11.1 Преобразования 2–5 совпадают с перечисленными на стр. 82 элементарными преобразованиями, используемыми при вычислении обратной матрицы. В некоторых случаях для нахождения обратной матрицы может оказаться полезным и Преобразование 6. Если образовать расширенную матрицу $\left(A^T \,|E\right)$ и с помощью преобразования Λ найти $\left(A^T\right)^{-1}$:

$$\left(A^T \,|E\right) \overset{\Lambda}{\sim} \left(E \middle| \left(A^T\right)^{-1}\right) ,$$

то искомая матрица A^{-1} получается простым транспонированием матрицы $\left(A^{-1}\right)^T$, которая согласно Свойству 5 невырожденных матриц (см. стр. 99) совпадает с $\left(A^T\right)^{-1}$.

Определение Матрицы A и B называются *эквивалентными по рангу* и обозначаются $A \sim B$, если B получается из A конечным числом *элементарных преобразований* типа 1–6.

Определение Матрица A называется *ступенчатой*, если она имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ll} & \dots & a_{ln} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} , \tag{11.1}$$

где $a_{ii} \neq 0$, $(i = 1, 2, \dots, l;\ l \leq n)$.

После вычеркивания из (11.1) нулевых строк получим матрицу, имеющую l строк. Ее минор l–го порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1l} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{ll} \end{vmatrix}$$

имеет треугольный вид и согласно (3.8) равен отличному от нуля произведению $a_{11}a_{22}\ldots a_{ll}$. Поэтому этот минор является базисным и его порядок равен рангу ступенчатой матрицы, т. е. $r = l$.

Убедимся в том, что используя перечисленные элементарные преобразования в определенной последовательности, можно любую матрицу привести к ступенчатому виду. Будем предполагать, что $m \leq n$. Выполнения этого условия всегда можно достигнуть транспонированием исходной матрицы. Если матрица состоит из одних нулей, то ее ранг равен нулю. Предположим, что в матрице (1.1) имеется по крайней мере один элемент, отличный от нуля. Тогда, переставляя строки и столбцы, можно перевести этот элемент в левый верхний угол матрицы: $a_{11} \neq 0$. Теперь добьемся, чтобы в нуль обратились все элементы матрицы, расположенные ниже элемента a_{11}. Для этого умножим элементы первой строки матрицы (1.1) на $-a_{k1}/a_{11}$ и прибавим их к соответствующим элементам k–й строки (k=2, 3, 4, ..., m). В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3(n-1)}^{(1)} & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(m-1)2}^{(1)} & a_{(m-1)3}^{(1)} & \ldots & a_{(m-1)(n-1)}^{(1)} & a_{(m-1)n}^{(1)} \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \ldots & a_{m(n-1)}^{(1)} & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}, \qquad (11.2)$$

в которой

$$a_{ks}^{(1)} = a_{ks} - \frac{a_{k1}a_{1s}}{a_{11}} \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots, m\,;\; s = 2, 3, 4, \ldots, n)$$

— новые матричные элементы, полученные после первого шага преобразования исходной матрицы к ступенчатому виду. Обратим внимание на то, что в первом столбце матрицы (11.2) все элементы, расположенные ниже элемента a_{11}, равны нулю. Этим завершается первый шаг преобразований исходной матрицы (1.1). В дальнейшем мы не будем менять элементы первой строки и первого столбца, но, возможно, будем переставлять их.

Если среди элементов, не принадлежащих первой строке и первому столбцу, нет элементов, отличных от нуля, то матрица (1.1) имеет ступенчатый вид, причем ее ранг равен 1. Если же среди них имеется элемент, отличный от нуля, то переставляя строки и столбцы, переведем его на пересечение второй строки и второго столбца: $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Преобразуем полученную матрицу таким образом, чтобы все элементы, расположенные ниже матричного элемента $a_{22}^{(1)}$, обратились в нули. Для этого умножим элементы второй строки матрицы (11.2) на $-a_{k2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ и прибавим их к соответствующим элементам k–й строки, где k=3,4,…,m. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{(m-1)3}^{(2)} & \dots & a_{(m-1)(n-1)}^{(2)} & a_{(m-1)n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \dots & a_{m(n-1)}^{(2)} & a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix}, \qquad (11.3)$$

в которой

$$a_{ks}^{(2)} = a_{ks}^{(1)} - \frac{a_{k2}^{(1)} a_{2s}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \qquad (k = 3, 4, \dots, m\,;\ s = 3, 4, \dots, n)$$

— новые матричные элементы, полученные после второго шага преобразования исходной матрицы к ступенчатому виду. Мы завершили второй шаг преобразований. В результате и в первом и во втором столбцах преобразованной матрицы (11.3) равны нулю все матричные элементы, расположенные ниже элементов a_{11} и $a_{22}^{(1)}$, соответственно. Далее мы не будем менять элементы второй строки и второго столбца, но, возможно, будем переставлять их.

Продолжая процесс последовательного обращения в нуль матричных элементов, расположенных ниже a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, …, $a_{ll}^{(l-1)}$, после $(l-1)$–

го шага ($l \le n$) получим:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2l}^{(1)} & \dots & a_{2(n-1)}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3l}^{(2)} & \dots & a_{3(n-1)}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{ll}^{(l-1)} & \dots & a_{l(n-1)}^{(l-1)} & a_{ln}^{(l-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (11.4)$$

где

$$a_{ks}^{(l-1)} = a_{ks}^{(l-2)} - \frac{a_{k(l-1)}^{(l-2)} a_{(l-1)s}^{(l-2)}}{a_{(l-1)(l-1)}^{(l-2)}}$$

$$(k = l, l+1, \dots, m\,;\; s = l, l+1, \dots, n)\ .$$

Преобразованная матрица[12] имеет ступенчатый вид и ее ранг $r = l$.

Пример 11.1 Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для того, чтобы число строк матрицы не превышало число ее столбцов, транспонируем матрицу A:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -7 & 5 & 4 & 6 & -4 \end{pmatrix}. \qquad (11.5)$$

Умножим первую строку (11.5) на число 2 и прибавим результат ко второй строке. Затем умножим первую же строку на число -2 и прибавим результат к третьей строке. Наконец, умножим первую строку на

[12] Аналогичные преобразования уже использовалось нами в п. 6 для вычисления определителей.

-7 и прибавим результат умножения к четвертой строке. В результате получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & -9 & -17 & -8 & -11 \end{pmatrix} . \tag{11.6}$$

Прибавим вторую строку (11.6) к третьей строке. Затем умножим вторую же строку на число 3 и прибавим результат к четвертой строке. Имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} . \tag{11.7}$$

Умножив третью строку (11.7) на -2 и прибавив результат умножения к четвертой строке, получим ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{11.8}$$

Очевидно, что любой минор 4–го порядка преобразованной матрицы (11.8) будет равен нулю, т. к. содержит строку, состоящую из одних нулей. Поэтому ранг матрицы A не может быть равен 4. Из (11.8) видно, что $r\,(A) = 3$, т. к. имеется отличный от нуля минор третьего порядка

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot 2 = -6 \neq 0\,.$$

Пример 11.2 Определить ранг матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} .$$

Решение. Прибавим первую строку матрицы B, умноженную на число -1, к ее третьей строке. Получим:

$$B \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} .$$

Умножим вторую строку полученной матрицы на -2 и прибавим результат умножения к третьей строке:

$$B \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная матрица 3–го порядка является невырожденной, так как ее определитель равен $4 \cdot 2 \cdot (-6) = -48 \neq 0$. Соответственно, ранг данной матрицы $r\,(B) = 3$.

Пример 11.3 Найти ранг матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2-\lambda \\ -1 & 2 & -1-\lambda \\ 2-\lambda & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix},$$

где λ — любое действительное число.

Решение. Сначала умножим вторую строку матрицы C на -1, а затем поменяем местами вторую и первую строки. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1+\lambda \\ 2 & -1 & 2-\lambda \\ 2-\lambda & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку на число -2 и прибавим результат ко второй строке. Затем умножим первую же строку на число $-(2-\lambda)$ и прибавим результат к третьей строке. Получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & (1+\lambda) \\ 0 & 3 & -3\lambda \\ 0 & \lambda + 2\,(2-\lambda) & 1-2\lambda-(1+\lambda)\,(2-\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1+\lambda \\ 0 & 3 & -3\lambda \\ 0 & 4-\lambda & -1-3\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Разделим вторую строку последней матрицы на число 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 4-\lambda & -1-3\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку этой матрицы на $-(4-\lambda)$ и прибавим результат умножения к третьей строке:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -1-3\lambda+\lambda^2+\lambda\,(4-\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1+\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -1+\lambda \end{pmatrix} .$$

Таким образом, ранг исходной матрицы C равен

$$r\,(C) = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad \lambda = 1\,, \\ 3 & \text{при} \quad \lambda \neq 1\,. \end{cases}$$

Пример 11.4 Определить ранг и найти все линейно независимые строки матрицы

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} . \tag{11.9}$$

Решение. Для нахождения ранга матрицы приведем ее к ступенчатому виду. Умножим первую строку матрицы D на число -4 и прибавим ее ко второй строке, затем умножим первую же строку на -2 и прибавим ее к третьей строке и, наконец, умножим первую строку на -5 и прибавим ее к четвертой строке. В результате получим:

$$D \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} . \tag{11.10}$$

Умножим вторую строку (11.10) на -1 и затем прибавим ее к четвертой строке. Получим матрицу

$$D \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

имеющую ступенчатый вид. Таким образом, базисный минор матрицы, эквивалентной по рангу матрице D, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0\,.$$

Следовательно, $r\,(D) = 2$.

Так как порядок квадратной матрицы (11.9) равен четырем, а ее ранг — двум, то число возможных сочетаний из четырех строк по две равно $C_4^2 = 6$. Поэтому существует шесть пар строк матрицы (11.9), которые могут оказаться линейно независимыми:

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \quad \underline{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3;} \quad \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4; \quad \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3; \quad \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4; \quad \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4\,.$$

Всевозможные пары линейно независимых строк матрицы (11.9) и построенные на них базисные миноры матрицы D приведены в Таблице 1. В частности, первые две строки

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \tag{11.11}$$

матрицы (11.9) линейно независимы, т. к. ее минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0\,,$$

построенный на элементах только этих двух строк, является базисным.

Линейно независимые строки	Базисный минор
$\mathbf{r}_1,\, \mathbf{r}_2,$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3\,,$
$\mathbf{r}_1,\, \mathbf{r}_4,$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -3\,,$
$\mathbf{r}_2,\, \mathbf{r}_3,$	$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6\,,$
$\mathbf{r}_2,\, \mathbf{r}_4,$	$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3\,,$
$\mathbf{r}_3,\, \mathbf{r}_4,$	$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -7\,,$

Таблица 1.

Все миноры, построенные на элементах строк $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$, равны нулю в силу пропорциональности этих строк: $\mathbf{r}_3 = 2\mathbf{r}_1$. Поэтому строки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_3$ линейно зависимы.

Пример 11.5 Найти линейно независимые строки и столбцы матрицы (8.1) из Примера 8.4.

Решение. Матрица (8.1) имеет размеры 4×6. Согласно результатам из Примера 8.4, ее ранг равен 4. Поэтому все строки данной матрицы линейно независимы. Согласно Теореме 10.2, число линейно независимых столбцов матрицы (8.1) также равно 4. Из данной матрицы можно "выкроить" $C_6^4 = 15$ миноров 4–го порядка. Все они приведены в Примере 8.4. Согласно полученным там результатам, линейно независимыми являются четырнадцать сочетаний из шести столбцов матрицы (8.1) по четыре столбца:

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4\ ; & \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5\ ; & \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_5\ ; & \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_6\ ; \\
\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_6\ ; & \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5\ ; & \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_6\ ; & \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5\ ; \\
\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6\ ; & \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6\ ; & \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6\ ; & \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_6\ ; \\
\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6\ ; & \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6\ . & &
\end{array}$$

Приведенные сочетания столбцов соответствуют базисным минорам $\Delta_4^{(1)}$, $\Delta_4^{(2)}$ и $\Delta_4^{(4)}$ — $\Delta_4^{(15)}$ из Примера 8.4.

Столбцы

$$\mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6$$

являются линейно зависимыми, т. к. минор $\Delta_4^{(3)}$, построенный на этих столбцах, равен нулю.

Пример 11.6 Построить матрицу размера $4{\times}5$, имеющую ранг $r = 2$.

Решение. Запишем 2 одинаковые строки с 5 элементами в каждой, например,

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{r}_1 & = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\ , \\
\mathbf{r}_2 & = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\ ,
\end{array}$$

а затем во второй строке изменим одно из чисел:

$$\mathbf{r}'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\ .$$

Строки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2'$ не являются пропорциональными, т.е. $\mathbf{r}_1 \neq C\mathbf{r}_2'$, где C — некоторое число. Недостающие две строки $\mathbf{r}_3$ и $\mathbf{r}_4$ получим составляя линейные комбинации строк $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2'$, например,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2' \ , \\ \mathbf{r}_4 &= 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2' \ . \end{aligned}$$

В результате получим матрицу

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 9 & 12 & 15 \\ 3 & 9 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} , \qquad (11.12)$$

ранг которой равен 2.

В самом деле, прибавим к третьей строке (11.12) первую, умноженную на -1, а затем вторую, умноженную на -2. Получим

$$F \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} . \qquad (11.13)$$

Далее, к четвертой строке (11.13) прибавим первую, умноженную на -2, а затем вторую, умноженную на -1. Найдем:

$$F \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} . \qquad (11.14)$$

Прибавляя ко второй строке (11.14) первую, умноженную на -1, придем к ступенчатой матрице

$$F \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

второго ранга.

Пример 11.7 Построить матрицу размера $4{\times}5$, имеющую ранг $r = 1$.

Решение. Запишем произвольную строку с 5 элементами, например,

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} .$$

Вторую строку получим умножая $\mathbf{r}_1$ на произвольное число, например, 2:

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} .$$

Недостающие две строки $\mathbf{r}_3$ и $\mathbf{r}_4$ получим составляя линейные комбинации строк $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, например,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2 , \\ \mathbf{r}_4 &= 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 . \end{aligned}$$

В результате получим матрицу

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \end{pmatrix} , \tag{11.15}$$

ранг которой равен 1.

Чтобы убедиться в этом, прибавим ко второй, третьей и четвертой строкам (11.15) первую строку, умноженную, соответственно, на числа -2, -5, -4. В результате, придем к ступенчатой матрице

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

первого ранга.

Литература

1. А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, — М.: Наука, 1971.

2. В. Ф. Ильин, Э. Г. Позняк, *Линейная алгебра*, — М.: Наука, 1974.

3. Г. Е. Шилов, *Математический анализ (конечномерные линейные пространства)*, — М.: Наука, 1969.

4. Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман, *Высшая математика для экономистов*, — М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.

5. И. Гоян, В. Марин, *Элементы высшей алгебры: упражнения и задачи (для лицеев)*, — Кишинев: Эврика, 1998.