ACTUALITES SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
1364

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

par
N. BOURBAKI

Fascicule XXXVIII

GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

CHAPITRE VII
SOUS-ALGÈBRES DE CARTAN, ÉLÉMENTS RÉGULIERS

CHAPITRE VIII
ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES DÉPLOYÉES

HERMANN
1975

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

ПОДАЛГЕБРЫ КАРТАНА, РЕГУЛЯРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, РАСЩЕПЛЯЕМЫЕ ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
А. Н. РУДАКОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. И. КОСТРИКИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1978

УДК 512; 519.46

Книга входит во всемирно известную энциклопедию современной математики «Основы математики», созданную группой французских ученых, выступающих под псевдонимом Н. Бурбаки. Ряд томов этой энциклопедии уже вышел в русском переводе и получил высокую оценку читателей.

Перевод первых глав «Групп и алгебр Ли» был выпущен в издательстве «Мир» в 1972 и 1975 гг., а сейчас предлагаются очередные две главы. Книга посвящена изучению полупростых алгебр Ли. Она содержит обширный материал по теории подалгебр Картана, автоморфизмам алгебр Ли, теории представлений полупростых алгебр Ли.

Книга предназначена для широкого круга математиков различных специальностей и разного уровня подготовки — от студентов до научных работников.

Редакция литературы по математическим наукам

Б $\frac{20203-001}{041(01)-78}$ 1—78

ГЛАВА VII

ПОДАЛГЕБРЫ КАРТАНА, РЕГУЛЯРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

На протяжении этой главы символом k обозначается некоторое поле. Выражение „векторное пространство" означает „векторное пространство над полем k"; аналогичным образом обстоит дело с выражениями „алгебра Ли" и т. п. Все алгебры Ли предполагаются конечномерными.

§ 1. Примарное разложение линейных представлений

1. Примарное разложение для семейства эндоморфизмов

Пусть V — векторное пространство, S — некоторое множество и r — отображение множества S в множество $\mathrm{End}(V)$. Обозначим через P множество всех отображений множества S в k. Для каждого элемента $\lambda \in P$ будем обозначать через $V_\lambda(S)$ (соотв. через $V^\lambda(S)$) множество таких элементов $v \in V$, что равенство $r(s)v = \lambda(s)v$ выполняется для всех $s \in S$ (соотв. равенство $(r(s) - \lambda(s))^n v = 0$ выполняется для достаточно больших n и всех $s \in S$). Множества $V_\lambda(S)$ и $V^\lambda(S)$ являются подпространствами векторного пространства V, причем $V_\lambda(S) \subset V^\lambda(S)$. Подпространство $V_\lambda(S)$ называется *собственным подпространством* пространства V, отвечающим отображению λ (и r), а $V^\lambda(S)$ — *примарным подпространством* пространства V, отвечающим отображению λ (и r). Подпространство $V^0(S)$ называется *нильпространством* пространства V (относительно действия r). При этом говорят, что отображение λ является *весом* действия множества S на пространстве V, если $V^\lambda(S) \neq 0$.

В том частном случае, когда S состоит из одного элемента s, множество P отождествляют с полем k и вместо обозначений $V_\lambda(\{s\})$ и $V^\lambda(\{s\})$ используют обозначения $V_{\lambda(s)}(s)$ и $V^{\lambda(s)}(s)$ или $V_{\lambda(s)}(r(s))$ и $V^{\lambda(s)}(r(s))$; при этом говорят о собственных подпространствах, примарных подпространствах и нильпространстве эндоморфизма $r(s)$. Элемент v подпространства $V_{\lambda(s)}(s)$ называют *собственным вектором* эндоморфизма $r(s)$, а если $v \neq 0$, то $\lambda(s)$ называют его *собственным значением* (ср. *Алг.*, гл. VII, § 5).

Из данных определений непосредственно следует, что для любого элемента $\lambda \in P$ выполнены соотношения

$$V^{\lambda}(S) = \bigcap_{s \in S} V^{\lambda(s)}(s), \tag{1}$$

$$V_{\lambda}(S) = \bigcap_{s \in S} V_{\lambda(s)}(s). \tag{2}$$

Пусть k' — расширение поля k. Каноническое отображение множества $\operatorname{End}(V)$ в множество $\operatorname{End}(V \otimes_k k')$ дает в композиции с отображением r некоторое отображение $r'\colon S \to \operatorname{End}(V \otimes_k k')$. Аналогичным образом, по любому отображению λ множества S в поле k канонически определяется отображение, которое мы снова обозначим через λ, множества S в поле k'. Используя эти обозначения, сформулируем следующее предложение:

Предложение 1. *Для любого элемента $\lambda \in P$ имеют место равенства*

$$(V \otimes_k k')^{\lambda}(S) = V^{\lambda}(S) \otimes_k k'$$

и

$$(V \otimes_k k')_{\lambda}(S) = V_{\lambda}(S) \otimes_k k'.$$

Пусть (a_i) — базис векторного k-пространства k'. Любой элемент $v \in V \otimes_k k'$ может быть единственным образом представлен в виде $\sum v_i \otimes a_i$, где (v_i) — семейство с конечным носителем векторов пространства V. Так как для любого элемента $s \in S$ выполняются равенства

$$(r'(s) - \lambda(s))^n (v) = \sum (r(s) - \lambda(s))^n v_i \otimes a_i,$$

то

$$v \in (V \otimes_k k')^{\lambda}(S) \Leftrightarrow v_i \in V^{\lambda}(S) \quad \text{при всех } i,$$
$$v \in (V \otimes_k k')_{\lambda}(S) \Leftrightarrow v_i \in V_{\lambda}(S) \quad \text{при всех } i,$$

что и доказывает предложение.

Предложение 2. *Пусть V, V', W — векторные пространства, а $r\colon S \to \operatorname{End}(V)$, $r'\colon S \to \operatorname{End}(V')$, $q\colon S \to \operatorname{End}(W)$ — отображения.*

(i) *Если $f\colon V \to W$ — линейное отображение, для которого $q(s) f(v) = f(r(s) v)$ при любых $s \in S$, $v \in V$, то оно переводит подпространство $V^{\lambda}(S)$* (соотв. $V_{\lambda}(S)$) *в $W^{\lambda}(S)$* (соотв. в $W_{\lambda}(S)$) *при любом $\lambda \in P$.*

(ii) *Если $\mathrm{B}\colon V \times V' \to W$ — билинейное отображение, для которого*

$$q(s)\mathrm{B}(v, v') = \mathrm{B}(r(s) v, v') + \mathrm{B}(v, r'(s) v')$$

при $s \in S$, $v \in V$, $v' \in V'$, *то оно переводит* $V^{\lambda}(S) \times V'^{\mu}(S)$ (соотв. $V_{\lambda}(S) \times V'_{\mu}(S)$) *в* $W^{\lambda+\mu}(S)$ (соотв. в $W_{\lambda+\mu}(S)$) *для любых* λ, $\mu \in P$.

(iii) *Если* $\mathrm{B}\colon V \times V' \to W$ — *билинейное отображение, для которого*

$$q(s)\,\mathrm{B}(v, v') = \mathrm{B}(r(s)\,v, r'(s)\,v')$$

при $s \in S$, $v \in V$, $v' \in V'$, *то оно переводит* $V^{\lambda}(S) \times V'^{\mu}(S)$ (соотв. $V_{\lambda}(S) \times V'_{\mu}(S)$) *в* $W^{\lambda\mu}(S)$ (соотв. в $W_{\lambda\mu}(S)$) *для любых* λ, $\mu \in P$.

Утверждение (i) непосредственно вытекает из соотношения $(q(s) - \lambda(s))^n f(v) = f((r(s) - \lambda(s))^n v)$ для $s \in S$ и $v \in V$. В предположениях п. (ii) из соотношения

$$(q(s) - \lambda(s) - \mu(s))\,\mathrm{B}(v, v') = \\ = \mathrm{B}((r(s) - \lambda(s))\,v, v') + \mathrm{B}(v, (r'(s) - \mu(s))\,v')$$

для $s \in S$, $v \in V$, $v' \in V'$ индукцией по n получаем

$$(q(s) - \lambda(s) - \mu(s))^n\,\mathrm{B}(v, v') = \\ = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} \mathrm{B}((r(s) - \lambda(s))^i v, (r'(s) - \mu(s))^j v'),$$

что непосредственно дает наше утверждение. В случае (iii) имеем

$$(q(s) - \lambda(s)\,\mu(s))\,\mathrm{B}(v, v') = \\ = \mathrm{B}((r(s) - \lambda(s))\,v, r'(s)\,v') + \mathrm{B}(\lambda(s)\,v, (r'(s) - \mu(s))\,v')$$

для $s \in S$, $v \in V$, $v' \in V'$, откуда индукцией по n получаем соотношение

$$(q(s) - \lambda(s)\,\mu(s))^n\,\mathrm{B}(v, v') = \\ = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} \mathrm{B}(\lambda(s)^j (r(s) - \lambda(s))^i v, r'(s)^i (r'(s) - \mu(s))^j v'),$$

из которого следует нужное утверждение.

Предложение 3. *Суммы* $\sum_{\lambda \in P} V^{\lambda}(S)$ *и* $\sum_{\lambda \in P} V_{\lambda}(S)$ *прямые.*

Второе утверждение следует из первого, которое мы и будем доказывать. Рассмотрим несколько случаев.

а) *Множество* S *пусто.* Утверждение тривиально.

б) *Множество* S *состоит из одного элемента* s. Пусть λ_0, λ_1, ..., λ_n — различные элементы поля k и $v_i \in V^{\lambda_i}(s)$,

$i=0, 1, \ldots, n,$ — некоторые векторы. Предположим, что $v_0 = v_1 + \ldots + v_n$. Нам нужно доказать, что $v_0 = 0$. Для каждого $i = 0, \ldots, n$ существует такое целое число $q_i > 0$, что $(r(s) - \lambda_i)^{q_i} v_i = 0$. Рассмотрим многочлены $P(X) = \prod\limits_{i \geqslant 1} (X - \lambda_i)^{q_i}$ и $Q(X) = (X - \lambda_0)^{q_0}$. Тогда $Q(r(s))v_0 = 0$ и $P(r(s))v_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} P(r(s))v_i = 0$. Так как многочлены P и Q взаимно просты, то тождество Безу показывает, что $v_0 = 0$.

в) *S — непустое конечное множество.* Будем доказывать наше утверждение индукцией по числу элементов множества S. Выберем элемент $s \in S$ и положим $S' = S - \{s\}$. Пусть $(v_\lambda)_{\lambda \in P}$ — такое семейство с конечным носителем элементов пространства V, что $\sum\limits_{\lambda \in P} v_\lambda = 0$ и $v_\lambda \in V^\lambda(S)$. Выберем некоторый элемент $\lambda_0 \in P$ и обозначим через P' множество тех отображений $\lambda \in P$, для которых $\lambda | S' = \lambda_0 | S'$. Из предположения индукции, примененного к множеству S', следует, что $\sum\limits_{\lambda \in P'} v_\lambda = 0$. Если λ и μ — различные элементы множества P', то $\lambda(s) \neq \mu(s)$. Так как вследствие б) сумма $\sum\limits_{a \in k} V^a(s)$ прямая и так как $v_\lambda \in V^{\lambda(s)}(s)$, то $v_\lambda = 0$ для всех $\lambda \in P'$. В частности, $v_{\lambda_0} = 0$, что и нужно было доказать.

г) *Общий случай.* Пусть $(v_\lambda)_{\lambda \in P}$ — семейство с конечным носителем элементов пространства V, такое, что $\sum\limits_{\lambda \in P} v_\lambda = 0$ и $v_\lambda \in V^\lambda(S)$. Обозначим через P' конечное подмножество тех элементов $\lambda \in P$, для которых $v_\lambda \neq 0$, и пусть S' — такое конечное подмножество в S, что из условий $\lambda \in P'$, $\mu \in P'$, $\lambda | S' = \mu | S'$ следует равенство $\lambda = \mu$. Тогда $v_\lambda \in V^{\lambda | S'}(S')$. Применяя в), мы получаем, что $v_\lambda = 0$ для всех $\lambda \in P'$. Тем самым предложение доказано.

Напомним, что если $x \in \operatorname{End}(V)$, то через $\operatorname{ad} x$ обозначается отображение $y \mapsto xy - yx = [x, y]$ множества $\operatorname{End}(V)$ в себя.

Лемма 1. *Пусть $x, y \in \operatorname{End}(V)$.*

(i) *Предположим, что пространство V конечномерно. Для того чтобы эндоморфизм x можно было привести к треугольному виду, необходимо и достаточно, чтобы $V = \sum\limits_{a \in k} V^a(x)$.*

(ii) *Если существует такое целое число n, что $(\operatorname{ad} x)^n y = 0$, то каждое подпространство $V^a(x)$ устойчиво относительно эндоморфизма y.*

(iii) *Предположим, что пространство V конечномерно. Если $V=\sum_{a\in k} V^a(x)$ и каждое подпространство $V^a(x)$ устойчиво относительно эндоморфизма y, то существует такое целое число n, что* $(\operatorname{ad} x)^n y=0$.

Утверждение (i) следует из *Алг.*, гл. VII, § 5, n° 1, предложение 3.

Пусть $E=\operatorname{End}(V)$ и B — билинейное отображение $(u, v)\mapsto u(v)$ произведения $E\times V$ в пространство V. По определению отображения $\operatorname{ad} x$

$$x(\mathrm{B}(u, v))=\mathrm{B}(u, x(v))+\mathrm{B}((\operatorname{ad} x)(u), v),$$

где $x\in E$, $u\in E$, $v\in V$. Отображение $\operatorname{ad} x$ задает действие элемента x на пространстве E. Применяя предложение 2 (ii), получим, что $\mathrm{B}(E^0(x), V^a(x))\subset V^a(x)$ для всех $a\in k$. Так как $(\operatorname{ad} x)^n y=0$, то $y\in E^0(x)$ и, следовательно, $y(V^a(x))\subset V^a(x)$, что и доказывает утверждение (ii).

Для доказательства утверждения (iii) достаточно рассмотреть случай, когда пространство V совпадает с $V^a(x)$. Тогда, заменяя x на $x-a$, мы можем считать эндоморфизм x нильпотентным. Значит, $(\operatorname{ad} x)^{2\dim V-1}=0$ (гл. I, § 4, n° 2), что и доказывает наше утверждение.

Замечание. Приведенное доказательство показывает, что если пространство V конечномерно и существует такое целое число n, что $(\operatorname{ad} x)^n y=0$, то $(\operatorname{ad} x)^{2\dim V-1} y=0$.

В дальнейшем мы будем говорить, что отображение $r\colon S\to\operatorname{End}(V)$ удовлетворяет условию (ПК) („почти коммутативности“), если

(ПК) *Для любой пары (s, s') элементов множества S существует такое целое число n, что*

$$(\operatorname{ad} r(s))^n r(s')=0.$$

Теорема 1. *Предположим, что пространство V конечномерно. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *Имеет место условие* (ПК), *и для любого $s\in S$ эндоморфизм $r(s)$ можно привести к треугольному виду.*

(ii) *Для всех элементов $\lambda\in P$ подпространство $V^\lambda(S)$ устойчиво относительно $r(S)$, и $V=\sum_{\lambda\in P} V^\lambda(S)$.*

Если $V=\sum_{\lambda\in P} V^\lambda(S)$, то $V=\sum_{a\in k} V^a(s)$ для любого $s\in S$, и вследствие леммы 1 из условия (ii) следует условие (i).

Предположим, что условие (i) выполнено. Лемма 1 и формула (1) показывают, что подпространство $V^{\lambda}(S)$ устойчиво относительно $r(S)$. Остается доказать, что $V=\sum_{\lambda \in P} V^{\lambda}(S)$. Проведем индукцию по $\dim V$. Возможны два случая:

а) Для каждого элемента $s \in S$ эндоморфизм $r(s)$ имеет единственное собственное значение $\lambda(s)$. Тогда $V=V^{\lambda}(S)$.

б) Существует элемент $s \in S$, для которого эндоморфизм $r(s)$ имеет по крайней мере два различных собственных значения. В этом случае пространство V есть прямая сумма подпространств $V^{a}(s)$, где $a \in k$ и $\dim V^{a}(s) < \dim V$ для всех элементов a. Каждое подпространство $V^{a}(s)$ устойчиво относительно эндоморфизмов из $r(S)$, и для завершения доказательства достаточно применить предположение индукции.

Следствие 1. *Предположим, что пространство V конечномерно и выполняется условие* (ПК). *Пусть k' — расширение поля k. Предположим, что эндоморфизм $r(s)$ можно привести к треугольному виду при любом $s \in S$. Обозначим через P' множество всех отображений множества S в поле k'. Тогда*

$$V \otimes_k k' = \sum_{\lambda' \in P'} (V \otimes_k k')^{\lambda'}(S).$$

Пусть r': $S \to \operatorname{End}(V \otimes_k k')$ — отображение, канонически определенное отображением r. Если $s_1, s_2 \in S$, то для некоторого целого числа n имеет место равенство $(\operatorname{ad} r(s_1))^n r(s_2)=0$, откуда $(\operatorname{ad} r'(s_1))^n r'(s_2)=0$. Теперь для доказательства следствия достаточно применить теорему 1.

Следствие 2. *Предположим, что пространство V конечномерно и имеет место условие* (ПК). *Обозначим через $V^{+}(S)$ векторное подпространство $\sum_{s \in S}\left(\bigcap_{i \geqslant 1} r(s)^i V\right)$. Тогда*

(i) *подпространства $V^0(S)$ и $V^{+}(S)$ устойчивы относительно $r(S)$;*

(ii) $V=V^0(S) \oplus V^{+}(S)$;

(iii) *каждое устойчивое относительно $r(S)$ подпространство W векторного пространства V, для которого $W^0(S)=0$, содержится в подпространстве $V^{+}(S)$;*

(iv) $\sum_{s \in S} r(s) V^{+}(S)=V^{+}(S)$.

Кроме того, $V^{+}(S)$ — единственное подпространство векторного пространства V, обладающее свойствами (i) *и* (ii). *Если k' — некоторое расширение поля k, то $(V \otimes_k k')^{+}(S)=V^{+}(S) \otimes_k k'$.*

Последнее утверждение очевидно. При доказательстве остальных можно вследствие предложения 1 считать поле k алгебраически замкнутым. По теореме 1 $V = \sum_{\lambda \in P} V^\lambda(S)$ и подпространства $V^\lambda(S)$ устойчивы относительно $r(S)$. Для любого элемента $s \in S$ характеристический многочлен эндоморфизма $r(s) \mid V^\lambda(S)$ равен $(X - \lambda(s))^{\dim V^\lambda(S)}$. Поэтому пересечение $\bigcap_{i \geqslant 1} r(s)^i V^\lambda(S)$ равно нулю, если $\lambda(s) = 0$, и равно $V^\lambda(S)$, если $\lambda(s) \neq 0$. Таким образом,

$$V^+(S) = \sum_{\substack{\lambda \in P \\ \lambda \neq 0}} V^\lambda(S), \tag{3}$$

что доказывает утверждения (i), (ii) и (iv). Если подпространство W векторного пространства V устойчиво относительно $r(S)$, то $W = \sum_{\lambda \in P} W^\lambda(S)$ и $W^\lambda(S) = W \cap V^\lambda(S)$. Если же $W^0(S) = 0$, то ясно, что $W \subset V^+(S)$, а это и доказывает утверждение (iii).

Пусть V' — устойчивое относительно $r(S)$ подпространство векторного пространства V, для которого $V' \cap V^0(S) = 0$. Тогда $V'^0(S) = 0$, и, согласно утверждению (iii), $V' \subset V^+(S)$. Если же при этом $V = V^0(S) + V'$, то ясно, что $V' = V^+(S)$. Ч. Т. Д.

Пару подпространств $(V^0(S), V^+(S))$ часто называют *разложением Фиттинга* пространства V, или отображения $r\colon S \to \operatorname{End}(V)$. Если множество S состоит из одного элемента s, то вместо $V^+(\{s\})$ пишут $V^+(s)$ или $V^+(r(s))$. При этом $V = V^0(s) \oplus V^+(s)$, подпространства $V^0(s)$ и $V^+(s)$ устойчивы относительно эндоморфизма $r(s)$, ограничение $r(s) \mid V^0(s)$ — нильпотентный, а ограничение $r(s) \mid V^+(s)$ — биективный эндоморфизмы.

Следствие 3. *Пусть V и V' — конечномерные векторные пространства, $r\colon S \to \operatorname{End}(V)$ и $r'\colon S \to \operatorname{End}(V')$ — отображения, удовлетворяющие условию* (ПК). *Пусть $f\colon V \to V'$ — такое линейное сюръективное отображение, что $f(r(s)v) = r'(s)f(v)$ для $s \in S$ и $v \in V$. Тогда $f(V^\lambda(S)) = V'^\lambda(S)$ для всех $\lambda \in P$.*

Вследствие предложения 1 достаточно доказать утверждение при условии, что поле k алгебраически замкнуто. При этом по теореме 1 $V = \bigoplus_{\lambda \in P} V^\lambda(S)$, $V' = \bigoplus_{\lambda \in P} V'^\lambda(S)$ и $V' = f(V) = \sum_{\lambda \in P} f(V^\lambda(S))$. Наконец, по предложению 2 (i) имеет место включение $f(V^\lambda(S)) \subset V'^\lambda(S)$, и утверждение доказано.

Предложение 4. *Предположим, что поле k совершенно. Пусть V — конечномерное векторное пространство, u — произвольный элемент множества $\operatorname{End}(V)$, а u_s и u_n — полупростая и* *нильпотентная компоненты эндоморфизма* u (*Alg.*, chap. VII, § 5, n° 8)[1].

(i) $V^\lambda(u) = V^\lambda(u_s) = V_\lambda(u_s)$ *для всех* $\lambda \in k$.

(ii) *Если пространство* V *снабжено структурой алгебры и отображение* u — *дифференцирование этой алгебры, то отображения* u_s *и* u_n — *также дифференцирования.*

(iii) *Если пространство* V *снабжено структурой алгебры и отображение* u — *автоморфизм этой алгебры, то отображения* u_s *и* $1 + u_s^{-1}u_n$ — *тоже автоморфизмы.*

Вследствие предложения 1 эти утверждения достаточно доказать в предположении, что поле k алгебраически замкнуто. Тогда

$$V = \sum_{\lambda \in k} V^\lambda(u).$$

Полупростая компонента эндоморфизма $u \mid V^\lambda(u)$ является гомотетией с коэффициентом λ в пространстве $V^\lambda(u)$. Это доказывает утверждение (i).

Предположим теперь, что пространство V снабжено структурой алгебры. Пусть $x \in V^\lambda(u)$, $y \in V^\mu(u)$.

Если эндоморфизм u является дифференцированием алгебры V, то $xy \in V^{\lambda+\mu}(u)$ (предложение 2 (ii)) и, следовательно,

$$u_s(xy) = (\lambda + \mu)(xy) = (\lambda x)\, y + x\, (\mu y) = (u_s x)\, y + x\, (u_s y).$$

Поэтому отображение u_s будет дифференцированием алгебры V. Тогда отображение $u_n = u - u_s$ также будет дифференцированием алгебры V.

Если отображение u является автоморфизмом алгебры V, то $\operatorname{Ker}(u_s) = V^0(u) = 0$ и отображение u_s биективно. С другой стороны, $xy \in V^{\lambda\mu}(u)$ (предложение 2 (iii)), поэтому

$$u_s(xy) = (\lambda\mu)(xy) = (\lambda x)(\mu y) = (u_s x) \cdot (u_s y).$$

Данное равенство показывает, что u_s — автоморфизм алгебры V. Следовательно, отображение

$$1 + u_s^{-1}u_n = u_s^{-1}u$$

тоже будет автоморфизмом.

---

[1]) См. также *Алг.*, гл. VII, § 5, n° 4, предложение 11, и *Алг.*, гл. VIII, § 9, n° 4. — *Прим. перев.*

2. Примарное разложение для линейного семейства эндоморфизмов

Предположим, что множество S обладает структурой *векторного пространства* и отображение $r\colon S \to \operatorname{End}(V)$ *линейно*. Предположим также, что векторные пространства V и S *конечномерны*.

Предложение 5. *Пусть выполняется условие* (ПК), *и пусть* $\lambda\colon S \to k$ — *такое отображение, для которого* $V^{\lambda}(S) \neq 0$. *Тогда если поле k имеет характеристику* 0, *то отображение λ линейно. Если поле k имеет характеристику $p \neq 0$, то существуют такая степень q простого числа p, делящая* $\dim V^{\lambda}(S)$, *и такая однородная полиномиальная функция $P\colon S \to k$ степени q, что для всех элементов $s \in S$ справедливо равенство* $\lambda(s)^q = P(s)$.

Так как подпространство $V^{\lambda}(S)$ устойчиво относительно $r(S)$ (лемма 1 и формула (1) из n° 1), то можно предположить, что $V = V^{\lambda}(S)$. Пусть $n = \dim V$. Тогда для любого $s \in S$

$$\det(X - r(s)) = (X - \lambda(s))^n.$$

С другой стороны, формула разложения определителя показывает, что

$$\det(X - r(s)) = X^n + a_1(s)X^{n-1} + \ldots + a_i(s)X^{n-i} + \ldots,$$

где $a_i\colon S \to k$ — однородная полиномиальная функция степени i. Можно записать $n = qm$, где q — степень характеристической экспоненты поля k и $(q, m) = 1$. Тогда $(X - \lambda(s))^n = (X^q - \lambda(s)^q)^m$, следовательно, $-m\lambda(s)^q = a_q(s)$. Из этого равенства уже вытекает доказываемое утверждение.

Предложение 6. *Пусть поле k бесконечно и выполняется условие* (ПК). *Пусть k' — расширение поля k. Положим $V' = V \otimes_k k'$, $S' = S \otimes_k k'$. Пусть $r'\colon S' \to \operatorname{End}(V')$ — отображение, полученное из r расширением поля скаляров. Тогда*

$$V^0(S) \otimes_k k' = V'^0(S) = V'^0(S').$$

Первое равенство следует из предложения 1. При доказательстве второго можно предположить, что $V = V^0(S)$, поэтому $V' = V'^0(S)$. Пусть $(s_1, \ldots, s_m)$ — некоторый базис пространства S и $(e_1, \ldots, e_n)$ — некоторый базис пространства V. Тогда существуют такие многочлены $P_{ij}(X_1, \ldots, X_m)$, что имеют место равенства

$$r'(a_1's_1 + \ldots + a_m's_m)^n e_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}(a_1', \ldots, a_m')e_i$$

для $1 \leqslant j \leqslant n$ и $a'_1, \ldots a'_m \in k'$. По предположению $r'(s)^n = 0$ для всех $s \in S$, следовательно, $P_{ij}(a_1, \ldots, a_m) = 0$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $a_1, \ldots, a_m \in k$. Так как поле k бесконечно, то $P_{ij} = 0$. Следовательно, каждый элемент множества $r'(S')$ — нильпотентный эндоморфизм и $V' = V'^0(S')$.

Предложение 7. *Предположим, что поле k бесконечно и имеет место условие* (ПК). *Обозначим через $\tilde{S}$ множество таких элементов $s \in S$, для которых $V^0(s) = V^0(S)$. Пусть $P(s)$ — определитель эндоморфизма пространства $V/V^0(S)$, задаваемого эндоморфизмом $r(s)$ при $s \in S$* (n° 1, следствие 2 (i) из теоремы 1).

(i) *Функция $s \mapsto P(s)$ полиномиальна на пространстве S. При этом множество $\tilde{S}$ совпадает с $\{s \in S \mid P(s) \neq 0\}$ и открыто в S в топологии Зарисского* (дополнение I).

(ii) *Множество $\tilde{S}$ непусто, и если $s \in \tilde{S}$, то $V^+(s) = V^+(S)$.*

Утверждение о полиномиальности функции $s \mapsto P(s)$ следует из линейности отображения r. Если $s \in S$, то $V^0(s) \supset V^0(S)$, причем равенство имеет место в том и только том случае, когда отображение $r(s)$ определяет автоморфизм пространства $V/V^0(S)$, что и доказывает утверждение (i).

Пусть k' — алгебраическое замыкание поля k. Так же как и в предложении 6, рассмотрим пространства V', S' и отображение r'. Заметим, что для отображения r' справедливо условие (ПК), так как верное для $s_1, s_2 \in S$ полиномиальное тождество $\operatorname{ad}(r(s_1))^{2 \dim V - 1} r(s_2) = 0$ (см. n° 1, *замечание*) продолжается на S'. По теореме 1 имеет место разложение

$$V' = V'^0(S') \oplus \sum_{i=1}^{m} V'^{\lambda_i}(S'),$$

где $\lambda_i \neq 0$ при $1 \leqslant i \leqslant m$. Существуют ненулевые полиномиальные функции P_i на пространстве S' и целые числа q_i, для которых $\lambda_i^{q_i} = P_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ (предложение 5). Так как поле k бесконечно, то $(P_1 \ldots P_m)(s) \neq 0$ для некоторого элемента $s \in S$ (см. *Alg.*, chap. IV, § 2, n° 3, corollaire 2 à la proposition 9)[1]. Тогда $\lambda_i(s) \neq 0$ для всех i, откуда $V'^0(S') = V'^0(s)$, и, следовательно, $V^0(S) = V^0(s)$ (предложение 6). Это показывает, что $\tilde{S} \neq \varnothing$. Пусть $s \in \tilde{S}$. Так как $V^+(S)$ является дополнительным подпространством к $V^0(s)$ в пространстве V и устойчиво относительно эндоморфизма $r(s)$, то $V^+(S) = V^+(s)$ (по следствию 2 теоремы 1).

[1]) См. также *Алг.*, гл. IV, § 2, n° 5. — *Прим. перев.*

3. Разложение линейных представлений нильпотентной алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли, а M — некоторый $\mathfrak{h}$-модуль. Для каждого отображения λ пространства $\mathfrak{h}$ в поле k в модуле M определены векторные подпространства $M^\lambda(\mathfrak{h})$ и $M_\lambda(\mathfrak{h})$ (см. n° 1). В случае когда $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $x \in \mathfrak{g}$, мы будем нередко использовать обозначения $\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{g}_\lambda(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{g}^\alpha(x)$ и $\mathfrak{g}_\alpha(x)$, имея при этом в виду, что $\mathfrak{h}$ действует на $\mathfrak{g}$ посредством присоединенного представления.

Предложение 8. *Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли, а L, M, N — некоторые $\mathfrak{h}$-модули. Обозначим через P множество всех отображений пространства $\mathfrak{h}$ в поле k.*

(i) *Сумма $\sum_{\lambda \in P} L^\lambda(\mathfrak{h})$ прямая.*

(ii) *Если f: $L \to M$ — гомоморфизм $\mathfrak{h}$-модулей, то $f(L^\lambda(\mathfrak{h})) \subset \subset M^\lambda(\mathfrak{h})$ при всех $\lambda \in P$.*

(iii) *Если f: $L \times M \to N$ есть $\mathfrak{h}$-инвариантное билинейное отображение, то*

$$f\left(L^\lambda(\mathfrak{h}) \times M^\mu(\mathfrak{h})\right) \subset N^{\lambda+\mu}(\mathfrak{h})$$

при любых λ, $\mu \in P$.

Эти утверждения следуют из предложений 2 и 3.

Предложение 9. *Пусть $\mathfrak{h}$ — нильпотентная алгебра Ли и M — конечномерный $\mathfrak{h}$-модуль. Обозначим через P множество отображений пространства $\mathfrak{h}$ в поле k.*

(i) *Каждое подпространство $M^\lambda(\mathfrak{h})$ является $\mathfrak{h}$-подмодулем модуля M. Если для всех $x \in \mathfrak{h}$ эндоморфизмы x_M приводятся к треугольному виду, то $M = \sum_{\lambda \in P} M^\lambda(\mathfrak{h})$.*

(ii) *Если поле k бесконечно, то $M^0(x) = M^0(\mathfrak{h})$ для некоторого $x \in \mathfrak{h}$.*

(iii) *Если поле k имеет характеристику 0 и отображение $\lambda \in P$ таково, что $M^\lambda(\mathfrak{h}) \neq 0$, то λ — линейная форма на пространстве $\mathfrak{h}$, обращающаяся в 0 на подпространстве $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, и $M_\lambda(\mathfrak{h}) \neq 0$.*

(iv) *Если f: $M \to N$ — сюръективный гомоморфизм конечномерных $\mathfrak{h}$-модулей, то $f(M^\lambda(\mathfrak{h})) \subset N^\lambda(\mathfrak{h})$ при всех $\lambda \in P$.*

(v) *Пусть N — конечномерный $\mathfrak{h}$-модуль и B — инвариантная относительно $\mathfrak{h}$ билинейная форма на $M \times N$. Если $\lambda + \mu \neq 0$, то подпространства $M^\lambda(\mathfrak{h})$ и $N^\mu(\mathfrak{h})$ ортогональны относительно формы B. Если форма B невырожденна, то невырожденно и ее ограничение на $M^\lambda(\mathfrak{h}) \times N^{-\lambda}(\mathfrak{h})$ при любом $\lambda \in P$.*

Утверждение (i) следует из леммы 1 и теоремы 1 n° 1, утверждение (ii) — из предложения 7 n° 2. Утверждение (iv) вытекает из следствия 3 теоремы 1 n° 1. Докажем (iii). Мы можем предположить, что $M = M^{\lambda}(\mathfrak{h})$. Тогда $\lambda(x) = (\dim V)^{-1}\operatorname{Tr}(x_M)$, где $x \in \mathfrak{h}$. Это доказывает линейность отображения λ (что следует также из предложения 5) и тот факт, что λ обращается в нуль на подпространстве $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Рассмотрим отображение ρ: $\mathfrak{h} \to \operatorname{End}_k(M)$, заданное формулой

$$\rho(x) = x_M - \lambda(x)\, 1_M.$$

Из изложенного выше следует, что ρ — представление алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в пространстве M и эндоморфизм $\rho(x)$ нильпотентен для любого $x \in \mathfrak{h}$. По теореме Энгеля (гл. I, § 4, n° 2, теорема 1) существует такой элемент $m \neq 0$ пространства M, что $\rho(x)m = 0$ при всех $x \in \mathfrak{h}$, т. е. $m \in M_{\lambda}(\mathfrak{h})$.

Первая половина утверждения (v) следует из предложения 2 (ii) n° 1. При доказательстве второй можно ввиду предложения 1 из n° 1 предполагать поле k алгебраически замкнутым. Тогда, с учетом того, что $M = \sum\limits_{\lambda} M^{\lambda}(\mathfrak{h})$ и $N = \sum\limits_{\mu} N^{\mu}(\mathfrak{h})$ (см. (i)), вторая половина следует из первой.

Замечание. Предположим, что поле k совершенно и имеет характеристику 2. Рассмотрим $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, k)$, и пусть M есть $\mathfrak{h}$-модуль k^2 относительно тождественного отображения алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в $\operatorname{End}_k(M)$. Если $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ — произвольный элемент алгебры $\mathfrak{h}$, то обозначим через $\lambda(x)$ единственное решение $\lambda \in k$ уравнения $\lambda^2 = a^2 + bc$. Легко проверить, что $M = M^{\lambda}(\mathfrak{h})$, но при этом $M_{\lambda}(\mathfrak{h}) = 0$ и отображение λ не является линейным и не обращается в нуль на $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$, хотя алгебра Ли $\mathfrak{h}$ нильпотентна.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{h}$ — нильпотентная алгебра Ли и M — конечномерный $\mathfrak{h}$-модуль, для которого $M^0(\mathfrak{h}) = 0$. Пусть f: $\mathfrak{h} \to M$ — линейное отображение, для которого*

$$f([x, y]) = x \cdot f(y) - y \cdot f(x) \quad \text{при} \quad x, y \in \mathfrak{h}.$$

Тогда существует такой элемент $a \in M$, что $f(x) = x \cdot a$ при всех $x \in \mathfrak{h}$.

Положим $N = M \times k$. Пусть $\mathfrak{h}$ действует на N по формуле

$$x \cdot (m, \lambda) = (xm - \lambda f(x), 0).$$

Из условия, наложенного на f, вытекает, что N есть $\mathfrak{h}$-модуль (см. гл. I, n° 8, пример 2). Отображение $(m, \lambda) \mapsto \lambda$ является гомоморфизмом модуля N в тривиальный $\mathfrak{h}$-модуль k. По предложению 9 (iv) подмодуль $N^0(\mathfrak{h})$ содержит некоторый элемент вида $(a, 1)$, где $a \in M$. Из предположений, сделанных относительно M, следует, что

$$(M \times 0) \cap N^0(\mathfrak{h}) = 0;$$

поэтому подпространство $N^0(\mathfrak{h})$ одномерно и, следовательно, аннулируется алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Таким образом, $xa - f(a) = 0$ при любом $x \in \mathfrak{h}$, что и доказывает наше следствие.

Предложение 10. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — ее нильпотентная подалгебра. Обозначим через P множество отображений пространства $\mathfrak{h}$ в поле k.*

(i) *Для любых $\lambda, \mu \in P$ имеет место соотношение $[\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}), \mathfrak{g}^\mu(\mathfrak{h})] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}(\mathfrak{h})$. В частности, $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{h}$, подпространства $\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ устойчивы относительно $\operatorname{ad}\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, а подалгебра Ли $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ совпадает со своим нормализатором в алгебре $\mathfrak{g}$.*

(ii) *Если M есть $\mathfrak{g}$-модуль, то $\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})M^\mu(\mathfrak{h}) \subset M^{\lambda+\mu}(\mathfrak{h})$ для любых $\lambda, \mu \in P$; в частности, каждое подпространство $M^\lambda(\mathfrak{h})$ является $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$-модулем.*

(iii) *Если B — билинейная форма на пространстве $\mathfrak{g}$, инвариантная относительно алгебры $\mathfrak{h}$, то подпространства $\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ и $\mathfrak{g}^\mu(\mathfrak{h})$ при $\lambda + \mu \neq 0$ ортогональны относительно формы B. Если форма B невырожденна, то ее ограничение на $\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{-\lambda}(\mathfrak{h})$ невырожденно при любом $\lambda \in P$, в частности, ограничение B на $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ невырождвнно.*

(iv) *Предположим, что поле k имеет характеристику 0. Если $x \in \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ и $\lambda \neq 0$, то эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен.*

Отображение $(x, y) \mapsto [x, y]$ пространства $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$ является $\mathfrak{g}$-инвариантным в силу тождества Якоби, следовательно, оно $\mathfrak{h}$-инвариантно. Таким образом, первая часть утверждения (i) следует из предложения 2 (ii). Утверждение (ii) доказывается аналогичным образом.

Если x принадлежит нормализатору подалгебры Ли $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, то $(\operatorname{ad} y).x = -[x, y] \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ при всех $y \in \mathfrak{h}$, следовательно, $(\operatorname{ad} y)^n.x = 0$ для достаточно большого n. Это показывает, что $x \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Таким образом, утверждение (i) полностью доказано. Утверждение (iii) следует из предложения 9 (v).

При доказательстве (iv) можно предположить, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть $x \in \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ и $\lambda \neq 0$. Для каждого целого числа $n \geqslant 0$ и любого элемента $\mu \in P$ выполняется соотношение $(\operatorname{ad} x)^n \mathfrak{g}^\mu(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}^{\mu+n\lambda}(\mathfrak{h})$. Обозначим через P_1 конечное подмножество тех элементов $\mu \in P$, для которых $\mathfrak{g}^\mu(\mathfrak{h}) \neq 0$. Если характеристика поля k равна 0 и $\lambda \neq 0$, то $(P_1 + n\lambda) \cap P_1 = \varnothing$ для достаточно больших n, откуда $(\operatorname{ad} x)^n = 0$.

Лемма 2. Предположим, что поле k имеет характеристику 0. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над k, B — ее форма

Киллинга и $\mathfrak{m}$ *— некоторая подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Предположим, что*

1) *ограничение формы* B *на подалгебру* $\mathfrak{m}$ *невырожденно*;

2) *если* $x \in \mathfrak{m}$, *то полупростая и нильпотентная компоненты*[1]) *элемента* x *тоже принадлежат* $\mathfrak{m}$.

Тогда $\mathfrak{m}$ *— редуктивная подалгебра Ли в* $\mathfrak{g}$ (гл. I, § 6, n° 6).

По предложению 5 г) гл. I, § 6, n°4, $\mathfrak{m}$ редуктивна. Обозначим через $\mathfrak{c}$ центр подалгебры $\mathfrak{m}$. Если элемент $x \in \mathfrak{c}$ нильпотентен, то $x = 0$. Действительно, для любого $y \in \mathfrak{m}$ эндоморфизмы $\operatorname{ad} x$ и $\operatorname{ad} y$ перестановочны, поэтому произведение $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y$ тоже нильпотентно. Тогда $B(x, y) = 0$ и, следовательно, $x = 0$. Пусть теперь x — произвольный элемент алгебры Ли $\mathfrak{c}$ и s и n — его полупростая и нильпотентная компоненты. По условию $n \in \mathfrak{m}$. При этом эндоморфизм $\operatorname{ad} n$ имеет вид $P(\operatorname{ad} x)$, где P — некоторый многочлен без свободного члена, поэтому $(\operatorname{ad} n) . \mathfrak{m} = 0$. Следовательно, $n \in \mathfrak{c}$ и по доказанному выше $n = 0$. Таким образом, эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ полупрост. То есть ограничение на подалгебру $\mathfrak{m}$ присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ полупросто (гл. I, § 6, n° 5, теорема 4 б)).

Предложение 11. *Предположим, что поле* k *имеет характеристику* 0. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— полупростая алгебра Ли и* $\mathfrak{h}$ *— ее нильпотентная подалгебра. Тогда алгебра Ли* $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *леммы* 2 *и является редуктивной в* $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим элементы $x, x' \in \mathfrak{g}$; пусть s и s' — их полупростые компоненты, а n и n' — нильпотентные. Тогда

$$\begin{aligned} x' \in \mathfrak{g}^0(x) &\Leftrightarrow (\operatorname{ad} s)(x') = 0 \ \text{(предл. 4)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\operatorname{ad} x')(s) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\operatorname{ad} s')(s) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\operatorname{ad} s)(s') = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow s' \in \mathfrak{g}^0(x) \ \text{(предл. 4)}. \end{aligned}$$

Из этого также следует, что включение $x' \in \mathfrak{g}^0(x)$ влечет за собой $n' \in \mathfrak{g}^0(x)$, что и доказывает условие 2). Так как форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$ невырожденна, то ее ограничение на $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ тоже невырожденно (предложение 10 (iii)). Редуктивность подалгебры $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ вытекает теперь из леммы 2.

---

[1]) По теореме 3 n° 3 § 6 гл. I каждый элемент $x \in \mathfrak{g}$ представляется единственным образом в виде суммы полупростого элемента s и нильпотентного элемента n, перестановочных между собой. Элементы s и n называются *полупростой* и *нильпотентной компонентами* элемента x.

4. *Примарное разложение алгебры Ли относительно некоторого автоморфизма*

Предложение 12. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли и* a — *ее автоморфизм.*

(i) $[\mathfrak{g}^{\lambda}(a), \mathfrak{g}^{\mu}(a)] \subset \mathfrak{g}^{\lambda\mu}(a)$ *для любых* λ, $\mu \in k$; *в частности, подпространство* $\mathfrak{g}^1(a)$ *является подалгеброй алгебры* $\mathfrak{g}$.

(ii) *если* B — *симметрическая инвариантная относительно* a *билинейная форма на* $\mathfrak{g}$, *то подпространства* $\mathfrak{g}^{\lambda}(a)$ *и* $\mathfrak{g}^{\mu}(a)$ *ортогональны относительно* B *при* $\lambda\mu \neq 1$. *Предположим, что форма* B *невырожденна. Тогда при* $\lambda \neq 0$ *ее ограничение на произведение* $\mathfrak{g}^{\lambda}(a) \times \mathfrak{g}^{1/\lambda}(a)$ *невырожденно.*

Утверждение (i) и первая часть утверждения (ii) следуют из предложения 2 (iii), которое надо применить к закону композиции $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ и к билинейной форме B. При доказательстве оставшейся части утверждения (ii) можно предполагать, что поле k алгебраически замкнуто. При этом предположении $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\nu \in k} \mathfrak{g}^{\nu}(a)$. Так как уже установлено, что подпространство $\mathfrak{g}^{\lambda}(a)$ ортогонально к подпространствам $\mathfrak{g}^{\nu}(a)$ при $\lambda\nu \neq 1$ и форма B невырожденна, то ограничение формы B на $\mathfrak{g}^{\lambda}(a) \times \times \mathfrak{g}^{1/\lambda}(a)$ обязательно невырожденно.

Следствие. *Предположим, что поле* k *имеет характеристику* 0 *и алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *полупроста. Тогда подалгебра* $\mathfrak{g}^1(a)$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *леммы* 2; *она редуктивна в алгебре Ли* $\mathfrak{g}$.

Условие 1) следует из утверждения (ii) предложения 12, а условие 2) — из предложения 4 n° 1.

5. *Инварианты полупростого действия в полупростой алгебре Ли*

В этом пункте мы предполагаем, что поле k *имеет характеристику* 0.

Предложение 13. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра Ли и* $\mathfrak{a}$ — *ее подалгебра, редуктивная в алгебре* $\mathfrak{g}$. *Обозначим через* $\mathfrak{m}$ *централизатор*[1]) *подалгебры* $\mathfrak{a}$ *в алгебре* $\mathfrak{g}$. *Тогда подалгебра* $\mathfrak{m}$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *леммы* 2 *из* n° 3; *она редуктивна в алгебре* $\mathfrak{g}$.

Применяя предложение 6 из § 3 гл. I к $\mathfrak{a}$-модулю $\mathfrak{g}$, получим, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$. Обозначим через B форму Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$, и пусть $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{m}$, $z \in \mathfrak{g}$. Тогда $\mathrm{B}([z, x], y) =$

---

[1]) Напомним, что $\mathfrak{m} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{a}] = 0\}$. — *Прим. перев.*

$=B(z, [x, y])=0$, так как $[x, y]=0$. Это показывает, что подпространство $\mathfrak{m}$ ортогонально подпространству $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ относительно формы B. Из невырожденности формы B и равенства $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ следует, что ограничение B на $\mathfrak{m}$ тоже невырожденно, тем самым выполняется условие 1) леммы 2.

Пусть теперь $x\in\mathfrak{m}$ и s, n — полупростая и нильпотентная компоненты элемента x. Полупростая компонента эндоморфизма $\operatorname{ad} x$ есть $\operatorname{ad} s$ (см. гл. I, § 6, n° 3). Так как эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ переводит подпространство $\mathfrak{a}$ в нуль, то по предложению 4 (i) его переводит в нуль и эндоморфизм $\operatorname{ad} s$. Таким образом, $s\in\mathfrak{m}$, $n=x-s\in\mathfrak{m}$ и условие 2) леммы 2 тоже выполняется.

Замечание. Централизатор подалгебры $\mathfrak{m}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ не обязательно совпадает с $\mathfrak{a}$, см. упражнение 4.

Предложение 14. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, A — некоторая группа и r — гомоморфизм группы A в группу* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$. *Обозначим через $\mathfrak{m}$ подалгебру алгебры $\mathfrak{g}$, состоящую из элементов, инвариантных относительно $r(A)$. Предположим, что линейное представление r полупросто. Тогда подалгебра $\mathfrak{m}$ удовлетворяет условиям* 1), 2) *леммы* 2 *из* n° 3 *и является редуктивной в алгебре $\mathfrak{g}$.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предыдущего:

Обозначим через $\mathfrak{g}^+$ векторное подпространство алгебры $\mathfrak{g}$, порожденное элементами вида $r(a)x-x$, где $a\in A$, $x\in\mathfrak{g}$. Векторное пространство $\mathfrak{g}'=\mathfrak{m}+\mathfrak{g}^+$ устойчиво относительно $r(A)$. Пусть $\mathfrak{n}$ — дополнительное подпространство к подпространству $\mathfrak{g}'$ в $\mathfrak{g}$, устойчивое относительно $r(A)$. Если $x\in\mathfrak{n}$, $a\in A$, то $r(a)x-x\in\mathfrak{n}\cap\mathfrak{g}^+=0$, следовательно, $x\in\mathfrak{m}$ и $x=0$, поскольку $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{n}=0$. Таким образом, $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'=\mathfrak{m}+\mathfrak{g}^+$. Обозначим через B форму Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $y\in\mathfrak{m}$, $a\in A$, $x\in\mathfrak{g}$; тогда

$$\begin{aligned} B(y, r(a)x-x) &= B(y, r(a)x)-B(y, x)= \\ &= B(r(a^{-1})y, x)-B(y, x)= \\ &= B(y, x)-B(y, x)=0. \end{aligned}$$

Таким образом, подпространства $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{g}^+$ ортогональны относительно формы B. Вследствие этого ограничение формы B на $\mathfrak{m}$ невырожденно, т. е. условие 1) леммы 2 выполняется. Условие 2) непосредственно следует из данных предложения [1]).

[1]) См. гл. I, § 6, n° 3, предложение 4 и теорема 6. — *Прим. перев.*

§ 2. Подалгебры Картана и регулярные элементы алгебры Ли

Начиная с n° 2, *поле* k *предполагается бесконечным.*

1. Подалгебры Картана

Определение 1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли. Подалгеброй Картана алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *называется ее нильпотентная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором.*

Мы получим далее следующие результаты:

1) если поле k бесконечно, то алгебра $\mathfrak{g}$ имеет подалгебру Картана (n° 3, следствие 1 теоремы 1),

2) если k — поле характеристики 0, то все подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$ имеют одинаковую размерность (§ 3, n° 3, теорема 2),

3) если k — алгебраически замкнутое поле характеристики 0, то все подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$ сопряжены относительно группы элементарных автоморфизмов этой алгебры (§ 3, n° 2, теорема 1).

Примеры. 1) Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то единственная ее подалгебра Картана есть сама алгебра $\mathfrak{g}$ (см. гл. I, § 4, n° 1, предложение 3).

2) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, k)$ и $\mathfrak{h}$ — множество диагональных матриц в алгебре $\mathfrak{g}$. Покажем, что $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Прежде всего подалгебра $\mathfrak{h}$ коммутативна, а следовательно, нильпотентна. Обозначим через (E_{ij}) канонический базис пространства $\mathfrak{gl}(n, k)$. Пусть $x = \sum \mu_{ij} E_{ij}$ — элемент нормализатора подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Формулы (5) из n° 2 § 1 гл. I показывают, что при $i \neq j$ коэффициент при E_{ij} в разложении элемента $[E_{ii}, x]$ равен μ_{ij}. Так как $E_{ii} \in \mathfrak{h}$, то $[E_{ii}, x] \in \mathfrak{h}$ и рассматриваемый коэффициент должен быть равен нулю. Таким образом, $\mu_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и, следовательно, $x \in \mathfrak{h}$. Тем самым доказано, что $\mathfrak{h}$ является подалгеброй Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

3) Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_1$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, содержащая подалгебру $\mathfrak{h}$. Тогда $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в алгебре $\mathfrak{g}_1$. Это сразу следует из определения 1.

Предложение 1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли и* $\mathfrak{h}$ — *ее подалгебра Картана. Тогда* $\mathfrak{h}$ — *максимальная нильпотентная подалгебра алгебры* $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{h}'$ — некоторая нильпотентная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{h}$. Тогда $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{h}'$ (пример 3) и, следовательно, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ (пример 1).

Могут существовать максимальные нильпотентные подалгебры, которые не являются подалгебрами Картана (упражнение 2).

Предложение 2. *Пусть $(\mathfrak{g}_i)_{i \in I}$ — конечное семейство алгебр Ли и $\mathfrak{g} = \prod_{i \in I} \mathfrak{g}_i$. Подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеют вид $\prod_{i \in I} \mathfrak{h}_i$, где $\mathfrak{h}_i$ есть подалгебра Картана в алгебре Ли $\mathfrak{g}_i$.*

Если $\mathfrak{h}_i$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}_i$ с нормализатором $\mathfrak{n}_i$, то $\prod \mathfrak{h}_i$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ с нормализатором $\prod \mathfrak{n}_i$. Если подалгебры $\mathfrak{h}_i$ нильпотентны, то $\prod \mathfrak{h}_i$ нильпотентна. Следовательно, если $\mathfrak{h}_i$ — подалгебра Картана в алгебре $\mathfrak{g}_i$ для каждого i, то подалгебра $\prod \mathfrak{h}_i$ является подалгеброй Картана в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Обратно, пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как проекция $\mathfrak{h}_i$ подалгебры $\mathfrak{h}$ на сомножитель $\mathfrak{g}_i$ — нильпотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}_i$, то $\prod \mathfrak{h}_i$ — нильпотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{h}$, поэтому $\mathfrak{h} = \prod \mathfrak{h}_i$ (предложение 1). Таким же образом легко проверить, что для каждого i подалгебра $\mathfrak{h}_i$ совпадает со своим нормализатором в алгебре $\mathfrak{g}_i$, следовательно, она является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}_i$.

Пример 4. Если поле k имеет характеристику 0, алгебра $\mathfrak{gl}(n, k)$ есть произведение идеалов $\mathfrak{sl}(n, k)$ и $k \cdot 1$. Таким образом, из примера 2) и предложения 2 следует, что множество диагональных матриц со следом 0 — подалгебра Картана в алгебре $\mathfrak{sl}(n, k)$.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра и k' — расширение поля k. Алгебра $\mathfrak{h}$ является подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли $\mathfrak{h} \otimes_k k'$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g} \otimes_k k'$.*

Действительно, подалгебра $\mathfrak{h}$ нильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентна подалгебра $\mathfrak{h} \otimes_k k'$ (гл. I, § 4, n° 5). Кроме того, если $\mathfrak{n}$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{n} \otimes_k k'$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{h} \otimes_k k'$ в алгебре $\mathfrak{g} \otimes_k k'$ (гл. I, § 3, n° 8).

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — ее нильпотентная подалгебра. Для того чтобы подалгебра $\mathfrak{h}$ была подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.*

Если $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, то $\mathfrak{h}$ совпадает со своим нормализатором (§ 1, предложение 10 (i)) и является, следовательно, подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$. Предположим, что $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \neq \mathfrak{h}$. Рассмотрим представление алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в пространстве $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$, полученное факторизацией присоединенного представления. Применяя к нему теорему Энгеля (гл. I, § 4, n°2, теорема 1), мы видим, что существует элемент $x \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, для которого справедливы соотношения $x \notin \mathfrak{h}$ и $[\mathfrak{h}, x] \subset \mathfrak{h}$. Отсюда следует, что x принадлежит нормализатору подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ и, таким образом, $\mathfrak{h}$ не является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана. Если поле k бесконечно, то существует такой элемент $x \in \mathfrak{h}$, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$.*

Действительно, так как $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, то можно применить предложение 9 (ii) из § 1.

Следствие 2. *Пусть $f: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ — сюръективный гомоморфизм алгебр Ли. Если $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в алгебре $\mathfrak{g}$, то $f(\mathfrak{h})$ — подалгебра Картана в алгебре $\mathfrak{g}'$.*

Прежде всего $f(\mathfrak{h})$ — нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{g}'$. С другой стороны, рассмотрим представление $x \mapsto \operatorname{ad} f(x)$ алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в пространстве $\mathfrak{g}'$. По предложению 9 (iv) из n° 3 § 1 имеем $f(\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})) = \mathfrak{g}'^0(\mathfrak{h})$. Но $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, и ясно, что $\mathfrak{g}'^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}'^0(f(\mathfrak{h}))$; следовательно, выполняется соотношение $f(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}'^0(f(\mathfrak{h}))$. Для завершения доказательства следствия достаточно применить предложение 4.

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана и $\mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ $(n \geqslant 1)$ — некоторый член нижнего центрального ряда алгебры Ли $\mathfrak{g}$* (гл. I, § 1, n° 5). *Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathscr{C}^n\mathfrak{g}$.*

Действительно, по следствию 2 образ подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g}/\mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ является подалгеброй Картана этой алгебры и будет совпадать с ней, так как сама алгебра $\mathfrak{g}/\mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ нильпотентна (пример 1).

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана и $\mathfrak{a}$ — некоторая подалгебра в $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{h}$.*

(i) *Подалгебра $\mathfrak{a}$ совпадает со своим нормализатором в алгебре $\mathfrak{g}$.*

(ii) *Предположим, что $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и A — интегральная подгруппа группы Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{a}$. Тогда A является подгруппой Ли группы G и совпадает со связной компонентой нейтрального элемента своего нормализатора в группе G.*

Обозначим через $\mathfrak{n}$ нормализатор подалгебры $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{n}$ (пример 3)), то подалгебра $\{0\}$ является подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{n}/\mathfrak{a}$ (следствие 2) и поэтому совпадает со своим нормализатором в $\mathfrak{n}/\mathfrak{a}$.

Таким образом, $\mathfrak{n}=\mathfrak{a}$. Утверждение (ii) следует из утверждения (i) и следствия предложения 11 из гл. III, § 9, n°4.

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и E — подмножество в $\mathfrak{g}$. Рассмотрим действие множества E на пространстве $\mathfrak{g}$, заданное посредством ограничения на E присоединенного представления.*

Для того чтобы подмножество E было подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение $E=\mathfrak{g}^0(E)$.

Указанное соотношение необходимо (предложение 4). Предположим теперь, что оно имеет место. По предложению 2 (ii) из n°1 § 1 множество E является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $x\in E$, то эндоморфизм $\mathrm{ad}_E(x)$ нильпотентен, поскольку $E\subset\mathfrak{g}^0(E)$, и, следовательно, алгебра E нильпотентна. Тогда по предложению 4 подалгебра E является подалгеброй Картана.

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, k_0 — подполе поля k, для которого $[k:k_0]<+\infty$, и $\mathfrak{g}_0$ — алгебра Ли, полученная из $\mathfrak{g}$ сужением поля скаляров до k_0. Пусть $\mathfrak{h}$ — некоторое подмножество в $\mathfrak{g}$. Для того чтобы $\mathfrak{h}$ было подалгеброй Картана в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{h}$ было подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}_0$.*

Это вытекает из следствия 5, так как условие $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ не зависит от основного поля.

Предложение 5. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{c}$ — ее центр и $\mathfrak{h}$ — некоторое векторное подпространство пространства $\mathfrak{g}$. Для того чтобы подпространство $\mathfrak{h}$ было подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{h}$ содержало $\mathfrak{c}$ и подпространство $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ было подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$.*

Предположим, что $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. Из соотношения $[\mathfrak{c},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{h}$ следует, что $\mathfrak{c}\subset\mathfrak{h}$. По следствию 2 предложения 4 подалгебра $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$.

Предположим, что $\mathfrak{h}\supset\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$. Обозначим через f канонический морфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$. Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ является центральным расширением алгебры $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$ и, следовательно, нильпотентна. Пусть $\mathfrak{n}$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Если $x\in\mathfrak{n}$, то $[f(x),\mathfrak{h}/\mathfrak{c}]\subset\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$, поэтому $f(x)\in\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$, $x\in\mathfrak{h}$. Это доказывает, что алгебра $\mathfrak{h}$ является подалгеброй Картана в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Следствие. *Пусть $\mathscr{C}_\infty\mathfrak{g}$ — объединение членов верхнего центрального ряда алгебры Ли $\mathfrak{g}$* (гл. I, § 1, n°6). *Подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ есть полный прообраз подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}/\mathscr{C}_\infty\mathfrak{g}$.*

Действительно, центр алгебры $\mathfrak{g}/\mathscr{C}_i\mathfrak{g}$ есть $\mathscr{C}_{i+1}\mathfrak{g}/\mathscr{C}_i\mathfrak{g}$, и следствие немедленно выводится из предложения 5 по индукции.

Замечание. $\mathscr{C}_\infty\mathfrak{g}$ — это наименьший из идеалов $\mathfrak{n}$ алгебры $\mathfrak{g}$, таких, что центр алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ равен $\{0\}$; это характеристический нильпотентный идеал алгебры $\mathfrak{g}$.

2. Регулярные элементы алгебры Ли

[Напомним, что, начиная с этого места, поле k предполагается бесконечным.]

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли размерности n. Запишем характеристический многочлен эндоморфизма $\operatorname{ad} x$ для элемента $x \in \mathfrak{g}$ в виде

$$\det(T - \operatorname{ad} x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) T^i, \quad \text{где} \quad a_i(x) \in k.$$

При этом $a_i(x) = (-1)^{n-i} \operatorname{Tr}\left(\bigwedge^{n-i} \operatorname{ad} x\right)$, см. *Alg.*, chap. III, § 8, n° 11. Следовательно, отображение $x \mapsto a_i(x)$ является однородным полиномиальным отображением степени $n-i$ пространства $\mathfrak{g}$ в поле k (*Alg.*, chap. IV, § 5, n° 9).

Замечания. 1) Если $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, то $a_0 = 0$, так как $(\operatorname{ad} x)(x) = 0$ при любом $x \in \mathfrak{g}$.

2) Пусть k' — расширение поля k. Запишем $\det(T - \operatorname{ad} x') = \sum_{i=0}^{n} a'_i(x') T^i$ для $x' \in \mathfrak{g} \otimes_k k'$. При любом i имеет место соотношение $a'_i | \mathfrak{g} = a_i$.

Определение 2. *Наименьшее целое число l, для которого $a_l \neq 0$, называется рангом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и обозначается через $\operatorname{rg}(\mathfrak{g})$. Элемент x алгебры $\mathfrak{g}$ называется регулярным, если $a_l(x) \neq 0$.*

Таким образом, для любого элемента $x \in \mathfrak{g}$ выполняется неравенство $\operatorname{rg}(\mathfrak{g}) \leqslant \dim \mathfrak{g}^0(x)$, и равенство имеет место в том и только том случае, когда элемент x регулярен.

Множество регулярных элементов открыто и плотно в $\mathfrak{g}$ в топологии Зарисского (дополнение I).

Примеры. 1) Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то $\operatorname{rg}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}$ и любой элемент алгебры $\mathfrak{g}$ регулярен.

2) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$. Если $x = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$, то легко подсчитать, что

$$\det(T - \operatorname{ad} x) = T^3 - 4(\alpha\beta + \gamma^2) T.$$

Если характеристика поля k не равна 2, то $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})=1$ и элементы x, для которых $\alpha\beta+\gamma^2\neq 0$, регулярны.

3) Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(V)$, где V — векторное пространство конечной размерности n. Обозначим через $\bar{k}$ алгебраическое замыкание поля k. Рассмотрим элемент $x\in\mathfrak{g}$, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни его характеристического многочлена в поле $\bar{k}$ (каждый корень записан столько раз, какова его кратность). Канонический изоморфизм пространства $V^*\otimes V$ на $\mathfrak{g}$ согласован с заданной на них структурой $\mathfrak{g}$-модулей и переводит эндоморфизм $1\otimes x - {}^t x\otimes 1$ в эндоморфизм $\mathrm{ad}\,x$ (гл. I, § 3, n° 3, предложение 4). Используя предложение 4 (i) из § 1, легко получить, что корнями характеристического многочлена эндоморфизма $\mathrm{ad}\,x$ являются $\lambda_i-\lambda_j$ для $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant n$ (каждый корень записан столько раз, какова его кратность). Поэтому ранг алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равен n, и для того чтобы элемент x был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы каждый корень λ_i был простым корнем характеристического многочлена этого элемента.

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, k' — расширение поля k и $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}\otimes_k k'$.*

(i) *Для того чтобы элемент $x\in\mathfrak{g}$ был регулярен в $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы элемент $x\otimes 1$ был регулярен в $\mathfrak{g}'$.*

(ii) $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})=\mathrm{rg}(\mathfrak{g}')$.

Эти результаты следуют из замечания 2.

Предложение 7. *Пусть $(\mathfrak{g}_i)_{i\in I}$ — конечное семейство алгебр Ли и $\mathfrak{g}=\prod_{i\in I}\mathfrak{g}_i$.*

(i) *Для того чтобы элемент $(x_i)_{i\in I}$ был регулярен в $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i\in I$ элемент x_i был регулярен в $\mathfrak{g}_i$.*

(ii) $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})=\sum_{i\in I}\mathrm{rg}(\mathfrak{g}_i)$.

Действительно, для любого $x=(x_i)_{i\in I}\in\mathfrak{g}$ характеристический многочлен эндоморфизма $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x$ есть произведение характеристических многочленов эндоморфизмов $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_i}\,x_i$.

Предложение 8. *Пусть $f\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ — сюръективный гомоморфизм алгебр Ли.*

(i) *Если x — регулярный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то $f(x)$ — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}'$. Обратное утверждение верно, если подалгебра* $\mathrm{Ker}\,f$ *содержится в центре алгебры $\mathfrak{g}$.*

(ii) *Имеет место соотношение* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})\geqslant\mathrm{rg}(\mathfrak{g}')$.

Введем обозначения $\operatorname{rg}(\mathfrak{g})=r$, $\operatorname{rg}(\mathfrak{g}')=r'$. Пусть $x\in\mathfrak{g}$. Тогда характеристические многочлены эндоморфизмов $\operatorname{ad}x$, $\operatorname{ad}f(x)$ и $\operatorname{ad}x\,|\operatorname{Ker}f$ могут быть записаны в следующем виде:

$$P(T)=T^n+a_{n-1}(x)T^{n-1}+\ldots+a_r(x)T^r,$$
$$Q(T)=T^{n'}+b_{n'-1}(x)T^{n'-1}+\ldots+b_{r'}(x)T^{r'},$$
$$R(T)=T^{n''}+c_{n''-1}(x)T^{n''-1}+\ldots+c_{r''}(x)T^{r''},$$

где a_i, b_i и c_i — полиномиальные функции на $\mathfrak{g}$ и $a_r\neq 0$, $b_{r'}\neq 0$, $c_{r''}\neq 0$. При этом $P=QR$, следовательно, выполняются соотношения $r=r'+r''$ и $a_r(x)=b_{r'}(x)c_{r''}(x)$, которые доказывают утверждение (ii) и первую часть утверждения (i). В случае когда подалгебра $\operatorname{Ker}f$ содержится в центре алгебры $\mathfrak{g}$, имеем $R(T)=T^{n''}$, поэтому $a_r(x)=b_{r'}(x)$, что доказывает вторую часть утверждения (i).

Следствие. *Пусть $\mathscr{C}_n\mathfrak{g}$ $(n\geqslant 0)$ — некоторый член верхнего центрального ряда алгебры* $\mathfrak{g}$ (гл. I, § 1, n°6).

Регулярными в алгебре $\mathfrak{g}$ являются те элементы этой алгебры, образы которых в $\mathfrak{g}/\mathscr{C}_n\mathfrak{g}$ регулярны.

Предложение 9. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{g}'$ — ее подалгебра. Каждый элемент алгебры $\mathfrak{g}'$, регулярный в $\mathfrak{g}$, регулярен и в $\mathfrak{g}'$.*

Если $x\in\mathfrak{g}'$, то эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}x$ порождает при ограничении на подпространство $\mathfrak{g}'$ эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'}x$ и потому определяет на факторпространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ некоторый эндоморфизм $u(x)$. Обозначим через $d_0(x)$ (соотв. $d_1(x)$) размерность нильпространства эндоморфизма $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'}x$ (соотв. $u(x)$), и пусть c_0 (соотв. c_1) — минимум чисел $d_0(x)$ (соотв. $d_1(x)$) для всех элементов x из подалгебры $\mathfrak{g}'$. Существуют ненулевые полиномиальные отображения p_0 и p_1 пространства $\mathfrak{g}'$ в поле k, для которых

$$d_0(x)=c_0 \Leftrightarrow p_0(x)\neq 0, \qquad d_1(x)=c_1\Leftrightarrow p_1(x)\neq 0.$$

Так как поле k бесконечно, то множество S тех элементов $x\in\mathfrak{g}'$, для которых $d_0(x)=c_0$ и $d_1(x)=c_1$, не пусто. Все элементы множества S регулярны в $\mathfrak{g}'$. С другой стороны, множество S есть подмножество тех элементов подалгебры $\mathfrak{g}'$, для которых нильпространство эндоморфизма $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}x$ имеет минимальную размерность; поэтому оно содержит все элементы подалгебры $\mathfrak{g}'$, регулярные в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Замечание. 3) В подалгебре $\mathfrak{g}'$ не обязательно существует элемент, регулярный в алгебре $\mathfrak{g}$. Если же такой элемент существует, то множество всех элементов с этим свойством совпадает с множеством S из приведенного выше доказательства.

3. Регулярные элементы и подалгебры Картана

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли.*

(i) *Если x — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}^0(x)$ — подалгебра Картана этой алгебры.*

(ii) *Если $\mathfrak{h}$ — максимальная нильпотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ и элемент $x \in \mathfrak{h}$ регулярен в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$.*

(iii) *Если $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, то $\dim(\mathfrak{h}) \geqslant \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$.*

(iv) *Подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, размерности которых равны $\operatorname{rg}(\mathfrak{g})$, — это подалгебры вида $\mathfrak{g}^0(x)$, где x — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$.*

Пусть x — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$. Очевидно, что $\mathfrak{h}^0(x) = \mathfrak{h}$. Так как элемент x регулярен в $\mathfrak{h}$ (предложение 9), то $\operatorname{rg}(\mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{h})$, вследствие чего подалгебра $\mathfrak{h}$ нильпотентна. С другой стороны, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x) \supset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \supset \mathfrak{h}$, следовательно, подалгебра $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ является как раз подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}$ (предложение 4). Таким образом, утверждение (i) доказано.

Если $\mathfrak{h}$ — максимальная нильпотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ и элемент $x \in \mathfrak{h}$ регулярен в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0(x)$, а подалгебра $\mathfrak{g}^0(x)$ нильпотентна, согласно утверждению (i); следовательно, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$, и утверждение (ii) доказано.

Если $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$ для некоторого элемента $x \in \mathfrak{h}$ (следствие 1 предложения 4), поэтому $\dim(\mathfrak{h}) \geqslant \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$, что доказывает утверждение (iii). Если же $\dim(\mathfrak{h}) = \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$, то элемент x регулярен в $\mathfrak{g}$. Наконец, если x' — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$, то вследствие утверждения (i) $\mathfrak{g}^0(x')$ есть подалгебра Картана, естественно, размерности $\operatorname{rg}(\mathfrak{g})$. Тем самым утверждение (iv) доказано.

В теореме 2 § 3 будет показано, что если поле k имеет характеристику 0, то все подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеют размерность, равную $\operatorname{rg}(\mathfrak{g})$.

Следствие 1. *Каждая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет подалгебры Картана, и ранг алгебры $\mathfrak{g}$ равен минимуму размерностей ее подалгебр Картана.*

Следствие 2. *Пусть $f\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ — сюръективный гомоморфизм алгебр Ли. Если $\mathfrak{h}'$ — некоторая подалгебра Картана в $\mathfrak{g}'$, то в $\mathfrak{g}$ существует подалгебра Картана $\mathfrak{h}$, для которой $\mathfrak{h}' = f(\mathfrak{h})$.*

Положим $\mathfrak{a} = f^{-1}(\mathfrak{h}')$. По следствию 1 алгебра Ли $\mathfrak{a}$ имеет подалгебру Картана $\mathfrak{h}$. По следствию 2 предложения 4 имеет место равенство $f(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$. Докажем, что подалгебра $\mathfrak{h}$ есть подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{n}$ нормализатор $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Достаточно доказать, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}$. Если $x \in \mathfrak{n}$, то элемент $f(x)$ принадлежит нормализатору подалгебры $\mathfrak{h}'$ в алгебре $\mathfrak{g}'$, следовательно, $f(x) \in \mathfrak{h}'$ и $x \in \mathfrak{a}$. Но так как $\mathfrak{h}$ совпадает со своим нормализатором в алгебре $\mathfrak{a}$, то $x \in \mathfrak{h}$.

Следствие 3. *Каждая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть сумма своих подалгебр Картана.*

Сумма $\mathfrak{s}$ подалгебр Картана алгебры $\mathfrak{g}$ содержит множество всех регулярных элементов алгебры $\mathfrak{g}$ (теорема 1 (i)). Так как это множество плотно в $\mathfrak{g}$ в топологии Зарисского, то $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$.

Предложение 10. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — ее коммутативная подалгебра и $\mathfrak{c}$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$. Предположим, что эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ полупрост при любом $x \in \mathfrak{a}$. Тогда подалгебрами Картана в $\mathfrak{c}$ будут подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$, содержащие $\mathfrak{a}$.*

Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{c}$. Так как алгебра $\mathfrak{a}$ содержится в центре $\mathfrak{z}$ алгебры $\mathfrak{c}$, то $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z} \subset \mathfrak{h}$ (предложение 5). Обозначим через $\mathfrak{n}$ нормализатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Справедливы соотношения

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{h}.$$

Так как эндоморфизмы $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$, $x \in \mathfrak{a}$, полупросты и перестановочны между собой, то, согласно *Alg.*, chap. VIII, § 5, n° 1, существует векторное подпространство $\mathfrak{d}$ пространства $\mathfrak{n}$, устойчивое относительно эндоморфизмов $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{a}$, для которого $\mathfrak{n} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{d}$. Таким образом, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{d}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{d} = 0$, а следовательно, $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{c}$. Стало быть, $\mathfrak{n}$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{c}$, откуда следует, что $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в алгебре $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{a}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, содержащая подалгебру $\mathfrak{a}$. Так как $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{a})$ и по предположению $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}_0(\mathfrak{a}) = \mathfrak{c}$, то $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{c}$, и, таким образом, $\mathfrak{h}$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{c}$ (равенство своему нормализатору в $\mathfrak{g}$ влечет за собой равенство своему нормализатору в $\mathfrak{c}$).

Предложение 11. *Пусть $\mathfrak{n}$ — нильпотентная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Существует подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, содержащаяся в $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{n})$.*

Обозначим подалгебру $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{n})$ через $\mathfrak{a}$. Так как подалгебра $\mathfrak{n}$ нильпотентна, то $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{a}$. Пусть $x \in \mathfrak{a}$ и $P(x)$ — определитель эндоморфизма пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, индуцированного отображением $\mathrm{ad}\, x$. Обозначим через $\mathfrak{a}'$ множество тех элементов $x \in \mathfrak{a}$, для которых $P(x) \neq 0$. Это открытое подмножество множества $\mathfrak{a}$ в топологии Зарисского. Включения $x \in \mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{g}^0(x) \subset \mathfrak{a}$ эквивалентны. Из предложения 7 (ii) § 1, n° 2, следует, что $\mathfrak{g}^0(y) = \mathfrak{a}$ для некоторого $y \in \mathfrak{n}$. Тогда $y \in \mathfrak{a}'$ и, таким образом, $\mathfrak{a}'$

непусто. Так как множество $\mathfrak{a}'$ открыто, его пересечение с множеством регулярных элементов алгебры $\mathfrak{a}$ тоже непусто. Если элемент x принадлежит этому пересечению, то $\mathfrak{g}^0(x) \subset \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{g}^0(x)$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{a}$; в частности, это нильпотентная подалгебра. Кроме того, предложение 10 (i) из § 1, n° 3, показывает, что подалгебра $\mathfrak{g}^0(x)$ совпадает со своим нормализатором в алгебре $\mathfrak{g}$. Итак, это подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, что и требовалось доказать.

4. *Подалгебры Картана полупростых алгебр Ли*

Теорема 2. *Предположим, что поле k имеет характеристику* 0. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана. Тогда подалгебра $\mathfrak{h}$ коммутативна и все ее элементы полупросты в алгебре* $\mathfrak{g}$ (гл. I, § 6, n° 3, определение 3).

Так как $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, то подалгебра $\mathfrak{h}$ редуктивна (§ 1, предложение 11), но она и нильпотентна, а следовательно, коммутативна. Кроме того, ограничение на подалгебру $\mathfrak{h}$ присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$ полупросто (*там же*), так что элементы подалгебры $\mathfrak{h}$ полупросты в алгебре $\mathfrak{g}$ (*Alg*., chap. VIII, § 5, n° 1).

Следствие 1. *Если $x \in \mathfrak{h}$ и $y \in \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$, то* $[x, y] = \lambda(x)\, y$.

Действительно, поскольку эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ полупрост, то $\mathfrak{g}^{\lambda(x)}(x) = \mathfrak{g}_{\lambda(x)}(x)$.

Следствие 2. *Каждый регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$ полупрост.*

Действительно, каждый такой элемент принадлежит некоторой подалгебре Картана (n° 3, теорема 1 (i)).

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда*

а) *$\mathfrak{h}$ коммутативна;*

б) *если ρ — конечномерное полупростое представление алгебры $\mathfrak{g}$, то элементы множества $\rho(\mathfrak{h})$ полупросты.*

Обозначим через $\mathfrak{c}$ центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а через $\mathfrak{s}$ — ее производную алгебру. При этом $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, следовательно, $\mathfrak{h} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{h}'$, где $\mathfrak{h}'$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{s}$ (предложение 2). По теореме 2 подалгебра $\mathfrak{h}'$ коммутативна, поэтому подалгебра $\mathfrak{h}$ тоже коммутативна. При этом множество $\rho(\mathfrak{h}')$ состоит из полупростых эндоморфизмов, так же как и множество $\rho(\mathfrak{c})$ (гл. I, § 6, n° 5, теорема 4); это доказывает утверждение 8).

§ 3. Теоремы сопряженности

В этом параграфе предполагается, что основное поле k имеет характеристику 0.

1. Элементарные автоморфизмы

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Обозначим через $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ группу ее автоморфизмов. Пусть $x \in \mathfrak{g}$; если эндоморфизм $\mathrm{ad}\, x$ нильпотентен, то $e^{\mathrm{ad}\, x} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (гл. I, § 6, n° 8).

Определение 1. *Элементарным автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется любое произведение конечного числа ее автоморфизмов вида $e^{\mathrm{ad}\, x}$, где эндоморфизм $\mathrm{ad}\, x$ нильпотентен. Группа элементарных автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ обозначается через* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

Если $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, то $ue^{\mathrm{ad}\, x}u^{-1} = e^{\mathrm{ad}\, u(x)}$, следовательно, $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ — нормальная подгруппа в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Если $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то подгруппа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ содержится в группе внутренних автоморфизмов $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ (гл. III, § 6, n° 2, определение 2).

* В общем случае подгруппа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ содержится в компоненте единицы группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. *

Лемма 1. *Пусть V — конечномерное векторное пространство и $\mathfrak{n}$ — некоторая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a} = \mathfrak{gl}(V)$, состоящая из нильпотентных элементов.*

(i) *Отображение $x \mapsto \exp x$ является биективным отображением алгебры $\mathfrak{n}$ на некоторую подгруппу N группы $\mathbf{GL}(V)$, состоящую из унипотентных элементов* (гл. II, § 6, n° 1, *замечание* 4). *При этом $\mathfrak{n} = \log(\exp \mathfrak{n})$. Отображение $f \mapsto f \circ \log$ устанавливает изоморфизм между алгеброй полиномиальных функций на $\mathfrak{n}$ и алгеброй, образованной ограничениями на N полиномиальных функций на пространстве* $\mathrm{End}(V)$.

(ii) *Если $x \in \mathfrak{n}$ и $a \in \mathfrak{a}$, то*

$$(\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} x) \cdot a = (\exp x)\, a\, (\exp(-x)).$$

(iii) *Пусть V' — конечномерное векторное пространство, $\mathfrak{n}'$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V')$, состоящая из нильпотентных элементов, и ρ — гомоморфизм из $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{n}'$. Обозначим через π отображение $\exp x \mapsto \exp \rho(x)$ группы $\exp \mathfrak{n}$ в группу $\exp \mathfrak{n}'$; тогда π — гомоморфизм групп.*

По теореме Энгеля можно таким образом выбрать отождествление пространства V с пространством k^n, что алгебра Ли $\mathfrak{n}$ окажется подалгеброй алгебры $\mathfrak{n}(n, k)$ ($\mathfrak{n}(n, k)$ — подалгебра алгебры Ли $\mathbf{M}_n(k)$, образованная нижними треугольными матрицами с нулевой диагональю). Обозначим через $\mathfrak{n}_s(n, k)$, $s \geqslant 0$, подмножество тех элементов $(x_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(k)$, для которых $x_{ij} = 0$ при $i - j < s$. При этом

$$[\mathfrak{n}_s(n, k), \mathfrak{n}_{s'}(n, k)] \subset \mathfrak{n}_{s+s'}(n, k)$$

(гл. II, § 4, n° 6, *замечание*), и ряд Хаусдорфа определяет полиномиальное отображение $(a, b) \mapsto H(a, b)$ произведения $\mathfrak{n}(n, k) \times \times \mathfrak{n}(n, k)$ в $\mathfrak{n}(n, k)$ (гл. II, § 6, n° 5, *замечание* 3). Это отображение, рассматриваемое как закон композиции, снабжает множество $\mathfrak{n}(n, k)$ структурой группы (гл. II, § 6, n° 5, предложение 4). Вследствие замечания 4 из гл. II, § 6, n° 1, отображение $x \mapsto \exp x$ пространства $\mathfrak{n}(n, k)$ на подмножество $1 + \mathfrak{n}(n, k)$ и отображение $y \mapsto \log y$ множества $1 + \mathfrak{n}(n, k)$ на $\mathfrak{n}(n, k)$ биективны, взаимно обратны и полиномиальны. Ввиду предложения 3 из гл. II, § 6, n° 5, эти отображения будут изоморфизмами групп, если ввести на множестве $\mathfrak{n}(n, k)$ закон умножения $(a, b) \mapsto H(a, b)$, а множество $1 + \mathfrak{n}(n, k)$ рассматривать как подгруппу группы $\mathbf{GL}_n(k)$. Из этого легко получить утверждения (i) и (iii) нашей леммы. Пусть $x \in \mathfrak{n}$. Обозначим через L_x, R_x отображения $u \mapsto xu$, $u \mapsto ux$ алгебры $\mathfrak{a}$ в себя. Они перестановочны и нильпотентны. Так как $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x = L_x - R_x$, то при любом $a \in \mathfrak{a}$

$$(\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x)\, a = (\exp (L_x - R_x))\, a = (\exp L_x)(\exp R_{-x})\, a =$$
$$= \sum_{i,\, j \geqslant 0} \frac{L_x^i}{i!} \frac{R_{-x}^j}{j!}\, a = (\exp x)\, a\, (\exp(-x)). \qquad (1)$$

В обозначениях леммы 1 говорят, что π — линейное представление группы $\exp \mathfrak{n}$, *согласованное* с данным представлением ρ алгебры Ли $\mathfrak{n}$ в пространстве V'. Если k есть $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или полное ультраметрическое недискретное поле, то $\rho = L(\pi)$ в силу свойств экспоненциального отображения (гл. III, § 4, n° 4, следствие 2 предложения 8).

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а $\mathfrak{n}$ — такая ее подалгебра, что эндоморфизм* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ *нильпотентен при любом* $x \in \mathfrak{n}$. *Тогда* $e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}}$ *— подгруппа группы* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

Это следует из леммы 1 (i).

В частности, если взять в качестве $\mathfrak{n}$ нильпотентный радикал алгебры $\mathfrak{g}$, то подгруппой $e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}}$ будет группа *специальных автоморфизмов* алгебры $\mathfrak{g}$ (гл. I, § 6, n° 8, определение 6).

Замечания. 1) Пусть V — конечномерное векторное пространство, $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a} = \mathfrak{gl}(V)$ и x — элемент алгебры $\mathfrak{g}$, для которого эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ нильпотентен. Тогда существует такой нильпотентный элемент n алгебры Ли $\mathfrak{a}$, что эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} n$ продолжает эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$. Действительно, пусть s и n — полупростая и нильпотентная компоненты элемента x. При этом $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} s$ и $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} n$ будут полупростой и нильпотентной компонентами эндоморфизма $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} x$ (гл. I, § 5, n° 4, лемма 2). Подпространство $\mathfrak{g}$ устойчиво относительно эндоморфизмов $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} s$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} n$, и эндоморфизмы $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} s \mid \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} n \mid \mathfrak{g}$ служат полупростой и нильпотентной компонентами эндоморфизма $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$. Таким образом, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} n \mid \mathfrak{g}$, что и доказывает наше утверждение. Вследствие утверждения (ii) леммы 1 мы получаем, что любой элементарный автоморфизм подалгебры $\mathfrak{g}$ продолжается до некоторого автоморфизма алгебры $\mathfrak{a}$, имеющего вид $u \mapsto mum^{-1}$, где $m \in \mathbf{GL}(V)$.

2) Пусть V — конечномерное векторное пространство. Для любого элемента $g \in \mathbf{SL}(V)$ обозначим через $\varphi(g)$ автоморфизм $x \mapsto gxg^{-1}$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Тогда

$$\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{gl}(V)) = \varphi(\mathbf{SL}(V)).$$

Действительно, вследствие формулы (1) множество $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{gl}(V))$ содержится в множестве $\varphi(\mathbf{SL}(V))$. Обратное включение следует из *Alg.*, chap. III, § 8, n° 9, proposition 17, и формулы (1). Аналогичным образом можно показать, что множество автоморфизмов, являющихся ограничениями на подпространство $\mathfrak{sl}(V)$ отображений из множества $\varphi(\mathbf{SL}(V))$, совпадает с множеством $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{sl}(V))$.

2. *Сопряженность подалгебр Картана*

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — некоторая ее нильпотентная подалгебра и R — множество ненулевых весов подалгебры $\mathfrak{h}$ в пространстве $\mathfrak{g}$, т. е. множество таких линейных форм $\lambda \neq 0$ на $\mathfrak{h}$, для которых $\mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h}) \neq 0$ (см. предложение 9 (iii), n° 3, § 1). Предположим, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \oplus \sum_{\lambda \in R} \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h});$$

это всегда имеет место, если основное поле k алгебраически замкнуто (§ 1, n° 3, предложение 9 (i)). Если $\lambda \in R$ и $x \in \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$, то эндоморфизм $\mathrm{ad}\, x$ нильпотентен (§ 1, n° 3, предложение 10 (iv)). Обозначим через $E(\mathfrak{h})$ подгруппу группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, порожденную отображениями $e^{\mathrm{ad}\, x}$, где элемент x удовлетворяет приведенному выше условию. Если $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, то, как легко видеть, $uE(\mathfrak{h})u^{-1} = E(u(\mathfrak{h}))$.

Лемма 2. (i) *Обозначим через* $\mathfrak{h}_r$ *множество элементов* $x \in \mathfrak{h}$, *для которых* $\mathfrak{g}^0(x) = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, *т. е. множество таких элементов*

$x \in \mathfrak{h}$, что $\lambda(x) \neq 0$ при всех $\lambda \in R$. Множество $\mathfrak{h}_r$ открыто и всюду плотно в $\mathfrak{h}$ относительно топологии Зарисского.

(ii) *Пусть $R = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$, где все элементы λ_i различны. Обозначим через F отображение пространства $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) \times \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h}) \times \ldots \times \mathfrak{g}^{\lambda_p}(\mathfrak{h})$ в пространство $\mathfrak{g}$, определенное формулой*

$$F(h, x_1, \ldots, x_p) = e^{\operatorname{ad} x_1} \ldots e^{\operatorname{ad} x_p} h.$$

Тогда F является доминантным полиномиальным отображением (дополнение I).

Утверждение (i) очевидно. Докажем утверждение (ii). Пусть $n = \dim \mathfrak{g}$. Если $\lambda \in R$ и $x \in \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$, то $(\operatorname{ad} x)^n = 0$. Таким образом, отображение $(y, x) \mapsto e^{\operatorname{ad} x} y$ пространства $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ в $\mathfrak{g}$ полиномиально. Отсюда по индукции мы получаем, что отображение F полиномиально. Выберем элемент $h_0 \in \mathfrak{h}_r$; пусть DF — линейное отображение, касательное к отображению F в точке $(h_0, 0, \ldots, 0)$. Докажем, что DF сюръективно. Если $h \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, то $F(h_0 + h, 0, \ldots, 0) = h_0 + h$, следовательно, $DF(h, 0, \ldots, 0) = h$ и $\operatorname{Im}(DF) \supset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$. Далее, если $x \in \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h})$, то

$$F(h_0, x, 0, \ldots, 0) = e^{\operatorname{ad} x} h_0 = h_0 + (\operatorname{ad} x) . h_0 + \frac{(\operatorname{ad} x)^2}{2!} h_0 + \ldots;$$

поэтому $DF(0, x, 0, \ldots, 0) = (\operatorname{ad} x) . h_0 = -(\operatorname{ad} h_0) x$. Так как эндоморфизм $\operatorname{ad} h_0$ индуцирует автоморфизм пространства $\mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h})$, то $\operatorname{Im}(DF) \supset \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h})$. Таким же образом получаем, что

$$\operatorname{Im}(DF) \supset \mathfrak{g}^{\lambda_i}(\mathfrak{h})$$

для всех i; отсюда следует сюръективность отображения DF. Из предложения 4 дополнения I следует теперь, что отображение F доминантное.

Предложение 2. *Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$ — ее подалгебры Картана. Существуют такие элементы $u \in E(\mathfrak{h})$ и $u' \in E(\mathfrak{h}')$, что $u(\mathfrak{h}) = u'(\mathfrak{h}')$.*

Будем использовать обозначения леммы 2. Так как $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'_0$ — подалгебры Картана, то $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$. Из леммы 2 и предложения 3 дополнения I следует, что множества $E(\mathfrak{h})\mathfrak{h}_r$ и $E(\mathfrak{h}')\mathfrak{h}'_r$ содержат открытые и всюду плотные в пространстве $\mathfrak{g}$ относительно топологии Зарисского подмножества. Поэтому $E(\mathfrak{h})\mathfrak{h}_r \cap E(\mathfrak{h}')\mathfrak{h}'_r \neq \varnothing$, т. е. существуют такие элементы $u \in E(\mathfrak{h})$, $u' \in E(\mathfrak{h}')$, $h \in \mathfrak{h}_r$, $h' \in \mathfrak{h}'_r$, что $u(h) = u'(h')$. Тогда

$$u(\mathfrak{h}) = u(\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})) = \mathfrak{g}^0(u(h)) = \mathfrak{g}^0(u'(h')) = u'(\mathfrak{h}').$$

Следствие. *Имеет место равенство* $E(\mathfrak{h}) = E(\mathfrak{h}')$.

Пусть u, u' — элементы, существование которых утверждает предложение 2. Тогда

$$E(\mathfrak{h}) = uE(\mathfrak{h})u^{-1} = E(u(\mathfrak{h})) = E(u'(\mathfrak{h}')) = u'E(\mathfrak{h}')u'^{-1} = E(\mathfrak{h}'),$$

что доказывает следствие.

На основании этого результата мы будем в случае, если поле k алгебраически замкнуто, обозначать группу $E(\mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h}$ — некоторая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, просто через E.

В общем случае $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \neq E$ (например, если алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то группа E состоит из одного элемента, в то время как для некоммутативной алгебры $\mathfrak{g}$ существуют нетривиальные элементарные автоморфизмы). Однако можно доказать (гл. VIII, § 10, упражнение 5), что для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет место равенство $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) = E$.

Теорема 1. *Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Группа E является нормальной подгруппой группы* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *и действует на множестве подалгебр Картана транзитивно.*

Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ и $v \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Так как

$$vE(\mathfrak{h})v^{-1} = E(v(\mathfrak{h})) = E(\mathfrak{h}),$$

то $E(\mathfrak{h}) = E$ — нормальная подгруппа в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Если $\mathfrak{h}'$ — другая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, то в обозначениях предложения 2 $u'^{-1}u(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$ и $u'^{-1}u \in E$.

3. Приложения теоремы о сопряженности подалгебр Картана

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли.*

(i) *Все подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$ имеют одну и ту же размерность, равную* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})$, *и один и тот же класс нильпотентности.*

(ii) *Для того чтобы элемент $x \in \mathfrak{g}$ был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{g}^0(x)$ была подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$, и таким образом можно получить все подалгебры Картана.*

Доказывая утверждение (i), мы можем предполагать, что поле k алгебраически замкнуто (см. § 2, предложения 3 и 6). Тогда оно вытекает из теоремы 1 n° 2. Утверждение (ii) следует из (i) и пп. (i) и (iv) теоремы 1 из § 2.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{g}'$ — ее подалгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *подалгебра $\mathfrak{g}'$ содержит некоторый регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$ и* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = \mathrm{rg}(\mathfrak{g}')$;

(ii) *подалгебра $\mathfrak{g}'$ содержит некоторую подалгебру Картана алгебры $\mathfrak{g}$;*

(iii) *каждая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}'$ есть также подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что $\operatorname{rg}(\mathfrak{g}) = \operatorname{rg}(\mathfrak{g}')$ и элемент $x \in \mathfrak{g}'$ регулярен в алгебре $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}'^0(x) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$. Тогда

$$\operatorname{rg}(\mathfrak{g}') \leqslant \dim \mathfrak{h}' \leqslant \dim \mathfrak{h} = \operatorname{rg}(\mathfrak{g}) = \operatorname{rg}(\mathfrak{g}').$$

Следовательно, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}'$, что и доказывает утверждение (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Предположим, что алгебра $\mathfrak{g}'$ содержит подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{h}_1$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}'$. При доказательстве того, что $\mathfrak{h}_1$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, можно предполагать, что основное поле k алгебраически замкнуто. Пусть $E(\mathfrak{h})$ и $E'(\mathfrak{h})$ — группы автоморфизмов алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ соответственно, ассоциированные с $\mathfrak{h}$ (n° 2). По теореме 1 существует элемент $f \in E'(\mathfrak{h})$, для которого $f(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1$. Однако каждый автоморфизм из группы $E'(\mathfrak{h})$ индуцирован некоторым автоморфизмом из группы $E(\mathfrak{h})$. Действительно, это утверждение достаточно проверить для автоморфизмов вида $e^{\operatorname{ad} x}$, где $x \in \mathfrak{g}'^{\lambda}(\mathfrak{h})$, $\lambda \neq 0$, а в этом случае оно следует из включения $\mathfrak{g}'^{\lambda}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}^{\lambda}(\mathfrak{h})$. Значит, $\mathfrak{h}_1$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что условие (iii) выполняется. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}'$. Так как подалгебра $\mathfrak{h}$ есть одновременно подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, то она содержит элемент, регулярный в этой последней (теорема 2 (ii)); при этом $\operatorname{rg}(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{h}) = \operatorname{rg}(\mathfrak{g}')$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{h}$ — нильпотентная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда подалгебра $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ обладает свойствами* (i), (ii) *и* (iii) *предложения* 3.

Действительно, из предложения 11 § 2, n° 3, следует, что подалгебра $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ обладает свойством (ii).

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли ранга l, c — класс нильпотентности ее подалгебр Картана и $x \in \mathfrak{g}$. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует подалгебра размерности l и класса нильпотентности $\leqslant c$, содержащая элемент x.*

Пусть T — переменная, $k' = k(T)$ и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k'$. Если $\mathfrak{h}$ — некоторая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h} \otimes_k k'$ есть подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}'$. Таким образом, ранг алгебры $\mathfrak{g}'$ равен l и класс нильпотентности ее подалгебр Картана равен c.

Выберем регулярный элемент y алгебры $\mathfrak{g}$. Используя обозначения n° 2 § 2, получаем, что $a_l(y) \neq 0$. Будем обозначать продолжение полиномиальной функции a_l на пространство $\mathfrak{g}'$ тоже через a_l. Рассмотрим элемент $a_l(x + Ty)$ кольца многочленов $k[T]$. Его старшим коэффициентом будет $a_l(y)$. Поэтому элемент $x+Ty$ регулярен в алгебре $\mathfrak{g}'$. Обозначим через $\mathfrak{h}'$ нильпространство эндоморфизма $\mathrm{ad}(x+Ty)$ в алгебре $\mathfrak{g}'$. Тогда $\dim \mathfrak{h}'=l$, и класс нильпотентности алгебры $\mathfrak{h}'$ равен c. Пусть $\mathfrak{k}=\mathfrak{h}'\cap(\mathfrak{g}\otimes_k k[T])$. Отметим, что $\mathfrak{k}\otimes_{k[T]}k(T)=\mathfrak{h}'$.

Рассмотрим гомоморфизм φ кольца $k[T]$ на поле k, для которого $\varphi(T)=0$, и пусть ψ — гомоморфизм $1\otimes\varphi$ алгебры $\mathfrak{g}\otimes_k k[T]$ на алгебру $\mathfrak{g}$. Ясно, что $\psi(\mathfrak{k})$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ класса нильпотентности $\leqslant c$, содержащая элемент $\psi(x+Ty)=x$.

Свободный $k[T]$-модуль $\mathfrak{g}\otimes_k k[T]$ содержит подмодуль $\mathfrak{k}$ ранга l, причем фактормодуль $(\mathfrak{g}\otimes_k k[T])/\mathfrak{k}$ является модулем без кручения. Следовательно, подмодуль $\mathfrak{k}$ выделяется в модуле $\mathfrak{g}\otimes_k k[T]$ прямым слагаемым (см. *Алг.*, гл. VII, § 4, n° 2, теорема 1), и $\dim_k\psi(\mathfrak{k})=l$, что и требовалось доказать.

4. *Сопряженность подалгебр Картана в разрешимой алгебре Ли*

Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли. Обозначим через $\mathscr{C}^\infty(\mathfrak{g})$ пересечение членов нижнего центрального ряда алгебры $\mathfrak{g}$ (гл. I, § 1, n° 5). Оно является характеристическим идеалом в $\mathfrak{g}$, причем это наименьший среди идеалов $\mathfrak{m}$ алгебры $\mathfrak{g}$, для которых факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$ нильпотентна. Так как $\mathscr{C}^\infty(\mathfrak{g})\subset[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, то $\mathscr{C}^\infty(\mathfrak{g})$ — нильпотентный идеал в алгебре $\mathfrak{g}$ (гл. I, § 5, n° 3, следствие 5 теоремы 1). В силу предложения 1 из n° 1 множество автоморфизмов $e^{\mathrm{ad}\,x}$, где $x\in\mathscr{C}^\infty(\mathfrak{g})$, составляет подгруппу группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, содержащуюся в подгруппе специальных автоморфизмов (гл. I, § 6, n° 8, определение 6).

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ — ее подалгебры Картана. Тогда существует элемент $x\in\mathscr{C}^\infty(\mathfrak{g})$, для которого $e^{\mathrm{ad}\,x}\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'$.*

Проведем индукцию по $\dim\mathfrak{g}$. Случай $\mathfrak{g}=0$ тривиален. Пусть $\mathfrak{n}$ — ненулевой минимальный коммутативный идеал алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\varphi\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ — канонический морфизм. Тогда $\varphi(\mathscr{C}^\infty(\mathfrak{g}))=$ $=\mathscr{C}^\infty(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})$ (гл. I, § 1, n° 5, предложение 4). Ввиду того что $\varphi(\mathfrak{h})$ и $\varphi(\mathfrak{h}')$ — подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ (§ 2, n° 1, следствие 2 предложения 4), по предположению индукции существует такой элемент $x\in\mathscr{C}^\infty(\mathfrak{g})$, что $e^{\mathrm{ad}\,\varphi(x)}\varphi(\mathfrak{h})=\varphi(\mathfrak{h}')$. Заменяя $\mathfrak{h}$ на $e^{\mathrm{ad}\,x}\mathfrak{h}$, можно далее предполагать, что $\varphi(\mathfrak{h})=\varphi(\mathfrak{h}')$, т. е.

$$\mathfrak{h}+\mathfrak{n}=\mathfrak{h}'+\mathfrak{n}.$$

Следовательно, подалгебры $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$ являются подалгебрами Картана алгебры $\mathfrak{h}+\mathfrak{n}$. Если $\mathfrak{h}+\mathfrak{n}\neq\mathfrak{g}$, то доказываемое утверждение вытекает из предположения индукции. Поэтому мы предположим теперь, что $\mathfrak{h}+\mathfrak{n}=\mathfrak{h}'+\mathfrak{n}=\mathfrak{g}$.

Так как идеал $\mathfrak{n}$ минимален, то или $[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] = \{0\}$, или $[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$. Если имеет место равенство $[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] = \{0\}$, то $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{h}'$ (§ 2, n° 1, предложение 5), поэтому $\mathfrak{h} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{n} = \mathfrak{h}'$. Остается рассмотреть случай $[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$. Тогда $\mathfrak{n} \subset \mathscr{C}^{\infty}(\mathfrak{g})$, и идеал $\mathfrak{n}$ является простым $\mathfrak{g}$-модулем. Так как $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ и $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \{0\}$, то идеал $\mathfrak{n}$ — простой $\mathfrak{h}$-модуль. Если $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} \neq \{0\}$, то $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{h}$, а значит, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$. Предположим, что $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n} = \{0\}$. В этом случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{n}$, так как пространства $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$ имеют одинаковую размерность.

Для каждого элемента $x \in \mathfrak{h}$ обозначим через $f(x)$ тот единственный элемент идеала $\mathfrak{n}$, для которого $x - f(x) \in \mathfrak{h}'$. В этих обозначениях, если $x, y \in \mathfrak{h}$, то

$$[x, y] - [x, f(y)] - [f(x), y] = [x - f(x), y - f(y)] \in \mathfrak{h}'.$$

Поэтому $f([x, y]) = [x, f(y)] + [f(x), y]$. По следствию предложения 9 § 1, n° 3, существует такой элемент $a \in \mathfrak{n}$, что $f(x) = [x, a]$ для всех $x \in \mathfrak{h}$. Тогда $(\operatorname{ad} a)^2(\mathfrak{g}) \subset (\operatorname{ad} a)(\mathfrak{n}) = 0$, так что

$$e^{\operatorname{ad} a}x = x + [a, x] = x - f(x)$$

для всех $x \in \mathfrak{h}$. Таким образом, $e^{\operatorname{ad} a}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$ и $a \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathfrak{g})$. Тем самым теорема доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли,* $\mathfrak{r}$ — *ее радикал,* φ — *канонический гомоморфизм алгебры* $\mathfrak{g}$ *на факторалгебру* $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ *и* v — *некоторый элементарный автоморфизм алгебры* $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. *Тогда существует такой элементарный автоморфизм* u *алгебры* $\mathfrak{g}$, *что выполняется равенство* $\varphi \circ u = v \circ \varphi$.

Можно предположить, что автоморфизм v имеет вид $e^{\operatorname{ad} b}$, где $b \in \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ и эндоморфизм $\operatorname{ad} b$ нильпотентен. Пусть $\mathfrak{s}$ — подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{g}$ (гл. I, § 6, n° 8, определение 7) и a — такой элемент подалгебры $\mathfrak{s}$, что $\varphi(a) = b$. Так как эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{s}} a$ нильпотентен, то эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} a$ тоже нильпотентен (гл. I, § 6, n° 3, следствие предложения 3) и $u = e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} a}$ — элементарный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, для которого $\varphi \circ u = v \circ \varphi$.

Предложение 5. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли,* $\mathfrak{r}$ — *ее радикал,* $\mathfrak{h}$ *и* $\mathfrak{h}'$ — *ее подалгебры Картана и* φ — *канонический гомоморфизм алгебры* $\mathfrak{g}$ *на факторалгебру* $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *подалгебры* $\mathfrak{h}$ *и* $\mathfrak{h}'$ *сопряжены относительно группы элементарных автоморфизмов алгебры* $\mathfrak{g}$;

(ii) *подалгебры* $\varphi(\mathfrak{h})$ *и* $\varphi(\mathfrak{h}')$ *сопряжены относительно группы элементарных автоморфизмов алгебры* $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Очевидно.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что условие (ii) справедливо, и докажем (i). Вследствие леммы 3 можно предполагать, что $\varphi(\mathfrak{h}) =$

$=\varphi(\mathfrak{h}')$. Пусть $\mathfrak{k}=\mathfrak{h}+\mathfrak{r}=\mathfrak{h}'+\mathfrak{r}$ — разрешимая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. При этом подалгебры $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$ являются подалгебрами Картана алгебры $\mathfrak{k}$ и существует элемент $x\in\mathscr{C}^\infty(\mathfrak{k})$, для которого $e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{k}}x}\mathfrak{h}=\mathfrak{h}'$ (теорема 3). Так как алгебра $\mathfrak{k}/\mathfrak{r}$ нильпотентна, то $\mathscr{C}^\infty(\mathfrak{k})\subset\mathfrak{r}$. С другой стороны, $\mathscr{C}^\infty(\mathfrak{k})\subset[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]\subset[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, поэтому $x\in\mathfrak{r}\cap[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, и по теореме 1 из гл. I, § 5, n° 3, эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}x$ будет нильпотентным. Таким образом, элементарный автоморфизм $e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}x}$ алгебры $\mathfrak{g}$ переводит подалгебру $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{h}'$.

5. *Одно предложение о группах Ли*

Предложение 6. *Предположим, что основное поле k — это поле* **R**, **C** *или полное недискретное ультраметрическое поле характеристики* 0. *Пусть G — группа Ли конечной размерности над полем k, e — ее нейтральный элемент, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}_r$ — множество регулярных элементов алгебры $\mathfrak{g}$, принадлежащих подалгебре $\mathfrak{h}$.*

(i) *Пусть $\mathfrak{s}$ — векторное подпространство пространства $\mathfrak{g}$, дополнительное к $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{s}_0$ — окрестность нуля в подпространстве $\mathfrak{s}$, на которой определено экспоненциальное отображение, и $h_0\in\mathfrak{h}_r$. Тогда отображение $(s, h)\mapsto F(s, h)=(\exp\operatorname{ad}s).h$ прямого произведения $\mathfrak{s}_0\times\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ этально в точке $(0, h_0)$.*

(ii) *Отображение $(g, h)\mapsto F'(g, h)=(\operatorname{Ad}g).h$ прямого произведения $G\times\mathfrak{h}_r$ в $\mathfrak{g}$ является субмерсией*[1]*. В частности, образ Ω этого отображения — открытое множество. Для любого элемента $x\in\Omega$ подпространство $\mathfrak{g}^0(x)$ — это подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, сопряженная с подалгеброй $\mathfrak{h}$ относительно группы* $\operatorname{Ad}(G)$.

(iii) *Пусть $h_0\in\mathfrak{h}_r$. Если U — произвольная окрестность элемента e в группе G, то множество $\bigcup_{a\in U}(\operatorname{Ad}a)(\mathfrak{h}_r)$ — окрестность элемента h_0 в $\mathfrak{g}$.*

Будем использовать обозначения h_0 и $\mathfrak{s}$ утверждения (i). Пусть T — касательное линейное отображение к отображению F в точке $(0, h_0)$. Так как $F(0, h)=h$ при всех $h\in\mathfrak{h}$, то $T(0, h)=h$ при всех $h\in\mathfrak{h}$. С другой стороны, если окрестность $\mathfrak{s}_0$ достаточно мала, то касательным к отображению $s\mapsto\exp\operatorname{ad}s$ окрестности $\mathfrak{s}_0$ в пространство $\operatorname{End}(\mathfrak{g})$ в точке 0 будет отображение $s\mapsto\operatorname{ad}s$ пространства $\mathfrak{s}$ в пространство $\operatorname{End}(\mathfrak{g})$. Следовательно, $T(s, 0)=[s, h_0]$ для всех $s\in\mathfrak{s}$. Таким образом, отображение пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в себя, полученное из отображения $\operatorname{ad}h_0$ факторизацией, биективно. Отсюда следует, что отображение T биективно; тем самым утверждение (i) доказано. Теперь из того факта, что $\exp\operatorname{ad}s=\operatorname{Ad}\exp s$ для всех $s\in\mathfrak{s}$, достаточно близких к 0,

[1]) См. *Мн. Св. рез.*, 5.9.1. — *Прим. ред.*

следуют утверждение (iii) и первая часть утверждения (ii). Так как любой элемент $x \in \Omega$ имеет вид $(\mathrm{Ad}\, a)(h)$ для некоторых $a \in G$ и $h \in \mathfrak{h}_r$, то $\mathfrak{g}^0(x) = (\mathrm{Ad}\, a)(\mathfrak{g}^0(h)) = (\mathrm{Ad}\, a)(\mathfrak{h})$, и это подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, сопряженная с $\mathfrak{h}$ относительно группы $\mathrm{Ad}(G)$.

§ 4. Регулярные элементы группы Ли

В этом параграфе в пп° 1, 2 *и* 3 *предполагается, что поле k — это* **R**, **C** *или полное недискретное ультраметрическое поле характеристики нуль. Через G обозначается группа Ли конечной размерности над полем k, через $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли и через e — ее нейтральный элемент. Мы будем обозначать через $\mathfrak{g}^1(a)$, где $a \in G$, нильпространство эндоморфизма* $\mathrm{Ad}(a) - 1$, *или, другими словами, пространство* $\mathfrak{g}^1(\mathrm{Ad}(a))$ (см. § 1, n° 1).

1. Элементы, регулярные относительно линейного представления

Лемма 1. *Пусть M — аналитическое многообразие над полем k и $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = 1)$ — последовательность аналитических функций на многообразии M. Обозначим через $r_a(x)$, где $x \in M$, верхнюю грань таких чисел $i \in [0, n]$, что $a_j(x) = 0$ при $j < i$, а через $r_a^0(x)$ — верхнюю грань таких чисел $i \in [0, n]$, что a_j равна* 0 *в некоторой окрестности точки x при $j < i$.*

(i) *Функция r_a полунепрерывна сверху.*

(ii) $r_a^0(x) = \liminf_{y \to x} r_a(y)$ *для всех $x \in M$.*

(iii) *Функция r_a^0 локально постоянна.*

(iv) *Множество точек $x \in M$, таких, что $r_a^0(x) = r_a(x)$, совпадает с множеством тех точек многообразия M, в окрестности которых функция r_a постоянна. Это множество открыто и всюду плотно в M. Если $k = \mathbf{C}$ и многообразие M связно и конечномерно, то это множество связно.*

(i) Если $r_a(x) = i$, то $a_i(x) \neq 0$. Следовательно, для всех точек y из некоторой окрестности точки x тоже $a_i(y) \neq 0$, и $r_a(y) \leqslant i$.

(ii) Если $r_a^0(x) = i$, то функции $a_0, \ldots, a_{i-1}$ равны нулю в некоторой окрестности точки x, и, таким образом, для всех точек y из этой окрестности выполняется неравенство $r_a(y) \geqslant i$. Поэтому $\liminf_{y \to x} r_a(y) \geqslant i$. Однако любая окрестность точки x содержит некоторую точку y, для которой $a_i(y) \neq 0$ и, следовательно, $r_a(y) \leqslant i$. В результате мы получаем равенство $\liminf_{y \to x} r_a(y) = i$.

(iii) Пусть $i = r_a^0(x)$, и пусть V — такая окрестность точки x, что $a_j(y) = 0$ для всех $y \in V$ и любого $j < i$. Как мы предположили, $x \in (M - Z)$, где Z обозначает множество тех точек многообразия M, в окрестности которых функция a_i равна нулю. Так как множество Z замкнуто в M (*Мн. Св. рез.*, 5.3.5), то множество $V \cap (M - Z)$ — окрестность точки x. Для любой точки y из этой окрестности $r_a^0(y) = i$.

(iv) Функция $r_a - r_a^0$ полунепрерывна сверху, и ее значение в любой точке $\geqslant 0$. Если $r_a(x) = r_a^0(x)$, то функция $r_a - r_a^0$ равна нулю в некоторой окрестности точки x; ввиду утверждения (iii) это означает, что функция r_a постоянна в некоторой окрестности точки x. Обратно, если функция r_a постоянна в окрестности точки x, то вследствие утверждения (ii) имеет место равенство $r_a^0(x) = r_a(x)$. Таким образом, множество Ω тех точек $x \in M$, для которых $r_a^0(x) = r_a(x)$, открыто в M. Если $r_a^0(x) < r_a(x)$ для какой-либо точки $x \in M$, то любая окрестность точки x содержит такую точку y, для которой $r_a(y) < r_a(x)$, причем $r_a^0(y) = r_a^0(x)$. Следовательно, в любой окрестности точки x существует такая точка y, что

$$r_a(y) - r_a^0(y) < r_a(x) - r_a^0(x).$$

Таким образом, мы получаем, что множество Ω всюду плотно в M.

Если многообразие M связно и значение функции r_a^0 на M есть p, то множество Ω состоит из тех точек $x \in M$, для которых $a_p(x) \neq 0$. Если $k = \mathbf{C}$, то связность множества Ω следует из леммы 3 дополнения II.

Пусть ρ — аналитическое линейное представление группы G в векторном пространстве V конечной размерности n над полем k. Рассмотрим

$$\det(T - \rho(g) + 1) = a_0(g) + a_1(g)T + \ldots + a_{n-1}(g)T^{n-1} + T^n.$$

Функции r_a и r_a^0, построенные по последовательности $(a_0, a_1, \ldots \ldots, a_{n-1}, 1)$, мы будем обозначать через r_ρ и r_ρ^0 соответственно. При этом для любого элемента $g \in G$ справедливы равенства

$$r_\rho(g) = \dim V^1(\rho(g)),$$
$$r_\rho^0(g) = \liminf_{g' \to g} \dim V^1(\rho(g')).$$

Лемма 2. *Пусть* $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ — *точная последовательность G-модулей, определяющих аналитические линейные представления ρ', ρ и ρ'' группы G соответственно. Тогда*

$$r_\rho = r_{\rho'} + r_{\rho''} \quad \text{и} \quad r_\rho^0 = r_{\rho'}^0 + r_{\rho''}^0.$$

Действительно, каждый элемент $g \in G$ определяет (§ 1, n° 1, следствие 3 теоремы 1) точную последовательность векторных пространств

$$0 \to (V')^1(\rho'(g)) \to V^1(\rho(g)) \to (V'')^1(\rho''(g)) \to 0.$$

Это доказывает первую часть утверждения. Вторая часть следует из первой, так как по лемме 1 (iv) на открытом всюду плотном подмножестве в G имеем $r^0_\rho = r_\rho$, $r^0_{\rho'} = r_{\rho'}$ и $r^0_{\rho''} = r_{\rho''}$.

Определение 1. *Элемент $g \in G$ называется регулярным относительно линейного представления ρ, если $r_\rho(g) = r^0_\rho(g)$.*

Предложение 1. *Точки группы G, регулярные относительно линейного аналитического представления ρ этой группы, — это точки, в окрестности которых функция r_ρ постоянна. Они образуют открытое всюду плотное подмножество в группе G. Если $k = \mathbf{C}$ и группа G связна, то множество регулярных элементов относительно представления ρ связно.*

Это следует из леммы 1 (iv).

Замечание. Пусть G^* — открытая подгруппа группы G. Для того чтобы элемент $a \in G^*$ был регулярным относительно линейного представления ρ группы G, необходимо и достаточно, чтобы он был регулярным элементом группы G^* относительно линейного представления $\rho | G^*$.

2. Регулярные элементы группы Ли

Определение 2. *Элемент группы G называется регулярным, если он является регулярным относительно присоединенного представления.*

Другими словами (предложение 1), элемент $g \in G$ регулярен, если для любого элемента g' из некоторой окрестности элемента g в группе G размерность нильпространства эндоморфизма $\mathrm{Ad}(g') - 1$ равна размерности нильпространства эндоморфизма $\mathrm{Ad}(g) - 1$.

Предложение 2. *Пусть G' — группа Ли конечной размерности над полем k и f — сюръективный морфизм группы G на G'. Образ при отображении f регулярного элемента группы G является регулярным элементом группы G'. Если ядро морфизма f содержится в центре группы G, то для регулярности элемента $g \in G$ необходимо и достаточно, чтобы элемент $f(g)$ был регулярным.*

Пусть $\mathfrak{g}'$ — алгебра Ли группы G' и $\mathfrak{h}$ — ядро морфизма $Tf | \mathfrak{g}$ это идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть ρ — линейное представление группы G в пространстве $\mathfrak{h}$, заданное формулой $\rho(g) = \mathrm{Ad}\, g \mid \mathfrak{h}$ для $g \in G$, и пусть $\mathrm{Ad} \circ f$ — линейное представление группы G в $\mathfrak{g}'$, равное композиции морфизма f и присоединенного представления группы G'. Эти линейные представления позволяют определить точную последовательность G-модулей $0 \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to \to \mathfrak{g}' \to 0$. По лемме 2 $r_{\mathrm{Ad}} = r_\rho + r_{\mathrm{Ad}\circ f}$ и $r^0_{\mathrm{Ad}} = r^0_\rho + r^0_{\mathrm{Ad}\circ f}$. Так как $r_{\mathrm{Ad}\circ f} = r_{\mathrm{Ad}} \circ f$ и f — открытое отображение, то $r^0_{\mathrm{Ad}\circ f} = r^0_{\mathrm{Ad}} \circ f$. Следовательно,

$$r_{\mathrm{Ad}} - r^0_{\mathrm{Ad}} = r_\rho - r^0_\rho + (r_{\mathrm{Ad}} - r^0_{\mathrm{Ad}}) \circ f.$$

Если элемент g регулярен, то $(r_{\mathrm{Ad}} - r^0_{\mathrm{Ad}})(f(g)) = 0$, и это показывает, что элемент $f(g)$ регулярен. Если ядро морфизма f лежит в центре группы G, то

$$r_\rho(g) = r^0_\rho(g) = \dim \mathfrak{h}$$

для всех $g \in G$. Таким образом, если элемент $f(g)$ регулярен, то $r_{\mathrm{Ad}}(g) = r^0_{\mathrm{Ad}}(g)$, т. е. элемент g тоже регулярен.

Предложение 3. *Пусть G_1 и G_2 — группы Ли конечной размерности над полем k. Для того чтобы элемент (g_1, g_2) группы $G_1 \times G_2$ был регулярен, необходимо и достаточно, чтобы были регулярны элементы g_1, g_2 групп G_1 и G_2 соответственно.*

Указанное условие необходимо ввиду предложения 2. Покажем его достаточность. Если $g = (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, то $r_{\mathrm{Ad}}(g) = = r_{\mathrm{Ad}}(g_1) + r_{\mathrm{Ad}}(g_2)$. Используя лемму 1 (ii), мы получаем, что $r^0_{\mathrm{Ad}}(g) = r^0_{\mathrm{Ad}}(g_1) + r^0_{\mathrm{Ad}}(g_2)$. Если элементы g_1 и g_2 регулярны, то $r^0_{\mathrm{Ad}}(g_1) = r_{\mathrm{Ad}}(g_1)$ и $r^0_{\mathrm{Ad}}(g_2) = r_{\mathrm{Ad}}(g_2)$, поэтому $r^0_{\mathrm{Ad}}(g) = r_{\mathrm{Ad}}(g)$, что означает регулярность элемента g.

Лемма 3. Пусть $a \in G$ и $\mathfrak{m}$ — дополнительное подпространство к подпространству $\mathfrak{g}^1(a)$ в $\mathfrak{g}$. Обозначим через U некоторую окрестность нуля в пространстве $\mathfrak{g}$ и через exp *экспоненциальное отображение окрестности U в группу G. Тогда отображение*

$$f\colon (x, y) \mapsto (\exp y)\, a\, (\exp x)\, (\exp y)^{-1}$$

множества $(\mathfrak{g}^1(a) \times \mathfrak{m}) \cap U$ в группу G является этальным в точке $(0, 0)$.

Касательными линейными отображениями к отображениям $x \mapsto a(\exp x)$ и $y \mapsto (\exp y)\, a (\exp y)^{-1}$ в точке 0 являются отображения $x \mapsto ax$ и $y \mapsto ya - ay = a(a^{-1}ya - y)$ пространства $\mathfrak{g}$ в $T_aG = a\mathfrak{g}$ (гл. III, § 3, n° 12, предложение 46). Поэтому касательным отображением к f в точке $(0, 0)$ будет отображение $(x, y) \mapsto ax + a(a^{-1}ya - y) = a(x + a^{-1}ya - y)$ пространства $\mathfrak{g}^1(a) \times \mathfrak{m}$ в пространство $a\mathfrak{g}$. Это отображение инъективно. Действительно, если $x \in \mathfrak{g}^1(a)$, $y \in \mathfrak{m}$ и $x + a^{-1}ya - y = 0$, то $(\mathrm{Ad}(a) - 1)y = \mathrm{Ad}(a)x \in \mathfrak{g}^1(a)$, поскольку $\mathrm{Ad}(a)\mathfrak{g}^1(a) \subset \mathfrak{g}^1(a)$. Вследствие этого $y \in \mathfrak{g}^1(a)$ и, таким образом, $y = 0$. Так как отображение $\mathrm{Ad}(a)$ инъективно на подпространстве $\mathfrak{g}^1(a)$, мы получаем, что $x = 0$. Из равенства $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}^1(a) + \dim \mathfrak{m}$ следует теперь, что отображение f этально в точке $(0, 0)$.

Предложение 4. *Пусть $a \in G$ и H — подгрупускула Ли группы G, алгеброй Ли которой является подалгебра $\mathfrak{g}^1(a)$. Тогда отображение $(b, c) \mapsto cabc^{-1}$ топологического пространства $H \times G$ в G является в точке (e, e) субмерсией.*

Пусть $\mathfrak{m}$ — дополнительное к $\mathfrak{g}^1(a)$ подпространство в алгебре $\mathfrak{g}$, а $\exp$ — экспоненциальное отображение открытой окрестности нуля $U \subset \mathfrak{g}$. Можно выбрать окрестность U таким образом, чтобы $\exp(U \cap \mathfrak{g}^1(a)) \subset H$. В этих условиях отображение f: $(x, y) \mapsto (\exp x, \exp y)$ есть аналитическое отображение окрестности точки $(0, 0)$ в пространстве $\mathfrak{g}^1(a) \times \mathfrak{m}$ со значениями в $H \times G$. По лемме 3 композиция отображения f и отображения φ: $(b, c) \mapsto cabc^{-1}$ этальна в точке $(0, 0)$. Вследствие этого отображение φ является в точке $f(0, 0) = (e, e)$ субмерсией.

Предложение 5. *Пусть $a \in G$ и W — некоторая окрестность элемента e в группе G. Тогда существует окрестность V точки a, обладающая следующим свойством: для любого элемента $a' \in V$ существует элемент $g \in W$, такой, что $\mathfrak{g}^1(a') \subset \mathrm{Ad}(g)\,\mathfrak{g}^1(a)$.*

Введем обозначение $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^1(a)$, и пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 + \mathfrak{g}^+$ — разложение Фиттинга для эндоморфизма $\mathrm{Ad}(a) - 1$ (§ 1, n° 1). Обозначим через H подгрупускулу Ли группы G, алгебра Ли которой есть $\mathfrak{g}^1$. Для любого элемента $h \in H$ выполняется включение $\mathrm{Ad}(h)\mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{g}^1$. Так как $[\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^+] \subset \mathfrak{g}^+$, то существует такая окрестность U элемента e групускулы H, что $\mathrm{Ad}(h)\mathfrak{g}^+ \subset \mathfrak{g}^+$ при $h \in U$. Поскольку ограничение эндоморфизма $\mathrm{Ad}(a) - 1$ на $\mathfrak{g}^+$ биективно, можно выбрать окрестность U таким образом, что ограничение эндоморфизма $\mathrm{Ad}(ah) - 1$ на $\mathfrak{g}^+$ будет биективным при всех $h \in U$. Тогда $\mathfrak{g}^1(ah) \subset \mathfrak{g}^1(a) = \mathfrak{g}^1$ для всех $h \in U$. По предложению 4 множество $\mathrm{Int}(W)(aU)$ служит окрестностью элемента a в группе G. Если $a' \in \mathrm{Int}(W)(aU)$, то $a' = g(ah)g^{-1}$, где $g \in W$ и $h \in U$, откуда $\mathfrak{g}^1(a') = \mathrm{Ad}(g)\,\mathfrak{g}^1(ah) \subset \mathrm{Ad}(g)\,\mathfrak{g}^1(a)$.

Следствие. *Пусть G^* — открытая подгруппа группы G. Если элемент $a \in G$ регулярен, то существует такая окрестность V элемента a, что подпространство $\mathfrak{g}^1(a')$ сопряжено с $\mathfrak{g}^1(a)$ относительно группы $\mathrm{Ad}(G^*)$ для всех $a' \in V$.*

3. Связь с регулярными элементами алгебры Ли

Предложение 6. *Пусть V — открытая подгруппа в $\mathfrak{g}$ и* $\exp\colon V \to G$ — *экспоненциальное отображение, определенное на множестве V. Тогда*

(i) *существует такая окрестность W нуля в группе V, что* $\mathfrak{g}^1(\exp x) = \mathfrak{g}^0(x)$ *для всех* $x \in W$;

(ii) *если $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то* $\mathfrak{g}^1(\exp x) \supset \mathfrak{g}^0(x)$ *для всех* $x \in \mathfrak{g}$.

По следствию 3 предложения 8 гл. III, § 4, n°4, существует такая окрестность V' нуля в группе V, что для всех $x \in V'$ отображение $\exp(\mathrm{ad}(x)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{ad}(x)^n$ определено и при этом $\mathrm{Ad}(\exp x) = \exp(\mathrm{ad}(x))$. Если $P \in k[X]$ и $\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, то легко проверить, что $\mathfrak{g}^{\lambda}(\alpha) \subset \mathfrak{g}^{P(\lambda)}(P(\alpha))$ для всех $\lambda \in k$. Вследствие этого

$$\mathfrak{g}^0(\mathrm{ad}(x)) \subset \mathfrak{g}^1(\exp(\mathrm{ad}(x))) = \mathfrak{g}^1(\mathrm{Ad}(\exp x)) = g^1(\exp x)$$

для всех $x \in V'$. Если $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то обязательно $V = \mathfrak{g}$, и можно считать, что $V' = V$; это доказывает утверждение (ii). Докажем утверждение (i). Пусть U — такая окрестность 0 в пространстве $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$, что отображение $\mathrm{Log}(1+\alpha) = \sum\limits_{n>0} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \alpha^n$ определено для всех $\alpha \in U$. При этом $\mathrm{Log} \circ \exp = 1$ в некоторой окрестности нуля и $\mathfrak{g}^1(1+\alpha) \subset \mathfrak{g}^0(\mathrm{Log}(1+\alpha))$ для любого $\alpha \in U$. Обозначим через W окрестность нуля в пространстве $\mathfrak{g}$, состоящую из тех элементов $x \in V'$, для которых $\exp \mathrm{ad}\, x \in 1 + U$ и

$$\mathrm{Log}(\exp(\mathrm{ad}(x))) = \mathrm{ad}(x).$$

Таким образом,

$$\mathfrak{g}^1(\exp x) = \mathfrak{g}^1(\mathrm{Ad}(\exp x)) = \mathfrak{g}^1(\exp(\mathrm{ad}(x))) \subset$$
$$\subset \mathfrak{g}^0(\mathrm{Log}(\exp(\mathrm{ad}(x)))) = \mathfrak{g}^0(\mathrm{ad}(x)) = \mathfrak{g}^0(x)$$

при всех $x \in W$. Это показывает, что $\mathfrak{g}^1(\exp x) = \mathfrak{g}^0(x)$ при всех $x \in W$.

Лемма 4. Пусть U — окрестность нуля в алгебре $\mathfrak{g}$, и пусть экспоненциальное отображение $\exp$ *окрестности U в группу G является этальным в каждой точке множества U, причем* $\mathfrak{g}^1(\exp x) = \mathfrak{g}^0(x)$ *для любого элемента $x \in U$. Тогда*

(i) *функция r^0_{Ad} постоянна на множестве* $\exp(U)$, *и ее значение равно рангу алгебры $\mathfrak{g}$;*

(ii) *если $x \in U$, то элемент* $\exp x$ *регулярен тогда и только тогда, когда элемент x регулярен в алгебре $\mathfrak{g}$;*

(iii) *для регулярности элемента* $a \in \exp(U)$ *необходимо и достаточно, чтобы подалгебра* $\mathfrak{g}^1(a)$ *была подалгеброй Картана алгебры* $\mathfrak{g}$.

Пусть $l = \mathrm{rg}(\mathfrak{g})$. Если $x \in U$—регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$, то

$$r_{\mathrm{Ad}}(\exp x) = \dim \mathfrak{g}^1(\exp x) = \dim \mathfrak{g}^0(x) = l.$$

Так как регулярные элементы алгебры $\mathfrak{g}$, принадлежащие U, образуют окрестность элемента x и так как отображение exp этально в точке x, то элемент $\exp x$ является регулярным и $r^0_{\mathrm{Ad}}(\exp x) = l$. Множество регулярных элементов алгебры $\mathfrak{g}$, принадлежащих окрестности U, всюду плотно в U, поэтому $r^0_{\mathrm{Ad}}(a) = l$ для любого $a \in \exp(U)$. Пусть $a \in \exp(U)$ — регулярный элемент группы G и $a = \exp x$ для $x \in U$. Так как $\mathfrak{g}^0(x) = \mathfrak{g}^1(a)$, то $\dim \mathfrak{g}^0(x) = r^0_{\mathrm{Ad}}(a) = l$. Таким образом, x — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^1(a)$ — подалгебра Картана этой алгебры. Наконец, если для $a \in \exp(U)$ подалгебра $\mathfrak{g}^1(a)$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, то

$$r_{\mathrm{Ad}}(a) = \dim \mathfrak{g}^1(a) = l = r^0_{\mathrm{Ad}}(a);$$

следовательно, элемент a регулярен.

Предложение 7. *Пусть V — окрестность элемента e в группе G. Тогда каждая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ имеет вид $\mathfrak{g}^1(a)$ для некоторого элемента a окрестности V, регулярного в группе G.*

По предложению 6 существует такая открытая окрестность U элемента 0 в алгебре $\mathfrak{g}$, что экспоненциальное отображение $\exp\colon U \to G$ удовлетворяет условиям леммы 4. Если $\mathfrak{h}$ — некоторая подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, то существует регулярный элемент $x \in \mathfrak{h}$, для которого $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$ (§ 3, теорема 2). При этом существует такой элемент $t \in k^*$, что $tx \in U$ и $\exp(tx) \in V$. Тогда $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x) = \mathfrak{g}^0(tx) = \mathfrak{g}^1(\exp(tx))$, и по лемме 4 (ii) элемент $\exp(tx)$ регулярен в группе G.

Предложение 8. *Пусть l — ранг алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Существует такая открытая подгруппа G^* группы G, что*

(i) *функция r^0_{Ad} постоянна на G^* и ее значение равно l;*

(ii) *элемент $a \in G^*$ регулярен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}^1(a)$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$;*

(iii) *если $a \in G^*$, то каждая подалгебра Картана подалгебры $\mathfrak{g}^1(a)$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$.*

(i) По предложению 6 существует такая открытая окрестность U элемента 0 в алгебре $\mathfrak{g}$, что отображение exp окрестности U в группу G удовлетворяет условиям леммы 4. Будем обозначать далее через G^* компоненту нейтрального элемента группы G, если $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, и содержащуюся в $\exp(U)$ открытую подгруппу группы G, если поле k ультраметрическое. Так как функция r^0_{Ad} локально постоянна и ее значение в любой точке множества $\exp(U)$ равно l (лемма 4 (i)), то ясно, что функция r^0_{Ad} постоянна на множестве G^* и ее значение равно l.

(ii) Обозначим через R^* (соотв. через S^*) множество регулярных элементов подгруппы G^* (соотв. множество таких элементов $a \in G^*$, для которых подалгебра $\mathfrak{g}^1(a)$ будет подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$). При этом $S^* \subset R^*$. Действительно, если $a \in S^*$, то $r_{\mathrm{Ad}}(a) = l = r^0_{\mathrm{Ad}}(a)$. Докажем, что $R^* \subset S^*$. Если поле k ультраметрическое, то это следует из включения $G^* \subset \exp(U)$ и леммы 4 (iii). Предположим, что $k = \mathbf{C}$. По следствию предложения 5, если $a \in R^*$, то для каждого элемента a' из некоторой окрестности элемента a подалгебра $\mathfrak{g}^1(a')$ сопряжена с подалгеброй $\mathfrak{g}^1(a)$ посредством некоторого автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$. Вследствие этого множества S^* и $R^* - S^*$ открыты в G^*. Так как множество S^* содержит все регулярные элементы из некоторой окрестности элемента e (лемма 4 (iii)), то множество S^* непусто. Так как подгруппа G^* связна, то R^* тоже связно (предложение 1), и, таким образом, $S^* = R^*$.

Осталось рассмотреть случай, когда $k = \mathbf{R}$. Предположим сначала, что G^* является интегральной подгруппой группы $\mathbf{GL}(E)$, где E — действительное векторное пространство конечной размерности. Пусть G^*_c — интегральная подгруппа группы $\mathbf{GL}(E \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$, алгеброй Ли которой служит $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}$. Существует аналитическая функция на G^*_c, множество нулей которой совпадает с дополнением к открытому множеству регулярных элементов группы G^*_c. Вследствие *Мн. Св. рез.*, 3.2.5, эта функция не равна нулю на множестве G^*. Таким образом, множество G^* содержит регулярные элементы группы G^*_c. Пусть Ad_c — присоединенное представление группы G^*_c. Для любого элемента $a \in G^*$ имеет место равенство $\mathfrak{g}^1_c(a) = \mathfrak{g}^1(a) \otimes \mathbf{C}$, поэтому $r_{\mathrm{Ad}_c}(a) = r_{\mathrm{Ad}}(a)$. Если $a \in G^*$ — регулярный элемент группы G^*_c, то он будет также регулярным элементом группы G^*, причем $r^0_{\mathrm{Ad}_c}(a) = r^0_{\mathrm{Ad}}(a)$. Так как функции $r^0_{\mathrm{Ad}_c}$ и r^0_{Ad} постоянны на множествах G^*_c и G^* соответственно, то регулярные элементы группы G^* — это регулярные элементы группы G^*_c, принадлежащие G^*. Используя доказанное выше, мы получаем, что если a — регулярный элемент группы G^*, то подалгебра $\mathfrak{g}^1_c(a) = \mathfrak{g}^1(a) \otimes \mathbf{C}$ является подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}_c$, поэтому $\mathfrak{g}^1(a)$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ (§ 2, предложение 3).

Предположим теперь, что группа G односвязна. Тогда существуют действительное векторное пространство E конечной размерности и этальный морфизм f группы G на некоторую интегральную подгруппу G' группы $\mathbf{GL}(E)$ (гл. III, § 6, n° 1, следствие теоремы 1). По предложению 2, если элемент $a \in G$ регулярен, то регулярен и элемент $f(a)$. По доказанному выше $\mathfrak{g}'^1(f(a))$—это подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}'$ группы G'. Так как $\mathfrak{g}'^1(f(a)) = (Tf)\,\mathfrak{g}^1(a)$ и отображение Tf является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}'$, то подалгебра $\mathfrak{g}^1(a)$ будет подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$.

Переходим, наконец, к общему случаю ($k = \mathbf{R}$). Пусть $\widetilde{G}$ — универсальная накрывающая группы G^*, $\widetilde{\mathfrak{g}} = L\widetilde{G}$ и q — каноническое отображение группы $\widetilde{G}$ на G^*. Если элемент $a \in G^*$ регулярен и $a' \in q^{-1}(a)$, то элемент a' регулярен, поскольку ядро морфизма q содержится в центре группы $\widetilde{G}$ (предложение 2). Как уже установлено, подалгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}^1(a')$ — это подалгебра Картана алгебры $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Вследствие того что $\mathfrak{g}^1(a) = (Tq)\,\widetilde{\mathfrak{g}}^1(a')$ и отображение Tq — изоморфизм алгебры $\widetilde{\mathfrak{g}}$ на $\mathfrak{g}$, подалгебра $\mathfrak{g}^1(a)$ будет подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$.

(iii) По предложению 5 существует такая окрестность V элемента a, что для любого $a' \in V$ подалгебра $\mathfrak{g}^1(a')$ сопряжена с подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}^1(a)$ посредством некоторого автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$. Так как каждая окрестность элемента a содержит регулярные элементы, то из утверждения (ii) следует, что подалгебра $\mathfrak{g}^1(a)$ содержит подалгебру Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Вследствие этого по предложению 3 из § 3 каждая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}^1(a)$ будет подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}$.

Замечание. Если $k = \mathbf{C}$, то подалгебры Картана $\mathfrak{g}^1(a)$ для регулярных элементов a, принадлежащих связной компоненте M группы G, сопряжены относительно группы $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Действительно, пусть R — множество регулярных элементов группы G. Для любого элемента $a \in R \cap M$ обозначим через M_a множество тех элементов $b \in R \cap M$, для которых подалгебра $\mathfrak{g}^1(b)$ сопряжена с $\mathfrak{g}^1(a)$ относительно группы $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$. Как известно, $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(G^0)$, где G^0 — компонента нейтрального элемента группы G. По следствию предложения 5 множество M_a открыто в R. Отсюда вытекает, что множество M_a открыто и замкнуто в R. Так как $k = \mathbf{C}$, то множество $R \cap M$ связно (лемма 1) и, следовательно, $M_a = R \cap M$.

4. Применение к элементарным автоморфизмам

Предложение 9. *Пусть k — поле характеристики 0 и $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем k. Если $a \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, то размерность нильпространства эндоморфизма $a - 1$ не меньше, чем ранг алгебры $\mathfrak{g}$.*

По „принципу Лефшеца" (*Alg.*, chap. V, § 14, n° 7, proposition 18) поле k может быть представлено как объединение возрастающего фильтрующегося семейства подполей $(k_i)_{i \in I}$, каждое из которых имеет в качестве расширения поле $\mathbf{C}$. Пусть (e_α) — базис алгебры $\mathfrak{g}$ над полем k и $x_1, \ldots, x_m$ — такие элементы алгебры $\mathfrak{g}$, что эндоморфизмы $\operatorname{ad}(x_1), \ldots, \operatorname{ad}(x_m)$ нильпотентны и $a = e^{\operatorname{ad}(x_1)} \ldots e^{\operatorname{ad}(x_m)}$. Обозначим через $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ относительно базиса (e_α) и через (x_r^α) координаты вектора x_r относительно того же базиса $(1 \leqslant r \leqslant m)$. Существует такой индекс $j \in I$, что элементы $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ и x_r^α принадлежат полю k_j. Пусть $\mathfrak{g}_j = \sum_\alpha k_j e_\alpha$ — алгебра Ли над полем k_j; она содержит элементы $x_1, \ldots, x_m$, и ограничение a_j эндоморфизма a на $\mathfrak{g}_j$ будет элементарным автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}_j$. Продолжение $a_j \otimes 1$ эндоморфизма a_j на пространство $\mathfrak{g}_j \otimes_{k_j} \mathbf{C}$ будет в свою очередь элементарным автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}_j \otimes \mathbf{C}$. Пусть G_j — связная комплексная группа Ли, алгебра Ли которой есть $\mathfrak{g}_j \otimes \mathbf{C}$, и s — такой элемент группы G_j, что $\operatorname{Ad}(s) = a_j \otimes 1$. Применяя предложение 8 к паре (G_j, s), мы видим, что размерность n нильпространства эндоморфизма $a_j \otimes 1 - 1$ удовлетворяет неравенству

$$n \geqslant \operatorname{rg}(\mathfrak{g}_j \otimes \mathbf{C}) = \operatorname{rg}(\mathfrak{g}_j) = \operatorname{rg}(\mathfrak{g}).$$

Так как нильпространства эндоморфизмов $a_j - 1$ и $a - 1$ имеют ту же самую размерность, то предложение доказано.

§ 5. Линейные разделяющие алгебры Ли

В этом параграфе мы предполагаем, что поле k имеет характеристику 0. Через V мы обозначаем векторное пространство конечной размерности.

1. Линейные разделяющие алгебры Ли

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется разделяющей, если она содержит полупростую и нильпотентную компоненты каждого своего элемента* (*Alg.*, chap. VII, § 5, n° 8)[1]).

[1]) В существующей литературе такая алгебра Ли называется также *почти алгебраической* или *расщепляемой*, но последний термин несет слишком большую нагрузку и используется ниже в другом смысле. — *Прим. ред.*

Примеры. 1) Пусть V' и V'' — подпространства векторного пространства V, причем $V'' \supset V'$. Множество элементов $x \in \mathfrak{gl}(V)$, для которых $x(V'') \subset V'$, будет разделяющей подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Действительно, для любого $x \in \mathfrak{gl}(V)$ полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма x равны $P(x)$ и $Q(x)$, где P и Q — многочлены без свободного члена.

2) Предположим, что пространство V снабжено структурой алгебры. Тогда множество дифференцирований этой алгебры есть разделяющая подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$ (§ 1, n° 1, предложение 4 (ii)).

3) *Имеет место более общее утверждение: алгебра Ли алгебраической подгруппы группы $\mathbf{GL}(V)$ является разделяющей.*

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — разделяющая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, $x \in \mathfrak{g}$, а s и n — полупростая и нильпотентная компоненты элемента x.*

(i) *Полупростой и нильпотентной компонентами элемента $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ будут $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, s$ и $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, n$.*

(ii) *Элемент x регулярен в $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда регулярен элемент s.*

(iii) *Если $\mathfrak{g}'$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, содержащая $\mathfrak{g}$, то любой элементарный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ продолжается до элементарного автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}'$.*

Положим $\mathfrak{a} = \mathfrak{gl}(V)$. Вследствие леммы 2 гл. I, § 5, n° 4, полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x$ — это $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, s$ и $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, n$; тем самым утверждение (i) доказано. Вследствие этого характеристические многочлены эндоморфизмов $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ и $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, s$ совпадают, что доказывает утверждение (ii). Если эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ нильпотентен, то $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, n$; таким образом, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}\, n$ продолжает $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ и n — нильпотентный элемент алгебры $\mathfrak{g}'$. Это доказывает утверждение (iii).

Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Как было показано (гл. I, § 6, n° 5, теорема 4), следующие условия эквивалентны:

(i) тождественное представление алгебры $\mathfrak{g}$ полупросто;

(ii) алгебра $\mathfrak{g}$ редуктивна, и каждый элемент центра алгебры $\mathfrak{g}$ является полупростым эндоморфизмом.

Эти условия также эквивалентны следующему:

(iii) подалгебра $\mathfrak{g}$ редуктивна в $\mathfrak{gl}(V)$.

Действительно, (i)$\Rightarrow$(iii) по следствию 3 из теоремы 4 гл. I, § 6, n° 5, и (iii)$\Rightarrow$(i) ввиду следствия 1 предложения 7 гл. I, § 6, n° 6. Мы докажем, что если подалгебра $\mathfrak{g}$ удовлетворяет этим эквивалентным условиям, то она разделяющая. Можно доказать даже несколько большее:

Предложение 2. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(V)$, *редуктивная в* $\mathfrak{gl}(V)$, E — *некоторое конечномерное векторное пространство и* π: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(E)$ — *полупростое линейное представление алгебры* $\mathfrak{g}$ *в пространстве* E. *Тогда*

(i) *алгебры* $\mathfrak{g}$ *и* $\pi(\mathfrak{g})$ *разделяющие*;

(ii) *полупростые* (соотв. *нильпотентные*) *элементы алгебры* $\pi(\mathfrak{g})$ *являются образами при отображении* π *полупростых* (соотв. *нильпотентных*) *элементов алгебры* $\mathfrak{g}$;

(iii) *если* $\mathfrak{h}$ — *разделяющая подалгебра в* $\mathfrak{gl}(V)$, *содержащаяся в алгебре* $\mathfrak{g}$, *то* $\pi(\mathfrak{h})$ — *разделяющая подалгебра в* $\mathfrak{gl}(E)$;

(iv) *если* $\mathfrak{h}'$ — *разделяющая подалгебра в* $\mathfrak{gl}(E)$, *то* $\pi^{-1}(\mathfrak{h}')$ — *разделяющая подалгебра в* $\mathfrak{gl}(V)$.

Пусть $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ и $\mathfrak{c}$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \times \mathfrak{c}$ и $\pi(\mathfrak{g}) = \pi(\mathfrak{s}) \times \pi(\mathfrak{c})$ по следствию предложения 5 гл. I, § 6, n°4. Пусть $y \in \mathfrak{s}$, $z \in \mathfrak{c}$ и y_s, y_n — полупростая и нильпотентная компоненты элемента y. Тогда y_s, $y_n \in \mathfrak{s}$ (гл. I, § 6, n°3, предложение 3), элемент $y_s + z$ полупрост (*Alg.*, chap. VII, § 5, n°7, corollaire de la proposition 16) и y_n перестановочен с $y_s + z$. Следовательно, полупростая и нильпотентная компоненты элемента $y + z$ — это $y_s + z$ и y_n. Таким образом, $\mathfrak{g}$ — разделяющая алгебра. Так как подалгебра $\pi(\mathfrak{g})$ редуктивна в $\mathfrak{gl}(E)$, то те же самые рассуждения доказывают, что $\pi(\mathfrak{g})$ — разделяющая алгебра. С другой стороны, нильпотентные элементы алгебры $\mathfrak{g}$ (соотв. $\pi(\mathfrak{g})$) являются нильпотентными элементами подалгебры $\mathfrak{s}$ (соотв. $\pi(\mathfrak{s})$). Поэтому нильпотентными элементами в $\pi(\mathfrak{g})$ служат образы при отображении π нильпотентных элементов из $\mathfrak{g}$ (гл. I, § 6, n°3, предложение 4). Полупростыми элементами в алгебре $\mathfrak{g}$ (соотв. в $\pi(\mathfrak{g})$) являются суммы полупростых элементов подалгебры $\mathfrak{s}$ (соотв. $\pi(\mathfrak{s})$) и элементов подалгебры $\mathfrak{c}$ (соотв. $\pi(\mathfrak{c})$). Следовательно, полупростые элементы в $\pi(\mathfrak{g})$ — образы при отображении π полупростых элементов алгебры $\mathfrak{g}$ (гл. I, *там же*). Утверждение (ii) доказано.

Утверждения (iii) и (iv) непосредственно следуют из (i) и (ii).

Замечания. 1) Предположение о полупростоте представления π эквивалентно утверждению о том, что эндоморфизм $\pi(x)$ полупрост для любого $x \in \mathfrak{c}$. Это предположение будет выполнено, если представление π получается из тождественного представления $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ применением некоторой последовательности следующих операций: тензорного произведения, прямой суммы, перехода к дуальному представлению, к подпредставлению, к факторпредставлению.

2) Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{gl}(V')$ — разделяющие алгебры Ли и φ — изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}'$. Можно показать, что φ не обязательно переводит полупростые (соотв. нильпотентные) элементы алгебры $\mathfrak{g}$ в полупростые (соотв. нильпотентные)

элементы алгебры $\mathfrak{g}'$ (упражнение 2). Однако это так, если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста (гл. I, § 6, n° 3, теорема 3).

Предложение 3. *Пусть* $\mathfrak{a}$ — *разделяющая подалгебра Ли в* $\mathfrak{gl}(V)$, *а* $\mathfrak{b}$ *и* $\mathfrak{c}$ — *подпространства векторного пространства* $\mathfrak{gl}(V)$, *причем* $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{c}$. *Обозначим через* $\mathfrak{a}'$ *множество таких элементов* $x \in \mathfrak{a}$, *что* $[x, \mathfrak{c}] \subset \mathfrak{b}$. *Тогда* $\mathfrak{a}'$ — *разделяющая подалгебра Ли.*

Положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$. Подалгебра $\mathfrak{h}'$ в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, образованная теми элементами $z \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, для которых $z(\mathfrak{c}) \subset \mathfrak{b}$, является разделяющей (пример 1). Пусть π: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ — присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$. Предложение 2 (iv), примененное к π, показывает, что $\pi^{-1}(\mathfrak{h}')$ — разделяющая подалгебра. Следовательно, разделяющей будет и подалгебра $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \cap \pi^{-1}(\mathfrak{h}')$.

Следствие 1. *Если* $\mathfrak{a}$ — *разделяющая подалгебра Ли в* $\mathfrak{gl}(V)$ *и* $\mathfrak{n}$ — *подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{a}$, *то нормализатор* (соотв. *централизатор*) *подалгебры* $\mathfrak{n}$ *в* $\mathfrak{a}$ — *разделяющая подалгебра.*

Это следует из предложения 3, если положить $\mathfrak{c} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{n}$ (соотв. $\mathfrak{c} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{b} = \{0\}$).

Следствие 2. *Подалгебры Картана разделяющей подалгебры Ли алгебры* $\mathfrak{gl}(V)$ *являются разделяющими.*

Это вытекает из следствия 1.

Замечание. Далее будет доказано утверждение (n° 5, теорема 2), обратное к следствию 2.

2. Разделяющая оболочка

Пересечение некоторого семейства разделяющих подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ является, очевидно, разделяющей подалгеброй. Таким образом, если $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$, то множество разделяющих подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, содержащих алгебру $\mathfrak{g}$, имеет минимальный элемент, который называется *разделяющей оболочкой* подалгебры $\mathfrak{g}$. В данном параграфе эта оболочка будет обозначаться через $e(\mathfrak{g})$.

Предложение 4. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *подалгебра Ли в* $\mathfrak{gl}(V)$ *и* $\mathfrak{n}$ — *идеал алгебры* $\mathfrak{g}$. *Тогда* $\mathfrak{n}$ *и* $e(\mathfrak{n})$ — *идеалы алгебры* $e(\mathfrak{g})$ *и* $[e(\mathfrak{g}), e(\mathfrak{n})] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{n}]$.

Пусть $\mathfrak{g}_1$ — множество таких элементов $x \in \mathfrak{gl}(V)$, что $[x, \mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{n}]$. Это множество — разделяющая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, содержащая $\mathfrak{g}$; следовательно, оно содержит подалгебру $e(\mathfrak{g})$ (см. n° 1, предложение 3). Таким образом, $[e(\mathfrak{g}), \mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{n}]$. Пусть $\mathfrak{n}_1$ — множество таких элементов $y \in \mathfrak{gl}(V)$, что

$$[e(\mathfrak{g}), y] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{n}].$$

Это множество является разделяющей подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$; оно содержит $\mathfrak{n}$, а следовательно, и $e(\mathfrak{n})$. Таким образом, $[e(\mathfrak{g}), e(\mathfrak{n})] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{n}]$ и, стало быть,

$$[e(\mathfrak{g}), e(\mathfrak{n})] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{n}].$$

Одновременно мы получили, что $[e(\mathfrak{g}), \mathfrak{n}] \subset [e(\mathfrak{g}), e(\mathfrak{n})] \subset \mathfrak{n}$. Поэтому подалгебры $\mathfrak{n}$ и $e(\mathfrak{n})$ являются идеалами алгебры $e(\mathfrak{g})$.

Следствие 1. (i) $\mathscr{D}^i\mathfrak{g} = \mathscr{D}^i e(\mathfrak{g})$ *для* $i \geqslant 1$, *и* $\mathscr{C}^i\mathfrak{g} = \mathscr{C}^i e(\mathfrak{g})$ *для* $i \geqslant 2$.

(ii) *Если алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *коммутативна* (соотв. *нильпотентна*, соотв. *разрешима*), *то алгебра Ли* $e(\mathfrak{g})$ *тоже коммутативна* (соотв. *нильпотентна*, соотв. *разрешима*).

Утверждение (i) доказывается на основании предложения 4 индукцией по i, а утверждение (ii) следует из (i).

Следствие 2. *Пусть* $\mathfrak{r}$ — *радикал алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Если* $\mathfrak{g}$ — *разделяющая алгебра Ли, то и алгебра* $\mathfrak{r}$ *разделяющая.*

Действительно, по предложению 4 и следствию 1 $e(\mathfrak{r})$ — разрешимый идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Поэтому $e(\mathfrak{r}) = \mathfrak{r}$.

3. Разложения разделяющих алгебр

Если $\mathfrak{g}$ — некоторая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ с радикалом $\mathfrak{r}$, то множество нильпотентных элементов в радикале $\mathfrak{r}$ есть не что иное, как нильпотентный идеал алгебры $\mathfrak{g}$ — наибольший идеал нильпотентности тождественного представления алгебры $\mathfrak{g}$ (гл. I, § 5, n° 3, следствие 6 из теоремы 1). В данном параграфе мы будем обозначать этот идеал через $\mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$. В нем содержится нильпотентный радикал $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ (гл. I, § 5, n° 3, теорема 1).

Предложение 5. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *разделяющая нильпотентная подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(V)$. *Обозначим через* $\mathfrak{t}$ *множество полупростых элементов этой подалгебры. Тогда* $\mathfrak{t}$ — *центральная подалгебра в* $\mathfrak{g}$ *и алгебра* $\mathfrak{g}$ *является произведением алгебр Ли* $\mathfrak{t}$ *и* $\mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$.

Если $x \in \mathfrak{t}$, то эндоморфизм $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} x$ будет полупростым и нильпотентным, а следовательно, нулевым. Таким образом, элемент x централен в алгебре $\mathfrak{g}$. Вследствие этого подалгебра $\mathfrak{t}$ будет идеалом в алгебре $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g}) = 0$. Так как алгебра $\mathfrak{g}$ разделяющая, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$, что и доказывает предложение.

Предложение 6. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *разделяющая подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(V)$. *Обозначим через* $\mathscr{T}$ *множество коммутативных* *подалгебр алгебры* $\mathfrak{g}$, *состоящих из полупростых элементов, через* $\mathcal{T}_1$ — *множество максимальных элементов в множестве* $\mathcal{T}$, *а через* $\mathcal{H}$ — *множество подалгебр Картана алгебры* $\mathfrak{g}$.

(i) *Пусть* $\mathfrak{h} \in \mathcal{H}$ *и* $\varphi(\mathfrak{h})$ — *множество полупростых элементов подалгебры* $\mathfrak{h}$. *Тогда* $\varphi(\mathfrak{h}) \in \mathcal{T}_1$.

(ii) *Пусть* $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}_1$ *и* $\psi(\mathfrak{t})$ — *централизатор подалгебры* $\mathfrak{t}$ *в алгебре* $\mathfrak{g}$. *Тогда* $\psi(\mathfrak{t}) \in \mathcal{H}$.

(iii) *Отображения* φ *и* ψ *являются взаимно обратными биективными отображениями* $\mathcal{H}$ *на* $\mathcal{T}_1$ *и* $\mathcal{T}_1$ *на* $\mathcal{H}$.

(iv) *Если поле* k *алгебраически замкнуто, то группа* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *действует на множестве* $\mathcal{T}_1$ *транзитивно.*

При $\mathfrak{h} \in \mathcal{H}$ положим $\mathfrak{t} = \varphi(\mathfrak{h})$. Вследствие предложения 5 и следствия 2 предложения 3 $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \times \mathfrak{n}_V(\mathfrak{h})$. Обозначим через $\psi(\mathfrak{u})$ централизатор произвольной подалгебры $\mathfrak{u}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{h} \subset \psi(\mathfrak{t})$ и $\psi(\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, поскольку элементы подалгебры $\mathfrak{n}_V(\mathfrak{h})$ нильпотентны. Следовательно, $\mathfrak{h} = \psi(\mathfrak{t})$. Если $\mathfrak{t}' \in \mathcal{T}$ и $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}'$, то $\mathfrak{t}' \subset \psi(\mathfrak{t}) = \mathfrak{h}$, откуда $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}_1$.

Пусть $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}_1$ и $\mathfrak{c} = \psi(\mathfrak{t})$. Обозначим через $\mathfrak{h}$ подалгебру Картана алгебры $\mathfrak{c}$. По предложению 10 из § 2, n° 3, $\mathfrak{h} \in \mathcal{H}$ и $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$. Пусть $\mathfrak{t}_1 = \varphi(\mathfrak{h}) \in \mathcal{T}$. Тогда $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}_1$, следовательно, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1$, и по предыдущему $\mathfrak{h} = \psi(\mathfrak{t}_1) = \psi(\mathfrak{t}) = \mathfrak{c}$. Таким образом, $\psi(\mathfrak{t}) \in \mathcal{H}$ и $\varphi(\psi(\mathfrak{t})) = \mathfrak{t}$.

Утверждения (i), (iii) и (ii) доказаны. Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Так как группа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ транзитивно действует на множестве $\mathcal{H}$ (§ 3, n° 2, теорема 1), то группа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ транзитивно действует на множестве $\mathcal{T}_1$.

Следствие 1. *Подалгебры Картана алгебры* $\mathfrak{g}$ — *это централизаторы полупростых регулярных элементов алгебры* $\mathfrak{g}$.

Если элемент $x \in \mathfrak{g}$ регулярен, то $\mathfrak{g}^0(x)$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ (§ 2, n° 3, теорема 1 (i)); если при этом элемент x полупрост, то подалгебра $\mathfrak{g}^0(x)$ совпадает с централизатором элемента x в алгебре $\mathfrak{g}$. Обратно, пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда существует такая подалгебра $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}_1$, что $\mathfrak{h} = \psi(\mathfrak{t})$. По предложению 7 из § 1, n° 2, существует элемент $x \in \mathfrak{t}$, для которого $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(x)$. Так как $x \in \mathfrak{t}$, то $\mathfrak{g}^0(x) = \mathfrak{g}_0(x)$ и, следовательно, элемент x регулярен (§ 3, n° 3, теорема 2 (ii)).

Следствие 2. *Предположим дополнительно, что алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *разрешима. Тогда*

(i) *подгруппа группы* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, *образованная элементами вида* $e^{\mathrm{ad}\,x}$, *где* $x \in \mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}$ (см. § 3, n° 4), *транзитивно действует на множестве* $\mathcal{T}_1$;

(ii) *если* $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}_1$, *то алгебра* $\mathfrak{g}$ *является полупрямым произведением подалгебр* $\mathfrak{t}$ *и* $\mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$.

Утверждение (i) есть следствие утверждения о том, что группа, состоящая из элементов вида $e^{\operatorname{ad} x}$, $x \in \mathscr{C}^{\infty}\mathfrak{g}$, транзитивно действует на множестве $\mathscr{H}$ (§ 3, n° 4, теорема 3).

Докажем утверждение (ii). Пусть $\mathfrak{t} \in \mathscr{T}_1$, и пусть $\mathfrak{h} = \psi(\mathfrak{t})$ — соответствующая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Вследствие предложения 5 $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n}_V(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{t} + \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$. С другой стороны, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (§ 2, n° 1, следствие 3 предложения 4). Так как $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$. При этом ясно, что $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g}) = \{0\}$ и, следовательно, алгебра $\mathfrak{g}$ является полупрямым произведением подалгебры $\mathfrak{t}$ и идеала $\mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$.

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{g}$ — разделяющая подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(V)$.

(i) *Существует такая подалгебра $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$, редуктивная в алгебре $\mathfrak{gl}(V)$, что алгебра $\mathfrak{g}$ является полупрямым произведением подалгебры Ли $\mathfrak{m}$ и идеала $\mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$.*

(ii) *Любые две подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$, обладающие свойством, указанным в* (i), *сопряжены относительно группы* $\operatorname{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

Радикал $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ — разделяющая подалгебра (n° 2, следствие 2 предложения 4). По следствию 2 предложения 6 существует коммутативная подалгебра $\mathfrak{t}$ алгебры $\mathfrak{r}$, состоящая из полупростых элементов, для которой $\mathfrak{r} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}_V(\mathfrak{r})$. Так как все элементы множества $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{t}$ полупросты, то алгебра $\mathfrak{g}$ будет прямой суммой подалгебры $[\mathfrak{t}, \mathfrak{g}]$ и централизатора $\mathfrak{z}$ подалгебры $\mathfrak{t}$ (гл. I, § 3, n° 5, предложение 6). Так как $[\mathfrak{t}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{r}$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} + \mathfrak{r}$. Таким образом, если $\mathfrak{s}$ — подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{z}$ (гл. I, § 6, n° 8), то $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}$ и, следовательно, $\mathfrak{s}$ будет одновременно подалгеброй Леви алгебры $\mathfrak{g}$. Положим $\mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$. Так как $[\mathfrak{s}, \mathfrak{t}] = \{0\}$, то ввиду теоремы 4 из n° 5 § 6 гл. I $\mathfrak{m}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, редуктивная в алгебре $\mathfrak{gl}(V)$. Таким образом,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}_V(\mathfrak{r}) = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g}),$$

поскольку $\mathfrak{n}_V(\mathfrak{g}) = \mathfrak{n}_V(\mathfrak{r})$. Утверждение (i) доказано.

Пусть теперь $\mathfrak{m}'$ — некоторая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, дополнительная к идеалу $\mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$ и редуктивная в $\mathfrak{gl}(V)$. Покажем, что подалгебра $\mathfrak{m}'$ сопряжена с $\mathfrak{m}$ относительно группы $\operatorname{Aut}_e(\mathfrak{g})$. По предположению $\mathfrak{m}' = \mathfrak{s}' \oplus \mathfrak{t}'$, где $\mathfrak{s}' = [\mathfrak{m}', \mathfrak{m}']$ — полупростая подалгебра, а центр $\mathfrak{t}'$ алгебры $\mathfrak{m}'$ состоит из полупростых элементов. Тогда $\mathfrak{r} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g}) = \mathfrak{t}' \oplus \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$. Ввиду следствия 2 предложения 6 можно предположить, что $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$. Тогда $\mathfrak{s}' \subset \mathfrak{z}$, и так как $\dim \mathfrak{s}' = \dim \mathfrak{s}$, то $\mathfrak{s}'$ — подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{z}$. По теореме 5 из n° 6 § 6 гл. I существует такой элемент $x \in \mathfrak{n}_V(\mathfrak{z})$, что $e^{\operatorname{ad} x}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{s}'$. При этом, так как x перестановочен с $\mathfrak{t}$, то $e^{\operatorname{ad} x}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$,

4. Линейные алгебры Ли нильпотентных эндоморфизмов

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{n}$ — *подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(V)$, *состоящая из нильпотентных эндоморфизмов, и* N — *подгруппа* $\exp \mathfrak{n}$ *в группе* $\mathbf{GL}(V)$ (§ 3, n° 1, лемма 1).

(i) *Пусть* ρ — *конечномерное линейное представление алгебры* $\mathfrak{n}$ *в пространстве* W, *такое, что элементы множества* $\rho(\mathfrak{n})$ *нильпотентны,* W' — *устойчивое относительно представления* ρ *подпространство векторного пространства* W, ρ_1 *и* ρ_2 — *подпредставление и факторпредставление представления* ρ, *определяемые подпространством* W'. *Пусть* π, π_1 *и* π_2—*представления группы* N, *согласованные с* ρ, ρ_1 *и* ρ_2 (§ 3, n° 1). *Тогда* π_1 *и* π_2 — *подпредставление и факторпредставление представления* π, *определяемые подпространством* W'.

(ii) *Пусть* ρ_1 *и* ρ_2 — *такие линейные конечномерные представления алгебры* $\mathfrak{n}$, *что элементы множеств* $\rho_1(\mathfrak{n})$ *и* $\rho_2(\mathfrak{n})$ *нильпотентны, и пусть* π_1 *и* π_2 — *представления группы* N, *согласованные с представлениями* ρ_1 *и* ρ_2. *Тогда представление* $\pi_1 \otimes \pi_2$ *группы* N *согласовано с представлением* $\rho_1 \otimes \rho_2$.

(iii) *Пусть* ρ_1 *и* ρ_2 — *такие линейные конечномерные представления алгебры* $\mathfrak{n}$ *в пространствах* V_1 *и* V_2, *что элементы множеств* $\rho_1(\mathfrak{n})$ *и* $\rho_2(\mathfrak{n})$ *нильпотентны, и* ρ — *представление алгебры* $\mathfrak{n}$ *в пространстве* $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, *полученное из представлений* ρ_1 *и* ρ_2. *Пусть* π_1 *и* π_2 — *представления группы* N, *согласованные с представлениями* ρ_1 *и* ρ_2, *и* π — *представление группы* N *в пространстве* $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$, *полученное из представлений* π_1 *и* π_2. *Тогда* π — *представление группы* N, *согласованное с представлением* ρ.

Утверждение (i) очевидно. Пусть ρ_1, ρ_2, π_1, π_2—представления из пункта (ii). Если $x \in \mathfrak{n}$, то, поскольку эндоморфизмы $\rho_1(x) \otimes 1$ и $1 \otimes \rho_2(x)$ перестановочны, имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\exp(\rho_1(x) \otimes 1 + 1 \otimes \rho_2(x)) &= \exp(\rho_1(x) \otimes 1) \,.\, \exp(1 \otimes \rho_2(x)) = \\
&= (\exp \rho_1(x)) \otimes 1 \,.\, 1 \otimes (\exp \rho_2(x)) = \\
&= (\exp \rho_1(x)) \otimes (\exp \rho_2(x)) = \\
&= \pi_1(\exp x) \otimes \pi_2(\exp x) = \\
&= (\pi_1 \otimes \pi_2)(\exp x),
\end{aligned}$$

из которых следует утверждение (ii). Пусть теперь ρ_1, ρ_2, ρ, π_1, π_2, π, V_1, V_2 такие же, как в формулировке утверждения (iii). Для элементов $v_1 \in \mathrm{End}\, V_1$ и $v_2 \in \mathrm{End}\, V_2$ мы будем обозначать через R_{v_1}, L_{v_2} отображения $u \mapsto uv_1$, $u \mapsto v_2 u$ пространства $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ в себя. Эти два отображения перестановочны, и

$\rho(x)u = (L_{\rho_2(x)} - R_{\rho_1(x)})u$, так что

$$\begin{aligned}\exp\rho(x).u &= \exp L_{\rho_2(x)}.\exp R_{-\rho_1(x)}.u = \\ &= L_{\exp\rho_2(x)}.R_{\exp(-\rho_1(x))}.u = \\ &= L_{\pi_2(\exp x)}.R_{\pi_1(\exp(-x))}.u = \\ &= \pi(\exp x).u.\end{aligned}$$

Таким образом, утверждение (iii) доказано.

Лемма 2[1]). (i) *Пусть W — подпространство размерности d векторного пространства V, D — прямая $\bigwedge^d W \subset \bigwedge^d V$, θ — каноническое представление алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ в пространстве $\bigwedge V$* (гл. III, дополнение). *Пусть $x \in \mathfrak{gl}(V)$. Тогда $x(W) \subset W$ в том и только том случае, когда $\theta(x)D \subset D$.*

(ii) *Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — канонический базис пространства k^n, θ — каноническое представление алгебры $\mathfrak{gl}(n, k)$ в пространстве $\bigwedge(k^n)$ и $x \in \mathfrak{gl}(n, k)$. Тогда $x \in \mathfrak{n}(n, k)$ в том и только том случае, когда*

$$\theta(x)(e_{n-d+1} \wedge \ldots \wedge e_n) = 0$$

для $1 \leqslant d \leqslant n$.

Если $x(W) \subset W$, то ясно, что $\theta(x)D \subset D$. Обратно, предположим, что $\theta(x)D \subset D$. Если u — ненулевой элемент прямой D и $y \in W$, то $y \wedge u = 0$. Так как отображение $\theta(x)$ является дифференцированием алгебры $\bigwedge V$, то

$$\theta(x)y \wedge u + y \wedge \theta(x)u = 0.$$

Но $\theta(x)u \in ku$, поэтому $y \wedge \theta(x)u = 0$ и, следовательно, $\theta(x)y \wedge u = 0$. Ввиду предложения 13 из *Alg.*, chap. III, § 7, n° 9, $\theta(x)y \in W$, т. е. $x(y) \in W$. Таким образом, мы доказали, что $x(W) \subset W$.

(ii) Условие, указанное в утверждении (ii), очевидно, является необходимым для того, чтобы $x \in \mathfrak{n}(n, k)$. Предположим, что оно выполняется. Тогда по утверждению (i) элемент x переводит в себя подпространства

$$ke_{n-d+1} + \ldots + ke_n$$

для всех $d = 1, \ldots, n$, и, следовательно, его матрица будет нижней треугольной. Положим

$$x = (x_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}.$$

---

[1]) В этой лемме поле k может быть произвольным.

Тогда $0 = x(e_n) = x_{nn}e_n$ и, следовательно, $x_{nn} = 0$. Пусть $i < n$, и предположим, что уже доказаны равенства $x_{jj} = 0$ для $j > i$. Тогда

$$0 = \theta(x)(e_i \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_n) = x_{ii}(e_i \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_n).$$

Следовательно, $x_{ii} = 0$. Таким образом, $x \in \mathfrak{n}(n, k)$.

Предложение 8. *Пусть $\mathfrak{n}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, состоящая из нильпотентных элементов, а $\mathfrak{q}$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{n}$ в алгебре $\mathfrak{gl}(V)$. Тогда существуют векторное пространство E конечной размерности, представление ρ алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ в пространстве E и подпространство F векторного пространства E, удовлетворяющие следующим условиям:*

(i) *образ при отображении ρ гомотетии пространства V — диагонализуемый эндоморфизм,*

(ii) *подпространство F устойчиво относительно $\rho(\mathfrak{q})$,*

(iii) *подалгебра $\mathfrak{n}$ совпадает с множеством тех элементов $x \in \mathfrak{gl}(V)$, для которых $\rho(x)F = 0$.*

Пусть $n = \dim V$. По теореме Энгеля можно таким образом отождествить пространство V с пространством k^n, что $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}(n, k)$. Обозначим через P алгебру полиномиальных функций на $\mathfrak{gl}(n, k)$. Пусть P_i, где $i = 0, 1, \ldots,$ — множество однородных элементов в P степени i. Пусть $N = \exp \mathfrak{n}$ — подгруппа нижней строго треугольной группы T. Обозначим через J множество тех элементов алгебры P, которые обращаются в нуль на N; они составляют идеал в алгебре P. Обозначим через N_J множество элементов $x \in \mathfrak{gl}(n, k)$, для которых $p(x) = 0$ при любом $p \in J$. Тогда $N \subset N_J$. Обратно, пусть $x \in N_J$. Обозначим через p_{ij} полиномиальные функции на пространстве $\mathfrak{gl}(n, k)$, определяемые матричными элементами. Идеал J содержит функции p_{ij} (при $i < j$) и $p_{ii} - 1$, поэтому $x \in T$. Кроме того, если u — линейная форма на $\mathfrak{gl}(n, k)$, обращающаяся в нуль на $\mathfrak{n}$, то существует функция $p_u \in P$, такая, что $p_u(z) = u(\log z)$ для всех $z \in T$ (§ 3, n° 1, лемма 1 (i)). Тогда $p_u \in J$ и $u(\log x) = 0$. Из этого мы получаем, что $\log x$ принадлежит подалгебре $\mathfrak{n}$ и $x \in N$. Но это и доказывает, что $N = N_J$.

Обозначим для произвольных элементов $p \in P$, $g \in \mathbf{GL}_n(k)$ через $\lambda(g)p$ функцию $x \mapsto p(g^{-1}x)$ на пространстве $\mathfrak{gl}(n, k)$. Тогда $\lambda(g)p \in P$, $\lambda(g)$ — автоморфизм алгебры P, а λ — представление группы $\mathbf{GL}_n(k)$ в P, сохраняющее каждое подпространство P_i. Покажем, что

$$N = \{x \in \mathbf{GL}_n(k) \mid \lambda(x)J = J\}. \qquad (1)$$

Если $x \in N$, $p \in J$, $y \in N$, то $(\lambda(x)p)(y) = p(x^{-1}y) = 0$, поскольку $x^{-1}y \in N$. Поэтому $\lambda(x)p \in J$ и, следовательно, $\lambda(x)J = J$. Пусть элемент $x \in \mathbf{GL}_n(k)$ таков, что $\lambda(x)J = J$, и

$p \in J$. Тогда $p(x^{-1}) = (\lambda(x)p)(e) = 0$, поэтому $x^{-1} \in N_J = N$ и, таким образом, $x \in N$. Это доказывает формулу (1).

Идеал J — идеал конечного типа (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 10, следствие 2 из теоремы 2). Поэтому существует такое целое число q, что если $W = P_0 + P_1 + \ldots + P_q$, то множество $J \cap W$ порождает идеал J. Обозначим через λ_j (соотв. через λ') подпредставление представления λ в подпространстве P_j (соотв. в W). Из формулы (1) следует, что

$$N = \{x \in \mathbf{GL}_n(k) \mid \lambda'(x)(J \cap W) = J \cap W\}. \tag{2}$$

Покажем, что для любого j существует такое представление σ_j алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, k)$ в пространстве P_j, для которого

$$\sigma_j \mid \mathfrak{n}(n, k) \text{ согласовано (§ 3, n° 1) с } \lambda_j \mid T, \tag{3}$$

$$\sigma_j(x) \text{ — гомотетия при всех } x \in k \,.\, 1_n. \tag{4}$$

Так как представление λ_j является j-й симметрической степенью представления λ_1, то достаточно доказать существование представления σ_1 (см. лемму 1). Но представление λ_1 контрагредиентно представлению γ группы $\mathbf{GL}_n(k)$ в пространстве $\mathfrak{gl}(n, k)$, заданному формулой

$$\gamma(x)\,y = xy, \qquad x \in \mathbf{GL}_n(k), \qquad y \in \mathfrak{gl}(n, k).$$

Пусть представление c алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, k)$ в пространстве $\mathfrak{gl}(n, k)$ определяется равенством

$$c(x)\,y = xy, \qquad x, y \in \mathfrak{gl}(n, k).$$

Непосредственно из определения следует, что представления $c \mid \mathfrak{n}(n, k)$ и $\gamma \mid T$ согласованы и эндоморфизм $c(x)$ — гомотетия при всех $x \in k \,.\, 1_n$. В качестве σ_1 достаточно рассмотреть представление, дуальное к c (гл. I, § 3, n° 3).

Пусть теперь представление σ' алгебры $\mathfrak{gl}(n, k)$ в пространстве W — прямая сумма представлений σ_j для $0 \leqslant j \leqslant q$. Из равенства (2) и соотношений

$$\lambda'(\exp(x)) = \exp(\sigma'(x)) \quad \text{и} \quad \sigma'(\log(y)) = \log(\lambda'(y)),$$
$$x \in \mathfrak{n}(n, k), \qquad y \in T,$$

мы получаем, что

$$\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{n}(n, k) \mid \sigma'(x)(J \cap W) \subset J \cap W\}. \tag{5}$$

Положим $d = \dim(J \cap W)$, и пусть $\tau = \bigwedge^d \sigma'$, $D = \bigwedge^d (J \cap W)$. Ввиду формулы (5) и леммы 2 (i)

$$\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{n}(n, k) \mid \tau(x)(D) \subset D\}. \tag{6}$$

Так как подалгебра $\tau(\mathfrak{n}(n, k))$ состоит из нильпотентных эндоморфизмов, то равенство (6) можно записать следующим образом:

$$\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{n}(n, k) \mid \tau(x)(D) = 0\}. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь пространство $E = \bigwedge^d W \oplus \bigwedge^1 V \oplus \bigwedge^2 V \oplus \ldots \ldots \oplus \bigwedge^n V$ и представление ρ, равное прямой сумме представления τ и канонических представлений алгебры $\mathfrak{gl}(n, k)$ в пространствах $\bigwedge^1 V, \ldots, \bigwedge^n V$. Обозначим через $E_0 \subset E$ подпространство, равное сумме подпространства $D = \bigwedge^d (J \cap W)$ и прямых, порожденных векторами $e_{n-j+1} \wedge \ldots \wedge e_n$ при $j = 1, \ldots, n$. Ввиду формулы (7) и леммы 2 (ii) будет выполняться равенство

$$\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \rho(x)(E_0) = 0\}. \tag{8}$$

Очевидно, что если $x \in k \cdot 1_n$, то эндоморфизм $\rho(x)$ приводи́м к диагональному виду. Наконец, множество F элементов пространства E, аннулируемых отображениями $\rho(\mathfrak{n})$, устойчиво относительно $\rho(\mathfrak{q})$ (гл. I, § 3, n° 5, предложение 5), и ввиду формулы (8) мы получаем

$$\mathfrak{n} = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \rho(x)(F) = 0\}. \tag{9}$$

5. *Характеризации разделяющих алгебр Ли*

Каждая разделяющая алгебра Ли порождается как векторное пространство (*а следовательно*, и как алгебра Ли) подмножеством тех своих элементов, которые являются или полупростыми, или нильпотентными. Обратно:

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, порожденная как k-алгебра Ли подмножеством X. Если каждый элемент множества X является полупростым или нильпотентным, то $\mathfrak{g}$ — разделяющая подалгебра.*

а) *Алгебра $\mathfrak{g}$ коммутативна.*

Полупростые (соотв. нильпотентные) элементы алгебры $\mathfrak{g}$ образуют векторное подпространство $\mathfrak{g}_s$ (соотв. $\mathfrak{g}_n$). По предположению $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_s \oplus \mathfrak{g}_n$, и, таким образом, $\mathfrak{g}$ — разделяющая алгебра.

б) *Алгебра $\mathfrak{g}$ редуктивна.*

Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \times \mathfrak{c}$, где подалгебра $\mathfrak{g}'$ полупроста, а $\mathfrak{c}$ коммутативна. По предложению 2 алгебра $\mathfrak{g}'$ разделяющая. Пусть $x = a + b \in \mathfrak{g}$, где $a \in \mathfrak{g}'$ и $b \in \mathfrak{c}$. Пусть a_s, a_n, b_s, b_n — полупростые и нильпотентные компоненты элементов a и b. Элементы a_s, a_n, b_s, b_n попарно перестановочны, поэтому полупростой и нильпотентной компонентами элемента $a + b$ будут

a_s+b_s, a_n+b_n. Однако a_s, $a_n\in\mathfrak{g}'$. Если элемент x полупрост, то $x=a_s+b_s$. Так как $a_s\in\mathfrak{g}'$, то $b_s\in\mathfrak{g}$, откуда $b_s\in\mathfrak{c}$, поскольку b_s перестановочен с любым элементом из $\mathfrak{g}$. Таким образом, $a=a_s$, $b=b_s$. Аналогичные рассуждения показывают, что если элемент x нильпотентен, то $a=a_n$ и $b=b_n$. Вследствие этого проекции на $\mathfrak{c}$ элементов множества X являются или полупростыми, или нильпотентными. Согласно а), это означает, что подалгебра $\mathfrak{c}$ разделяющая. Используя ранее введенные обозначения, но не делая никаких предположений об элементе x, мы получаем теперь, что b_s, $b_n\in\mathfrak{c}$. Поэтому a_s+b_s, $a_n+b_n\in\mathfrak{g}$, что и доказывает утверждение теоремы в этом случае.

в) *Общий случай.*

Предположим, что теорема доказана для алгебр Ли размерности $<\dim\mathfrak{g}$, и докажем ее для $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{n}$ — наибольший идеал нильпотентности тождественного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{n}=0$, то существует инъективное полупростое представление алгебры $\mathfrak{g}$, которая по этой причине является редуктивной. Предположим, что $\mathfrak{n}\neq 0$. Обозначим через $\mathfrak{p}$ нормализатор идеала $\mathfrak{n}$ в алгебре $\mathfrak{gl}(V)$. Применим к нашей ситуации предложение 8; тогда существуют E, ρ, F с указанными там свойствами. Поскольку $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{p}$, то подпространство F устойчиво относительно $\rho(\mathfrak{g})$. Обозначим через ρ_0 представление $u\mapsto\rho(u)|F$ алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве F; тогда $\mathfrak{n}=\operatorname{Ker}\rho_0$. Образ каждого полупростого (соотв. нильпотентного) элемента алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ при отображении ρ будет полупростым (соотв. нильпотентным) (предложение 2). Вследствие этого алгебра $\rho_0(\mathfrak{g})$ порождается своими полупростыми и нильпотентными элементами. По предположению индукции $\rho_0(\mathfrak{g})$ — разделяющая подалгебра.

Пусть x — элемент из $\mathfrak{g}$ и x_s, x_n — его полупростая и нильпотентная компоненты. По предложению 2 $\rho(x_s)$, $\rho(x_n)$ — полупростая и нильпотентная компоненты элемента $\rho(x)$. Поскольку $\rho_0(\mathfrak{g})$ — разделяющая алгебра, существуют такие элементы y, $z\in\mathfrak{g}$, что

$$\rho_0(y)=\rho(x_s)\,|\,F,\quad \rho_0(z)=\rho(x_n)\,|\,F.$$

Тогда $x_s\in y+\mathfrak{n}$, $x_n\in z+\mathfrak{n}$, поэтому x_s, $x_n\in\mathfrak{g}$. Ч. Т. Д.

Следствие 1. *Каждая подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(V)$, порожденная разделяющими подалгебрами, является разделяющей.*

Это очевидно.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Тогда $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ — разделяющая алгебра.*

Обозначим через $\mathfrak{r}$ радикал алгебры $\mathfrak{g}$, а через $\mathfrak{s}$ — некоторую подалгебру Леви алгебры $\mathfrak{g}$ (гл. I, § 6, n°8). Тогда

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] + [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] + [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = \mathfrak{s} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}].$$

Алгебра $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ разделяющая, поскольку все ее элементы являются нильпотентными (гл. I, § 5, n°3). С другой стороны, $\mathfrak{s}$ — разделяющая алгебра (предложение 2). Таким образом, подалгебра $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ разделяющая (следствие 1).

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ и X — подмножество в алгебре $\mathfrak{g}$, порождающее $\mathfrak{g}$ (как k-алгебру Ли).*

(i) *Разделяющая оболочка $e(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ порождается полупростыми и нильпотентными компонентами элементов множества X.*

(ii) *Если k' — расширение поля k, то $e(\mathfrak{g} \otimes_k k') = e(\mathfrak{g}) \otimes_k k'$. Для того чтобы алгебра $\mathfrak{g}$ была разделяющей, необходимо и достаточно, чтобы разделяющей была алгебра $\mathfrak{g} \otimes_k k'$.*

Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, порожденная полупростыми и нильпотентными компонентами элементов множества X. Тогда $\mathfrak{g} \subset \tilde{\mathfrak{g}} \subset e(\mathfrak{g})$. По теореме 1 $\tilde{\mathfrak{g}}$ — разделяющая алгебра, поэтому $\tilde{\mathfrak{g}} = e(\mathfrak{g})$, что доказывает утверждение (i). Утверждение (ii) следует из (i), потому что множество X порождает k'-алгебру $\mathfrak{g} \otimes_k k'$.

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{g}$ — разделяющая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Обозначим через $\mathcal{T}$ множество коммутативных подалгебр алгебры $\mathfrak{g}$, состоящих из нильпотентных элементов* (ср. предложение 6). *Тогда все максимальные элементы множества $\mathcal{T}$ имеют одинаковую размерность.*

Пусть k' — алгебраически замкнутое расширение поля k, и пусть $V' = V \otimes_k k'$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k'$. Рассмотрим максимальные элементы $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ множества $\mathcal{T}$. Пусть $\mathfrak{t}'_i = \mathfrak{t}_i \otimes_k k'$, $\mathfrak{h}_i$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{t}_i$ в алгебре $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}'_i = \mathfrak{h}_i \otimes_k k'$. Тогда $\mathfrak{h}_i$ — это подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ (предложение 6), поэтому $\mathfrak{h}'_i$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}'$. Так как $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{t}_i \times \mathfrak{n}_V(\mathfrak{h}_i)$, то $\mathfrak{h}'_i = \mathfrak{t}'_i \times \mathfrak{n}_{V'}(\mathfrak{h}'_i)$; следовательно, подалгебра $\mathfrak{t}'_i$ является множеством полупростых элементов алгебры $\mathfrak{h}'_i$. Поскольку алгебра $\mathfrak{g}'$ разделяющая (следствие 3), подалгебры $\mathfrak{t}'_1$ и $\mathfrak{t}'_2$ сопряжены относительно группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}')$ (предложение 6), и потому $\dim \mathfrak{t}_1 = \dim \mathfrak{t}_2$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *$\mathfrak{g}$ — разделяющая алгебра;*

(ii) *любая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ является разделяющей;*

(iii) *алгебра* $\mathfrak{g}$ *обладает разделяющей подалгеброй Картана*;
(iv) *радикал алгебры* $\mathfrak{g}$ — *разделяющая подалгебра.*

(i)$\Rightarrow$(ii). Это вытекает из следствия 2 предложения 3.

(ii)$\Rightarrow$(i). Это вытекает из следствия 1 теоремы 1, так как алгебра $\mathfrak{g}$ порождается своими подалгебрами Картана (§ 2, n° 3, следствие 3 теоремы 1).

(ii)$\Rightarrow$(iii). Очевидно.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Ввиду следствия 3 теоремы 1 можно считать поле k алгебраически замкнутым. Тогда подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$ сопряжены относительно группы элементарных автоморфизмов этой алгебры (§ 3, n° 2, теорема 1). Используя замечание 1 из n° 1 § 3, мы получим отсюда, что если одна подалгебра Картана разделяющая, то все они разделяющие.

(i)$\Rightarrow$(iv). Это доказано в следствии 2 предложения 4.

(iv)$\Rightarrow$(i). Предположим, что радикал $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ — разделяющая подалгебра. Пусть $\mathfrak{s}$ — подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{g}$. Она является разделяющей (предложение 2), поэтому $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}$ — разделяющая алгебра (следствие 1 теоремы 1).

ДОПОЛНЕНИЕ I

Полиномиальные отображения и топология Зарисского

В этом дополнении поле k предполагается бесконечным.

1. Топология Зарисского

Пусть V — конечномерное векторное пространство. Обозначим через A_V алгебру полиномиальных функций на пространстве V со значениями в k (*Alg.*, chap. IV, § 5, n° 10, définition 4). Это градуированная алгебра, ее компонента степени 1 совпадает с пространством V^*, *дуальным* к V. Вложение пространства V^* в алгебру A_V продолжается до *изоморфизма симметрической алгебры* $\mathsf{S}(V^*)$ на A_V (*Alg.*, chap. IV, § 5, n° 11, *Remarque* 2).

Если $(e_1, \ldots, e_n)$ — некоторый базис пространства V и $(X_1, \ldots, X_n)$ — набор независимых переменных, то отображение алгебры $k[X_1, \ldots, X_n]$ в алгебру A_V, которое ставит в соответствие элементу f из $k[X_1, \ldots, X_n]$ функцию

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \longmapsto f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

является изоморфизмом алгебр (*Alg.*, chap. IV, § 5, n° 10, corollaire de la proposition 19).

Предложение 1. *Пусть H — множество гомоморфизмов алгебры A_V в поле k. Для произвольного элемента $x \in V$ обозначим через h_x гомоморфизм $f \mapsto f(x)$ алгебры A_V в поле k. Тогда $x \mapsto h_x$ — биективное отображение пространства V на множество H.*

Действительно, обозначим через H' множество гомоморфизмов алгебры $k[X_1, \ldots, X_n]$ в поле k. Очевидно, что отображение $\chi \mapsto (\chi(X_1), \ldots, \chi(X_n))$ является биективным отображением множества H' на k^n.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{m}_x = \operatorname{Ker}(h_x)$, где $x \in V$. Тогда $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ — биективное отображение множества V на множество тех идеалов $\mathfrak{m}$ алгебры A_V, для которых $A_V/\mathfrak{m} = k$.*

Подмножество F множества V мы будем называть *замкнутым*, если существует такое семейство $(f_i)_{i \in I}$ элементов алгебры A_V, что

$$x \in F \Leftrightarrow x \in V \text{ и } f_i(x) = 0 \text{ для всех } i \in I.$$

Очевидно, что множества $\varnothing$ и V замкнуты и что любое пересечение замкнутых множеств замкнуто. Если множество F определено условием, что на нем обращаются в нуль функции f_i, а F' — условием, что на нем обращаются в нуль функции f'_j, то множество $F \cup F'$ будет множеством, на котором обращаются в нуль функции $f_i f'_j$, и, следовательно, замкнуто. Таким образом, существует топология на пространстве V, в которой замкнутыми являются как раз множества, замкнутые в указанном выше смысле. Эта топология называется *топологией Зарисского* на пространстве V. Для произвольного элемента $f \in A_V$ обозначим через V_f подмножество тех элементов $x \in V$, для которых $f(x) \neq 0$. Множество V_f открыто в V. Ясно, что множества V_f образуют базис топологии Зарисского. (Если k — топологическое поле, то каноническая топология на пространстве V оказывается более тонкой, чем топология Зарисского.)

Отображение $x \mapsto \mathfrak{m}_x$, определенное в следствии предложения 1, можно рассматривать как отображение ε пространства V в простой спектр $\operatorname{Spec}(A_V)$ алгебры A_V (*Комм. алг.*, гл. II, § 4, n° 3, определение 4). При этом топология Зарисского на пространстве V является обратным образом при отображении ε топологии на пространстве $\operatorname{Spec}(A_V)$.

Предложение 2. *Векторное пространство V, снабженное топологией Зарисского, является неприводимым нётеровым пространством. В частности, каждое его открытое непустое подмножество всюду плотно в нем.*

Вследствие того что кольцо A_V нётерово, пространство $\operatorname{Spec}(A_V)$ нётерово (*Комм. алг.*, гл. II, § 4, n° 3, следствие 7 предложения 11), и каждое подпространство нётерова пространства нётерово (*там же*, n° 2, предложение 8). Пересечение идеалов $\mathfrak{m}_x$ в обозначениях следствия предложения 1 есть $\{0\}$, и множество $\{0\}$ — простой идеал кольца A_V; следовательно, пространство V неприводимо (*там же*, n° 3, предложение 14).

2. Доминирующие полиномиальные отображения

Пусть V, W — конечномерные векторные пространства и f — полиномиальное отображение пространства V в W (*Alg.*, chap. IV, § 5, n° 10, définition 4). Если $\psi \in A_W$, то $\psi \circ f \in A_V$ (*там же*, proposition 17). Отображение $\psi \mapsto \psi \circ f$ называют гомоморфизмом алгебры A_W в A_V, *ассоциированным* с отображением f. Его ядро состоит из тех функций $\psi \in A_W$, которые равны 0 на $f(V)$ (и, таким образом, на *замыкании* подмножества $f(V)$ в топологии Зарисского).

Определение 1. *Полиномиальное отображение f: $V \to W$ называется* **доминирующим**, *если ассоциированный с ним гомоморфизм алгебры A_W в A_V инъективен.*

Таким образом, отображение f является доминирующим тогда и только тогда, когда множество $f(V)$ всюду плотно в W в топологии Зарисского.

Предложение 3. *Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть f: $V \to W$ — доминирующее полиномиальное отображение. Тогда образ при f любого открытого всюду плотного подмножества пространства V содержит открытое всюду плотное подмножество пространства W.*

Достаточно доказать, что для любого ненулевого элемента φ алгебры A_V множество $f(V_\varphi)$ содержит открытое всюду плотное подмножество пространства W. Отождествим алгебру A_W с подалгеброй алгебры A_V при помощи гомоморфизма, ассоциированного с отображением f. При этом существует такой ненулевой элемент $\psi \in A_W$, что любой гомоморфизм w: $A_W \to k$, не аннулирующий ψ, продолжается до гомоморфизма v: $A_V \to k$, не аннулирующего φ (*Комм. алг.*, гл. V, § 3, n° 1, следствие 3 теоремы 1). Если отождествить гомоморфизм w (соотв. v) с элементом множества W_ψ (соотв. V_φ), то утверждение о том, что v продолжает w, означает, что $f(v) = w$. Поэтому $W_\psi \subset f(V_\varphi)$. Ч. Т. Д.

Пусть f: $V \to W$ — полиномиальное отображение и $x_0 \in V$. Тогда отображение $h \mapsto f(x_0 + h)$ пространства V в W тоже полиномиально. Представим его в виде конечной суммы однородных полиномиальных отображений:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+D_1(h)+D_2(h)+\ \ldots,$$

где D_i: $V\to W$ — однородное отображение степени i (*Alg.*, chap. IV, § 5, n° 10, proposition 19). Линейное отображение D_1 называется *линейным отображением, касательным к f в точке x_0*. Оно обозначается через $\mathrm{D}f(x_0)$.

Предложение 4. *Пусть f: $V\to W$ — полиномиальное отображение. Предположим, что существует такая точка $x_0\in V$, что отображение $(\mathrm{D}f)(x_0)$ сюръективно. Тогда f — доминирующее отображение.*

Произведя некоторые сдвиги в пространствах V и W, мы можем считать, что $x_0=0$ и $f(x_0)=0$. При этом разложение f в сумму однородных отображений имеет вид

$$f=f_1+f_2+\ \ldots,\ \text{где } \deg f_i=i$$

и линейное отображение f_1 по предположению сюръективно. Предположим, что f не является доминирующим. Тогда существует такой ненулевой элемент ψ алгебры A_W, что $\psi\circ f=0$. Пусть $\psi=\psi_m+\psi_{m+1}+\ \ldots$ — разложение элемента ψ в сумму однородных элементов и $\deg\psi_i=i$, $\psi_m\neq 0$. Тогда

$$0=\psi\circ f=\psi_m\circ f+\psi_{m+1}\circ f+\ \ldots\ =\psi_m\circ f_1+\rho,$$

где ρ — сумма однородных полииомиальных отображений степеней $>m$. Вследствие этого $\psi_m\circ f_1=0$. Так как f_1 сюръективно, то $\psi_m=0$, что приводит к противоречию.

Следствие. *Если поле k алгебраически замкнуто и отображение f удовлетворяет условиям предложения 4, то образ при отображении f любого открытого всюду плотного подмножества пространства V содержит открытое всюду плотное подмножество пространства W.*

Это следует из предложений 3 и 4.

ДОПОЛНЕНИЕ II

Одно свойство связности

Лемма 1. *Пусть X — связное топологическое пространство и Ω — открытое всюду плотное подмножество в X. Если для любой точки $x\in X$ существует такая ее окрестность V, что $V\cap\Omega$ связно, то подмножество Ω связно.*

Действительно, пусть Ω_0 — непустое открытое и замкнутое подмножество в Ω. Пусть $x \in X$ и V — такая окрестность точки x, что $V \cap \Omega$ связно. Если $x \in \overline{\Omega}_0$, то

$$(V \cap \Omega) \cap \Omega_0 = V \cap \Omega_0 \neq \varnothing,$$

поэтому $V \cap \Omega \subset \Omega_0$. Так как Ω всюду плотно в пространстве X, то $\overline{\Omega}_0$ — окрестность точки x.

Таким образом, множество $\overline{\Omega}_0$ открыто и замкнуто, непусто, и так как X связно, то $\overline{\Omega}_0 = X$. Поскольку множество Ω_0 замкнуто в Ω, имеет место равенство $\Omega_0 = \Omega \cap \overline{\Omega}_0 = \Omega$, что и доказывает связность множества Ω.

Лемма 2. *Пусть U — открытый шар в пространстве $\mathbf{C}^n$ и $f\colon U \to \mathbf{C}$ — не равная тождественно нулю голоморфная функция. Пусть A — некоторое подмножество в U, такое, что $f = 0$ на A. Тогда множество $U - A$ всюду плотно в U и связно.*

Множество $U - A$ всюду плотно в U согласно *Мн. Св. рез.*, 3.2.5. Предположим сначала, что $n = 1$. Если $a \in A$, то степенной ряд функции f в точке a ненулевой, поэтому существует такая окрестность V_a точки a в U, что функция f не обращается в 0 на $V_a - \{a\}$. Таким образом, точка a изолированна в A, и это доказывает, что A — *дискретное* подмножество в U; поэтому множество A счетно, так как U счетно в бесконечности.

Пусть x, $y \in U - A$. Объединение вещественных аффинных прямых, соединяющих точку x (соотв. y) с точками множества A, является тощим множеством (*Общ. топ.*, гл. IX, § 5, n°2). Вследствие этого существует такая точка $z \in U - A$, для которой отрезки $[x, z]$ и $[y, z]$ не пересекают множества A. Поэтому точки x, y, z принадлежат одной связной компоненте множества $U - A$, что и доказывает лемму в случае $n = 1$. Рассмотрим общий случай. Можно предположить, что A — множество нулей функции f (*Общ. топ.*, гл. I, § 11, n°1, предложение 1). Пусть x, $y \in U - A$ и L — аффинная прямая, содержащая точки x и y. Ограничение функции f на подмножество $L \cap U$ не равно тождественно нулю, так как $x \in L \cap U$. По доказанному выше точки x и y лежат в одной связной компоненте множества $(L \cap U) - (L \cap A)$, а следовательно, и в одной связной компоненте множества $U - A$.

Лемма 3. *Пусть X — связное комплексное аналитическое многообразие конечной размерности и A — подмножество в X, удовлетворяющее следующему условию:*

Для любой точки $x \in X$ существует росток аналитической функции f_x, не обращающийся в нуль в точке x и такой, что росток множества A в точке x содержится в ростке множества нулей функции f_x в точке x.

Тогда множество $X - A$ связно и всюду плотно в X.

Утверждение о том, что $X - A$ всюду плотно, следует из *Мн. Св. рез.*, 3.2.5. При доказательстве остального можно предположить, что множество A замкнуто (*Общ. топ.*, гл. I, § 11, n°1, предложение 1). Для любой точки $x \in X$ существуют такая ее окрестность V и такой изоморфизм c окрестности V на открытый шар в пространстве $\mathbf{C}^n$, что подмножество $c(A \cap V)$ содержится в множестве нулей некоторой не равной тождественно нулю на $c(V)$ голоморфной функции. Тогда по лемме 2 множество $V \cap (X - A)$ связно. Вследствие леммы 1 мы получаем, что множество $X - A$ тоже связно.

УПРАЖНЕНИЯ

Рассматриваемые алгебры Ли и модули над этими алгебрами предполагаются конечномерными над полем k; начиная с § 3, мы предполагаем, что поле k имеет характеристику 0.

§ 1

1) Предположим, что k — поле характеристики $p > 0$. Пусть V — векторное пространство, а S — конечное множество. Для того чтобы отображение r: $S \to \operatorname{End}(V)$ удовлетворяло условию (ПК), необходимо и достаточно, чтобы для некоторой степени q числа p при любых s $s' \in S$ имело место равенство $[s^q, s'^q] = 0$. (Использовать формулу (1) из упражнения 19 § 1 гл. I.)

2) Предположим, что поле k совершенно. Пусть V — конечномерное векторное пространство, u, $v \in \operatorname{End}(V)$ и u_s, u_n, v_s, v_n — полупростые и нильпотентные компоненты эндоморфизмов u и v. Тогда следующие условия эквивалентны: (i) существует такое целое число m, что $(\operatorname{ad} u)^m v = 0$; (ii) эндоморфизмы u_s и v перестановочны. (При доказательстве (i)$\Rightarrow$(ii) можно предполагать поле k алгебраически замкнутым и использовать лемму 1 (ii).)

3) Сохраним предположения из n° 2. Предположим, кроме того, что поле k бесконечно и условие (ПК) выполняется. Пусть k' — совершенное расширение поля k и λ: $S \to k$ — такое отображение, что $V^{\lambda}(S) \neq 0$. Положим

$$V' = V \otimes_k k', \quad S' = S \otimes_k k'.$$

Обозначим через r': $S' \to \operatorname{End}(V')$ линейное отображение, полученное из отображения r расширением поля скаляров. Тогда существует единственное отображение λ': $S' \to k'$, для которого $V^{\lambda}(S) \otimes_k k' = V'^{\lambda'}(S')$. (Достаточно рассмотреть случай, когда $V = V^{\lambda}(S)$. Пусть P — такая полиномиальная функция на S и q — такая степень характеристической экспоненты поля k, делящая $\dim V$, что $\lambda^q = P$. Обозначим через P' полиномиальную функцию на пространстве S', продолжающую P. Тогда для каждого элемента $s' \in S'$ существует такой элемент $\lambda'(s') \in k'$, что $\lambda'(s')^q = P'(s')$. Показать, что $(X - \lambda'(s'))^{\dim V}$ — характеристический многочлен эндоморфизма $r'(s')$.)

4) Предположим, что поле k имеет характеристику нуль. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, k)$ и $\mathfrak{a}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, порожденная некоторой диагональной матрицей с собственными значениями 1, -1 и 0. Показать, что подалгебра $\mathfrak{a}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$, что централизатор $\mathfrak{m}$ подалгебры $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$ состоит из диагональных матриц со следом нуль и что централизатор подалгебры $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{g}$ совпадает с $\mathfrak{m}$, а следовательно, не совпадает с $\mathfrak{a}$ (см. n° 5, *замечание*).

¶ 5) Предположим, что поле k бесконечно. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль. Пусть n — целое число $\geqslant 0$; обозначим через V_n множество таких элементов $v \in V$, что $x^n v = 0$ при всех $x \in \mathfrak{g}$.

а) Показать, что если $v \in V_n$ и $x, y \in \mathfrak{g}$, то

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x^{n-i} y x^{i-1}\right) v = 0.$$

(Использовать тот факт, что $(x + ty)^n v = 0$ для любого $t \in k$.)

Заменяя в этой формуле y на $[x, y]$, получить [1]), что $(x^n y - y x^n) v = 0$, откуда будет следовать равенство $x^n y v = 0$.

б) Показать, что подпространство V_n является $\mathfrak{g}$-подмодулем в V (использовать а)). Вследствие этого $V^0(\mathfrak{g}) = \bigcup_n V_n$ — тоже $\mathfrak{g}$-подмодуль модуля V.

в) Предположим, что $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$; обозначим через G односвязную группу Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Действие алгебры $\mathfrak{g}$ на пространстве V определяет действие группы G на V (гл. III, § 6, n° 1). Показать, что элемент $v \in V$ принадлежит подпространству V_n тогда и только тогда, когда $(s - 1)^n v = 0$ для всех $s \in G$; таким образом, $V^0(\mathfrak{g}) = V^1(G)$.

6) Сохраним обозначения упражнения 12 из § 3 гл. I. В частности, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, M — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль и $H^p(\mathfrak{g}, M) = Z^p(\mathfrak{g}, M)/B^p(\mathfrak{g}, M)$ — *пространство p-мерных когомологий* алгебры $\mathfrak{g}$ со значениями в M.

а) Показать, что подпространства $B^p(\mathfrak{g}, M)$ и $Z^p(\mathfrak{g}, M)$ устойчивы относительно естественного представления θ алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве коцепей $C^p(\mathfrak{g}, M)$. На основании этого построить представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве $H^p(\mathfrak{g}, M)$. Доказать, что это представление *тривиально* (использовать формулу $\theta = di + id$, *там же*).

б) Пусть $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k. Пусть $x \in \mathfrak{g}$ и x_M — соответствующий эндоморфизм модуля M. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (соотв. $\mu_1, \ldots, \mu_m$) собственные значения (в поле $\bar{k}$) эндоморфизма $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ (соотв. x_M) с учетом кратности. Показать, что собственными значениями эндоморфизма $\theta(x)$ пространства $C^p(\mathfrak{g}, M)$ будут числа $\mu_j - (\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_p})$, где $1 \leqslant j \leqslant m$ и

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n.$$

Получить отсюда, используя а), что $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$, если ни один из элементов $\mu_j - (\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_p})$ не равен нулю.

в) Предположим, что представление $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(M)$ *точное* и что элемент x удовлетворяет условию

$$\mu_{j_1} + \ldots + \mu_{j_p} \neq \mu_{k_1} + \ldots + \mu_{k_{p+1}} \qquad (\mathrm{S}_p)$$

при любых $j_1, \ldots, j_p, k_1, \ldots, k_{p+1} \in \{1, m\}$.

Показать, что тогда $H^p(\mathfrak{g}, M) = 0$ (заметить, что собственные значения λ_i эндоморфизма $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ имеют вид $\mu_j - \mu_k$, и применить б)).

7) Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли и V — такой $\mathfrak{g}$-модуль, что $V^0(\mathfrak{g}) = 0$. Доказать, что $H^p(\mathfrak{g}, V) = 0$ при всех $p \geqslant 0$. (Достаточно рассмотреть случай, когда $V = V^\lambda(\mathfrak{g})$, где $\lambda \neq 0$, и выбрать элемент $x \in \mathfrak{g}$ так, чтобы $\lambda(x) \neq 0$. Применить упражнение 6 б), заметив, что все λ_i равны нулю, а все μ_j равны $\lambda(x)$.)

---

[1]) Это доказательство сообщил нам Дж. Селигман.

Доказать заново следствие предложения 9 (положить $p=1$)[1]).

¶ 8) Предположим, что k — поле характеристики $p>0$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем k с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Обозначим через U универсальную обертывающую алгебру алгебры $\mathfrak{g}$, а через C — центр алгебры U. Для каждого $i=1, \ldots, n$ выберем такой ненулевой *p-многочлен* f_i степени d_i, для которого $f_i(\operatorname{ad} e_i)=0$. Тогда $f_i(e_i) \in C$, ср. гл. I, § 7, упражнение 5. Положим $z_i = f_i(e_i)$.

а) Показать, что элементы $z_1, \ldots, z_n$ алгебраически независимы. Доказать, что U — свободный модуль над кольцом $A=k[z_1, \ldots, z_n]$ с базисом из произведений $e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n}$, где $0 \leqslant \alpha_i < d_i$. [Использовать теорему Пуанкаре — Биркгофа — Витта.] Ранг $[U:A]$ модуля U над A равен $d_1 \ldots d_n$; это степень числа p. Таким образом, C есть A-модуль конечного типа, а следовательно, k-алгебра конечного типа и размерности n (см. *Комм. алг.*, гл. VIII).

б) Пусть K — поле частных кольца A и

$$U_{(K)} = U \otimes_A K, \quad C_{(K)} = C \otimes_{(A)} K.$$

Тогда $U_{(K)} \supset C_{(K)} \supset K$ Доказать что $U_{(K)}$ — тело с центром $C_{(K)}$, являющееся телом частных (левым и правым) алгебры U, см. гл. I, § 2, упражнение 10. Получить отсюда, что $[U_{(K)} : C_{(K)}]$ имеет вид q^2, где q — степень числа p, что $[C_{(K)} : K] = q_C$, где q_C — степень p, и $[U:A] = q_C q^2$.

в) Пусть d — некоторый ненулевой элемент кольца A и Λ — подкольцо в $U_{(K)}$, для которого $U \subset \Lambda \subset d^{-1}U$ Показать, что $\Lambda = U$. [Пусть $x=b/a$, где $d \in A - \{0\}$ — элемент из кольца Λ; применить индукцию по m, показав, что из условия $b \in Ua + U_m$ следует условие $b \in Ua + U_{m-1}$, где $\{U_m\}$ — каноническая фильтрация в алгебре U. (Для этого, учитывая целозамкнутость кольца $\operatorname{gr} U$, провести рассуждения, следуя доказательству предложения 15 из *Комм. алг.*, гл. V, § 1, n°4.) Полагая $m=0$, получим $b \in Ua$, т. е. $x \in U$.] Вывести отсюда, что C *целозамкнуто*.

г) Предположим, что поле k *алгебраически замкнуто*. Пусть ρ: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — неприводимое линейное представление алгебры $\mathfrak{g}$ и ρ_U — соответствующее представление алгебры U. Ограничение представления ρ_U на C — гомоморфизм γ_ρ кольца C в поле k (отождествленное с кольцом гомотетий пространства V); обозначим через α_ρ его ограничение на подалгебру A. Показать, что для любого гомоморфизма α (соотв. γ) k-алгебры A (соотв. C) в поле k существует по крайней мере одно неприводимое представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для которого $\alpha_\rho = \alpha$ (соотв. $\gamma_\rho = \gamma$), причем таких представлений лишь конечное число (с точностью до эквивалентности). Показать, что $\dim V \leqslant q$ в обозначениях пункта б)[2]).

¶ 9) Сохраним обозначения предыдущего упражнения и предположим дополнительно, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *нильпотентна*.

а) Показать, что можно выбрать базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ таким образом, что для любой пары (i, j) элемент $[e_i, e_j]$ равен линейной комбинации элементов e_h при $h > \sup(i, j)$. Далее мы будем предполагать, что элементы e_i удовлетво-

---

[1]) Относительно деталей этого упражнения см. Dixmier J. Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes, *Acta Sci. Math. Szeged*, **XVI** (1955), 246—250.

[2]) Относительно деталей этого упражнения см. Zassenhaus H. The representations of Lie algebras of prime characteristic, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **II** (1954), 1—36.

ряют этому условию. Выберем для каждого $i = 1, \ldots, n$ такую степень $q(i)$ числа p, что $\operatorname{ad}(e_i)^{q(i)} = 0$, и положим $z_i = e_i^{q(i)}$, $A = k[z_i, \ldots, z_n]$, ср. упражнение 8.

б) Пусть ρ: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ — линейное представление алгебры $\mathfrak{g}$. Предположим, что эндоморфизм $\rho(e_i)$ нильпотентен для каждого $i = 1, \ldots, n$. Показать, что эндоморфизм $\rho(x)$ нильпотентен для каждого $x \in \mathfrak{g}$. [Провести индукцию по $n = \dim \mathfrak{g}$, и рассмотреть случай, когда ρ неприводимо. Показать, что в этом случае $\rho(e_n) = 0$, и применить предположение индукции.]

в) Пусть ρ_1: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1)$ и ρ_2: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_2)$ — два линейных представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что V_1 и V_2 отличны от 0 и $V_1 = V_1^{\lambda_1}(\mathfrak{g})$, $V_2 = V_2^{\lambda_2}(\mathfrak{g})$, где λ_1 и λ_2 — некоторые функции на $\mathfrak{g}$, см. п° 3. Показать, что если $\lambda_1(e_i) = \lambda_2(e_i)$ при $i = 1, \ldots, n$, то $\lambda_1 = \lambda_2$ и существует ненулевой $\mathfrak{g}$-гомоморфизм модуля V_1 в модуль V_2 (применить б) к $\mathfrak{g}$-модулю $V = \mathscr{L}(V_1, V_2)$ и, используя теорему Энгеля, показать, что V содержит ненулевой $\mathfrak{g}$-инвариантный элемент). Вывести отсюда, что если модули V_1 и V_2 просты, то они изоморфны.

г) Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть R — множество классов неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Положим для $\rho \in R$

$$x_\rho = (x_\rho(1), \ldots, x_\rho(n)) \in k^n,$$

где $x_\rho(i)$ — единственное собственное значение эндоморфизма $\rho(e_i)$. Показать что $\rho \mapsto x_\rho$ — *биективное отображение множества R на k^n*. (Инъективность следует из в), а сюръективность — из упражнения 8 г).) Вывести из этого такие следствия:

(i) Для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ алгебры A факторалгебра алгебры $U/\mathfrak{m}U$ по ее радикалу изоморфна алгебре матриц.

(ii) Степень любого неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равна некоторой степени числа p (это следует из (i) и из того факта, что $[U/\mathfrak{m}U : k]$ — степень числа p).

(iii) Любой гомоморфизм алгебры A в поле k единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры C в k (использовать, что $C/\mathfrak{m}C$ содержится в центре алгебры $U/\mathfrak{m}U$, которая является локальной k-алгеброй с полем вычетов k).

(iv) Существует такое целое число $N \geqslant 0$, что $x^{p^N} \in A$ при любом $x \in C$ (это следует из (iii)) [1]).

10) Предположим, что поле k имеет характеристику $p > 0$. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и соотношениями $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = 0$, $[e_2, e_3] = 0$.

а) Показать, что центр алгебры $U\mathfrak{g}$ совпадает с $k[e_1^p, e_2^p, e_3]$.

б) Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Доказать, что для любого $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in k^3$ существует и притом только одно (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление ρ алгебры $\mathfrak{g}$, для которого эндоморфизм $\rho(e_i)$ имеет единственное собственное значение λ_i $(i = 1, 2, 3)$. При этом степень ρ равна p, если $\lambda_3 \neq 0$, и единице, если $\lambda_3 = 0$. (Применить упражнения 8 и 9 или доказать непосредственно.)

---

[1]) Подробнее об этом см. Zassenhaus H., Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik, *Hamb. Abh.*, **XIII** (1939), 1—100, и Darstellungstheorie nilpotenter Lie-Ringe bei Charakteristik $p > 0$, *J. de Crelle.*, **CLXXXII** (1940), 150—155.

11) Пусть $\mathfrak{h}$ — нильпотентная алгебра Ли, V — ненулевой $\mathfrak{h}$-модуль и λ — такая функция на $\mathfrak{h}$ что $V = V^{\lambda}(\mathfrak{h})$. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

(i) λ — линейная форма на $\mathfrak{h}$, обращающаяся в нуль на $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$.

(ii) существует базис пространства V, в котором матрицы эндоморфизмов, соответствующих элементам подалгебры $\mathfrak{h}$, являются треугольными.

(Для доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii) применить теорему Энгеля к $\mathfrak{h}$-модулю $\mathscr{L}(W_{\lambda}, V)$, где W есть $\mathfrak{h}$-модуль размерности 1, определенный линейной формой λ.)

Свойства (i) и (ii) имеют место, если k — поле характеристики 0 (предложение 9).

§ 2

1) Множество диагональных матриц со следом 0 является подалгеброй Картана алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n, k)$, кроме того случая, когда $n = 2$ и характеристика поля k равна 2.

2) Обозначим через e элемент $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. Показать, что $\mathbf{C}e$ — максимальная нильпотентная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, не являющаяся подалгеброй Картана.

3) Предположим, что поле k имеет характеристику 0. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли и E — множество ее коммутативных подалгебр, элементы которых полупросты в $\mathfrak{g}$. Тогда подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$ совпадают с максимальными элементами множества E. (Использовать теорему 2 и предложение 10.)

В частности, объединение подалгебр Картана алгебры $\mathfrak{g}$ совпадает с множеством всех полупростых элементов в $\mathfrak{g}$.

4) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с базисом $\{x, y, z\}$ и соотношениями $[x, y] = y$, $[x, z] = z$, $[y, z] = 0$. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал $ky + kz$ этой алгебры. Тогда $\operatorname{rg}(\mathfrak{a}) = 2$ и $\operatorname{rg}(\mathfrak{g}) = 1$.

5) Предположим, что поле k имеет характеристику 0. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал и $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Показать, что

$$\mathfrak{r} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}).$$

(Обратить внимание на то, что образ $\mathfrak{h}$ в алгебре $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ содержит центр $\mathfrak{r}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ этой алгебры.)

6) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ — ее нильпотентная подалгебра. Если подалгебра $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ нильпотентна, то она является подалгеброй Картана алгебры $\mathfrak{g}$.

7) Пусть $\mathfrak{s}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{s}$ и V — некоторый $\mathfrak{s}$-модуль. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \times V$ — полупрямое произведение $\mathfrak{s}$ и V. Показать, что $\mathfrak{a} \times V^0(\mathfrak{a})$ — подалгебра Картана в алгебре $\mathfrak{g}$.

8) Предположим, что поле k имеет характеристику $p > 0$. Обозначим через $\mathfrak{s}$ алгебру Ли с базисом $\{x, y\}$ и соотношением $[x, y] = y$. Пусть V — векторное k-пространство с базисом $\{e_i\}_{i \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}$.

а) Показать, что на V существует единственная структура $\mathfrak{s}$-модуля, при которой $xe_i = ie_i$ и $ye_i = e_{i+1}$ для всех i. Этот $\mathfrak{s}$-модуль прост.

б) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \times V$ — полупрямое произведение $\mathfrak{s}$ и V. Показать, что $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли ранга 1, производная алгебра которой не нильпотентна.

в) Для того чтобы элемент алгебры $\mathfrak{g}$ был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы его проекция на $\mathfrak{s}$ имела вид $ax + by$, где $ab \neq 0$.

г) $V^0(x+y)=0$ и $V^0(x)=ke_0$. Вывести из этого, что алгебра $\mathfrak{a}$ обладает подалгебрами Картана размерности 1 (например, $k(x+y)$) и подалгебрами Картана размерности 2 (например, $kx+ke_0$) (ср. упражнение 6).

9) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с базисом (x, y) и соотношением $[x, y]=y$, $\mathfrak{k}=ky$ и φ: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ — канонический морфизм. Элемент 0 алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ регулярен в $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, но не является образом при морфизме φ никакого регулярного элемента алгебры $\mathfrak{g}$.

10) Предположим, что поле k бесконечно. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

(i) $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})=\dim(\mathfrak{g})$,

(ii) алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна,

(iii) алгебра $\mathfrak{g}$ имеет только конечное число подалгебр Картана размерности, равной $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})$,

(iv) алгебра $\mathfrak{g}$ имеет единственную подалгебру Картана.

11) Пусть $\mathfrak{h}$ — коммутативная алгебра Ли $\neq 0$, а P — конечное подмножество в $\mathfrak{h}^*$ содержащее 0. Показать, что существует такая алгебра Ли $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{h}$ в качестве подалгебры Картана, что множество весов алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ совпадает с P. (Построить алгебру $\mathfrak{g}$ как полупрямое произведение алгебры $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}$-модуля V, равного прямой сумме одномерных $\mathfrak{h}$-модулей, соответствующих элементам множества $P-\{0\}$, ср. упражнение 7.)

Для того чтобы элемент x из $\mathfrak{h}$ удовлетворял равенству $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0(x)$, необходимо и достаточно, чтобы он не был ортогонален ни к какому элементу из $P-\{0\}$.

12) Предположим, что поле k *конечно*. Построить пример алгебры Ли $\mathfrak{g}$, обладающей подалгеброй Картана $\mathfrak{h}$, в которой не существует такого элемента x, что $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0(x)$. (Использовать предыдущее упражнение, полагая $P=\mathfrak{h}^*$.)

¶ 13) Предположим, что поле k *конечно*. Обозначим через k' некоторое его расширение. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем k. Будем называть *рангом* алгебры $\mathfrak{g}$ и обозначать через $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})$ ранг k'-алгебры $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}\otimes_k k'$; элемент алгебры $\mathfrak{g}$ будем называть *регулярным*, если он регулярен в $\mathfrak{g}'$. Эти определения не зависят от выбора поля k'. Показать, что если

$$\mathrm{Card}(k)\geqslant\dim(\mathfrak{g})-\mathrm{rg}(\mathfrak{g}),$$

то алгебра $\mathfrak{g}$ содержит регулярный элемент (а следовательно, и подалгебру Картана).

(Использовать следующий результат: если a — ненулевой однородный элемент алгебры $k[X_1, \ldots, X_n]$ и $\mathrm{Card}(k)\geqslant\deg(a)$, то существует такой элемент $x\in k^n$, что $a(x)\neq 0$.)

14) Предположим, что k — поле характеристики нуль. Пусть V — векторное k-пространство конечной размерности, $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{n}_V$ — наибольший идеал нильпотентности $\mathfrak{g}$-модуля V (гл. I, § 4, п° 3, определение 2). Показать, что элемент подалгебры $\mathfrak{h}$ нильпотентен тогда и только тогда, когда он принадлежит $\mathfrak{n}_V$. (Ограничиться случаем, когда $\mathfrak{g}$-модуль V полупрост, и использовать следствие 3 теоремы 2.)

¶ 15) Предположим, что поле k бесконечно. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathscr{C}_\infty(\mathfrak{g})$ — объединение членов верхнего центрального ряда алгебры $\mathfrak{g}$ и x — элемент алгебры $\mathfrak{g}$. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

(i) x принадлежит любой подалгебре Картана алгебры $\mathfrak{g}$,

(ii) $x\in\mathfrak{g}^0(y)$ при всех $y\in\mathfrak{g}$ (т. е. $x\in\mathfrak{g}^0(\mathfrak{g})$),

(iii) $x\in\mathscr{C}_\infty\mathfrak{g}$.

(Непосредственно ясно, что (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i). Для доказательства импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) заметить, что свойство (i) эквивалентно включению $x \in \mathfrak{g}^0(y)$ для любого регулярного элемента y из $\mathfrak{g}$, и использовать тот факт, что регулярные элементы всюду плотны в $\mathfrak{g}$ в топологии Зарисского. Для доказательства импликации (ii) $\Rightarrow$ (iii) заметить, что подпространство $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{g})$ устойчиво относительно $\mathfrak{g}$ (§ 1, упражнение 5), и применить теорему Энгеля к $\mathfrak{g}$-модулю $\mathfrak{n}$. Вывести отсюда, что $\mathfrak{n}$ содержит $\mathscr{C}_\infty\mathfrak{g}$.)

¶ 16) Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная разрешимая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана и $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ — разложение на примарные подпространства, где $\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

а) Показать, что ограничения на $\mathfrak{h}$ линейных форм, которые названы корнями в упражнении 17 в) гл. III, § 9, совпадают с весами подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, т. е. с такими λ, что $\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \neq 0$. Вывести отсюда, что такая форма λ обращается в нуль на $\mathfrak{h} \cap \mathscr{D}\mathfrak{g}$.

б) Пусть $(x, y) \longmapsto [x, y]'$ — билинейное знакопеременное отображение $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$, обладающее следующими свойствами:

(i) если $x \in \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$, $y \in \mathfrak{g}^\mu(\mathfrak{h})$, где $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, то $[x, y]' = [x, y]$;

(ii) если $x \in \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, $y \in \mathfrak{g}^\mu(\mathfrak{h})$, то $[x, y]' = [x, y] - \mu(x)\, y$.

Показать, что таким образом пространство $\mathfrak{g}$ наделяется новой структурой алгебры Ли (использовать а)). Обозначим эту алгебру Ли через $\mathfrak{g}'$.

в) Показать, что если $x \in \mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$, то отображение $\mathrm{ad}'\, x\colon y \longrightarrow [x, y]'$ нильпотентно. Вывести из этого, что алгебра $\mathfrak{g}'$ *нильпотентна* (применить упражнение 11 гл. I, § 4, к множеству E эндоморфизмов $\mathrm{ad}'\, x$, где x пробегает объединение подпространств $\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$).

§ 3

1) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{g}'$ — ее подалгебра Картана. Тогда условия предложения 3 выполняются. Но произвольный элемент алгебры $\mathfrak{g}'$, всегда регулярный в $\mathfrak{g}'$, не обязательно регулярен в $\mathfrak{g}$.

2) Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли размерности n, U (соотв. H) — множество регулярных элементов (соотв. подалгебр Картана) алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ — группа внутренних автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$ (гл. III, § 6, n° 2, определение 2).

а) Показать, что если элементы x и y принадлежат одной связной компоненте множества U, то подпространства $\mathfrak{g}^0(x)$ и $\mathfrak{g}^0(y)$ сопряжены относительно группы $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.

б) Показать, что множество U имеет лишь конечное число связных компонент и что это число ограничено некоторой константой $c(n)$, зависящей только от n (применить упражнение 2 дополнения II).

в) Вывести из этого, что число орбит группы $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ на множестве H не превосходит $c(n)$.

3) Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$ — ее подалгебры Картана и φ — канонический гомоморфизм из $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

(i) подалгебры $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$ сопряжены относительно группы $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$;

(ii) подалгебры $\varphi(\mathfrak{h})$ и $\varphi(\mathfrak{h}')$ сопряжены относительно группы $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}/\mathfrak{r})$.

(Следовать доказательству предложения 5.)

4) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Показать, что $\mathbf{R}x$ и $\mathbf{R}y$ — подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$, не сопряженные относительно группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

5) а) Показать, что существует алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем k с базисом (x, y, z, t), для которой

$$[x, y] = z, \quad [x, t] = t, \quad [y, t] = 0, \quad [\mathfrak{g}, z] = 0.$$

Показать, что $\mathfrak{g}$ разрешима и что $\mathfrak{k} = kx + ky + kz$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$

б) Показать, что элементарные автоморфизмы алгебры $\mathfrak{g}$ — это отображения вида $1 + \lambda \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} y + \mu \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} t$, где $\lambda, \mu \in k$.

в) Показать, что $1 + \operatorname{ad}_{\mathfrak{k}} x$ — элементарный автоморфизм алгебры $\mathfrak{k}$, который не продолжается до элементарного автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}$.

г) Пусть $\mathfrak{s}$ — полупростая подалгебра некоторой алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Показать, что любой элементарный автоморфизм подалгебры $\mathfrak{s}$ продолжается до элементарного автоморфизма алгебры $\mathfrak{a}$.

6) Любой элемент редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ содержится в некоторой коммутативной подалгебре размерности $\operatorname{rg}(\mathfrak{g})$.

7) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{g}'$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, редуктивная в $\mathfrak{g}$. и $\mathfrak{a}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}'$. Показать, что существует подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{a}$. Вывести из этого, что $\operatorname{rg}(\mathfrak{g}') \leqslant \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$, причем равенство возможно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}'$ обладает свойствами (i), (ii), (iii) предложения 3.

8) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — ее идеал, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ и $\mathscr{C}_\infty(\mathfrak{g})$ — объединение членов верхнего центрального ряда алгебры $\mathfrak{g}$. Показать, что если $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$, то $\mathfrak{a} \subset \mathscr{C}_\infty \mathfrak{g}$ (другими словами, $\mathscr{C}_\infty \mathfrak{g}$ — это наибольший идеал алгебры $\mathfrak{g}$, содержащийся в $\mathfrak{h}$). (Свести к случаю, когда поле k алгебраически замкнуто, и обратить внимание на то, что подпространство $\mathfrak{a}$ устойчиво относительно всех элементарных автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда из соотношения $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ следует, что $\mathfrak{a}$ содержится во всех подалгебрах Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Затем использовать упражнение 15 из § 2.)

¶ 9) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана и x — элемент из $\mathfrak{h}$. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^+$ — разложение Фиттинга (§ 1, n° 1) алгебры $\mathfrak{g}$ относительно присоединенного действия подалгебры $\mathfrak{h}$.

а) Пусть $\mathfrak{n}$ — максимальный полупростой $\mathfrak{h}$-подмодуль, содержащийси в $\mathfrak{g}^0(x) \cap \mathfrak{g}^+$. Показать, что $\mathfrak{n} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}^0(x) = \mathfrak{h}$, т. е. когда элемент x регулярен в $\mathfrak{g}$.

б) Показать, что $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Показать, что если $\mathfrak{h}'$ — пересечение подалгебры $\mathfrak{h}$ и централизатора подпространства $\mathfrak{n}$, то $\mathfrak{h}'$ — идеал подалгебры $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, содержащий $\mathscr{D}\mathfrak{h}$ и x. Вывести из этого, что $\mathfrak{h}' \subset \mathscr{C}_\infty(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n})$ (упражнение 8), вследствие чего x лежит в $\mathscr{C}_\infty(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n})$ и, значит, принадлежит любой подалгебре Картана алгебры $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$.

в) Если $\mathfrak{n} \neq 0$, то подалгебра $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ ненильпотентна и имеет бесконечно много подалгебр Картана (§ 2, упражнение 10). Вывести отсюда, что бесконечно много подалгебр Картана алгебры $\mathfrak{g}$ содержит элемент x.

г) Для того чтобы элемент алгебры $\mathfrak{g}$ был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал единственной подалгебре Картана.

¶ 10) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, $\mathfrak{n}$ — ее наибольший нильпотентный идеал и $\mathfrak{a}$ — одна из ее подалгебр Леви.

а) Положим $\mathfrak{g}' = \mathfrak{n} + \mathscr{D}\mathfrak{g}$. Показать, что $\mathfrak{g}' = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}$. (Использовать то, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ содержится в $\mathfrak{n}$.) Если $\mathfrak{g} \neq 0$, то $\mathfrak{g}' \neq 0$.

б) Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть $(V_i)_{i \in I}$ — факторы ряда Жордана — Гельдера $\mathfrak{g}$-модуля $\mathfrak{g}$ (относительно присоединенного представления). Показать, что если $x \in \mathfrak{r}$, то x_{V_i} — гомотетия и $x_{V_i} = 0$ при всех i тогда и только тогда, когда $x \in \mathfrak{n}$. Вывести отсюда, что для того, чтобы элемент $y \in \mathfrak{g}$ принадлежал $\mathfrak{g}'$, необходимо и достаточно, чтобы при всех $i \in I$ выполнялось равенство $\operatorname{Tr}\left(y_{V_i}\right) = 0$.

в) Обозначим через N подпространство векторного пространства $\mathfrak{g}$, порожденное элементами x, для которых эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Показать, что N — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ (использовать тот факт, что подпространство N устойчиво относительно $\operatorname{Aut}_e(\mathfrak{g})$). Показать, используя б), что $N \subset \mathfrak{g}'$.

г) Пусть $\mathfrak{h}$ — некоторая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Предположим, что существует такое подмножество R в $\mathfrak{h}^*$, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h}).$$

Это всегда так, если поле k алгебраически замкнуто. Показать, что при этом N содержит подалгебры $\mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$, $\mathscr{D}\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}$; вывести отсюда, что N содержит $\mathfrak{g}'$, и, значит, $N = \mathfrak{g}'$.

д) Если поле k алгебраически замкнуто и $\mathfrak{g} \neq 0$, то $\mathfrak{g}$ содержит элемент x, для которого $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. (Действительно, это так потому что $\mathfrak{g}' \neq 0$.)

¶ 11) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{r}$ — ее радикал.

а) Пусть $\mathfrak{s}$ — некоторая подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{k}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{s}$. Показать, что подалгебра $\mathfrak{k}$ содержится в некоторой подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$, равной сумме подалгебры $\mathfrak{k}$ и некоторой подалгебры алгебры $\mathfrak{r}$. (Использовать теорему 2, предложение 10 и следствие 2 теоремы 1 из § 2.)

б) Пусть $\mathfrak{h}'$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. Показать, что существует такая подалгебра Леви $\mathfrak{s}'$ алгебры $\mathfrak{g}$, что $\mathfrak{h}'$ совпадает с суммой подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{s}'$ и некоторой подалгебры алгебры $\mathfrak{r}$. (Можно таким образом выбрать подалгебры $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{h}$, удовлетворяющие условиям пункта а), что $\mathfrak{h} + \mathfrak{r} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{r}$. Положим тогда $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} + \mathfrak{r}$; это разрешимая подалгебра. По теореме 3 существует такой элемент $x \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathfrak{a})$, что $e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}} x}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$. Тогда специальный автоморфизм $e^{\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x}$ алгебры $\mathfrak{g}$ переводит подалгебру $\mathfrak{s}$ в искомую подалгебру Леви.)

в) Пусть $\mathfrak{s}$ — подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, равная сумме подалгебры Картана $\mathfrak{k}$ алгебры $\mathfrak{s}$ и подалгебры $\mathfrak{l}$ алгебры $\mathfrak{r}$. Пусть $\mathfrak{c}$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{k}$ в алгебре $\mathfrak{r}$. Показать, что $\mathfrak{l}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{c}$. (При $x \in \mathfrak{k}$ эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ полупрост, а эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} x$ нильпотентен, следовательно, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{h}] = 0$. Если $y \in \mathfrak{c}$ и $[y, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}$, то $[y, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, поэтому $y \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{l}$.)

г) Пусть $\mathfrak{s}$ — подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{c}$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{l}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{c}$. Тогда $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} + \mathfrak{l}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. (Пусть $x = y + z$ ($y \in \mathfrak{s}$, $z \in \mathfrak{r}$) — элемент из нормализатора $\mathfrak{n}$ подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Показать, что $[y, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, откуда $y \in \mathfrak{k}$ и $z \in \mathfrak{n}$. Далее показать, что $[z, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{r} \subset \mathfrak{c}$, вследствие чего $[\mathfrak{k}, [\mathfrak{k}, z]] = 0$, откуда $[\mathfrak{k}, z] = 0$ и $z \in \mathfrak{c}$. Наконец, $[z, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}$, поэтому $z \in \mathfrak{l}$ и $x \in \mathfrak{h}$.)

д) Пусть $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{c}$ те же, что и в пункте г), и $\mathfrak{q} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ — нильпотентный радикал алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $x \in \mathfrak{q}$ и u — специальный автоморфизм $e^{\operatorname{ad} x}$. Если $u(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{k} + \mathfrak{c}$, то $x \in \mathfrak{c}$. (Рассмотреть присоединенное представление ρ алгебры $\mathfrak{s}$ в пространстве $\mathfrak{q}$ и обозначить через $\mathfrak{q}_i$ устойчивое относительно ρ дополнительное к $\mathscr{C}^{i+1}\mathfrak{q}$ подпространство в $\mathscr{C}^{i}\mathfrak{q}$. Пусть ρ_i — подпредставление представления ρ, определенное подпространством $\mathfrak{q}_i$, и $\sigma_i = \rho_i \mid \mathfrak{k}$. Пусть $\mathfrak{q}_i'$ — централизатор $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{q}_i$ и $\mathfrak{q}_i''$ — устойчивое относительно σ_i дополнительное к $\mathfrak{q}_i'$ подпространство в $\mathfrak{q}_i$. Пусть $x = x_1' + x_i'' + \ldots + x_n' + x_n''$, где $x_i' \in \mathfrak{q}_i'$, $x_i'' \in \mathfrak{q}_i''$. Рассуждая от противного, предположить, что не все x_i''

равны нулю, например, $x''_1 = \ldots = x''_{p-1} = 0$, $x''_p \neq 0$. Если $h \in \mathfrak{k}$, то $u(h) = h + [x''_p, h] + y$, где $y \in \mathscr{C}^{p+1}\mathfrak{q}$. Так как $u(h) \in \mathfrak{k} + \mathfrak{c}$, то $[x''_p, h] + y \in \mathfrak{q}'_p + \mathfrak{q}'_{p+1} + \ldots + \mathfrak{q}'_n$, поэтому $[h, x''_p] \in \mathfrak{q}'_p$ и $[h, x''_p] = 0$. Таким образом, $x''_p = 0$, что приводит к противоречию.)

е) Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{h}$ представляется единственным образом в виде суммы $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}$ и одной из подалгебр Картана некоторой подалгебры Леви алгебры $\mathfrak{g}$. (Для доказательства единственности использовать д) и теорему 5 из гл. I, § 6, n° 8.) Возникающая подалгебра Леви определена, вообще говоря, неоднозначно.

ж) Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r})$. Тогда $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{t}$. При этом $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \mathfrak{r}$ (использовать разложение Фиттинга для присоединенного представления алгебры $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}$ в пространстве $\mathfrak{g}$). Алгебра $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{r}$ нильпотентна и является радикалом алгебры Ли $\mathfrak{t}$ (использовать упражнение 5 из § 2).

з) Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда существует подалгебра Леви $\mathfrak{s}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, такая, что для любого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$

$$\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) = (\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{s}) + (\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{r}).$$

(Пользуясь обозначениями пункта ж), взять в качестве $\mathfrak{s}$ подалгебру Леви алгебры $\mathfrak{t}$, для которой $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s}) + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r})$; она существует ввиду б).[1])

¶ 12) а) Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли и G — конечная (соотв. компактная, если $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) подгруппа группы $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$. Показать, что существует подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, устойчивая относительно G. (Провести индукцию по $\dim \mathfrak{g}$ и свести к случаю, когда $\mathfrak{g}$ есть расширение нильпотентной алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ при помощи коммутативного идеала $\mathfrak{n}$, который является простым нетривиальным $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$-модулем (ср. доказательство теоремы 3). Подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$ образуют тогда аффинное пространство, ассоциированное с пространством $\mathfrak{n}$ на котором действует группа G. Применить соображения о центре тяжести.)

б) Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли и $\mathfrak{s}$ — подалгебра алгебры Ли $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$. Предположим, что $\mathfrak{s}$-модуль $\mathfrak{g}$ полупрост. Показать, что существует подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, устойчивая относительно $\mathfrak{s}$. (Метод тот же.)

¶ 13) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и G — конечная подгруппа группы $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$. Предположим, что G ***сверхразрешима*** (*Alg.*, chap. I, § 6, exercise 26). Показать, что существует подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, устойчивая относительно G.

(Провести индукцию по $\dim \mathfrak{g}$. Ввиду упражнения 12 свести все к случаю, когда алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста. Если $G \neq \{1\}$, то выбрать в G нормальную циклическую подгруппу C простого порядка (*Alg.*, *loc. cit.*). Подалгебра $\mathfrak{s}$, образованная элементами, инвариантными относительно C, редуктивна в $\mathfrak{g}$ (§ 1, n° 5) и отлична от $\mathfrak{g}$. По предположению индукции в $\mathfrak{s}$ существует подалгебра Картана $\mathfrak{a}$, устойчивая относительно G При этом $\mathfrak{s} \neq 0$ (гл. 1, § 4, упражнение 21 в)), поэтому $\mathfrak{a} \neq 0$. Централизатор $\mathfrak{z}$ подалгебры $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$ отличен от $\mathfrak{g}$ и устойчив относительно G. Выберем подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{z}$, устойчивую относительно G. Показать, что $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$; см. следствие предложения 3.)

Построить конечную группу автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, изоморфную $\mathfrak{A}_4$ (и, следовательно, разрешимую), относительно которой не будет устойчивой никакая подалгебра Картана.

---

[1]) Относительно деталей этого упражнения см. Dixmier J., Sous-algèbres de Cartan et décompositions de Levi dans les algèbres de Lie, *Trans. Royal Soc. Canada*, L (1956), 17—21.

14)* Показать, что любое неприводимое комплексное (соотв. вещественное) линейное представление конечной сверхразрешимой группы G индуцировано некоторым представлением степени 1 (соотв. степени 1 или 2) некоторой подгруппы группы G. (Применить упражиение 13 к алгебрам Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ и $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$.)$_*$

15) Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана и A — подмножество в $\mathfrak{g}$. Предположим, что A всюду плотно в $\mathfrak{g}$ (в топологии Зарисского) и устойчиво относительно $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Показать, что $A \cap \mathfrak{h}$ всюду плотно в $\mathfrak{h}$. (Пусть X — замыкание множества $A \cap \mathfrak{h}$ и $U = \mathfrak{h} - X$. Предположим, что $U \neq \varnothing$. В обозначениях леммы 2 образ при отображении F множества $U \times \mathfrak{g}^{\lambda_1}(\mathfrak{h}) \times \ldots \times \mathfrak{g}^{\lambda_p}(\mathfrak{h})$ содержит непустое открытое подмножество пространства $\mathfrak{g}$. Так как этот образ содержится в $\mathfrak{g} - A$, то это противоречит тому, что A всюду плотно в $\mathfrak{g}$.)

16) Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем k и $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Мы предлагаем доказать эквивалентность следующих трех свойств:

(i) Все подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$ коммутативны и состоят из полупростых элементов.

(ii) Все регулярные элемеиты алгебры $\mathfrak{g}$ полупросты.

(iii) Множество полупростых элементов алгебры $\mathfrak{g}$ всюду плотно в $\mathfrak{g}$ в топологии Зарисского.

а) Показать, что (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

б) Пусть A — множество полупростых элементов алгебры $\mathfrak{g}$. Показать, что оно устойчиво относительно группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

в) Показать, что (iii) $\Rightarrow$ (i). (Свести (дополнение I, упражиение 1) к случаю, когда поле k алгебраически замкнуто. Показать, используя упражнение 15, что если $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, то $A \cap \mathfrak{h}$ всюду плотно в $\mathfrak{h}$. Из того, что $[x, y] = 0$ при $x \in A \cap \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{h}$, вывести, что $\mathfrak{h}$ коммутативна, откуда следует (i).)

г) Предположим, что поле k равно $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или полному ультраметрическому недискретному полю характеристики нуль. Снабдим пространство $\mathfrak{g}$ топологией, построенной по топологии поля k. Показать, что свойства (i), (ii), (iii) эквивалентны следующему:

(iv) Миожество полупростых элементов всюду плотио в $\mathfrak{g}$.

(Показать, что (iv) $\Rightarrow$ (iii) и (ii) $\Rightarrow$ (iv), см. дополненне I, упражнение 4.)

17) Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана и A — множество элементов из центра алгебры $\mathfrak{h}$. Обозначим через $E_{\mathfrak{g}}$ подгруппу группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, обозначенную через E в п° 2. Показать, что если s — такой элемент группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, что $sA = A$, то существует элемент $t \in E_{\mathfrak{g}}$, для которого $t\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ и $t \mid A = \mathrm{Id}_A$, в частности, $ts \mid A = s \mid A$. (Пусть $\mathfrak{a}$ — централизатор множества A в алгебре $\mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{h}$ и $s\mathfrak{h}$ — подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{a}$, то существует элемент $\theta \in E_{\mathfrak{a}}$, для которого $\theta(s\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Выберем t из элементов группы $E_{\mathfrak{g}}$, продолжающих θ.)

¶ 18) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана и $U\mathfrak{g}$ (соотв. $U\mathfrak{h}$) — универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{h}$). Линейная форма φ на $U\mathfrak{g}$ называется *центральной*, если она обращается в нуль на $[U\mathfrak{g}, U\mathfrak{g}]$, т. е. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(b \cdot a)$ при всех $a, b \in U\mathfrak{g}$.

а) Пусть $x, y \in \mathfrak{g}$. Предположим, что существует такой элемеит $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, что $s(x) = y$. Показать, что тогда

$$\varphi(x^n) = \varphi(y^n)$$

для любого $n \in \mathbf{N}$ и любой центральной линейной формы φ на $U\mathfrak{g}$.

б) Пусть φ — центральная форма на $U\mathfrak{g}$, ограничение которой на $U\mathfrak{h}$ равно нулю. Показать, что $\varphi = 0$. (Можно предполагать поле k алгебраически замкнутым. Вывести из а), что $\varphi(x^n) = 0$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и любого регулярного $x \in \mathfrak{g}$. Использовать соображение о плотности, чтобы избавиться от предположения о регулярности.)

в) Показать, что $U\mathfrak{g} = [U\mathfrak{g}, U\mathfrak{g}] + U\mathfrak{h}$.

г) Пусть V — полупростой $\mathfrak{g}$-модуль. Показать, что V — полупростой $\mathfrak{h}$-модуль. В частности, $V^{\lambda}(\mathfrak{h}) = V_{\lambda}(\mathfrak{h})$ при любом $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

д) Пусть V' — полупростой $\mathfrak{g}$-модуль. Предположим, что V и V' изоморфны как $\mathfrak{h}$-модули. Показать, что они изоморфны как $\mathfrak{g}$-модули. (Заметим, что если $a \in U\mathfrak{h}$, то $\operatorname{Tr}(a_V) = \operatorname{Tr}(a_{V'})$. Вывести из этого, используя б) и в), что $\operatorname{Tr}(x_V) = \operatorname{Tr}(x_{V'})$ при всех $x \in U\mathfrak{g}$, и получить нужное утверждение на основании гл. VIII из *Алг.*)

Если поле k алгебраически замкнуто, то предположение „V и V' $\mathfrak{h}$-изоморфны" эквивалентно тому, что $\dim V_{\lambda}(\mathfrak{h}) = \dim V'_{\lambda}(\mathfrak{h})$ при всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

§ 4

Сохраним обозначения и предположения из пп° 1, 2, 3 § 4.

1) Пусть $G = \mathbf{GL}_n(k)$, $n \geqslant 0$.

а) Показать, что $r^0_{\mathrm{Ad}}(g) = n$ при любом $g \in G$.

б) Показать, что элемент $g \in G$ регулярен тогда и только тогда, когда его характеристический многочлен $P_g(T) = \det(T - g)$ сепарабелен; последнее равносильно тому, что дискриминант (*Alg.*, chap. IV, § 1, n° 10) [1]) многочлена $P_g(T)$ не равен нулю.

2) Построить группу Ли G, для которой функция r^0_{Ad} непостоянна. (Рассмотреть в качестве $\mathfrak{g}$ абелеву алгебру Ли, для которой Ad нетривиален.)

3) Пусть $(\rho_i)_{i \in I}$ — *счетное* семейство аналитических линейных представлений группы G. Доказать, что элементы группы G, регулярные относительно всех ρ_i, образуют *всюду плотное* подмножество в G. Привести пример, показывающий, что предположение о счетности нельзя снять.

4) Предположим, что $k = \mathbf{C}$ и G связна. Доказать эквивалентность следующих свойств:

(i) G нильпотентна.

(ii) Любой элемент группы G, не равный 1, регулярен. (Показать сначала, что из (ii) следует

(ii)′ Любой элемент алгебры $\mathfrak{g}$, не равный 0, регулярен

Заметить далее, что если $\mathfrak{g} \neq 0$, то существует элемент $x \neq 0$ в $\mathfrak{g}$, для которого эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, ср. § 3, упражнение 10. Вывести отсюда, что алгебра $\mathfrak{g}$ нильпотентна и свойство (i) выполняется.)

§ 5

1) Показать, что разрешимая алгебра Ли, рассмотренная в гл. I, § 5, упражнение 6, не изоморфна никакой разделяющей алгебре Ли.

2) Пусть u (соотв. v) — ненулевой полупростой (соотв. нильпотентный) эндоморфизм пространства V. Тогда отображение $\lambda u \longmapsto \lambda v$ ($\lambda \in k$) — изо-

---

[1]) См. также *Алг.*, гл. IV, § 4, n° 1 и n° 6. — *Прим. перев.*

морфизм алгебры Ли $\mathfrak{g} = ku$ на $\mathfrak{g}' = kv$, который не переводит полупростые элементы в полупростые.

3) Пусть u — неполупростой и ненильпотентный эндоморфизм пространства V. Тогда $\mathfrak{g} = ku$ не будет разделяющей алгеброй, но $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{g}$ — разделяющая алгебра

¶ 4) Пусть $\mathfrak{g}$ — разделяющая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Пусть $\mathfrak{q}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, тождественное представление которой полупросто. Тогда существует элемент $a \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, для которого $a(\mathfrak{q})$ содержится в подалгебре $\mathfrak{m}$ предложения 7. (Доказательство проводить аналогично доказательству предложения 7 (ii).)

¶ 5) Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Подалгебра $\mathfrak{g}$ называется *алгебраической*, если при любом $x \in \mathfrak{g}$ все реплики элемента x (гл. I, § 5, упражнение 14) принадлежат $\mathfrak{g}$. Такая подалгебра является разделяющей.

а) Обозначим через $a(\mathfrak{g})$ наименьшую алгебраическую подалгебру алгебры $\mathfrak{gl}(V)$, содержащую $\mathfrak{g}$. Тогда

$$a(\mathfrak{g}) \supset e(\mathfrak{g}) \supset \mathfrak{g}.$$

Привести пример, когда $a(\mathfrak{g})$ и $e(\mathfrak{g})$ различны (рассмотреть V размерности 2 и $\mathfrak{g}$ размерности 1).

б) Доказать, что если $\mathfrak{n}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{n}$ и $a(\mathfrak{n})$ — идеалы в $a(\mathfrak{g})$ и $[a(\mathfrak{n}), a(\mathfrak{g})] = [\mathfrak{n}, \mathfrak{g}]$ (следовать доказательству предложения 4). Вывести из этого, что $\mathscr{D}^i a(\mathfrak{g}) = \mathscr{D}^i \mathfrak{g}$ при $i \geqslant 1$ и $\mathscr{C}^i a(\mathfrak{g}) = \mathscr{C}^i(\mathfrak{g})$ при $i \geqslant 2$.

в) Показать, что каждая алгебра Ли, состоящая из нильпотентных элементов, является алгебраической [1]).

¶ 6) Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, $\mathsf{T}(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathsf{T}^n(V)$ — тензорная алгебра пространства V, $\mathsf{T}(V)^{\mathfrak{g}}$ — подмножество инвариантных относительно $\mathfrak{g}$ элементов алгебры $\mathsf{T}(V)$ и $\bar{\mathfrak{g}}$ — множество тех элементов $u \in \mathfrak{gl}(V)$, для которых $u \,.\, x = 0$ при всех $x \in \mathsf{T}(V)^{\mathfrak{g}}$. Надо доказать, что $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$

а) Показать, что представление алгебры $\mathfrak{g}$ в дуальном пространстве V^* к V изоморфно ее представлению в пространстве $\bigwedge^{p-1} V$, где $p = \dim V$ (использовать то, что $\mathfrak{g}$ содержится в $\mathfrak{sl}(V)$). Вывести из этого, что любой элемент пространства $\mathsf{T}_{n,m} = \mathsf{T}^n(V) \otimes \mathsf{T}^m(V^*)$, инвариантный относительно $\mathfrak{g}$, инвариантен и относительно $\bar{\mathfrak{g}}$ и что $\bar{\mathfrak{g}}$ — алгебраическая алгебра (упражнение 5).

б) Пусть W — подпространство векторного пространства $\mathsf{T}_{n,m}$. Предположим, что оно устойчиво относительно $\mathfrak{g}$. Показать, что W устойчиво относительно $\bar{\mathfrak{g}}$ (заметить, если $e_1, \ldots, e_r$ — базис в W, то элемент $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$ инвариантен относительно $\mathfrak{g}$, а следовательно, и относительно $\bar{\mathfrak{g}}$).

Вывести отсюда, что $\mathfrak{g}$ — идеал в $\bar{\mathfrak{g}}$ и что $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ коммутативна (см. доказательство предложения 4). Тогда $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ — центр алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$.

в) Пусть R — ассоциативная подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(V)$, порожденная 1 и $\mathfrak{g}$. Показать, что $\mathfrak{c}$ содержится в центре алгебры R (заметить, что $\bar{\mathfrak{g}}$ содержится в бикоммутанте (или бицентрализаторе) алгебры R, который равен R) Вывести отсюда, что элементы алгебры $\mathfrak{c}$ полупросты.

---

[1]) Относительно деталей этого упражнения см. Шевалле К., Теория групп Ли, II, Алгебраические группы, гл, II, § 14, ИЛ, М., 1958.

г) Пусть $x \in \mathfrak{c}$. Показать, что реплики элемента x тоже принадлежат $\mathfrak{c}$ (гл. I, § 5, упражнение 14). Показать, что $\operatorname{Tr}(sx) = 0$ для всех $s \in \mathfrak{g}$; вывести из этого, что $\operatorname{Tr}(sx) = 0$ при всех $s \in \bar{\mathfrak{g}}$, вследствие чего x нильпотентен (*там же*).

д) Сопоставляя в) и д), доказать, что $\mathfrak{c} = 0$ и $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}}$.

7) Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Пусть m, n — два целых числа $\geqslant 0$, а W и W' — два подпространства векторного пространства $\mathsf{T}^m(V) \otimes \mathsf{T}^n(V^*)$, где V^* — пространство, дуальное к V. Предположим, что $W' \subset W$ и W и W' устойчивы относительно естественного представления алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathsf{T}^m(V) \otimes \mathsf{T}^n(V^*)$. Показать что W и W' устойчивы также относительно $e(\mathfrak{g})$. Обозначим через π возникающее тогда представление алгебры $e(\mathfrak{g})$ в W/W'. Показать, что $\pi e(\mathfrak{g})$ — разделяющая оболочка алгебры $\pi(\mathfrak{g})$ (использовать теорему 1).

Вывести из этого, что $\operatorname{ad} e(\mathfrak{g})$ — разделяющая оболочка подалгебры $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

8) Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ и $\mathfrak{h}$ — некоторая подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$.

а) Показать, что $e(\mathfrak{g}) = e(\mathfrak{h}) + \mathscr{D}\mathfrak{g} = e(\mathfrak{h}) + \mathfrak{g}$. (Заметить, что $e(\mathfrak{h}) + \mathscr{D}\mathfrak{g}$ — разделяющая подалгебра (следствие 1 теоремы 1), она содержит $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathscr{D}\mathfrak{g}$ и содержится в $e(\mathfrak{g})$, следовательно, совпадает с $e(\mathfrak{g})$.)

б) $e(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ (заметить, что подалгебра $e(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g}$ нильпотентна).

в) Пусть x — элемент из нормализатора подалгебры $e(\mathfrak{h})$ в $e(\mathfrak{g})$. Показать, что $x \in e(\mathfrak{h})$. (Записать $x = y + z$, где $y \in e(\mathfrak{h})$, $z \in \mathfrak{g}$, ср. а), и заметить, что $[z, \mathfrak{h}] \subset e(\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, следовательно, $z \in \mathfrak{h}$.)

г) Показать, что $e(\mathfrak{h})$ — подалгебра Картана алгебры Ли $e(\mathfrak{g})$.

9) Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$. Показать, что условия (i), (ii), (iii) упражнения 16 из § 3 эквивалентны такому условию: (v) $\mathfrak{g}$ — разделяющая подалгебра и ее ранг равен рангу алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$. (Если $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$, то условие „ранг алгебры $\mathfrak{g}$ равен рангу алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$" эквивалентно условию „$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g}) = 0$", т. е. тому, что $\mathfrak{h}$ не содержит нильпотентных элементов (см. § 2, упражнение 14). Вывести из этого эквивалентность (i) и (v).)

10. Пусть k' — расширение поля k и $\mathfrak{g}'$ — некоторая k'-подалгебра алгебры Ли

$$\mathfrak{gl}(V \otimes_k k') = \mathfrak{gl}(V) \otimes_k k'.$$

а) Показать, что существует наименьшая подалгебра $\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, для которой $\mathfrak{g} \otimes_k k'$ содержит $\mathfrak{g}'$.

б) Предположим, что поле k' алгебраически замкнуто, и обозначим через G группу k-автоморфизмов поля k'. Эта группа действует естественным образом на пространстве $V \otimes_k k'$. Показать, что $\mathfrak{g} \otimes_k k'$ совпадает с подалгеброй Ли, порожденной образами $\mathfrak{g}'$ при действии группы G (использовать тот факт, что поле инвариантов группы G в k' совпадает с k).

в) Показать, что если $\mathfrak{g}'$ — разделяющая алгебра, то и $\mathfrak{g}$ — разделяющая алгебра. (Свести к случаю, когда поле k' алгебраически замкнуто, и использовать б) вместе со следствиями 1 и 3 теоремы 1.)

¶ 11) Предположим именно в этом упражнении, что *k — совершенное поле характеристики $p > 0$*.

Пусть $\mathfrak{g}$ есть p-алгебра Ли (гл. I, § 1, упражнение 20). Для $x \in \mathfrak{g}$ обозначим через $\langle x \rangle$ наименьшую p-подалгебру, содержащую x. Она коммутативна и как векторное k-пространство порождается элементами x^{p^i}, где

$i=0, 1, \ldots$ Элемент x называется *нильпотентным* (соотв. *полупростым*), если p-отображение пространства $\langle x\rangle$ нильпотентно (соотв. биективно)

а) Показать, что элемент x можно единственным образом представить в виде $x=s+n$, где $s, n \in \langle x\rangle$ и s — полупростой элемент, а n — нильпотентный (применить упражнение 23 из гл. I, § 1). Если f есть p-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(V)$, то $f(s)$ и $f(n)$ совпадают с полупростой и нильпотентной компонентами эндоморфизма $f(x)$; это нужно применить к присоединенному представлению.

б) Подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$ называется *разделяющей*, если она содержит полупростую и нильпотентную компоненты каждого своего элемента. Показать, что если $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ — подпространства векторного пространства $\mathfrak{g}$, причем $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{c}$, то множество элементов $x \in \mathfrak{g}$, для которых $[x, \mathfrak{c}] \subset \mathfrak{b}$ — разделяющая подалгебра (то же доказательство, что и для предложения 3); в частности, каждая подалгебра Картана разделяющая.

в) Пусть $\mathfrak{t}$ — коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, состоящая из нильпотентных элементов и максимальная относительно этого свойства. Пусть $\mathfrak{h}$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$. Пусть $x \in \mathfrak{h}$ и $x=s+n$ — его каноническое разложение. Так как $\mathfrak{h}$ — разделяющая подалгебра, то $s, n \in \mathfrak{h}$ (см. б)). Показать, что подалгебра, порожденная $\mathfrak{t}$ и s, коммутативна и состоит из полупростых элементов; следовательно, она совпадает с $\mathfrak{t}$ Вывести отсюда, что эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} n$ нильпотентен, следовательно, подалгебра $\mathfrak{h}$ нильпотентна Так как $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$, то $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры $\mathfrak{g}$ (§ 2, предложение 4).

В частности, любая p-алгебра Ли над конечным полем обладает подалгеброй Картана [1]).

Дополнение I

Обозначим через V векторное пространство конечной размерности над полем k.

1) Пусть k' — расширение поля k и $V_{(k')}=V \otimes_k k'$. Показать, что топология Зарисского на пространстве $V_{(k')}$ индуцирует на V топологию Зарисского пространства V и что V всюду плотно в $V_{(k')}$.

2) Предположим, что V равно произведению двух векторных пространств V_1 и V_2.

а) Топология Зарисского на пространстве V более тонкая, чем произведение топологий Зарисского на V_1 и V_2; она строго более тонкая, если $V_1 \neq 0$ и $V_2 \neq 0$.

б) Если A_1 (соотв. A_2) — подмножество в V_1 (соотв. в V_2), то замыкание $A_1 \times A_2$ равно произведению замыканий A_1 и A_2.

3) Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть A и B — два замкнутых подмножества пространства V и $\mathfrak{a}$ (соотв. $\mathfrak{b}$) — множество функций $f \in A_V$, обращающихся в нуль на A (соотв. на B). Доказать эквивалентность следующих свойств:

(i) $A \cap B = \varnothing$.

(ii) $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=A_V$.

(iii) Существует полиномиальная функция на пространстве V, равная 1 на A и 0 на B.

(Использовать теорему Гильберта о нулях (*Комм. алг.*, гл. V, § 3, n° 3) для доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii).)

---

[1]) Относительно деталей этого упражнения см. Seligman G. B., Modular Lie Algebras, chap. V, § 7, Springer-Verlag, 1967.

4) Предположим, что k — полное поле недискретного нормирования. Обозначим через $\mathcal{T}$ (соотв. через $\mathcal{Z}$) топологию банахова пространства V (соотв. его топологию Зарисского).

а) Показать, что топология $\mathcal{T}$ более тонкая, чем $\mathcal{Z}$ (и даже строго более тонкая, если $V \neq 0$).

б) Показать, что любое непустое $\mathcal{Z}$-открытое подмножество пространства V $\mathcal{T}$-всюду плотно.

Дополнение II

¶ 1) Пусть X — локально связное топологическое пространство, $\mathscr{C}(X)$ — пространство вещественнозначных непрерывных функций на X и d — целое число $\geqslant 0$. Пусть $F \in \mathscr{C}(X)[T]$ — унитарный многочлен степени d с коэффициентами в $\mathscr{C}(X)$,

$$F = T^d + T^{d-1}f_1 + \ldots + f_d, \quad f_i \in \mathscr{C}(X).$$

Рассмотрим F как функцию на $\mathbf{R} \times X$, полагая

$$F(t, x) = t^d + t^{d-1}f_1(x) + \ldots + f_d(x), \quad \text{если} \quad t \in \mathbf{R}, \ x \in X.$$

Пусть $\Delta \in \mathscr{C}(X)$ — *дискриминант* многочлена F (*Alg*, chap. IV, § 1, n° 10).

Для открытого подмножества $U \subset X$ обозначим через Z_U множество тех (t, x), где $t \in \mathbf{R}$ и $x \in U$, что $F(t, x) = 0$; это замкнутое подмножество в $\mathbf{R} \times U$.

а) Показать, что проекция pr_2: $Z_U \to U$ — собственное отображение (*Общ. топ.*, гл. 1, § 10).

б) Предположим, что U связно и $\Delta(x) \neq 0$ при всех $x \in U$. Показать, что $Z_U \to U$ — накрытие пространства U (*Общ. топ.*, гл. XI) степени $\leqslant d$ и что число связных компонент пространства $\mathbf{R} \times U - Z_U$ не превосходит $d + 1$.

в) Пусть X' — множество тех точек в X, для которых $\Delta \neq 0$. Предположим, что X' всюду плотно в X. Обозначим через $\mathscr{A}$ (соотв. через $\mathscr{B}$) множество связных компонент множества X' (соотв. $\mathbf{R} \times X - Z_X$). Показать, что

$$\mathrm{Card}(\mathscr{B}) \leqslant (d + 1)\,\mathrm{Card}(\mathscr{A}) \text{ (использовать б)).}$$

г) Предположим, что X связно и $d \geqslant 1$. Показать, что

$$\mathrm{Card}(\mathscr{B}) \leqslant (1 + d)\,\mathrm{Card}(\mathscr{A}).$$

¶ 2) Пусть V — вещественное векторное пространство конечной размерности n и F — полиномиальная функция на V степени d. Обозначим через V' множество тех точек пространства V, для которых $F \neq 0$. Показать, что число связных компонент пространства V' конечно, и это число ограничено некоторой константой, зависящей только от n и d. (Провести индукцию по n. Свести к случаю, когда F не имеет кратных множителей, и показать возможность представления V в виде $\mathbf{R} \times X$ таким образом, чтобы результаты упражнения 1 были применимы к F [1]).)

[1]) Относительно других результатов в том же направлении см. Milnor J, On the Betti numbers of real varieties, *Proc. Amer. Math. Soc.*, XV (1964), 275—280.

ГЛАВА VIII

РАСЩЕПЛЕННЫЕ ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

В этой главе k — поле нулевой характеристики. Если не оговорено противное, то под „векторным пространством“ понимается „векторное пространство над полем k“; то же самое относится к алгебрам Ли и т. п.

§ 1. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ и ее представления

1. Канонический базис в $\mathfrak{sl}(2, k)$

Лемма 1. Пусть A — ассоциативная k-алгебра, а H *и* X *— такие элементы из A, что* $[\mathrm{H}, \mathrm{X}]=2\mathrm{X}$. *Тогда*

(i) $[\mathrm{H}, \mathrm{X}^n]=2n\mathrm{X}^n$ *для любого целого* $n \geqslant 0$;

(ii) *Если* Z *— такой элемент алгебры A, что* $[\mathrm{Z}, \mathrm{X}]=\mathrm{H}$, *то для всех целых* $n>0$

$$[\mathrm{Z}, \mathrm{X}^n]=n\mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{H}+n-1)=n(\mathrm{H}-n+1)\mathrm{X}^{n-1}.$$

Отображение $A \to A$, заданное формулой $\mathrm{T} \mapsto [\mathrm{H}, \mathrm{T}]$, является дифференцированием; отсюда следует утверждение (i). По условию утверждения (ii) имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}[\mathrm{Z}, \mathrm{X}^n] &= \sum_{i+j=n-1} \mathrm{X}^i\mathrm{H}\mathrm{X}^j = \\ &= \sum_{i+j=n-1} (\mathrm{X}^i\mathrm{X}^j\mathrm{H}+\mathrm{X}^i 2j\mathrm{X}^j) = \\ &= n\mathrm{X}^{n-1}\mathrm{H}+2\mathrm{X}^{n-1}\frac{n(n-1)}{2} = \\ &= n\mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{H}+n-1).\end{aligned}$$

С другой стороны, вследствие пункта (i), $\mathrm{X}^{n-1}(\mathrm{H}+n-1)=(\mathrm{H}-n+1)\mathrm{X}^{n-1}$. Ч. Т. Д.

Напомним, что символом $\mathfrak{sl}(2, k)$ обозначается алгебра Ли, состоящая из квадратных матриц 2-го порядка с коэффициентами из поля k со следом нуль. Эта алгебра является простой

3-мерной алгеброй Ли (гл. I, § 6, n° 7, *пример*). Каноническим базисом в $\mathfrak{sl}(2, k)$ называется базис (X_+, X_-, H), где

$$X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выполняются следующие равенства:

$$[H, X_+] = 2X_+, \quad [H, X_-] = -2X_-, \quad [X_+, X_-] = -H. \qquad (1)$$

Тождественное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ инъективно, поэтому H — полупростой элемент алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$, а X_+, X_- — ее нильпотентные элементы (гл. I, § 6, n° 3, теорема 3). Как следует из примера 4 гл. VII, § 2, n° 1, пространство kH является подалгеброй Картана в $\mathfrak{sl}(2, k)$. Отображение $U \mapsto -{}^tU$ — инволютивный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$, называемый ее *канонической инволюцией*; эта инволюция переводит базис (X_+, X_-, H) в базис $(X_-, X_+, -H)$.

Лемма 2. *В универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли* $\mathfrak{sl}(2, k)$ *для всех целых* $n \geqslant 0$ *выполняются соотношения*

$$[H, X_+^n] = 2nX_+^n, \quad [H, X_-^n] = -2nX_-^n,$$

а если $n > 0$, *то*

$$[X_-, X_+^n] = nX_+^{n-1}(H + n - 1) = n(H - n + 1)X_+^{n-1},$$
$$[X_+, X_-^n] = nX_-^{n-1}(-H + n - 1) = n(-H - n + 1)X_-^{n-1}.$$

Первое и третье соотношения следуют из леммы 1. Остальные соотношения выводятся из них с помощью канонической инволюции алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$.

2. *Примитивные элементы* $\mathfrak{sl}(2, k)$*-модулей*

Пусть E — некоторый $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль. Если $A \in \mathfrak{sl}(2, k)$ и $x \in E$, то часто вместо $A_E x$ пишут Ax. Пусть $\lambda \in k$. Если $Hx = \lambda x$, то, допуская вольность речи, говорят, что x — элемент из E *веса* λ или что λ — *вес элемента* x. Если E — конечномерный модуль, то H_E — полупростой эндоморфизм, поэтому множество элементов веса λ является примарным подпространством эндоморфизма H_E в пространстве E, отвечающим весу λ (см. гл. VII, § 1, n° 1).

Лемма 3. *Если* x — *элемент веса* λ, *то* X_+x — *элемент веса* $\lambda + 2$, *а* X_-x — *элемент веса* $\lambda - 2$.

Действительно, $HX_+x = [H, X_+]x + X_+Hx = 2X_+x + X_+\lambda x = (\lambda + 2)X_+x$ и, аналогично, $HX_-x = (\lambda - 2)X_-x$ (см. также гл. VII, § 1, n°3, предложение 10(ii)).

Определение 1. *Пусть E — некоторый $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль. Его ненулевой элемент называется примитивным, если он является собственным вектором эндоморфизма H_E и принадлежит ядру эндоморфизма X_{+E}.*

Для того чтобы ненулевой элемент $e \in E$ был примитивным, необходимо и достаточно, чтобы пространство ke было устойчивым относительно действия эндоморфизмов из $kH + kX_+$; это следует, например, из леммы 3.

Примеры. Элемент X_+ является примитивным элементом веса 2 относительно присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$. Элемент $(1, 0)$ пространства k^2 является примитивным элементом веса 1 относительно тождественного представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в k^2.

Лемма 4. Пусть E — нетривиальный конечномерный $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль. Тогда он содержит примитивный элемент.

Так как X_+ — нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$, то X_{+E} — нильпотентный эндоморфизм. Предположим, что $X_{+E}^{m-1} \neq 0$, а $X_{+E}^m = 0$. Тогда по лемме 2

$$m(H_E - m + 1)X_{+E}^{m-1} = [X_{-E}, X_{+E}^m] = 0,$$

и, следовательно, элементы множества $X_+^{m-1}(E) - \{0\}$ являются примитивными.

Предложение 1. *Пусть E — некоторый $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль, а e — примитивный элемент модуля E веса λ. Положим $e_n = \frac{(-1)^n}{n!} X_-^n e$ для $n \geqslant 0$ и $e_{-1} = 0$. Тогда*

$$\left.\begin{aligned} He_n &= (\lambda - 2n)e_n, \\ X_-e_n &= -(n+1)e_{n+1}, \\ X_+e_n &= (\lambda - n + 1)e_{n-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Первое равенство следует из леммы 3, второе — из определения элементов e_n. Докажем третье равенство индукцией по n. Оно справедливо при $n = 0$, так как $e_{-1} = 0$. Если $n > 0$, то

$$\begin{aligned} nX_+e_n &= -X_+X_-e_{n-1} = -[X_+, X_-]e_{n-1} - X_-X_+e_{n-1} = \\ &= He_{n-1} - X_-(\lambda - n + 2)e_{n-2} = \\ &= (\lambda - 2n + 2 + (n-1)(\lambda - n + 2))e_{n-1} = \\ &= n(\lambda - n + 1)e_{n-1}. \end{aligned}$$

Следствие. *Подмодуль модуля E, порожденный элементом e, совпадает с подпространством векторного пространства E, натянутым на векторы e_n.*

Это непосредственно вытекает из формул (2).

Целые числа $n \geqslant 0$, такие, что $e_n \neq 0$, составляют некоторый интервал в множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$, а соответствующие векторы e_n образуют базис над полем k подмодуля, порожденного элементом e (действительно, эти элементы линейно независимы, так как являются ненулевыми весовыми векторами с различными весами). Такой базис мы будем называть базисом, *ассоциированным* с примитивным элементом e.

Предложение 2. *Пусть V — конечномерный подмодуль модуля E, порожденный примитивным элементом e. Тогда*

(i) *вес λ элемента e — целое число, равное* $\dim V - 1$;

(ii) *набор* $(e_0, e_1, \ldots, e_\lambda)$ *является базисом пространства V и $e_n = 0$ при $n > \lambda$;*

(iii) *собственными значениями эндоморфизма H_V служат числа λ, $\lambda - 2$, $\lambda - 4$, ..., $-\lambda$, кратность каждого собственного значения равна* 1;

(iv) *каждый примитивный элемент пространства V пропорционален e;*

(v) *коммутант*[1]) *модуля V состоит из скаляров, в частности, модуль V абсолютно прост.*

Пусть m — наибольшее из тех целых чисел, для которых $e_m \neq 0$. Тогда $0 = \mathrm{X}_+ e_{m+1} = (\lambda - m) e_m$, следовательно, $\lambda = m$; так как набор $(e_0, e_1, \ldots, e_m)$ является базисом пространства V, то утверждения (i) и (ii) доказаны. Утверждение (iii) следует из равенства $\mathrm{H}e_n = (\lambda - 2n) e_n$. Имеем $\mathrm{X}_+ e_n \neq 0$ для $1 \leqslant n \leqslant m$, откуда следует (iv). Пусть c — элемент коммутанта модуля V. Тогда $\mathrm{H}c(e) = c\mathrm{H}(e) = \lambda c(e)$, следовательно, существует такой элемент $\mu \in k$, что $c(e) = \mu e$. Значит,

$$c\mathrm{X}_-^q e = \mathrm{X}_-^q c e = \mu \mathrm{X}_-^q e$$

для всех $q \geqslant 0$. Таким образом, $c = \mu \,.\, 1$, что и доказывает утверждение (v).

Следствие. *Пусть E — конечномерный $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль.*

(i) *Эндоморфизм H_E диагонализуем, и его собственные значения являются целыми числами.*

(ii) *Для каждого числа $p \in \mathbf{Z}$ обозначим через E_p собственное подпространство эндоморфизма H_E, отвечающее собственному значению p. Пусть i — целое число, большее или равное нулю.*

[1]) См. *Алг.*, гл. VIII, § 1, n°2, определение 4. — *Прим. перев.*

Отображение $X_{-E}^{i} \mid E_p\colon E_p \to E_{p-2i}$ *инъективно при* $i \leqslant p$, *биективно при* $i = p$ *и сюръективно при* $i \geqslant p$. *Отображение* $X_{+E}^{i} \mid E_{-p}\colon E_{-p} \to E_{-p+2i}$ *инъективно при* $i \leqslant p$, *биективно при* $i = p$ *и сюръективно при* $i \geqslant p$.

(iii) *Длина модуля* E *равна* $\dim \operatorname{Ker} X_{+E}$ *и* $\dim \operatorname{Ker} X_{-E}$.

(iv) *Пусть* E' (соотв. E'') — *сумма пространств* E_p *по четным* (соотв. *нечетным*) p. *Тогда пространство* E' (соотв. E'') *является суммой простых подмодулей модуля* E, *имеющих нечетную* (соотв. *четную*) *размерность; имеем* $E = E' \oplus E''$. *Длина модуля* E' *равна* $\dim E_0$, *а длина модуля* E'' *равна* $\dim E_1$.

(v) *Имеют место следующие включения*:

$$\operatorname{Ker} X_{+E} \cap \operatorname{Im} X_{+E} \subset \sum_{p>0} E_p$$

и

$$\operatorname{Ker} X_{-E} \cap \operatorname{Im} X_{-E} \subset \sum_{p<0} E_p.$$

Если E — простой модуль, то он порожден примитивным элементом (лемма 4), и достаточно применить предложения 1 и 2. Так как все конечномерные $\mathfrak{sl}(2, k)$-модули полупросты, то тем самым утверждения следствия доказаны и в общем случае.

3. *Простые модули* $V(m)$

Пусть (u, v) — канонический базис пространства k^2. Для тождественного представления $\mathfrak{sl}(2, k)$ верны следующие соотношения:

$$\begin{array}{lll} X_+u = 0, & Hu = u, & X_-u = -v, \\ X_+v = u, & Hv = -v, & X_-v = 0. \end{array}$$

Рассмотрим симметрическую алгебру $\mathrm{S}(k^2)$ пространства k^2 (*Алг.*, гл. III, § 8, n°9, предложение 17). Действие элементов из $\mathfrak{sl}(2, k)$ однозначно продолжается до дифференцирований алгебры $\mathrm{S}(k^2)$. Таким образом, мы снабжаем $\mathrm{S}(k^2)$ структурой $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуля (гл. I, § 3, n°2). Пусть $V(m)$ — множество однородных элементов алгебры $\mathrm{S}(k^2)$ степени m. Тогда $V(m)$ — $\mathfrak{sl}(2, k)$-подмодуль модуля $\mathrm{S}(k^2)$ размерности $m+1$, являющийся m-й симметрической степенью модуля $V(1) = k^2$ (гл. III, дополнение). Для целых чисел m, n, таких, что $0 \leqslant n \leqslant m$, положим

$$e_n^{(m)} = \binom{m}{n} u^{m-n} v^n \in V(m).$$

Предложение 3. *При любых* $m \geqslant 0$ $V(m)$ — *абсолютно простой* $\mathfrak{sl}(2, k)$-*модуль. В этом модуле* $e_0^{(m)} = u^m$ *является примитивным элементом веса* m.

Имеем $X_+ u^m = 0$ и $Hu^m = mu^m$; следовательно, u^m — примитивный элемент веса m. Подмодуль модуля $V(m)$, порожденный элементом u^m, имеет размерность $m+1$ (предложение 2(i)) и, значит, совпадает с $V(m)$. Из предложения 2 (v) вытекает, что модуль $V(m)$ абсолютно прост.

Теорема 1. *Каждый простой* $\mathfrak{sl}(2, k)$-*модуль конечной размерности* n *изоморфен модулю* $V(n-1)$. *Каждый конечномерный* $\mathfrak{sl}(2, k)$-*модуль является прямой суммой подмодулей, изоморфных модулям* $V(m)$.

Эта теорема следует из леммы 4 и предложений 1, 2, 3.

Замечания. 1) Присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ определяет на ней структуру простого $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуля. Этот модуль изоморфен $V(2)$; соответствующий изоморфизм переводит u^2 в X_+, $2uv$ в $-H$, v^2 в X_-.

2) Для $n \geqslant 0$ и $m \geqslant n$ имеем

$$X_- e_n^{(m)} = -(m-n)\binom{m}{n} u^{m-n-1} v^{n+1} = -(n+1)\, e_{n+1}^{(m)}.$$

Следовательно, $(e_0^{(m)}, e_1^{(m)}, \ldots, e_m^{(m)})$ — базис модуля $V(m)$, ассоциированного с примитивным элементом $e_0^{(m)}$.

3) Пусть Φ — такая билинейная форма на $V(m)$, что

$$\Phi(e_n^{(m)}, e_{n'}^{(m)}) = 0, \quad \text{если} \quad n + n' \neq m,$$

$$\Phi(e_n^{(m)}, e_{m-n}^{(m)}) = (-1)^n \binom{m}{n}.$$

Если $x = au + bv$ и $y = cu + dv$, то $\Phi(x^m, y^m) = (ad - bc)^m$. Легко проверить, что форма Φ инвариантна, симметрична при четных и знакопеременна при нечетных m.

Предложение 4. *Пусть* E — *конечномерный* $\mathfrak{sl}(2, k)$-*модуль,* m — *целое число, большее или равное нулю,* P_m — *множество примитивных элементов веса* m. *Пусть* L — *векторное пространство гомоморфизмов из* $\mathfrak{sl}(2, k)$-*модуля* $V(m)$ *в* $\mathfrak{sl}(2, k)$-*модуль* E. *Отображение* $f \mapsto f(u^m)$ *пространства* L *в* E *линейно, инъективно и его образом является* $P_m \cup \{0\}$.

Очевидно, что это отображение линейно. Оно также инъективно, поскольку элемент u^m порождает $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль $V(m)$. Если $f \in L$, то

$$X_+(f(u^m)) = f(X_+u^m) = 0, \quad H(f(u^m)) = f(Hu^m) = mf(u^m),$$

следовательно, $f(u^m) \in P_m \cup \{0\}$. Пусть $e \in P_m$ и V — подмодуль модуля E, порожденный элементом e. В силу предложения 1 существует изоморфизм модуля $V(m)$ на модуль V, который переводит u^m в e. Итак, $L(u^m) = P_m \cup \{0\}$.

Следствие. *Длина изотипной компоненты типа $V(m)$ модуля E равна*

$$\dim(P_m \cup \{0\}).$$

4. *Линейные представления группы* $\mathbf{SL}(2, k)$

Напомним (*Alg.*, chap. III, § 8, n°9), что символом $\mathbf{SL}(2, k)$ обозначается группа квадратных матриц порядка 2 с коэффициентами в поле k и определителем, равным 1. Если элемент $x \in \mathfrak{sl}(2, k)$ нильпотентен, то $x^2 = 0$ (*Alg.*, chap. VII, § 5, corollaire 3 de la proposition 5) и $e^x = 1 + x \in \mathbf{SL}(2, k)$. Если E — конечномерное векторное пространство и ρ — линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в пространстве E, то эндоморфизм $\rho(x)$ нильпотентен, и, следовательно, определен эндоморфизм $e^{\rho(x)}$ (гл. I, § 6, n°3).

Определение 2. *Пусть E — конечномерное векторное пространство и ρ (соотв. π) — линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ (соотв. группы Ли $\mathbf{SL}(2, k)$) в пространстве E. Скажем, что представления ρ и π согласованы, если для каждого нильпотентного элемента x алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ выполняется равенство $\pi(e^x) = e^{\rho(x)}$.*

Иначе говоря, *представления ρ и π согласованы, если для любого нильпотентного элемента x из $\mathfrak{sl}(2, k)$ ограничение представления ρ на подалгебру Ли kx согласовано с ограничением представления π на группу* $1 + kx$ (гл. VII, § 3, n°1).

Если представления ρ и π согласованы, то дуальные представления, m-е тензорные и m-е симметрические степени представлений ρ и π тоже согласованы (гл. VII, § 5, n°4, леммы 1 (i) и (ii)). Согласованными являются также представления, индуцированные представлениями ρ и π на векторном подпространстве, устойчивом относительно представлений ρ и π (*там же*).

В частности, представление ρ_m алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в пространстве $V(m)$ (n°3) согласовано с m-й симметрической степенью π_m тождественного представления π_1 группы $\mathbf{SL}(2, k)$.

Как и выше, полагая $e_n^{(m)} = \binom{m}{n} u^{m-n} v^n$, получим, что

$$\pi_m(s)\, e_n^{(m)} = \binom{m}{n} (su)^{m-n} (sv)^n \tag{3}$$

для $s \in \mathbf{SL}(2, k)$ и $0 \leqslant n \leqslant m$.

Теорема 2. *Пусть ρ — линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в конечномерном векторном пространстве E.*

(i) *Существует единственное линейное представление π группы $\mathbf{SL}(2, k)$ в пространстве E, согласованное с представлением ρ.*

(ii) *Для того чтобы подпространство F пространства E было устойчивым относительно представления π, необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчивым относительно представления ρ.*

(iii) *Пусть $x \in E$. Равенство $\pi(s) x = x$ выполняется для любого элемента $s \in \mathbf{SL}(2, k)$ тогда и только тогда, когда элемент x инвариантен относительно представления ρ (т. е. $\rho(a) x = 0$ для всех $a \in \mathfrak{sl}(2, k)$).*

Существование представления π следует из предыдущего и из теоремы 1. С другой стороны, известно, что группа Ли $\mathbf{SL}(2, k)$ порождается элементами вида

$$e^{tX_+} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-tX_-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix},$$

где $t \in k$ (*Alg.*, chap. III, § 8, n° 9, proposition 17). Это доказывает единственность представления π.

Утверждения (ii) и (iii) следуют из сказанного и леммы 1 (i) гл. VII, § 3, n° 1. Ч. Т. Д.

Каждый конечномерный $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль снабжен также канонической структурой $\mathbf{SL}(2, k)$-модуля, которая называется *ассоциированной* со структурой $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуля.

Замечание. Когда поле k есть $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или ультраметрическое полное недискретное поле, алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ является алгеброй Ли группы Ли $\mathbf{SL}(2, k)$. Пусть ρ и π такие же, как в теореме 2. Гомоморфизм π является гомоморфизмом *группы Ли* $\mathbf{SL}(2, k)$ в *группу Ли* $\mathbf{GL}(E)$; это очевидно, когда $E = V(m)$; ввиду теоремы 1 отсюда следует и общий случай. Ввиду гл. VII, § 3, n° 1, имеем $\rho(X_+) = L(\pi)(X_+)$, $\rho(X_-) = L(\pi)(X_-)$. Таким образом, $\rho = L(\pi)$ (обратное утверждение см. в упражнении 18).

Предложение 5. *Пусть E, F — конечномерные $\mathfrak{sl}(2, k)$-модули и $f \in \mathrm{Hom}_k(E, F)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *f — гомоморфизм $\mathfrak{sl}(2, k)$-модулей.*

(ii) *f — гомоморфизм $\mathbf{SL}(2, k)$-модулей.*

Условие (i) означает, что f — инвариантный элемент $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуля $\mathrm{Hom}_k(E, F)$, а условие (ii) означает, что f — инвариантный элемент $\mathbf{SL}(2, k)$-модуля $\mathrm{Hom}_k(E, F)$. Так как вследствие леммы 1 (iii) из гл. VII, § 5, n° 4, структуры этих модулей согласованы, то предложение вытекает из теоремы 2 (iii).

Определение 3. *Присоединенным представлением группы* $\mathbf{SL}(2, k)$ *называется линейное представление* Ad *группы* $\mathbf{SL}(2, k)$ *в пространстве* $\mathfrak{sl}(2, k)$, *определенное равенством*

$$\mathrm{Ad}(s) . a = sas^{-1}$$

для всех $a \in \mathfrak{sl}(2, k)$ *и всех* $s \in \mathbf{SL}(2, k)$.

Когда поле k есть $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или ультраметрическое полное недискретное поле, мы получаем определение 7 из гл. III, § 3, n° 12 (см. *там же*, предложение 49).

Из леммы 1 (i) и (iii) гл. VII, § 5, n° 4, следует, что присоединенные представления $\mathfrak{sl}(2, k)$ и $\mathbf{SL}(2, k)$ *согласованы*. Из замечания 2 гл. VII, § 3, n° 4, следует, что $\mathrm{Ad}(\mathbf{SL}(2, k)) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{sl}(2, k))$.

5. *Некоторые элементы из группы* $\mathbf{SL}(2, k)$

Для произвольного $t \in k^*$ положим

$$\begin{aligned}\theta(t) &= e^{tX_+} e^{t^{-1}X_-} e^{tX_+} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= e^{t^{-1}X_-} e^{tX_+} e^{t^{-1}X_-}.\end{aligned}$$

В обозначениях n° 3 получим, что

$$\theta(t)\, u = -t^{-1} v, \quad \theta(t)\, v = tu,$$

следовательно,

$$\theta(t)\, e_n^{(m)} = (-1)^{m-n}\, t^{2n-m} e_{m-n}^{(m)}. \tag{4}$$

Таким образом, элемент $\theta(t)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ действует на $V(m)$ как оператор умножения на $(-1)^m$. Если E — простой $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль нечетной размерности, то эндоморфизм $\theta(t)_E$ является инволютивным автоморфизмом векторного пространства E. В частности, взяв в качестве E пространство присоединенного представления, мы получим, что

$$\theta(t)_E\, X_+ = t^{-2} X_-, \quad \theta(t)_E\, X_- = t^2 X_+, \quad \theta(t)_E\, H = -H. \tag{5}$$

Таким образом, эндоморфизм $\theta(1)_E = \theta(-1)_E$ является канонической инволюцией в алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$.

Для любого элемента $t \in k^*$ положим

$$h(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = \theta(t)\,\theta(-1).$$

Тогда $h(t)\,u = tu$, $h(t)\,v = t^{-1}v$ и, следовательно,

$$h(t)\,e_n^{(m)} = t^{m-2n}e_n^{(m)}. \tag{6}$$

Предложение 6. *Пусть E — конечномерный $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль и $t \in k^*$. Пусть E_p — множество элементов модуля E веса p.*

(i) $\theta(t)_E \mid E_p$*—биективное отображение пространства E_p на E_{-p}.*

(ii) *Отображение $h(t)_E \mid E_p$ действует на E_p как гомотетия с коэффициентом t^p.*

Если $E = V(n)$, то это предложение следует из формул (4) и (6). Общий случай получается отсюда благодаря теореме 1.

Следствие. *Пусть $E = E' \oplus E''$ — разложение пространства E, определенное в предложении 2. Элемент $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ из группы* $\mathbf{SL}(2, k)$ *действует на пространстве E' как оператор умножения на $+1$, а на пространстве E'' — как оператор умножения на -1.*

Это следует из утверждения (ii), примененного в случае $t = -1$.

§ 2. Система корней расщепленной полупростой алгебры Ли

1. Расщепленные полупростые алгебры Ли

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется расщепляющей, если для всех $x \in \mathfrak{h}$ оператор $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x$ приводится к треугольному виду. Говорят, что полупростая алгебра Ли расщепляема, если она содержит расщепляющую подалгебру Картана. Полупростой расщепленной алгеброй Ли называется пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, где $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ — ее расщепляющая подалгебра Картана.*

Замечания. 1) Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана. Для всех $x \in \mathfrak{h}$ эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x$ полупрост (гл. VII, § 2, n°4, теорема 2). Поэтому утверждение о том, что $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра, равносильно утверждению о диагонализуемости эндоморфизма $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x$ для всех $x \in \mathfrak{h}$.

2) Если поле k алгебраически замкнуто, то каждая полупростая алгебра Ли расщепляема и каждая ее подалгебра

Картана расщепляющая. Когда поле k не является алгебраически замкнутым, то существуют нерасщепляемые полупростые алгебры Ли (упражнение 2 а)), более того, в расщепляемой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ могут быть подалгебры Картана, не являющиеся расщепляющими (упражнение 2 б)).

3) Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана, ρ — такое конечномерное точное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что эндоморфизмы из $\rho(\mathfrak{h})$ приводятся к диагональному виду. Тогда для любого $x \in \mathfrak{h}$ эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ приводится к диагональному виду (гл. VII, § 2, n° 1, пример 2), и, следовательно, $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра.

4) Мы увидим (§ 3, n° 3, следствие предложения 10), что если $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$ — расщепляющие подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то существует элементарный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, переводящий $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{h}'$.

5) Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, где $\mathfrak{c}$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{s} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$ имеют вид $\mathfrak{h} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{h}'$, где $\mathfrak{h}'$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{s}$ (гл. VII, § 2, n° 1, предложение 2). Говорят, что подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ расщепляющая, если $\mathfrak{h}'$ — расщепляющая подалгебра Картана в $\mathfrak{s}$. Отсюда очевидным образом выводится определение расщепляемых и расщепленных редуктивных алгебр.

2. *Корни расщепленной полупростой алгебры Ли*

В этом пункте $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *означает расщепленную полупростую алгебру Ли.*

Для любого элемента $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ обозначим через $\mathfrak{g}^\lambda(\mathfrak{h})$ или просто через $\mathfrak{g}^\lambda$ примарное подпространство пространства $\mathfrak{g}$ веса λ (ср. гл. VII, § 1, n° 3). Напомним следующие факты: $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$ (гл. VII, § 2, n° 1, предложение 4); алгебра Ли $\mathfrak{g}$ — прямая сумма пространств $\mathfrak{g}^\lambda$ (гл. VII, § 1, n° 3, предложения 8 и 9); пространство $\mathfrak{g}^\lambda$ — это множество таких элементов $x \in \mathfrak{g}$, что $[h, x] = \lambda(h)x$ для всех $h \in \mathfrak{h}$ (гл. VII, § 2, n° 4, следствие 1 теоремы 2); линейные функции λ на $\mathfrak{h}$, такие, что $\mathfrak{g}^\lambda \neq 0$, называются *весами* подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (гл. VII, § 1, n° 1).

Определение 2. *Корнями расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *называются ненулевые веса подалгебры Картана* $\mathfrak{h}$ *в алгебре Ли* $\mathfrak{g}$.

Множество корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ обозначают через $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ или просто через R. При этом

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Предложение 1. *Пусть* α, β — *корни расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, *а* $\langle .\,, .\rangle$ — *инвариантная симметрическая билинейная форма на пространстве* $\mathfrak{g}$ (*например, форма Киллинга на* $\mathfrak{g}$).

(i) *Если* $\alpha+\beta\neq 0$, *то подпространства* $\mathfrak{g}^\alpha$ *и* $\mathfrak{g}^\beta$ *ортогональны. Ограничение формы* $\langle .\,, .\rangle$ *на* $\mathfrak{g}^\alpha\times\mathfrak{g}^{-\alpha}$ *невырожденно. Ограничение формы* $\langle .\,, .\rangle$ *на подалгебру Картана* $\mathfrak{h}$ *невырожденно.*

(ii) *Пусть* $x\in\mathfrak{g}^\alpha$, $y\in\mathfrak{g}^{-\alpha}$ *и* $h\in\mathfrak{h}$. *Тогда* $[x, y]\in\mathfrak{h}$ *и*

$$\langle h, [x, y]\rangle = \alpha(h)\langle x, y\rangle.$$

Утверждение (i) является частным случаем предложения 10 (iii) из гл. VII, § 1, n° 3. Если $x\in\mathfrak{g}^\alpha$, $y\in\mathfrak{g}^{-\alpha}$ и $h\in\mathfrak{h}$, то $[x, y]\in\mathfrak{g}^{\alpha-\alpha}=\mathfrak{h}$ и

$$\langle h, [x, y]\rangle = \langle [h, x], y\rangle = \langle \alpha(h)x, y\rangle = \alpha(h)\langle x, y\rangle.$$

Теорема 1. *Пусть* α — *корень расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(i) *Векторное пространство* $\mathfrak{g}^\alpha$ *одномерно.*

(ii) *Векторное подпространство* $\mathfrak{h}_\alpha=[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ *пространства* $\mathfrak{h}$ *одномерно. Оно содержит единственный элемент* H_α, *такой, что* $\alpha(\mathrm{H}_\alpha)=2$.

(iii) *Векторное подпространство* $\mathfrak{s}_\alpha=\mathfrak{h}_\alpha+\mathfrak{g}^\alpha+\mathfrak{g}^{-\alpha}$ *является подалгеброй алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

(iv) *Если* X_α — *ненулевой элемент пространства* $\mathfrak{g}^\alpha$, *то существует единственный элемент* $\mathrm{X}_{-\alpha}\in\mathfrak{g}^{-\alpha}$, *такой, что* $[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}] = -\mathrm{H}_\alpha$. *Пусть* φ — *линейное отображение алгебры Ли* $\mathfrak{sl}(2, k)$ *в алгебру Ли* $\mathfrak{g}$, *которое переводит* X_+ *в* X_α, X_- *в* $\mathrm{X}_{-\alpha}$ *и* H *в* H_α; *тогда* φ — *изоморфизм алгебр Ли* $\mathfrak{sl}(2, k)$ *и* $\mathfrak{s}_\alpha$.

а) Пусть h_α — такой элемент подалгебры Картана $\mathfrak{h}$, что $\alpha(h)=\langle h_\alpha, h\rangle$ для всех $h\in\mathfrak{h}$. Из предложения 1 следует, что $[x, y]=\langle x, y\rangle h_\alpha$ при всех $x\in\mathfrak{g}^\alpha$, $y\in\mathfrak{g}^{-\alpha}$. С другой стороны, $\langle\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}\rangle\neq 0$. Таким образом, $\mathfrak{h}_\alpha=[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]=kh_\alpha$.

б) Выберем такие элементы $x\in\mathfrak{g}^\alpha$, $y\in\mathfrak{g}^{-\alpha}$, что $\langle x, y\rangle=1$; тогда $[x, y]=h_\alpha$. При этом $[h_\alpha, x]=\alpha(h_\alpha)x$, $[h_\alpha, y]=-\alpha(h_\alpha)y$. Если $\alpha(h_\alpha)=0$, то $kx+ky+kh_\alpha$ — нильпотентная подалгебра $\mathfrak{t}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Так как $h_\alpha\in[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$, то эндоморфизм $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} h_\alpha$ нильпотентен (гл. I, § 5, n° 3, теорема 1). Но это невозможно, потому что $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} h_\alpha$ — ненулевой полупростой эндоморфизм. Следовательно, $\alpha(h_\alpha)\neq 0$. Поэтому существует единственный элемент $\mathrm{H}_\alpha\in\mathfrak{h}_\alpha$, такой, что $\alpha(\mathrm{H}_\alpha)=2$, и это завершает доказательство утверждения (ii).

в) Выберем в пространстве $\mathfrak{g}^\alpha$ ненулевой элемент X_α. Существует такой элемент $\mathrm{X}_{-\alpha}\in\mathfrak{g}^{-\alpha}$, что $[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}]=-\mathrm{H}_\alpha$ (так как, согласно б), $[\mathrm{X}_\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]=\mathfrak{h}_\alpha$). Тогда

$$[\mathrm{H}_\alpha, \mathrm{X}_\alpha]=\alpha(\mathrm{H}_\alpha)\mathrm{X}_\alpha=2\mathrm{X}_\alpha,\quad [\mathrm{H}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}]=-\alpha(\mathrm{H}_\alpha)\mathrm{X}_{-\alpha}=-2\mathrm{X}_{-\alpha},$$

$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}]=-\mathrm{H}_\alpha.$$

Таким образом, подпространство $kX_\alpha + kX_{-\alpha} + kH_\alpha$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и линейное отображение φ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ на $kX_\alpha + kX_{-\alpha} + kH_\alpha$, для которого $\varphi(X_+) = X_\alpha$, $\varphi(X_-) = X_{-\alpha}$, $\varphi(H) = H_\alpha$, является изоморфизмом алгебр Ли.

г) Предположим, что $\dim \mathfrak{g}^\alpha > 1$. Пусть y — ненулевой элемент пространства $\mathfrak{g}^{-\alpha}$. В пространстве $\mathfrak{g}_\alpha$ существует такой ненулевой элемент X_α, что $\langle y, X_\alpha\rangle = 0$. Выберем элемент $X_{-\alpha}$, как в пункте в), и рассмотрим представление ρ: $u \mapsto \mathrm{ad}_\mathfrak{g}\,\varphi(u)$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в пространстве $\mathfrak{g}$. Тогда

$$\rho(H)\,y = [\varphi(H), y] = [H_\alpha, y] = -2y,$$
$$\rho(X_+)\,y = [\varphi(X_+), y] = [X_\alpha, y] = \langle X_\alpha, y\rangle h_\alpha = 0.$$

Таким образом, y — примитивный относительно представления ρ вектор веса -2, что противоречит предложению 2 из § 1, n° 2. Следовательно, утверждение (i) доказано.

д) Утверждение (iii) следует теперь из в). С другой стороны, если X_α — ненулевой элемент пространства $\mathfrak{g}^\alpha$, то, поскольку $\dim \mathfrak{g}^{-\alpha} = 1$, элемент $X_{-\alpha}$, построенный в пункте в), — единственный элемент из пространства $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, такой, что $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$. Последнее утверждение в (iv) следует из пункта в). Ч. Т. Д.

В дальнейшем мы сохраним обозначения h_α, H_α *и* $\mathfrak{s}_\alpha$. (Чтобы определить элементы h_α, надо в качестве формы $\langle .,.\rangle$ взять форму Киллинга.) Пусть X_α — ненулевой элемент пространства $\mathfrak{g}^\alpha$. Тогда изоморфизм φ из теоремы 1 и представление $u \mapsto \mathrm{ad}_\mathfrak{g}\,\varphi(u)$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ будут называться *ассоциированными с* X_α.

Следствие. *Пусть Φ — форма Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда при любых a, $b \in \mathfrak{h}$ имеет место равенство*

$$\Phi(a, b) = \sum_{\gamma \in R} \gamma(a)\,\gamma(b).$$

Действительно, эндоморфизм $\mathrm{ad}\,a . \mathrm{ad}\,b$ переводит каждое корневое пространство $\mathfrak{g}^\gamma$ в себя, и его ограничение на $\mathfrak{g}^\gamma$ — гомотетия с коэффициентом $\gamma(a)\,\gamma(b)$; если $\gamma \neq 0$, то $\dim \mathfrak{g}^\gamma = 1$.

Предложение 2. *Пусть α, $\beta \in R$ — корни. Тогда*

(i) $\beta(H_\alpha) \in \mathbf{Z}$;

(ii) *если Φ — форма Киллинга на $\mathfrak{g}$, то* $\Phi(H_\alpha, H_\beta) \in \mathbf{Z}$.

Пусть X_α — ненулевой элемент пространства $\mathfrak{g}^\alpha$, а ρ — представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,k)$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, ассоциированное с X_α. Собственными значениями эндоморфизмов $\rho(H)$ будут 0 и $\beta(H_\alpha)$, где $\beta \in R$. Итак, утверждение (i) вытекает из следствия предложения 2 § 1, n°2. Утверждение (ii) следует из утверждения (i) и следствия теоремы 1. Ч. Т. Д.

Пусть $\alpha \in R$, X_α — ненулевой элемент пространства $\mathfrak{g}^\alpha$, $X_{-\alpha}$ — такой элемент пространства $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, что $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$, и ρ — представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, ассоциированное с X_α. Пусть π — согласованное с ρ представление группы Ли $\mathbf{SL}(2, k)$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (§ 1, n°4, теорема 2). Так как эндоморфизм $\operatorname{ad} X_\alpha$ нильпотентен (гл. VII, § 1, n°3, предложение 10 (iv)), то эндоморфизм $\pi\left(e^{X_+}\right) = e^{\operatorname{ad} X_\alpha}$ является элементарным автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Следовательно, $\pi(\mathbf{SL}(2, k)) \subset \operatorname{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Будем использовать обозначение $\theta(t)$ из § 1, n°5. Положим для всех $t \in k^*$

$$\theta_\alpha(t) = \pi(\theta(t)) = e^{\operatorname{ad} tX_\alpha} e^{\operatorname{ad} t^{-1}X_{-\alpha}} e^{\operatorname{ad} tX_\alpha}. \tag{1}$$

Лемма 1. (i) $\theta_\alpha(t) . h = h - \alpha(h) H_\alpha$ *для любого* $h \in \mathfrak{h}$.

(ii) $\theta_\alpha(t)\left(\mathfrak{g}^\beta\right) = \mathfrak{g}^{\beta - \beta(H_\alpha)\alpha}$ *для всех* $\beta \in R$.

(iii) *Если* $\alpha, \beta \in R$ — *корни, то* $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in R$.

Пусть $h \in \mathfrak{h}$. Если $\alpha(h) = 0$, то $[X_\alpha, h] = [X_{-\alpha}, h] = 0$ и, следовательно, $\theta_\alpha(t) . h = h$. С другой стороны, формулы (5) из § 1, n°5, показывают, что $\theta_\alpha(t) . H_\alpha = -H_\alpha$. Это доказывает утверждение (i). Отсюда следует, что $\theta_\alpha(t)^2 \mid \mathfrak{h} = \mathrm{Id}$. Если $x \in \mathfrak{g}^\beta$ и $h \in \mathfrak{h}$, то

$$\begin{aligned}
[h, \theta_\alpha(t) x] &= \theta_\alpha(t) . [\theta_\alpha(t) h, x] = \beta(\theta_\alpha(t) h) . \theta_\alpha(t) x = \\
&= (\beta(h) - \alpha(h)\beta(H_\alpha)) . \theta_\alpha(t) x = \\
&= (\beta - \beta(H_\alpha)\alpha)(h) . \theta_\alpha(t) x,
\end{aligned}$$

следовательно, $\theta_\alpha(t) x \in \mathfrak{g}^{\beta - \beta(H_\alpha)\alpha}$. Это доказывает утверждение (ii). Утверждение (iii) следует из (ii).

Теорема 2. (i) *Множество* $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *является приведенной системой корней в пространстве* $\mathfrak{h}^*$.

(ii) *Пусть* $\alpha \in R$ — *корень. Отображение* $s_{\alpha, H_\alpha}\colon \lambda \mapsto \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha$ *пространства* $\mathfrak{h}^*$ *в себя — однозначно определенное отражение* s *пространства* $\mathfrak{h}^*$, *для которого* $s(\alpha) = -\alpha$ *и* $s(R) = R$. *Для любого* $t \in k^*$ *отображение* s *является сопряженным к отображению* $\theta_\alpha(t) \mid \mathfrak{h}$.

Во-первых, множество R порождает пространство $\mathfrak{h}^*$, так как, если существует такой элемент $h \in \mathfrak{h}$, что $\alpha(h) = 0$ для всех $\alpha \in R$, то $\operatorname{ad} h = 0$; отсюда следует, что $h = 0$, поскольку центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равен нулю. По определению $0 \notin R$. Пусть $\alpha \in R$. Так как $\alpha(H_\alpha) = 2$, то $s = s_{\alpha, H_\alpha}$ — отражение и $s(\alpha) = -\alpha$. По лемме 1 (iii) имеем $s(R) = R$ и $\beta(H_\alpha) \in \mathbf{Z}$ для всех

$\beta \in R$ (предложение 2 (i)). Следовательно, множество R является системой корней в пространстве $\mathfrak{h}^*$. Для всех $h \in \mathfrak{h}$ и всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\langle s(\lambda), h\rangle &= \langle \lambda - \lambda(\mathrm{H}_\alpha)\alpha, h\rangle = \\ &= \langle \lambda, h - \alpha(h)\mathrm{H}_\alpha\rangle = \langle \lambda, \theta_\alpha(t)h\rangle.\end{aligned}$$

Значит, преобразование s сопряжено с $\theta_\alpha(t)\,|\,\mathfrak{h}$. Покажем, наконец, что R — приведенная система корней. Пусть $\alpha \in R$ и $y \in \mathfrak{g}^{2\alpha}$. Так как $3\alpha \notin R$ (гл. VI, § 1, n°3, предложение 8), то $[\mathrm{X}_\alpha, y] = 0$; с другой стороны, $[\mathrm{X}_{-\alpha}, y] \in \mathfrak{g}^{-\alpha+2\alpha} = \mathfrak{g}^\alpha = k\mathrm{X}_\alpha$ и, следовательно, $[\mathrm{X}_\alpha, [\mathrm{X}_{-\alpha}, y]] = 0$. Таким образом,

$$4y = 2\alpha(\mathrm{H}_\alpha)\,y = [\mathrm{H}_\alpha, y] = -[[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}], y] = 0,$$

откуда $y = 0$ и, следовательно, $\mathfrak{g}^{2\alpha} = 0$. Иначе говоря, 2α — не корень. Ч. Т. Д.

В дальнейшем мы канонически отождествляем пространства $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^{**}$. Ввиду теоремы 2 (ii) получаем, что (используя обозначения гл. VI, § 1, n° 1)

$$\mathrm{H}_\alpha = \alpha^\vee \text{ для всех } \alpha \in R. \tag{2}$$

Элементы H_α составляют, таким образом, систему корней $R^\vee$ в пространстве $\mathfrak{h}$, дуальную к R.

Мы будем говорить, что $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — *система корней расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Отражения $s_{\alpha, \mathrm{H}_\alpha}$ будем обозначать просто через s_α. Группу Вейля, группу весов, числа Коксстера ... системы корней $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ будем называть *группой Вейля, группой весов, числами Кокстера ... расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. В соответствии с гл. VI, § 1, n° 1, будем рассматривать действие группы Вейля не только на пространстве $\mathfrak{h}^*$, но и на пространстве $\mathfrak{h}$, где оно определяется формулой $s_\alpha = \theta_\alpha(t)\,|\,\mathfrak{h}$. Так как эндоморфизмы $\theta_\alpha(t)$ являются элементарными автоморфизмами алгебры Ли $(\mathfrak{g})$, то получаем такое

Следствие. *Каждый элемент группы Вейля расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, *действующий в пространстве* $\mathfrak{h}$, *является ограничением на* $\mathfrak{h}$ *элементарного автоморфизма алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Обратное утверждение см. в § 5, n° 2, предложение 4.

Замечание 1. Пусть $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ (соотв. $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}}$) — векторное подпространство пространства $\mathfrak{h}$ (соотв. $\mathfrak{h}^*$) над $\mathbf{Q}$, порожденное элементами H_α (соотв. α), где $\alpha \in R$. Тогда пространство $\mathfrak{h}$ (соотв. $\mathfrak{h}^*$) канонически отождествляется с пространством $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} k$ (соотв.

$\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} k$), а пространство $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}}$ отождествляется с дуальным пространством к $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ (гл. VI, § 1, n° 1, предложение 1). Говорят, что пространства $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ и $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}}$ — это канонические $\mathbf{Q}$-структуры на $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$ (*Alg.*, chap. II, § 8, n° 1, définition 1). Когда далее говорится о $\mathbf{Q}$-рациональности векторного подпространства $\mathfrak{h}$, билинейной формы на $\mathfrak{h}$ и т. д., то, если не оговорено противное, подразумевается рациональность относительно указанных $\mathbf{Q}$-структур. Камеры Вейля и ячейки системы $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ в дальнейшем будут рассматриваться в пространстве $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ или $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$. Эти пространства будут обозначаться через $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ и $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$ соответственно.

Замечание 2. Система корней $R^{\vee}$ в пространстве $\mathfrak{h}$ определяет на $\mathfrak{h}$ билинейную симметрическую невырожденную форму β (гл. VI, § 1, n° 1, предложение 3), а именно форму $(a, b) \mapsto \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha, a\rangle \langle \alpha, b\rangle$. Согласно следствию теоремы 1, эта форма — не что иное, как ограничение формы Киллинга на подалгебру Картана $\mathfrak{h}$. Продолжение формы $\beta \mid \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} \times \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ на пространство $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ — положительно определенная невырожденная форма (гл. VI, § 1, n° 1, предложение 3). С другой стороны, обратная форма для ограничения на пространство $\mathfrak{h}$ формы Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ совпадает с *канонической билинейной формой* Φ_R на пространстве $\mathfrak{h}^*$ (гл. VI, § 1, n° 12).

Пусть $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$, $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ — полупростые расщепленные алгебры Ли, а φ — такой изоморфизм $\mathfrak{g}_1$ на $\mathfrak{g}_2$, что $\varphi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$. Тогда отображение, сопряженное к отображению $\varphi \mid \mathfrak{h}_1$, переводит систему $R(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)$ в систему $R(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, а $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ — расщепляющие подалгебры Картана в $\mathfrak{g}$. Тогда существует изоморфизм пространства $\mathfrak{h}_1^*$ на $\mathfrak{h}_2^*$, который переводит систему корней $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$ в систему корней $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2)$.*

(За более точными результатами мы отсылаем к § 3, n° 3, следствие предложения 10, а также к § 5, n° 3, предложение 5.)

Пусть k' — алгебраическое замыкание поля k, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k'$, $\mathfrak{h}'_i = \mathfrak{h}_i \otimes_k k'$. Тогда система корней $R(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'_i)$ является образом системы корней $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i)$ при отображении $\lambda \mapsto \lambda \otimes 1$ пространства $\mathfrak{h}^*_i$ в пространство $\mathfrak{h}^*_i \otimes_k k' = \mathfrak{h}'^*_i$. По теореме 1 из гл. VII, § 3, n° 2, существует автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}'$, переводящий пространство $\mathfrak{h}'^*_1$ в пространство $\mathfrak{h}'^*_2$, и, следовательно, существует изоморфизм φ пространства $\mathfrak{h}'^*_1$ на пространство $\mathfrak{h}'^*_2$, который переводит систему корней $R(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'_1)$ в систему корней $R(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'_2)$. Тогда отображение $\varphi \mid \mathfrak{h}^*_1$ переводит систему корней

$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$ в систему корней $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2)$ и, следовательно, переводит $\mathfrak{h}_1^*$ в $\mathfrak{h}_2^*$. Ч. Т. Д.

В силу предложения 3 система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ зависит, с точностью до изоморфизма, только от алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и не зависит от $\mathfrak{h}$. Поэтому, допуская вольность речи, группу Вейля, группу весов ... расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называют просто группой Вейля, группой весов ... алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (ср. также замечание 2 из § 5, n° 3). Если граф Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет тип A_l или B_l, ... (см. гл. VI, § 5, n° 2, теорема 3), то говорят, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа A_l или B_l, ...

Напомним, что если α и β — линейно независимые корни, то множество таких чисел $j \in \mathbf{Z}$, что $\beta + j\alpha \in R$, является отрезком $[-q, p]$ в множестве $\mathbf{Z}$, содержит 0 и $p - q = -\langle \beta, \alpha^\vee \rangle = -\beta(H_\alpha)$ (гл. VI, § 1, n° 3, предложение 9).

Предложение 4. *Пусть α и β — линейно независимые корни. Пусть p (соотв. q) — наибольшее целое число j, такое, что $\beta + j\alpha$ (соотв. $\beta - j\alpha$) — корень.*

(i) *Векторное подпространство* $\sum_{-q \leqslant j \leqslant p} \mathfrak{g}^{\beta + j\alpha}$ *пространства* $\mathfrak{g}$ *является простым* $\mathfrak{s}_\alpha$*-модулем размерности* $p + q + 1$.

(ii) *Если* $\alpha + \beta$ *— корень, то* $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

Пусть X_α (соотв. x) — ненулевой элемент пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ (соотв. $\mathfrak{g}^{\beta + p\alpha}$). Тогда

$$[X_\alpha, x] \in \mathfrak{g}^{\beta + (p+1)\alpha} = 0,$$

$$[H_\alpha, x] = (\beta(H_\alpha) + p\alpha(H_\alpha))\, x = (-p + q + 2p)\, x = (p + q)\, x.$$

Ясно, что относительно представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в $\mathfrak{g}$, ассоциированного с элементом X_α, x является примитивным элементом веса $p + q$; итак, размерность $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуля $\sum_{-q \leqslant j \leqslant p} \mathfrak{g}^{\beta + j\alpha}$ равна $p + q + 1$. Ясно также, что этот модуль прост (§ 1, n° 2, предложение 2). Если $\alpha + \beta \in R$, то $p \geqslant 1$; следовательно, элементы пространства $\mathfrak{g}^\beta$ не являются примитивными, и потому $[X_\alpha, \mathfrak{h}^\beta] \neq 0$. Поскольку $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$, окончательно получаем, что $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

Замечание 3. Напомним, что в силу следствия предложения 9 (гл. VI, § 1, n° 3) целое число $p + q + 1$ может принимать лишь значения 1, 2, 3, 4.

Замечание 4. Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — редуктивная расщепленная алгебра Ли, $\mathfrak{c}$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' = \mathscr{D}\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$. Тогда $\mathfrak{h} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{h}'$, а пространство $\mathfrak{h}'^*$ отождествляется с векторным подпространством пространства $\mathfrak{h}^*$. Для всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, таких, что

$\lambda \neq 0$, примарное подпространство $\mathfrak{g}^{\lambda}$ веса λ равно $\mathfrak{g}'^{\lambda|\mathfrak{h}'}$. *Корнем* называется ненулевой вес подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Все корни обращаются на $\mathfrak{c}$ в нуль. Символом $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ обозначается множество корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$; оно канонически отождествляется с множеством $R(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$. Пусть $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Как и в полупростом случае, определяются $\mathfrak{h}_{\alpha}$, H_{α}, $\mathfrak{s}_{\alpha}$, изоморфизмы $\mathfrak{sl}(2, k) \to \mathfrak{s}_{\alpha}$ и представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в $\mathfrak{g}$, ассоциированное с элементом X_{α}. То же самое относится к группе Вейля, группе весов ... расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

3. Билинейные инвариантные формы

Предложение 5. *Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — полупростая расщепленная алгебра Ли, Φ — билинейная симметрическая инвариантная форма на $\mathfrak{g}$, а W — группа Вейля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Тогда ограничение Φ' формы Φ на пространство $\mathfrak{h}$ инвариантно относительно W. Если, кроме того, форма Φ невырожденна, то и форма Φ' невырожденна.*

Пусть $\alpha \in R$ — корень, X_{α} — ненулевой элемент пространства $\mathfrak{g}^{\alpha}$, ρ — ассоциированное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в пространстве $\mathfrak{g}$, π — представление группы Ли $\mathbf{SL}(2, k)$ в пространстве $\mathfrak{g}$, согласованное с ρ. Тогда форма Φ инвариантна относительно представления ρ и, следовательно, относительно представления π (§ 1, n°4). В частности, форма Φ' инвариантна относительно эндоморфизмов $\theta_{\alpha}(t)|\mathfrak{h}$ (n°2) и, следовательно, относительно действия группы W. Последнее утверждение следует из предложения 1 (i).

Предложение 6. *Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — полупростая расщепленная алгебра Ли и Φ — невырожденная инвариантная симметрическая билинейная форма на $\mathfrak{g}$. Выберем для каждого корня $\alpha \in R$ ненулевой элемент X_{α} в пространстве $\mathfrak{g}^{\alpha}$. Пусть $(\mathrm{H}_i)_{i \in I}$ — базис пространства $\mathfrak{h}$ и $(\mathrm{H}'_i)_{i \in I}$ — такой базис в $\mathfrak{h}$, что $\Phi(\mathrm{H}_i, \mathrm{H}'_j) = \delta_{ij}$. Тогда элемент Казимира в универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли $\mathfrak{g}$* (гл. I, § 3, n°7), *ассоциированный с формой Φ, равен*

$$\sum_{\alpha \in R} \frac{1}{\Phi(\mathrm{X}_{\alpha}, \mathrm{X}_{-\alpha})} \mathrm{X}_{\alpha}\mathrm{X}_{-\alpha} + \sum_{i \in I} \mathrm{H}_i \mathrm{H}'_i.$$

Действительно, из предложения 1 получаем, что $\Phi(\mathrm{H}_i, \mathrm{X}_{\alpha}) = \Phi(\mathrm{H}'_i, \mathrm{X}_{\alpha}) = 0$ для любых $i \in I$, $\alpha \in R$, и

$$\Phi\left(\frac{1}{\Phi(\mathrm{X}_{\alpha}, \mathrm{X}_{-\alpha})} \mathrm{X}_{\alpha}, \mathrm{X}_{-\beta}\right) = \delta_{\alpha\beta} \text{ для любых } \alpha, \beta \in R.$$

4. Коэффициенты $N_{\alpha,\beta}$

В этом пункте снова символом $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *мы обозначим полупростую расщепленную алгебру Ли.*

Лемма 2. *Существует такое семейство* $(X_\alpha)_{\alpha\in R}$, *что для каждого корня* $\alpha \in R$

$$X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha \quad \text{и} \quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha.$$

Пусть R_1 — такое подмножество множества R, что $R = R_1 \cup (-R_1)$ и $R_1 \cap (-R_1) = \varnothing$. Для $\alpha \in R_1$ выберем в пространстве $\mathfrak{g}^\alpha$ произвольный ненулевой элемент X_α. Существует единственный элемент $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, для которого $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$ (теорема 1 (iv)). Тогда

$$[X_{-\alpha}, X_\alpha] = H_\alpha = -H_{-\alpha}. \text{ Ч. Т. Д.}$$

Если какое-то семейство $(X_\alpha)_{\alpha\in R}$ удовлетворяет условиям леммы 2, то все семейства, удовлетворяющие условиям леммы 2, имеют вид $(t_\alpha X_\alpha)_{\alpha\in R}$, где $t_\alpha \in k^*$ и $t_\alpha t_{-\alpha} = 1$ для любого $\alpha \in R$.

В дальнейшем в этом пункте через $(X_\alpha)_{\alpha\in R}$ *обозначается произвольное семейство, удовлетворяющее условиям леммы* 2. *Символом* $\langle .\,, .\rangle$ *обозначается невырожденная инвариантная симметрическая билинейная форма на* $\mathfrak{g}$.

Каждый элемент $x \in \mathfrak{g}$ однозначно записывается в виде

$$x = h + \sum_{\alpha\in R} \mu_\alpha X_\alpha, \qquad (h \in \mathfrak{h},\ \mu_\alpha \in k).$$

Коммутаторы двух таких элементов вычисляются с помощью следующих формул:

$$[h, X_\alpha] = \alpha(h) X_\alpha,$$

$$[X_\alpha, X_\beta] = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha+\beta \notin R \cup \{0\}, \\ -H_\alpha, & \text{если } \alpha+\beta = 0, \\ N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta \in R, \end{cases}$$

где $N_{\alpha,\beta}$ — ненулевые элементы поля k.

Лемма 3. *Для любого* $\alpha \in R$

$$\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle = -\frac{1}{2}\langle H_\alpha, H_\alpha\rangle.$$

Действительно,

$$2\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle = \langle \alpha(H_\alpha) X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle = \langle [H_\alpha, X_\alpha], X_{-\alpha}\rangle = \\ = \langle H_\alpha, [X_\alpha, X_{-\alpha}]\rangle = -\langle H_\alpha, H_\alpha\rangle.$$

Лемма 4. *Пусть* $\alpha, \beta \in R$ — *такие корни, что* $\alpha + \beta \in R$. *Пусть* p (соотв. q) — *наибольшее целое число* j, *такое, что* $\beta + j\alpha \in R$ (соотв. $\beta - j\alpha \in R$). *Тогда*

$$N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha+\beta} = -p(q+1), \tag{3}$$

$$N_{-\alpha, \alpha+\beta} \langle H_\beta, H_\beta \rangle = -N_{-\alpha, -\beta} \langle H_{\alpha+\beta}, H_{\alpha+\beta} \rangle, \tag{4}$$

$$N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\beta} = (q+1)^2. \tag{5}$$

Пусть ρ — представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в пространстве $\mathfrak{g}$, ассоциированное с элементом X_α. Элемент $e = X_{\beta + p\alpha}$ является примитивным элементом веса $p + q$ (предложение 4 (i)). Положим

$$e_n = \frac{(-1)^n}{n!} \rho (X_-)^n e \quad \text{при} \quad n \geqslant 0.$$

Из предложения 1 § 1 получаем

$$(\operatorname{ad} X_\alpha) e_p = (q+1) e_{p-1},$$

$$(\operatorname{ad} X_{-\alpha}) (\operatorname{ad} X_\alpha) e_p = -p(q+1) e_p.$$

Это доказывает формулу (3), потому что e_p — ненулевой элемент пространства $\mathfrak{g}^\beta$.

В силу инвариантности формы $\langle . , . \rangle$ справедливо равенство

$$\langle [X_{-\alpha}, X_{\alpha+\beta}], X_{-\beta} \rangle = -\langle X_{\alpha+\beta}, [X_{-\alpha}, X_{-\beta}] \rangle,$$

откуда

$$N_{-\alpha, \alpha+\beta} \langle X_\beta, X_{-\beta} \rangle = -N_{-\alpha, -\beta} \langle X_{\alpha+\beta}, X_{-\alpha-\beta} \rangle,$$

что ввиду леммы 3 доказывает формулу (4).

Ограничение формы $\langle . , . \rangle$ на $\mathfrak{h}$ невырожденно и инвариантно относительно группы Вейля (предложение 5). Отождествим пространства $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$ с помощью этого ограничения. Если $\gamma \in R$, то элемент H_γ отождествляется с элементом $2\gamma / \langle \gamma, \gamma \rangle$ (гл. VI, § 1, n° 1, лемма 2); следовательно, каковы бы ни были корни $\gamma, \delta \in R$,

$$\frac{\langle \gamma, \gamma \rangle}{\langle \delta, \delta \rangle} = \frac{\langle H_\delta, H_\delta \rangle}{\langle H_\gamma, H_\gamma \rangle}. \tag{6}$$

Таким образом, в силу предложения 10 (гл. VI, § 1, n° 3) получаем

$$\frac{\langle \alpha + \beta, \alpha + \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = \frac{q+1}{p}. \tag{7}$$

Следовательно, из формул (3), (4), (6), (7) вытекает, что

$$N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\beta} = -N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha+\beta} \frac{\langle H_\beta, H_\beta \rangle}{\langle H_{\alpha+\beta}, H_{\alpha+\beta} \rangle} =$$

$$= -N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha+\beta} \frac{q+1}{p} = (q+1)^2.$$

Определение 3. *Системой Шевалле расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *называется такое семейство* $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$, *что*

(i) $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ *для всех корней* $\alpha \in R$;

(ii) $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$ *для всех корней* $\alpha \in R$;

(iii) *линейное отображение из* $\mathfrak{g}$ *в* $\mathfrak{g}$, *которое равно* -1 *на* $\mathfrak{h}$ *и переводит* X_α *в* $X_{-\alpha}$ *для всех корней* $\alpha \in R$, *является автоморфизмом алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Это определение немедленно распространяется на случай, когда $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — редуктивная расщепленная алгебра Ли.

Мы увидим (§ 4, n° 4, следствие предложения 5), что системы Шевалле расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *существуют.*

Предложение 7. *Пусть* $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ — *система Шевалле расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. *Сохраним обозначения леммы* 4. *Тогда* $N_{-\alpha,-\beta} = N_{\alpha,\beta}$ *и* $N_{\alpha,\beta} = \pm(q+1)$ *для* α, β, $\alpha+\beta \in R$.

Пусть φ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, рассмотренный в определении 3 (iii). Имеем

$$N_{-\alpha,-\beta}X_{-\alpha-\beta} = [X_{-\alpha}, X_{-\beta}] = [\varphi(X_\alpha), \varphi(X_\beta)] = \\ = \varphi([X_\alpha, X_\beta]) = \varphi(N_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}) = N_{\alpha,\beta}X_{-\alpha-\beta},$$

откуда получаем, что $N_{-\alpha,-\beta} = N_{\alpha,\beta}$. Вследствие формул (5) $N_{\alpha,\beta} = \pm(q+1)$.

Предложение 8. *Пусть* $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ — *система Шевалле расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. *Пусть* M *есть* $\mathbf{Z}$-*подмодуль в* $\mathfrak{h}$, *содержащий элементы* H_α *и содержащийся в группе весов системы* $R^\vee$. *Пусть* $\mathfrak{g}_\mathbf{Z}$ — *это* $\mathbf{Z}$-*подмодуль в* $\mathfrak{g}$, *порожденный модулем* M *и элементами* X_α. *Тогда* $\mathfrak{g}_\mathbf{Z}$ *является* $\mathbf{Z}$-*подалгеброй алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *и каноническое отображение* $\mathfrak{g}_\mathbf{Z} \otimes_\mathbf{Z} k$ *в* $\mathfrak{g}$ *будет изоморфизмом.*

Если α, $\beta \in R$ — такие корни, что $\alpha + \beta \in R$, то $N_{\alpha,\beta} \in \mathbf{Z}$ (предложение 7). С другой стороны, если $\alpha \in R$ и $h \in M$, то $\alpha(h) \in \mathbf{Z}$ (гл. VI, § 1, n° 9). Это доказывает, что $\mathfrak{g}_\mathbf{Z}$ есть $\mathbf{Z}$-подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Но M — свободная коммутативная группа ранга, равного $\dim \mathfrak{h}$ (*Алг.*, гл. VII, § 3, теорема 1); следовательно, $\mathfrak{g}_\mathbf{Z}$ — свободная коммутативная группа ранга $\dim \mathfrak{g}$. Отсюда вытекает последнее утверждение.

§ 3. Подалгебры расщепленных полупростых алгебр Ли

В этом параграфе через $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *обозначается полупростая расщепленная алгебра Ли, а через* R — *ее система корней.*

1. Подалгебры, устойчивые относительно $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$

Лемма 1. *Пусть* V — *векторное подпространство в* $\mathfrak{g}$ *и* $R(V)$ — *множество таких корней* $\alpha \in R$, *что* $\mathfrak{g}^\alpha \subset V$. *Наибольшим векторным подпространством пространства* V, *устойчивым относительно множества эндоморфизмов* $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$, *будет подпространство* $(V \cap \mathfrak{h}) + \sum_{\alpha \in R(V)} \mathfrak{g}^\alpha$.

Векторное подпространство W пространства V тогда и только тогда устойчиво относительно множества эндоморфизмов $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$, когда его можно представить в виде

$$W = (W \cap \mathfrak{h}) + \sum_{\alpha \in R} (W \cap \mathfrak{g}^\alpha)$$

(*Алг.*, гл. VII, § 2, n° 2, следствие 1 теоремы 1). Следовательно, наибольшим подпространством векторного пространства V, устойчивым относительно эндоморфизмов $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$, является пространство $(V \cap \mathfrak{h}) + \sum_{\alpha \in R} (V \cap \mathfrak{g}^\alpha)$. Таким образом, $(V \cap \mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^\alpha$ для корней $\alpha \in R(V)$, и $(V \cap \mathfrak{g}^\alpha) = 0$, если $\alpha \notin R(V)$, так как $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$. Ч. Т. Д.

Для любого подмножества P системы корней R положим

$$\mathfrak{g}^P = \sum_{\alpha \in P} \mathfrak{g}^\alpha, \qquad \mathfrak{h}_P = \sum_{\alpha \in P} \mathfrak{h}_\alpha.$$

Если $P \subset R$ и $Q \subset R$ — два подмножества, то, очевидно,

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^P] \subset \mathfrak{g}^P, \tag{1}$$

$$[\mathfrak{g}^P, \mathfrak{g}^Q] = \mathfrak{g}^{(P+Q) \cap R} + \mathfrak{h}_{P \cap (-Q)}. \tag{2}$$

Напомним (гл. VI, § 1, n° 7, определение 4), что подмножество P системы корней R называется *замкнутым*, если из условий $\alpha \in P$, $\beta \in P$, $\alpha + \beta \in R$ следует, что $\alpha + \beta \in P$, иначе говоря, если $(P + P) \cap R \subset P$.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{h}'$ — *векторное подпространство пространства* $\mathfrak{h}$ *и* P — *подмножество системы корней* R. *Пространство* $\mathfrak{h}' + \mathfrak{g}^P$ *является подалгеброй алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *тогда и только тогда, когда* P — *замкнутое подмножество системы корней* R, *причем*

$$\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{h}_{P \cap (-P)}.$$

Действительно,

$$[\mathfrak{h}' + \mathfrak{g}^P, \mathfrak{h}' + \mathfrak{g}^P] = [\mathfrak{h}', \mathfrak{g}^P] + [\mathfrak{g}^P, \mathfrak{g}^P] =$$
$$= \mathfrak{h}_{P \cap (-P)} + [\mathfrak{h}', \mathfrak{g}^P] + \mathfrak{g}^{(P+P) \cap R}.$$

Следовательно, пространство $\mathfrak{h}' + \mathfrak{g}^P$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{h}_{P \cap (-P)} \subset \mathfrak{h}' \quad \text{и} \quad \mathfrak{g}^{(P+P) \cap R} \subset \mathfrak{g}^P,$$

что доказывает лемму.

Предложение 1. (i) *Подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$, устойчивые относительно эндоморфизмов* $\operatorname{ad} \mathfrak{h}$, — *это векторные подпространства вида $\mathfrak{h}' + \mathfrak{g}^P$, где P — замкнутое подмножество системы корней R и $\mathfrak{h}'$ — векторное подпространство пространства $\mathfrak{h}$, содержащее $\mathfrak{h}_{P \cap (-P)}$.*

(ii) *Пусть $\mathfrak{h}'$ и $\mathfrak{h}''$ — векторные подпространства пространства $\mathfrak{h}$, а P, Q — замкнутые подмножества системы корней R, такие, что $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{h}_{P \cap (-P)}$, $\mathfrak{h}'' \subset \mathfrak{h}'$ и $Q \subset P$. Для того чтобы подпространство $\mathfrak{h}'' + \mathfrak{g}^Q$ было идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{h}' + \mathfrak{g}^P$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$(P+Q) \cap R \subset Q \quad \text{и} \quad \mathfrak{h}_{P \cap (-Q)} \subset \mathfrak{h}'' \subset \bigcap_{\alpha \in P,\, \alpha \notin Q} \operatorname{Ker} \alpha.$$

Утверждение (i) сразу же следует из лемм 1 и 2. Пусть P, Q, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}''$ такие же, как в утверждении (ii). Тогда

$$[\mathfrak{h}' + \mathfrak{g}^P, \mathfrak{h}'' + \mathfrak{g}^Q] = \mathfrak{h}_{P \cap (-Q)} + [\mathfrak{h}', \mathfrak{g}^Q] + [\mathfrak{h}'', \mathfrak{g}^P] + \mathfrak{g}^{(P+Q) \cap R}.$$

Следовательно, пространство $\mathfrak{h}'' + \mathfrak{g}^Q$ будет идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{h}' + \mathfrak{g}^P$ в том и только том случае, когда

$$\mathfrak{h}_{P \cap (-Q)} \subset \mathfrak{h}'', \quad [\mathfrak{h}'', \mathfrak{g}^P] \subset \mathfrak{g}^Q, \quad \mathfrak{g}^{(P+Q) \cap R} \subset \mathfrak{g}^Q.$$

Отсюда вытекает утверждение (ii).

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{a}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, устойчивая относительно эндоморфизмов* $\operatorname{ad} \mathfrak{h}$, *и пусть $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$, $P \subset R$ таковы, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{g}^P$.*

(i) *Пусть $\mathfrak{k}$ — множество таких элементов $x \in \mathfrak{h}'$, что $\alpha(x) = 0$ для всех $\alpha \in P \cap (-P)$. Радикалом алгебры Ли $\mathfrak{a}$ является алгебра Ли $\mathfrak{k} + \mathfrak{g}^Q$, где Q — множество таких корней $\alpha \in P$, что $-\alpha \notin P$. При этом пространство $\mathfrak{g}^Q$ — нильпотентный идеал алгебры Ли $\mathfrak{a}$.*

(ii) *Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{a}$ была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы $P = -P$ и $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_P$.*

(iii) *Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{a}$ была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы $P \cap (-P) = \varnothing$. Если это так, то $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{g}^S$, где*

$$S = ((P+P) \cap R) \cup \{\alpha \in P \mid \alpha(\mathfrak{h}') \neq 0\}.$$

(iv) *Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{a}$ была редуктивной подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы $P = -P$.*

(v) *Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{a}$ состояла из нильпотентных элементов, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{h}' = 0$. Тогда $P \cap (-P) = \varnothing$ и алгебра $\mathfrak{a}$ нильпотентна.*

Докажем утверждение (v). Если алгебра $\mathfrak{a}$ состоит из нильпотентных элементов, то очевидно, что она нильпотентна и $\mathfrak{h}' = 0$, так как элементы подалгебры $\mathfrak{h}$ полупросты. Предположим, что $\mathfrak{h}' = 0$. Из предложения 1 (i) вытекает, что $P \cap (-P) = \varnothing$. По предложению 22 из гл. VI, § 1, n° 7, существует такая камера C системы корней R, что $P \subset R_+(C)$. Следовательно, существует такое целое число $n > 0$, что если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in P$ и $\beta \in R \cup \{0\}$, то

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta \notin R \cup \{0\}.$$

Отсюда вытекает, что все элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}^P$ нильпотентны, а это и доказывает утверждение (v).

Докажем утверждение (iii). Если $P \cap (-P) = \varnothing$, то $\mathfrak{g}^P$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (предложение 1 (i)); эта алгебра нильпотентна вследствие условия (v). Таким образом

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{h}', \mathfrak{g}^P] + [\mathfrak{g}^P, \mathfrak{g}^P] = [\mathfrak{h}', \mathfrak{g}^P] + \mathfrak{g}^{(P+P) \cap R} \subset \mathfrak{g}^P;$$

следовательно, алгебра $\mathfrak{a}$ разрешима и коммутант $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ равен $\mathfrak{g}^S$. Если $P \cap (-P) \neq \varnothing$, то существует такой корень $\alpha \in P$, что $-\alpha \in P$. Тогда $\mathfrak{h}_\alpha + \mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha}$ — простая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$, и, следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{a}$ не является разрешимой.

Докажем утверждение (i). Так как P — замкнутое множество, то $(P + Q) \cap R \subset P$. Если $\alpha \in P$, $\beta \in Q$ и $\alpha + \beta \in R$, то корень $\alpha + \beta$ не принадлежит множеству $-P$, поскольку из замкнутости P следует, что $-\beta = -(\alpha + \beta) + \alpha \in P$, тогда как $\beta \in Q$. Таким образом, $(P + Q) \cap R \subset Q$. Это доказывает, что пространство $\mathfrak{g}^Q$ является идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{a}$, и в силу утверждения (v) этот идеал нильпотентен. Мы получили, что $P \cap (-Q) = \varnothing$ и $P \cap (-P) = P \cap \complement Q$, следовательно, $\mathfrak{h}_{P \cap (-Q)} \subset \subset \mathfrak{k} \subset \bigcap_{\alpha \in P,\ \alpha \in Q} \operatorname{Ker} \alpha$. В силу предложения 1 (ii) пространство $\mathfrak{k} + \mathfrak{g}^Q$ является идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{a}$. Так как $Q \cap (-Q) = \varnothing$, то этот идеал разрешим ввиду утверждения (iii). Следовательно, он содержится в радикале $\mathfrak{r}$ алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Так как радикал $\mathfrak{r}$ устойчив относительно всех дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{r}$ устойчив относительно эндоморфизмов из $\operatorname{ad} \mathfrak{h}$. Тогда существует такое подмножество S множества P, что $\mathfrak{r} = (\mathfrak{r} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{g}^S$. Предположим, что $\alpha \in S$ и что $-\alpha \in P$. Тогда $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] \subset \mathfrak{r}$, следовательно, $\mathfrak{g}^{-\alpha} = [\mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] \subset \mathfrak{r}$ и, таким образом, $-\alpha \in S$. Ввиду утверждения (iii) это противоречит тому, что алгебра Ли $\mathfrak{r}$ разрешима. Поэтому $S \subset Q$. Наконец, если $x \in \mathfrak{r} \cap \mathfrak{h}$ и если $\alpha \in P \cap (-P)$, то $[x, \mathfrak{g}^\alpha] \subset \mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{r} = 0$, а значит, $\alpha(x)=0$, что дает включение $x\in\mathfrak{k}$. Таким образом, $\mathfrak{r}\subset\mathfrak{k}+\mathfrak{g}^Q$, и утверждение (i) доказано.

Докажем утверждение (iv). Ввиду утверждения (i) для полупростоты присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{a}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ необходимо и достаточно, чтобы эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x$ был полупрост для всех $x\in\mathfrak{k}+\mathfrak{g}^Q$ (гл. I, § 6, n° 5, теорема 4); по утверждению (v) для этого необходимо и достаточно, чтобы $Q=\varnothing$, т. е. чтобы $P=-P$.

Докажем утверждение (ii). Если $\mathfrak{a}$ — полупростая алгебра Ли, то вследствие утверждения (i) $P=-P$, а значит, $\mathfrak{h}_P\subset\mathfrak{h}'$. Более того, $\mathfrak{a}\subset[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]\subset\mathfrak{h}_P+\mathfrak{g}^P$, и потому $\mathfrak{h}'=\mathfrak{h}_P$. Если $P=-P$ и $\mathfrak{h}'=\mathfrak{h}_P$, то по утверждению (iv) алгебра Ли $\mathfrak{a}$ редуктивна и $\mathfrak{a}=\sum_{\alpha\in P}\mathfrak{s}_\alpha$; следовательно, $\mathfrak{a}=[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ и алгебра Ли $\mathfrak{a}$ полупроста.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{a}$ — полупростая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, устойчивая относительно $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$, и пусть P — такое подмножество системы корней R, что $\mathfrak{a}=\mathfrak{h}_P+\mathfrak{g}^P$. Тогда*

(i) *$\mathfrak{h}_P$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{a}$;*

(ii) *система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{a},\mathfrak{h}_P)$ состоит из ограничений на подалгебру $\mathfrak{h}_P$ элементов множества P.*

Поскольку подалгебра Ли $\mathfrak{h}_P$ устойчива относительно $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$, то ее нормализатор в алгебре Ли $\mathfrak{a}$ устойчив относительно $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$ и, следовательно, имеет вид $\mathfrak{h}_P+\mathfrak{g}^Q$, где $Q\subset P$ (лемма 1). Если $\alpha\in Q$, то

$$\mathfrak{g}^\alpha=[\mathfrak{h}_\alpha,\mathfrak{g}^\alpha]\subset[\mathfrak{h}_P,\mathfrak{g}^\alpha]\subset\mathfrak{h}_P,$$

что приводит к противоречию. Следовательно, $Q=\varnothing$ и алгебра Ли $\mathfrak{h}_P$ совпадает со своим нормализатором в алгебре Ли $\mathfrak{a}$. Это доказывает, что она является подалгеброй Картана алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Если $x\in\mathfrak{h}_P$, то эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x$ и *a fortiori* эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\,x$ приводятся к треугольному виду. Итак, мы доказали утверждение (i), а утверждение (ii) очевидно.

Из предложения 1 (i) следует, что подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащими алгебру Ли $\mathfrak{h}$, являются множества вида $\mathfrak{h}+\mathfrak{g}^P$, где P — замкнутое подмножество системы корней R. В силу предложения 3 гл. VII, § 3, n° 3, каждая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{h}+\mathfrak{g}^P$ является подалгеброй Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{a}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{h}$, x — произвольный элемент из алгебры Ли $\mathfrak{a}$, а s и n — его полупростая и нильпотентная компоненты. Тогда $s\in\mathfrak{a}$ и $n\in\mathfrak{a}$.*

Имеет место включение $(\mathrm{ad}\, x)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$; следовательно, $(\mathrm{ad}\, s)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ и $(\mathrm{ad}\, n)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$. Так как алгебра Ли $\mathfrak{a}$ совпадает со своим нормализатором в $\mathfrak{g}$ (гл. VII, § 2, n° 1, следствие 4 предложения 4), то $s \in \mathfrak{a}$ и $n \in \mathfrak{a}$.

Предложение 5. *Пусть P — замкнутое подмножество системы корней R.*

(i) *Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^P$ была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы $P \cap (-P) = \varnothing$. Если это условие выполняется, то $[\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^P, \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^P] = \mathfrak{g}^P$.*

(ii) *Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^P$ была редуктивной, необходимо и достаточно, чтобы $P = -P$.*

Утверждение (i) следует из предложения 2 (iii). Если $P = -P$, то алгебра Ли $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^P$ редуктивна (предложение 2 (iv)). Предположим, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^P$ — редуктивная алгебра Ли. Тогда

$$\mathfrak{g}^P = [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^P] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^P,$$

а следовательно, коммутант $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ имеет вид $\mathfrak{h}' + \mathfrak{g}^P$, где $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$; так как алгебра Ли $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ полупроста, то $P = -P$ (предложение 2 (ii)).

2. *Идеалы*

Предложение 6. *Пусть $R_1, \ldots, R_p$ — неприводимые компоненты системы корней R. Для $i = 1, \ldots, p$ положим $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_{R_i} + \mathfrak{g}^{R_i}$. Тогда $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_p$ — простые слагаемые алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Алгебры Ли $\mathfrak{g}_i$ — идеалы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (предложение 1 (ii)). Ясно, что пространство $\mathfrak{g}$ является прямой суммой пространств $\mathfrak{g}_i$; следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ — прямое произведение алгебр $\mathfrak{g}_i$. Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — дополнительные друг к другу идеалы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ полупросты и устойчивы относительно эндоморфизмов $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$. Поэтому существуют такие подмножества P, Q системы корней R, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}_P + \mathfrak{g}^P$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}_Q + \mathfrak{g}^Q$. Пространства $\mathfrak{h}_P$, $\mathfrak{h}_Q$ являются взаимно ортогональными относительно формы Киллинга дополнительными подпространствами в пространстве $\mathfrak{h}$. Следовательно, P и Q являются объединениями неприводимых компонент системы корней R. Это доказывает, что $\mathfrak{g}_i$ — минимальные идеалы в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Следствие 1. *Чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была проста, необходимо и достаточно, чтобы система корней R была неприводимой (иначе говоря, чтобы ее граф Дынкина был связен).*

Это следствие вытекает из предложения 6.

Алгебра Ли $\mathfrak{a}$ называется *абсолютно простой*, если для любого расширения k' поля k k'-алгебра Ли $\mathfrak{a}_{(k')}$ проста.

Следствие 2. *Расщепленная простая алгебра Ли абсолютно проста.*

Это вытекает из следствия 1.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа A_l ($l \geqslant 1$), B_l ($l \geqslant 1$), C_l ($l \geqslant 1$) или D_l ($l \geqslant 3$), то $\mathfrak{g}$ называется *классической* простой расщепляемой алгеброй Ли. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа E_6, E_7, E_8, F_4 или G_2, то $\mathfrak{g}$ называется *исключительной* (или *особой*) простой расщепляемой алгеброй Ли.

3. Подалгебры Бореля

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^P$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{h}$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathfrak{b}$ — *максимальная разрешимая подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$;

(ii) *существует такая камера C системы корней R, что $P = R_+(C)$*;

(iii) $P \cap (-P) = \varnothing$ *и* $P \cup (-P) = R$.

(i)$\Rightarrow$(ii). Если алгебра Ли $\mathfrak{b}$ разрешима, то $P \cap (-P) = \varnothing$. Следовательно, существует такая камера C системы корней R, что $P \subset R_+(C)$ (гл. VI, § 1, n° 7, предложение 22). Тогда пространство $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{R_+(C)}$ — разрешимая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{b}$ и, следовательно, совпадающая с $\mathfrak{b}$, если $\mathfrak{b}$ — максимальная разрешимая подалгебра Ли.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Это очевидно.

(iii)$\Rightarrow$(i). Предположим, что $P \cap (-P) = \varnothing$ и что $P \cup (-P) = R$. Тогда $\mathfrak{b}$ — разрешимая алгебра Ли. Пусть $\mathfrak{b}'$ — разрешимая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{b}$. Существует такое подмножество Q системы корней R, что $\mathfrak{b}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^Q$. Тогда $Q \cap (-Q) = \varnothing$ и $Q \supset P$, а следовательно, $Q = P$ и $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}$.

Определение 1. *Подалгеброй Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называется подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ и удовлетворяющая эквивалентным условиям предложения 7.*

Подалгебра $\mathfrak{b}$ расщепляемой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется подалгеброй Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если в $\mathfrak{g}$ существует такая расщепляющая подалгебра Картана $\mathfrak{h}'$, что $\mathfrak{b}$ является подалгеброй Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$.

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — редуктивная расщепленная алгебра Ли. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{s}$, где $\mathfrak{c}$ — коммутативная алгебра Ли, а $\mathfrak{s}$ — полупростая. Подалгеброй Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называется подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вида $\mathfrak{c} \times \mathfrak{b}$, где $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{s}, \mathfrak{h} \cap \mathfrak{s})$.

В обозначениях предложения 7 подалгебру $\mathfrak{b}$ называют подалгеброй Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$, определенной алгеброй Картана $\mathfrak{h}$ и камерой C (или алгеброй Картана $\mathfrak{h}$ и базисом системы корней R, ассоциированным с C).

Замечание. Отображение, которое камере C системы корней R ставит в соответствие $R_+(C)$, является инъективным (гл. VI, § 1, n° 7, следствие 1 предложения 20). Следовательно, $C \mapsto \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{R_+(C)}$ — биективное отображение множества камер системы корней R на множество подалгебр Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Таким образом, число подалгебр Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ равно порядку группы Вейля системы корней R (гл. VI, § 1, n° 5, теорема 2).

Предложение 8. *Пусть* $\mathfrak{b}$ — *подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *а* k' — *расширение поля* k. *Тогда* $\mathfrak{b} \otimes_k k'$ *будет подалгеброй Бореля расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g} \otimes_k k', \mathfrak{h} \otimes_k k')$ *в том и только том случае, когда* $\mathfrak{b}$ — *подалгебра Бореля расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Это предложение очевидно ввиду утверждения (iii) предложения 7.

Предложение 9. *Пусть* $\mathfrak{b}$ — *подалгебра Бореля расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, *определенная камерой* C *системы корней* R. *Пусть* $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^{R_+(C)} = \sum_{\alpha \in R,\ \alpha > 0} \mathfrak{g}^\alpha$ *и* $l = \dim \mathfrak{h}$.

(i) *Если* $h \in \mathfrak{h}$ *и* $x \in \mathfrak{n}$, *то характеристический многочлен эндоморфизма* $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h + x)$ *равен* $T^l \prod_{\alpha \in R} (T - \alpha(h))$.

(ii) *Наибольший нильпотентный идеал подалгебры Бореля* $\mathfrak{b}$ *равен и* $\mathfrak{n}$, *и* $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$. *Он совпадает с множеством тех элементов подалгебры* $\mathfrak{b}$, *которые нильпотентны в алгебре Ли* $\mathfrak{g}$.

(iii) *Пусть* B — *базис системы корней* R, *определенный камерой* C. *Для любого* $\alpha \in B$ *пусть* X_α — *ненулевой элемент из пространства* $\mathfrak{g}^\alpha$. *Тогда набор элементов* $(X_\alpha)_{\alpha \in B}$ *порождает алгебру Ли* $\mathfrak{n}$. *Имеет место равенство*

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \sum_{\alpha \in R,\ \alpha > 0,\ \alpha \notin B} \mathfrak{g}^\alpha.$$

На пространстве $\mathfrak{h}^*_\mathbf{Q}$ существует такое упорядочение, согласованное со структурой векторного пространства, что элементы из $R_+(C)$ положительны относительно этого упорядочения (гл. VI, § 1, n° 7). Пусть элементы h, x такие же, как в утверждении (i), и $y \in \mathfrak{g}^\alpha$. Тогда $[h + x, y] = \alpha(h) y + z$, где $z \in \sum_{\beta > \alpha} \mathfrak{g}^\beta$. Следовательно, в подходящем базисе пространства $\mathfrak{g}$ матрица преобразования $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(h + x)$ имеет следующий вид:

1) это нижняя треугольная матрица;

2) на ее диагонали стоят числа 0 (l раз) и $\alpha(h)$ для всех корней $\alpha \in R$.

Это рассуждение доказывает утверждение (i). Отсюда также следует, что характеристический многочлен эндоморфизма $\mathrm{ad}_{\mathfrak{b}}(h+x)$ равен $T^l \prod\limits_{\alpha \in R_+(C)} (T - \alpha(h))$. Поэтому множество элементов из подалгебры Бореля $\mathfrak{b}$, нильпотентных в алгебре $\mathfrak{g}$, с одной стороны, и наибольший нильпотентный идеал подалгебры Бореля $\mathfrak{b}$, с другой стороны, равны $\mathfrak{n}$. Из предложения 5 (i) получаем, что $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$. Наконец, утверждение (iii) следует из предложения 4 (ii) § 2 и предложения 19 гл. VI, § 1, n° 6.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

(i) *Каждая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{b}$ является расщепляющей подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

(ii) *Если $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ — подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{b}$, то существует такой элемент $x \in [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$, что $e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x}\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.*

Утверждение (i) следует из предложения 9 (i) и из предложения 3 гл. VII, § 3, n° 3. Утверждение (ii) следует из предложения 9 (ii) и теоремы 3 гл. VII, § 3, n° 4.

Предложение 10. *Пусть $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ — подалгебры Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда существует расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащаяся в $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$.*

Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$, $\mathfrak{n}' = [\mathfrak{b}', \mathfrak{b}']$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ и $\mathfrak{s}$ — векторное подпространство пространства $\mathfrak{g}$, дополнительное к $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$. Обозначим через $\mathfrak{s}^\perp$, $\mathfrak{b}^\perp$, $\mathfrak{b}'^\perp$ пространства, ортогональные к $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}'$ соответственно относительно формы Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Положим $l = \dim \mathfrak{h}$, $n = \dim \mathfrak{n}$, $p = \dim \mathfrak{p}$. Тогда $\dim \mathfrak{b} = \dim \mathfrak{b}' = l + n$,

$$\dim \mathfrak{s}^\perp = \dim(\mathfrak{b} + \mathfrak{b}') = 2(l+n) - p$$

и, значит,

$$\begin{aligned}\dim(\mathfrak{s}^\perp \cap \mathfrak{p}) &\geqslant \dim \mathfrak{s}^\perp + \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{g} = \\ &= 2(l+n) - p + p - (l + 2n) = l. \qquad (3)\end{aligned}$$

Вследствие предложения 1 из § 2, n° 2, имеют место включения $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}^\perp$, $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{b}'^\perp$. Элементы пространства $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n}$ нильпотентны в $\mathfrak{g}$ (предложение 9 (ii)) и принадлежат $\mathfrak{b}'$, а значит, принадлежат $\mathfrak{n}'$ (предложение 9 (ii)). Следовательно, $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}' \subset \subset \mathfrak{b}^\perp \cap \mathfrak{b}'^\perp$, откуда вытекает, что $\mathfrak{s}^\perp \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{n} = 0$. Учитывая формулу (3), мы видим, что пространство $\mathfrak{s}^\perp \cap \mathfrak{p}$ является дополнением к пространству $\mathfrak{n}$ в пространстве $\mathfrak{b}$. Пусть z — регулярный в $\mathfrak{g}$ элемент алгебры $\mathfrak{h}$; тогда существует такой элемент $y \in \mathfrak{n}$, что $y + z \in \mathfrak{s}^{\perp} \cap \mathfrak{p}$. По предложению 9 (i) эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y+z)$ имеет тот же характеристический многочлен, что и эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} z$. Поэтому $x = y + z$ — регулярный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и *a fortiori* алгебр $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}'$ (гл. VII, § 2, n° 2, предложение 9). Так как ранги алгебр Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}'$ одинаковы, то пространство $\mathfrak{b}^0(x) = \mathfrak{g}^0(x) = \mathfrak{b}'^0(x)$ является подалгеброй Картана одновременно в алгебрах $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{b}'$ (гл. VII, § 3, n° 3, теорема 2). Наконец, эта подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является расщепляющей по следствию из предложения 9.

Следствие. *Группа* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *транзитивно действует на множестве пар* $(\mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, *где* $\mathfrak{k}$ — *расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *а* $\mathfrak{b}$ — *подалгебра Бореля расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$.

Пусть $(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{b}_1)$ и $(\mathfrak{k}_2, \mathfrak{b}_2)$ — две таких пары. Существует расщепляющая подалгебра Картана $\mathfrak{k}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащаяся в $\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$ (предложение 10). Согласно следствию предложения 9, все сводится к случаю, когда $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}$. Пусть S — система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. Тогда существуют такие базисы B_1, B_2 системы корней S, что подалгебры Бореля $\mathfrak{b}_i$ ассоциированы с базисами B_i $(i = 1, 2)$, и существует элемент $s \in W(S)$, который переводит B_1 в B_2. Наконец, существует такой автоморфизм $a \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, что $a | \mathfrak{k} = s$ (§ 2, n° 2, следствие теоремы 2). Тогда $a(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}$ и $a(b_1) = \mathfrak{b}_2$.

4. *Параболические подалгебры*

Предложение 11. *Пусть* $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^P$ — *подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *содержащая* $\mathfrak{h}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *алебра Ли* $\mathfrak{p}$ *содержит подалгебру Бореля расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$;

(ii) *существует такая камера* C *системы корней* R, *что* $P \supset R_+(C)$;

(iii) *подмножество* P *является параболическим, иначе говоря* (гл. VI, § 1, n° 7, определение 4), $P \cup (-P) = R$.

Условия (i) и (ii) эквивалентны по предложению 7. Условия (ii) и (iii) эквивалентны по предложению 20 гл. VI, § 1, n° 7.

Определение 2. *Параболической подалгеброй расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *называется подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *содержащая* $\mathfrak{h}$ *и удовлетворяющая эквивалентным условиям предложения* 11. *Параболической подалгеброй в* $\mathfrak{g}$ *называется пара-*

болическая подалгебра расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$, *где* $\mathfrak{h}'$ — *некоторая расщепляющая подалгебра Картана алгебры* $\mathfrak{g}$.

Это определение немедленно распространяется на случай, когда $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — редуктивная расщепленная алгебра Ли.

Замечание. Пусть B — базис системы корней R и $\mathfrak{b}$ — соответствующая подалгебра Бореля. Если $\Sigma \subset B$, то обозначим через Q_Σ множество линейных комбинаций с коэффициентами $\leqslant 0$ элементов из Σ; положим $P(\Sigma) = R_+(B) \cup Q_\Sigma$ и $\mathfrak{p}_\Sigma = \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g}^{P(\Sigma)}$. По лемме 3 и предложению 20 гл. VI, § 1, n° 7, пространство $\mathfrak{p}_\Sigma$ является параболической подалгеброй, содержащей $\mathfrak{b}$, и все параболические подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащие $\mathfrak{b}$, получаются таким образом.

Лемма 3. *Пусть V — конечномерное векторное пространство, S — система корней в пространстве V^*, $\mathscr{P}$ — множество параболических подмножеств системы S. Пусть $\mathscr{H}$ — множество гиперплоскостей вида* $\operatorname{Ker}\alpha$ *для всех $\alpha \in S$ и $\mathscr{F}$ — множество ячеек пространства V относительно множества гиперплоскостей $\mathscr{H}$* (гл. V, § 1, n° 2, определение 1).

Если $P \in \mathscr{P}$, то пусть $\overline{F}(P)$ — множество таких элементов $v \in V$, что $\alpha(v) \geqslant 0$ для всех корней $\alpha \in P$. Если $F \in \mathscr{F}$, то пусть $P(F)$ — множество таких корней $\alpha \in S$, что $\alpha(v) \geqslant 0$ для всех элементов $v \in F$.

Тогда $F \mapsto P(F)$ — биективное отображение множества $\mathscr{F}$ на множество $\mathscr{P}$; для любой ячейки $F \in \mathscr{F}$ множество $\overline{F}(P(F))$ равно ее замыканию.

а) Пусть $P \in \mathscr{P}$. Существуют такие камеры C системы S и подмножество Σ базиса $B(C)$, что $P = S_+(C) \cup Q$, где Q — множество линейных комбинаций с коэффициентами $\leqslant 0$ элементов из Σ (гл. VI, § 1, n° 7, предложение 20). Положим

$$B(C) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}, \qquad \Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}.$$

Если $v \in V$, то следующие условия эквивалентны:

$$\alpha(v) \geqslant 0 \text{ для всех корней } \alpha \in P;$$

$$\alpha_1(v) \geqslant 0, \ldots, \alpha_l(v) \geqslant 0, \quad \alpha_1(v) \leqslant 0, \ldots, \alpha_m(v) \leqslant 0;$$

$$\alpha_1(v) = \ldots = \alpha_m(v) = 0, \quad \alpha_{m+1}(v) \geqslant 0, \ldots, \alpha_l(v) \geqslant 0.$$

Следовательно, множество $\overline{F}(P)$ совпадает с замыканием множества

$$\{v \in V \mid \alpha_1(v) = \ldots = \alpha_m(v) = 0, \ \alpha_{m+1}(v) > 0, \ \ldots, \ \alpha_l(v) > 0\},$$

которое является ячейкой F относительно множества гиперплоскостей $\mathscr{H}$. Действительно, каждый элемент множества S — линейная комбинация корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ с коэффициентами, которые или все $\geqslant 0$, или все $\leqslant 0$. С другой стороны, если $\beta = u_1\alpha_1 + \ldots + u_l\alpha_l \in S$, то

$$\beta \in P(F) \Leftrightarrow u_{m+1} \geqslant 0, \ldots, u_l \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \beta \in S_+(C) \text{ или } (-\beta \in S_+(C) \text{ и } u_{m+1} = \ldots = u_l = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \beta \in S_+(C) \cup Q = P.$$

Следовательно, $P(F) = P$.

б) Пусть $F \in \mathscr{F}$. Ясно, что $P(F) \in \mathscr{P}$. С другой стороны, множество F содержится в замыкании некоторой камеры относительно множества гиперплоскостей $\mathscr{H}$ (гл. V, § 1, n°3, формулы (6)) и, значит, является ячейкой относительно множества стенок этой камеры (гл. V, § 1, n°4, предложение 9). Поэтому множество $\overline{F}$ имеет вид $\{v \in V \mid \alpha(v) \geqslant 0$ для всех $\alpha \in T\}$, где T — подмножество системы S, в качестве которого, очевидно, можно взять $P(F)$. Итак, $\overline{F} = \overline{F}(P(F))$. Ч. Т. Д.

Если $P \in \mathscr{P}$, то ячейка F, такая, что $P = P(F)$, называется *ассоциированной* с множеством P и обозначается через $F(P)$. Эти соглашения распространяются на случай, когда $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — редуктивная расщепленная алгебра Ли.

Предложение 12. *Пусть $\mathscr{H}$ — множество гиперплоскостей пространства $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$, являющихся ядрами корней из R. Обозначим через $\mathscr{F}$ множество ячеек пространства $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$ относительно множества гиперплоскостей $\mathscr{H}$, а через $\mathscr{P}$ — множество параболических подалгебр расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Для алгебры Ли $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^P \in \mathscr{P}$ обозначим через $F(\mathfrak{p})$ ячейку, ассоциированную с P. Тогда $\mathfrak{p} \mapsto F(\mathfrak{p})$ — биективное отображение множества $\mathscr{P}$ на $\mathscr{F}$. Если $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \mathscr{P}$, то*

$$\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \Leftrightarrow F(\mathfrak{p}_1) \subset \overline{F(\mathfrak{p}_2)}.$$

Это предложение непосредственно следует из леммы 3.

Пример. Параболическим подалгебрам расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, содержащим алгебру Бореля $\mathfrak{b}$, соответствуют ячейки, которые содержатся в замыкании камеры, ассоциированной с алгеброй Бореля $\mathfrak{b}$ (см. приведенное выше замечание).

Предложение 13. *Пусть $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^P$ — параболическая подалгебра расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, Q — множество таких корней $\alpha \in P$, что $-\alpha \notin P$, и $\mathfrak{s} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{P \cap (-P)}$. Тогда $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{g}^Q$, где $\mathfrak{s}$ — редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{g}^Q$ — наибольший ниль-*

потентный идеал и нильпотентный радикал алгебры Ли $\mathfrak{p}$. *Центр алгебры Ли* $\mathfrak{p}$ *равен нулю.*

По предложению 2 алгебра Ли $\mathfrak{s}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^Q$—нильпотентный идеал в $\mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал в $\mathfrak{p}$, то $\mathfrak{g}^Q \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^Q$ (предложение 2(i)). Если $x \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{h}$, то эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{p}} x$ нильпотентен; следовательно, $\alpha(x) = 0$ для всех корней $\alpha \in P$, поэтому $x = 0$. Это доказывает, что $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}^Q$. Так как $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}^Q] = \mathfrak{g}^Q$, то нильпотентный радикал алгебры Ли $\mathfrak{p}$ содержит $\mathfrak{g}^Q$ и, значит, равен $\mathfrak{g}^Q$. Пусть $z = h + \sum\limits_{\alpha \in P} u_\alpha$ (где $h \in \mathfrak{h}$, $u_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$) — элемент из центра алгебры Ли $\mathfrak{p}$. Для всех $h' \in \mathfrak{h}$ имеем $0 = [h', z] = \sum \alpha(h') u_\alpha$; следовательно, $u_\alpha = 0$ для всех корней $\alpha \in P$. Тогда $[h, \mathfrak{g}^\beta] = 0$ для всех корней $\beta \in P$, а значит, $h = 0$.

5. *Нерасщепленный случай*

Предложение 14. *Пусть k' — расширение поля k и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k'$. Пусть $\mathfrak{m}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \otimes_k k'$. Если $\mathfrak{m}'$ — параболическая подалгебра* (соотв. *подалгебра Бореля*) *алгебры Ли $\mathfrak{g}'$, то $\mathfrak{m}$ — параболическая подалгебра* (соотв. *подалгебра Бореля*) *алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Ввиду предложений 8 и 11 достаточно доказать, что $\mathfrak{m}$ содержит расщепляющую подалгебру Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} \otimes_k k'$ — подалгебра Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}'$, а следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{m}' \cap \mathfrak{b}'$ содержит подалгебру Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}'$ (предложение 10). Пусть $\mathfrak{k}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{b}$. Тогда $\mathfrak{k} \otimes_k k'$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{m}' \cap \mathfrak{b}'$, а значит, и в $\mathfrak{g}'$ (гл. VII, § 3, n° 3, предложение 3). Поэтому $\mathfrak{k}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, причем это расщепляющая подалгебра Картана, так как она содержится в $\mathfrak{b}$.

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{a}$ — полупростая* (*или, более общо, редуктивная*) *алгебра Ли и $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k. Подалгебра $\mathfrak{m}$ алгебры Ли $\mathfrak{a}$ называется параболической* (соотв. *подалгеброй Бореля*), *если $\mathfrak{m} \otimes_k \bar{k}$ — параболическая подалгебра* (соотв. *подалгебра Бореля*) *в алгебре Ли $\mathfrak{a} \otimes_k \bar{k}$.*

Если $\mathfrak{a}$ — расщепляемая алгебра Ли, то предложение 14 показывает, что это определение эквивалентно определению 2 (соотв. определению 1).

Предложение 15. *Пусть $\mathfrak{a}$ — редуктивная алгебра Ли, k' — расширение поля k и $\mathfrak{m}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{m}$ была параболической подалгеброй* (соотв.

подалгеброй Бореля) в $\mathfrak{a}$, *необходимо и достаточно, чтобы алгебра Ли* $\mathfrak{m} \otimes_k k'$ *была параболической подалгеброй* (соотв. *подалгеброй Бореля) в* $\mathfrak{a} \otimes_k k'$.

Это предложение непосредственно следует из предложения 14.

§ 4. Расщепленные полупростые алгебры Ли, определяемые приведенной системой корней

1. *Размеченные полупростые алгебры Ли*

Предложение 1. *Пусть* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — *полупростая расщепленная алгебра Ли,* R — *ее система корней,* B — *базис системы* R *и* $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in B}$ — *соответствующая этому базису матрица Картана. Пусть* $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ *для любого* $\alpha \in B$. *Тогда для любых элементов* α, $\beta \in B$ *имеют место равенства*

$$[H_\alpha, H_\beta] = 0, \tag{1}$$

$$[H_\alpha, X_\beta] = n(\beta, \alpha) X_\beta, \tag{2}$$

$$[H_\alpha, X_{-\beta}] = -n(\beta, \alpha) X_{-\beta}, \tag{3}$$

$$[X_{-\alpha}, X_\beta] = 0, \text{ если } \alpha \neq \beta, \tag{4}$$

$$(\operatorname{ad} X_\alpha)^{1-n(\beta, \alpha)} X_\beta = 0, \text{ если } \alpha \neq \beta, \tag{5}$$

$$(\operatorname{ad} X_{-\alpha})^{1-n(\beta, \alpha)} X_{-\beta} = 0, \text{ если } \alpha \neq \beta. \tag{6}$$

Семейство $(H_\alpha)_{\alpha \in B}$ *является базисом подалгебры* $\mathfrak{h}$. *Если* $X_\alpha \neq 0$ *и* $X_{-\alpha} \neq 0$ *при всех* $\alpha \in B$, *то алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *порождается множеством всех элементов* X_α *и* $X_{-\alpha}$ $(\alpha \in B)$.

(Отметим, что если α, $\beta \in B$ и $\alpha \neq \beta$, то $n(\beta, \alpha)$ будет целым числом $\leqslant 0$, поэтому формулы (5) и (6) имеют смысл.)

Формулы (1), (2) и (3) очевидны. Если $\alpha \neq \beta$, то элемент $\beta - \alpha$ не является корнем, так как все корни представляются как линейные комбинации элементов из B с целыми коэффициентами одного знака (гл. VI, § 1, n°6, теорема 3). Это доказывает формулу (4). Вследствие предложения 9 из гл. VI, § 1, n°3, мы также получаем, что α-серия, определенная элементом β, имеет вид

$$\{\beta, \beta + \alpha, \ldots, \beta - n(\beta, \alpha)\alpha\}.$$

Поэтому $\beta + (1 - n(\beta, \alpha))\alpha \notin R$, что доказывает формулу (5). Равенство (6) получается аналогичным образом. Семейство $(H_\alpha)_{\alpha \in B}$ является базисом для $R^\vee$, а следовательно, и для $\mathfrak{h}$. Если $X_\alpha \neq 0$ и $X_{-\alpha} \neq 0$ для всех $\alpha \in B$, то $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = \lambda_\alpha H_\alpha$

и $\lambda_\alpha \neq 0$. Таким образом, последнее утверждение следует из предложения 9(iii), § 3, n°3.

Определение 1. *Пусть* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — *полупростая расщепленная алгебра Ли, а* R — *ее система корней. Мы будем называть разметкой расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *пару* $(B, (\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in B})$, *где* B — *базис системы корней* R, *а* X_α — *ненулевой элемент пространства* $\mathfrak{g}^\alpha$ *при каждом* $\alpha \in B$. *Набор* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B, (\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in B})$, *где* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — *расщепленная полупростая алгебра Ли, а* $(B, (\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in B})$ — *разметка алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, *называется размеченной полупростой алгеброй Ли.*

Разметкой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называют разметку расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, где $\mathfrak{h}$ — некоторая расщепляющая подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$.

Пусть

$$a_1 = \left(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1, B_1, (\mathrm{X}^1_\alpha)_{\alpha \in B_1}\right) \quad \text{и} \quad a_2 = \left(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2, B_2, (\mathrm{X}^2_\alpha)_{\alpha \in B_2}\right)$$

— две размеченные полупростые алгебры Ли. Изоморфизмом алгебры Ли a_1 на алгебру Ли a_2 называется изоморфизм φ алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$ на алгебру Ли $\mathfrak{g}_2$, который переводит подалгебру $\mathfrak{h}_1$ в подалгебру $\mathfrak{h}_2$, базис B_1 в B_2 и элементы X^1_α в $\mathrm{X}^2_{\psi\alpha}$ для всех $\alpha \in B_1$ (где ψ — отображение, контрагредиентное к отображению $\varphi \mid \mathfrak{h}_1$). Если эти условия выполняются, то говорят также, что отображение φ переводит разметку $\left(B_1, (\mathrm{X}^1_\alpha)_{\alpha \in B_1}\right)$ в разметку $\left(B_2, (\mathrm{X}^2_\alpha)_{\alpha \in B_2}\right)$.

Если $(B, (X_\alpha)_{\alpha \in B})$ — разметка расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, то для каждого элемента $\alpha \in B$ однозначно определен элемент $\mathrm{X}_{-\alpha}$ из подпространства $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, для которого $[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}] = -\mathrm{H}_\alpha$ (§ 2, n°2, теорема 1 (iv)). Семейство элементов $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in B \cup (-B)}$ мы будем называть *системой образующих, определенной данной разметкой* (ср. предложение 1). Эта же система образующих определяется разметкой $(-B, (\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in -B})$. Пусть для каждого корня $\alpha \in B \cup (-B)$ задан такой элемент $t_\alpha \in k^*$, что $t_\alpha t_{-\alpha} = 1$ при всех $\alpha \in B$. Тогда семейство $(t_\alpha \mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in B \cup (-B)}$ будет системой образующих, определенной разметкой $(B, (t_\alpha \mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in B})$.

2. *Предварительная конструкция*

В этом и следующем пунктах мы будем обозначать через R приведенную систему корней в векторном пространстве V, а через B — некоторый базис системы R. Обозначим через $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in B}$ матрицу Картана относительно базиса B. Напомним, что $n(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \beta^\vee \rangle$. Мы докажем, что система R

является системой корней некоторой однозначно определенной расщепленной полупростой алгебры Ли; мы увидим, что такой алгеброй будет алгебра Ли, определенная соотношениями предложения 1.

Конструкция этого пункта может быть применена к любой квадратной матрице $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in B}$ над k, определитель которой не равен нулю и для которой $n(\alpha, \alpha) = 2$ при всех $\alpha \in B$ (см. гл. VI, § 1, n° 10, формула (14)).

Пусть E — свободная ассоциативная алгебра над множеством B над полем k. Напомним, что E — градуированная алгебра типа $\mathbf{N}$ (*Alg*, chap. III, § 3, n° 1, exercice 3). Для каждого $\alpha \in B$ мы построим эндоморфизмы $X^0_{-\alpha}$, H^0_α, X^0_α векторного пространства E степеней 1, 0, -1 соответственно. Для любого слова $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, составленного из элементов множества B, положим

$$X^0_{-\alpha}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{7}$$

$$H^0_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left(-\sum_{i=1}^{n} n(\alpha_i, \alpha)\right)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{8}$$

Элементы $X^0_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ определяются индукцией по n по формуле

$$X^0_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (X^0_{-\alpha_1}X^0_\alpha - \delta_{\alpha, \alpha_1}H^0_\alpha)(\alpha_2, \ldots, \alpha_n), \tag{9}$$

где $\delta_{\alpha, \alpha_1}$ — символ Кронекера. Если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — пустое слово, то $X^0_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ мы полагаем равным нулю.

Лемма 1. *Для любых корней* $\alpha, \beta \in B$ *имеют место равенства*

$$[X^0_\alpha, X^0_{-\alpha}] = -H^0_\alpha, \tag{10}$$

$$[H^0_\alpha, H^0_\beta] = 0, \tag{11}$$

$$[H^0_\alpha, X^0_\beta] = n(\beta, \alpha)X^0_\beta, \tag{12}$$

$$[H^0_\alpha, X^0_{-\beta}] = -n(\beta, \alpha)X^0_{-\beta}, \tag{13}$$

$$[X^0_\alpha, X^0_{-\beta}] = 0, \quad \textit{если} \quad \alpha \neq \beta. \tag{14}$$

Действительно, соотношение (9) означает, что

$$(X^0_\alpha X^0_{-\alpha_1})(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (X^0_{-\alpha_1}, X^0_\alpha)(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) - \delta_{\alpha, \alpha_1}H^0_\alpha(\alpha_2, \ldots, \alpha_n);$$

это доказывает формулы (10) и (14). Соотношение (11) очевидно. Вследствие этого

$$\begin{aligned}[H_\alpha^0, X_{-\beta}^0](\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \\ &= H_\alpha^0(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \left(\sum_{i=1}^n n(\alpha_i, \alpha)\right)(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \\ &= -n(\beta, \alpha)(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \\ &= -n(\beta, \alpha) X_{-\beta}^0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\end{aligned}$$

что доказывает равенство (13). Наконец,

$$\begin{aligned}0 &= [H_\alpha^0, [X_\beta^0, X_{-\gamma}^0]] \text{ (ввиду (10), (11), (14))} = \\ &= [[H_\alpha^0, X_\beta^0], X_{-\gamma}^0] + [X_\beta^0, [H_\alpha^0, X_{-\gamma}^0]] = \\ &= [[H_\alpha^0, X_\beta^0] - n(\gamma, \alpha) X_\beta^0, X_{-\gamma}^0] \text{ (ввиду (13))} = \\ &= [[H_\alpha^0, X_\beta^0] - n(\beta, \alpha) X_\beta^0, X_{-\gamma}^0] \text{ (ввиду (14))}. \qquad (15)\end{aligned}$$

Если мы рассмотрим пустое слово, то очевидно, что

$$([H_\alpha^0, X_\beta^0] - n(\beta, \alpha) X_\beta^0)(\varnothing) = 0,$$

и вследствие равенства (15)

$$([H_\alpha^0, X_\beta^0] - n(\beta, \alpha) X_\beta^0) X_{-\gamma_1}^0 X_{-\gamma_2}^0 \ldots X_{-\gamma_n}^0(\varnothing) = 0$$

при любых $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in B$; это доказывает формулу (12).

Лемма 2. *Все эндоморфизмы* X_α^0, H_β^0, $X_{-\gamma}^0$, *где* α, β, $\gamma \in B$, *линейно независимы.*

Так как $X_{-\alpha}^0(\varnothing) = \alpha$, то ясно, что эндоморфизмы $X_{-\alpha}^0$ линейно независимы. Предположим, что $\sum\limits_\alpha a_\alpha H_\alpha^0 = 0$. Тогда для любого элемента $\beta \in B$ имеет место равенство

$$0 = \left[\sum_\alpha a_\alpha H_\alpha^0, X_{-\beta}^0\right] = -\sum_\alpha a_\alpha n(\beta, \alpha) X_{-\beta}^0.$$

Так как $\det(n(\beta, \alpha)) \neq 0$, то $a_\alpha = 0$ для всех α. Предположим, что $\sum\limits_\alpha \alpha_\alpha X_\alpha^0 = 0$. Вследствие формул (7), (8), (9)

$$X_\alpha^0(\beta) = 0,$$
$$X_\alpha^0(\beta, \beta) = 2\delta_{\alpha, \beta}\beta$$

для любого $\beta \in B$. Из этих равенств следует, что $a_\beta = 0$ для всех β. Так как степени эндоморфизмов X_α', H_α^0 и $X_{-\alpha}^0$ равны соответственно -1, 0, 1, то утверждение леммы следует из доказанных выше утверждений.

Обозначим через I множество $B\times\{-1, 0, 1\}$. Положим $x_\alpha=(\alpha, -1)$, $h_\alpha=(\alpha, 0)$ и $x_{-\alpha}=(\alpha, 1)$. Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли с системой образующих I и следующим множеством определяющих соотношений $\mathscr{R}$:

$$\begin{aligned}&[h_\alpha, h_\beta],\\ &[h_\alpha, x_\beta]-n(\beta, \alpha)x_\beta,\\ &[h_\alpha, x_{-\beta}]+n(\beta, \alpha)x_{-\beta},\\ &[x_\alpha, x_{-\alpha}]+h_\alpha,\\ &[x_\alpha, x_{-\beta}], \text{ если } \alpha\neq\beta\end{aligned}$$

(см. гл. II, § 2, n°3). По лемме 1 однозначно определено линейное представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{a}$ в пространстве E, для которого

$$\rho(x_\alpha)=\mathrm{X}^0_\alpha,\quad \rho(h_\alpha)=\mathrm{H}^0_\alpha,\quad \rho(x_{-\alpha})=\mathrm{X}^0_{-\alpha}.$$

Используя лемму 2, получаем отсюда следующий результат:

Лемма 3. *Множество канонических образов в* $\mathfrak{a}$ *элементов* x_α, h_β, $x_{-\gamma}$, *где* α, β, $\gamma\in B$, *линейно независимо.*

В дальнейшем мы отождествляем элементы x_α, h_α, $x_{-\alpha}$ с их каноническими образами в алгебре Ли $\mathfrak{a}$.

Лемма 4. *Существует единственный инволютивный автоморфизм* θ *алгебры Ли* $\mathfrak{a}$, *для которого*

$$\theta(x_\alpha)=x_{-\alpha},\quad \theta(x_{-\alpha})=x_\alpha,\quad \theta(h_\alpha)=-h_\alpha$$

при всех $\alpha\in B$.

Действительно, ясно, что существует инволютивный автоморфизм свободной алгебры Ли $L(I)$, удовлетворяющий данным условиям. Множество $\mathscr{R}\cup(-\mathscr{R})$ устойчиво относительно этого автоморфизма, поэтому он определяет при переходе к фактор-алгебре инволютивный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{a}$, удовлетворяющий условиям леммы. Такой автоморфизм единствен, так как алгебра Ли $\mathfrak{a}$ порождается своими элементами x_α, h_α, $x_{-\alpha}$ $(\alpha\in B)$.

Данный автоморфизм называется *каноническим инволютивным автоморфизмом алгебры Ли* $\mathfrak{a}$.

Пусть Q — группа радикальных весов системы R; группа Q является свободным $\mathbf{Z}$-модулем с базисом B (гл. IV, § 1, n°9). На свободной алгебре Ли $L(I)$ можно определить такую градуировку типа Q, что x_α, h_α, $x_{-\alpha}$ будут элементами степеней

α, 0, $-\alpha$ соответственно (гл. II, § 2, n° 6). При этом все элементы множества $\mathscr{R}$ будут однородными. Следовательно, на пространстве $\mathfrak{a}$ единственным образом определяется градуировка типа Q, согласованная со структурой алгебры Ли на $\mathfrak{a}$, относительно которой элементы x_α, h_α, $x_{-\alpha}$ имеют степени α, 0, $-\alpha$ соответственно. Для произвольного элемента $\mu \in Q$ мы будем обозначать через $\mathfrak{a}^\mu$ множество однородных элементов степени μ в алгебре Ли $\mathfrak{a}$ относительно указанной градуировки.

Лемма 5. *Пусть $z \in \mathfrak{a}$. Для того чтобы $z \in \mathfrak{a}^\mu$, необходимо и достаточно, чтобы равенство $[h_\alpha, z] = \langle \mu, \alpha^\vee \rangle z$ выполнялось при всех $\alpha \in B$.*

Пусть $\mu \in Q$, и пусть $\mathfrak{a}^{(\mu)}$ — множество элементов $x \in \mathfrak{a}$, для которых равенство $[h_\alpha, x] = \langle \mu, \alpha^\vee \rangle x$ выполняется при любом $\alpha \in B$. Сумма подпространств $\mathfrak{a}^{(\mu)}$ прямая, поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что $\mathfrak{a}^\mu \subset \mathfrak{a}^{(\mu)}$. Для этого рассмотрим корни $\alpha \in B$. Пусть u — такой эндоморфизм векторного пространства $\mathfrak{a}$, что $u \mid \mathfrak{a}^\mu = \langle \mu, \alpha^\vee \rangle \cdot 1$. Тогда u — дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{a}$, причем $ux = (\operatorname{ad} h_\alpha) \cdot x$ для $x = x_\beta$, $x = h_\beta$, $x = x_{-\beta}$. Вследствие этого $u = \operatorname{ad} h_\alpha$, что и доказывает наше утверждение.

Замечание. Из леммы 5 следует, что любой идеал алгебры Ли $\mathfrak{a}$ однороден, так как он является подпространством, устойчивым относительно эндоморфизмов $\operatorname{ad} h_\alpha$.

Обозначим через Q_+ (соотв. через Q_-) множество линейных комбинаций элементов базиса B с целыми неотрицательными (соотв. неположительными) коэффициентами, не равными одновременно нулю. Положим $\mathfrak{a}_+ = \sum_{\mu \in Q_+} \mathfrak{a}^\mu$ и $\mathfrak{a}_- = \sum_{\mu \in Q_-} \mathfrak{a}^\mu$. Так как $Q_+ + Q_+ \subset Q_+$ и $Q_- + Q_- \subset Q_-$, то подпространства $\mathfrak{a}_+$ и $\mathfrak{a}_-$ будут подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{a}$.

Предложение 2. (i) *Алгебра Ли $\mathfrak{a}_+$ порождается семейством $(x_\alpha)_{\alpha \in B}$.*

(ii) *Алгебра Ли $\mathfrak{a}_-$ порождается семейством $(x_{-\alpha})_{\alpha \in B}$.*

(iii) *Семейство $(h_\alpha)_{\alpha \in B}$ является базисом векторного пространства $\mathfrak{a}^0$.*

(iv) *Векторное пространство $\mathfrak{a}$ — прямая сумма подпространств $\mathfrak{a}_+$, $\mathfrak{a}^0$ и $\mathfrak{a}_-$.*

Пусть $\mathfrak{x}$ (соотв $\mathfrak{y}$) — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$, порожденная семейством $(x_\alpha)_{\alpha \in B}$ (соотв. $(x_{-\alpha})_{\alpha \in B}$), и $\mathfrak{h}$ — подпространство векторного пространства $\mathfrak{a}$, порожденное семейством $(h_\alpha)_{\alpha \in B}$. Ввиду того что x_α — однородные элементы подалгебры $\mathfrak{a}_+$,

$\mathfrak{x}$ — градуированная подалгебра в $\mathfrak{a}_+$, а значит, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{x}] \subset \mathfrak{x}$ и $\mathfrak{h} + \mathfrak{x}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Так как

$$[x_{-\alpha}, x_\beta] = \delta_{\alpha\beta} h_\alpha,$$

то $[x_{-\alpha}, \mathfrak{x}] \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{x}$ при всех $\alpha \in B$. Таким же образом мы получаем, что $\mathfrak{y}$ — градуированная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}_-$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{y}] \subset \mathfrak{y}$, вследствие чего $\mathfrak{h} + \mathfrak{y}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и $[x_\alpha, \mathfrak{y}] \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{y}$ для любого корня $\alpha \in B$. Положим $\mathfrak{a}' = \mathfrak{x} + \mathfrak{h} + \mathfrak{y}$. Проведенные рассуждения показывают, что алгебра Ли $\mathfrak{a}'$ устойчива относительно эндоморфизмов $\operatorname{ad} x_\alpha$, $\operatorname{ad} h_\alpha$ и $\operatorname{ad} x_{-\alpha}$ при всех $\alpha \in B$ и, следовательно, является идеалом в алгебре Ли $\mathfrak{a}$. Так как $\mathfrak{a}'$ содержит элементы x_α, h_α, $x_{-\alpha}$ для всех корней $\alpha \in B$, то $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$. Таким образом, включения $\mathfrak{x} \subset \mathfrak{a}_+$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{y} \subset \mathfrak{a}_-$ являются равенствами, что и доказывает предложение.

Предложение 3. *Алгебра Ли* $\mathfrak{a}_+$ (соотв. $\mathfrak{a}_-$) — *свободная алгебра Ли, базисом которой служит семейство* $(x_\alpha)_{\alpha \in B}$ (соотв. $(x_{-\alpha})_{\alpha \in B}$) (см. гл. II, § 2, n° 3).

Пусть L — подалгебра Ли алгебры E, порожденная множеством B. Вследствие теоремы 1 из § 3 гл. II алгебру Ли L можно рассматривать как свободную алгебру Ли над B. Левое регулярное представление алгебры E очевидным образом точно. Его ограничение на L определяет точное представление ρ' алгебры Ли L в пространстве E. Пусть φ — гомоморфизм алгебры Ли L на алгебру Ли $\mathfrak{a}_-$, который переводит элемент α в $x_{-\alpha}$ для каждого $\alpha \in B$. Тогда эндоморфизм $\rho(\varphi(\alpha))$ при любом $\alpha \in B$ является оператором умножения слева на элемент α в алгебре E, поэтому $\rho \circ \varphi = \rho'$, и это показывает, что отображение φ инъективно. Таким образом, семейство $(x_{-\alpha})_{\alpha \in B}$ является базисом алгебры Ли $\mathfrak{a}_-$. Так как $\theta(x_{-\alpha}) = x_\alpha$ при всех α (ср. лемму 4), то семейство $(x_\alpha)_{\alpha \in B}$ является базисом алгебры Ли $\mathfrak{a}_+$.

3. *Теорема существования*

Сохраним предположения и обозначения предыдущего пункта. Напомним, что если α, $\beta \in B$ и $\alpha \neq \beta$, то $n(\beta, \alpha) \leqslant 0$, причем равенство $n(\beta, \alpha) = 0$ влечет за собой $n(\alpha, \beta) = 0$ (гл. VI, § 1, n° 1, формула (8)). Для каждой пары (α, β) различных элементов множества B положим

$$x_{\alpha, \beta} = (\operatorname{ad} x_\alpha)^{1 - n(\beta, \alpha)} x_\beta,$$
$$y_{\alpha, \beta} = (\operatorname{ad} x_{-\alpha})^{1 - n(\beta, \alpha)} x_{-\beta}.$$

Ясно, что $x_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{a}_+$, $y_{\alpha,\beta} \in \mathfrak{a}_-$. Если θ — канонический автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{a}$, то $\theta(x_{\alpha,\beta}) = y_{\alpha,\beta}$.

Лемма 6. *Пусть* $\alpha, \beta \in B$ *и* $\alpha \neq \beta$. *Тогда*

$$[\mathfrak{a}_+, y_{\alpha,\beta}] = 0, \quad [\mathfrak{a}_-, x_{\alpha,\beta}] = 0.$$

Вторая формула получается из первой при применении автоморфизма θ. Для доказательства первой достаточно показать, что $[x_\gamma, y_{\alpha,\beta}] = 0$ при всех $\gamma \in B$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. $\gamma \neq \alpha$ и $\gamma \neq \beta$. При этом x_γ перестановочен с элементами $x_{-\alpha}$ и $x_{-\beta}$, а следовательно, и с $y_{\alpha,\beta}$.

Случай 2. $\gamma = \beta$. В этом случае элемент x_γ перестановочен с элементом $x_{-\alpha}$, поэтому

$$[x_\gamma, y_{\alpha,\beta}] = (\operatorname{ad} x_{-\alpha})^{1-n(\beta,\alpha)} [x_\gamma, x_{-\beta}] =$$
$$= -(\operatorname{ad} x_{-\alpha})^{1-n(\beta,\alpha)} h_\beta = -n(\alpha,\beta)(\operatorname{ad} x_{-\alpha})^{-n(\beta,\alpha)} x_{-\alpha}.$$

Если $n(\beta,\alpha) < 0$, то последнее выражение равно нулю, так как $(\operatorname{ad} x_{-\alpha}) \cdot x_{-\alpha} = 0$. Если $n(\beta,\alpha) = 0$, то $n(\alpha,\beta) = 0$ и $[x_\gamma, y_{\alpha,\beta}] = 0$.

Случай 3. $\gamma = \alpha$. В алгебре эндоморфизмов пространства $\mathfrak{a}$ имеют место равенства

$$[-\operatorname{ad} h_\alpha, \operatorname{ad} x_{-\alpha}] = 2 \operatorname{ad} x_{-\alpha}$$

и

$$[\operatorname{ad} x_\alpha, \operatorname{ad} x_{-\alpha}] = -\operatorname{ad} h_\alpha,$$

поэтому ввиду леммы 1 из § 1 будет выполняться соотношение

$$[\operatorname{ad} x_\alpha, (\operatorname{ad} x_{-\alpha})^{1-n(\beta,\alpha)}] =$$
$$= (1 - n(\beta,\alpha))(\operatorname{ad} x_{-\alpha})^{-n(\beta,\alpha)}(-\operatorname{ad} h_\alpha - n(\beta,\alpha)).$$

Следовательно,

$$[x_\gamma, y_{\alpha,\beta}] = [\operatorname{ad} x_\alpha, (\operatorname{ad} x_{-\alpha})^{1-n(\beta,\alpha)}] x_{-\beta} +$$
$$+ (\operatorname{ad} x_{-\alpha})^{1-n(\beta,\alpha)} (\operatorname{ad} x_\alpha) x_{-\beta} =$$
$$= -(1 - n(\beta,\alpha))(\operatorname{ad} x_{-\alpha})^{-n(\beta,\alpha)}(\operatorname{ad} h_\alpha + n(\beta,\alpha)) x_{-\beta} +$$
$$+ (\operatorname{ad} x_{-\alpha})^{1-n(\beta,\alpha)} (\operatorname{ad} x_\alpha) x_{-\beta}.$$

Так как $[h_\alpha, x_{-\beta}] + n(\beta,\alpha) x_{-\beta} = 0$ и $[x_\alpha, x_{-\beta}] = 0$, то $[x_\gamma, y_{\alpha,\beta}] = 0$.

Лемма 7. *Идеал* $\mathfrak{n}$ *алгебры* $\mathfrak{a}_+$, *порожденный элементами* $x_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \in B,\ \alpha \neq \beta)$, *будет идеалом в алгебре* $\mathfrak{a}$. *Идеал алгебры* $\mathfrak{a}_-$, *порожденный элементами* $y_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \in B, \alpha \neq \beta)$, — *идеал в алгебре* $\mathfrak{a}$, *равный* $\theta(\mathfrak{n})$.

Пусть $\mathfrak{n}' = \sum\limits_{\alpha, \beta \in B, \alpha \neq \beta} kx_{\alpha, \beta}$. Так как $x_{\alpha,\beta}$ — однородный элемент алгебры Ли $\mathfrak{a}$, то $[\mathfrak{a}^0, \mathfrak{n}'] \subset \mathfrak{n}'$ (лемма 5 и предложение 2). Обозначим через U (соотв. через V) универсальную обертывающую алгебру для $\mathfrak{a}$ (соотв. $\mathfrak{a}_+$) и через σ — представление алгебры U, построенное по присоединенному представлению алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Идеал алгебры Ли $\mathfrak{a}$, порожденный подпространством $\mathfrak{n}'$, равен $\sigma(U)\mathfrak{n}'$. Так как $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_+ + \mathfrak{a}^0 + \mathfrak{a}_-$ (предложение 2), $\sigma(\mathfrak{a}_-)\mathfrak{n}' = 0$ (лемма 6) и $\sigma(\mathfrak{a}^0)\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{n}'$ по доказанному выше, то по теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта $\sigma(U)\mathfrak{n}' = \sigma(V)\mathfrak{n}'$. Этим доказано первое утверждение леммы. Из него легко получить, что идеал алгебры Ли $\theta(\mathfrak{a}_+) = \mathfrak{a}_-$, порожденный элементами $\theta(x_{\alpha,\beta}) = y_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \in B, \alpha \neq \beta)$, совпадает с идеалом $\theta(\mathfrak{n})$ алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Ч. Т. Д.

Идеал $\mathfrak{n} + \theta\mathfrak{n}$ алгебры Ли $\mathfrak{a}$ градуированный, так как он порождается однородными элементами. Вследствие этого $\mathfrak{a}/(\mathfrak{n} + \theta\mathfrak{n})$ тоже имеет градуировку типа Q. В дальнейшем в настоящем параграфе мы будем обозначать эту алгебру Ли через $\mathfrak{g}_B$ или просто через $\mathfrak{g}$. Из предложения 2 следует, что если $\mathfrak{g}^\mu \neq 0$, то $\mu \in Q_+$ или $\mu \in Q_-$, или $\mu = 0$. Обозначим через X_α (соотв. через H_α, $\mathrm{X}_{-\alpha}$) образ элемента x_α (соотв. h_α, $x_{-\alpha}$) в $\mathfrak{g}$. Из определений алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и идеалов $\mathfrak{n}$, $\theta\mathfrak{n}$ следует, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ определяется системой образующих $((\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{H}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}))_{\alpha \in B}$ и следующими соотношениями:

$$[\mathrm{H}_\alpha, \mathrm{H}_\beta] = 0, \tag{16}$$

$$[\mathrm{H}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] - n(\beta, \alpha)\mathrm{X}_\beta = 0, \tag{17}$$

$$[\mathrm{H}_\alpha, \mathrm{X}_{-\beta}] + n(\beta, \alpha)\mathrm{X}_{-\beta} = 0, \tag{18}$$

$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}] + \mathrm{H}_\alpha = 0, \tag{19}$$

$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\beta}] = 0 \qquad (\alpha \neq \beta), \tag{20}$$

$$(\operatorname{ad} \mathrm{X}_\alpha)^{1-n(\beta,\alpha)}\mathrm{X}_\beta = 0 \qquad (\alpha \neq \beta), \tag{21}$$

$$(\operatorname{ad} \mathrm{X}_{-\alpha})^{1-n(\beta,\alpha)}\mathrm{X}_{-\beta} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta). \tag{22}$$

Пусть $z \in \mathfrak{g}$ и $\mu \in Q$. Тогда условие $z \in \mathfrak{g}^\mu$ равносильно тому, что при всех $\alpha \in B$ выполнено равенство $[H_\alpha, z] = \langle \mu, \alpha^\vee \rangle z$. Это следует из леммы 5.

Так как $\mathfrak{a}^0 \cap (\mathfrak{n} + \theta\mathfrak{n}) = 0$, то каноническое отображение подпространства $\mathfrak{a}^0$ на $\mathfrak{g}^0$ является изоморфизмом. Таким образом, семейство элементов $(\mathrm{H}_\alpha)_{\alpha \in B}$ — базис векторного пространства $\mathfrak{g}^0$. Мы будем обозначать коммутативную подалгебру $\mathfrak{g}^0$ алгебры

Ли $\mathfrak{g}_B$ через $\mathfrak{h}_B$ или просто через $\mathfrak{h}$. Однозначно определен изоморфизм $\mu \mapsto \mu_B$ векторного пространства V на пространство $\mathfrak{h}^*$, при котором $\langle \mu_B, \mathrm{H}_\alpha \rangle = \langle \mu, \alpha^\vee \rangle$ для всех $\mu \in V$ и $\alpha \in B$.

Инволютивный автоморфизм θ алгебры Ли $\mathfrak{a}$ определяет инволютивный автоморфизм факторалгебры Ли $\mathfrak{g}$, который мы будем тоже обозначать через θ. При этом $\theta(\mathrm{X}_\alpha) = \mathrm{X}_{-\alpha}$ для $\alpha \in B \cup (-B)$ и $\theta(\mathrm{H}_\alpha) = -\mathrm{H}_\alpha$.

Теорема 1. *Пусть R — приведенная система корней и B — базис системы R. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, определенная системой образующих* $((\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{H}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}))_{\alpha \in B}$ *и соотношениями* (16)—(22), *и* $\mathfrak{h} = \sum_{\alpha \in B} k\mathrm{H}_\alpha$. *Тогда* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — *полупростая расщепленная алгебра Ли, изоморфизм* $\mu \mapsto \mu_B$ *пространства V на пространство $\mathfrak{h}^*$ отображает систему R на систему корней алгебры* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *и при любом* $\mu \in R$ *подпространство* $\mathfrak{g}^\mu$ *совпадает с собственным подпространством относительно корня* μ.

Доказательство теоремы будет приведено после доказательств лемм 8, 9, 10, 11.

Лемма 8. *Пусть* $\alpha \in B \cup (-B)$. *Тогда эндоморфизм* $\operatorname{ad} X_\alpha$ *локально нильпотентен*[1]).

Предположим, что $\alpha \in B$. Обозначим через $\mathfrak{g}'$ множество таких элементов $z \in \mathfrak{g}$, что $(\operatorname{ad} \mathrm{X}_\alpha)^p z = 0$ для достаточно большого p. Поскольку $\operatorname{ad} \mathrm{X}_\alpha$ — дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то подпространство $\mathfrak{g}'$ будет подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Ввиду формулы (21) $\mathrm{X}_\beta \in \mathfrak{g}'$ при любом $\beta \in B$. Следовательно, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$, и эндоморфизм $\operatorname{ad} \mathrm{X}_\alpha$ локально нильпотентен. Так как $\operatorname{ad} \mathrm{X}_{-\alpha} = \theta (\operatorname{ad} \mathrm{X}_\alpha) \theta^{-1}$, то эндоморфизм $\operatorname{ad} \mathrm{X}_{-\alpha}$ тоже локально нильпотентен.

Как будет показано, пространство $\mathfrak{g}$ имеет конечную размерность, и поэтому эндоморфизм $\operatorname{ad} \mathrm{X}_\alpha$ на самом деле является нильпотентным.

Лемма 9. *Пусть* $\mu, \nu \in Q$ *и* $w \in W(R)$, *причем* $w\mu = \nu$. *Тогда существует автоморфизм алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *который переводит* $\mathfrak{g}^\mu$ *в* $\mathfrak{g}^\nu$.

Для произвольного элемента $\alpha \in B$ обозначим через s_α отражение в пространстве V, определенное элементом α. Так как

---

[1]) Эндоморфизм u векторного пространства V называется *локально нильпотентным* (или *почти нильпотентным*), если для каждого элемента $v \in V$ существует такое целое положительное число n, что $u^n(v) = 0$ (см. *Комм. алг.*, гл. IV, § 1, п° 4, определение 2). При этом можно определить $\exp u$ или e^u по формуле $e^u(v) = \sum_{n \geq 0} (1/n!)\, u^n(v)$ для любого $v \in V$.

группа $W(R)$ порождается отражениями s_α (гл. VI, § 1, n° 5, *замечание* 1), то достаточно доказать утверждение леммы для $w = s_\alpha$. Вследствие леммы 8 можно определить отображение

$$\theta_\alpha = e^{\operatorname{ad} X_\alpha} e^{\operatorname{ad} X_{-\alpha}} e^{\operatorname{ad} X_\alpha}.$$

Так же как и в гл. I, § 6, n° 8, можно проверить, что θ_α — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. При этом

$$\begin{aligned}
\theta_\alpha(H_\beta) &= e^{\operatorname{ad} X_\alpha} e^{\operatorname{ad} X_{-\alpha}} (H_\beta - n(\alpha, \beta) X_\alpha) = \\
&= e^{\operatorname{ad} X_\alpha} \left(H_\beta - n(\alpha, \beta) X_\alpha + n(\alpha, \beta) X_{-\alpha} - n(\alpha, \beta) H_\alpha - \frac{n(\alpha, \beta)}{2} 2X_{-\alpha}\right) = \\
&= e^{\operatorname{ad} X_\alpha} (H_\beta - n(\alpha, \beta) H_\alpha - n(\alpha, \beta) X_\alpha) = \\
&= H_\beta - n(\alpha, \beta) H_\alpha - n(\alpha, \beta) X_\alpha - n(\alpha, \beta) X_\alpha - n(\alpha, \beta)(-2X_\alpha) = \\
&= H_\beta - n(\alpha, \beta) H_\alpha.
\end{aligned}$$

Если $z \in \mathfrak{g}^\mu$, то

$$\begin{aligned}
[H_\beta, \theta_\alpha^{-1} z] &= \theta_\alpha^{-1} [H_\beta - n(\alpha, \beta) H_\alpha, z] = \\
&= \theta_\alpha^{-1} (\langle \mu, \beta^\vee \rangle z - n(\alpha, \beta) \langle \mu, \alpha^\vee \rangle z) = \\
&= \langle \mu - \langle \alpha^\vee, \mu \rangle \alpha, \beta^\vee \rangle \theta_\alpha^{-1} z = \langle s_\alpha \mu, \beta' \rangle \theta_\alpha^{-1} z;
\end{aligned}$$

следовательно, $\theta_\alpha^{-1} z \in \mathfrak{g}^{s_\alpha \mu}$. Тем самым доказано, что $\theta_\alpha^{-1} \mathfrak{g}^\mu \subset \mathfrak{g}^{s_\alpha \mu}$. Вследствие того что θ_α — автоморфизм и указанное включение справедливо при всех $\mu \in Q$, имеет место включение $\theta_\alpha^{-1} \mathfrak{g}^\mu = \mathfrak{g}^{s_\alpha \mu}$. Это доказывает лемму.

Лемма 10. *Пусть* $\mu \in Q$, *и предположим, что элемент* μ *не пропорционален никакому корню. Тогда существует такой элемент* $w \in W(R)$, *что некоторые координаты элемента* $w\mu$ *относительно базиса* B *больше нуля, а некоторые — меньше.*

Обозначим через $V_{\mathbf{R}}$ векторное пространство $Q \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, в котором система R является системой корней. По предположению существует такой элемент $f \in V_{\mathbf{R}}^*$, что $\langle f, \alpha \rangle \neq 0$ для всех $\alpha \in R$ и $\langle f, \mu \rangle = 0$. Обозначим через C такую камеру системы $R^\vee$, что $f \in C$. По теореме 2 (i) из гл. VI, § 1, n° 5, существует такой элемент $w \in W(R)$, что wf принадлежит камере, ассоциированной с базисом B, т. е. $\langle wf, \alpha \rangle > 0$ при всех $\alpha \in B$. Представим элемент $w\mu$ в виде $w\mu = \sum_{\alpha \in B} t_\alpha \alpha$. Тогда

$$0 = \langle f, \mu \rangle = \langle wf, w\mu \rangle = \sum_{\alpha \in B} t_\alpha \langle wf, \alpha \rangle,$$

а это показывает, что некоторые числа t_α больше 0, а некоторые — меньше.

Лемма 11. *Пусть* $\mu \in Q$. *Если* $\mu \notin R \cup \{0\}$, *то* $\mathfrak{g}^\mu = 0$. *Если* $\mu \in R$, *то* $\dim \mathfrak{g}^\mu = 1$.

1) Если вес μ не пропорционален элементу из R, то существует такой элемент $w \in W$, что $w\mu \notin Q_+ \cup Q_-$ (лемма 10). Тогда $\mathfrak{a}^{w\mu} = 0$, $\mathfrak{g}^{w\mu} = 0$ и, следовательно, $\mathfrak{g}^\mu = 0$ (лемма 9).

2) Пусть $\alpha \in B$ и m — целое число. Так как $\mathfrak{a}_+$ — свободная алгебра Ли с образующими $(x_\alpha)_{\alpha \in B}$, то $\dim \mathfrak{a}^\alpha = 1$ и $\mathfrak{a}^{m\alpha} = 0$ при $m > 1$ (гл. II, § 2, n°6, предложение 4). Поэтому $\dim \mathfrak{g}^\alpha \leqslant 1$ и $\mathfrak{g}^{m\alpha} = 0$ при $m > 1$. Если бы $\mathfrak{g}^\alpha$ было равно 0, то $x_\alpha \in \mathfrak{n} + \theta\mathfrak{n}$; но тогда идеал $\mathfrak{n} + \theta\mathfrak{n}$ содержал бы $h_\alpha = -[x_\alpha, x_{-\alpha}]$, что невозможно, так как $\mathfrak{a}^0 \cap (\mathfrak{n} + \theta\mathfrak{n}) = 0$. Следовательно, $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$.

3) Если $\mu \in R$, то существует элемент $w \in W(R)$, для которого $w(\mu) \in B$ (гл. VI, § 1, n° 5, предложение 15), поэтому $\dim \mathfrak{g}^\mu = \dim \mathfrak{g}^{w\mu} = 1$. Если же n — целое число > 1, то $\mathfrak{g}^{nw\mu} = 0$, а значит, $\mathfrak{g}^{n\mu} = 0$.

Доказательство теоремы 1.

Поскольку $\dim \mathfrak{g}^0 = \operatorname{Card} B$, из леммы 11 следует, что пространство $\mathfrak{g}$ имеет *конечную размерность*, равную $\operatorname{Card} B + \operatorname{Card} R$. Докажем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Пусть $\mathfrak{k}$ — коммутативный идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как подпространство $\mathfrak{k}$ устойчиво относительно эндоморфизмов $\operatorname{ad}\mathfrak{h}$, то $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) + \sum_{\mu \in R} (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^\mu)$. Ясно, что $\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + kH_\alpha$ при любом корне $\alpha \in B$ есть подалгебра, изоморфная $\mathfrak{sl}(2, k)$. Вследствие леммы 9 при любом $\mu \in R$ подпространство $\mathfrak{g}^\mu$ содержится в некоторой подалгебре алгебры Ли $\mathfrak{g}$, изоморфной $\mathfrak{sl}(2, k)$, поэтому $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^\mu = 0$ и, таким образом, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$. Тогда

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{g}^\mu] \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}^\mu = 0,$$

и, значит, $\mu_B(\mathfrak{k}) = 0$ при всех $\mu \in R$. Вследствие этого $\mathfrak{k} = 0$, что и доказывает полупростоту алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Если $\mu \in R$, то существует $\alpha \in B$, для которого $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle \neq 0$, и эндоморфизм $(\operatorname{ad} H_\alpha) | \mathfrak{g}^\mu$ будет вследствие этого ненулевой гомотетией. Таким образом, подалгебра $\mathfrak{h}$ совпадает со своим нормализатором в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и, следовательно, является подалгеброй Картана в последней. При любом $u \in \mathfrak{h}$ эндоморфизм $\operatorname{ad} u$ приводится к диагональному виду, поэтому $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — полупростая расщепленная алгебра Ли.

Ясно, что при каждом $\mu \in R$ элемент μ_B является корнем алгебры $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, а $\mathfrak{g}^\mu$ — соответствующим собственным подпространством. Число корней алгебры $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ равно $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} = \operatorname{Card} R$, поэтому отображение $\mu \mapsto \mu_B$ пространства V на $\mathfrak{h}^*$ переводит систему R в систему корней алгебры $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

4. Теорема единственности

Предложение 4. *Пусть* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B, (X_\alpha)_{\alpha \in B})$ — *полупростая размеченная алгебра Ли,* $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in B}$ — *ее матрица Картана и* $(X_\alpha)_{\alpha \in B \cup (-B)}$ — *соответствующая система образующих. Тогда*

(i) *система образующих* $((X_\alpha, H_\alpha, X_{-\alpha}))_{\alpha \in B}$ *и соотношения* (16) — (22) *из* n° 3 *составляют задание алгебры Ли* $\mathfrak{g}$;

(ii) *семейство* $(X_\alpha)_{\alpha \in B}$ *и соотношения* (21) *из* n° 3 *составляют задание подалгебры алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *порожденной элементами* $(X_\alpha)_{\alpha \in B}$.

Пусть R — система корней расщепленной алгебры $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Применяя к R и B конструкции из n° 2 и n° 3, мы получим объекты, которые обозначим через $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{g}'$, X'_α, H'_α, ... вместо $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}$, X_α, H_α, ...

Ясно, что существует гомоморфизм φ алгебры Ли $\mathfrak{g}'$ на алгебру Ли $\mathfrak{g}$, при котором $\varphi(X'_\alpha) = X_\alpha$, $\varphi(H'_\alpha) = H_\alpha$, $\varphi(X'_{-\alpha}) = X_{-\alpha}$ для всех $\alpha \in B$ (предложение 1). Так как $\dim \mathfrak{g}' = \operatorname{Card} R + \operatorname{Card} B = \dim \mathfrak{g}$, то отображение φ биективно. Тем самым доказано утверждение (i).

Подалгебра, порожденная элементами $(X'_\alpha)_{\alpha \in B}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}' = \mathfrak{a}'/(\mathfrak{n}' \oplus \theta'\mathfrak{n}') = (\mathfrak{a}'_+ \oplus \mathfrak{a}'^0 \oplus \mathfrak{a}'_-)/(\mathfrak{n}' \oplus \theta'\mathfrak{n}')$, естественно отождествляется с $\mathfrak{a}'_+/\mathfrak{n}'$. Тогда утверждение (ii) следует из предложения 3 и определения идеала $\mathfrak{n}'$.

Следствие. *Каждая полупростая размеченная алгебра Ли получается из полупростой размеченной алгебры Ли над полем* $\mathbf{Q}$ *расширением поля скаляров* $\mathbf{Q}$ *до* k.

Это непосредственно следует из предыдущего предложения.

Теорема 2. *Пусть* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B, (X_\alpha)_{\alpha \in B})$ *и* $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', B', (X_\alpha)_{\alpha \in B'})$ — *полупростые размеченные алгебры Ли,* R *и* R' — *системы корней расщепленных алгебр Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *и* $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$, $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in B}$ (соотв. $(n'(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in B'}$) — *матрица Картана системы* R (соотв. R') *относительно базиса* B (соотв. B') *и* Δ (соотв. Δ') — *граф Дынкина системы* R (соотв. R') *относительно базиса* B (соотв. B').

(i) *Если* φ — *такой изоморфизм пространства* $\mathfrak{h}^*$ *на пространство* $\mathfrak{h}'^*$, *что* $\varphi(R) = R'$ *и* $\varphi(B) = B'$, *то существует единственный изоморфизм* ψ *размеченной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B, (X_\alpha)_{\alpha \in B})$ *на размеченную алгебру Ли* $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', B', (X'_\alpha)_{\alpha \in B'})$, *при котором* $\psi \mid \mathfrak{h} = {}^t\varphi^{-1}$.

(ii) *Если* f — *такое биективное отображение множества* B *на множество* B', *что* $n'(f(\alpha), f(\beta)) = n(\alpha, \beta)$ *при любых* $\alpha, \beta \in B$, *то существует изоморфизм размеченной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B, (X_\alpha)_{\alpha \in B})$ *на размеченную алгебру Ли* $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', B', (X'_\alpha)_{\alpha \in B'})$.

(iii) *Если существует изоморфизм графа Дынкина* Δ *на граф Дынкина* Δ', *то существует изоморфизм размеченной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B, (X_\alpha)_{\alpha \in B})$ *на размеченную алгебру Ли* $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}', B', (X'_\alpha)_{\alpha \in B'})$.

Доказательство непосредственно следует из предложения 4 (i) (при доказательстве утверждения (iii) нужно использовать еще предложение 1 из гл. VI, § 4, n° 2).

Примечание. С каждой полупростой расщепляемой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ ассоциируется граф Дынкина, который определяет саму алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с точностью до изоморфизма (теорема 2 (iii)). Граф Дынкина является связным и непустым тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ проста (§ 3, n° 2, следствие 1 предложения 6). Ввиду теоремы 1 из n° 3 и теоремы 3 из гл. VI, § 4, n° 2, простые расщепляемые алгебры Ли — это алгебры Ли типов A_l $(l \geqslant 1)$, B_l $(l \geqslant 2)$, C_l $(l \geqslant 3)$, D_l $(l \geqslant 4)$, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. Перечисленные в этом списке алгебры Ли попарно неизоморфны.

Предложение 5. *Пусть* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B, (X_\alpha)_{\alpha \in B})$ — *полупростая размеченная алгебра Ли и* $(X_\alpha)_{\alpha \in B \cup (-B)}$ — *ее система образующих. Тогда существует единственный автоморфизм* θ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *для которого* $\theta(X_\alpha) = X_{-\alpha}$ *при всех* $\alpha \in B \cup (-B)$. *При этом* $\theta^2 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$ *и* $\theta(h) = -h$ *для всех* $h \in \mathfrak{h}$.

Единственность непосредственно следует из того, что $(X_\alpha)_{\alpha \in B \cup (-B)}$ — система образующих алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Вследствие предложения 4 существование автоморфизма θ следует из рассуждений, приведенных в n° 3 перед теоремой 1.

Следствие. *Пусть* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — *полупростая расщепленная алгебра Ли. Тогда алгебра Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *обладает системой Шевалле* (§ 2, n° 4, определение 3).

Пусть R — система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Пусть X_α для любого корня $\alpha \in R$ — некоторый ненулевой элемент подпространства $\mathfrak{g}^\alpha$. Предположим, что элементы X_α выбраны таким образом, что $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$ при любом $\alpha \in R$ (§ 2, n° 4, лемма 2). Обозначим через B некоторый базис системы корней R, и пусть θ — такой автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что $\theta(X_\alpha) = X_{-\alpha}$ при $\alpha \in B \cup (-B)$. Тогда $\theta \mid \mathfrak{h} = -\mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}$. Поэтому для каждого корня $\alpha \in R$ существует такой элемент $t_\alpha \in k^*$, что $\theta X_\alpha = t_\alpha X_{-\alpha}$. При этом

$$t_\alpha t_{-\alpha} H_\alpha = [t_\alpha X_{-\alpha}, t_{-\alpha} X_\alpha] = [\theta X_\alpha, \theta X_{-\alpha}] = \\ = \theta([X_\alpha, X_{-\alpha}]) = \theta(-H_\alpha) = H_\alpha.$$

Следовательно, $t_\alpha t_{-\alpha} = 1$ при всех $\alpha \in R$. Определим числа $N_{\alpha,\beta}$ так же, как в n° 4, § 2. Если α, β, $\alpha + \beta \in R$, то

$$N_{-\alpha,-\beta} t_\alpha t_\beta X_{-\alpha-\beta} = t_\alpha t_\beta [X_{-\alpha}, X_{-\beta}] = [\theta X_\alpha, \theta X_\beta] = \\ = \theta([X_\alpha, X_\beta]) = N_{\alpha,\beta} \theta X_{\alpha+\beta} = N_{\alpha,\beta} t_{\alpha+\beta} X_{-\alpha-\beta},$$

поэтому вследствие леммы 4 из § 2, n° 4, получаем, что

$$(q+1)^2 t_\alpha t_\beta = N^2_{\alpha,\beta} t_{\alpha+\beta},$$

где q — целое число. Таким образом, если t_α и t_β являются квадратами в k^*, то элемент $t_{\alpha+\beta}$ тоже равен некоторому квадрату. Поскольку $t_\alpha = 1$ при $\alpha \in B$, то предложение 19 из гл. VI, § 1, n° 6, показывает, что элементы $t_\alpha \in k$ являются квадратами при всех $\alpha \in R$. Выберем для каждого $\alpha \in R$ некоторый элемент $u_\alpha \in k$, для которого $u_\alpha^2 = t_\alpha$. При этом можно выбрать эти элементы так, чтобы для всех $\alpha \in R$ выполнялось равенство $u_\alpha u_{-\alpha} = 1$. Положим $X'_\alpha = u_\alpha^{-1} X_\alpha$. Тогда при любом $\alpha \in R$

$$X'_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, \ [X'_\alpha, X'_{-\alpha}] = [X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$$

и $\theta(X'_\alpha) = \theta(u_\alpha^{-1} X_\alpha) = u_\alpha^{-1} t_\alpha X_{-\alpha} = u_\alpha X_{-\alpha} = u_\alpha u_{-\alpha} X'_{-\alpha} = X'_{-\alpha}$; поэтому $(X'_\alpha)_{\alpha \in R}$ — система Шевалле расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

§ 5. Автоморфизмы полупростой алгебры Ли

В этом параграфе через $\mathfrak{g}$ обозначается полупростая алгебра Ли.

1. Автоморфизмы размеченной полупростой алгебры Ли

Напомним (гл. VII, § 3, n° 1), что через $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ мы обозначаем группу автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то обозначим через $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ группу автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, относительно которых устойчива подалгебра Картана $\mathfrak{h}$. Предположим, что подалгебра $\mathfrak{h}$ расщепляющая, и пусть R — система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Если $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, то отображение, контраградиентное к отображению $s|\mathfrak{h}$, является элементом группы

$A(R)$ (группы автоморфизмов системы R). Его мы будем обозначать в данном параграфе через $\varepsilon(s)$. При этом отображение

$$\varepsilon\colon \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \to A(R)$$

— гомоморфизм групп.

Для произвольной системы корней R и базиса B этой системы обозначим через $\operatorname{Aut}(R, B)$ группу автоморфизмов системы R, относительно которых устойчиво множество B. Напомним (гл. VI, § 1, n°5, предложение 16, и § 4, n°2, следствие предложения 1), что группа $A(R)$ является полупрямым произведением групп $\operatorname{Aut}(R, B)$ и $W(R)$ и что факторгруппа $A(R)/W(R)$ канонически изоморфна группе автоморфизмов графа Дынкина системы корней R.

Предложение 1. *Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B, (X_\alpha)_{\alpha\in B})$ — размеченная полупростая алгебра Ли, а R — система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Пусть G — множество автоморфизмов $s \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, относительно которых устойчиво множество B и для которых $s(X_\alpha) = X_{\varepsilon(s)\alpha}$ при всех $\alpha \in B$ (иначе говоря, множество автоморфизмов размеченной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B, (X_\alpha)_{\alpha\in B})$. Тогда ограничение отображения ε на множество G — это изоморфизм группы G на $\operatorname{Aut}(R, B)$.*

Если $s \in G$, то ясно, что $\varepsilon(s) \in \operatorname{Aut}(R, B)$. С другой стороны, отображение

$$\varepsilon\,|\,G\colon G \to \operatorname{Aut}(R, B)$$

биективно вследствие теоремы 2 из n°4 § 4.

2. *Автоморфизмы расщепленной полупростой алгебры Ли*

Пусть E — коммутативная группа и $A = \bigoplus_{\gamma\in E} A^\gamma$ — некоторая градуированная алгебра типа E. Для любого гомоморфизма φ группы E в мультипликативную группу k^* обозначим через $f(\varphi)$ k-линейное отображение алгебры A в себя, ограничение которого на каждое из подпространств A^γ — гомотетия этого подпространства с коэффициентом $\varphi(\gamma)$. Ясно, что $f(\varphi)$ — автоморфизм градуированной алгебры A и что отображение f — гомоморфизм группы $\operatorname{Hom}(E, k^*)$ в группу автоморфизмов градуированной алгебры A.

Пусть $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а R — система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Напомним, что через $P(R)$ (соотв. $Q(R)$) обозначается группа весов (соотв. группа радикальных весов) системы корней R.

Положим

$$T_P = \operatorname{Hom}(P(R), k^*), \qquad T_Q = \operatorname{Hom}(Q(R), k^*).$$

Можно рассматривать алгебру Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 + \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$ как градуированную алгебру типа $Q(R)$. Согласно сказанному выше, определен канонический гомоморфизм группы T_Q в $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, который мы будем обозначать на протяжении этого параграфа через f. С другой стороны, каноническое инъективное отображение группы $Q(R)$ в группу $P(R)$ определяет гомоморфизм группы T_P в группу T_Q, который мы будем обозначать через q. Мы получаем последовательность отображений

$$T_P \xrightarrow{q} T_Q \xrightarrow{f} \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}).$$

Если $s \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, то пусть s^* — ограничение отображения ${}^t(s \mid \mathfrak{h})^{-1}$ на группу $Q(R)$. Мы получаем, что для всех $\varphi \in T_Q$

$$f(\varphi \circ s^*) = s^{-1} \circ f(\varphi) \circ s. \tag{1}$$

Действительно, если $\gamma \in Q(R)$ и $x \in \mathfrak{g}^\gamma$, то $sx \in \mathfrak{g}^{s^*\gamma}$ и

$$\begin{aligned} f(\varphi \circ s^*)\, x &= (\varphi \circ s^*)(\gamma) \,.\, x = \\ &= s^{-1}(\varphi(s^*\gamma)\, sx) = (s^{-1} \circ f(\varphi) \circ s)(x). \end{aligned}$$

Предложение 2. *Последовательность гомоморфизмов*

$$1 \to T_Q \xrightarrow{f} \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \xrightarrow{\varepsilon} A(R) \to 1$$

точна.

а) Пусть $\varphi \in \operatorname{Ker} f$. Тогда $\varphi(\alpha) = 1$ для любого корня $\alpha \in R$. Так как множество R порождает группу $Q(R)$, то φ — нейтральный элемент группы T_Q.

б) Пусть $\varphi \in T_Q$. Тогда ограничение гомоморфизма $f(\varphi)$ на $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0$ — тождественное отображение, и, следовательно,

$$\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} \varepsilon.$$

в) Пусть $s \in \operatorname{Ker} \varepsilon$. Тогда $s \mid \mathfrak{h} = \mathrm{Id}_\mathfrak{h}$. Поэтому $s(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^\alpha$ при любом $\alpha \in R$, а значит, существуют такие элементы $t_\alpha \in k^*$, что $sx = t_\alpha x$ для всех $x \in \mathfrak{g}^\alpha$. Учитывая, что $s \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$, мы получаем соотношения

$$\begin{aligned} t_\alpha t_{-\alpha} &= 1 \qquad \text{для всех } \alpha \in R, \\ t_\alpha t_\beta &= t_{\alpha+\beta}, \qquad \text{когда } \alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta \in R. \end{aligned}$$

При этих условиях существует такой гомоморфизм $\varphi \in T_Q$, что $\varphi(\alpha) = t_\alpha$ для любого корня $\alpha \in R$ (гл. VI, § 1, n°6, следствие 2 предложения 19). Таким образом, $s = f(\varphi)$. Следовательно, $\operatorname{Ker} \varepsilon \subset \operatorname{Im} f$.

г) Образ группы $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ при отображении ε содержит по следствию из теоремы 2 n°2 § 2 группу $W(R)$, а по предположению 1 он содержит группу $\operatorname{Aut}(R, B)$. Следовательно, этот образ совпадает с группой $A(R)$.

Следствие 1. *Пусть $(B, (X_\alpha)_{\alpha \in B})$ — разметка расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и G — множество автоморфизмов $s \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, сохраняющих эту разметку. Тогда группа $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — полупрямое произведение групп G и $\varepsilon^{-1}(W(R))$.*

Действительно, по предложению 1 $G \cap \varepsilon^{-1}(W(R)) = \{1\}$ и

$$\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = G \,.\, \varepsilon^{-1}(W(R)),$$

так как отображение ε сюръективно (предложение 2).

Следствие 2. *Группа $\varepsilon^{-1}(W(R))$ действует на множестве разметок расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ просто транзитивно.*

Действительно, по теореме 2 § 4, n°4, группа $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ транзитивно действует на множестве разметок расщепленной полупростой алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Поэтому следствие 2 вытекает из следствия 1.

Следствие 3. *Пусть B — базис системы R. Группа $\operatorname{Ker} \varepsilon = f(T_Q)$ просто транзитивно действует на множестве разметок расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ вида $(B, (X_\alpha)_{\alpha \in B})$.*

Это утверждение непосредственно следует из предложения 2.

Пусть $\alpha \in R$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ таковы, что $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$. Как было показано (§ 2, n°2, теорема 2), при любом $t \in k^*$ ограничение на подалгебру Картана элементарного автоморфизма

$$\theta_\alpha(t) = e^{\operatorname{ad} tX_\alpha} e^{\operatorname{ad} t^{-1}X_{-\alpha}} e^{\operatorname{ad} tX_\alpha}$$

совпадает с эндоморфизмом, сопряженным к эндоморфизму s_α. Таким образом, $\varepsilon(\theta_\alpha(t)) = s_\alpha$, и, следовательно, $\theta_\alpha(t)\theta_\alpha(-1) \in \operatorname{Ker} \varepsilon$.

Лемма 1. Пусть $\alpha \in R$ и $t \in k^*$. Пусть φ — гомоморфизм группы $Q(R)$ в k^*, заданный формулой $\lambda \mapsto t^{\lambda(H_\alpha)}$. Тогда $f(\varphi) = \theta_\alpha(t)\,\theta_\alpha(-1)$.

Пусть ρ — представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, ассоциированное с элементом X_α, и π — представление группы $\mathbf{SL}(2, k)$, согласованное с представлением ρ. Будем использовать обозначения $\theta(t)$, $h(t)$ из n°5 § 1. Поскольку $\rho(H) = \operatorname{ad} H_\alpha$, то элементы пространства $\mathfrak{g}^\lambda$ имеют вес $\lambda(H_\alpha)$

относительно представления ρ. Вследствие n° 2 § 2 мы получаем, что $\theta_\alpha(t)\theta_\alpha(-1)=\pi(\theta(t)\theta(-1))=\pi(h(t))$. Следовательно, ограничение на пространство $\mathfrak{g}^\lambda$ эндоморфизма $\theta_\alpha(t)\theta_\alpha(-1)$ совпадает с гомотетией этого пространства с коэффициентом $t^{\lambda(\mathrm{H}_\alpha)}$ (§ 1, n° 5, предложение 6), что и доказывает лемму.

Предложение 3. *Образ композиции гомоморфизмов*

$$T_P \xrightarrow{q} T_Q \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

содержится в группе $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

Пусть B — базис системы корней R. Тогда $(\mathrm{H}_\alpha)_{\alpha\in B}$ — базис дуальной системы корней $R^\vee$, а дуальный к нему базис пространства $\mathfrak{h}^*$ будет базисом группы $P(R)$. Поэтому группа T_P порождается гомоморфизмами $\lambda \mapsto t^{\lambda(\mathrm{H}_\alpha)}$ ($t\in k^*$, $\alpha\in B$). Пусть φ — ограничение на группу $Q(R)$ некоторого такого гомоморфизма. В лемме 1 показано, что $f(\varphi)\in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, откуда следует наше предложение.

Пусть $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k. Отображение, которое каждому автоморфизму s алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ставит в соответствие автоморфизм $s\otimes 1$ алгебры Ли $\mathfrak{g}\otimes_k \bar{k}$, является инъективным гомоморфизмом группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ в группу $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}\otimes_k\bar{k})$. *Будем обозначать через* $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ *нормальную подгруппу группы* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, *которая служит полным прообразом группы* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}\otimes_k\bar{k})$ *при этом гомоморфизме*; это множество тех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которые становятся элементарными при расширении основного поля k до $\bar{k}$. Понятно, что группа $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ не зависит от выбора замыкания $\bar{k}$ и $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})\subset \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$. Группы $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ и $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ могут быть различными (§ 13, n° 1 (VII)). Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Положим

$$\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}),$$
$$\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}).$$

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{h}$ — *расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *и* $s\in\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. *Предположим, что* 1 *не является собственным значением ограничения автоморфизма* s *на* $\sum_{\alpha\in R}\mathfrak{g}^\alpha$. *Тогда* $\varepsilon(s)=1$.

Расширяя поле k, можно предполагать, что $s\in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Размерность нильпространства эндоморфизма $s-1$ не меньше, чем $\dim\mathfrak{h}$ (гл. VII, § 4, n° 4, предложение 9). Следовательно, эндоморфизм $(s-1)|\mathfrak{h}$ нильпотентен. Так как $s|\mathfrak{h}\in \mathrm{A}(R^\vee)$, то порядок эндоморфизма $s|\mathfrak{h}$ конечен и, значит, этот эндоморфизм полупрост (гл. V, дополнение, предложение 2). Поэтому $(s-1)|\mathfrak{h}=0$; это доказывает, что $\varepsilon(s)=1$.

Лемма 3. (i) *Пусть* $m=(P(R):Q(R))$. *Если* φ *есть* m-*я степень элемента группы* T_Q, *то* $\varphi\in q(T_P)$.

(ii) *Если поле* k *алгебраически замкнуто, то* $q(T_P)=T_Q$.

Существуют такой базис $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ группы $P(R)$ и такие целые числа $n_1\geqslant 1, \ldots, n_l\geqslant 1$, что $(n_1\lambda_1, \ldots, n_l\lambda_l)$ — базис группы $Q(R)$. Тогда $m=n_1\ldots n_l$. Пусть $\psi\in T_Q$, и положим $\psi(n_1\lambda_1)=t_1, \ldots, \psi(n_l\lambda_l)=t_l$. Пусть $m_i=\prod_{j\neq i} n_j$ при $i=1, \ldots, l$. Если χ — такой элемент группы T_P, что $\chi(\lambda_1)=t_1^{m_1}, \ldots, \chi(\lambda_l)=t_l^{m_l}$, то

$$\chi(n_i\lambda_i)=t_i^{m_in_i}=t_i^m=(\psi^m)(n_i\lambda_i),$$

а следовательно, $\chi|Q(R)=\psi^m$. Это доказывает утверждение (i). Если поле k алгебраически замкнуто, то каждый элемент группы k^* является m-й степенью некоторого элемента из k^*, а значит, каждый элемент группы T_Q является m-й степенью некоторого элемента из T_Q, и утверждение (ii) вытекает из утверждения (i).

Предложение 4. $f(T_Q)\subset \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *и* $\varepsilon^{-1}(W(R))=\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

а) Пусть $\varphi\in T_Q$ и $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k. По лемме 3 гомоморфизм φ продолжается до элемента из пространства $\mathrm{Hom}(P(R), k^*)$. Вследствие предложения 3

$$f(\varphi)\otimes 1\in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}\otimes_k \bar{k}, \mathfrak{h}\otimes_k \bar{k}).$$

Значит, $f(\varphi)\in\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и $\mathrm{Ker}\,\varepsilon\subset\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

б) Образ группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ при гомоморфизме ε содержит группу $W(R)$ (§ 2, n° 2, следствие теоремы 2). Учитывая а), мы видим, что $\varepsilon^{-1}(W(R))\subset\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

в) Осталось доказать, что $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\subset\varepsilon^{-1}(W(R))$. Учитывая б), достаточно доказать, что группа $\varepsilon(\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))\cap\mathrm{Aut}(R, B)$, где B — базис системы корней R, равна $\{1\}$.

Пусть $s\in\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — такой автоморфизм, что $\varepsilon(s)\in\mathrm{Aut}(R, B)$. Подгруппа группы $A(R)$, порожденная элементом $\varepsilon(s)$, имеет конечное число орбит в множестве R. Пусть U — некоторая такая орбита, содержащая r элементов, и пусть $\mathfrak{g}^U=\sum_{\beta\in U}\mathfrak{g}^\beta$. Выберем некоторый элемент $\beta_1\in U$ и положим $\beta_i=\varepsilon(s)^{i-1}\beta_1$ при $1\leqslant i\leqslant r$, так что $U=\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$. Если X_{β_1} — ненулевой элемент пространства $\mathfrak{g}^{\beta_1}$, то положим $X_{\beta_i}=s^{i-1}X_{\beta_1}$ для всех

$1 \leqslant i \leqslant r$. Существует такой элемент $c_U \in k^*$, что $s^r X_{\beta_1} = c_U X_{\beta_1}$, откуда вытекает, что $s^r X_{\beta_i} = c_U X_{\beta_i}$ для всех i и, следовательно, $s^r | \mathfrak{g}^U = c_U . 1$. Пусть $\varphi \in T_Q$ и $s' = s \circ f(\varphi)$. По утверждению a) s' — элемент группы $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Мы получаем, что $s'^r | \mathfrak{g}^U = c'_U . 1$, где

$$c'_U = c_U \prod_{i=1}^{r} \varphi(\beta_i) = c_U \varphi\left(\sum_{i=1}^{r} \beta_i\right).$$

Положим $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ и $\sum_{i=1}^{r} \beta_i = \sum_{j=1}^{l} m_j^U \alpha_j$. Так как $\varepsilon(s) \in \mathrm{Aut}(R, B)$, то m_j^U — не равные одновременно нулю целые числа одного знака. Мы получаем, что

$$c'_U = c_U \prod_{j=1}^{l} \varphi(\alpha_j) m_j^U.$$

Гомоморфизм φ можно выбрать так, чтобы $c'_U \neq 1$ для всех орбит U. Действительно, это сводится к выбору таких элементов $\varphi(\alpha_1) = t_1, \ldots, \varphi(\alpha_l) = t_l$ из k^*, что они не обращают в нуль конечное число не равных тождественно нулю многочленов от переменных $t_1, \ldots, t_l$. Для гомоморфизма φ, выбранного таким образом, мы вследствие леммы 2 получаем $\varepsilon(s') = 1$, поэтому

$$\varepsilon(s) = \varepsilon(s')\, \varepsilon(f(\varphi))^{-1} = 1.$$

Следствие. *Пусть B — базис системы корней R. Группа* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *изоморфна полупрямому произведению групп* $\mathrm{Aut}(R, B)$ *и* $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Это следствие вытекает из предложения 1, следствия 1 предложения 2 и предложения 4.

Замечание. Пусть ε', ε'' — ограничения гомоморфизма ε на $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ соответственно. Пусть f' — гомоморфизм группы T_P в группу $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, построенный по гомоморфизму f с помощью канонического вложения группы $Q(R)$ в группу $P(R)$. Выше мы установили коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & T_Q & \xrightarrow{f} & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) & \xrightarrow{\varepsilon} & A(R) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
1 & \longrightarrow & T_Q & \xrightarrow{f} & \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) & \xrightarrow{\varepsilon'} & W(R) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle q} & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & T_P & \xrightarrow{f'} & \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) & \xrightarrow{\varepsilon''} & W(R) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

в которой все вертикальные стрелки, кроме q, означают канонические вложения. Мы видели (предложения 2 и 4), что две первые строки точны. В третьей строке гомоморфизм ε'' сюръективен (§ 2, n°2, следствие теоремы 2); можно показать, что его ядро равно $f'(T_P)$ (§ 7, упражнение 26г)).

3. Автоморфизмы расщепляемой полупростой алгебры Ли

Предложение 5. *Предположим, что алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *расщепляема. Тогда группа* $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ *просто транзитивно действует на множестве разметок алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Пусть $e_1=\left(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1, B_1, (X^1_\alpha)_{\alpha\in B_1}\right)$, $e_2=\left(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2, B_2, (X^2_\alpha)_{\alpha\in B_2}\right)$ — разметки алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Существует не больше одного элемента группы $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$, переводящего разметку e_1 в разметку e_2 (предложения 1 и 4). Пусть $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k. Существует элемент группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}\otimes_k\bar{k})$, который переводит подалгебру Картана $\mathfrak{h}_1\otimes_k\bar{k}$ в подалгебру Картана $\mathfrak{h}_2\otimes_k\bar{k}$ (гл. VII, § 3, n°2, теорема 1). Таким образом, по предложению 4 и следствию 2 предложения 2 существует элемент φ группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}\otimes_k\bar{k})$, который переводит разметку $\left(\mathfrak{g}\otimes_k\bar{k}, \mathfrak{h}_1\otimes_k\bar{k}, B_1, (X^1_\alpha)_{\alpha\in B_1}\right)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}\otimes_k\bar{k}$ в разметку $\left(\mathfrak{g}\otimes_k\bar{k}, \mathfrak{h}_2\otimes_k\bar{k}, B_2, (X^2_\alpha)_{\alpha\in B_2}\right)$. Так как подалгебра $\mathfrak{h}_1$ и элементы X^1_α (соотв. подалгебра $\mathfrak{h}_2$ и элементы X^2_α) порождают алгебру Ли $\mathfrak{g}_1$ (соотв. $\mathfrak{g}_2$), то $\varphi(\mathfrak{g}_1)=\mathfrak{g}_2$. Следовательно, гомоморфизм φ имеет вид $\psi\otimes 1$, где $\varphi\in\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$, и ψ переводит разметку e_1 в разметку e_2.

Следствие 1. *Пусть* $\left(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B(X_\alpha)_{\alpha\in B}\right)$ — *разметка алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *а* G — *группа автоморфизмов этой алгебры Ли, сохраняющих данную разметку (изоморфная группе* $\mathrm{Aut}(R, B)$). *Тогда группа* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *является полупрямым произведением подгрупп* G *и* $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

Действительно, все элементы группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_1)$ переводят разметку $\left(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B, (X_\alpha)_{\alpha\in B}\right)$ в некоторую разметку алгебры Ли $\mathfrak{g}$. По предложению 5 каждый смежный класс группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ по подгруппе $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ содержит единственный элемент группы G. Ч. Т. Д.

Из следствия 1 вытекает, что факторгруппа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ отождествляется с группой $\mathrm{Aut}(R, B)$ и изоморфна группе автоморфизмов графа Дынкина системы корней R.

Следствие 2. *Если* $\mathfrak{g}$ — *простая расщепляемая алгебра Ли типа* A_1, B_n $(n\geqslant 2)$, C_n $(n\geqslant 2)$, E_7, E_8, F_4 *или* G_2, *то* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})=\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа A_n $(n \geqslant 2)$, D_n $(n \geqslant 5)$ или E_6, то порядок факторгруппы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ *равен* 2, *и в случае, когда $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа D_4, эта факторгруппа изоморфна группе $\mathfrak{S}_3$.*

Это вытекает из следствия 1 и таблиц I—IX в гл. VI.

Замечания. 1) Пусть $e_1 = \left(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1, B_1, (X^1_\alpha)_{\alpha \in B_1}\right)$, $e_2 = \left(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2, B_2, (X^2_\alpha)_{\alpha \in B_2}\right)$, $e'_2 = \left(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_2, B_2, (Y^2_\alpha)_{\alpha \in B_2}\right)$ — разметки алгебры Ли $\mathfrak{g}$, s (соотв. s') — элемент группы $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$, переводящий разметку e_1 в разметку e_2 (соотв. в разметку e'_2). Тогда $s \mid \mathfrak{h}_1 = s' \mid \mathfrak{h}_1$. Действительно, $s'^{-1}s \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1)$ и $s'^{-1}s(B_1) = B_1$; следовательно, $\varepsilon(s'^{-1}) = 1$.

2) Пусть X — множество пар $(\mathfrak{h}, B)$, где $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а B — базис системы корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Если $x = (\mathfrak{h}, B)$ и $x' = (\mathfrak{h}', B')$ — элементы множества X, то существует элемент $s \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$, который переводит x в x' (предложение 5), и ограничение $s_{x', x}$ гомоморфизма s на подалгебру $\mathfrak{h}$ не зависит от выбора s (замечание 1). В частности, $s_{x'', x'} \circ s_{x', x} = s_{x'', x}$, если x, x', $x'' \in X$ и $s_{x, x} = 1$. Множество семейств $(h_x)_{x \in X}$, удовлетворяющих условиям

а) $h_x \in \mathfrak{h}$, если $x = (\mathfrak{h}, B)$,

б) $s_{x', x}(h_x) = h_{x'}$, если x, $x' \in X$,

превращается естественным образом в векторное пространство, которое мы обозначим через $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$. Его иногда называют *канонической подалгеброй Картана алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. Для пар $x = (\mathfrak{h}, B)$ и $x' = (\mathfrak{h}', B')$ гомоморфизм $s_{x', x}$ переводит базис B в базис B' и, следовательно, систему корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ в систему корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$; отсюда следует, что пространство $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})^*$, дуальное к пространству $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$, естественным образом снабжено системой корней $R(\mathfrak{g})$ с базисом $B(\mathfrak{g})$. Иногда говорят, что $R(\mathfrak{g})$ — *каноническая система корней алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *а* $B(\mathfrak{g})$ — *канонический базис* этой системы корней. Группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ так действует на подалгебре $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$, что система корней $R(\mathfrak{g})$ и базис $B(\mathfrak{g})$ устойчивы относительно этого действия; те элементы группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, которые действуют на подалгебре $\mathfrak{h}(\mathfrak{g})$ тривиально, принадлежат подгруппе $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда в обозначениях* n° 1

$$\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \cdot \mathrm{Ker}\,\varepsilon = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \cdot f(T_Q).$$

Согласно следствию предложения 10 § 3, n° 3, мы получаем, что $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \cdot \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. С другой стороны, по следствию теоремы 2 § 2, n° 2, $\varepsilon(\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})) \supset W(R)$, поэтому $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cdot \mathrm{Ker}\,\varepsilon$.

Замечание 3. Предложение 6 показывает, что канонический гомоморфизм

$$\iota\colon T_Q/\mathrm{Im}(T_P) \to \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}),$$

существование которого следует из диаграммы n° 2, *сюръективен*. В частности, группа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ содержит производную группу группы $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$; мы увидим (§ 11, n° 2, предложение 3), что эти группы совпадают. С другой стороны, можно показать, что гомоморфизм ι *инъективен*, т. е.

$$f(T_Q) \cap \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) = f'(T_P)$$

(см. § 7, упражнение 26 г).

Предложение 7. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *полупростая расщепляемая алгебра Ли*, $\mathfrak{b}$ — *ее подалгебра Бореля, а* $\mathfrak{p}_1$ *и* $\mathfrak{p}_2$ — *две ее параболические подалгебры, содержащие* $\mathfrak{b}$. *Тогда подалгебры* $\mathfrak{p}_1$ *и* $\mathfrak{p}_2$ *не сопряжены относительно группы* $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

Можно предположить, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть $s \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ — такой автоморфизм, что $s(\mathfrak{p}_1) = \mathfrak{p}_2$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащаяся в $\mathfrak{b} \cap s(\mathfrak{b})$ (§ 3, n° 3, предложение 10). Так как алгебры $\mathfrak{h}$ и $s(\mathfrak{h})$ являются подалгебрами Картана алгебры $s(\mathfrak{b})$, то существует такой элемент $u \in [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$, что $e^{\mathrm{ad}\, u}(\mathfrak{h}) = s(\mathfrak{h})$ (гл. VII, § 3, n° 4, теорема 3). Заменяя автоморфизм s на $e^{-\mathrm{ad}\, u}s$, мы приходим к случаю, когда $s(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, и, таким образом, автоморфизм s индуцирует на подалгебре $\mathfrak{h}$ элемент σ из группы Вейля W расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (предложение 6). Пусть C — камера Вейля, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{b}$. Тогда алгебры Ли $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ соответствуют ячейкам F_1 и F_2 пространства $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$, содержащимся в замыкании камеры C. Имеет место равенство $\sigma(F_1) = F_2$. Поскольку $\sigma \in W$, то $F_1 = F_2$ (гл. V, § 3, n° 3, теорема 2), поэтому $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$.

Замечание 4. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая расщепляемая алгебра Ли, а $\mathscr{P}$ — множество ее параболических подалгебр, т. е. множество, на котором действует группа $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$. Воспользуемся обозначениями замечания 2. Пусть Σ — подмножество канонического базиса $B(\mathfrak{g})$. Задание множества Σ эквивалентно заданию для каждой пары $x = (\mathfrak{h}, B) \in X$ такого подмножества Σ_x в базисе B, что для любых $x, x' \in X$ отображение $s_{x', x}$ переводит Σ_x в $\Sigma_{x'}$. Пусть $\mathfrak{p}_x$ — параболическая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующая множеству Σ_x (§ 3, n° 4, *замечание*). Ее орбитой относительно $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ является множество параболических подалгебр $\mathfrak{p}_{x'}$, где $x' \in X$. Таким образом определяется отображение множества $\mathfrak{P}(B(\mathfrak{g}))$ в множество $\mathscr{P}/\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$. Это отображение сюръективно вследствие замечания из § 3, n° 4, и инъективно по предложению 7.

4. *Топология Зарисского на группе* Aut$(\mathfrak{g})$

Предложение 8. *Пусть V — множество эндоморфизмов векторного пространства $\mathfrak{g}$. Тогда группа* Aut$(\mathfrak{g})$ *— замкнутое в топологии Зарисского подмножество пространства V* (гл. VII, дополнение I).

Пусть K — форма Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Если $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, то равенства

$$[sx, sy] = [x, y], \tag{2}$$

$$K(sx, sy) = K(x, y) \tag{3}$$

выполняются при любых $x, y \in \mathfrak{g}$. Обратно, пусть s — элемент пространства V, удовлетворяющий условиям (2) и (3) для всех $x, y \in \mathfrak{g}$. Тогда $\operatorname{Ker} s = 0$, отображение s биективно и $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Однако для любых элементов $x, y \in \mathfrak{g}$ отображения $s \mapsto [sx, sy]$ и $s \mapsto K(sx, sy)$ пространства V в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и поле k соответственно — полиномиальные отображения.

Предложение 9. *Пусть $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда*

(i) *$\mathfrak{f}(T_Q)$ — замкнутая в топологии Зарисского подгруппа группы* Aut$(\mathfrak{g})$;

(ii) *$\mathfrak{f}(q(T_P))$ — всюду плотная в топологии Зарисского подгруппа группы $\mathfrak{f}(T_Q)$.*

Утверждение (i) следует из равенства $\mathfrak{f}(T_Q) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap \operatorname{Ker} \varepsilon$ (предложение 2). Положим $m = (P(R) : Q(R))$. Пусть F — полиномиальная функция на пространстве V. Предположим, что она обращается в нуль на всех элементах, являющихся m-ми степенями элементов группы $\mathfrak{f}(T_Q)$, и покажем, что $F \mid \mathfrak{f}(T_Q) = 0$. Ввиду леммы 3 это будет доказывать утверждение (ii).

Множество V' элементов из V, индуцирующих тождественное отображение на $\mathfrak{h}$ и таких, что все подпространства $\mathfrak{g}^{\alpha}$ устойчивы относительно действия этих элементов, можно отождествить с пространством k^R. Пусть F' — ограничение функции F на множество $V' = k^R$; это полиномиальная функция. Имеет место включение $\mathfrak{f}(T_Q) \subset V'$. Пусть $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — базис системы корней R. Пусть $\varphi(t)$ для всех $t = (t_1, \ldots, t_l) \in k^{*B}$ — гомоморфизм группы $Q(R)$ в группу k^*, продолжающий t. Тогда $F'(f(\varphi(t)))$ записывается в виде конечной суммы

$$\sum_{n_1, \ldots, n_l \in \mathbf{Z}} c_{n_1 \ldots n_l} t_1^{n_1} \ldots t_l^{n_l} = H(t_1, \ldots, t_l).$$

По предположению имеет место равенство

$$0 = H(t_1^m, \ldots, t_l^m) = \sum_{n_1, \ldots, n_l \in \mathbf{Z}} c_{n_1 \ldots n_l} t_1^{mn_1} \ldots t_l^{mn_l}$$

при любых $t_1, \ldots, t_l \in k^*$. Таким образом, числа $c_{n_1 \ldots n_l}$ — коэффициенты многочлена от l переменных, который обращается в нуль на k^{*l}; следовательно, все они равны нулю.

Предложение 10. *Предположим, что* $\mathfrak{g}$ — *расщепляемая алгебра Ли.*

(i) *Группа* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ — *всюду плотная подгруппа группы* $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ *в топологии Зарисского.*

(ii) *Группы* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *и* $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ *связны в топологии Зарисского.*

По предложению 3 имеет место включение $f(q(T_P)) \subset \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. По предложению 9 для всех автоморфизмов $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ замыкание множества $s.f(q(T_P))$ в топологии Зарисского содержит группу $s.f(T_Q)$. Следовательно, замыкание группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ содержит $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}).f(T_Q) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ (предложение 6). Это доказывает утверждение (i).

Пусть $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) = \Omega \cup \Omega'$ — разбиение группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, где Ω и Ω' — относительно открытые в топологии Зарисского множества, причем $\Omega \neq \varnothing$. Если $\omega \in \Omega$ и если x — нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то отображение τ: $t \mapsto \omega \exp(t \operatorname{ad} x)$ поля k в $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ полиномиально и, следовательно, непрерывно в топологии Зарисского. Таким образом, множество $\tau(k)$ связно, а поскольку $\omega \in \tau(k)$, то имеет место включение $\tau(k) \subset \Omega$. Таким образом, $\Omega.(\exp \operatorname{ad} kx) \subset \Omega$, поэтому $\Omega.\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \subset \Omega$ и $\Omega = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Это доказывает, что группа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ связна. Вследствие утверждения (i) группа $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ тоже связна. Ч. Т. Д.

Мы увидим (§ 8, n° 4, следствие предложения 6), что группа $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ замкнута в множестве V в топологии Зарисского и является связной компонентой единицы группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Группа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, напротив, не будет, вообще говоря, замкнутой в топологии Зарисского.

*Предположим, что $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — расщепленная алгебра Ли. Группа $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ — это группа $G(k)$ k-точек некоторой связной полупростой алгебраической группы G с тривиальным центром (присоединенной группы). Группа $f(T_Q)$ совпадает с группой $H(k)$, где H — подгруппа Картана группы Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Группой k-точек прообраза $\widetilde{H}$

группы H в универсальной накрывающей $\widetilde{G}$ группы G (в алгебраическом смысле) будет группа T_P. Группа $\widetilde{G}(k)$ совпадает с образом группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ в группе $G(k) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.*

5. Случай групп Ли

Предложение 11. *Предположим, что поле k равно* $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ *или полному ультраметрическому недискретному полю. Пусть $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

(i) *Группа* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *является подгруппой Ли группы Ли* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *с алгеброй Ли* $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$.

(ii) $f(T_Q)$ *и* $(q \circ f)(T_P)$ *— открытые подгруппы в группе* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

(iii) $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *— открытая подгруппа в группе* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

(iv) *Если* $k = \mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$, *то группа* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *является компонентой нейтрального элемента в* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, *т. е. равна* $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.

По следствию 2 предложения 29 гл. III, n° 8, и предложению 36 из n° 10 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — подгруппа Ли группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, алгебра Ли которой состоит из тех элементов $\mathrm{ad}\,x$ ($x \in \mathfrak{g}$), для которых $(\mathrm{ad}\,x)\,\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$, т. е. равна $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$.

Пусть $H \in \mathfrak{h}$. Существует число $\varepsilon > 0$, обладающее таким свойством: для таких $t \in k$, что $|t| < \varepsilon$, функция $\exp(t\gamma(H))$ определена при всех $\gamma \in P(R)$ и отображение $\gamma \mapsto \exp(t\gamma(H))$ — гомоморфизм σ_t группы $P(R)$ в группу k^*. Отображение $\exp t\,\mathrm{ad}\,H$ определено при всех $|t| < \varepsilon$ и индуцирует тождественное отображение на пространстве $\mathfrak{h}$ и гомотетию с коэффициентом $\sigma_t(\alpha)$ на пространствах $\mathfrak{g}^\alpha$; следовательно, $\exp t\,\mathrm{ad}\,H \in (q \circ f)(T_P)$. Ввиду утверждения (i) это доказывает, что группа $(q \circ f)(T_P)$ содержит некоторую окрестность 1 группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и, значит, является открытой подгруппой в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. *A fortiori* группа $f(T_Q)$ является открытой подгруппой группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Для всех корней $\alpha \in R$ имеет место включение $\exp \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}^\alpha \subset \subset \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Ввиду утверждения (ii) группа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ содержит некоторую окрестность 1 группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, что доказывает утверждение (iii).

Предположим, что $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Тогда $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ содержится в компоненте единицы C группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (гл. VII, § 3, n° 1) и вследствие утверждения (iii) является открытой подгруппой в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Следовательно, $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) = C$. Наконец, $C = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ вследствие предложения 30 (i) гл. III, § 9, n° 8.

§ 6. Модули над расщепленной полупростой алгеброй Ли

В этом параграфе мы обозначаем через $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ расщепленную полупростую алгебру Ли, через R — ее систему корней, через W — ее группу Вейля, через B — базис системы корней R и через R_+

(соотв. R_-) — *множество положительных* (соотв. *отрицательных*) *корней относительно базиса B. Мы полагаем*

$$\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{n}_- = \sum_{\alpha \in R_-} \mathfrak{g}^\alpha,$$
$$\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+, \quad \mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_-.$$

Имеют место равенства $\mathfrak{n}_+ = [\mathfrak{b}_+, \mathfrak{b}_+]$, $\mathfrak{n}_- = [\mathfrak{b}_-, \mathfrak{b}_-]$.

Для всякого корня $\alpha \in R$ выберем элемент $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ так, чтобы выполнялось равенство

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$$

(§ 2, n° 4); этот выбор не противоречит ни одному из данных выше определений.

1. Веса и примитивные элементы

Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль. Для всякого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ обозначим через V^λ примарное относительно отображения λ подпространство пространства V, *рассматриваемого как* $\mathfrak{h}$-*модуль* (гл. VII, § 1, n° 1). Элементы пространства V^λ называются элементами веса λ $\mathfrak{g}$-модуля V. Сумма пространств V^λ прямая (гл. VII, § 1, n° 1, предложение 3). Каковы бы ни были корень $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ и вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, имеет место включение $\mathfrak{g}^\alpha V^\lambda \subset V^{\alpha+\lambda}$ (гл. VII, § 1, n° 3, предложение 10 (ii)). Размерность пространства V^λ называется *кратностью* веса λ в модуле V. Если кратность $\geqslant 1$, т. е. $V^\lambda \neq 0$, то говорят, что λ — *вес* модуля V. Если V — конечномерный модуль, то эндоморфизмы пространства V, определенные элементами из $\mathfrak{h}$, полупросты и, следовательно, V^λ — это множество таких элементов $x \in V$, что $Hx = \lambda(H)x$ для всех $H \in \mathfrak{h}$.

Лемма 1. *Пусть V есть $\mathfrak{g}$-модуль и $v \in V$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathfrak{b}_+ v \subset kv$;

(ii) $\mathfrak{h}v \subset kv$ *и* $\mathfrak{n}_+ v = 0$;

(iii) $\mathfrak{h}v \subset kv$ *и* $\mathfrak{g}^\alpha v = 0$ *для всех* $\alpha \in B$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что имеет место включение $\mathfrak{b}_+ v \subset kv$. Тогда существует такой элемент $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, что $v \in V^\lambda$. Пусть $\alpha \in R_+$. Тогда $\mathfrak{g}^\alpha . v \subset V^\lambda \cap V^{\lambda+\alpha} = 0$. Следовательно, $\mathfrak{n}_+ v = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Это очевидно.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Это следует из того, что множество $(X_\alpha)_{\alpha \in B}$ порождает алгебру Ли $\mathfrak{n}_+$ (§ 3, n° 3, предложение 9 (iii)).

Определение 1. *Пусть V есть $\mathfrak{g}$-модуль, $v \in V$. Назовем v примитивным элементом модуля V, если он отличен от 0 и удовлетворяет условиям леммы* 1.

Примитивный элемент принадлежит некоторому пространству V^λ. Для любого элемента $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ через V^λ_π будем обозначать множество таких элементов $v \in V^\lambda$, что $\mathfrak{b}_+ v \subset kv$. Следовательно, примитивные элементы веса λ совпадают с ненулевыми элементами пространства V^λ_π.

Предложение 1. *Пусть V есть $\mathfrak{g}$-модуль, v — его примитивный элемент, а ω — вес элемента v. Предположим, что как $\mathfrak{g}$-модуль V порожден элементом v.*

(i) *Если $U(\mathfrak{n}_-)$ обозначает универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли $\mathfrak{n}_-$, то имеет место равенство $V = U(\mathfrak{n}_-).v$.*

(ii) *Для любого веса $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ V^λ — это множество таких элементов $x \in V$, что $Hx = \lambda(H)x$ для всех $H \in \mathfrak{h}$. Имеет место равенство $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V^\lambda$, и каждое пространство V^λ конечномерно. Пространство V^ω имеет размерность 1, и каждый вес модуля V имеет вид $\omega - \sum_{\alpha \in B} n_\alpha . \alpha$, где n_α — целые числа $\geqslant 0$.*

(iii) *Модуль V неразложим, и его коммутант состоит из скаляров.*

(iv) *Пусть $U(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathscr{Z}$ — центр алгебры $U(\mathfrak{g})$. Существует единственный гомоморфизм χ алгебры $\mathscr{Z}$ в поле k, такой, что для всякого $z \in \mathscr{Z}$ эндоморфизм z_V является гомотетией с коэффициентом $\chi(z)$.*

Пусть $U(\mathfrak{b}_+)$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{b}_+$. Тогда $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-).U(\mathfrak{b}_+)$ (гл. I, § 2, n° 7, следствие 6 теоремы 1). Значит,

$$V = U(\mathfrak{g}).v = U(\mathfrak{n}_-).U(\mathfrak{b}_+).v = U(\mathfrak{n}_-).v.$$

Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ попарно различные элементы из R_+. Тогда элементы

$$\left(X_{-\alpha_1}^{p_1} X_{-\alpha_2}^{p_2} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n}\right)_{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{N}^n}$$

образуют базис пространства $U(\mathfrak{n}_-)$, поэтому

$$V = \sum_{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{N}^n} kX_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} v. \tag{1}$$

Для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ положим

$$T_\lambda = \sum_{\substack{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{N}^n, \\ \omega - p_1\alpha_1 - \ldots - p_n\alpha_n = \lambda}} kX_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} v.$$

Вследствие предложения 2 (ii) из гл. VII, § 1 n° 1, если $h \in \mathfrak{h}$, то ограничение $h_V | T_\lambda$ — гомотетия с коэффициентом $\lambda(h)$. Следовательно, $T_\lambda \subset V^\lambda$. С другой стороны, из формулы (1) следует, что

$$V = \sum_{\lambda \in \omega - \mathbf{N}\alpha_1 - \ldots - \mathbf{N}\alpha_n} T_\lambda.$$

Сумма пространств V^λ прямая (гл. VII, § 1, n° 1, предложение 3). Таким образом, $V^\lambda = T_\lambda$, V — прямая сумма пространств V^λ и V^λ — множество таких элементов $x \in V$, что $hx = \lambda(h)x$ при всех $h \in \mathfrak{h}$. С другой стороны, число $\dim V^\lambda$ не превосходит числа таких наборов $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{N}^n$, что $p_1\alpha_1 + \ldots + p_n\alpha_n = \omega - \lambda$. Это доказывает, что $V^\lambda = 0$, если $\omega - \lambda \notin \sum_{\alpha \in B} \mathbf{N}\alpha$, что $\dim V^\omega = 1$ и что все пространства V^λ конечномерны.

Пусть c — элемент коммутанта модуля V. Тогда для всех $h \in \mathfrak{h}$ имеют место равенства

$$hc(v) = ch(v) = \omega(h)\, c(v),$$

и, следовательно, $c(v) \in V^\omega$; поэтому существует такой элемент $t \in k$, что $c(v) = tv$. Таким образом, для каждого набора $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbf{N}^n$

$$cX_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} v = X_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} cv = tX_{-\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{p_n} v,$$

так что $c = t\,.\,1$. Поэтому, коммутант модуля V состоит из скаляров. Это доказывает утверждение (iv), а также неразложимость модуля V.

Определение 2. *Гомоморфизм χ из предложения* 1 (iv) *называется центральным характером $\mathfrak{g}$-модуля V.*

Предложение 2. *Пусть V есть $\mathfrak{g}$-модуль, порожденный примитивным элементом e веса ω, и X — полупростой $\mathfrak{g}$-модуль. Обозначим через Φ множество гомоморфизмов из $\mathfrak{g}$-модуля V в $\mathfrak{g}$-модуль X. Тогда отображение $\varphi \mapsto \varphi(e)$ — изоморфизм векторного пространства Φ на векторное пространство X_π^ω.*

Ясно, что $\varphi(e) \in X_\pi^\omega$ для всех $\varphi \in \Phi$. Если $\varphi(e) = 0$ и $\varphi \in \Phi$, то $\varphi = 0$, поскольку элемент e порождает $\mathfrak{g}$-модуль V. Пусть f — ненулевой элемент пространства X_π^ω. Покажем, что существует гомоморфизм $\varphi \in \Phi$, для которого $\varphi(e) = f$. Пусть X' — подмодуль модуля X, порожденный элементом f. По предложению 1 модуль X' неразложим и, следовательно, прост, поскольку модуль X полупрост. Элемент (e, f) — примитивный элемент в $\mathfrak{g}$-модуле $V \times X$. Пусть N — подмодуль модуля $V \times X$, порожденный элементом (e, f). Имеет место включение $N \cap X \subset \subset \mathrm{pr}_2(N) = X'$, следовательно, $N \cap X = 0$ или $N \cap X = X'$. Если $N \cap X = X'$, то модуль N содержит линейно независимые элементы (e, f) и $(0, f)$, оба — примитивные элементы веса ω. Но этого не может быть (предложение 1), а значит, $N \cap X = 0$. Таким образом, $\mathrm{pr}_1 | N$ — инъективное отображение h модуля N в модуль V. Это отображение сюръективно, поскольку его образ содержит элемент e. Значит, $\varphi = \mathrm{pr}_2 \circ h^{-1}$ — такой гомоморфизм $\mathfrak{g}$-модуля V в $\mathfrak{g}$-модуль X, что $\varphi(e) = f$.

2. Простые модули, имеющие старший вес

Напомним, что задание базиса B определяет на пространстве $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}}$ отношение порядка (гл. VI, § 1, n° 6). Неотрицательными элементами пространства $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}}$ будут линейные комбинации элементов множества B с рациональными коэффициентами $\geqslant 0$.

Вообще мы рассмотрим следующее отношение порядка между элементами λ, μ из $\mathfrak{h}^*$:

$\lambda - \mu$ больше 0, если разность $\lambda - \mu$ является линейной комбинацией элементов из множества B с положительными рациональными коэффициентами.

Лемма 2. *Пусть V — простой $\mathfrak{g}$-модуль, а ω — вес модуля V. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) *все веса модуля V имеют вид $\omega - \mu$, где μ — радикальный положительный вес*;

(ii) ω — *наибольший вес модуля V*[1]);

(iii) $\omega + \alpha$ *не является весом модуля V ни для какого корня* $\alpha \in B$.

(iv) *существует примитивный элемент веса* ω.

(i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii). Это очевидно.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Предположим, что условие (iii) выполняется. Тогда для любого элемента $h \in \mathfrak{h}$ подпространство

$$\mathrm{Ker}\,(h_V - \omega(h))$$

не равно нулю, содержится в V^ω и устойчиво относительно эндоморфизмов $\mathfrak{h}_V$. Индукцией по $\dim \mathfrak{h}$ мы убеждаемся в том, что существует такой ненулевой элемент v в пространстве V^ω, что $\mathfrak{h}v \subset kv$. Из условия (iii) вытекает, что $\mathfrak{n}_+ v = 0$, а значит, v — примитивный элемент.

---

[1]) Наибольший вес модуля V мы будем называть его *старшим весом*. Аналогично вводится понятие *младшего веса*. — *Прим. перев.*

(iv) $\Rightarrow$ (i). Пусть v — примитивный элемент веса ω. Так как модуль V прост, то как $\mathfrak{g}$-модуль V порождается элементом v. Таким образом, утверждение (i) следует из предложения 1. Ч. Т. Д.

Таким образом, для простого $\mathfrak{g}$-модуля существование примитивного элемента эквивалентно существованию старшего веса или существованию максимального веса.

Существуют такие простые $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$-модули V, что для любой подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ модуль V не имеет никаких весов (§ 1, упражнение 14 e)). Эти модули бесконечномерны над полем $\mathbf{C}$ (§ 1, n° 3, теорема 1).

Предложение 3. *Пусть V — простой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим* весом ω.

(i) *Примитивными элементами модуля V являются ненулевые элементы пространства V^{ω}.*

(ii) *Рассматриваемый как $\mathfrak{h}$-модуль модуль V полупрост.*

(iii) $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V^{\lambda}$. *Для каждого веса $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ пространство V^{λ} конечномерно. Кроме того,*

$$\dim V^{\omega} = 1.$$

(iv) *$\mathfrak{g}$-модуль V абсолютно прост.*

Утверждение (i), (ii), (iii) следуют из предложения 1 и леммы 2. Утверждение (iv) следует из предложения 1 (iii) и *Alg.*, chap. VIII, § 7, n° 3[1]).

Следствие. *Если V — конечномерный модуль, то канонический гомоморфизм $U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$ сюръективен.*

Это вытекает из утверждения (iv), см. *Alg.*, chap. VIII, § 3, n° 3[2]).

Предложение 4. *Пусть V — простой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом ω, X — полупростой $\mathfrak{g}$-модуль и X' — изотипная компонента типа V в модуле X. Тогда X' — подмодуль модуля X, порожденный подпространством X^{ω}_{π}. Длина этого модуля равна размерности пространства X^{ω}_{π}.*

Пусть X'' — подмодуль в X, порожденный подпространством X^{ω}_{π}. Ясно, что все подмодули модуля X, изоморфные модулю V, содержатся в модуле X''. Следовательно, $X' \subset X''$. Но по предложению 2 имеет место включение $X'' \subset X'$. Следовательно, $X' = X''$. С другой стороны, пусть Φ — множество

---

[1]) См. также *Алг.*, гл. VIII, § 4, n° 3, и *Алг.*, гл. VIII, § 13, n° 4. — *Прим. перев.*

[2]) См. также *Алг.*, гл. VIII, § 13, n° 4. — *Прим. перев.*

гомоморфизмов $\mathfrak{g}$-модуля V в $\mathfrak{g}$-модуль X. Длина модуля X' равна $\dim_k \Phi$ (*Алг.*, гл. VIII, § 4, n° 4), а значит, $\dim_k X_\pi^\omega$ (предложение 2).

3. Теорема существования и единственности

Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Так как $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_+ = [\mathfrak{b}_+, \mathfrak{b}_+]$, то отображение $h + n \mapsto \lambda(h)$ (где $h \in \mathfrak{h}$, $n \in \mathfrak{n}_+$) алгебры Ли $\mathfrak{b}_+$ в поле k является 1-мерным представлением алгебры Ли $\mathfrak{b}_+$. Обозначим через L_λ векторное k-пространство, снабженное структурой $\mathfrak{b}_+$-модуля, которую определяет это представление. Пусть $U(\mathfrak{g})$, $U(\mathfrak{b}_+)$ — универсальные обертывающие алгебры для $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}_+$, причем $U(\mathfrak{b}_+)$ рассматривается как подалгебра в $U(\mathfrak{g})$; напомним, что $U(\mathfrak{g})$ является свободным правым $U(\mathfrak{b}_+)$-модулем (гл. I, § 2, n° 7, следствие 5 теоремы 1). Положим

$$Z(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} L_\lambda. \tag{2}$$

Тогда $Z(\lambda)$ — левый $\mathfrak{g}$-модуль. Обозначим через e его элемент $1 \otimes 1$.

Предложение 5. (i) *Элемент e — примитивный элемент из $Z(\lambda)$ веса λ, и e порождает $Z(\lambda)$ как $\mathfrak{g}$-модуль.*

(ii) *Пусть $Z^+(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \neq \mu} Z(\lambda)^\mu$. Любой подмодуль модуля $Z(\lambda)$, отличный от $Z(\lambda)$, содержится в модуле $Z^+(\lambda)$.*

(iii) *Существует наибольший подмодуль F_λ модуля $Z(\lambda)$, отличный от $Z(\lambda)$. Фактормодуль $Z(\lambda)/F_\lambda$ прост, и его старший вес равен λ.*

Ясно, что элемент e порождает $\mathfrak{g}$-модуль $Z(\lambda)$. Если $x \in \mathfrak{h}_+$, то имеют место равенства

$$x \,.\, e = (x \,.\, 1) \otimes 1 = (1 \,.\, x) \otimes 1 = \\ = 1 \otimes x \,.\, 1 = \lambda(x)(1 \otimes 1) = \lambda(x) e,$$

откуда следует утверждение (i).

$\mathfrak{h}$-модуль $Z(\lambda)$ полупрост (предложение 1). Если G есть $\mathfrak{g}$-подмодуль модуля $Z(\lambda)$, то $G = \sum\limits_{\mu \in \mathfrak{h}^*} (G \cap Z(\lambda)^\mu)$. Предположение $G \cap Z(\lambda)^\lambda \neq 0$ влечет за собой $G = Z(\lambda)$, так как $\dim Z(\lambda)^\lambda = 1$ и $\mathfrak{g}$-модуль $Z(\lambda)$ порождается элементом e. Поэтому если $G \neq Z(\lambda)$, то $G = \sum\limits_{\mu \neq \lambda} G \cap Z(\lambda)^\mu \subset Z^+(\lambda)$.

Пусть F_λ — объединение отличных от $Z(\lambda)$ подмодулей модуля $Z(\lambda)$. Вследствие условия (ii) имеет место включение $F_\lambda \subset Z^+(\lambda)$. Значит, F_λ — наибольший отличный от $Z(\lambda)$ подмодуль модуля $Z(\lambda)$. Ясно, что фактормодуль $Z(\lambda)/F_\lambda$ прост и что образ элемента e в модуле $Z(\lambda)/F_\lambda$ при канонической проекции является примитивным элементом веса λ.

Далее в этой главе $\mathfrak{g}$-модуль $Z(\lambda)/F_\lambda$, введенный в предложении 5, *будет обозначаться через $E(\lambda)$.*

Теорема 1. *Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Тогда $\mathfrak{g}$-модуль $E(\lambda)$ прост и его старший вес равен λ. Каждый простой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ изоморфен модулю $E(\lambda)$.*

Первое утверждение следует из предложения 5 (iii). Второе утверждение следует из предложения 4.

Предложение 6. *Пусть V есть $\mathfrak{g}$-модуль, λ — элемент пространства $\mathfrak{h}^*$, v — примитивный элемент из V веса λ.*

(i) *Существует, и притом единственный, гомоморфизм ψ: $Z(\lambda) \to V$ $\mathfrak{g}$-модулей, такой, что $\psi(e) = v$.*

(ii) *Предположим, что модуль V порожден элементом v. Тогда гомоморфизм ψ сюръективен. Чтобы гомоморфизм ψ был биективен, необходимо и достаточно, чтобы для каждого ненулевого элемента u алгебры $U(\mathfrak{n}_-)$ эндоморфизм u_V был инъективен.*

(iii) *Отображение $u \mapsto u \otimes 1$ модуля $U(\mathfrak{n}_-)$ в модуль $Z(\lambda)$ биективно.*

Пусть K — ядро представления алгебры $U(\mathfrak{b}_+)$ в пространстве L_λ; в пространстве $U(\mathfrak{b}_+)$ коразмерность этого ядра равна 1. Пусть $J = U(\mathfrak{g})K$ — левый идеал алгебры $U(\mathfrak{g})$, порожденный множеством K. Тогда модуль L_λ естественно отождествляется с левым $U(\mathfrak{b}_+)$-модулем $U(\mathfrak{b}_+)/K$, а модуль $Z(\lambda)$ — с левым $U(\mathfrak{g})$-модулем $U(\mathfrak{g})/J$. Имеет место равенство $K.v = 0$, поэтому $J.v = 0$, что доказывает утверждение (i).

Предположим теперь, что модуль V порожден элементом v. Ясно, что гомоморфизм ψ сюръективен.

По теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта (гл. I, § 2, n° 7, следствие 6 теоремы 1) базис пространства $U(\mathfrak{n}_-)$ над полем k является также базисом правого $U(\mathfrak{b}_+)$-модуля $U(\mathfrak{g})$. Следовательно, отображение φ: $u \mapsto u \otimes 1$ пространства $U(\mathfrak{n}_-)$ в пространство $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}_+)} L_\lambda$ биективно. Пусть $u \in U(\mathfrak{n}_-)$. Тогда эндоморфизм $\varphi^{-1} \circ u_{Z(\lambda)} \circ \varphi$ пространства $U(\mathfrak{n}_-)$ совпадает с умножением слева на элемент u. Учитывая следствие 7 теоремы 1 гл. I, § 2, n° 7, получаем, что гомоморфизм $u_{Z(\lambda)}$ инъективен, если $u \neq 0$. Следовательно, если гомоморфизм ψ биективен, то эндоморфизм u_V инъективен для всех ненулевых элементов u алгебры $U(\mathfrak{n}_-)$.

Предположим, что эндоморфизм ψ не инъективен. Тогда существует такой элемент $u \in U(\mathfrak{n}_-)$, что $u \neq 0$ и $\psi(\varphi(u)) = 0$.

Таким образом,

$$u_V \cdot v = u_V \cdot \psi(1 \otimes 1) = \psi(u \otimes 1) = \psi(\varphi(u)) = 0.$$

Следствие 1. *Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и $\alpha \in B$ таковы, что $\lambda(H_\alpha) + 1 \in \mathbf{N}$. Тогда модуль $Z(-\alpha + s_\alpha\lambda)$ изоморфен некоторому $\mathfrak{g}$-подмодулю модуля $Z(\lambda)$.*

Положим $m = \lambda(H_\alpha)$. Пусть $x = X_{-\alpha}^{m+1} \cdot e \in Z(\lambda)$ и V — подмодуль модуля $Z(\lambda)$, порожденный элементом x. Мы получаем, что $x \neq 0$ (предложение 6). С другой стороны, $x \in Z(\lambda)^{\lambda-(m+1)\alpha}$. Если $\beta \in B$ и $\beta \neq \alpha$, то $[\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] = 0$ и $\mathfrak{g}^{\beta} \cdot e = 0$, следовательно, $\mathfrak{g}^{\beta} \cdot x = 0$. Наконец, поскольку $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$, то $[X_\alpha, X_{-\alpha}^{m+1}] = (m+1) X_{-\alpha}^{m}(-H_\alpha + m)$ (§ 1, n° 1, лемма 1 (ii)), откуда следует, что

$$\begin{aligned} X_\alpha \cdot x = X_\alpha X_{-\alpha}^{m+1} \cdot e = [X_\alpha, X_{-\alpha}^{m+1}] \cdot e = \\ = (m+1) X_{-\alpha}^{m}(me - \lambda(H_\alpha) e) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, x — примитивный элемент веса $\lambda - (m+1)\alpha$. Учитывая предложение 6, получаем, что $\mathfrak{g}$-модуль V изоморфен модулю $Z(-\alpha + \lambda - m\alpha) = Z(-\alpha + s_\alpha\lambda)$.

Следствие 2. *Пусть $\rho = \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in R_+} \alpha$ и $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Предположим, что $\lambda + \rho$ — доминантный вес относительно системы R и что существует элемент $w \in W$, для которого $\mu + \rho = w(\lambda + \rho)$. Тогда модуль $Z(\mu)$ изоморфен некоторому подмодулю модуля $Z(\lambda)$.*

Утверждение очевидно, если $w = 1$. Предположим, что справедливость утверждения установлена при условии, что длина элемента w меньше q. Если теперь длина элемента w равна q, то существует такой корень $\alpha \in B$, что $w = s_\alpha w'^{-1}$, причем $l(w') = q - 1$. Мы получаем, что $w'(\alpha) \in R_+$ (гл. VI, § 1, n° 6, следствие 2 предложения 17) и, следовательно, $(w'^{-1}(\lambda + \rho))(H_\alpha) = (\lambda + \rho)(H_{w'\alpha})$ — целое число $\geqslant 0$. Положим

$$\mu' = w'^{-1}(\lambda + \rho) - \rho.$$

По предположению индукции модуль $Z(\mu')$ изоморфен подмодулю модуля $Z(\lambda)$. С другой стороны, по предложению 29 (ii) из гл. VI, § 1, n° 10, мы получаем, что

$$-\alpha + s_\alpha\mu' = -\alpha + s_\alpha w'^{-1}(\lambda + \rho) - s_\alpha\rho = w(\lambda + \rho) - \rho = \mu.$$

Кроме того, $\rho(H_\alpha) = 1$ (гл. VI, § 1, предложение 29 (iii)), а значит, $\mu'(H_\alpha) + 1 \in \mathbf{N}$. Таким образом, из следствия 1 вытекает, что модуль $Z(\mu)$ изоморфен подмодулю модуля $Z(\mu')$, а следовательно, некоторому подмодулю модуля $Z(\lambda)$.

4. *Централизатор подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ в универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли $\mathfrak{g}$*

Пусть U — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $V \subset U$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{h}$. Алгебра V естественно отождествляется с симметрической алгеброй $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ пространства $\mathfrak{h}$, а также с алгеброй полиномиальных функций на $\mathfrak{h}^*$. Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ попарно различные положительные корни. Пусть $(\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_l)$ — базис пространства $\mathfrak{h}$. По теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта элементы

$$u((q_i), (m_i), (p_i)) = \mathrm{X}_{-\alpha_1}^{q_1} \ldots \mathrm{X}_{-\alpha_n}^{q_n} \mathrm{H}_1^{m_1} \ldots \mathrm{H}_l^{m_l} \mathrm{X}_{\alpha_1}^{p_1} \ldots \mathrm{X}_{\alpha_n}^{p_n}$$

(q_i, m_i, p_i — целые $\geqslant 0$) образуют базис векторного пространства U. Для каждого $h \in \mathfrak{h}$ имеет место равенство

$$[h, u((q_i), (m_i), (p_i))] = \\ = ((p_1 - q_1)\alpha_1 + \ldots + (p_n - q_n)\alpha_n)(h)\, u((q_i), (m_i), (p_i)). \quad (3)$$

Векторное пространство U является $\mathfrak{g}$-модулем (а следовательно, и $\mathfrak{h}$-модулем) относительно присоединенного представления. Если $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, то определены подпространства U^λ и U_λ (гл. VII, § 1, n°3); формула (3) показывает, что $U^\lambda = U_\lambda$ и что $U = \bigoplus_{\lambda \in Q} U^\lambda$ (где Q — группа радикальных весов системы R). В частности, U^0 является централизатором модуля $\mathfrak{h}$ или модуля V в алгебре U.

Лемма 3. *Положим* $L(\mathfrak{n}_- U) \cap U^0$.

(i) $L = (U\mathfrak{n}_+) \cap U^0$, *и* L — *двусторонний идеал алгебры* U^0.

(ii) $U^0 = V \oplus L$.

Ясно, что $\mathfrak{n}_- U$ (соотв. $U\mathfrak{n}_+$) — это множество таких линейных комбинаций элементов $u((q_i), (m_i), (p_i))$, что $\sum q_i > 0$ (соотв. $\sum p_i > 0$). С другой стороны,

$$u((q_i), (m_i), (p_i)) \in U^0 \Longleftrightarrow p_1\alpha_1 + \ldots + p_n\alpha_n = q_1\alpha_1 + \ldots + q_n\alpha_n.$$

Поэтому $(\mathfrak{n}_- U) \cap U^0 = (U\mathfrak{n}_+) \cap U^0$. Наконец, $(\mathfrak{n}_- U) \cap U^0$ (соотв. $(U\mathfrak{n}_+) \cap U^0$) является правым (соотв. левым) идеалом в U^0, откуда следует утверждение (i). Кроме того, элемент $u((q_i), (m_i), (p_i))$ алгебры U^0 принадлежит V (соотв. L) тогда и только тогда, когда $p_1 = \ldots = p_n = q_1 = \ldots = q_n = 0$ (соотв. $p_1 + \ldots + p_n + q_1 + \ldots + q_n > 0$), что доказывает утверждение (ii). Ч. Т. Д.

Ввиду леммы 3 проекция U^0 на V — гомоморфизм алгебр, ядро которого равно L. Этот гомоморфизм называется *гомоморфизмом Хариш-Чандры* алгебры U^0 на алгебру V (относительно базиса B). Напомним, что алгебру V можно отождествить с алгеброй полиномиальных функций на $\mathfrak{h}^*$.

Предложение 7. *Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль, порожденный примитивным элементом веса λ, χ — центральный характер алгебры V и φ — гомоморфизм Хариш-Чандры алгебры U^0 на алгебру V. Тогда для любого z из центра универсальной обертывающей алгебры U выполнено равенство $\chi(z) = (\varphi(z))\lambda$.*

Пусть v — примитивный элемент пространства V веса λ, а z — элемент из центра алгебры U. Тогда существуют такие $u_1, \ldots, u_p \in U$ и $n_1, \ldots, n_p \in \mathfrak{n}_+$, что $z = \varphi(z) + u_1n_1 + \ldots + u_pn_p$. Таким образом,

$$\chi(z)v = zv = \varphi(z)v + u_1n_1v + \ldots + u_pn_pv = \varphi(z)v = (\varphi(z))(\lambda)v.$$

Следствие. *Пусть $\langle . , . \rangle$ — невырожденная инвариантная симметрическая билинейная форма на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а C — элемент Казимира, ассоциированный с этой формой. Тем же символом $\langle . , . \rangle$ обозначим форму на $\mathfrak{h}^*$, являющуюся обратной формой для ограничения формы $\langle . , . \rangle$ на пространство $\mathfrak{h}$* (§ 2, n° 3, предложение 5). *Тогда $\chi(C) = \langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle$, где $\rho = \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in R_+} \alpha$.*

Воспользуемся обозначениями из предложения 6 § 2, n° 3. Имеет место равенство

$$C = \sum_{\alpha \in R_-} \frac{1}{\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle} X_\alpha X_{-\alpha} + \sum_{\alpha \in R_+} \frac{1}{\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle} X_{-\alpha} X_\alpha + \sum_{\alpha \in R_+} \frac{1}{\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle} [X_\alpha, X_{-\alpha}] + \sum_{i \in I} H_i H_i'.$$

Следовательно,

$$\varphi(C) = \sum_{\alpha \in R_+} \frac{1}{\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle} [X_\alpha, X_{-\alpha}] + \sum_{i \in I} H_i H_i'.$$

По предложению 7

$$\chi(C) = \sum_{\alpha \in R_+} \frac{1}{\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle} \lambda([X_\alpha, X_{-\alpha}]) + \sum_{i \in I} \lambda(H_i)\lambda(H_i').$$

Пусть h_λ — такой элемент пространства $\mathfrak{h}$, что $\langle h_\lambda, h \rangle = \lambda(h)$ для всех $h \in \mathfrak{h}$. По предложению 1 из § 2, n° 2, имеют место равенства

$$\lambda\left(\frac{1}{\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle}[X_\alpha, X_{-\alpha}]\right)=\left\langle h_\lambda, \frac{1}{\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle}[X_\alpha, X_{-\alpha}]\right\rangle=\alpha(h_\lambda)=\langle\lambda, \alpha\rangle.$$

Следовательно,

$$\chi(C)=\left(\sum_{\alpha\in R_+}\langle\lambda, \alpha\rangle\right)+\langle\lambda, \lambda\rangle=\langle\lambda, \lambda+2\rho\rangle.$$

§ 7. Конечномерные модули над расщепленной полупростой алгеброй Ли

В этом параграфе мы сохраним основные обозначения из § 6. *Через* P (соотв. Q) *обозначается группа весов* (соотв. *группа радикальных весов*) *системы корней* R. *Через* P_+ (соотв. Q_+) *обозначается множество элементов группы* P (соотв. Q), *положительных относительно некоторого определенного базисом* B *упорядочения системы* R. *Через* P_{++} *обозначается множество доминантных весов системы* R *относительно базиса* B (гл. VI, § 1, n° 10). *Элемент* λ *пространства* $\mathfrak{h}^*$ *принадлежит* P (соотв. P_{++}) *тогда и только тогда, когда все числа* $\lambda(H_\alpha)$, $\alpha\in B$, *целые* (соотв. *целые* $\geqslant 0$). *Имеет место включение* $P_{++}\subset P_+$ (гл. VI, § 1, n° 6). *Если* $w\in W$, *то через* $\varepsilon(w)$ *обозначается детерминант автоморфизма* w, *равный* 1 *или* -1. *Положим* $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+}\alpha$.

1. Веса простого конечномерного $\mathfrak{g}$*-модуля*

Предложение 1. *Пусть* V — *конечномерный* $\mathfrak{g}$*-модуль.*

(i) *Все веса модуля* V *содержатся в* P.

(ii) $V=\bigoplus_{\mu\in P}V^\mu$.

(iii) *Для всякого* $\mu\in\mathfrak{h}^*$ *пространство* V^μ *состоит из тех* $x\in V$, *для которых* $h.x=\mu(h)x$ *при всех* $h\in\mathfrak{h}$.

Для каждого корня $\alpha\in B$ существует гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$, который переводит H в H_α. По следствию предложения 2 из § 1, n° 2, эндоморфизм $(H_\alpha)_V$ приводится к диагональному виду и его собственные значения — целые числа. Следовательно, множество эндоморфизмов $(H_\alpha)_V$ при $\alpha\in B$ приводится к диагональному виду (*Alg*., chap. VII, § 5, n° 6, proposition 13). Следовательно, для всех $h\in\mathfrak{h}$ эндоморфизм h_V приводится к диагональному виду. По предложению 9 из гл. VII, § 1, n° 3, имеет место равенство $V=\bigoplus_{\mu\in\mathfrak{h}^*}V^\mu$.

С другой стороны, если $V^\mu\neq 0$, то из предыдущего видно, что $\mu(H_\alpha)\in\mathbf{Z}$ для всех корней $\alpha\in B$, откуда следует, что $\mu\in P$.

Это доказывает утверждения (i) и (ii). В то же время ясно, что эндоморфизм h_V приводится к диагональному виду. Отсюда вытекает утверждение (iii).

Следствие. *Пусть ρ — конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и Φ — билинейная форма, ассоциированная с представлением ρ.*

(i) *Если $x, y \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$, то $\Phi(x, y) \in \mathbf{Q}$ и $\Phi(x, x) \in \mathbf{Q}_+$.*

(ii) *Если представление ρ инъективно, то ограничение формы Φ на подалгебру $\mathfrak{h}$ невырожденно.*

Утверждение (i) следует из предложения 1, поскольку элементы множества P принимают на пространстве $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ рациональные значения. Если представление ρ инъективно, то форма Φ невырожденна (гл. I, § 6, n° 1, предложение 1); следовательно, ограничение формы Φ на пространство $\mathfrak{h}$ невырожденно (гл. VII, § 1, n° 3, предложение 10 (iii)).

Лемма 1. *Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль и ρ — соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

(i) *Если a — нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и если элемент $\rho(a)$ локально нильпотентен, то для любого $b \in \mathfrak{g}$*

$$\rho(e^{\operatorname{ad} a} b) = e^{\rho(a)} \rho(b) e^{-\rho(a)}.$$

(ii) *Если $\alpha \in R$ и образы элементов пространств $\mathfrak{g}^{\alpha}$ и $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ при представлении ρ локально нильпотентны, то множество весов модуля V устойчиво относительно отражения s_α.*

В предположениях утверждения (i) имеет место равенство $\rho((\operatorname{ad} a)^n b) = (\operatorname{ad} \rho(a))^n \rho(b)$ для всех $n \geqslant 0$, и, следовательно, $\rho(e^{\operatorname{ad} a} b) = e^{\operatorname{ad} \rho(a)} \rho(b)$. С другой стороны, можно доказать так же, как и утверждение (ii) леммы 1 из гл. VII, § 3, n° 1, что справедливо равенство

$$e^{\operatorname{ad} \rho(a)} \rho(b) = e^{\rho(a)} \rho(b) e^{-\rho(a)}.$$

Пусть выполняются предположения утверждения (ii). Пусть $\theta_\alpha = e^{\operatorname{ad} X_\alpha} e^{\operatorname{ad} X_{-\alpha}} e^{\operatorname{ad} X_\alpha}$. По утверждению (i) существует такой элемент $S \in \mathbf{GL}(V)$, что $\rho(\theta_\alpha b) = S \rho(b) S^{-1}$ для всех $b \in \mathfrak{g}$. Значит, эндоморфизм $\theta_\alpha | \mathfrak{h}$ сопряжен к эндоморфизму s_α (§ 2, n° 2, лемма 1). Пусть λ — вес пространства V. Существует такой ненулевой элемент x пространства V, что $\rho(h)(x) = \lambda(h) x$ для всех $h \in \mathfrak{h}$. Таким образом, мы получаем, что

$$\rho(h) S^{-1} x = S^{-1} \rho({}^t s_\alpha h) x = S^{-1} \lambda({}^t s_\alpha h) x = (s_\alpha \lambda)(h) S^{-1} x$$

при всех $h \in \mathfrak{h}$. Следовательно, $s_\alpha \lambda$ — вес модуля V.

Предложение 2. *Пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль и* $s \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

(i) *Существует такой автоморфизм $S \in \mathbf{GL}(V)$, что $(s(x))_V = Sx_VS^{-1}$ для всех $x \in \mathfrak{g}$.*

(ii) *Если $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, то в качестве S можно выбрать элемент из $\mathbf{SL}(V)$, относительно которого устойчивы все $\mathfrak{g}$-подмодули модуля V.*

Утверждение (ii) следует из леммы 1(i). Пусть теперь $s \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$. Обозначим через ρ представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, определенное модулем V. По утверждению (ii) представления ρ и $\rho \circ s$ становятся эквивалентными после расширения поля скаляров. Следовательно, они просто эквивалентны (гл. I, § 3, n°8, предложение 13), откуда вытекает существование искомого автоморфизма S.

Замечание 1. Пусть автоморфизм S удовлетворяет условию предложения 2(i), и пусть $\mathfrak{h}' = s(\mathfrak{h})$. Обозначим через s^* изоморфизм $\lambda \mapsto \lambda \circ s^{-1}$ пространства $\mathfrak{h}^*$ на $\mathfrak{h}'^*$. Ясно, что

$$S(V^\lambda) = V^{s^*\lambda}.$$

В частности, имеют место

Следствие 1. *Изоморфизм s^* переводит веса модуля V относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ в веса модуля V относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}'$; два соответствующих друг другу веса имеют одинаковую кратность.*

Следствие 2. *Пусть $w \in W$. Каков бы ни был вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, векторные подпространства V^λ и $V^{w\lambda}$ имеют одинаковую размерность. Множество весов модуля V устойчиво относительно действия группы W.*

Действительно, изоморфизм w имеет вид s^* для некоторого $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (§ 2, n°2, следствие теоремы 2).

Замечание 2. Ввиду следствия предложения 2 и замечания 2 из § 5, n°3, можно говорить о весах модуля V относительно канонической подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и о кратностях этих весов.

Замечание 3. Лемма 1(i) и предложение 2 остаются справедливыми, причем проходят те же доказательства, если не предполагается, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ расщепленная.

2. Старшие веса простых конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей

Теорема 1. *Для того чтобы простой $\mathfrak{g}$-модуль имел конечную размерность, необходимо и достаточно, чтобы его старший вес принадлежал P_{++}.*

Обозначим через V некоторый простой $\mathfrak{g}$-модуль, а через $\mathscr{X}$ — множество его весов.

а) Предположим, что V — конечномерный модуль. Тогда $\mathscr{X}$ — непустое конечное множество (предложение 1), у которого есть максимальный элемент ω. Пусть $\alpha \in B$. Тогда $\omega + \alpha \notin \mathscr{X}$, а это доказывает, что ω — старший вес модуля V (§ 6, n°2, лемма 2). С другой стороны, существует гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$, который переводит элемент H в элемент H_α; по предложению 2(i) из § 1 $\omega(\mathrm{H}_\alpha)$ — целое число $\geqslant 0$, а следовательно, $\omega \in P_{++}$.

б) Предположим, что у модуля V имеется старший вес ω, который принадлежит P_{++}. Пусть $\alpha \in B$, и пусть e — примитивный элемент модуля V веса ω. Положим $e_j = X^j_{-\alpha} e$ для всех $j \geqslant 0$, $m = \omega(H_\alpha) \in \mathbf{N}$ и $N = \sum_{j=0}^{m} k e_j$. Согласно предложению 1 из § 1, n°2, $\mathrm{X}_\alpha e_{m+1} = 0$. Если $\beta \in B$ и $\beta \neq \alpha$, то $[\mathrm{X}_\beta, \mathrm{X}_{-\alpha}] = 0$, а значит, $\mathrm{X}_\beta e_{m+1} = \mathrm{X}_\beta \mathrm{X}_{-\alpha}^{m+1} e = \mathrm{X}_{-\alpha}^{m+1} \mathrm{X}_\beta e = 0$. Если $e_{m+1} \neq 0$, то из этих равенств мы заключаем, что e_{m+1} — примитивный элемент, а этого не может быть (§ 6, предложение 3(i)); поэтому $e_{m+1} = 0$. По следствию предложения 1 § 1, n°2, элемент N устойчив также относительно действия подалгебры $\mathfrak{s}_\alpha$, порожденной элементами H_α, X_α и $\mathrm{X}_{-\alpha}$. Следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{s}_\alpha$ редуктивна в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и, таким образом, сумма конечномерных подпространств модуля V, устойчивых относительно действия $\mathfrak{s}_\alpha$, является $\mathfrak{g}$-подмодулем модуля V (гл. I, § 6, n°6, предложение 7). Поскольку эта сумма не равна нулю, она совпадает с V. Отсюда следует, что эндоморфизмы $(\mathrm{X}_\alpha)_V$ и $(\mathrm{X}_{-\alpha})_V$ локально нильпотентны. Учитывая лемму 1(ii), получаем, что множество $\mathscr{X}$ устойчиво относительно s_α для любого корня α. Следовательно, множество $\mathscr{X}$ устойчиво относительно группы W. Таким образом, каждая орбита группы W в множестве P пересекается с множеством P_{++} (гл. VI, § 1, n°10). С другой стороны, если $\lambda \in \mathscr{X} \cap P_{++}$, то $\lambda = \omega - \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha = \sum_{\alpha \in B} n'_\alpha \alpha$, где $n_\alpha \in \mathbf{N}$ и $n'_\alpha \geqslant 0$ при всех $\alpha \in B$ (гл. V, § 3, n°5, лемма 6). Следовательно, $\mathscr{X} \cap P_{++}$ — конечное множество, и, значит, $\mathscr{X}$ конечно. Так как каждый корень имеет конечную кратность (§ 6, n°1, предложение 1(ii)), то модуль V конечномерен.

Следствие 1. *Если $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и $\lambda \notin P_{++}$, то $\mathfrak{g}$-модуль $E(\lambda)$* (§ 6, n°3) *бесконечномерен.*

Следствие 2. *Когда λ пробегает множество P_{++}, $\mathfrak{g}$-модули $E(\lambda)$ образуют множество представителей классов простых конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей.*

$\mathfrak{g}$-модуль $E(\lambda)$ называется *фундаментальным* $\mathfrak{g}$-*модулем*, если λ — фундаментальный вес; соответствующее представление называется *фундаментальным представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$; такое представление абсолютно неприводимо (§ 6, n°2, предложение 3 (iv)).

Если V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль и $\lambda \in P_{++}$, то изотипная компонента типа $E(\lambda)$ в модуле V называется *изотипной компонентой старшего веса* λ *модуля* V.

Замечание 1. Пусть $\lambda \in P_{++}$, ρ_λ — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в модуле $E(\lambda)$, $s \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ и σ — канонический образ элемента s в группе $\operatorname{Aut}(R, B)$ (§ 5, n°3, следствие 1 предложения 5). Тогда представление $\rho_\lambda \circ s$ эквивалентно представлению $\rho_{\sigma\lambda}$; действительно, если $s \in \operatorname{Aut}_0(\mathfrak{g})$, то представления $\rho_\lambda \circ s$ и $\rho_{\sigma\lambda}$ эквивалентны представлению ρ_λ (предложение 2). Если подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ и базис B устойчивы относительно автоморфизма s, то модуль, отвечающий представлению $\rho_\lambda \circ s$, прост и его старший вес равен $\sigma\lambda$.

В частности, фундаментальные представления переставляются между собой под действием автоморфизма s, и эта перестановка тождественна тогда и только тогда, когда $s \in \operatorname{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

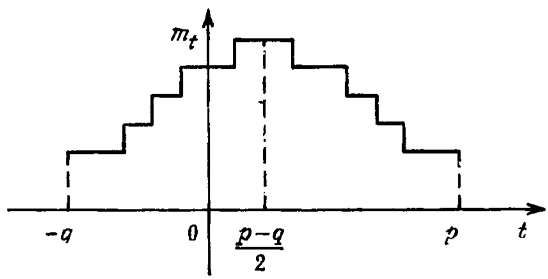

Рис. 1.

Предложение 3. *Пусть* V — *конечномерный* $\mathfrak{g}$-*модуль и* $\mathscr{X}$ — *множество весов модуля* V. *Пусть* $\lambda \in \mathscr{X}$, $\alpha \in R$, I — *множество таких чисел* $t \in \mathbf{Z}$, *что* $\lambda + t\alpha \in \mathscr{X}$, *а* p (соотв. $-q$) — *наибольший* (соотв. *наименьший*) *элемент множества* I. *Пусть* m_t — *кратность веса* $\lambda + t\alpha$.

(i) $I = [-q, p]$ *и* $q - p = \lambda(H_\alpha)$.

(ii) *Для каждого целого числа* $u \in [0, p+q]$ *веса* $\lambda + (p-u)\alpha$ *и* $\lambda + (-q+u)\alpha$ *сопряжены с помощью отражения* s_α *и* $m_{-q+u} = m_{p-u}$.

(iii) *Если* $t \in \mathbf{Z}$ *и* $t < (p-q)/2$, *то эндоморфизм* $(X_\alpha)_V$ *есть инъективное отображение пространства* $V^{\lambda+t\alpha}$ *в пространство* $V^{\lambda+(t+1)\alpha}$.

(iv) *Функция* $t \mapsto m_t$ *возрастает на отрезке* $[-q, (p-q)/2]$ *и убывает на отрезке* $[(p-q)/2, p]$.

Пусть $\alpha \in B$. Снабдим V структурой $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуля, определенной с помощью элементов X_α, $X_{-\alpha}$, H_α алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда каждый ненулевой элемент пространства $V^{\lambda+p\alpha}$ примитивен. Следовательно, $(\lambda + p\alpha)(H_\alpha) \geqslant 0$ и $(X_{-\alpha})^r V^{\lambda+p\alpha} \neq 0$ для

$$0 \leqslant r \leqslant (\lambda + p\alpha)(H_\alpha) = \lambda(H_\alpha) + 2p$$

(§ 1, n°2, предложение 2). Отсюда следует, что $V^{\lambda+t\alpha} \neq 0$ для $p \geqslant t \geqslant p - (\lambda(H_\alpha) + 2p)$, поэтому $p + q \geqslant \lambda(H_\alpha) + 2p$. Применяя это к корню $-\alpha$, мы получаем, что

$$p + q \geqslant \lambda(H_{-\alpha}) + 2q = -\lambda(H_\alpha) + 2q.$$

Следовательно, $q - p = \lambda(H_\alpha)$ и $\lambda + t\alpha \in \mathscr{X}$ для $p \geqslant t \geqslant -q$, что доказывает утверждение (i).

Имеем $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ и $s_\alpha(\mu) \in \mu + k\alpha$ для всех $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Поскольку множество $\mathscr{X}$ устойчиво относительно группы W (следствие 2 предложения 2), то серия $\{\lambda - q\alpha, \lambda - q\alpha + \alpha, \ldots, \lambda + p\alpha\}$ устойчива относительно отражения s_α, которое переводит вес $\lambda - q\alpha + u\alpha$ в вес $\lambda + p\alpha - u\alpha$ при всех $u \in k$. Снова принимая во внимание следствие 2 предложения 2, мы видим, что $m_{-q+u} = m_{p-u}$ для всех целых чисел $u \in [0, p+q]$. Это доказывает утверждение (ii).

По следствию предложения 2 из § 1 эндоморфизм $(X_\alpha)_V \mid V^{\lambda+t\alpha}$ инъективен при $t < (p-q)/2$. Стало быть, эндоморфизм $(X_\alpha)_V$ отображает пространство $V^{\lambda+t\alpha}$ в пространство $V^{\lambda+(t+1)\alpha}$. Таким образом, $m_{t+1} \geqslant m_t$ при $t < (p-q)/2$. Заменяя корень α на корень $-\alpha$, мы видим, что $m_{t+1} \leqslant m_t$ при $t > (p-q)/2$. Это доказывает утверждения (iii) и (iv).

Следствие 1. *Если $\lambda \in \mathscr{X}$ и $\lambda(H_\alpha) \geqslant 1$, то $\lambda - \alpha \in \mathscr{X}$. Если $\lambda + \alpha \in \mathscr{X}$ и $\lambda(H_\alpha) = 0$, то $\lambda \in \mathscr{X}$ и $\lambda - \alpha \in \mathscr{X}$.*

Это утверждение сразу же вытекает из предложения 3(i).

Следствие 2. *Пусть $\mu \in P_{++}$ и $\nu \in Q_+$. Если $\mu + \nu \in \mathscr{X}$, то $\mu \in \mathscr{X}$.*

Запишем $\nu = \sum_{\alpha \in B} c_\alpha . \alpha$, где $c_\alpha \in \mathbf{N}$ для любого $\alpha \in B$. Наше утверждение очевидно, если $\sum_{\alpha \in B} c_\alpha = 0$. Предположим, что $\sum_{\alpha \in B} c_\alpha > 0$, и проведем доказательство индукцией по $\sum_{\alpha \in B} c_\alpha$.

Пусть $(.|.)$ — билинейная симметрическая положительная невырожденная W-инвариантная форма на $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$. Имеет место соотношение $\left(\nu \,\middle|\, \sum_{\alpha \in B} c_\alpha . \alpha\right) > 0$, а значит, существует $\beta \in B$, такой, что $c_\beta \geqslant 1$ и $(\nu|\beta) > 0$. Отсюда $\nu(H_\beta) \geqslant 1$. Поскольку $\mu \in P_{++}$, то $(\mu + \nu)(H_\beta) \geqslant 1$. Согласно следствию 1, $\mu + (\nu - \beta) \in \mathscr{X}$, и достаточно применить предположение индукции.

Следствие 3, *Пусть* $v \in V$ — *примитивный элемент веса* ω, *и пусть* Σ — *множество таких элементов* $\alpha \in B$, *что* $\omega(H_\alpha) = 0$. *Стабилизатор в* $\mathfrak{g}$ *прямой* kv *есть параболическая алгебра* $\mathfrak{p}_\Sigma$, *ассоциированная с* Σ (§ 3, n° 4, *замечание*).

Заменяя, если необходимо, $\mathfrak{g}$-модуль V его $\mathfrak{g}$-подмодулем, порожденным элементом v, можно считать, что V прост. Пусть $\mathfrak{s}$ — его стабилизатор. Тогда $(\mathfrak{n}_+)_V v = 0$, $(\mathfrak{h})_V v \subset kv$. Пусть $\alpha \in B$ таков, что $\omega(H_\alpha) = 0$. Имеем $\omega + \alpha \notin \mathscr{X}$, откуда $\omega - \alpha \notin \mathscr{X}$ (предложение 3(i)), и, следовательно, $(\mathfrak{g}^{-\alpha})_V v = 0$. Это все показывает, что $\mathfrak{p}_\Sigma \subset \mathfrak{s}$. Если $\mathfrak{p}_\Sigma \neq \mathfrak{s}$, то $\mathfrak{s} = \mathfrak{p}_{\Sigma'}$, где Σ' — подмножество в B, строго содержащее Σ. Пусть $\beta \in \Sigma' - \Sigma$. Тогда $\mathfrak{g}^{-\beta}$ стабилизирует kv, а следовательно, обращает в нуль v. Поскольку $\omega(H_\beta) > 0$, это противоречит предложению 3(iii). Ч. Т. Д.

Подмножество $\mathscr{X}$ множества P называется *R-насыщенным*, если оно удовлетворяет следующему условию: для любого $\lambda \in \mathscr{X}$ и любого корня $\alpha \in R$ выполняется соотношение $\lambda - t\alpha \in \mathscr{X}$, каково бы ни было целое число t, заключенное между 0 и $\lambda(H_\alpha)$. Так как $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha$, то мы видим, что R-насыщенное подмножество множества P устойчиво относительно действия группы W. Пусть $\mathscr{Y} \subset P$. Будем называть элемент λ множества $\mathscr{Y}$ *R-экстремальным в множестве* $\mathscr{Y}$, если для всех корней $\alpha \in R$ или $\lambda + \alpha \notin \mathscr{Y}$, или $\lambda - \alpha \notin \mathscr{Y}$.

Предложение 4. *Пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль и d — целое число $\geqslant 1$. Тогда множество весов модуля V кратности $\geqslant d$ является R-насыщенным.*

Утверждение сразу же следует из предложения 3.

Предложение 5. *Пусть V — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, ω — его старший вес, $\mathscr{X}$ — множество его весов. Выберем положительно определенную невырожденную W-инвариантную симметрическую билинейную форму $(\cdot|\cdot)$ на $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$, и пусть $\lambda \mapsto \|\lambda\| = (\lambda|\lambda)^{1/2}$ — соответствующая норма.*

(i) *$\mathscr{X}$ — наименьшее R-насыщенное подмножество множества P, содержащее вес ω.*

(ii) *R-экстремальные элементы множества $\mathscr{X}$, и только они, сопряжены с элементом ω относительно действия группы W.*

(iii) *Если $\mu \in \mathscr{X}$, то $\|\mu\| \leqslant \|\omega\|$. Если, кроме того, $\mu \neq \omega$, то $\|\mu + \rho\| < \|\omega + \rho\|$.*

Если μ не является R-экстремальным элементом множества $\mathscr{X}$, то

(iv) *$\mathscr{X} = W.(\mathscr{X} \cap P_{++})$. Для того чтобы элемент λ множества P_{++} принадлежал множеству $\mathscr{X} \cap P_{++}$, необходимо и достаточно, чтобы $\omega - \lambda \in Q_+$.*

(i) Пусть $\mathscr{X}'$ — наименьшее R-насыщенное подмножество множества P, содержащее ω. Тогда $\mathscr{X}' \subset \mathscr{X}$ (предложение 4).

Предположим, что $\mathscr{X} \neq \mathscr{X}'$. Пусть λ — максимальный элемент множества $\mathscr{X} - \mathscr{X}'$. Так как $\lambda \neq \omega$, то существует такой корень $\alpha \in B$, что $\lambda + \alpha \in \mathscr{X}$. Введем p и q так же, как в предложении 3. Поскольку λ — максимальный элемент в множестве $\mathscr{X} - \mathscr{X}'$, то $\lambda + p\alpha \in \mathscr{X}'$. Так как множество $\mathscr{X}'$ устойчиво относительно группы W, то по предложению 3 (ii) $\lambda - q\alpha \in \mathscr{X}'$. Следовательно, $\lambda + u\alpha \in \mathscr{X}'$ для целых чисел u из отрезка $[-q, p]$. Это противоречит тому, что $\lambda \notin \mathscr{X}'$, и доказывает утверждение (i).

(ii) Ясно, что ω есть R-экстремальный элемент множества $\mathscr{X}$; следовательно, его образы под действием группы W — тоже R-экстремальные элементы множества $\mathscr{X}$. Пусть λ есть R-экстремальный элемент множества $\mathscr{X}$; докажем, что $\lambda \in W \, . \, \omega$. Так как существует такой элемент $w \in W$, что $w\lambda \in P_{++}$ (гл. VI, § 1, n° 10), то можно предположить, что $\lambda \in P_{++}$. Пусть $\alpha \in B$; введем p и q так же, как в предложении 3. Вследствие того что λ является R-экстремальным весом, или $p = 0$, или $q = 0$. Так как

$$q - p = \lambda(\mathrm{H}_\alpha) \geqslant 0,$$

то неравенство $p > 0$ невозможно. Следовательно, $p = 0$, так что $\lambda = \omega$.

(iii) Пусть $\mu \in \mathscr{X} \cap P_{++}$. Тогда $\omega + \mu \in P_{++}$ и $\omega - \mu \in Q_+$ (§ 6, n° 1, предложение 1), следовательно, $0 \leqslant (\omega - \mu \mid \omega + \mu) = (\omega \mid \omega) - (\mu \mid \mu)$; таким образом, $(\mu \mid \mu) \leqslant (\omega \mid \omega)$, и это утверждение распространяется с помощью группы Вейля на все элементы $\mu \in \mathscr{X}$. Если теперь $\mu \in \mathscr{X} - \{\omega\}$, то мы получаем

$$\begin{aligned}(\mu + \rho \mid \mu + \rho) &= (\mu \mid \mu) + 2(\mu \mid \rho) + (\rho \mid \rho) \leqslant \\ &\leqslant (\omega \mid \omega) + 2(\mu \mid \rho) + (\rho \mid \rho) = \\ &= (\omega + \rho \mid \omega + \rho) - 2(\omega - \mu \mid \rho).\end{aligned}$$

Но $\omega - \mu = \sum\limits_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha$, где не все из целых чисел $n_\alpha \geqslant 0$ равны нулю, поэтому $(\omega - \mu \mid \rho) > 0$, поскольку $(\rho \mid \alpha) > 0$ при всех $\alpha \in B$ (гл. VI, § 1, n° 10, предложение 29 (iii)). Если μ не является R-экстремальным элементом множества $\mathscr{X}$, то существует такой корень $\alpha \in R$, что $\mu + \alpha \in \mathscr{X}$ и $\mu - \alpha \in \mathscr{X}$. Таким образом,

$$\|\mu\| < \sup(\|\mu + \alpha\|, \|\mu - \alpha\|) \leqslant \sup_{\lambda \in \mathscr{X}} \|\lambda\|,$$

и по предыдущему эта верхняя граница длин корней равна $\|\omega\|$.

(iv) $\mathscr{X} = W \, . (\mathscr{X} \cap P_{++})$ вследствие гл. VI, § 1, n° 10. Если $\lambda \in \mathscr{X}$, то $\omega - \lambda \in Q_+$ (§ 6, n° 1, предложение 1). Если $\lambda \in P_{++}$ и $\omega - \lambda \in Q_+$, то $\lambda \in \mathscr{X}$ (следствие 2 предложения 3).

Следствие. *Пусть $\mathscr{X}$ — конечное R-насыщенное подмножество множества P. Тогда существует конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, множество весов которого совпадает с $\mathscr{X}$.*

Так как множество $\mathscr{X}$ устойчиво относительно действия группы W, то $\mathscr{X}$ совпадает с наименьшим R-насыщенным множеством, содержащим $\mathscr{X} \cap P_{++}$. По предложению 5(i) $\mathscr{X}$ является множеством весов модуля $\bigoplus_{\lambda \in \mathscr{X} \cap P_{++}} E(\lambda)$.

Замечание 2. Напомним (гл. VI, § 1, n°6, следствие 3 предложения 17), что существует единственный элемент w_0 группы W, который переводит базис B в базис $-B$; имеет место равенство $w_0^2 = 1$, и элемент $-w_0$ сохраняет отношение порядка в множестве P. Отметив это, предположим, что V — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, а ω — его старший вес. Тогда $w_0(\omega)$ — младший вес модуля V, и его кратность равна 1.

3. *Микровеса*

Предложение 6. *Пусть $\lambda \in P$ и $\mathscr{X}$ — наименьшее R-насыщенное подмножество множества P, содержащее вес λ. Выберем норму $\|.\|$ так же, как в предложении* 5. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) $\mathscr{X} = W . \lambda$;

(ii) *все элементы множества $\mathscr{X}$ имеют одинаковую длину*;

(iii) $\lambda(H_\alpha) \in \{0, 1, -1\}$ *для каждого корня* $\alpha \in R$.

Каждое непустое R-насыщенное подмножество множества P содержит элемент λ, удовлетворяющий предыдущим условиям.

Введем следующее условие:

(ii′) при всех $\alpha \in R$ и целых числах t, содержащихся между 0 и $\lambda(H_\alpha)$,

$$\|\lambda - t\alpha\| \geqslant \|\lambda\|.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (ii′). Это очевидно.

(ii′) $\Rightarrow$ (iii). Предположим, что выполнено условие (ii′). Пусть $\alpha \in R$. Тогда имеет место равенство $\|\lambda\| = \|\lambda - \lambda(H_\alpha)\alpha\|$. Следовательно, для всех целых чисел t, содержащихся строго между 0 и $\lambda(H_\alpha)$, выполнено неравенство $\|\lambda - t\alpha\| < \|\lambda\|$, поэтому таких чисел нет, откуда вытекает, что $|\lambda(H_\alpha)| \leqslant 1$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что условие (iii) выполнено. Пусть $w \in W$ и $\alpha \in R$. Имеем $(w\lambda)(H_\alpha) = \lambda(H_{w^{-1}\alpha}) \in \{0, 1, -1\}$. Если t — целое число, содержащееся между 0 и $(w\lambda)(H_\alpha)$, то вес $w\lambda - t\alpha$ равен или $w\lambda$, или $s_\alpha(w\lambda)$. Это доказывает, что множество $W . \lambda$ является R-насыщенным, откуда $\mathscr{X} = W . \lambda$.

Пусть $\mathscr{Y}$ — непустое R-насыщенное подмножество множества P. В $\mathscr{Y}$ существует вес λ минимальной длины. Ясно, что вес λ удовлетворяет условию (ii′), откуда вытекает последнее утверждение предложения.

Предложение 7. *Пусть V — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, $\mathscr{X}$ — множество его весов и λ — максимальный элемент множества $\mathscr{X}$* (см. предложение 5(i)). *Тогда условия* (i), (ii), (iii) *предложения* 6 *эквивалентны следующему условию*:

(iv) *для всех корней $\alpha \in R$ и всех элементов $x \in \mathfrak{g}^\alpha$ имеет место равенство $(x_V)^2 = 0$.*

Если это условие выполнено, то все веса модуля V имеют кратность 1.

Если выполнено условие (i), то $\mathscr{X} = W.\lambda$ и все веса модуля V имеют ту же кратность, что и вес λ (следствие 2 предложения 2), т. е. кратность 1. Кроме того, если $w \in W$ и $\alpha \in R$, то вес $w(\lambda) + t\alpha$ может быть весом модуля V, только если $|t| \leqslant 1$. Поэтому, если $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, то

$$(x_V)^2 \left(V^{w(\lambda)}\right) \subset V^{w(\lambda)+2\alpha} = 0,$$

откуда следует, что $(x_V)^2 = 0$. Это доказывает импликацию (i) $\Rightarrow$ (iv).

Обратно, предположим, что выполняется условие (iv). Пусть $\alpha \in R$. Снабдим V структурой $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуля, определенной элементами X_α, $X_{-\alpha}$, H_α алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Из условия (iv), примененного к элементу $x = X_\alpha$, следует, что веса $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуля V принадлежат множеству $\{0, 1, -1\}$ (см. § 1, n°2, следствие предложения 2). В частности, $\lambda(H_\alpha) \in \{0, 1, -1\}$, откуда вытекает, что (iv) $\Rightarrow$ (iii).

Предложение 8. *Предположим, что $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ элементы базиса B, а через $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_l$ — соответствующие фундаментальные веса. Пусть $H = n_1 H_{\alpha_1} + \ldots + n_l H_{\alpha_l}$ — старший корень дуальной системы $R^\vee$ и J — множество таких индексов $i \in \{1, \ldots, l\}$, что $n_i = 1$. Пусть $\lambda \in P_{++} - \{0\}$. Тогда условия* (i), (ii), (iii) *предложения* 6 *эквивалентны каждому из следующих условий*:

(v) $\lambda(H) = 1$;

(vi) *существует такой индекс $i \in J$, что $\lambda = \bar{\omega}_i$.*

Веса $\bar{\omega}_i$ при $i \in J$ образуют в группе $P(R)$ систему представителей ненулевых элементов факторгруппы $P(R)/Q(R)$.

Пусть $\lambda = u_1\bar{\omega}_1 + \ldots + u_l\bar{\omega}_l$, где $u_1, \ldots, u_l$ — целые числа $\geqslant 0$, не все равны нулю. Имеет место равенство $\lambda(H) = u_1 n_1 + \ldots + u_l n_l$, причем $n_1 \geqslant 1, \ldots, n_l \geqslant 1$, откуда сразу следует эквивалентность условий (v) и (vi). С другой стороны, $\lambda(H) = \sup_{\alpha \in R_+} \lambda(H_\alpha)$ и $\lambda(H) > 0$, поскольку λ — ненулевой элемент множества P_{++}. Следовательно, условие (v) эквивалентно условию, что $\lambda(H_\alpha) \in \{0, 1\}$ для всех $\alpha \in R_+$, т. е. условию (iii) из предложения 6.

Последнее утверждение предложения 8 вытекает из следствия предложения 6 гл. VI, § 2, n° 3.

Определение 1. *Предположим, что* $\mathfrak{g}$ — *простая алгебра Ли.* ***Микровесом расщепленной алгебры Ли*** $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ***называется*** *элемент из множества* $P_{++} - \{0\}$, *удовлетворяющий эквивалентным условиям* (i), (ii), (iii), (iv), (v) *и* (vi) *предложений* 6, 7 *и* 8.

Замечание. Предположим, что $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Пусть $\Sigma'^{\vee}$ — граф Кокстера аффинной группы Вейля $W_a(R^{\vee})$. Напомним, что вершинами графа $\Sigma'^{\vee}$ являются вершины графа Кокстера $\Sigma^{\vee}$ группы $W(R^{\vee})$ и дополнительная вершина 0. Группа $A(R^{\vee})$ действует на графе $\Sigma'^{\vee}$, оставляя вершину 0 неподвижной. Группа $\mathrm{Aut}(\Sigma'^{\vee})$ канонически изоморфна полупрямому произведению группы $A(R^{\vee})/W(R^{\vee})$ на группу Γ_C (см. гл. VI, § 2, n° 3, и гл. VI, § 4, n° 3); очевидно, что $\mathrm{Aut}(\Sigma'^{\vee})(0) = \Gamma_C(0)$; следовательно, множество $\Gamma_C(0)$ состоит из 0 и вершин графа $\Sigma^{\vee}$, соответствующих весам $\bar{\omega}_i$ при $i \in J$ (см. гл. VI, 2, предложение 5 и замечание 1 из n° 3). Подводя итог, можно сказать, что *микровесами будут фундаментальные веса, соответствующие тем вершинам графа* $\Sigma^{\vee}$, *которые можно получить из вершины* 0 *при действии элементами группы* $\mathrm{Aut}(\Sigma'^{\vee})$.

В обозначениях гл. VI, таблицы I—IX, из предыдущего вытекает, что существуют следующие микровеса:

для типа $A_l\ (l \geqslant 1)$: $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_l$;
для типа $B_l\ (l \geqslant 2)$: $\bar{\omega}_1$;
для типа $C_l\ (l \geqslant 2)$: $\bar{\omega}_l$:
для типа $D_l\ (l \geqslant 3)$: $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_{l-1}, \bar{\omega}_l$;
для типа E_6: $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_6$;
для типа E_7: $\bar{\omega}_7$.
Для типов E_8, F_4 и G_2 нет микровесов.

4. Тензорные произведения $\mathfrak{g}$-модулей

Пусть E, F суть $\mathfrak{g}$-модули. Тогда $E^{\lambda} \otimes F^{\mu} \subset (E \otimes F)^{\lambda+\mu}$ при любых $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ (гл. VII, § 1, n° 1, предложение 2 (ii)). Если модули E и F конечномерны, то $E = \sum_{\lambda \in P} E^{\lambda}$ и $F = \sum_{\mu \in P} F^{\mu}$; следовательно,

$$(E \otimes F)^{\nu} = \sum_{\lambda,\ \mu \in P,\ \lambda+\mu=\nu} E^{\lambda} \otimes F^{\mu}.$$

Таким образом, модуль $E \otimes F$ с естественной градуировкой типа P равен тензорному произведению градуированных модулей E и F типа P.

Предложение 9. *Пусть E, F — простые конечномерные $\mathfrak{g}$-модули, старшие веса которых равны соответственно λ и μ.*

(i) *Компонента со старшим весом $\lambda+\mu$ — простой подмодуль в модуле $E\otimes F$, порожденный подпространством $(E\otimes F)^{\lambda+\mu}=E^{\lambda}\otimes F^{\mu}$.*

(ii) *У всех простых подмодулей модуля $E\otimes F$ старшие веса не превосходят $\lambda+\mu$* (см. § 9, предложение 2).

Если $\alpha,\ \beta\in P$ и $E^{\alpha}\otimes F^{\beta}\neq 0$, то $\alpha\leqslant\lambda$ и $\beta\leqslant\mu$. Следовательно, пространство $(E\otimes F)^{\lambda+\mu}$ совпадает с $E^{\lambda}\otimes F^{\mu}$, его размерность равна 1, а $\lambda+\mu$ — старший вес модуля $E\otimes F$. Все ненулевые элементы пространства $E^{\lambda}\otimes F^{\mu}$ примитивны. По предложению 4 из § 6, n°2, длина изотипной компоненты старшего веса $\lambda+\mu$ в модуле $E\otimes F$ равна 1.

Замечание. Воспользуемся обозначениями из предложения 9. Пусть C — изотипная компонента со старшим весом $\lambda+\mu$ в модуле $E\otimes F$. Тогда C зависит только от модулей E и F и не зависит от выбора подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ и базиса B. Иначе говоря, пусть $\mathfrak{h}'$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, R'—система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}')$, B' — базис системы корней R'. Пусть λ', μ' — старшие веса модулей E и F соответственно относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}'$ и базиса B', и пусть C' — изотипная компонента старшего веса $\lambda'+\mu'$ в модуле $E\otimes F$. Тогда $C'=C$. Действительно, чтобы это проверить, можно, расширив основное поле, считать поле k алгебраически замкнутым. Тогда существует автоморфизм $s\in\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, который переводит $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{h}'$, R в R' и B в B'. Пусть $S\in\mathbf{SL}(E\otimes F)$ — автоморфизм, обладающий свойствами, перечисленными в предложении 2 из n°1. Тогда $S\left((E\otimes F)^{\lambda+\mu}\right)=(E\otimes F)^{\lambda'+\mu'}$ и $S(C)=C$. Следовательно, $(E\otimes F)^{\lambda'+\mu'}\subset C'\cap S(C)=C'\cap C$, откуда вытекает, что $C'=C$. Таким образом, каждым двум классам простых конечномерных модулей можно канонически поставить в соответствие третий класс; иначе говоря, определен закон композиции на множестве $\mathfrak{S}_{\mathfrak{g}}$ классов простых конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей. Множество $\mathfrak{S}_{\mathfrak{g}}$ с этой структурой канонически изоморфно аддитивному моноиду P_{++}.

Следствие 1. *Пусть $(\bar{\omega}_{\alpha})_{\alpha\in B}$ — семейство фундаментальных весов относительно базиса B. Пусть $\lambda=\sum_{\alpha\in B}m_{\alpha}\bar{\omega}_{\alpha}\in P_{++}$. Обозначим через E_{α} простой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $\bar{\omega}_{\alpha}$ для любого $\alpha\in B$. В $\mathfrak{g}$-модуле $\bigotimes_{\alpha\in B}\left(\bigotimes^{m_{\alpha}}E_{\alpha}\right)$ изотипная компонента со старшим весом λ имеет длину* 1.

Это получается из предложения 9 индукцией по $\sum_{\alpha\in B}m_{\alpha}$.

Следствие 2. *Предположим, что поле k равно $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или ультраметрическому полному недискретному полю. Пусть G — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что для каждого фундаментального представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует такое линейное аналитическое представление ρ' группы G, что $\rho=$*

$=L(\rho')$. *Тогда для каждого конечномерного линейного представления* π *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *существует такое линейное аналитическое представление* π' *группы* G, *что* $\pi=L(\pi')$.

Воспользуемся обозначениями из следствия 1. Тогда существует такое представление σ группы Ли G в пространстве $X=\bigotimes_{\alpha\in B}\left(\bigotimes^{m_\alpha}E_\alpha\right)$, что представление $L(\sigma)$ согласовано со структурой $\mathfrak{g}$-модуля на пространстве X (гл. III, § 3, n° 11, следствие 3 предложения 41). Пусть C — изотипная компонента со старшим весом λ в пространстве X. С учетом предложения 40 из гл. III, § 3, n° 11, достаточно доказать, что компонента C устойчива относительно группы $\sigma(G)$. Пусть $g\in G$ и $\varphi=\mathrm{Ad}\,(g)$. Для всех элементов $a\in\mathfrak{g}$ имеет место равенство $\sigma(g)\,a_X\,\sigma(g)^{-1}=(\varphi(a))_X$. С другой стороны, φ — автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, который переводит $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{h}'$, R — в $R'=R(\mathfrak{g},\mathfrak{h}')$, базис B — в базис B' системы корней R' и вес $\bar{\omega}_\alpha$ — в старший вес $\bar{\omega}'_\alpha$ модуля E_α относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}'$ и базиса B' (поскольку автоморфизм φ переводит E_α в $\mathfrak{g}$-модуль, изоморфный E_α). Следовательно, автоморфизм φ переводит вес λ в вес $\sum m_\alpha\bar{\omega}'_\alpha$. Ввиду приведенного выше замечания мы получаем, что $\sigma(\mathfrak{g})(C)=C$.

Предложение 10. *Пусть* λ, $\mu\in P_{++}$ *и* E, F, G — *простые* $\mathfrak{g}$-*модули со старшими весами* λ, μ *и* $\lambda+\mu$ *соответственно. Пусть* $\mathscr{X}$ (соотв. $\mathscr{X}'$, $\mathscr{X}''$) — *множество весов модуля* E (соотв. F, G). *Тогда* $\mathscr{X}''=\mathscr{X}+\mathscr{X}'$.

Так как $E=\bigoplus_{\nu\in P}E^\nu$, $F=\bigoplus_{\sigma\in P}F^\sigma$, то модуль $E\otimes F$ есть прямая сумма подпространств

$$(E\otimes F)^\tau=\sum_{\nu+\sigma=\tau}E^\nu\otimes F^\sigma.$$

По предложению 9 модуль G отождествляется с $\mathfrak{g}$-подмодулем модуля $E\otimes F$, поэтому $\mathscr{X}''\subset\mathscr{X}+\mathscr{X}'$. Имеет место равенство $G^\tau=G\cap(E\otimes F)^\tau$ и достаточно показать, что $G\cap(E\otimes F)^{\nu+\sigma}\neq0$ для $\nu\in\mathscr{X}$ и $\sigma\in\mathscr{X}'$. Пусть $(e_1,\ldots,e_n)$ (соотв. $(f_1,\ldots,f_p)$) — базис модуля E (соотв. модуля F), образованный элементами, каждый из которых принадлежит некоторому пространству E^ν (соотв. F^σ), причем $e_1\in E^\lambda$ (соотв. $f_1\in F^\mu$). Элементы $e_i\otimes f_j$ образуют базис пространства $E\otimes F$. Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда существует такая пара (i,j), что у всех элементов модуля G координата, занумерованная индексом (i,j), равна нулю. Пусть U — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$, U' — пространство, дуальное к U, а c — копроизведение в алгебре U. Пусть через $x_i(u)$ (соотв. $y_j(u)$)

обозначается координата с индексом i (соотв. j) элемента $u(e_1)$ (соотв. $u(f_1)$) для любого $u \in U$; пусть $z_{ij}(u)$ — координата с индексом (i, j) элемента $u(e_1 \otimes f_1)$. Получаем, что x_i, y_j, $z_{ij} \in U'$. Так как элемент e_1 порождает $\mathfrak{g}$-модуль E, то $x_i \neq 0$ и, аналогично, $y_j \neq 0$. По определению $\mathfrak{g}$-модуля $E \otimes F$ (гл. I, § 3, n° 2), если $c(u) = \sum u_s \otimes u'_s$, то

$$z_{ij}(u) = \sum_s x_i(u_s) \cdot y_j(u'_s) = \langle c(u),\ x_i \otimes y_j \rangle.$$

Другими словами, z_{ij} является произведением элементов x_i и y_j в алгебре U'. Так как эта алгебра не имеет делителей нуля (гл. II, § 1, n° 5, предложение 10), то $z_{ij} \neq 0$. Поскольку для любого элемента $u \in U$ выполняется включение $u(e_1 \otimes f_1) \in G$, мы пришли к противоречию.

5. *Дуальный $\mathfrak{g}$-модуль*

Пусть E, F суть $\mathfrak{g}$-модули. Напомним (гл. II, § 3, n° 3), что пространство $\mathrm{Hom}_k(E, F)$ снабжено канонической структурой $\mathfrak{g}$-модуля. Пусть φ — элемент веса λ в модуле $\mathrm{Hom}_k(E, F)$. Если $\mu \in \mathfrak{h}^*$, то $\varphi(E^{\mu}) \subset F^{\lambda+\mu}$ (гл. VII, § 1, n° 1, предложение 2 (ii)). Если E и F — конечномерные модули, то элементы веса λ в модуле $\mathrm{Hom}_k(E, F)$ — это градуированные гомоморфизмы степени λ в смысле *Alg.*, chap. II, § 11, n° 2, définition 4.

Предложение 11. *Пусть E — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Рассмотрим $\mathfrak{g}$-модуль $E^* = \mathrm{Hom}_k(E, k)$.*

(i) *Для того чтобы элемент $\lambda \in P$ был весом модуля E^*, необходимо и достаточно, чтобы элемент $-\lambda$ был весом модуля E. Кратность веса λ в модуле E^* равна кратности веса $-\lambda$ в модуле E.*

(ii) *Если модуль E прост и ω — его старший вес, то модуль E^* прост и его старший вес равен $-w_0(\omega)$* (см. n° 2, *замечание* 2).

Рассмотрим поле k как тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль, все элементы которого имеют вес 0. Согласно сказанному выше, элементы модуля E^* веса λ являются гомоморфизмами модуля E в модуль k, равными нулю на пространствах E^{μ} при $\mu \neq -\lambda$. Это доказывает утверждение (i). Если модуль E прост, то и E^* прост (гл. I, § 3, n° 3), и второе утверждение вытекает из замечания 2 n° 2.

Замечания. 1) Пусть модули E и E^* такие же, как в предложении 11, а автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ таков, что в обозначениях из § 5, n° 1, $\varepsilon(\sigma) = w_0$ (§ 2, n° 2, следствие теоремы 2).

Пусть ρ и ρ' — представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$, ассоциированные с модулями E и E^*. Тогда представление $\rho\circ\sigma$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ неприводимо, а его старший вес равен $-w_0(\omega)$; следовательно, представление $\rho\circ\sigma$ эквивалентно представлению ρ'.

2) Предположим, что $w_0=-1$. Тогда каждый конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль E изоморфен модулю E^*. Напомним, что если $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, то $w_0=-1$ в следующих случаях: $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа A_1, B_l ($l\geqslant 2$), C_l ($l\geqslant 2$), D_l (l четное $\geqslant 4$), E_7, E_8, F_4 или G_2 (гл. VI, таблицы).

Лемма 2. *Если* $h^0=\sum_{\alpha\in R_+}\mathrm{H}_\alpha$, *то* $h^0=\sum_{\alpha\in B}a_\alpha\mathrm{H}_\alpha$, *где* a_α — *целые числа* $\geqslant 1$. *Пусть* $(b_\alpha)_{\alpha\in B}$, $(c_\alpha)_{\alpha\in B}$ — *такие семейства скаляров, что* $b_\alpha c_\alpha=a_\alpha$ *для всех корней* $\alpha\in B$. *Положим* $x=\sum_{\alpha\in B}b_\alpha\mathrm{X}_\alpha$, $y=\sum_{\alpha\in B}c_\alpha\mathrm{X}_{-\alpha}$. *Тогда существует такой гомоморфизм* φ *алгебры Ли* $\mathfrak{sl}(2, k)$ *в алгебру Ли* $\mathfrak{g}$, *что* $\varphi(\mathrm{H})=h^0$, $\varphi(\mathrm{X}_+)=x$, $\varphi(\mathrm{X}_-)=y$.

Тот факт, что a_α — целые числа $\geqslant 1$, следует из того, что $(\mathrm{H}_\alpha)_{\alpha\in B}$ — базис системы корней $(\mathrm{H}_\alpha)_{\alpha\in R}$ (см. гл. VI, § 1, n° 5, *замечание* 5). Для любого корня $\alpha\in B$ имеет место равенство

$$\alpha(h^0)=2 \tag{1}$$

(гл. VI, § 1, n° 10, следствие предложения 29), значит;

$$[h^0, x]=\sum_{\alpha\in B}b_\alpha\alpha(h^0)\,\mathrm{X}_\alpha=2x, \tag{2}$$

$$[h^0, y]=\sum_{\alpha\in B}c_\alpha(-\alpha(h^0))\,\mathrm{X}_{-\alpha}=-2y. \tag{3}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}[x, y]&=\sum_{\alpha,\,\beta\in B}b_\alpha c_\beta[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\beta}]=\\ &=\sum_{\alpha\in B}b_\alpha c_\alpha[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}]=-\sum_{\alpha\in B}a_\alpha\mathrm{H}_\alpha=-h^0,\end{aligned} \tag{4}$$

откуда следует существование гомоморфизма φ.

Предложение 12. *Пусть* E — *простой конечномерный* $\mathfrak{g}$-*модуль,* ω — *его старший вес, а* $\mathscr{B}$ — *векторное пространство* $\mathfrak{g}$-*инвариантных билинейных форм на* E. *Пусть* m — *целое число, равное* $\sum_{\alpha\in R_+}\omega(\mathrm{H}_\alpha)$, *т. е.* $m/2$ *равно сумме координат веса* ω *относительно базиса* B (гл. VI, § 1, n° 10, следствие предложения 29). *Пусть* w_0 — *такой элемент группы* W, *что* $w_0(B)=-B$.

(i) *Если* $w_0(\omega)\neq-\omega$, *то* $\mathscr{B}=0$.

(ii) *Предположим, что* $w_0(\omega) = -\omega$. *Тогда размерность пространства* $\mathscr{B}$ *равна* 1 *и все ненулевые элементы пространства* $\mathscr{B}$ *невырожденны. Если* m — *четное* (соотв. *нечетное*) *число, то все формы из* $\mathscr{B}$ *симметрические* (соотв. *знакопеременные*).

а) Пусть $\Phi \in \mathscr{B}$. Отображение φ модуля E в модуль E^*, определенное равенством $\varphi(x)(y) = \Phi(x, y)$ для $x, y \in E$, — гомоморфизм $\mathfrak{g}$-модулей. Если $\Phi \neq 0$, то $\varphi \neq 0$; по лемме Шура φ является изоморфизмом, и, следовательно, форма Φ невырожденна. Следовательно, $\mathfrak{g}$-модуль E изоморфен $\mathfrak{g}$-модулю E^*, так что $w_0(\omega) = -\omega$. Таким образом, мы доказали утверждение (i).

б) Предположим теперь, что $w_0(\omega) = -\omega$. Тогда модуль E изоморфен модулю E^*. Векторное пространство $\mathscr{B}$ изоморфно пространству $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(E, E^*)$, а следовательно, пространству $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(E, E)$, размерность которого равна 1 (§ 6, n° 1, предложение 1 (iii)). Следовательно, $\dim \mathscr{B} = 1$. Вследствие п. а) каждый ненулевой элемент Φ пространства $\mathscr{B}$ невырожден. Для $x, y \in E$ положим $\Phi_1(x, y) = \Phi(y, x)$. По предыдущему существует такой элемент $\lambda \in k$, что для любых $x, y \in E$ выполняется равенство $\Phi_1(x, y) = \lambda\Phi(x, y)$. Тогда $\Phi(y, x) = \lambda\Phi(x, y) = \lambda^2\Phi(y, x)$, откуда следует, что $\lambda^2 = 1$ и $\lambda = \pm 1$. Таким образом, форма Φ или симметрическая, или знакопеременная.

в) По предложению 9 (v) из гл. VII, § 1, n° 3, пространства E^λ и E^μ ортогональны относительно формы Φ, если $\lambda + \mu \neq 0$. Поскольку форма Φ невырожденна, то пространства E^ω и $E^{-\omega}$ не ортогональны относительно формы Φ.

г) Существует такой гомоморфизм φ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ на подалгебру Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, который переводит элемент H в элемент $\sum_{\alpha \in R_+} H_\alpha$ (лемма 2). Рассмотрим E как $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль, структура которого задается этим гомоморфизмом. Тогда элементы пространства E^λ имеют вес $\lambda\left(\sum_{\alpha \in R_+} H_\alpha\right)$. Если $\lambda \in P$ — такой вес, что $E^\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq \omega$, $\lambda \neq -\omega$, то $-\omega < \lambda < \omega$; следовательно,

$$-m = -\omega\left(\sum_{\alpha \in R_+} H_\alpha\right) < \lambda\left(\sum_{\alpha \in R_+} H_\alpha\right) < \omega\left(\sum_{\alpha \in R_+} H_\alpha\right) = m.$$

Пусть G — изотипная компонента типа $V(m)$ в $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуле E. Тогда длина модуля G равна 1 и G содержит пространства E^ω и $E^{-\omega}$. Вследствие п. в) ограничение формы Φ на модуль G равно нулю. Ввиду замечания 3 из § 1, n° 3, число m четно или нечетно в зависимости от того, является это ограничение симметрической или знакопеременной формой. С учетом п. б) это завершает доказательство.

Определение 2. *Конечномерное неприводимое представление* ρ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *в пространстве* E *называется ортогональным* (*симплектическим*), *если на* E *существует симметрическая* (соотв. *знакопеременная*) *невырожденная инвариантная относительно представления* ρ *билинейная форма.*

6. Кольцо представлений

Пусть $\mathfrak{a}$ — конечномерная алгебра Ли. Пусть $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}}$ (соотв. $\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}$) — множество классов конечномерных $\mathfrak{a}$-модулей (соотв. простых конечномерных $\mathfrak{a}$-модулей). Пусть $\mathcal{R}(\mathfrak{a})$ — свободная коммутативная группа $\mathbf{Z}^{\mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}}$. Обозначим через $[E]$ класс конечномерного $\mathfrak{a}$-модуля E. Пусть F — конечномерный $\mathfrak{a}$-модуль, и пусть

$$(F_n, F_{n-1}, \ldots, F_0)$$

— последовательность факторов ряда Жордана — Гёльдера модуля F. Элемент $\sum_{i=1}^{n} [F_i/F_{i-1}]$ группы $\mathcal{R}(\mathfrak{a})$ зависит только от модуля F и не зависит от ряда Жордана — Гёльдера; обозначим этот элемент через $[F]$. Если

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

— точная последовательность конечномерных $\mathfrak{a}$-модулей, то $[F] = [F'] + [F'']$.

Пусть F — полупростой конечномерный $\mathfrak{a}$-модуль; для каждого $E \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}$ пусть n_E — длина изотипной компоненты типа E в модуле F; тогда $[F] = \sum_{E \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{a}}} n_E \cdot [E]$. Если F, F' — полупростые конечномерные $\mathfrak{a}$-модули и если $[F] = [F']$, то модули F и F' изоморфны.

Лемма 3. *Пусть* G — *коммутативная группа с аддитивной записью закона композиции и* φ: $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}} \to G$ — *некоторое отображение. Для каждого конечномерного* $\mathfrak{a}$-*модуля* F *мы, допуская некоторую вольность, обозначим через* $\varphi(F)$ *образ класса модуля* F *при отображении* φ. *Предположим, что для каждой точной последовательности конечномерных* $\mathfrak{a}$-*модулей*

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

имеем $\varphi(F) = \varphi(F') + \varphi(F'')$. *Тогда существует единственный гомоморфизм* θ: $\mathcal{R}(\mathfrak{a}) \to G$, *такой, что* $\theta([F]) = \varphi(F)$ *для каждого конечномерного* $\mathfrak{a}$-*модуля* F.

Существует единственный гомоморфизм θ группы $\mathcal{R}(\mathfrak{a})$ в группу G, такой, что $\theta([E]) = \varphi(E)$ для любого простого конечномерного $\mathfrak{a}$-модуля E. Пусть F — конечномерный $\mathfrak{a}$-модуль, а $(F_n, F_{n-1}, \ldots, F_0)$ — последовательность факторов ряда Жордана — Гёльдера модуля F; если $n > 0$, то, проводя индукцию по n, получим, что

$$\theta([F]) = \sum_{i=1}^{n} \theta([F_i/F_{i-1}]) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(F_i/F_{i-1}) = \varphi(F).$$

Если $n = 0$, то $[F] = 0$, следовательно, $\theta([F]) = 0$; с другой стороны, рассматривая точную последовательность $0 \to 0 \to 0 \to \to 0 \to 0$, мы видим, что $\varphi(0) = 0$.

Пример. Положим $G = \mathbf{Z}$ и $\varphi(F) = \dim F$. Соответствующий гомоморфизм группы $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$ в группу $\mathbf{Z}$ обозначается через $\dim$. Пусть c — класс тривиального 1-мерного $\mathfrak{a}$-модуля, и пусть ψ — гомоморфизм $n \mapsto nc$ группы $\mathbf{Z}$ в группу $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$. Ясно, что

$$\dim \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbf{Z}},$$

и, значит, $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$ является прямой суммой групп $\operatorname{Ker} \dim$ и $\mathbf{Z}c$.

Лемма 4. На аддитивной группе $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$ существует единственное умножение, дистрибутивное по отношению к сложению и такое, что $[E][F] = [E \otimes F]$ для любых конечномерных $\mathfrak{a}$-модулей E и F. Таким образом, группа $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$ наделяется структурой коммутативного кольца. Класс тривиального 1-мерного $\mathfrak{a}$-модуля является в этом кольце единичным элементом.

Единственность очевидна. В группе $\mathscr{R}(\mathfrak{a}) = \mathbf{Z}^{(\mathfrak{S}_\mathfrak{a})}$ существует такое коммутативное и дистрибутивное по отношению к сложению умножение, что $[E][F] = [E \otimes F]$ при $E, F \in \mathfrak{S}_\mathfrak{a}$. Пусть E_1, E_2 — конечномерные $\mathfrak{a}$-модули, l_1 и l_2 — их длины. Докажем, что $[E_1][E_2] = [E_1 \otimes E_2]$, индукцией по числу $l_1 + l_2$. Это очевидно, если $l_1 + l_2 \leqslant 2$. С другой стороны, пусть F_1 — подмодуль модуля E_1, отличный от 0 и E_1. Тогда по предположению индукции

$$[F_1][E_2] = [F_1 \otimes E_2] \quad \text{и} \quad [E_1/F_1][E_2] = [(E_1/F_1) \otimes E_2].$$

С другой стороны, модуль $(E_1 \otimes E_2)/(F_1 \otimes E_2)$ изоморфен $(E_1/F_1) \otimes \otimes E_2$. Следовательно,

$$[E_1][E_2] = ([E_1/F_1] + [F_1]) \cdot [E_2] = \\ = [(E_1/F_1) \otimes E_2] + [F_1 \otimes E_2] = [E_1 \otimes E_2],$$

что доказывает наше утверждение. Отсюда сразу следует, что определенное выше умножение ассоциативно, поэтому на $\mathscr{R}(\mathfrak{a})$ определяется структура коммутативного кольца. Наконец, ясно, что класс тривиального 1-мерного $\mathfrak{a}$-модуля будет в этом кольце единичным элементом.

Лемма 5. *В кольце $\mathcal{R}(\mathfrak{a})$ существует единственный инволютивный автоморфизм $X \mapsto X^*$, такой, что для каждого конечномерного $\mathfrak{a}$-модуля E имеет место равенство $[E]^* = [E^*]$.*

Единственность очевидна. По лемме 3 существует такой гомоморфизм $X \mapsto X^*$ аддитивной группы $\mathcal{R}(\mathfrak{a})$ в себя, что $[E]^* = [E^*]$ для каждого конечномерного $\mathfrak{a}$-модуля E. Имеет место равенство $(X^*)^* = X$, и, следовательно, этот гомоморфизм биективен. Он является автоморфизмом кольца $\mathcal{R}(\mathfrak{a})$, так как модуль $(E \otimes F)^*$ изоморфен модулю $E^* \otimes F^*$ при любых конечномерных $\mathfrak{a}$-модулях E и F. Ч. Т. Д.

Пусть $U(\mathfrak{a})$ — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{a}$, а $U(\mathfrak{a})^*$ — пространство, дуальное к пространству $U(\mathfrak{a})$. Напомним (гл. II, § 1, n°5), что структура коалгебры на $U(\mathfrak{a})$ определяет на $U(\mathfrak{a})^*$ структуру ассоциативной коммутативной алгебры с единицей. Для каждого конечномерного $\mathfrak{a}$-модуля E отображение $u \mapsto \operatorname{Tr}(u_E)$ алгебры $U(\mathfrak{a})$ в поле k — это элемент τ_E пространства $U(\mathfrak{a})^*$. Если $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ — точная последовательность конечномерных $\mathfrak{a}$-модулей, то $\tau_E = \tau_{E'} + \tau_{E''}$. По лемме 3 существует, и притом единственный, гомоморфизм, обозначаемый через Tr, аддитивной группы $\mathcal{R}(\mathfrak{a})$ в группу $U(\mathfrak{a})^*$, такой, что $\operatorname{Tr}[E] = \tau_E$ для любого конечномерного $\mathfrak{a}$-модуля E. Если через k обозначить тривиальный 1-мерный $\mathfrak{a}$-модуль, то легко проверить, что $\operatorname{Tr}[k]$ — единичный элемент кольца $U(\mathfrak{a})^*$. Наконец, пусть E и F — конечномерные $\mathfrak{a}$-модули. Пусть $u \in U(\mathfrak{a})$ и c — копроизведение в коалгебре $U(\mathfrak{a})$. По определению U-модуля $E \otimes F$ (гл. I, § 3, n°2), если $c(u) = \sum_i u_i \otimes u'_i$, то

$$u_{E \otimes F} = \sum_i (u_i)_E \otimes (u'_i)_F.$$

Следовательно,

$$\tau_{E \otimes F}(u) = \sum_i \operatorname{Tr}(u_i)_E \operatorname{Tr}(u'_i)_F =$$
$$= \sum_i \tau_E(u_i)\, \tau_F(u'_i) = (\tau_E \otimes \tau_F)(c(u)).$$

Это означает, что $\tau_E \tau_F = \tau_{E \otimes F}$. Таким образом, отображение $\operatorname{Tr}\colon \mathcal{R}(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a})^*$ — *гомоморфизм колец*.

Пусть $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ — алгебры Ли, f — гомоморфизм $\mathfrak{a}_1$ в $\mathfrak{a}_2$. По каждому конечномерному $\mathfrak{a}_2$-модулю E определяется с помощью гомоморфизма f некоторый $\mathfrak{a}_1$-модуль и, следовательно, элементы колец $\mathcal{R}(\mathfrak{a}_2)$ и $\mathcal{R}(\mathfrak{a}_1)$, которые мы временно обозначим через $[E]_2$ и $[E]_1$. По лемме 3 существует единственный такой гомоморфизм группы $\mathcal{R}(\mathfrak{a}_2)$ в группу $\mathcal{R}(\mathfrak{a}_1)$ (обозначаемый через $\mathcal{R}(f)$), что $\mathcal{R}(f)[E]_2 = [E]_1$ для любого конечномерного $\mathfrak{a}_2$-модуля E. При этом гомоморфизм $\mathcal{R}(f)$ является гомоморфизмом колец.

Если $U(\mathfrak{f})$ — гомоморфизм алгебры $U(\mathfrak{a}_1)$ в алгебру $U(\mathfrak{a}_2)$, продолжающий гомоморфизм $\mathfrak{f}$ алгебр Ли, то следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(\mathfrak{a}_2) & \xrightarrow{\mathcal{R}(\mathfrak{f})} & \mathcal{R}(\mathfrak{a}_1) \\ \downarrow \mathrm{Tr} & & \downarrow \mathrm{Tr} \\ U(\mathfrak{a}_2)^* & \xrightarrow{{}^tU(\mathfrak{f})} & U(\mathfrak{a}_1)^* \end{array}$$

В дальнейшем в качестве алгебры Ли $\mathfrak{a}$ мы рассмотрим полупростую расщепляемую алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Кольцо $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ называется *кольцом представлений* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для каждого веса $\lambda \in P_{++}$ обозначим через $[\lambda]$ класс простого $\mathfrak{g}$-модуля $E(\lambda)$ со старшим весом λ.

7. *Характеры $\mathfrak{g}$-модулей*

Пусть Δ — коммутативный моноид с аддитивной записью закона композиции, $\mathbf{Z}[\Delta] = \mathbf{Z}^{(\Delta)}$ — алгебра моноида Δ над $\mathbf{Z}$ (*Alg.*, chap. III, § 2, n°6). Обозначим через $(e^\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ канонический базис в алгебре $\mathbf{Z}[\Delta]$. Тогда $e^{\lambda+\mu} = e^\lambda e^\mu$ при любых λ, $\mu \in \Delta$. Если 0 — нейтральный элемент моноида Δ, то e^0 — единичный элемент алгебры $\mathbf{Z}[\Delta]$; этот элемент мы будем обозначать через 1.

Пусть E есть градуированное векторное пространство над полем k с градуировкой типа Δ и $(E^\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ — эта градуировка. Если каждое пространство E^λ конечномерно, то *характером* модуля E называется элемент $(\dim E^\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ алгебры $\mathbf{Z}^\Delta$; характер обозначается через $\mathrm{ch}(E)$. Если сам модуль E конечномерен, то

$$\mathrm{ch}(E) = \sum_{\lambda \in \Delta} (\dim E^\lambda)\, e^\lambda \in \mathbf{Z}[\Delta]. \tag{5}$$

Пусть E', E, E'' суть градуированные векторные пространства с градуировкой типа Δ, подпространства E'^λ, E^λ, E''^λ которых имеют конечную размерность над полем k, и $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ — точная последовательность гомоморфизмов степени 0. Мы сразу же получаем, что

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{ch}(E') + \mathrm{ch}(E''). \tag{6}$$

В частности, если F_1, F_2 — такие векторные пространства с градуировкой типа Δ, что пространства F_1^λ и F_2^λ имеют конечную размерность над полем k, то выполнено равенство

$$\mathrm{ch}(F_1 \oplus F_2) = \mathrm{ch}(F_1) + \mathrm{ch}(F_2). \tag{7}$$

Если же пространства F_1 и F_2 конечномерны, то верно также равенство

$$\mathrm{ch}(F_1 \otimes F_2) = \mathrm{ch}\, F_1 . \mathrm{ch} F_2. \tag{8}$$

Пример. Предположим, что $\Delta = \mathbf{N}$. Пусть T — независимая переменная. Существует единственный изоморфизм алгебры $\mathbf{Z}[\mathbf{N}]$ на алгебру $\mathbf{Z}[T]$, при котором для любого $n \in \mathbf{N}$ элемент e^n переходит в T^n. Для каждого конечномерного градуированного векторного пространства E типа $\mathbf{N}$ образ элемента $\mathrm{ch}(E)$ в алгебре $\mathbf{Z}[T]$ совпадает с многочлеиом Пуанкаре пространства E (гл. V, § 5, n° 1).

Пусть E — такой $\mathfrak{g}$-модуль, что $E = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} E^\lambda$ и каждое пространство E^λ конечномерно. Семейство $(E^\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{h}^*}$ определяет градуировку векторного пространства E. В дальнейшем мы сохраним обозначение $\mathrm{ch}(E)$ для характера пространства E, рассматриваемого как градуированное векторное пространство типа $\mathfrak{h}^*$. Характер $\mathrm{ch}(E)$ является, таким образом, элементом группы $\mathbf{Z}^{\mathfrak{h}^*}$. Если E — конечномерный модуль, то $\mathrm{ch}(E) \in \mathbf{Z}[P]$. Вследствие формулы (6) и леммы 3 из n° 6 существует единственный гомоморфизм группы $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ в группу $\mathbf{Z}[P]$, который любой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль E переводит в $\mathrm{ch}(E)$. Этот гомоморфизм мы тоже будем обозначать через ch. Соотношение (8) показывает, что ch *является гомоморфизмом кольца* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *в кольцо* $\mathbf{Z}[P]$.

Замечание. Любой элемент группы P определяет простой 1-мерный $\mathfrak{h}$-модуль Следовательно, определен гомоморфизм группы $\mathbf{Z}[P]$ в группу $\mathcal{R}(\mathfrak{h})$, который будет инъективным гомоморфизмом колец. Легко проверить, что композиция гомоморфизмов

$$\mathcal{R}(\mathfrak{g}) \to \mathbf{Z}[P] \to \mathcal{R}(\mathfrak{h})$$

совпадает с гомоморфизмом, определенным канонически вложением подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ (n° 6).

Группа Вейля W действует с помощью автоморфизмов на группе P, а следовательно, на кольце $\mathbf{Z}^P$. Для любого $\lambda \in P$ и любого $w \in W$ мы получаем равенство $we^\lambda = e^{w\lambda}$. Пусть $\mathbf{Z}[P]^W$ — подкольцо W-инвариантных элементов кольца $\mathbf{Z}[P]$.

Лемма 6. *Если* $\lambda \in P_{++}$, *то* $\mathrm{ch}[\lambda] \in \mathbf{Z}[P]^W$. *Единственный максимальный член элемента* $\mathrm{ch}[\lambda]$ (гл. VI, § 3, n° 2, определение 1) *равен* e^λ.

Первое утверждение вытекает из следствия 2 предложения 2 n° 1, а второе — из предложения 1 (ii) § 6, n° 1.

Теорема 2. (i) *Пусть* $(\bar{\omega}_\alpha)_{\alpha \in B}$ — *семейство фундаментальных весов относительно базиса* B, *а* $(T_\alpha)_{\alpha \in B}$ — *семейство независимых* *переменных. Тогда отображение* $f \mapsto f(([\bar{\omega}_\alpha])_{\alpha \in B})$ *кольца* $\mathbf{Z}[(T_\alpha)_{\alpha \in B}]$ *в кольцо* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *является изоморфизмом колец.*

(ii) *Гомоморфизм* ch *кольца* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *в кольцо* $\mathbf{Z}[P]$ *индуцирует изоморфизм кольца* $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ *на кольцо* $\mathbf{Z}[P]^W$.

(iii) *Пусть* E — *конечномерный* $\mathfrak{g}$-*модуль. Тогда, если* $\mathrm{ch}\, E = \sum_{\lambda \in R_{++}} m_\lambda \mathrm{ch}[\lambda]$, *то длина изотипной компоненты, отвечающей старшему весу* λ *модуля* E, *равна* m_λ.

Семейство $([\lambda])_{\lambda \in P_{++}}$ является базисом $\mathbf{Z}$-модуля $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$, а семейство $(\mathrm{ch}[\lambda])_{\lambda \in P_{++}}$ — базисом $\mathbf{Z}$-модуля $\mathbf{Z}[P]^W$ (лемма 6 и предложение 3 гл. VI, § 3, n°4). Это доказывает утверждения (ii) и (iii). Утверждение (i) следует из утверждения (ii), леммы 6 и теоремы 1 из гл. VI, § 3, n°4.

Следствие. *Пусть* E, E' — *конечномерные* $\mathfrak{g}$-*модули. Тогда для изоморфности модулей* E *и* E' *необходимо и достаточно, чтобы их характеры совпадали:* $\mathrm{ch}\, E = \mathrm{ch}\, E'$.

Доказательство следует из теоремы 2 (ii) и полупростоты модулей E и E'.

§ 8. Симметрические инварианты

В этом параграфе через $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *обозначается расщепленная полупростая алгебра Ли, через* W — *ее группа Вейля, а через* P — *ее группа весов.*

1. Экспонента линейной формы.

Пусть V — конечномерное векторное пространство, а $\mathrm{S}(V)$ — его симметрическая алгебра. Структура коалгебры на $\mathrm{S}(V)$ определяет на $\mathrm{S}(V)^*$ структуру ассоциативной и коммутативной алгебры (*Alg.*, chap. III, § 10, n° 4). Векторное пространство $\mathrm{S}(V)^*$ канонически отождествляется с пространством $\prod_{m \geqslant 0} \mathrm{S}^m(V)^*$, а $\mathrm{S}^m(V)^*$ канонически отождествляется с пространством m-линейных симметрических форм на пространстве V. Каноническое вложение пространства $V^* = \mathrm{S}^1(V)^*$ в алгебру $\mathrm{S}(V)^*$ определяет инъективный гомоморфизм алгебры $\mathrm{S}(V^*)$ в алгебру $\mathrm{S}(V)^*$, образом которого является алгебра $\mathrm{S}(V)^{*\mathrm{gr}} = \sum_{m \geqslant 0} \mathrm{S}^m(V)^*$ (*Alg.*, chap. III, § 11, n°5, proposition 8). Алгебры $\mathrm{S}(V^*)$ и $\mathrm{S}(V)^{*\mathrm{gr}}$ можно отождествить при помощи этого гомоморфизма; алгебру $\mathrm{S}(V^*)$ можно отождествить также с алгеброй полиномиальных функций на пространстве V (гл. VII, дополнение I, n° 1).

Элементы $(u_m) \in \prod_{m \geqslant 0} \mathrm{S}^m(V)^*$, такие, что $u_0 = 0$, образуют идеал J алгебры $\mathrm{S}(V)^*$. Алгебра $\mathrm{S}(V)^*$ снабжается J-адической топологией (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 5), относительно которой она полна, а алгебра $\mathrm{S}(V^*)$ плотна в алгебре $\mathrm{S}(V)^*$. Если $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис пространства V^*, а $T_1, \ldots, T_n$ — независимые переменные, то гомоморфизм $k[T_1, \ldots, T_n]$ в $\mathrm{S}(V^*)$, который переводит T_i в e_i^* $(1 \leqslant i \leqslant n)$, является изоморфизмом алгебр и продолжается до непрерывного изоморфизма алгебры $k[[T_1, \ldots, T_n]]$ на алгебру $\mathrm{S}(V)^*$.

При любом $\lambda \in V^*$ семейство $\lambda^n/n!$ суммируемо в алгебре $\mathrm{S}(V)^*$. Его сумма называется *экспонентой линейной формы* λ и обозначается через $\exp(\lambda)$ (в соответствии с гл. II, § 6, n° 1). Пусть $x_1, \ldots, x_n \in V$; мы получаем, что

$$\langle \exp(\lambda), x_1 \ldots x_n \rangle = \frac{1}{n!} \langle \lambda^n, x_1 \ldots x_n \rangle = \langle \lambda, x_1 \rangle \ldots \langle \lambda, x_n \rangle$$

по формуле (29) из *Alg.*, chap. III, § 11, n° 5. Отсюда сразу же следует, что $\exp(\lambda)$ — *единственный гомоморфизм алгебры* $\mathrm{S}(V)$ *в поле* k, *продолжающий* λ.

Для любых $\lambda, \mu \in V^*$ имеет место равенство $\exp(\lambda + \mu) = \exp(\lambda)\exp(\mu)$ (гл. III, § 6, n° 1, *замечание*). *Отображение* $\exp\colon V^* \to \mathrm{S}(V)^*$ *будет, таким образом, гомоморфизмом аддитивной группы пространства* V^* *в мультипликативную группу обратимых элементов алгебры* $\mathrm{S}(V)^*$. Множество $(\exp(\lambda))_{\lambda \in V^*}$ — свободное семейство в векторном пространстве $\mathrm{S}(V)^*$ (*Alg.*, chap. IV, § 7, n° 3, théorème 1).

Лемма 1. *Пусть* Π — *подгруппа аддитивной группы* V^*, *порождающая* V^* *как векторное пространство, и* m — *целое число* $\geqslant 0$. *Тогда множество* $\mathrm{pr}_m(\exp(\Pi))$ *порождает векторное пространство* $\mathrm{S}^m(V^*)$.

Согласно *Alg.*, chap. I, § 8, n° 2, proposition 2, произведение любых m элементов из V^* является линейной комбинацией над полем k элементов вида x^m, где $x \in \Pi$. Но $x^m = m!\, \mathrm{pr}_m(\exp(x))$. Ч. Т. Д.

С помощью переноса структуры любой автоморфизм пространства V определяет автоморфизмы алгебр $\mathrm{S}(V)$ и $\mathrm{S}(V)^*$. Отсюда следует, что имеются естественные линейные представления группы $\mathbf{GL}(V)$ в пространствах $\mathrm{S}(V)$ и $\mathrm{S}(V)^*$.

2. *Вложение* $k[P]$ *в* $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^*$

Отображение $p \mapsto \exp p$ группы P в $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^*$ определяет гомоморфизм аддитивной группы P в мультипликативный моноид $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^*$

(n° 1). Следовательно, существует единственный гомоморфизм ψ алгебры $k[P]$ моноида P в алгебру $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^*$, для которого

$$\psi(e^\lambda) = \exp(\lambda) \quad (\lambda \in P)$$

(мы воспользовались обозначениями из § 7, n° 7). Ввиду n° 1 ψ — инъективный гомоморфизм. С помощью переноса структуры получаем, что $\psi(w(e^\lambda)) = w(\psi(e^\lambda))$ для любого $\lambda \in P$ и любого $w \in W$. Следовательно, если через $k[P]^W$ (соотв. через $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^{*W}$) обозначить множество инвариантных относительно W элементов алгебры $k[P]$ (соотв. $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^*$), то имеет место включение $\psi(k[P]^W) \subset \mathrm{S}(\mathfrak{h})^{*W}$.

Предложение 1. *Пусть* $\mathrm{S}^m(\mathfrak{h}^*)^W$ — *множество элементов из* $\mathrm{S}^m(\mathfrak{h}^*)$, *инвариантных относительно* W. *Тогда* $\mathrm{pr}_m(\psi(k[P]^W)) = \mathrm{S}^m(\mathfrak{h}^*)^W$.

Из предыдущего ясно, что $\mathrm{pr}_m(\psi(k[P]^W)) \subset \mathrm{S}^m(\mathfrak{h}^*)^W$. Любой элемент пространства $\mathrm{S}^m(\mathfrak{h}^*)$ является линейной комбинацией над полем k элементов вида

$$\mathrm{pr}_m(\exp(\lambda)) = (\mathrm{pr}_m \circ \psi)(e^\lambda),$$

где $\lambda \in P$ (лемма 1). Следовательно, элементы пространства $\mathrm{S}^m(\mathfrak{h}^*)^W$ — это линейные комбинации элементов вида

$$\sum_{w \in W} w((\mathrm{pr}_m \circ \psi)(e^\lambda)) = (\mathrm{pr}_m \circ \psi)\Big(\sum_{w \in W} w(e^\lambda)\Big),$$

которые принадлежат $\mathrm{pr}_m(\psi(k[P]^W))$.

Предложение 2. *Пусть* E — *конечномерный* $\mathfrak{g}$-*модуль. Пусть* $U(\mathfrak{h}) = \mathrm{S}(\mathfrak{h})$ — *универсальная обертывающая алгебра подалгебры Картана* $\mathfrak{h}$. *Тогда, если* $u \in U(\mathfrak{h})$, *то имеет место равенство*

$$\mathrm{Tr}(u_E) = \langle \psi(\mathrm{ch}\, E), u \rangle.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда $u = h_1 \ldots h_m$, где $h_1, \ldots, h_m \in \mathfrak{h}$. Пусть $d_\lambda = \dim E^\lambda$ для любого $\lambda \in P$. Имеем $\mathrm{ch}\, E = \sum_\lambda d_\lambda e^\lambda$, а следовательно, $\psi(\mathrm{ch}\, E) = \sum_\lambda d_\lambda \exp(\lambda)$, и, таким образом,

$$\begin{aligned}\langle \psi(\mathrm{ch}\, E), u \rangle &= \sum_\lambda d_\lambda \langle \exp \lambda, h_1 \ldots h_m \rangle = \\ &= \sum_\lambda d_\lambda \lambda(h_1) \ldots \lambda(h_m) \quad (\text{n}^\circ\ 1) \quad = \\ &= \mathrm{Tr}\, u_E.\end{aligned}$$

Следствие 1. *Пусть* $U(\mathfrak{g})$ — *универсальная обертывающая алгебра для* $\mathfrak{g}$. *Пусть* $\zeta\colon U(\mathfrak{g})^* \to U(\mathfrak{h})^* = \mathrm{S}(\mathfrak{h})^*$ — *гомоморфизм,* *сопряженный к каноническому вложению* $U(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{g})$. *Тогда следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\text{ch}} & \mathbf{Z}[P] \\ {\scriptstyle\text{Tr}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ U(\mathfrak{g})^* & \xrightarrow{\zeta} & \mathrm{S}(\mathfrak{h})^*. \end{array}$$

Это только переформулировка предложения 2.

Следствие 2. *Пусть m — целое число $\geqslant 0$. Тогда любой элемент пространства $\mathrm{S}^m(\mathfrak{h}^*)^W$ является линейной комбинацией полиномиальных функций на подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ вида $x \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(x)^m)$, где ρ — конечномерное линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

По предложению 1 имеет место равенство $\mathrm{S}^m(\mathfrak{h}^*)^W = (\mathrm{pr}_m \circ \psi)(k[P]^W)$. Таким образом, $\mathbf{Z}[P]^W = \mathrm{ch}\,\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ (§ 7, n° 7, теорема 2 (ii)). Поэтому, согласно лемме 3 из гл. VI, § 3, n° 4, $\psi(k[P]^W)$ совпадает с подпространством векторного k-пространства $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)$, порожденного множеством $\psi(\mathrm{ch}\,\mathcal{R}(\mathfrak{g})) = \zeta(\mathrm{Tr}\,\mathcal{R}(\mathfrak{g}))$. Следовательно, $\mathrm{S}^m(\mathfrak{h}^*)^W$ совпадает с подпространством векторного пространства $\mathrm{S}^m(\mathfrak{h}^*)$, порожденным множеством $(\mathrm{pr}_m \circ \zeta \circ \mathrm{Tr})(\mathcal{R}(\mathfrak{g}))$. Таким образом, если ρ — конечномерное линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то для любого $x \in \mathfrak{h}$ имеет место равенство

$$((\mathrm{pr}_m \circ \zeta \circ \mathrm{Tr})(\rho))(x) = \left\langle (\zeta \circ \mathrm{Tr})(\rho),\ \frac{x^m}{m!} \right\rangle = \frac{1}{m!}\,\mathrm{Tr}\,(\rho(x)^m).$$

3. Инвариантные многочлены

Пусть $\mathfrak{a}$ — конечномерная алгебра Ли. Сохраняя принятые в n° 1 соглашения, отождествим между собой алгебру $\mathrm{S}(\mathfrak{a}^*)$, алгебру $\mathrm{S}(\mathfrak{a})^{*\mathrm{gr}}$ и алгебру полиномиальных функций на алгебре Ли $\mathfrak{a}$. Через $\theta(a)$ для любого $a \in \mathfrak{a}$ обозначим такое дифференцирование алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$, что $\theta(a)x = [a, x]$ для всех $x \in \mathfrak{a}$. Известно (гл. I, § 3, n° 2), что θ является представлением алгебры Ли $\mathfrak{a}$ в пространстве $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$. Пусть $\theta^*(a)$ — ограничение эндоморфизма $-{}^t\theta(a)$ на пространство $\mathrm{S}(\mathfrak{a}^*)$. Тогда θ^* — представление алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Если $f \in \mathrm{S}^n(\mathfrak{a}^*)$, то $\theta^*(a)f \in \mathrm{S}^n(\mathfrak{a}^*)$ и для $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{a}$

$$(\theta^*(a)f)(x_1, \ldots, x_n) = \\ = -\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, [a, x_i], x_{i+1}, \ldots, x_n). \quad (1)$$

Из формулы (1) легко следует, что $\theta^*(a)$ — дифференцирование алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{a}^*)$. Инвариантный относительно представления θ

(соотв. θ^*) алгебры Ли $\mathfrak{a}$ элемент алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ (соотв. $\mathrm{S}(\mathfrak{a}^*)$) называется *инвариантным элементом алгебры* $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ (соотв. $\mathrm{S}(\mathfrak{a}^*)$).

Лемма 2. *Пусть ρ — конечномерное линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и m — целое число $\geqslant 0$. Тогда $x \mapsto \operatorname{Tr}(\rho(x)^m)$ — инвариантная полиномиальная функция на алгебре Ли $\mathfrak{a}$.*

Положим $g(x_1, \ldots, x_m) = \operatorname{Tr}(\rho(x_1) \ldots \rho(x_m))$ при $x_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{a}$. Если $x \in \mathfrak{a}$, то

$$\begin{aligned}
-(\theta^*(x)g)(x_1, \ldots, x_m) &= \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \operatorname{Tr}(\rho(x_1) \ldots \rho(x_{i-1})[\rho(x), \rho(x_i)]\rho(x_{i+1}) \ldots \rho(x_m)) = \\
&= \operatorname{Tr}(\rho(x)\rho(x_1) \ldots \rho(x_m)) - \operatorname{Tr}(\rho(x_1) \ldots \rho(x_m)\rho(x)) = 0;
\end{aligned}$$

следовательно, $\theta^*(x)g = 0$. Пусть h — полилинейная симметрическая форма, определенная равенством

$$h(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} g(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}).$$

Тогда $\theta^*(x)h = 0$ и $\operatorname{Tr}(\rho(x)^m) = h(x, \ldots, x)$ для любого $x \in \mathfrak{a}$.

Лемма 3. *Пусть E — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль и $x \in E$. Для того чтобы x был инвариантным элементом $\mathfrak{g}$-модуля E, необходимо и достаточно, чтобы $\exp(a_E) . x = x$ для любого нильпотентного элемента a из алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Очевидно, что условие леммы необходимо. Предположим теперь, что оно выполнено. Пусть a — нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Существует такое целое число n, что $a_E^n = 0$. Тогда для любого $t \in k$ имеет место равенство

$$0 = \exp(ta_E) . x - x = ta_E x + \frac{1}{2!} t^2 q_E^2 x + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} a_E^{n-1} x,$$

откуда следует, что $a_E x = 0$. Но алгебра Ли порождается своими нильпотентными элементами (§ 4, n° 1, предложение 1). Следовательно, x — инвариантный элемент $\mathfrak{g}$-модуля E. Ч. Т. Д.

При произвольном $\xi \in \mathbf{GL}(\mathfrak{g})$ обозначим через $\mathrm{S}(\xi)$ автоморфизм пространства $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, который продолжает автоморфизм ξ, а через $\mathrm{S}^*(\xi)$ — ограничение на пространство $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ контрагредиентного к $\mathrm{S}(\xi)$ автоморфизма. Тогда и S и S^* — представления группы $\mathbf{GL}(\mathfrak{g})$. Если a — нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то дифференцирование $\theta(a)$ локально нильпотентно в алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ и $\mathrm{S}(\exp \operatorname{ad} a) = \exp \theta(\mathrm{a})$, следовательно,

$$\mathrm{S}^{\mathsf{v}}(\exp \operatorname{ad} a) = \exp \theta^{\mathsf{v}}(a). \qquad (2)$$

Предложение 3. *Пусть f — полиномиальная функция на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $f \circ s = f$ *для всех* $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$;

(ii) $f \circ s = f$ *для всех* $s \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$;

(iii) *функция f инвариантна.*

Эквивалентность условий (i) и (iii) следует из формулы (2) и леммы 3. Расширив основное поле, получаем, что из условия (iii) следует условие (ii). Импликация (ii)$\Rightarrow$(i) очевидна.

Следует иметь в виду, что, вообще говоря, полиномиальная функция f может удовлетворять условиям предложения 3 и не быть инвариантной относительно группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (упражнения 1 и 2).

Теорема 1. *Пусть $I(\mathfrak{g}^*)$ — алгебра инвариантных полиномиальных функций на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть i: $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \to \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)$ — гомоморфизм ограничения.*

(i) *Отображение $i \mid I(\mathfrak{g}^*)$ — изоморфизм алгебры $I(\mathfrak{g}^*)$ на алгебру $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^W$.*

(ii) *Пусть $I^n(\mathfrak{g}^*)$ для любого целого числа $n \geqslant 0$ — множество однородных элементов алгебры $I(\mathfrak{g}^*)$ степени n. Тогда $I^n(\mathfrak{g}^*)$ — множество линейных комбинаций функций вида $x \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(x)^n)$, где ρ — конечномерное линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

(iii) *Пусть $l = \mathrm{rg}(\mathfrak{g})$. Тогда существует l алгебраически независимых однородных элементов алгебры $I(\mathfrak{g}^*)$, которые порождают алгебру $I(\mathfrak{g}^*)$.*

а) Пусть $f \in I(\mathfrak{g}^*)$ и $w \in W$. Существует такой автоморфизм $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, что $s \mid \mathfrak{h} = w$ (§ 2, n° 2, следствие теоремы 2). Так как функция f инвариантна относительно автоморфизма s (предложение 3), то $i(f)$ инвариантна относительно автоморфизма w. Следовательно, $i(I(\mathfrak{g}^*)) \subset \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^W$.

б) Пусть $f \in I(\mathfrak{g}^*)$ — такая полиномиальная функция, что $i(f) = 0$. Докажем, что $f = 0$. Расширив, если нужно, основное поле, можно считать, что поле k алгебраически замкнуто. По предложению 3 функция f обращается в нуль на подалгебрах $s(\mathfrak{h})$ для всех автоморфизмов $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Следовательно, полиномиальная функция f обращается в нуль на любой подалгебре Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (гл. VII, § 3, n° 2, теорема 1) и, в частности, на множестве регулярных элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Но это множество плотно в пространстве $\mathfrak{g}$ в топологии Зарисского (гл. VII, § 2, n° 2).

в) Пусть n — целое число $\geqslant 0$ и L^n — множество линейных комбинаций функций вида $x \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(x)^n)$ на $\mathfrak{g}$, где ρ — конечномерное линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. По лемме 2 имеет место включение $L^n \subset I^n(\mathfrak{g}^*)$. Следовательно,

$$i(L^n) \subset i(I^n(\mathfrak{g}^*)) \subset \mathrm{S}^n(\mathfrak{h}^*)^W.$$

Согласно следствию 2 предложения 2, $\mathsf{S}^n(\mathfrak{h}^*)^W \subset i(L^n)$. Значит, $i(I^n(\mathfrak{g}^*)) = \mathsf{S}^n(\mathfrak{h}^*)^W$, что доказывает утверждение (i), а также равенство $i(L^n) = i(I^n(\mathfrak{g}^*))$, откуда ввиду б) следует, что $L^n = I^n(\mathfrak{g}^*)$. Таким образом, мы доказали (ii).

г) Утверждение (iii) следует из утверждения (i) и теоремы 3 гл. V, § 5, n° 3.

Следствие 1. *Предположим, что алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *проста. Пусть* $m_1, \ldots, m_l$ — *показатели группы Вейля алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Тогда существуют однородные элементы* $P_1, \ldots, P_l$ *алгебры* $I(\mathfrak{g}^*)$ *степеней*

$$m_1 + 1, \ldots, m_l + 1,$$

которые алгебраически независимы и порождают алгебру $I(\mathfrak{g}^*)$.

Доказательство следует из теоремы 2 (i) и из предложения 3 гл. V, § 6, n° 2.

Следствие 2. *Пусть* B — *базис системы корней* R, R_+ (соотв. R_-) — *множество положительных* (соотв. *отрицательных*) *корней расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *относительно базиса* B, $\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{n}_- = \sum_{\alpha \in R_-} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathsf{S}(\mathfrak{h})$ — *симметрическая алгебра пространства* $\mathfrak{h}$, J — *идеал алгебры* $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$, *порожденный* $\mathfrak{n}_+ \cup \mathfrak{n}_-$.

(i) $\mathsf{S}(\mathfrak{g}) = \mathsf{S}(\mathfrak{h}) \oplus J$.

(ii) *Пусть* j — *гомоморфизм алгебры* $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$ *на алгебру* $\mathsf{S}(\mathfrak{h})$, *определенный указанным выше разложением алгебры* $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$. *Пусть* $I(\mathfrak{g})$ — *множество инвариантных элементов алгебры* $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$, *а* $\mathsf{S}(\mathfrak{h})^W$ — *множество инвариантных относительно* W *элементов алгебры* $\mathsf{S}(\mathfrak{h})$. *Тогда отображение* $j \mid I(\mathfrak{g})$ — *изоморфизм алгебры* $I(\mathfrak{g})$ *на алгебру* $\mathsf{S}(\mathfrak{h})^W$.

Утверждение (i) очевидно. Форма Киллинга определяет изоморфизм векторного пространства $\mathfrak{g}^*$ на векторное пространство $\mathfrak{g}$, который продолжается до изоморфизма ξ $\mathfrak{g}$-модуля $\mathsf{S}(\mathfrak{g}^*)$ на $\mathfrak{g}$-модуль $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$. При этом $\xi(I(\mathfrak{g}^*)) = I(\mathfrak{g})$. Ортогональное дополнение к подпространству $\mathfrak{h}$ относительно формы Киллинга совпадает с подпространством $\mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$ (§ 2, n° 2, предложение 1). Если отождествить пространство $\mathfrak{h}^*$ с ортогональным к $\mathfrak{n}_+ + \mathfrak{n}_-$ подпространством пространства $\mathfrak{g}^*$, то $\xi(\mathfrak{h}^*) = \mathfrak{h}$, а следовательно, $\xi(\mathsf{S}(\mathfrak{h}^*)) = \mathsf{S}(\mathfrak{h})$ и $\xi\left(\mathsf{S}(\mathfrak{h}^*)^W\right) = \mathsf{S}(\mathfrak{h})^W$. Наконец, $\xi^{-1}(J)$ является множеством полиномиальных функций на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, обращающихся в нуль на подалгебре Картана $\mathfrak{h}$. Это доказывает, что отображение ξ переводит гомоморфизм i, определенный в теореме 1, в гомоморфизм j, определенный в следствии 2. Таким образом, утверждение (ii) следует из теоремы 1 (i).

Предложение 4. *Пусть* $\mathfrak{a}$ — *полупростая алгебра Ли,* l — *ее ранг и* I (соотв. I') — *множество элементов алгебры* $\mathsf{S}(\mathfrak{a}^*)$ (соотв.

$\mathsf{S}(\mathfrak{a})$), *инвариантных относительно представления алгебры Ли* $\mathfrak{a}$, *полученного продолжением присоединенного представления. Пусть* Z — *центр универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли* $\mathfrak{a}$.

(i) I *и* I' — *градуированные алгебры многочленов* (гл. V, § 5, n° 1) *степени трансцендентности* l.

(ii) *Алгебра* Z *изоморфна алгебре многочленов от* l *независимых переменных над полем* k.

Каноническая фильтрация универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $\mathfrak{a}$ индуцирует фильтрацию в алгебре Z. Вследствие теоремы 1 из гл. I, § 2, и n° 8 гл. 1, § 2, алгебра Z изоморфна I'. С учетом предложения 10 из *Ком. алг.*, гл. III, § 2, n° 9, отсюда следует, что (i)$\Rightarrow$(ii).

С другой стороны, теорема 1 и следствие 2 из нее показывают, что утверждение (i) верно, когда $\mathfrak{a}$ — расщепленная алгебра Ли. Общий случай сводится к этому благодаря следующей лемме.

Лемма 4[1]). *Пусть* $A = \bigoplus_{n \geqslant 0} A^n$ — *градуированная* k-*алгебра*, k' — *расширение поля* k *и* $A' = A \otimes_k k'$. *Предположим, что* A' — *градуированная* k'-*алггбра многочленов. Тогда* A — *градуированная* k-*алгебра многочленов*.

Так как $A'^0 = k'$, то $A^0 = k$. Положим $A_+ = \bigoplus_{n \geqslant 1} A^n$ и $P = A_+/A_+^2$. Тогда P — градуированное векторное пространство и можно найти градуированное линейное отображение степени нуль $f\colon P \to A_+$, композиция которого с канонической проекцией $A_+ \to P$ — тождественное отображение на P. Снабдим алгебру $\mathsf{S}(P)$ градуировкой, построенной по градуировке пространства P (*Alg*., chap. III, § 6, n° 6). Гомоморфизм k-алгебр $g\colon \mathsf{S}(P) \to A$, продолжающий гомоморфизм f (*Alg*., chap. III, § 6, n° 1), является градуированным гомоморфизмом степени 0; индукция по степени немедленно показывает, что гомоморфизм g сюръективен.

Лемма 5. *Для того чтобы алгебра* A *была алгеброй многочленов, необходимо и достаточно, чтобы пространство* P *было конечномерным, а отображение* g — *биективным*.

Если P — конечномерное пространство, то очевидно, что $\mathsf{S}(P)$ — градуированная алгебра многочленов, и если гомоморфизм g биективен, то A — градуированная алгебра многочленов. Обратно, предположим, что алгебра A порождена однородными алгебраически независимыми элементами $x_1, \ldots, x_m$, степени которых равны соответственно $d_1, \ldots, d_m$. Пусть

[1]) В леммах 4, 5 и 6 поле k произвольное.

$\bar{x}_i$ — образ элемента x_i в пространстве P. Сразу же проверяется, что элементы $\bar{x}_i$ образуют базис пространства P, а поскольку степень элемента $\bar{x}_i$ равна d_i, то алгебры $\mathrm{S}(P)$ и A изоморфны. В частности, для любого n имеет место равенство $\dim \mathrm{S}(P)^n = \dim A^n$. Так как гомоморфизм g сюръективен, то он обязательно биективен.

Теперь немедленно получаем доказательство леммы 4. Действительно, лемма 5, примененная к k'-алгебре A', показывает, что гомоморфизм $g \otimes 1$: $\mathrm{S}(P) \otimes k' \to A \otimes k'$ биективен, а следовательно, биективен и гомоморфизм g.

Предложение 5. *Сохраним обозначения предложения 4 и обозначим через $\mathfrak{p}$ идеал алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{a}^*)$, порожденный однородными элементами алгебры I степени $\geqslant 1$. Пусть $x \in \mathfrak{a}$. Тогда для того чтобы элемент x был нильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$ при всех $f \in \mathfrak{p}$* [1].

Расширяя при необходимости основное поле, можно считать, что алгебра Ли $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ расщепляема. Предположим тогда, что x — нильпотентный элемент. Для любого конечномерного линейного представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и любого целого числа $n \geqslant 1$ имеет место равенство $\mathrm{Tr}(\rho(x)^n) = 0$, поэтому $f(x) = 0$ для любого однородного элемента $f \in I(\mathfrak{g}^*)$ степени $\geqslant 1$ (теорема 1 (ii)) и, следовательно, $f(x) = 0$ для любых $f \in \mathfrak{p}$. Обратно, если $f(x) = 0$ при всех $f \in \mathfrak{p}$, то $\mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\, x)^n) = 0$ при любых $n \geqslant 1$ (теорема 1 (ii)), поэтому x — нильпотентный элемент.

**Замечания*. 1) Пусть $P_1, \ldots, P_l$ — однородные алгебраически независимые элементы алгебры I, которые ее порождают. *Тогда система $(P_1, \ldots, P_l)$ есть $\mathrm{S}(\mathfrak{a}^*)$-регулярная последовательность* (гл. V, § 5, n° 5). Действительно, расширив при необходимости основное поле, можно считать, что алгебра Ли $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ расщепляема. Пусть $N = \dim \mathfrak{g}$, а

$$(Q_1, \ldots, Q_{N-l})$$

— базис ортогонального к $\mathfrak{h}$ подпространства в $\mathfrak{g}^*$. Если $\mathfrak{m}$ — идеал в алгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$, порожденный элементами $P_1, \ldots, P_l$, $Q_1, \ldots, Q_{N-l}$, то факторалгебра $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)/\mathfrak{m}$ изоморфна факторалгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)/J$, где J — идеал алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)$, порожденной элементами $i(P_1), \ldots, i(P_l)$. По теореме 1 и по теореме 2 из гл. V, § 5, n° 2, $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)/J$ является конечномерным пространством. Поэтому и пространство $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)/\mathfrak{m}$ конечномерно. Вследствие одного результата из *Комм. алг.* отсюда вытекает, что семейство

---

[1]) Можно показать (Kostant B., Lie group representations on polynomial ring, *Amer. J. Math.*, **XXXV** (1963), 327—404, теоремы 10 и 15), что $\mathfrak{p}$ — простой идеал алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{a}^*)$ и кольцо $\mathrm{S}(\mathfrak{a}^*)/\mathfrak{p}$ целозамкнуто.

$(P_1, \ldots, P_l, Q_1, \ldots, Q_{N-l})$ есть $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$-регулярная последовательность, и *a fortiori* это верно и для $(P_1, \ldots, P_l)$.

2) *Алгебра* $\mathrm{S}(\mathfrak{a}^*)$ — *свободный градуированный модуль над* I. Действительно, это следует из предложения 4, замечания 1 и из леммы 5 гл. V, § 5, n° 5.

4. Свойства групп Aut_0

Лемма 6. *Пусть* V — *конечномерное векторное пространство,* G — *конечная группа автоморфизмов пространств* V, *а* v *и* v' — *такие элементы пространства* V, *что* $v' \notin Gv$. *Тогда существует такая* G-*инвариантная полиномиальная функция* f *на пространстве* V, *что* $f(v') \neq f(v)$.

Действительно, для любого элемента $s \in G$ существует полиномиальная функция g_s на пространстве V, принимающая на элементе v значение 1, а на элементе sv' — значение 0. Тогда функция $g = 1 - \prod_{s \in G} g_s$ принимает на элементе v значение 0, а на элементах Gv' равна 1. Полиномиальная функция $f = \prod_{t \in G} t \cdot g$ G-инвариантна, равна 0 на элементе v и 1 на элементах Gv'.

Предложение 6. *Пусть* $\mathfrak{a}$ — *полупростая алгебра Ли и* $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) $s \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{a})$;

(ii) *для любой инвариантной полиномиальной функции* f *на алгебре* $\mathfrak{a}$ *имеет место равенство* $f \circ s = f$.

Расширив поле скаляров, можно считать, что поле алгебраически замкнуто. Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) вытекает из предложения 3. Предположим, что утверждение (ii) выполняется, и докажем справедливость утверждения (i). Ввиду предложения 3 и следствия 1 предложения 5 § 5, n° 3, можно предположить, что $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и что некоторая камера Вейля C устойчива относительно автоморфизма s. Пусть $x \in C \cap \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$. Тогда $sx \in C$. Если g есть W-инвариантная полиномиальная функция на алгебре Ли $\mathfrak{h}$, то $g(x) = g(sx)$ (теорема 1 (i)). По лемме 6 отсюда следует, что $sx \in Wx$. Поскольку $sx \in C$, то $x = sx$ (гл. V, § 3, n° 3, теорема 2). Тогда $s \mid \mathfrak{h} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}$ и $s \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (§ 5, n° 2, предложение 4).

Следствие. *Группа* $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{a})$ *открыта и замкнута в группе* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$ *в топологии Зарисского.*

Предложение 6 показывает, что $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{a})$ замкнута. Пусть $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k. Группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{a} \otimes \bar{k})/\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{a} \otimes \bar{k})$ конечна (§ 5, n° 3, следствие 1 предложения 5); следовательно, группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{a})/\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{a})$ тоже конечна. Так как смежные классы группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$ по подгруппе $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{a})$ замкнуты, то подгруппа $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{a})$ открыта в группе $\mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$.

5. *Центр универсальной обертывающей алгебры*

В этом пункте мы фиксируем некоторый базис B системы корней R. Пусть R_+ — множество корней, положительных относительно базиса B. Пусть $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R_+} \alpha$ и δ — автоморфизм алгебры $\mathsf{S}(\mathfrak{h})$, который переводит любой элемент $x \in \mathfrak{h}$ в $x - \rho(x)$ и, следовательно, функцию p на пространстве $\mathfrak{h}^*$ — в функцию $\lambda \mapsto p(\lambda - \rho)$.

Теорема 2. *Пусть U — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, Z — ее центр, $V \subset U$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{h}$ (отождествляемая с алгеброй $\mathsf{S}(\mathfrak{h})$), U^0 — централизатор алгебры V в алгебре U, φ — гомоморфизм Хариш-Чандры* (§ 6, n° 4) *из U^0 в V относительно базиса B. Обозначим через $\mathsf{S}(\mathfrak{h})^W$ множество W-инвариантных элементов алгебры $\mathsf{S}(\mathfrak{h})$. Тогда $(\delta \circ \varphi) | Z$ — изоморфизм алгебры Z на алгебру $\mathsf{S}(\mathfrak{h})^W$, не зависящий от выбора базиса B.*

а) Пусть P_{++} — множество доминантных весов системы корней R, $w \in W$, $\lambda \in P_{++}$, $\mu = w\lambda$. Тогда модуль $Z(\mu - \rho)$ изоморфен подмодулю модуля $Z(\lambda - \rho)$ (§ 6, n° 3, следствие 2 предложения 6) и $\varphi(u)(\lambda - \rho) = \varphi(u)(\mu - \rho)$ для любого элемента $u \in Z$ (§ 6, n° 4, предложение 7). Таким образом, полиномиальные функции $(\delta \circ \varphi)(u)$ и $(\delta \circ \varphi)(u) \circ w$, определенные на пространстве $\mathfrak{h}^*$, совпадают на множестве P_{++}. Множество P_{++} плотно в пространстве $\mathfrak{h}^*$ в топологии Зарисского. Это легко получить, если отождествить пространство $\mathfrak{h}^*$ с пространством k^B, используя базис, образованный фундаментальными весами $\bar{\omega}_\alpha$, и применяя предложение 9 из *Alg.*, chap. IV, § 2, n° 3. Таким образом, имеет место равенство

$$(\delta \circ \varphi)(u) = (\delta \circ \varphi)(u) \circ w,$$

что доказывает включение $(\delta \circ \varphi)(Z) \subset \mathsf{S}(\mathfrak{h})^W$.

б) Пусть η — изоморфизм алгебры $I(\mathfrak{g})$ на алгебру $\mathsf{S}(\mathfrak{h})^W$, определенный в следствии 2 теоремы 1 из n° 3. Рассмотрим канонический изоморфизм $\mathfrak{g}$-модуля U на $\mathfrak{g}$-модуль $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$ (гл. I, § 2, n° 8), и пусть θ — ограничение этого изоморфизма на подалгебру Z. Тогда $\theta(Z) = I(\mathfrak{g})$. Пусть z — элемент алгебры Z, фильтрация которого в алгебре U не превосходит f.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & I(\mathfrak{g}) \arrow[dr, "\eta"] & \\ Z \arrow[ur, "\theta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathsf{S}(\mathfrak{h}) \\ & \mathsf{S}(\mathfrak{g}) \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Будем использовать обозначения из § 6, n° 4, и положим

$$z = \sum_{\Sigma q_i + \Sigma m_i + \Sigma p_i \leqslant f} \lambda_{(q_i), (m_i), (p_i)} u((q_i), (m_i), (p_i)).$$

Пусть $v((q_i), (m_i), (p_i))$ — одночлен

$$X_{-\alpha_1}^{q_1} \ldots X_{-\alpha_n}^{q_n} H_1^{m_1} \ldots H_l^{m_l} X_{\alpha_1}^{p_1} \ldots X_{\alpha_n}^{p_n},$$

вычисленный в алгебре $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$. Обозначив через $\mathsf{S}_d(\mathfrak{g})$ сумму однородных компонент алгебры $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$ степеней 0, 1, ..., d, получаем, что

$$\theta(z) \equiv \sum_{\Sigma q_i + \Sigma m_i + \Sigma p_i = f} \lambda_{(q_i), (m_i), (p_i)} v((q_i), (m_i), (p_i)) \pmod{\mathsf{S}_{f-1}(\mathfrak{h})},$$

откуда следует, что

$$(\eta \circ \theta)(z) \equiv \sum_{\Sigma m_i = f} \lambda_{(0), (m_i), (0)} v((0), (m_i), (0)) \pmod{\mathsf{S}_{f-1}(\mathfrak{h})}$$

и, значит,

$$(\eta \circ \theta)(z) \equiv \varphi(z) \pmod{\mathsf{S}_{f-1}(\mathfrak{h})}. \tag{3}$$

в) Покажем, что отображение $\delta \circ \varphi \colon Z \to \mathsf{S}(\mathfrak{h})^W$ биективно. Канонические фильтрации в алгебрах U и $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$ индуцируют фильтрации в алгебрах Z, $I(\mathfrak{g})$, $\mathsf{S}(\mathfrak{h})^W$ и гомоморфизмы θ и η согласованы с этими фильтрациями, так что $\operatorname{gr}(\eta \circ \theta)$ — изоморфизм векторного пространства $\operatorname{gr}(Z)$ на векторное пространство $\operatorname{gr}(\mathsf{S}(\mathfrak{h})^W)$. Из формулы (3) мы получаем, что $\operatorname{gr}(\varphi) = \operatorname{gr}(\eta \circ \theta)$, и ясно, что гомоморфизм $\operatorname{gr}(\delta)$ тождествен. Следовательно, гомоморфизм $\operatorname{gr}(\delta \circ \varphi)$ биективен, поэтому биективен и гомоморфизм

$$\delta \circ \varphi \colon Z \to \mathsf{S}(\mathfrak{h})^W$$

(*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 8, следствия 1 и 2 теоремы 1.)

г) Воспользуемся обозначениями из п. а). Пусть E — простой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ и χ — его центральный характер (§ 6, n° 1, предложение 2). Пусть φ' и δ' — автоморфизмы, построенные аналогично гомоморфизмам φ и δ относительно базиса $w(B)$. Старший вес модуля E относительно базиса $w(B)$

есть $w(\lambda)$. Вследствие предложения 7 § 6, n°4, мы получаем, что для любых $u \in Z$

$$\varphi(u)(\lambda) = \chi(u) = \varphi'(u)(w\lambda).$$

Следовательно, ввиду п. a)

$$(\delta \circ \varphi)(u)(w\lambda + w\rho) = (\delta \circ \varphi)(u)(\lambda + \rho) = \varphi(u)(\lambda) =$$
$$= \varphi'(u)(w\lambda) = (\delta' \circ \varphi')(u)(w\lambda + w\rho).$$

Таким образом, полиномиальные функции $(\delta \circ \varphi)(u)$ и $(\delta' \circ \varphi')(u)$ совпадают на множестве $w(P_{++}) + w\rho$ и, значит, равны.

Следствие 1. *Обозначим через* χ_λ *для любого* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *гомоморфизм* $z \mapsto (\varphi(z))(\lambda)$ *алгебры* Z *в поле* k. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если поле* k *алгебраически замкнуто, то любой гомоморфизм алгебры* Z *в поле* k *имеет вид* χ_λ *для некоторого* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$;

(ii) *если* λ, $\mu \in \mathfrak{h}^*$, *то равенство* $\chi_\lambda = \chi_\mu$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\mu + \rho \in W(\lambda + \rho)$.

Если поле k алгебраически замкнуто, то любой гомоморфизм алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$ в поле k продолжается до гомоморфизма алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ в поле k (*Комм. алг.*, гл. V, § 1, n°9, предложение 22, и § 2, n°1, следствие 4 теоремы 1), а любой гомоморфизм алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ в поле k имеет вид $f \mapsto f(\lambda)$ для некоторого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ (гл. VII, дополнение I, предложение 1). Если χ — гомоморфизм алгебры Z в поле k, то существует (теорема 2) такой элемент $\mu \in \mathfrak{h}^*$, что для любого $z \in Z$ выполняется соотношение

$$\chi(z) = ((\delta \circ \varphi)(z))(\mu) = (\varphi(z))(\mu - \rho),$$

откуда вытекает утверждение (i).

Пусть λ, $\mu \in \mathfrak{h}^*$, и предположим, что $\chi_\lambda = \chi_\mu$. Тогда для любого элемента $z \in Z$ выполняется соотношение

$$((\delta \circ \varphi)(z))(\lambda + \rho) = (\varphi(z))(\lambda) = \chi_\lambda(z) =$$
$$= \chi_\mu(z) = ((\delta \circ \varphi)(z))(\mu + \rho);$$

другими словами, гомоморфизмы алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ в поле k, определенные элементами $\lambda + \rho$ и $\mu + \rho$, совпадают на подалгебре $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$; поэтому утверждение (ii) вытекает из следствия теоремы 2 из *Комм. алг.*, гл. V, § 2, n°2.

Следствие 2. *Пусть* E, E' — *простые конечномерные* $\mathfrak{g}$-*модули, а* χ, χ' — *их центральные характеры. Если* $\chi = \chi'$, *то модули* E *и* E' *изоморфны.*

Пусть λ, λ' — старшие веса модулей E, E'. Ввиду предложения 7 из § 6, n°4, $\chi_\lambda = \chi = \chi' = \chi_{\lambda'}$, следовательно, существует такой элемент $w \in W$, что $\lambda' + \rho = w(\lambda + \rho)$. Так как веса $\lambda + \rho$ и $\lambda' + \rho$ находятся в одной камере, определенной базисом B, то $w = 1$. Следовательно, $\lambda = \lambda'$, что доказывает утверждение следствия.

Предложение 7. *Для любого класса γ простых конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей обозначим через U_γ изотипную компоненту типа γ $\mathfrak{g}$-модуля U (модуля присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в ее универсальной обертывающей алгебре U). Пусть γ_0 — класс тривиального $\mathfrak{g}$-модуля размерности 1. Пусть $[U, U]$ — векторное подпространство пространства U, порожденное коммутаторами пар элементов из U.*

(i) *Модуль U — прямая сумма подмодулей U_γ.*

(ii) $U_{\gamma_0} = Z$ *и* $\sum\limits_{\gamma \neq \gamma_0} U_\gamma = [U, U]$.

(iii) *Пусть $u \mapsto u^\natural$ — проекция алгебры U на ее центр Z, определенная разложением $U = Z \oplus [U, U]$. Если $u \in U$ и $v \in U$, то $(uv)^\natural = (vu)^\natural$. Если $u \in U$ и $z \in Z$, то $(uz)^\natural = u^\natural z$.*

(iv) *Пусть φ — гомоморфизм Хариш-Чандры. Пусть $\lambda \in P_{++}$, а E — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ. Для любого элемента $u \in U$ имеет место равенство*

$$\frac{1}{\dim E} \operatorname{Tr}(u_E) = (\varphi(u^\natural))(\lambda).$$

$\mathfrak{g}$-модуль U является прямой суммой своих конечномерных подмодулей. Отсюда следует утверждение (i).

Ясно, что $U_{\gamma_0} = Z$. Пусть U' — подпространство векторного пространства U, соответствующее подпредставлению класса γ в присоединенном представлении. Тогда или $[\mathfrak{g}, U'] = U'$, или $[\mathfrak{g}, U'] = 0$. Если $\gamma \neq \gamma_0$, то $[\mathfrak{g}, U'] = U'$, так что $\sum\limits_{\gamma \neq \gamma_0} U_\gamma \subset [U, U]$. С другой стороны, если $u \in U$ и $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$, то

$$\begin{aligned}[x_1 \ldots x_n, u] = (x_1 \ldots x_n u - x_2 \ldots x_n u x_1) &+ \\ + (x_2 \ldots x_n u x_1 - x_3 \ldots x_n u x_1 x_2) &+ \ldots \\ \ldots + (x_n u x_1 \ldots x_{n-1} - u x_1 \ldots x_n) &\in [\mathfrak{g}, U].\end{aligned}$$

Следовательно, $[U, U] \subset \left[\mathfrak{g}, \sum\limits_\gamma U_\gamma\right] = \left[\mathfrak{g}, \sum\limits_{\gamma \neq \gamma_0} U_\gamma\right] \subset \sum\limits_{\gamma \neq \gamma_0} U_\gamma$. Мы доказали, таким образом, утверждение (ii). В этих условиях утверждение (iii) следует из леммы 5 гл. I, § 6, n° 9.

Наконец, пусть E и λ такие же, как в утверждении (iv). Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(u_E) &= \operatorname{Tr}((u^\natural)_E) \text{ (так как } u - u^\natural \in [U, U]) = \\ &= \operatorname{Tr}(\varphi(u^\natural)(\lambda) . 1) \text{ (§ 6, n° 4, предложение 7)} = \\ &= (\dim E) . \varphi(u^\natural)(\lambda).\end{aligned}$$

§ 9. Формула Германа Вейля

В этом параграфе мы будем пользоваться основными обозначениями из § 6 и 7.

1. Характеры конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей

Пусть $(e^\lambda)_{\lambda \in \mathfrak{h}^*}$ — канонический базис кольца $\mathbf{Z}[\mathfrak{h}^*]$. Снабдим пространство $\mathbf{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ отображений пространства $\mathfrak{h}^*$ в $\mathbf{Z}$ топологией произведения дискретных топологий его сомножителей. Если $\varphi \in \mathbf{Z}^{\mathfrak{h}^*}$, то семейство $(\varphi(\nu) e^\nu)_{\nu \in \mathfrak{h}^*}$ суммируемо и

$$\varphi = \sum_{\nu \in \mathfrak{h}^*} \varphi(\nu) e^\nu.$$

Пусть $\mathbf{Z}\langle P\rangle$ — множество элементов φ пространства $\mathbf{Z}^{\mathfrak{h}^*}$, носитель которых содержится в конечном объединении множеств вида $\nu - P_+$, где $\nu \in \mathfrak{h}^*$. Имеют место включения $\mathbf{Z}[P] \subset \mathbf{Z}\langle P\rangle \subset \mathbf{Z}^{\mathfrak{h}^*}$. Полагая для $\varphi, \psi \in \mathbf{Z}\langle P\rangle$ и $\nu \in \mathfrak{h}^*$

$$(\varphi\psi)(\nu) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \varphi(\mu)\psi(\nu - \mu),$$

определим на $\mathbf{Z}\langle P\rangle$ структуру кольца, продолжающую кольцевую структуру на $\mathbf{Z}[P]$ (семейство $(\varphi(\mu)\psi(\nu-\mu))_{\mu \in \mathfrak{h}^*}$ имеет конечный носитель ввиду условия на носители функций φ и ψ). Если $\varphi = \sum_\nu x_\nu e^\nu$ и $\psi = \sum_\nu y_\nu e^\nu$, то $\varphi\psi = \sum_{\nu, \mu} x_\nu y_\mu e^{\nu+\mu}$.

Пусть $\nu \in \mathfrak{h}^*$. *Разложением элемента* ν *по положительным корням* называется семейство $(n_\alpha)_{\alpha \in R_+}$, где n_α — такие целые числа $\geqslant 0$, что $\nu = \sum_{\alpha \in R_+} n_\alpha \alpha$. *Символом* $\mathfrak{P}(\nu)$ *обозначается число разложений элемента* ν *по положительным корням*. Тогда

$$\mathfrak{P}(\nu) > 0 \Leftrightarrow \nu \in Q_+.$$

В этом параграфе через K обозначается такой элемент алгебры $\mathbf{Z}\langle P\rangle$:

$$K = \sum_{\gamma \in Q_+} \mathfrak{P}(\gamma) e^{-\gamma}.$$

Напомним (гл. VI, § 3, предложение 2), что

$$d = \prod_{\alpha \in R_+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho}$$

— антиинвариантный элемент алгебры $\mathbf{Z}[P]$.

Лемма 1. *В кольце* $\mathbf{Z}\langle P\rangle$ *выполняется равенство*

$$K \cdot \prod_{\alpha\in R_+} (1-e^{-\alpha}) = Ke^{-\rho}d = 1.$$

Действительно,

$$K = \prod_{\alpha\in R_+} (e^0 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \ldots);$$

следовательно,

$$Ke^{-\rho}d = \prod_{\alpha\in R_+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \ldots) \prod_{\alpha\in R_+} (1-e^{-\alpha}) = 1.$$

Лемма 2. *Пусть* $\lambda\in\mathfrak{h}^*$. *Характер* $\operatorname{ch} Z(\lambda)$ (§ 6, n° 3) *модуля* $Z(\lambda)$ *принадлежит кольцу* $\mathbf{Z}\langle P\rangle$, *причем* $d.\operatorname{ch} Z(\lambda) = e^{\lambda+\rho}$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ — попарно различные элементы системы положительных корней R_+. Элементы $X_{-\alpha_1}^{n_1} X_{-\alpha_2}^{n_2} \ldots X_{-\alpha_q}^{n_q} \otimes 1$ образуют базис модуля $Z(\lambda)$ (§ 6, предложение 6 (iii)), причем для любого $h\in\mathfrak{h}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} h.\left(X_{-\alpha_1}^{n_1} X_{-\alpha_2}^{n_2} \ldots X_{-\alpha_q}^{n_q}\otimes 1\right) &= \left[h, X_{-\alpha_1}^{n_1}\ldots X_{-\alpha_q}^{n_q}\right]\otimes 1 + \\ &+ \left(X_{-\alpha_1}^{n_1}\ldots X_{-\alpha_q}^{n_q}\right)\otimes h.1 = \\ &= (\lambda - n_1\alpha_1 - \ldots - n_q\alpha_q)(h)\left(X_{-\alpha_1}^{n_1}\ldots X_{-\alpha_q}^{n_q}\otimes 1\right). \end{aligned}$$

Таким образом, размерность пространства $Z(\lambda)^{\lambda-\mu}$ равна $\mathfrak{P}(\mu)$. Это показывает, что характер $\operatorname{ch} Z(\lambda)$ определен, является элементом кольца $\mathbf{Z}\langle P\rangle$ и что

$$\operatorname{ch} Z(\lambda) = \sum_{\mu} \mathfrak{P}(\mu)\, e^{\lambda-\mu} = Ke^{\lambda}.$$

Теперь достаточно применить лемму 1.

Лемма 3. *Пусть* M *есть* $\mathfrak{g}$-*модуль, носитель характера* $\operatorname{ch}(M)$ *которого содержится в конечном объединении множеств вида* $\mu - P_+$, U — *универсальная обертывающая алгебра для* $\mathfrak{g}$, Z — *центр алгебры* U, $\lambda_0\in\mathfrak{h}^*$ *и* χ_{λ_0} — *соответствующий гомоморфизм алгебры* Z *в поле* k (§ 8, следствие 1 теоремы 2). *Предположим, что для любого элемента* $z\in Z$ *эндоморфизм* z_M *является гомотетией с коэффициентом* $\chi_{\lambda_0}(z)$. *Обозначим через* D_M *множество таких элементов* $\lambda\in W(\lambda_0+\rho)-\rho$, *что множество* $\lambda+Q_+$ *пересекается с множеством* $\operatorname{Supp}(\operatorname{ch}(M))$. *Тогда характер* $\operatorname{ch}(M)$ *является* $\mathbf{Z}$-*линейной комбинацией характеров* $\operatorname{ch} Z(\lambda)$ *для* $\lambda\in D_M$.

Если множество $\operatorname{Supp}(\operatorname{ch}(M))$ пусто, то утверждение леммы очевидно. Предположим, что $\operatorname{Supp}(\operatorname{ch}(M))\neq\varnothing$. Пусть λ —

максимальный элемент из этого носителя и $\dim M^\lambda = m$. Тогда существует $\mathfrak{g}$-гомоморфизм φ модуля $(Z(\lambda))^m$ в модуль M, который биективно отображает пространство $(Z(\lambda)^\lambda)^m$ на M^λ (§ 6, n°3, предложение 6(i)). Центральный характер модуля $Z(\lambda)$ равен вследствие этого χ_{λ_0}, поэтому $\lambda \in W(\lambda_0 + \rho) - \rho$ (§ 8, n°5, следствие 1 теоремы 2). Это доказывает, что $D_M \neq \varnothing$, и позволяет провести индукцию по $\operatorname{Card} D_M$. Пусть L, N — ядро и коядро гомоморфизма φ. Тогда последовательность $\mathfrak{g}$-гомоморфизмов

$$0 \to L \to (Z(\lambda))^m \to M \to N \to 0$$

точна, следовательно,

$$\operatorname{ch}(M) = -\operatorname{ch}(L) + m \operatorname{ch} Z(\lambda) + \operatorname{ch} N$$

(§ 7, n°7, формула (6)). Множества $\operatorname{Supp}(\operatorname{ch} L)$ и $\operatorname{Supp}(\operatorname{ch} N)$ содержатся в конечном объединении множеств вида $\mu - P_+$. Для элемента $z \in Z$ эндоморфизмы z_L и z_N — гомотетии с коэффициентом $\chi_{\lambda_0}(z)$. Очевидно, что $D_N \subset D_M$. С другой стороны, $(\lambda + Q_+) \cap \operatorname{Supp}(\operatorname{ch} M) = \{\lambda\}$ и $\lambda \notin \operatorname{Supp}(\operatorname{ch} N)$, а следовательно, $\lambda \notin D_N$ и

$$\operatorname{Card} D_N < \operatorname{Card} D_M.$$

Далее, L — это подмодуль модуля $(Z(\lambda))^m$. Если $\lambda' \in D_L$ и $\lambda' + Q_+$ пересекает $\operatorname{Supp}(\operatorname{ch} L) \subset \operatorname{Supp} \operatorname{ch} Z(\lambda)$, то $\lambda \in \lambda' + Q_+$ (§ 6, n°1, предложение 1(ii)). Таким образом, $D_L \subset D_M$. Так как $L \cap (Z(\lambda)^\lambda)^m = 0$, то $\lambda \notin D_L$, поэтому

$$\operatorname{Card} D_L < \operatorname{Card} D_M.$$

Теперь осталось воспользоваться предположением индукции.

Теорема 1 (формула Г. Вейля для характеров). *Пусть M — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, а λ — его старший вес. Тогда*

$$\Big(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\rho}\Big) . \operatorname{ch} M = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda+\rho)}.$$

В обозначениях из леммы 3 χ_λ — центральный характер модуля M (§ 6, n°4, предложение 7). Следовательно, ввиду лемм 2 и 3 элемент $d . \operatorname{ch} M$ является $\mathbf{Z}$-линейной комбинацией таких элементов $e^{\mu+\rho}$, что

$$\mu + \rho \in W(\lambda + \rho).$$

Но по лемме 7 из § 7, n°7, $d . \operatorname{ch} M$ — антиинвариантный элемент, и его единственный максимальный член равен $e^{\lambda+\rho}$, откуда следует утверждение теоремы.

Пример. Положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$, $\mathfrak{h} = k\mathrm{H}$. Пусть α — такой корень расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, что $\alpha(\mathrm{H}) = 2$. Старшим весом $\mathfrak{g}$-модуля $V(m)$ является вес $(m/2)\alpha$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(V(m)) &= (e^{(m/2)\alpha+{}^1/_2\alpha} - e^{-(m/2)\alpha-{}^1/_2\alpha})/(e^{{}^1/_2\alpha} - e^{-{}^1/_2\alpha}) = \\ &= e^{-(m/2)\alpha}\,.\,(e^{(m+1)\alpha} - 1)/(e^{\alpha} - 1) = \\ &= e^{-(m/2)\alpha}(e^{m\alpha} + e^{(m-1)\alpha} + \ldots + 1) = \\ &= e^{(m/2)\alpha} + e^{(m-2)\alpha/2} + \ldots + e^{-(m/2)\alpha},\end{aligned}$$

что, впрочем, легко вытекает из предложения 2 § 1, n° 2.

2. Размерности простых $\mathfrak{g}$-модулей

Если $\mu \in \mathfrak{h}^*$, то положим $J(e^{\mu}) = \sum\limits_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\mu}$, см. гл. VI, § 3, n° 3.

Теорема 2. *Пусть E — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, λ — его старший вес и $(.|.)$ — положительно определенная невырожденная симметрическая W-инвариантная билинейная форма на пространстве $\mathfrak{h}^*$. Тогда*

$$\dim E = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{\langle \lambda + \rho, \mathrm{H}_\alpha \rangle}{\langle \rho, \mathrm{H}_\alpha \rangle} = \prod_{\alpha \in R_+} \left(1 + \frac{(\lambda \mid \alpha)}{(\rho \mid \alpha)}\right).$$

Пусть T — независимая переменная. Для любого $\nu \in P$ обозначим через f_ν гомоморфизм кольца $\mathbf{Z}[P]$ в кольцо $\mathbf{R}[[T]]$, который отображает элемент e^{μ} в элемент $e^{(\nu \mid \mu) T}$ при любом $\mu \in P$. Таким образом, $\dim E$ — свободный член ряда $f_\nu(\operatorname{ch} E)$.

При любых μ, $\nu \in P$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}f_\nu(J(e^{\mu})) &= \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{(\nu \mid w\mu) T} = \\ &= \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{(w^{-1}\nu \mid \mu) T} = f_\mu(J(e^{\nu})).\end{aligned}$$

В частности, учитывая формулы (3) из гл. VI, § 3, n° 3, приходим к равенству

$$f_\rho(J(e^{\mu})) = f_\mu(J(e^{\rho})) = e^{(\mu \mid \rho) T} \prod_{\alpha \in R_+} (1 - e^{-(\mu \mid \alpha) T}).$$

Следовательно, полагая $\operatorname{Card}(R_+) = N$, получаем, что

$$f_\rho(J(e^{\mu})) \equiv T^N \prod_{\alpha \in R} (\mu \mid \alpha) \pmod{T^{N+1}\mathbf{R}[[T]]}.$$

Из равенства $J(e^{\lambda+\rho}) = \operatorname{ch}(E)\,.\,J(e^{\rho})$ (теорема 1) следует, что

$$T^N \prod_{\alpha \in R_+} (\lambda + \rho \mid \alpha) \equiv f_\rho(\operatorname{ch} E)\,.\,T^N \prod_{\alpha \in R_+} (\rho \mid \alpha) \pmod{T^{N+1}\mathbf{R}[[T]]},$$

откуда мы получаем, что

$$\dim E = \Big(\prod_{\alpha\in R_+} (\lambda+\rho\,|\,\alpha)\Big)\Big/\Big(\prod_{\alpha\in R_+} (\rho\,|\,\alpha)\Big) = \prod_{\alpha\in R_+} \Big(1+\frac{(\lambda\,|\,\alpha)}{(\rho\,|\,\alpha)}\Big).$$

Но если $\alpha\in R_+$ и если корень α отождествить с элементом пространства $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}}$, пропорциональным элементу H_α, то

$$(\lambda+\rho\,|\,\alpha)/(\rho\,|\,\alpha) = \langle\lambda+\rho,\ \mathrm{H}_\alpha\rangle/\langle\rho,\ \mathrm{H}_\alpha\rangle.$$

Примеры. 1) Рассмотрим пример из n°1. Мы приходим к формуле

$$\dim V(m) = \Big(\frac{m}{2}\alpha+\frac{\alpha}{2}\Big)(\mathrm{H}_\alpha)\Big/\frac{\alpha}{2}(\mathrm{H}_\alpha) = m+1,$$

которую мы получили другим способом в § 1.

2) Пусть $\mathfrak{g}$ — простая расщепляемая алгебра Ли типа G_2. Воспользуемся обозначениями из гл. VI, таблица IX. Снабдим пространство $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$ такой положительно определенной W-инвариантной симметрической формой $(\cdot\,|\,\cdot)$, что $(\alpha_1\,|\,\alpha_1)=1$. Тогда $\rho=\bar\omega_1+\bar\omega_2$ и

$$\begin{aligned}
(\bar\omega_1\,|\,\alpha_1) &= 1/2, & (\bar\omega_1\,|\,\alpha_2) &= 0,\\
(\bar\omega_1\,|\,\alpha_2+\alpha_1) &= 1/2, & (\bar\omega_1\,|\,\alpha_2+2\alpha_1) &= 1,\\
(\bar\omega_1\,|\,\alpha_2+3\alpha_1) &= 3/2, & (\bar\omega_1\,|\,2\alpha_2+3\alpha_1) &= 3/2,\\
(\bar\omega_2\,|\,\alpha_1) &= 0, & (\bar\omega_2\,|\,\alpha_2) &= 3/2,\\
(\bar\omega_2\,|\,\alpha_2+\alpha_1) &= 3/2, & (\bar\omega_2\,|\,\alpha_2+2\alpha_1) &= 3/2,\\
(\bar\omega_2\,|\,\alpha_2+3\alpha_1) &= 3/2, & (\bar\omega_2\,|\,2\alpha_2+3\alpha_1) &= 3.
\end{aligned}$$

Следовательно, если n_1, n_2 — целые числа $\geqslant 0$, то размерность простого модуля со старшим весом $n_1\bar\omega_1+n_2\bar\omega_2$ равна

$$\Big(1+\frac{n_1/2}{1/2}\Big)\Big(1+\frac{3n_2/2}{3/2}\Big)\Big(1+\frac{n_1/2+3n_2/2}{1/2+3/2}\Big)\Big(1+\frac{n_1+3n_2/2}{1+3/2}\Big)\times$$

$$\times\Big(1+\frac{3n_1/2+3n_2/2}{3/2+3/2}\Big)\Big(1+\frac{3n_1/2+3n_2}{3/2+3}\Big)=$$

$$=(1+n_1)(1+n_2)\Big(1+\frac{n_1+3n_2}{4}\Big)\Big(1+\frac{2n_1+3n_2}{5}\Big)\times$$

$$\times\Big(1+\frac{n_1+n_2}{2}\Big)\Big(1+\frac{n_1+2n_2}{3}\Big)=$$

$$=\frac{(1+n_1)(1+n_2)(2+n_1+n_2)(3+n_1+2n_2)(4+n_1+3n_2)(5+2n_1+3n_2)}{5!}.$$

В частности, размерность фундаментального представления со старшим весом $\bar\omega_1$ (соотв. $\bar\omega_2$) равна 7 (соотв. 14).

3. Кратности весов простых $\mathfrak{g}$-модулей

Предложение 1. *Пусть $\omega \in P_{++}$. Тогда для любого $\lambda \in P$ кратность веса λ в модуле $E(\omega)$ равна*

$$m_\lambda = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \mathfrak{P}(w(\omega+\rho) - (\lambda+\rho)).$$

По теореме 1 и лемме 1 мы получаем, что

$$\operatorname{ch} E(\omega) = Ke^{-\rho} d \operatorname{ch} E(\omega) = Ke^{-\rho} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\omega+\rho)},$$

поэтому

$$\operatorname{ch} E(\omega) = \sum_{w \in W,\ \gamma \in Q_+} \varepsilon(w) \mathfrak{P}(\gamma) e^{-\rho+w(\omega+\rho)-\gamma}$$

и

$$m_\lambda = \sum_{w \in W,\ \gamma \in Q_+,\ \gamma = -\lambda-\rho+w(\omega+\rho)} \varepsilon(w) \mathfrak{P}(\gamma).$$

Следствие. *Если λ — вес модуля $E(\omega)$, отличный от веса ω, то*

$$m_\lambda = -\sum_{w \in W,\ w \neq 1} \varepsilon(w) m_{\lambda+\rho-w\rho}.$$

Применим предложение 1 при $\omega = 0$. Тогда, если $\mu \in P - \{0\}$, то

$$0 = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \mathfrak{P}(w\rho + \mu - \rho),$$

откуда следует, что

$$\mathfrak{P}(\mu) = -\sum_{w \in W,\ w \neq 1} \varepsilon(w) \mathfrak{P}(\mu + w\rho - \rho). \tag{1}$$

Таким образом, предложение 1 показывает, что

$$m_\lambda = -\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \sum_{w' \in W,\ w' \neq 1} \varepsilon(w') \mathfrak{P}(w(\omega+\rho) - (\lambda+\rho) + w'\rho - \rho),$$

поскольку $w(\omega+\rho) \neq \lambda+\rho$ для всех $w \in W$ (§ 7, предложение 5(iii)). Следовательно,

$$m_\lambda = -\sum_{w' \in W,\ w' \neq 1} \varepsilon(w') \sum_{w \in W} \varepsilon(w) \mathfrak{P}(w(\omega+\rho) - (\lambda+\rho-w'\rho+\rho)) =$$

$$= -\sum_{w' \in W,\ w' \neq 1} \varepsilon(w') m_{\lambda+\rho-w'\rho} \text{ (предложение 1).}$$

4. Разложение тензорного произведения двух простых $\mathfrak{g}$-модулей

Предложение 2. *Пусть $\lambda, \mu \in P_{++}$. В кольце $\mathscr{R}(\mathfrak{g})$ имеет место соотношение*

$$[\lambda] \cdot [\mu] = \sum_{\nu \in P_{++}} m(\lambda, \mu, \nu) [\nu],$$

где

$$m(\lambda, \mu, \nu) = \sum_{w,\, w' \in W} \varepsilon(ww')\, \mathfrak{P}(w(\lambda+\rho) + w'(\mu+\rho) - (\nu+2\rho)).$$

Пусть E, F — конечномерные простые $\mathfrak{g}$-модули со старшими весами λ, μ. Пусть l_ν — длина изотопной компоненты со старшим весом ν в модуле $E \otimes F$. Достаточно показать, что

$$l_\nu = \sum_{w,\, w' \in W} \varepsilon(ww')\, \mathfrak{P}(w(\lambda+\rho) + w'(\mu+\rho) - (\nu+2\rho)). \qquad (2)$$

Положим $c_1 = \operatorname{ch}(E) = \sum_{\sigma \in P} m_\sigma e^\sigma$, $c_2 = \operatorname{ch}(F)$, $d = J(e^\rho)$, где элемент J определен так же, как и в n° 2. Имеет место равенство

$$\sum_{\xi \in P_{++}} l_\xi \operatorname{ch}[\xi] = \operatorname{ch}[E \otimes F] = c_1 c_2,$$

откуда, умножая на d и применяя теорему 1, получаем, что

$$\sum_{\xi \in P_{++}} l_\xi J(e^{\xi+\rho}) = c_1 J(e^{\mu+\rho}) = \left(\sum_{\sigma \in P} m_\sigma e^\sigma\right)\left(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\mu+\rho)}\right) =$$
$$= \sum_{\tau \in P}\left(\sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, m_{\tau+\rho-w(\mu+\rho)}\right) e^{\tau+\rho}. \qquad (3)$$

Но если $\xi \in P_{++}$, то $\xi + \rho$ принадлежит камере, определенной базисом B (гл. VI, § 1, n° 10); для элементов $w \in W$, отличных от 1, мы получаем, что $w(\xi+\rho) \notin P_{++}$. Следовательно, коэффициент при $e^{\nu+\rho}$ в выражении $\sum_{\xi \in P_{++}} l_\xi J(e^{\xi+\rho})$ равен l_ν. Ввиду формулы (3)

$$l_\nu = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, m_{\nu+\rho-w(\mu+\rho)}$$

или вследствие предложения 1

$$l_\nu = \sum_{w,\, w' \in W} \varepsilon(w)\, \varepsilon(w')\, \mathfrak{P}(w'(\lambda+\rho) - (\nu+\rho-w(\mu+\rho)+\rho)),$$

что доказывает формулу (2).

Пример. Рассмотрим пример из n° 1. Пусть $\lambda = (n/2)\alpha$, $\mu = (p/2)\alpha$ и $\nu = (q/2)\alpha$, где $n \geqslant p$. Тогда

$$m(\lambda, \mu, \nu) = \mathfrak{P}\left(\frac{n}{2}\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{p}{2}\alpha + \frac{\alpha}{2} - \frac{q}{2}\alpha - \alpha\right) -$$
$$- \mathfrak{P}\left(\frac{n}{2}\alpha + \frac{\alpha}{2} - \frac{p}{2}\alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{q}{2}\alpha - \alpha\right) -$$
$$- \mathfrak{P}\left(-\frac{n}{2}\alpha - \frac{\alpha}{2} + \frac{p}{2}\alpha + \frac{\alpha}{2} - \frac{q}{2}\alpha - \alpha\right) +$$
$$+ \mathfrak{P}\left(-\frac{n}{2}\alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{p}{2}\alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{q}{2}\alpha - \alpha\right) =$$
$$= \mathfrak{P}\left(\frac{n+p-q}{2}\alpha\right) - \mathfrak{P}\left(\frac{n-p-q-2}{2}\alpha\right).$$

Это число равно нулю, если $n+p+q$ не делится на 2 или если $q \geqslant n+p$. Если $q=n+p-2r$, где r — целое число $\geqslant 0$, то

$$m(\lambda, \mu, \nu) = \mathfrak{P}(r\alpha) - \mathfrak{P}((r-p-1)\alpha);$$

следовательно, $m(\lambda, \mu, \nu)=1$, если $r \leqslant p$, и $m(\lambda, \mu, \nu)=0$, если $r > p$. Таким образом, $\mathfrak{g}$-модуль $V(n) \otimes V(p)$ изоморфен модулю

$$V(n+p) \oplus V(n+p-2) \oplus V(n+p-4) \oplus \ldots \oplus V(n-p)$$

(формула Клебша — Гордона).

§ 10. Максимальные подалгебры полупростых алгебр Ли

Теорема 1. *Пусть V — конечномерное векторное пространство, $\mathfrak{g}$ — редуктивная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, $\mathfrak{q}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и Φ — билинейная форма $(x, y) \mapsto \operatorname{Tr}(xy)$ на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Предположим, что ортогональное дополнение $\mathfrak{n}$ подпространства $\mathfrak{q}$ в $\mathfrak{g}$ относительно формы Φ — подалгебра Ли, состоящая из нильпотентных эндоморфизмов пространства V. Тогда $\mathfrak{q}$ — параболическая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

а) *$\mathfrak{q}$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}$.* Обозначим его через $\mathfrak{p}$. Пусть $x \in \mathfrak{q}$ и $y \in \mathfrak{n}$. Для любого $z \in \mathfrak{q}$ имеем $[z, x] \in \mathfrak{q}$, поэтому

$$\Phi([x, y], z) = \Phi(y, [z, x]) = 0.$$

Следовательно, $[x, y] \in \mathfrak{n}$. Таким образом, $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Так как $\mathfrak{n}$ — идеал в алгебре $\mathfrak{p}$, состоящий из нильпотентных эндоморфизмов пространства V, то пространство $\mathfrak{p}$ ортогонально к $\mathfrak{n}$ относительно формы Φ (гл. I, § 4, n° 3, предложение 4 г)). Так как форма Φ невырожденна[1]), то $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, что и доказывает наше утверждение.

б) *Существует такая редуктивная подалгебра $\mathfrak{m}$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$, что подалгебра $\mathfrak{q}$ будет полупрямым произведением $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$.* Обозначим через $\mathfrak{n}_V(\mathfrak{q})$ наибольший идеал алгебры Ли $\mathfrak{q}$, состоящий из нильпотентных эндоморфизмов пространства V. Тогда идеал $\mathfrak{n}_V(\mathfrak{q})$ содержит $\mathfrak{n}$ и является ортогональным дополнением к $\mathfrak{q}$ (*там же*); следовательно $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_V(\mathfrak{q})$. Так как по предположению подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ редуктивна в $\mathfrak{gl}(V)$, то она — разделяющая подалгебра (гл. VII, § 5, n° 1, предложение 2). Поэтому алгебра Ли $\mathfrak{q}$, являющаяся пересечением подалгебры $\mathfrak{g}$ с нормализатором подалгебры $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{gl}(V)$, тоже будет разделяющей подалгеброй Ли (*там же*, следствие 1 предложения 3). Теперь наше утверждение следует из предложения 7 гл. VII, § 5, n° 3.

---

[1]) Пусть $\mathfrak{z}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}$ относительно Φ. Это идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$. По лемме 3 из гл. I, § 5, каждый элемент идеала $\mathfrak{z}$ нильпотентен. Тождественное представление алгебры $\mathfrak{g}$ полупросто (гл. I, § 6, следствие 1 предложения 7), поэтому каждый элемент идеала $\mathfrak{z}$ полупрост (гл. I, § 6, теорема 4). Таким образом, $\mathfrak{z}=0$.

Выберем некоторую подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{m}$, обозначим через $\mathfrak{g}_1$ централизатор подалгебры $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и положим $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{q}$, $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_1$.

в) *Алгебры Ли* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{q}_1$ *и* $\mathfrak{n}_1$ *удовлетворяют предположениям, сделанным относительно* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{q}$ *и* $\mathfrak{n}$. Так как подалгебра Ли $\mathfrak{m}$ редуктивна в $\mathfrak{gl}(V)$, то алгебра Ли $\mathfrak{h}$ коммутативна и состоит из полупростых эндоморфизмов пространства V (гл. VII, § 2, n° 4, следствие 3 теоремы 2). Тогда $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ и подалгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ редуктивна в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (гл. VII, § 1, n° 3, предложение 11), поэтому она редуктивна и в $\mathfrak{gl}(V)$ (гл. I, § 6, следствие 2 предложения 7). Ясно, что подалгебра Ли $\mathfrak{n}_1$ состоит из нильпотентных эндоморфизмов пространства V. Так как $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{q}$, редуктивная в $\mathfrak{gl}(V)$, то присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{q}$ полупросто. По определению $\mathfrak{q}_1$ — это множество инвариантов для $\mathrm{ad}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{h})$; следовательно, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 + [\mathfrak{h}, \mathfrak{q}]$ (гл I, § 3, n° 5, предложение 6). Так как

$$\Phi(\mathfrak{g}_1, [\mathfrak{h}, \mathfrak{q}]) = \Phi([\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_1], \mathfrak{q}) = 0,$$

то элемент подалгебры $\mathfrak{g}_1$ ортогонален к $\mathfrak{q}_1$ тогда и только тогда, когда он ортогонален к $\mathfrak{q}$. Таким образом, $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{n}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{q}_1$ в $\mathfrak{g}_1$.

г) *Подалгебра Картана* $\mathfrak{h}$ *алгебры Ли* $\mathfrak{m}$ *является подалгеброй Картана алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_1$, то ясно, что $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_1$. При этом $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_1] = 0$, подалгебра $\mathfrak{h}$ коммутативна, а подалгебра $\mathfrak{n}_1$ нильпотентна; значит, алгебра Ли $\mathfrak{q}_1$ нильпотентна.

Ввиду а) и в) алгебра Ли $\mathfrak{q}_1$ является нормализатором $\mathfrak{n}_1$ в $\mathfrak{g}_1$, поэтому подалгебра Ли $\mathfrak{q}_1$ совпадает со своим нормализатором в $\mathfrak{g}_1$ и, таким образом, это подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$.

Так как алгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ редуктивна в $\mathfrak{gl}(V)$, то ввиду следствия 3 теоремы 2 из гл. VII, § 2, n° 4, подалгебра $\mathfrak{q}_1$ состоит из полупростых эндоморфизмов пространства V. Однако подалгебра Ли $\mathfrak{n}_1$ состоит из нильпотентных эндоморфизмов пространства V, поэтому $\mathfrak{n}_1 = 0$. Следовательно, $\mathfrak{h} = \mathfrak{q}_1$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}_1$, а так как подалгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ нормализует $\mathfrak{h}$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1$. Таким образом, доказано, что все элементы подалгебры Ли $\mathfrak{h}$ полупросты в $\mathfrak{g}$ и что централизатор подалгебры Ли $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ равен $\mathfrak{h}$. Поэтому $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0(\mathfrak{h})$ и, следовательио, подалгебра Ли $\mathfrak{h}$ является подалгеброй Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

д) $\mathfrak{q}$ — *параболическая подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. Как показано выше, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, подалгебра $\mathfrak{n}$ состоит из нильпотентных элементов алгебры $\mathfrak{g}$ и $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$. Обозначим через $\bar{k}$ алгебраическое замыкание поля k. По определению $\mathfrak{q}$ является параболической подалгеброй в алгебре $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $\bar{k} \otimes_k \mathfrak{q}$ — параболическая подалгебра в алгебре Ли $\bar{k} \otimes_k \mathfrak{g}$. Так как рассматриваемые свойства сохраняются при расширении поля скаляров, то можно проводить доказательство, предполагая, что подалгебра $\mathfrak{h}$ расщепляющая. Пусть R — система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Ввиду предложения 2(v) из § 3, n° 1, существует такое подмножество P множества R, что $P \cap (-P) = \varnothing$ и $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in P} \mathfrak{g}^\alpha$. Обозначим через P' множество таких корней α, что $-\alpha \notin P$. Тогда $P' \cup (-P') = R$ и ортогональное дополнение $\mathfrak{q}$ подпространства $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}$ совпадает с $\mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in P'} \mathfrak{g}^\alpha$. Тем самым показано, что подалгебра $\mathfrak{q}$ параболическая. Ч. Т. Д.

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра Ли,* V — *конечномерное векторное пространство,* ρ — *линейное представление алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *в пространстве* V, D — *подпространство векторного пространства* V, $\mathfrak{h}$ — *подалгебра Картана алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$ (соотв. $\mathfrak{s}'$) — *множество таких элементов* $x \in \mathfrak{h}$, *что* $\rho(x) D \subset D$ (соотв. $\rho(x) D = 0$), *и* Φ — *билинейная форма на* $\mathfrak{g}$, *ассоциированная*[1]) *с представлением* ρ.

(i) *Если подалгебра* $\mathfrak{h}$ *расщепляющая, то подпространства* $\mathfrak{s}$ *и* $\mathfrak{s}'$ *в* $\mathfrak{h}$ *рациональны над полем* $\mathbf{Q}$.

(ii) *Если отображение* ρ *инъективно, то ограничение формы* Φ *на* $\mathfrak{s}$ (соотв. на $\mathfrak{s}'$) *невырожденно.*

Предположим, что подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ расщепляющая. Пусть d — размерность подпространства D. Положим $W = \bigwedge^d (V)$ и $\sigma = \bigwedge^d (\rho)$. Обозначим через $(e_1, \ldots, e_d)$ базис пространства D, и пусть $e = e_1 \wedge \ldots \wedge e_d$ — разложимый d-вектор, соответствующий подпространству D. Пусть P — множество весов представления σ относительно подалгебры $\mathfrak{h}$ и W^μ — подпространство пространства W, соответствующее весу μ. Положим $e = \sum_{\mu \in P} e^\mu$ (где $e^\mu \in W^\mu$ при всех $\mu \in P$) и обозначим через P' множество весов μ, для которых $e^\mu \neq 0$, а через P'' — множество разностей элементов из P'. Если $x \in \mathfrak{h}$, то $x \in \mathfrak{s}$ в том и только том случае, когда в поле k существует такой элемент c, что $\rho(x) . e = c . e$ (гл. VII, § 5, n° 4, лемма 2 (i)). Так как $\rho(x) . e^\mu = \mu(x) . e^\mu$, то ясно, что условие $x \in \mathfrak{s}$ эквивалентно тому, что $\mu(x) = 0$ для всех $\mu \in P''$. Так как $\mathbf{Q}$-структура на пространстве $\mathfrak{h}$ задана $\mathbf{Q}$-подпространством $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$, порожденным элементами H_α, и любой элемент μ из P'' принимает рациональные значения на $\mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$, то мы получаем (*Alg.*, chap. II, § 8, n° 4, proposition 5), что подпространство $\mathfrak{s}$ пространства $\mathfrak{h}$ рационально над $\mathbf{Q}$.

---

[1]) Иначе говоря, $\Phi(x, y) = \operatorname{Tr}(\rho(x) \rho(y))$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$.

Пусть p_μ для любого $\mu \in P$ — проектор на подпространство V^μ, определенный разложением $V = \bigoplus_{\mu \in P} V^\mu$, а P_1 — множество тех $\mu \in P$, для которых $p_\mu(D) \neq 0$. Понятно, что $\mathfrak{s}'$ совпадает с пересечением ядер (в пространстве $\mathfrak{h}$) элементов из P_1. Вследствие этого такое же рассуждение, как для подпространства $\mathfrak{s}$, показывает, что подпространство $\mathfrak{s}'$ пространства $\mathfrak{h}$ рационально над полем $\mathbf{Q}$. Тем самым утверждение (i) доказано.

Расширив, если нужно, поле скаляров, мы можем при доказательстве утверждения (ii) предполагать, что поле k алгебраически замкнуто и, как следствие, что подалгебра $\mathfrak{h}$ расщепляющая. Пусть $\mathfrak{m}$ — некоторое подпространство векторного пространства $\mathfrak{h}$, рациональное над $\mathbf{Q}$. По следствию предложения 1 из § 7, n° 1, для любого нулевого элемента x из $\mathfrak{m}_\mathbf{Q} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}_\mathbf{Q}$ выполнено неравенство $\Phi(x, x) > 0$. Таким образом, ограничение формы Φ на $\mathfrak{m}_\mathbf{Q}$ невырожденно, и ограничение формы Φ на подпространство $\mathfrak{m}$ тоже невырожденно, так как $\mathfrak{m}$ канонически изоморфно пространству $k \otimes_\mathbf{Q} m_\mathbf{Q}$.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{q}$ — подалгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Подалгебра $\mathfrak{q}$ называется разделяющей подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, если для любого элемента $x \in \mathfrak{q}$ полупростая и нильпотентная компоненты элемента x в алгебре $\mathfrak{g}$ принадлежат $\mathfrak{q}$. Обозначим через $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{q})$ множество тех элементов x радикала алгебры $\mathfrak{q}$, для которых эндоморфизм $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(x)$ нильпотентен.*

Пусть ρ — точное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в конечномерном векторном пространстве V. Тогда (гл. I, § 6, n° 3, теорема 3) элемент x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ полупрост (соотв. нильпотентен) в том и только том случае, когда эндоморфизм $\rho(x)$ пространства V полупрост (соотв. нильпотентен). Поэтому $\mathfrak{q}$ — разделяющая подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $\rho(\mathfrak{q})$ — разделяющая подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(V)$ в смысле определения 1 из гл. VII, § 5, n° 1. Аналогично, используя обозначения из гл. VII, § 5, n° 3, получим

$$\rho(\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{q})) = \mathfrak{n}_V(\rho(\mathfrak{q})).$$

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, состоящая из нильпотентных элементов, и $\mathfrak{q}$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{n}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что $\mathfrak{n}$ совпадает с множеством нильпотентных элементов радикала алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда подалгебра Ли $\mathfrak{q}$ параболическая.*

Отметим сначала, что подалгебра $\mathfrak{q}$ разделяющая (гл. VII, § 5, n° 1, следствие 1 предложения 3). Ввиду теоремы 1 достаточно доказать, что $\mathfrak{q}$ совпадает с ортогональным дополнением $\mathfrak{n}^0$ подалгебры $\mathfrak{n}$ относительно формы Киллинга Φ алгебры $\mathfrak{g}$. Ясно, что $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{n}^0$ (гл. I, § 4, n° 3, предложение 4 г)). Ввиду предложения 7 из гл. VII, § 5, n° 3, существует такая подалгебра $\mathfrak{m}$ алгебры $\mathfrak{q}$, редуктивная в $\mathfrak{g}$, что алгебра $\mathfrak{q}$ является полупрямым произведением $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$. Покажем, что ограничение формы Φ на $\mathfrak{m}$ невырожденно. Пусть $\mathfrak{c}$ — центр подалгебры $\mathfrak{m}$. Тогда $\Phi([\mathfrak{m}, \mathfrak{m}], \mathfrak{c}) = 0$ по предложению 5 из гл. I, § 5, n° 6, и ограничение формы Φ на подалгебру $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ невырожденно ввиду предложения 1 из гл. I, § 6, n° 1. Остается показать, что ограничение формы Φ на $\mathfrak{c}$ невырожденно. Обозначим через $\mathfrak{k}$ подалгебру Картана алгебры Ли $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$; тогда $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{c}$ — коммутативная и редуктивная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{c}$ (гл. VII, § 2, n° 3, предложение 10). Тогда $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}$ — коммутативная подалгебра алгебры $\mathfrak{q}$, содержащая $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{c}$, и эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{q}} x$ полупрост при любом $x \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}$. Следовательно, подалгебра $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}$ содержится в некоторой подалгебре Картана $\mathfrak{h}'$ алгебры $\mathfrak{q}$ (гл. VII, § 2, n° 3, предложение 10). Обозначим через f проекцию алгебры Ли $\mathfrak{q}$ на $\mathfrak{m}$ с ядром $\mathfrak{n}$, тогда $f(\mathfrak{h}')$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{m}$ (гл. VII, § 2, n° 1, следствие предложения 4), содержащая $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{c}$, и, следовательно, совпадающая с $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{c}$. Вследствие этого $f(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{q}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{c}$, и так как каждый элемент подалгебры $\mathfrak{h}$ полупрост в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{c}$. Тогда

$$\mathfrak{c} = \{x \in \mathfrak{h} \mid [x, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n} \text{ и } [x, [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]] = 0\}.$$

По лемме 1 ограничение формы Φ на $\mathfrak{c}$ невырожденно.

Пусть $\mathfrak{q}^0$ — ортогональное дополнение подпространства $\mathfrak{q}$ в $\mathfrak{g}$ относительно формы Φ. Предыдущие рассуждения показывают, что $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}^0 = \mathfrak{n}$. Предположим, что $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{n}^0$, следовательно, $\mathfrak{q}^0 \neq \mathfrak{n}$ (и $\mathfrak{q}^0 \supset \mathfrak{n}$). Так как подпространство $\mathfrak{q}$ устойчиво относительно эндоморфизмов $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}$, то устойчиво и $\mathfrak{q}^0$. Из теоремы Энгеля следует, что существует такой элемент $x \in \mathfrak{q}^0$, что $x \notin \mathfrak{n}$ и $[x, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$. Но тогда $x \in \mathfrak{q}^0 \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{n}$, что приводит нас к противоречию. Значит, $\mathfrak{q} = \mathfrak{n}^0$.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{q}$ — некоторый максимальный элемент множества всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отличных от $\mathfrak{g}$. Тогда подалгебра $\mathfrak{q}$ параболическая или редуктивная.*

Можно предполагать, что $\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ для некоторого конечномерного векторного пространства V. Пусть $\mathfrak{e}(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{g}$ — разделяющая оболочка подалгебры $\mathfrak{q}$. Если $\mathfrak{e}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{g}$, то подалгебра $\mathfrak{q}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ (гл. VII, § 5, n° 2, предложение 4); следовательно, она полупроста, и, таким образом, подалгебра $\mathfrak{q}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$. Предположим, что $\mathfrak{e}(\mathfrak{q}) \neq \mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{e}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$, поэтому $\mathfrak{q}$ — разделяющая подалгебра. Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{q}$ не редуктивна $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{n}$ множество нильпотентных элементов радикала алгебры Ли $\mathfrak{q}$. Тогда $\mathfrak{n} \neq 0$ (гл. VII, § 5, n° 3, предложение 7 (i)). Пусть $\mathfrak{p}$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ и $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$, поскольку алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста. Следовательно, $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ и подалгебра $\mathfrak{q}$ параболическая (теорема 1).

Следствие 2. *Пусть* $\mathfrak{n}$ — *подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *состоящая из нильпотентных элементов. Тогда существует параболическая подалгебра* $\mathfrak{q}$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *обладающая следующими свойствами*:

(i) $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{q})$;

(ii) *нормализатор подалгебры* $\mathfrak{n}$ *в алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *содержится в* $\mathfrak{q}$;

(iii) *любой автоморфизм алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *сохраняющий подалгебру* $\mathfrak{n}$, *сохраняет и* $\mathfrak{q}$.

Если алгебра $\mathfrak{g}$ *расщепляема, то* $\mathfrak{n}$ *содержится в некоторой подалгебре Бореля алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{q}_1$ — нормализатор подалгебры $\mathfrak{n}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{n}_1=\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{q}_1)$. Определим по индукции $\mathfrak{q}_i$ как нормализатор подалгебры $\mathfrak{n}_{i-1}$ в алгебре $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{n}_i$ как $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{q}_i)$. Последовательности $(\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots)$ и $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots)$ возрастающие. Существует такой номер j, что $\mathfrak{q}_j=\mathfrak{q}_{j+1}$, т. е. подалгебра $\mathfrak{q}_j$ совпадает с нормализатором подалгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{q}_j)$ в $\mathfrak{g}$. Следовательно, $\mathfrak{q}_j$ — параболическая подалгебра (теорема 1), причем $\mathfrak{n}\subset\mathfrak{n}_j=\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{q}_j)$ и $\mathfrak{q}_1\subset\mathfrak{q}_j$. Если подалгебра $\mathfrak{n}$ устойчива относительно какого-либо автоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то подалгебры $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$ и $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$ также устойчивы относительно этого гомоморфизма. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ расщепляема, то подалгебра $\mathfrak{q}_j$ содержит некоторую подалгебру Бореля $\mathfrak{b}$, причем $\mathfrak{b}\supset\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{q}_j)\supset\mathfrak{n}$ (§ 3, n° 3, предложение 13).

Теорема 3. *Предположим, что поле* k *алгебраически замкнуто. Пусть* $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебры Ли и* $\mathfrak{a}$ — *ее разрешимая подалгебра. Тогда в* $\mathfrak{g}$ *существует подалгебра Бореля, содержащая подалгебру* $\mathfrak{a}$.

Ввиду следствия 1 (ii) предложения 4 гл. VII, § 5, n° 2, можно предположить, что подалгебра $\mathfrak{a}$ разделяющая. Тогда существует коммутативная подалгебра $\mathfrak{t}$ алгебры $\mathfrak{g}$, состоящая из полупростых элементов и такая, что алгебра $\mathfrak{a}$ будет полупрямым произведением $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ (гл. VII, § 5, n° 3, следствие 2 предложения 6). Существует (следствие 2 теоремы 2) такая параболическая подалгебра $\mathfrak{q}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})\subset\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{q})$ и нормализатор подалгебры $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ содержится в $\mathfrak{q}$; таким образом, $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{q}$. Пусть $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащаяся в $\mathfrak{q}$, и $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащаяся в $\mathfrak{b}$. Тогда $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{q}$, и существует такой элемент $s\in\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{q})$, что $s(\mathfrak{t})\subset\mathfrak{h}$ (гл. VII, § 2, n° 3, предложение 10, и гл. VII, § 3, n° 2, теорема 1).

Тогда $s(\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{q})) = \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{q})$ (гл. VII, § 3, n° 1, замечание 1), так что

$$s(\mathfrak{a}) = s(\mathfrak{t}) + s(\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a})) \subset \mathfrak{h} + s(\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{q})) = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{q}) \subset \mathfrak{b}.$$

Следствие. *Если поле k алгебраически замкнуто, то любая максимальная разрешимая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является борелевской.*

§ 11. Классы нильпотентных элементов и $\mathfrak{sl}_2$-тройки

В этом параграфе через $\mathfrak{g}$ обозначается конечномерная алгебра Ли.

1. Определение $\mathfrak{sl}_2$-тройки

Определение 1. *$\mathfrak{sl}_2$-тройкой в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется такой набор (x, h, y) элементов из $\mathfrak{g}$, отличный от $(0, 0, 0)$, что*

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = -h.$$

Пусть (x, h, y) есть $\mathfrak{sl}_2$-тройка в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Линейное отображение τ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$, такое, что $\tau(X_+) = x$, $\tau(H) = h$, $\tau(X_-) = y$, — ненулевой (поскольку алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ проста) инъективный гомоморфизм, образом которого является подпространство $kx + kh + ky$. Значит, мы получаем каноническую биекцию множества $\mathfrak{sl}_2$-троек алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на множество инъективных гомоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста и (x, h, y) есть $\mathfrak{sl}_2$-тройка алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то x и y — нильпотентные элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а h — ее полупростой элемент (гл. I, § 6, n° 3, предложение 4).

Лемма 1. *Пусть $x, h, y, y' \in \mathfrak{g}$. Если (x, h, y) и (x, h, y') — две $\mathfrak{sl}_2$-тройки алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то $y = y'$.*

Действительно, $y - y' \in \operatorname{Ker}(\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x)$ и $(\operatorname{ad}_\mathfrak{g} h)(y - y') = -2(y - y')$, так что эндоморфизм $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} x$ инъективен в пространстве $\operatorname{Ker}(p + \operatorname{ad}_\mathfrak{g} h)$ для любого целого $p > 0$ (§ 1, n° 2, следствие предложения 2).

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{n}$ — такая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что для всех $n \in \mathfrak{n}$ эндоморфизм $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(n)$ нильпотентен. Пусть $h \in \mathfrak{g}$ — такой элемент, что $[h, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}$. Тогда $e^{\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{n})} . h = h + \mathfrak{n}$.*

Ясно, что $e^{\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{n})} . h \subset h + \mathfrak{n}$. Пусть $v \in \mathfrak{n}$. Докажем, что $h + v \in e^{\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{n})} . h$. Достаточно доказать, что $h + v \in e^{\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{n})} . h + \mathscr{C}^p\mathfrak{n}$ для любого $p \geqslant 1$ (потому что $\mathscr{C}^p\mathfrak{n} = 0$ для достаточно большого p). Это очевидно при $p = 1$, так как $\mathscr{C}^1\mathfrak{n} = \mathfrak{n}$. Предположим, что мы доказали существование таких элементов $y_p \in \mathfrak{n}$

и $z_p \in \mathscr{C}^p\mathfrak{n}$, что $h+v=e^{\mathrm{ad}_\mathfrak{g} y_p}.h+z_p$. Так как $(\mathrm{ad}_\mathfrak{g} h)(\mathfrak{n})=\mathfrak{n}$, то $(\mathrm{ad}_\mathfrak{g} h)|\mathfrak{n}$ — биективное отображение подпространства $\mathfrak{n}$ в себя, и его ограничение на $\mathscr{C}^p\mathfrak{n}$, относительно которого $\mathscr{C}^p\mathfrak{n}$ устойчиво, тоже биективно; следовательно, существует такой элемент $z \in \mathscr{C}^p\mathfrak{n}$, что $z_p=[z, h]$. Тогда

$$e^{\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(y_p+z)}h - e^{\mathrm{ad}_\mathfrak{g} y_p}h \in [z, h]+\mathscr{C}^{p+1}\mathfrak{n},$$

поэтому

$$e^{\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(y_p+z)}h \in h+v-z_p+[z, h]+\mathscr{C}^{p+1}\mathfrak{n}=h+v+\mathscr{C}^{p+1}\mathfrak{n},$$

и наше утверждение доказывается индукцией по p.

Лемма 3. *Пусть* $x \in \mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}=\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\, x)$, $\mathfrak{q}=\mathrm{Im}(\mathrm{ad}\, x)$. *Тогда* $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q}$ *и* $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ — *подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

Если $u \in \mathfrak{p}$ и $v \in \mathfrak{q}$, то существует такой элемент $w \in \mathfrak{g}$, что $v=[x, w]$; следовательно,

$$[u, v]=[u, [x, w]]=[x, [u, w]]-[[x, u], w]=[x, [u, w]] \in \mathfrak{q}.$$

Однако, $\mathfrak{p}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, следовательно, $[\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}, \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}] \subset \mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$.

Лемма 4. *Пусть* (x, h, y) *и* (x, h', y') — *две* $\mathfrak{sl}_2$-*тройки в алгебре Ли* $\mathfrak{g}$. *Тогда существует такой элемент* $z \in \mathfrak{g}$, *что эндоморфизм* $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} z$ *нильпотентен, и выполняются равенства*

$$e^{\mathrm{ad}_\mathfrak{g} z}x=x, \quad e^{\mathrm{ad}_\mathfrak{g} z}h=h', \quad e^{\mathrm{ad}_\mathfrak{g} z}y=y'.$$

Пусть $\mathfrak{n}=\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\, x)\cap\mathrm{Im}(\mathrm{ad}\, x)$ и $\mathfrak{g}_p=\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\, h-p)$ для любого $p \in \mathbf{Z}$. Ввиду результатов из § 1, n° 3 (примененных к присоединенному представлению алгебры Ли $kx+ky+kh$ в пространстве $\mathfrak{g}$), мы получаем, что $\mathfrak{n} \subset \sum\limits_{p>0}\mathfrak{g}_p$; следовательно, эндоморфизм $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\mathfrak{n}$ нильпотентен при любом $n \in \mathfrak{n}$ и $[h, \mathfrak{n}]=\mathfrak{n}$. Таким образом, $[x, h'-h]=0$ и $[x, y-y']=h'-h$, а значит, $h'-h \in \mathfrak{n}$. Вследствие лемм 2 и 3 существует такой элемент $z \in \mathfrak{n}$, что $e^{\mathrm{ad}_\mathfrak{g} z}h=h'$. Так как $z \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{ad}_\mathfrak{g} x$, то $e^{\mathrm{ad}_\mathfrak{g} z}x=x$. Лемма 1 показывает, что $e^{\mathrm{ad}_\mathfrak{g} z}y=y'$. Ч. Т. Д.

Пусть G — группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{sl}_2$-тройки (x, h, y) и (x', h', y') называются G-сопряженными, если существует такой элемент $g \in G$, что $gx=x'$, $gh=h'$, $gy=y'$.

Предложение 1. *Пусть* G — *группа автоморфизмов алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *содержащая группу* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, *а* (x, h, y) *и* (x', h', y') *суть* $\mathfrak{sl}_2$-*тройки в алгебре Ли* $\mathfrak{g}$. *Положим*

$$\mathfrak{t}=kx+kh+ky, \quad \mathfrak{t}'=kx'+kh'+ky'.$$

Рассмотрим следующие условия:

(i) *элементы x и x' G-сопряжены;*

(ii) *$\mathfrak{sl}_2$-тройки (x, h, y) и (x', h', y') G-сопряжены;*

(iii) *подпространства $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}'$ G-сопряжены.*

Тогда (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii). *Если поле k алгебраически замкнуто, то эти три условия эквивалентны.*

(i)$\Leftrightarrow$(ii). Это следует из леммы 4.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Это очевидно.

Предположим, что поле k алгебраически замкнуто, и докажем, что (iii)$\Rightarrow$(i). Рассмотрим прежде всего случай $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}' = \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$. Поскольку эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ нильпотентен, то эндоморфизм x пространства k^2 нильпотентен (гл. I, § 6, теорема 3). Поэтому существует такая матрица $\mathrm{A} \in \mathbf{GL}(2, k)$, что $\mathrm{A}x\mathrm{A}^{-1} = x'$, и, следовательно, существует автоморфизм α алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$, для которого $\alpha(x) = x'$. Однако $\alpha \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ (§ 5, n° 3, следствие 2 предложения 5). Перейдем к общему случаю. Предположим, что пространства $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}'$ G-сопряжены, тогда достаточно доказать, что элементы x и x' G-сопряжены. Можно предположить, что $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$. По предыдущему существует такой элемент $\beta \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{t})$, что $\beta x = x'$. Но если $t \in \mathfrak{t}$ — такой элемент, что эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}}\, t$ нильпотентен, то эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, t$ нильпотентен. Следовательно, автоморфизм β продолжается до элемента из группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

Замечание. Три условия из предложения 1 будут эквивалентны, если предположить, что $k = k^2$ (см. упражнение 1).

2. *$\mathfrak{sl}_2$-тройки в полупростых алгебрах Ли*

Лемма 5. *Пусть V — конечномерное векторное пространство, A и B — эндоморфизмы пространства V. Предположим, что эндоморфизм A нильпотентен и $[A, [A, B]] = 0$. Тогда эндоморфизм AB нильпотентен.*

Положим $C = [A, B]$. Поскольку $[A, C] = 0$, при любом целом $p \geqslant 0$ имеют место равенства

$$[A, BC^p] = [A, B]C^p = C^{p+1}.$$

Следовательно, $\mathrm{Tr}(C^p) = 0$ при всех $p \geqslant 1$, что доказывает нильпотентность эндоморфизма C (*Alg.*, chap. VII, § 3, n° 5, corollaire 4 de la proposition 13). Пусть теперь $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k, а $\lambda \in \bar{k}$ и $x \in V \otimes_k \bar{k}$ таковы, что $ABx = \lambda x$, $x \neq 0$. Соотношение $[[B, A], A] = 0$ показывает, что при любых целых $p \geqslant 0$ имеет место равенство $[B, A^p] = p[B, A]A^{p-1}$.

Пусть r — наименьшее целое число, для которого $A^r x = 0$. Тогда

$$\lambda A^{r-1}x = A^{r-1}ABx = A^r Bx = BA^r x - [B, A^r]x = -r[B, A]A^{r-1}x.$$

Так как эндоморфизм $[B, A]$ нильпотентен и $A^{r-1}x \neq 0$, то $\lambda = 0$. Таким образом, все собственные числа эндоморфизма AB, принадлежащие полю $\bar{k}$, равны нулю, что доказывает утверждение леммы.

Лемма 6. *Пусть $h, x \in \mathfrak{g}$ таковы, что $[h, x] = 2x$ и $h \in (\operatorname{ad} x)(\mathfrak{g})$. Тогда существует такой элемент $y \in \mathfrak{g}$, что набор (x, h, y) равен или тройке* $(0, 0, 0)$, *или* $\mathfrak{sl}_2$*-тройке.*

Обозначим через $\mathfrak{g}'$ разрешимую алгебру Ли $kh + kx$. Поскольку $x \in [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$, эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ нильпотентен (гл. I, § 5, n° 3, теорема 1). Пусть $\mathfrak{n}$ — ядро этого эндоморфизма. Так как $[\operatorname{ad} h, \operatorname{ad} x] = 2 \operatorname{ad} x$, то $(\operatorname{ad} h)\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}$. Пусть $z \in \mathfrak{g}$ — такой элемент, что $h = -[x, z]$. Положим $M_n = (\operatorname{ad} x)^n \mathfrak{g}$ для любого целого $n \geqslant 0$. Если $n > 0$, то мы получаем (§ 1, n° 1, лемма 1), что

$$[\operatorname{ad} z, (\operatorname{ad} x)^n] = n((\operatorname{ad} h) - n + 1)(\operatorname{ad} x)^{n-1}.$$

Следовательно, если $u \in M_{n-1}$, то

$$n((\operatorname{ad} h) - n + 1)u \in (\operatorname{ad} z)(\operatorname{ad} x)u + M_n.$$

Так как $(\operatorname{ad} h)\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}$, то из этих выражений следует, что

$$((\operatorname{ad} h) - n + 1)(\mathfrak{n} \cap M_{n-1}) \subset \mathfrak{n} \cap M_n.$$

Эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, поэтому для достаточно больших n мы получаем $M_n = 0$. Следовательно, собственными числами эндоморфизма $\operatorname{ad} h | \mathfrak{n}$ будут целые числа $\geqslant 0$. Вследствие этого ограничение эндоморфизма $\operatorname{ad} h + 2$ на пространство $\mathfrak{n}$ обратимо.

Но $[h, z] + 2z \in \mathfrak{n}$, поскольку

$$[x, [h, z] + 2z] = [[x, h], z] + [h, [x, z]] + 2[x, z] = \\ = [-2x, z] + [h, -h] + 2[x, z] = 0.$$

Следовательно, существует такой элемент $z' \in \mathfrak{n}$, что $[h, z'] + 2z' = [h, z] + 2z$. Это означает, что $[h, y] = -2y$, если положить $y = z - z'$. Так как $[x, y] = [x, z] = -h$, это завершает доказательство леммы.

Предложение 2 (*Джекобсон — Морозов*). *Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Пусть x — ненулевой нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда существуют такие элементы $h, y \in \mathfrak{g}$, что (x, h, y) есть* $\mathfrak{sl}_2$*-тройка.*

Пусть $\mathfrak{n} = \operatorname{Ker}(\operatorname{ad} x)^2$. Если $z \in \mathfrak{n}$, то $[\operatorname{ad} x, [\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} z]] = \operatorname{ad}([x, [x, z]]) = 0$. По лемме 5 эндоморфизм $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} z$ нильпотентен, а следовательно, $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, z) = 0$. Это показывает, что элемент x ортогонален к подпространству $\mathfrak{n}$ относительно формы Киллинга Φ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как

$$\Phi((\mathrm{ad}\, x)^2 y,\ y') = \Phi(y,\ (\mathrm{ad}\, x)^2 y')$$

при любых $y,\ y' \in \mathfrak{g}$ и форма Φ невырожденна, то ортогональным подпространством к подпространству $\mathfrak{n}$ будет образ эндоморфизма $(\mathrm{ad}\, x)^2$. Следовательно, существует такой элемент $y' \in \mathfrak{g}$, что $x = (\mathrm{ad}\, x)^2 y'$. Положим

$$h = -2[x,\ y'].$$

Мы получаем, что $[h,\ x] = 2x$ и $h \in (\mathrm{ad}\, x)\,\mathfrak{g}$. Таким образом, достаточно применить лемму 6.

Следствие. *Предположим, что $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Пусть G — группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. *Отображение, которое каждой $\mathfrak{sl}_2$-тройке $(x,\ h,\ y)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ставит в соответствие нильпотентный элемент x, определяет посредством факторизации биективное отображение множества классов G-сопряженных $\mathfrak{sl}_2$-троек на множество классов G-сопряженных ненулевых нильпотентных элементов.*

Это утверждение вытекает из предложений 1 и 2.

Лемма 7. Пусть K — поле, содержащее по крайней мере 4 элемента. Пусть G—группа матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$, где $\alpha \in K^*$, $\beta \in K$, а G' — группа таких матриц с $\alpha = 1$. Тогда $G' = (G,\ G)$.

Если $\alpha,\ \alpha' \in K^*$ и $\beta,\ \beta' \in K$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \alpha'^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \alpha'^{-1} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\alpha'\beta' - \alpha\beta\alpha'^2 + \alpha^2\alpha'\beta' + \alpha\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В частности,

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \alpha'^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \alpha'^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \beta(1-\alpha'^2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, существует такой элемент $\alpha'_0 \in K^*$, что $\alpha'_0 \neq 1$ и $\alpha'_0 \neq -1$, поэтому $K \cdot (1 - \alpha_0'^2) = K$, откуда следует лемма.

Предложение 3. *Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Тогда группа* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *совпадает со своей производной группой. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ расщепляема, то* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *— производная группа группы* $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

Пусть x — ненулевой нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Выберем такие элементы $h, y \in \mathfrak{g}$, что (x, h, y) есть $\mathfrak{sl}_2$-тройка (предложение 2). Подалгебру $\mathfrak{s}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную тройкой (x, h, y), можно отождествить с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$. Пусть ρ — представление алгебры Ли $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(2, k)$ в пространстве $\mathfrak{g}$, заданное формулой $z \mapsto \mathrm{ad}_\mathfrak{g} z$; пусть π — представление группы $\mathbf{SL}(2, k)$, согласованное с представлением ρ (§ 1, n° 4). Образ представления π порожден эндоморфизмами $\exp(t\,\mathrm{ad}_\mathfrak{g} x)$ и $\exp(t\,\mathrm{ad}_\mathfrak{g} y)$ при $t \in k$ (*Alg.*, chap. III, § 8, n°, proposition 17] и, следовательно, содержится в группе $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Так как группа $\mathbf{SL}(2, k)$ совпадает со своей производной подгруппой (лемма 7 и *Alg.*, *там же*), то элемент $\exp(\mathrm{ad}_\mathfrak{g} x)$ принадлежит производной группе G группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Значит, $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) = G$. Предположим теперь, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ расщепляема. Так как факторгруппа $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ коммутативна (§ 5, n° 3, *замечание* 3), то предыдущие рассуждения доказывают, что производная группа группы $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ совпадает с группой $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

3. Простые элементы

Определение 2. *Элемент h алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется простым, если существуют такие элементы $x, y \in \mathfrak{g}$, что (x, h, y) есть $\mathfrak{sl}_2$-тройка алгебры Ли $(\mathfrak{g})$.*

Говорят также, что h — простой элемент $\mathfrak{sl}_2$-тройки (x, h, y).

Предложение 4. *Пусть h — ненулевой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Он является простым тогда и только тогда, когда существует такой элемент $x \in \mathfrak{g}$, что $[h, x] = 2x$ и $h \in (\mathrm{ad}\, x)(\mathfrak{g})$.*

Очевидно, что сформулированное условие необходимо. Ввиду леммы 6 оно и достаточно.

Предложение 5. *Предположим, что $\mathfrak{g}$ — расщепляемая полупростая алгебра Ли. Пусть $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, R — множество корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и B — базис системы корней R. Пусть h — простой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, принадлежащий подалгебре $\mathfrak{h}$. Тогда h сопряжен относительно группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ такому элементу h' подалгебры Картана $\mathfrak{h}$, что $\alpha(h') \in \{0, 1, 2\}$ для любых корней $\alpha \in B$.*

Собственные значения эндоморфизма $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} h$ принадлежат $\mathbf{Z}$ (§ 1, n° 2, следствие предложения 2). Следовательно, $h \in \mathfrak{h}_\mathbf{Q}$. Существует такой элемент w группы Вейля W расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, что $\alpha(wh) \geqslant 0$ для всех корней $\alpha \in B$ (гл. VI, § 1, n° 5, теорема 2 (i)). Учитывая следствие теоремы 2 из § 2, n° 2, мы можем ограничиться случаем, когда $\alpha(h) \in \mathbf{N}$ при любых $\alpha \in B$. Пусть R_+ — множество положительных корней относительно базиса B и $R_- = -R_+$. В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует $\mathfrak{sl}_2$-тройка вида (x, h, y). Обозначим через T множество таких корней β, что $\beta(h) = -2$. Мы получаем, что $T \subset R_-$ и $y \in \sum_{\beta \in T} \mathfrak{g}^\beta$. Предположим, что существует корень $\alpha \in B$, для которого $\alpha(h) > 2$. Тогда $(\alpha+\beta)(h) > 0$ для любых $\beta \in T$ и, следовательно, $\alpha + \beta \notin R_-$ и $\alpha + \beta \neq 0$. При этом, так как $\beta \in R_-$ и $\alpha \in B$, то $\alpha + \beta \notin R_+$, поэтому $\alpha + \beta \notin R \cup \{0\}$, так что $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = 0$. Вследствие этого мы получаем, что $[y, \mathfrak{g}^\alpha] = 0$. Однако отображение $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, y \mid \mathfrak{g}^\alpha$ инъективно, поскольку $\alpha(h) > 0$ (§ 1, n°2, следствие предложения 1). Это противоречие доказывает, что $\alpha(h) \leqslant 2$ для любого корня $\alpha \in B$.

Следствие. *Если поле k алгебраически замкнуто, а $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли ранга l, то число классов сопряженных относительно группы* $\mathrm{Aut}_e \mathfrak{g}$ *простых элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ не превосходит* 3^l.

Действительно, любой полупростой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ сопряжен относительно группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ с некоторым элементом подалгебры Картана $\mathfrak{h}$.

Лемма 8. *Предположим, что поле k алгебраически замкнуто, а алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Пусть h — такой полупростой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что собственные значения эндоморфизма* $\mathrm{ad}\, h$ *рациональны. Рассмотрим* $\mathfrak{g}^0 = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\, h)$, $\mathfrak{g}^2 = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\, h - 2)$. *Пусть G_h — множество элементарных автоморфизмов группы $\mathfrak{g}$, оставляющих на месте h, и $x \in \mathfrak{g}^2$ — такой элемент, что* $[x, \mathfrak{g}^0] = \mathfrak{g}^2$. *Тогда множество $G_h x$ содержит подмножество пространства $\mathfrak{g}^2$, открытое и всюду плотное в топологии Зарисского.*

Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}^0$. Она является подалгеброй Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и содержит элемент h (гл. VII, § 2, n°3, предложение 10). При этом $h \in \mathfrak{h}_\mathbf{Q}$. Пусть R — система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, а Q — группа радикальных весов. Тогда существует такой базис B системы корней R, что $\alpha(h) \geqslant 0$ для любых $\alpha \in B$.

Обозначим через U множество таких элементов $z \in \mathfrak{h}$, что $\alpha(z) \neq 0$ при любом $\alpha \in B$. Пусть $(\mathrm{H}'_\alpha)_{\alpha \in B}$ — дуальный к B базис пространства $\mathfrak{h}$. Если $z \in U$, то существует гомоморфизм группы Q в группу k^*, который переводит любой элемент $\gamma \in Q$ в $\prod_{\alpha \in B} \alpha(z)^{\gamma(\mathrm{H}'_\alpha)}$.

Вследствие предложений 2 и 4 из § 4 эндоморфизм $\varphi(z)$ векторного пространства $\mathfrak{g}$, индуцирующий на пространстве $\mathfrak{g}^\gamma$

гомотетию с коэффициентом $\prod_{\alpha \in B} \alpha(z)^{\gamma(\mathrm{H}'_\alpha)}$, будет элементарным автоморфизмом пространства $\mathfrak{g}$, который, очевидно, принадлежит группе G_h.

Пусть $s \in \mathfrak{h}$. Если $\gamma \in R$ — такой корень, что $\mathfrak{g}^\gamma \cap \mathfrak{g}^2 \neq 0$, то

$$2 = \gamma(h) = \gamma\Big(\sum_{\alpha \in B} \alpha(h)\,\mathrm{H}'_\alpha\Big) = \sum_{\alpha \in B} \alpha(h)\,\gamma(\mathrm{H}'_\alpha).$$

Так как $\alpha(h) \geqslant 0$ для любого корня $\alpha \in B$ и так как $\gamma(\mathrm{H}'_\alpha)$ — целые числа, которые или все $\geqslant 0$, или все $\leqslant 0$, то $\gamma(\mathrm{H}'_\alpha) \in \mathbf{N}$ при любом корне $\alpha \in B$. Следовательно, можно рассмотреть (при $z \in \mathfrak{h}$) эндоморфизм $\psi(z)$ векторного пространства $\mathfrak{g}^2$, который индуцирует на пространстве $\mathfrak{g}^\gamma \cap \mathfrak{g}^2$ гомотетию с коэффициентом $\prod_{\alpha \in B} \alpha(z)^{\gamma(\mathrm{H}'_\alpha)}$. Отображение $z \mapsto \psi(z)$ пространства $\mathfrak{h}$ в $\mathrm{End}(\mathfrak{g}^2)$ полиномиально. Если $z \in U$, то $\psi(z) = \varphi(z) \mid \mathfrak{g}^2$.

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ — попарно различные корни расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, равные нулю на элементе h. Если $y_1 \in \mathfrak{g}^{\gamma_1}, \ldots$ $\ldots, y_r \in \mathfrak{g}^{\gamma_r}$, то $e^{\mathrm{ad}\, y_1} \ldots e^{\mathrm{ad}\, y_r} \in G_h$. Следовательно, полагая

$$\rho(z, y_1, \ldots, y_r) = \psi(z)\, e^{\mathrm{ad}\, y_1} \ldots e^{\mathrm{ad}\, y_r} x$$

для $z \in \mathfrak{h}$, $y_1 \in \mathfrak{g}^{\gamma_1}, \ldots, y_r \in \mathfrak{g}^{\gamma_r}$, мы определяем отображение ρ пространства $\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}^{\gamma_1} \times \ldots \times \mathfrak{g}^{\gamma_r}$ в $\mathfrak{g}^2$. Это отображение полиномиально и $\rho(U, \mathfrak{g}^{\gamma_1}, \ldots, \mathfrak{g}^{\gamma_r}) \subset G_h x$. Ввиду предложений 3 и 4 из гл. VII, дополнение I, достаточно доказать, что линейное отображение, касательное в некоторой точке к отображению ρ, будет сюръективным.

Пусть T — линейное отображение, касательное в точке $h_0 = \sum_{\alpha \in B} \mathrm{H}'_\alpha$ к отображению $z \mapsto \psi(z)$. Тогда $T(z)$ — эндоморфизм пространства $\mathfrak{g}^2$, который индуцирует на пространстве $\mathfrak{g}^\gamma \cap \mathfrak{g}^2$ гомотетию с коэффициентом

$$\sum_{\alpha \in B} \gamma(\mathrm{H}'_\alpha)\, \alpha(h_0)^{\gamma(\mathrm{H}'_\alpha) - 1} \alpha(z) \prod_{\beta \in B,\ \beta \neq \alpha} \beta(h_0)^{\gamma(\mathrm{H}'_\beta)} =$$
$$= \sum_{\alpha \in B} \gamma(\mathrm{H}'_\alpha)\, \alpha(z) = \gamma(z).$$

Следовательно, линейное отображение, касательное в точке h_0 к отображению $z \mapsto \rho(z, 0, \ldots, 0)$, совпадает с отображением $z \mapsto [z, x]$. Образ этого отображения равен $[x, \mathfrak{h}]$. Линейным отображением, касательным в точке 0 к отображению $y_1 \mapsto$ $\mapsto \psi(h_0)[y_1, x]$, является отображение $y_1 \mapsto \rho(h_0, y_1, 0, \ldots, 0)$. Образ этого последнего равен $\psi(h_0)[x, \mathfrak{g}^{\gamma_1}] = [x, \mathfrak{g}^{\gamma_1}]$. Таким же образом мы устанавливаем, что образ линейного отображения, касательного в точке 0 к отображению $y_i \mapsto \rho(h_0, 0, \ldots, 0, y_i, 0, \ldots, 0)$, совпадает с подпространством $[x, \mathfrak{g}^{\gamma_i}]$. Наконец, образом линейного отображения, касательного в точке $(h_0, 0, \ldots, 0)$ к отображению ρ, будет пространство

$$[x, \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{\gamma_1} + \ldots + \mathfrak{g}^{\gamma_r}] = [x, \mathfrak{g}^0] = \mathfrak{g}^2. \quad \text{Ч. Т. Д.}$$

Группа G_h является алгебраической группой с алгеброй Ли ad $\mathfrak{g}^0$.

Предложение 6. *Предположим, что поле k алгебраически замкнуто, а алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Пусть G — группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая группу* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, *а (x, h, y) и (x', h', y') — две $\mathfrak{sl}_2$-тройки алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *элементы h и h' G-сопряжены;*

(ii) *$\mathfrak{sl}_2$-тройки (x, h, y) и (x', h', y') G-сопряжены.*

Достаточно доказать импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii), и мы можем ограничиться случаем, когда $h = h'$. Пусть $\mathfrak{g}^2$ и G_h такие же, как в лемме 8. По следствию предложения 2 из § 1, n° 2, мы получаем, что $x \in \mathfrak{g}^2$ и $[x, \mathfrak{g}^0] = \mathfrak{g}^2$. Следовательно, множество $G_h x$ содержит открытое и плотное в топологии Зарисского подмножество множества $\mathfrak{g}^2$; то же самое можно сказать и о множестве $G_h x'$. Следовательно, существует такой элемент $a \in G_h$, что $a(x) = x'$. При этом $a(h) = h$ и, значит, $a(y) = y'$ (n° 1, лемма 1).

Следствие 1. *Отображение, которое каждой $\mathfrak{sl}_2$-тройке ставит в соответствие ее простой элемент, определяет посредством факторизации биективное отображение множества классов G-сопряженных $\mathfrak{sl}_2$-троек на множество классов простых G-сопряженных элементов.*

Следствие 2. *Если* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = l$, *то число сопряженных классов относительно группы* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *ненулевых нильпотентных элементов не превосходит* 3^l.

Это утверждение вытекает из следствия 1, следствия предложения 2 и следствия предложения 5.

Следствие 3. *Если* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) = l$, *то число сопряженных классов относительно группы* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, изоморфных* $\mathfrak{sl}(2, k)$, *не превосходит* 3^l.

Это вытекает из следствия 1, предложения 1 и следствия предложения 5.

4. Главные элементы

Определение 3. *Предположим, что $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли.*

(i) *Нильпотентный элемент x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется главным, если размерность пространства* $\operatorname{Ker} \operatorname{ad} x$ *равна рангу алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

(ii) *Простой элемент h алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется главным, если h — регулярный элемент и если собственные значения эндоморфизма* $\operatorname{ad} h$ *в алгебраическом замыкании поля k принадлежат множеству $2\mathbf{Z}$.*

(iii) *$\mathfrak{sl}_2$-тройка (x, h, y) в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется главной, если длина пространства $\mathfrak{g}$, рассматриваемого как модуль над алгеброй Ли $kx + kh + ky$, равна рангу алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Предложение 7. *Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Пусть (x, h, y) есть $\mathfrak{sl}_2$-тройка в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *элемент x главный;*

(ii) *элемент h главный;*

(iii) *$\mathfrak{sl}_2$-тройка (x, h, y) главная.*

Положим $\mathfrak{g}^p = \operatorname{Ker}(\operatorname{ad} h - p)$, где $p \in \mathbf{Z}$. Пусть $\mathfrak{g}' = \sum_{p \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}^{2p}$. Если рассмотреть пространство $\mathfrak{g}$ как модуль над алгеброй Ли $\mathfrak{a} = kx + kh + ky$, то $\mathfrak{g}'$ будет суммой простых нечетномерных подмодулей (§ 1, n° 2, следствие предложения 2). Пусть l (соотв. l') — длина пространства $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{g}'$), рассматриваемого как $\mathfrak{a}$-модуль. Ввиду § 1, n° 2, мы получаем, что

$$\dim(\operatorname{Ker} \operatorname{ad} x) = l \geqslant l' = \dim(\operatorname{Ker} \operatorname{ad} h) \geqslant \operatorname{rg}(\mathfrak{g}).$$

Отсюда сразу вытекает эквивалентность условий (i) и (iii). Однако условие (ii) означает, что $\dim(\operatorname{Ker} \operatorname{ad} h) = \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ или, иначе говоря, что

$$\dim(\operatorname{Ker} \operatorname{ad} h) = \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$$

и $l' = l$. Отсюда следует эквивалентность условия (ii) другим условиям.

Предложение 8. *Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста и $\neq 0$. Пусть $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, R — система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, B — базис системы R и h^0 — такой элемент подалгебры $\mathfrak{h}$, что $\alpha(h^0) = 2$ для любых $\alpha \in B$.*

(i) *Элемент h^0 простой и главный.*

(ii) *Элементы x в алгебре $\mathfrak{g}$, для которых существует $\mathfrak{sl}_2$-тройка вида (x, h^0, y), — это те элементы пространства $\sum_{\alpha \in B} \mathfrak{g}^{\alpha}$, компоненты которых в каждом подпространстве $\mathfrak{g}^{\alpha}$ отличны от нуля.*

Такие элементы h^0 рассматривались в § 7, n° 5, лемма 2 (см. там же, формула 1). Из этой леммы следует, что h^0 — главный элемент и что если $x \in \sum_{\alpha \in B} \mathfrak{g}^\alpha$ — элемент, каждая компонента которого в пространстве $\mathfrak{g}^\alpha$ отлична от нуля, то существует $\mathfrak{sl}_2$-тройка вида (x, h^0, y). Обратно, пусть (x, h^0, y) есть $\mathfrak{sl}_2$-тройка. Тогда $[h^0, x] = 2x$; следовательно, $x \in \sum_{\gamma \in R, \gamma(h^0)=2} \mathfrak{g}^\gamma = \sum_{\alpha \in B} \mathfrak{g}^\alpha$. Точно так же $y \in \sum_{\alpha \in B} \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Представим h^0, x и y в виде

$$h^0 = \sum_{\alpha \in B} a_\alpha \mathrm{H}_\alpha, \quad \text{где} \quad a_\alpha > 0 \quad \text{для всех} \quad \alpha \in B,$$

$$x = \sum_{\alpha \in B} \mathrm{X}_\alpha, \quad \text{где} \quad \mathrm{X}_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha \quad \text{для всех} \quad \alpha \in B,$$

$$y = \sum_{\alpha \in B} \mathrm{X}_{-\alpha}, \quad \text{где} \quad \mathrm{X}_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha} \quad \text{для всех} \quad \alpha \in B.$$

Тогда

$$\sum_{\alpha \in B} a_\alpha \mathrm{H}_\alpha = h^0 = [y, x] = \sum_{\alpha, \beta \in B} [\mathrm{X}_{-\beta}, \mathrm{X}_\alpha] = \sum_{\alpha \in B} [\mathrm{X}_{-\alpha}, \mathrm{X}_\alpha],$$

откуда вытекает, что $[\mathrm{X}_{-\alpha}, \mathrm{X}_\alpha] \neq 0$ при любых $\alpha \in B$.

Следствие. *В расщепляемой полупростой алгебре Ли существует нильпотентный главный элемент.*

В нерасщепляемой полупростой алгебре Ли 0 может быть единственным нильпотентным элементом.

Предложение 9. *Предположим, что поле k алгебраически замкнуто, а алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Тогда все простые* (соотв. *нильпотентные*) *главные элементы сопряжены относительно группы* $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

Воспользуемся обозначениями из предложения 8. Пусть h — простой главный элемент. Он сопряжен относительно группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ с таким элементом $h' \in \mathfrak{h}$, что $\alpha(h') \in \{0, 1, 2\}$ для любого $\alpha \in B$ (n° 3, предложение 5). Так как h' — простой главный элемент, то $\alpha(h') \neq 0$ и $\alpha(h') \in 2\mathbf{Z}$ для любых $\alpha \in B$; следовательно, $\alpha(h') = 2$ для любых корней $\alpha \in B$, откуда вытекает, что $h' = h^0$. Это доказывает утверждение относительно простых главных элементов.

Пусть x, x' — нильпотентные главные элементы. Тогда существуют $\mathfrak{sl}_2$-тройки (x, h, y) и (x', h', y'). По предложению 7 h и h' — простые главные элементы; следовательно, они сопряжены относительно группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Таким образом, элементы x и x' сопряжены относительно группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ (предложение 6).

Лемма 9. *В обозначениях предложения* 8 *положим* $\mathfrak{g}^p = \operatorname{Ker}(\operatorname{ad} h^0 - p)$ *для любого* $p \in \mathbf{Z}$. *Пусть* $\mathfrak{g}^2_*$ — *множество тех элементов пространства* $\mathfrak{g}^2 = \sum_{\alpha \in B} \mathfrak{g}^\alpha$, *компоненты которых в каждом пространстве* $\mathfrak{g}^\alpha$ *отличны от нуля. Пусть* R_+ — *множество положительных корней относительно базиса* B, $\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}^\alpha$ *и* $x \in \mathfrak{g}^2_*$. *Тогда* $e^{\operatorname{ad} \mathfrak{n}_+} . x = x + [\mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_+]$.

Ясно, что $e^{\operatorname{ad} \mathfrak{n}_+} . x \subset x + [\mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_+]$. Пусть $v \in [\mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_+]$. Докажем, что $x + v \in e^{\operatorname{ad} \mathfrak{n}_+} . x$. Положим $\mathfrak{n}^{(p)} = \sum_{r \geqslant p} \mathfrak{g}^{2r}$. Достаточно доказать, что

$$x + v \in e^{\operatorname{ad} \mathfrak{n}_+} . x + \mathfrak{n}^{(p)}$$

для любых $p \geqslant 2$. Это ясно при $p = 2$, поскольку $\mathfrak{n}^{(2)} = [\mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_+]$ (§ 3, n° 3, предложение 9(iii)). Предположим, что мы нашли элемент $z \in \mathfrak{n}^+$, для которого $v + x - e^{\operatorname{ad} z} x \in \mathfrak{n}^{(p)}$. Так как существует $\mathfrak{sl}_2$-тройка вида (x, h^0, y) (предложение 8), то из следствия предложения 2 § 1, n° 2, вытекает, что $[x, \mathfrak{g}^{2p-2}] = \mathfrak{g}^{2p}$; поэтому существует такой элемент $z' \in \mathfrak{g}^{2p-2} \subset \mathfrak{n}_+$, что

$$v + x - e^{\operatorname{ad} z} x \in [z', x] + \mathfrak{n}^{(p+1)}.$$

Таким образом, $v + x \in e^{\operatorname{ad}(z+z')} x + \mathfrak{n}^{(p+1)}$, и наше утверждение доказывается по индукции. ◂

Предложение 10. *Предположим, что алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *полупроста. Пусть* $\mathfrak{h}$ — *расщепляющая подалгебра Картана в* $\mathfrak{g}$, R — *система корней расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, B — *базис системы* R, R_+ — *множество корней, положительных относительно базиса* B, *и* $\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}^\alpha$. *Тогда нильпотентные главные элементы, принадлежащие* $\mathfrak{n}_+$, — *это те элементы из* $\mathfrak{n}_+$, *у которых при каждом* $\alpha \in B$ *компонента, принадлежащая пространству* $\mathfrak{g}^\alpha$, *отлична от нуля.*

Предложение 8 и лемма 9 доказывают, что такие элементы являются нильпотентными главными элементами. Докажем обратное утверждение. Очевидно, можно предположить, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста. Пусть h^0 и $\mathfrak{g}^p$ такие же, как в предложении 8 и лемме 9. Пусть ω — наибольший корень. Положим $\omega(h^0) = 2q$, тогда $q = h - 1$, где h — число Кокстера системы R (см. гл. VI, § 1, n° 11, предложение 31). При этом $\mathfrak{g}^{2q} = \mathfrak{g}^\omega$, $\mathfrak{g}^{-2q} = \mathfrak{g}^{-\omega}$ и $\mathfrak{g}^{2k} = 0$ при $|k| > q$. Существует главная $\mathfrak{sl}_2$-тройка (x^0, h^0, y^0). По следствию из предложения 2 § 1, n° 2, мы получаем, что $(\operatorname{ad} x^0)^{2q}(\mathfrak{g}^{-\omega}) = \mathfrak{g}^\omega$; следовательно, $(\operatorname{ad} x^0)^{2q} \neq 0$. Пусть x — нильпотентный главный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, принадлежащий $\mathfrak{n}_+$. Если $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k, то элементы $x \otimes 1$ и $x^0 \otimes 1$ сопряжены относительно автоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{g} \otimes_k \bar{k}$ (предложение 9); следовательно, $(\operatorname{ad} x)^{2q} \neq 0$. Поэтому существует такой корень $\lambda \in R$, что $(\operatorname{ad} x)^{2q} \mathfrak{g}^\lambda \neq 0$. Положим $x = \sum_{n \geqslant 1} x_n$, где $x_n \in \mathfrak{g}^{2n}$. Тогда

$$(\operatorname{ad} x)^{2q} \mathfrak{g}^\lambda \subset (\operatorname{ad} x_1)^{2q} \mathfrak{g}^\lambda + \sum_{k > 4q + \lambda(h^0)} \mathfrak{g}^k = (\operatorname{ad} x_1)^{2q} \mathfrak{g}^\lambda,$$

поскольку $4q + \lambda(h^0) \geqslant 4q - 2q = 2q$. Таким образом, $(\operatorname{ad} x_1)^{2q} \mathfrak{g}^\lambda \subset \mathfrak{g}^{4q+\lambda(h^0)}$, откуда вытекает, что $\lambda = -\omega$. Аналогично мы получаем, что $(\operatorname{ad} x_1)^{2q} \mathfrak{g}^{-\omega} = \mathfrak{g}^\omega$. Имеет место равенство $\omega = \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha$, где $n_\alpha > 0$ при всех $\alpha \in B$ (гл. VI, § 1, n° 8, *замечание*). Если существует такой корень $\alpha_0 \in B$, что $x_1 \in \sum_{\alpha \in B,\, \alpha \neq \alpha_0} \mathfrak{g}^\alpha$, то из соотношения

$$\omega \notin -\omega + \sum_{\alpha \in B,\, \alpha \neq \alpha_0} k\alpha$$

следует, что $\mathfrak{g}^\omega \not\subset (\operatorname{ad} x_1)^p \mathfrak{g}^{-\omega}$ для любого p; но это невозможно, следовательно, содержащаяся в подпространстве $\mathfrak{g}^\alpha$ компонента элемента x_1 отлична от нуля при всех $\alpha \in B$.

§ 12. Порядки Шевалле

1. Решетки и порядки

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbf{Q}$. *Решеткой* в пространстве V называется такой свободный $\mathbf{Z}$-подмодуль $\mathscr{V}$ модуля V, для которого $\mathbf{Q}$-линейное отображение $\alpha_{\mathscr{V}, V}\colon \mathscr{V} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \to V$, индуцированное вложением $\mathscr{V}$ в V, биективно. Если пространство V конечномерно, то это условие равносильно тому, что $\mathscr{V}$ является $\mathbf{Z}$-подмодулем конечного типа, порождающим $\mathbf{Q}$-пространство V (напомним, что по следствию 2 из *Алг.*, гл. VII, § 4, n° 4, $\mathbf{Z}$-модуль конечного типа без кручения свободен); впрочем, тогда наше определение становится частным случаем определения 1 из *Комм. алг.*, гл. VII, § 4, n° 1 (*там же*, пример 3). Если W — векторное подпространство пространства V и $\mathscr{V}$ — решетка в пространстве V, то $\mathscr{V} \cap W$ — решетка в W.

Если V есть $\mathbf{Q}$-алгебра, то *порядком* в ней называется решетка $\mathscr{V}$ в векторном пространстве V, которая является $\mathbf{Z}$-подалгеброй алгебры V. При этом отображение $\alpha_{\mathscr{V}, V}$ будет изоморфизмом $\mathbf{Q}$-алгебр. Если V есть $\mathbf{Q}$-алгебра с единицей, то *унитарным порядком* в алгебре V называется порядок в V, содержащий единицу.

Предположим, что V — биалгебра над $\mathbf{Q}$ с коумножением c и коединицей γ. Если $\mathscr{V}$ — решетка в векторном пространстве V, то каноническое отображение $i\colon \mathscr{V} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathscr{V} \to V \otimes_{\mathbf{Q}} V$ инъективно. *Бипорядком* в биалгебре V называется такой унитарный порядок $\mathscr{V}$ в алгебре с единицей V, для которого $\gamma(\mathscr{V}) \subset \mathbf{Z}$ и $c(\mathscr{V}) \subset i(\mathscr{V} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathscr{V})$. Отображения

$$\gamma_{\mathscr{V}}\colon \mathscr{V} \to \mathbf{Z} \quad \text{и} \quad c_{\mathscr{V}}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathscr{V},$$

построенные по отображениям γ и c, снабжают порядок $\mathscr{V}$ структурой биалгебры над $\mathbf{Z}$, и отображение $\alpha_{\mathscr{V}, V}$ будет изоморфизмом $\mathbf{Q}$-биалгебр.

2. Разделенные степени в биалгебре

Пусть A — некоторая k-алгебра с единицей, $x \in A$, $d \in k$, $n \in \mathbf{N}$. Положим

$$x^{(n,\, d)} = \frac{x(x-d)\,\ldots\,(x-d(n-1))}{n!} = \prod_{i=0}^{n-1} (x - id)/(i+1). \tag{1}$$

Мы получаем, в частности, что $x^{(0,\, d)} = 1$, $x^{(1,\, d)} = x$. Будем считать, что $x^{(n,\, d)} = 0$ для целых чисел $n < 0$. Положим

$$x^{(n)} = x^{(n,\, 0)} = \frac{x^n}{n!}, \tag{2}$$

$$\binom{x}{n} = x^{(n,\, 1)} = \frac{x(x-1)\,\ldots\,(x-n+1)}{n!}. \tag{3}$$

Предложение 1. *Пусть A — биалгебра с копроизведением c, и пусть x — ее примитивный элемент* (гл. II, § 1, n° 2). *Тогда*

$$c\left(x^{(n,\, d)}\right) = \sum_{\substack{p \in \mathbf{N},\ q \in \mathbf{N},\\ p+q=n}} x^{(p,\, d)} \otimes x^{(q,\, d)}. \tag{4}$$

При $n \leqslant 0$ утверждение тривиально. Докажем наше предложение индукцией по n. Если для некоторого n формула (4) верна, то

$$\begin{aligned}
(n+1)\, c\left(x^{(n+1,\, d)}\right) &= c(x - dn)\, c\left(x^{(n,\, d)}\right) = \\
&= (x \otimes 1 + 1 \otimes x - dn 1 \otimes 1)\, c\left(x^{(n,\, d)}\right) = \\
&= \sum_{p+q=n} \left[x x^{(p,\, d)} \otimes x^{(q,\, d)} + x^{(p,\, d)} \otimes x x^{(q,\, d)} - \right. \\
&\qquad \left. - (p+q)\, d x^{(p,\, d)} \otimes x^{(q,\, d)}\right] =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{p+q=n} (x-pd)\, x^{(p,\,d)} \otimes x^{(q,\,d)} + \sum_{p+q=n} x^{(p,\,d)} \otimes (x-qd)\, x^{(q,\,d)} =$$

$$= \sum_{p+q=n} (p+1)\, x^{(p+1,\,d)} \otimes x^{(q,\,d)} +$$

$$+ \sum_{p+q=n} (q+1)\, x^{(p,\,d)} \otimes x^{(q+1,\,d)} =$$

$$= \sum_{r+s=n+1} r x^{(r,\,d)} \otimes x^{(s,\,d)} + \sum_{r+s=n+1} s x^{(r,\,d)} \otimes x^{(s,\,d)} =$$

$$= (n+1) \sum_{r+s=n+1} x^{(r,\,d)} \otimes x^{(s,\,d)}.$$

Следовательно, формула (4) верна и для $n+1$.

3. *Целочисленный вариант теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта*

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbf{Q}$, а $U(\mathfrak{g})$ — ее универсальная обертывающая алгебра, снабженная структурой биалгебры. Если I — совершенно упорядоченное множество, $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i \in I}$ — семейство элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $\boldsymbol{n} = (n_i)_{i \in I} \in \mathbf{N}^{(I)}$ — мультииндекс, то положим

$$\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n})} = \prod_{i \in I} \frac{x_i^{n_i}}{n_i!}, \tag{5}$$

где сомножители расположены в соответствии с упорядочением множества I и произведение вычисляется в $U(\mathfrak{g})$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{U}$ — бипорядок в биалгебре $U(\mathfrak{g})$, $\mathcal{G} = \mathcal{U} \cap \mathfrak{g}$ — порядок в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и $(x_i)_{i \in I}$ — базис пространства $\mathcal{G}$. Снабдим множество I некоторым совершенным порядком и предположим, что для каждого $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}^I$ задан такой элемент $[\boldsymbol{n}]$ из бипорядка $\mathcal{U}$, что фильтрация элемента $[\boldsymbol{n}] - \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n})}$ в биалгебре $U(\mathfrak{g})$ меньше $|\boldsymbol{n}|$. Тогда семейство элементов $[\boldsymbol{n}]$ по всем $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}^I$ образует базис $\mathbf{Z}$-модуля $\mathcal{U}$.*

Обозначим через $U_p(\mathfrak{g})$ для $p \in \mathbf{N}$ множество элементов биалгебры $U(\mathfrak{g})$ фильтрации $\leqslant p$. Тогда образы в пространстве $U_p(\mathfrak{g})/U_{p-1}(\mathfrak{g})$ тех элементов $\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n})}$, для которых $|\boldsymbol{n}| = p$, образуют базис этого векторного $\mathbf{Q}$-пространства (гл. I, § 2, n°7, теорема 1); следовательно, элементы $[\boldsymbol{n}]$ образуют базис векторного $\mathbf{Q}$-пространства $U(\mathfrak{g})$. Остается доказать следующее утверждение (где мы полагаем $M = \mathbf{N}^I$):

(*) если элементы $u \in \mathcal{U}$, $(a_n) \in \mathbf{Z}^{(M)}$ и $d \in \mathbf{N} - \{0\}$ таковы, что

$$du = \sum_{n \in M} a_n [n], \tag{6}$$

то d делит каждый коэффициент a_n.

Рассмотрим для каждого целого числа $r \geqslant 0$ *итерированное копроизведение*

$$c_r \colon \mathcal{U} \to \mathsf{T}^r(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \ldots \otimes \mathcal{U}.$$

По определению c_0 — коединица в бипорядке $\mathcal{U}$, $c_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$, $c_2 = c$ (копроизведение в бипорядке $\mathcal{U}$), и для всех $r \geqslant 2$ отображение c_{r+1} определяется как композиция $p \circ (c_r \otimes 1) \circ c$:

$$\mathcal{U} \xrightarrow{c} \mathcal{U} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{U} \xrightarrow{c_r \otimes 1} \mathsf{T}^r(\mathcal{U}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{U} \xrightarrow{p} \mathsf{T}^{r+1}(\mathcal{U}),$$

где отображение p определено умножением в алгебре $\mathsf{T}(\mathcal{U})$. Рассмотрим каноническую проекцию π бипорядка $\mathcal{U}$ на $\mathcal{U}^+ = \operatorname{Ker} c_0$ и композицию

$$c_r^+ = \mathsf{T}^r(\pi) \circ c_r \colon \mathcal{U} \to \mathsf{T}^r(\mathcal{U}^+).$$

Лемма 1. *Пусть* $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}^I$. *Если* $|\boldsymbol{n}| < r$, *то* $c_r^+([\boldsymbol{n}]) = 0$. *Если* $|\boldsymbol{n}| = r$, то

$$c_r^+([\boldsymbol{n}]) = \sum_{\varphi} x_{\varphi(1)} \otimes x_{\varphi(2)} \otimes \ldots \otimes x_{\varphi(r)}, \tag{7}$$

где φ *пробегает множество отображений набора* $\{1, 2, \ldots, r\}$ *в множество* I, *принимающих* n_i *раз значение* i *для каждого* $i \in I$.

По предложению 1

$$c_r\left(\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n})}\right) = \sum \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{p}_1)} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{p}_r)},$$

где суммирование распространяется на множество таких последовательностей $(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_r)$ из r элементов множества M, что $\boldsymbol{p}_1 + \ldots + \boldsymbol{p}_r = \boldsymbol{n}$. Ввиду предложения 6 из гл. II, § 1, n°3, отображение c_r^+ равно нулю на множестве $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_{r-1}(\mathfrak{g})$. Отсюда следует, что для $r \geqslant n$

$$c_r^+([\boldsymbol{n}]) = c_r^+\left(\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{n})}\right) = \sum \pi\left(\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{p}_1)}\right) \otimes \ldots \otimes \pi\left(\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{p}_r)}\right). \tag{8}$$

При $r > |\boldsymbol{n}|$ из соотношения $\boldsymbol{p}_1 + \ldots + \boldsymbol{p}_r = \boldsymbol{n}$ следует, что по крайней мере один элемент $\boldsymbol{p}_i$ равен нулю, откуда $c_r^+([\boldsymbol{n}]) = 0$. При $r = |\boldsymbol{n}|$ единственные ненулевые члены в третьем выражении в формуле (8) — это те, для которых $|\boldsymbol{p}_1| = \ldots = |\boldsymbol{p}_r| = 1$; отсюда вытекает формула (7).

Вернемся к доказательству теоремы 1. Воспользуемся обозначениями утверждения (*) и докажем, используя индукцию

„вниз“ по $|n|$, что число d делит все a_n. Для достаточно больших $|n|$ это очевидно. Если d делит a_n для $|n| > r$, то, полагая

$$u' = u - \sum_{|n| > r} (a_n/d)[n] \in \mathcal{U},$$

мы получаем, что

$$du' = \sum_{|n| \leqslant r} a_n [n]. \tag{9}$$

Для любого отображения φ множества $\{1, \ldots, r\}$ в множество I положим

$$e_\varphi = x_{\varphi(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\varphi(r)}$$

и $a_\varphi = a_n$, где $n = (\operatorname{card} \varphi^{-1}(i))_{i \in I}$. По лемме 1 из формулы (9) следует, что

$$dc_r^+(u') = \sum_{\varphi \in I^r} a_\varphi e_\varphi, \tag{10}$$

поэтому $c_r^+(u') \in \mathsf{T}^r(\mathcal{U}^+) \cap \mathbf{Q}\mathsf{T}^r(\mathcal{G})$. Но подмодуль $\mathcal{G}$ модуля $\mathcal{U}^+$ выделяется в нем прямым слагаемым (*Алг.*, гл. VII, 4, n°3, следствие теоремы 1); значит, подмодуль $\mathsf{T}^r(\mathcal{G})$ — прямое слагаемое модуля $\mathsf{T}^r(\mathcal{U}^+)$ и $c_r^+(u') \in \mathsf{T}^r(\mathcal{G})$. Однако по предположению элементы x_i образуют базис модуля $\mathcal{G}$, а следовательно, элементы e_φ образуют базис модуля $\mathsf{T}^r(\mathcal{G})$. Таким образом, из формулы (10) следует, что число d делит числа a_φ, а это значит, что d делит и числа a_n при $|n| = r$. Тем самым утверждение (*) доказано.

4. *Пример: многочлены с целыми значениями*

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbf{Q}$, V^* — дуальное пространство, $\mathcal{V}$ — решетка в пространстве V, $\mathcal{V}^*$ — модуль, дуальный к $\mathbf{Z}$-модулю $\mathcal{V}$ и канонически изоморфный некоторой решетке в пространстве V^*, $\mathsf{S}(V)$ — симметрическая алгебра пространства V и

$$\lambda\colon\ \mathsf{S}(V) \to A(V^*)$$

— каноническое биективное отображение алгебры $\mathsf{S}(V)$ на алгебру полиномиальных функций на V^* (*Alg.*, chap. IV, § 5, n° 11, remarque 1). Если отождествить алгебры $A(V^* \times V^*)$ и $A(V^*) \otimes_{\mathbf{Q}} A(V^*)$, то отображение λ будет переводить копроизведение алгебры $\mathsf{S}(V)$ в отображение $A(V^*) \to A(V^* \times V^*)$, которое полиномиальной функции φ на пространстве V^* ставит в соответствие полиномиальную функцию

$$(x, y) \mapsto \varphi(x+y)$$

на пространстве $V^* \times V^*$ (*Alg.*, chap. IV, § 5, n° 11, remarque 2).

Обозначим через $\binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$ подмножество в $\mathsf{S}(V)$, образованное теми элементами, которым соответствуют полиномиальные отображения модуля V^* в поле $\mathbf{Q}$, принимающие на решетке $\mathscr{V}^*$ целые значения.

Предложение 2. (i) *Множество* $\binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$ — *бипорядок в биалгебре* $\mathsf{S}(V)$, *и* $\binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}} \cap V = \mathscr{V}$.

(ii) $\mathbf{Z}$-*алгебра* $\binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$ *порождена элементами* $\binom{h}{n}$, *где* $h \in \mathscr{V}$, $n \in \mathbf{N}$.

(iii) *Если* $(h_1, \ldots, h_r)$ — *базис решетки* $\mathscr{V}$, *то элементы*

$$\binom{h}{\mathbf{n}} = \binom{h_1}{n_1} \cdots \binom{h_r}{n_r},$$

где наборы $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_r)$ *пробегают* $\mathbf{N}^r$, *образуют базис* $\mathbf{Z}$-*модуля* $\binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$.

Для любого $m \in \mathbf{N}$ положим $\mathsf{S}_m(V) = \sum_{i \leqslant m} \mathsf{S}^i(V)$, $\mathsf{S}_m(\mathscr{V}) = \sum_{i \leqslant m} \mathsf{S}^i(\mathscr{V})$. Ввиду предложения 15 и замечания из *Alg.*, chap. IV, § 5, n° 9, мы получаем, что

$$\mathsf{S}_m(\mathscr{V}) \subset \mathsf{S}_m(V) \cap \binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}} \subset \frac{1}{m!} \mathsf{S}_m(\mathscr{V}),$$

поэтому $\binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}} \cap V = \mathscr{V}$. Так как $\mathsf{S}_m(\mathscr{V})$ — решетка в пространстве $\mathsf{S}_m(V)$, то $\mathsf{S}_m(V) \cap \binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$ — тоже решетка в пространстве $\mathsf{S}_m(V)$. С другой стороны, $\mathbf{Z}$-модуль $\mathsf{S}_m(V) \cap \binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$ — прямое слагаемое в $\mathsf{S}_{m+1}(V) \cap \binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$ (поскольку факторпространство не имеет кручения), и, следовательно, существует дополнительный к нему свободный $\mathbf{Z}$-модуль. Таким образом, $\mathbf{Z}$-модуль $\binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$

свободен. Более того, это унитарный порядок в алгебре $\mathsf{S}(V)$. Пусть $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ — базис $\mathbf{Z}$-модуля $\binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$. Это также базис $\mathbf{Q}$-модуля $\mathsf{S}(V)$, и для любого элемента

$$\varphi \in \mathsf{S}(V \times V) = \mathsf{S}(V) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathsf{S}(V)$$

существует однозначно определенный набор элементов (v_n) алгебры $\mathsf{S}(V)$, для которого $\varphi = \sum u_n \otimes v_n$. Как и выше, мы будем отождествлять алгебру $\mathsf{S}(V)$ с алгеброй $A(V^*)$, а алгебру $\mathsf{S}(V) \otimes \mathsf{S}(V)$ — с алгеброй $A(V^* \times V^*)$. Тогда, если $\varphi \in \binom{\mathscr{V} \times \mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$, то полиномиальная функция $x \mapsto \varphi(x, y)$ при каждом $y \in \mathscr{V}^*$ принадлежит порядку $\binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$. Поэтому $v_n(y) \in \mathbf{Z}$ при всех n и любом $y \in \mathscr{V}^*$, т. е. $v_n \in \binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$. Это доказывает, что копроизведение отображает $\binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$ в $\binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$. Если $h \in \mathscr{V}$ и $n \in \mathbf{N}$, то $\binom{h}{n}$ отображает элемент $u \in \mathscr{V}^*$ в целое число $\binom{u(h)}{n}$; следовательно, $\binom{h}{n} \in \binom{\mathscr{V}}{\mathbf{Z}}$. Утверждение (iii) следует теперь из теоремы 1, примененной к коммутативной алгебре Ли V, а из него вытекает утверждение (ii).

Следствие. *Пусть X — независимая переменная. Многочлены $\binom{X}{n}$, где $n \in \mathbf{N}$, составляют базис $\mathbf{Z}$-модуля, образованного многочленами $P \in k[X]$, для которых $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$.*

Если $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$, то интерполяционная формула Лагранжа (*Алг.*, гл. IV, § 2, n° 1, предложение 6) показывает, что коэффициенты многочлена P принадлежат полю $\mathbf{Q}$. Поэтому можно предположить, что $k = \mathbf{Q}$, и применить предложение 2 при $V = \mathbf{Q}$, $\mathscr{V} = \mathbf{Z}$.

5. *Несколько формул*

В этом разделе мы будем обозначать через A ассоциативную алгебру с единицей. Если $x \in A$, то вместо $\mathrm{ad}_A x$ *мы будем писать* $\mathrm{ad}\, x$.

Лемма 2. *Если* $x, y \in A$ *и* $n \in \mathbf{N}$, *то*

$$\frac{(\operatorname{ad} x)^n}{n!} y = \sum_{p+q=n} (-1)^q \frac{x^p}{p!} y \frac{x^q}{q!} = \sum_{p+q=n} (-1)^q x^{(p)} y x^{(q)} \qquad (11)$$

Действительно, обозначим через L_x и R_x отображения $z \mapsto xz$ и $z \mapsto zx$ алгебры A в себя. Тогда вследствие того, что эндоморфизмы L_x и R_x перестановочны,

$$\frac{1}{n!} (\operatorname{ad} x)^n = \frac{1}{n!} (L_x - R_x)^n = \sum_{p+q=n} (-1)^q \frac{1}{p!} L_x^p \frac{1}{q!} R_x^q.$$

Лемма 3. *Пусть* $x, h \in A$ *и* $\lambda \in k$ *таковы, что* $(\operatorname{ad} h) x = \lambda x$. *Тогда для любого* $n \in \mathbf{N}$ *и любого многочлена* $P \in k[X]$ *имеет место равенство*

$$P(h) x^{(n)} = x^{(n)} P(h + n\lambda). \qquad (12)$$

Так как эндоморфизм $\operatorname{ad} h$ — дифференцирование алгебры A и элемент $(\operatorname{ad} h) x$ перестановочен с элементом x, то

$$(\operatorname{ad} h) x^n = n x^{n-1} ((\operatorname{ad} h) x) = n\lambda x^n. \qquad (13)$$

Следовательно,

$$(\operatorname{ad} h) x^{(n)} = n\lambda x^{(n)}.$$

Таким образом, формула (12) получится из своего частного случая

$$P(h) x = x P(h + \lambda), \qquad (14)$$

если заменить здесь элемент x на $x^{(n)}$ и λ на $n\lambda$. Достаточно доказать формулу (14) при $P = X^m$. Проведем индукцию по m. Формула очевидна при $m = 0, 1$. Если она верна при $P = X^m$, то

$$h^{m+1} x = h \,.\, h^m x = hx (h + \lambda)^m = x (h + \lambda)^{m+1}.$$

Это завершает доказательство формулы (12).

Лемма 4. *Пусть* $x, y, h \in A$ *и*

$$[y, x] = h, \quad [h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y. \qquad (15)$$

(i) *Для любых* $m, n \in \mathbf{N}$ *выполняется соотношение*

$$x^{(n)} y^{(m)} = \sum_{p \geqslant 0} y^{(m-p)} \binom{m+n-p-1-h}{p} x^{(n-p)}. \qquad (16)$$

(ii) *Пусть* A' *есть* $\mathbf{Z}$-*подалгебра алгебры* A, *порожденная элементами* $x^{(m)}$ *и* $y^{(m)}$ *при* $m \in \mathbf{N}$. *Тогда* $\binom{h}{n} \in A'$ *при всех* $n \in \mathbf{N}$.

Запишем формулу (16) в эквивалентной форме

$$(\operatorname{ad} x^{(n)})\, y^{(m)} = \sum_{p \geqslant 1} y^{(m-p)} \binom{m+n-p-1-h}{p} x^{(n-p)}. \qquad (17_m)$$

Она тривиальна при $m=0$. Проведем доказательство индукцией по m. Из формулы (17_m) мы получаем, что

$$(m+1)(\operatorname{ad} x^{(n)})\, y^{(m+1)} = (\operatorname{ad} x^{(n)})\, y^{(m)} . y + y^{(m)} . (\operatorname{ad} x^{(n)})\, y =$$
$$= \sum_{p \geqslant 1} y^{(m-p)} \binom{m+n-p-1-h}{p} x^{(n-p)} y + y^{(m)} (n-1-h)\, x^{(n-1)} \qquad (18)$$

(§ 1, n° 1, лемма 1). Но, применяя ту же лемму и лемму 3, получаем, что

$$\binom{m+n-p-1-h}{p} x^{(n-p)} y =$$
$$= \binom{m+n-p-1-h}{p} (y x^{(n-p)} + (n-p-1-h)\, x^{(n-p-1)}) =$$
$$= y \binom{m+n-p+1-h}{p} x^{(n-p)} +$$
$$+ \binom{m+n-p-1-h}{p} (n-p-1-h)\, x^{(n-p-1)}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (18), мы имеем

$$(m+1)(\operatorname{ad} x^{(n)})\, y^{(m+1)} =$$
$$= \sum_{p \geqslant 1} (m-p+1)\, y^{(m-p+1)} \binom{m+n-p+1-h}{p} x^{(n-p)} +$$
$$+ \sum_{p \geqslant 1} y^{(m-p)} \binom{m+n-p-1-h}{p} (n-p-1-h)\, x^{(n-p-1)} +$$
$$+ y^{(m)} (n-1-h)\, x^{(n-1)} =$$
$$= \sum_{p \geqslant 1} (m-p+1)\, y^{(m-p+1)} \binom{m+n-p+1-h}{p} x^{(n-p)} +$$
$$+ \sum_{p \geqslant 0} y^{(m-p)} \binom{m+n-p-1-h}{p} (n-p-1-h)\, x^{(n-p-1)}.$$

Заменяя во второй сумме p на $p-1$ и перегруппировывая члены, получим

$$(m+1)(\operatorname{ad} x^{(n)})\, y^{(m+1)} = \sum_{p\geqslant 1} y^{(m-p+1)} A_p x^{(n-p)}, \tag{19}$$

где

$$A_p = (m-p+1)\binom{m+n-p+1-h}{p} + \\ + (n-p-h)\binom{m+n-p-h}{p-1}.$$

Полагая $z=m+n-p-h$, можно переписать A_p также в следующем виде:

$$A_p = \frac{1}{p!}(m-p+1)(z+1)z(z-1)\ \ldots\ (z-p+2) + \\ + \frac{1}{(p-1)!}(z-m)z(z-1)\ \ldots\ (z-p+2) = \\ = \frac{1}{p!}z(z-1)\ \ldots\ (z-p+2)[(m-p+1)(z+1)+p(z-m)] = \\ = (m+1)\binom{z}{p} = (m+1)\binom{(m+1)+n-p-1-h}{p}.$$

Подставляя это в формулу (19), мы получаем формулу (17_{m+1}), откуда следует утверждение (i).

Предположим, что $\binom{h}{p}\in A'$ при $p<n$. Тогда для всех многочленов $P\in \mathbf{Q}[T]$ степени $<n$, для которых $P(\mathbf{Z})\subset \mathbf{Z}$, $P(h)$ будет лежать в A' (n° 4, следствие предложения 2). Таким образом, учитывая формулу (16) и равенство $m=n$, имеем

$$(-1)^n\binom{h}{n} = \binom{n-1-h}{n} = -x^{(n)}y^{(n)} + \\ + \sum_{p=0}^{n-1} y^{(n-p)}\binom{2n-p-1-h}{p}x^{(n-p)} \in A'.$$

Отсюда утверждение (ii) выводится индукцией по n.

6. *Бипорядки в универсальной обертывающей алгебре расщепленной редуктивной алгебры Ли*

Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли над полем $\mathbf{Q}$, $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $R=R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (§ 2, n° 1, замечание 5).

Определение 1. *Решетка $\mathscr{H}$ в пространстве подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ называется дозволенной*[1]) (*относительно алгебры Ли* $\mathfrak{g}$), *если* $H_\alpha \in \mathscr{H}$ *и* $\alpha(\mathscr{H}) \subset \mathbf{Z}$ *при каждом* $\alpha \in R$.

Замечания. 1) Пусть B — базис системы R. Решетка $\mathscr{H}$ в $\mathfrak{h}$ является дозволенной тогда и только тогда, когда $H_\alpha \in \mathscr{H}$ и $\alpha(\mathscr{H}) \subset \mathbf{Z}$ при любых $\alpha \in B$.

2) Пусть $\mathfrak{c}$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для того чтобы решетка $\mathscr{H}$ в $\mathfrak{h}$ была дозволенной, необходимо и достаточно, чтобы $Q(R^\vee) \subset \subset \mathscr{H} \subset P(R^\vee) \oplus \mathfrak{c}$. При этом $\mathscr{H} \cap \mathscr{D}\mathfrak{g}$ — дозволённая решетка в подалгебре Картана $\mathfrak{h} \cap \mathscr{D}\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathscr{D}\mathfrak{g}$. Однако могут существовать такие дозволенные решетки $\mathscr{H}$, что $\mathscr{H} \neq (\mathscr{H} \cap \mathscr{D}\mathfrak{g}) \oplus \oplus (\mathscr{H} \cap \mathfrak{c})$ (см. § 13, n° 1, (IX)).

3) Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то дозволенными решетками в подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ являются такие подгруппы $\mathscr{H}$ векторного пространства $\mathfrak{h}$, что $Q(R^\vee) \subset \mathscr{H} \subset P(R^\vee)$.

В дальнейшем в этом пункте мы предполагаем, что зафиксированы некоторая расщепленная редуктивная алгебра Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, базис B системы корней $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и для каждого $\alpha \in B$ такая пара элементов (x_α, y_α), что

$$y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}, \quad x_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, \quad [y_\alpha, x_\alpha] = H_\alpha. \tag{20}$$

Если через $\mathfrak{n}_+$ (соотв. $\mathfrak{n}_-$) обозначить подалгебру Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденную элементами x_α (соотв. y_α), то, как известно (§ 3, n° 3, предложение 9 (iii)),

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \tag{21}$$

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-) \otimes_{\mathbf{Q}} U(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbf{Q}} U(\mathfrak{n}_+) \tag{22}$$

(где через $U(\mathfrak{g}), \ldots$ обозначены универсальные обертывающие алгебры алгебр Ли $\mathfrak{g}, \ldots$).

Обозначим через $\mathscr{U}_+$ $\mathbf{Z}$-подалгебру алгебры $U(\mathfrak{n}_+)$, порожденную элементами $x_\alpha^{(n)}$ при $\alpha \in B$ и $n \in \mathbf{N}$. Пусть W — группа Вейля системы корней R, а R_+ — множество корней, положительных относительно базиса B.

Лемма 5. (i) $\mathscr{U}_+$ — *решетка в векторном пространстве* $U(\mathfrak{n}_+)$.
(ii) *Для любого корня* $\alpha \in B$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{U}_+ \cap U(\mathfrak{g}^\alpha) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{Z} x_\alpha^{(n)}.$$

По определению $\mathbf{Z}$-модуль $\mathscr{U}_+$ порождается элементами

$$x_\varphi^{(n)} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} x_{\varphi(i)}^{(n(i))},$$

[1]) В оригинале permis. — *Прим. перев.*

где $r \in \mathbf{N}$, $\varphi = (\varphi(i)) \in B^r$ и $n = (n(i)) \in \mathbf{N}^r$. Снабдим алгебру $U(\mathfrak{n}_+)$ градуировкой типа $Q(R)$ таким образом, чтобы все подпространства $\mathfrak{g}^\alpha$ $(\alpha \in R_+)$ были однородными степени α. Тогда одночлен $x_\varphi^{(n)}$ описанного выше вида однороден и его степень равна

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} n(i)\varphi(i) \in Q(R).$$

Одночленов такого вида данной степени q конечное число, и они порождают над $\mathbf{Q}$ однородную компоненту степени q алгебры $U(\mathfrak{n}_+)$. Это доказывает утверждение (i).

Если $\alpha \in B$, то $\mathcal{U}_+ \cap U(\mathfrak{g}^\alpha)$ содержится в сумме однородных компонент, степени которых кратны α. По предыдущему подпространство $\mathcal{U}_+ \cap U(\mathfrak{g}^\alpha)$ порождается элементами $x_\varphi^{(n)}$, для которых $\sum n(i)\varphi(i) \in \mathbf{N}\alpha$. Отсюда следует, что $\varphi(i) = \alpha$ при всех i (поскольку B — базис системы корней R). Поэтому

$$x_\varphi^{(n)} = x_\alpha^{(n(1))} \ldots x_\alpha^{(n(r))} = \frac{(n(1) + \ldots + n(r))!}{n(1)! \ldots n(r)!} x^{(n(1) + \ldots + n(r))}.$$

Таким образом, $\mathcal{U}_+ \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g}^\alpha) \subset \bigoplus_n \mathbf{Z}x_\alpha^{(n)}$, что и доказывает утверждение (ii). Ч. Т. Д.

Если E и F суть $\mathbf{Z}$-подмодули в $U(\mathfrak{g})$, то далее в этом параграфе мы будем через $E.F$ обозначать $\mathbf{Z}$-подмодуль модуля $U(\mathfrak{g})$, порожденный произведениями ab, где $a \in E$, $b \in F$.

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{H}$ — дозволенная решетка в подалгебре Картана $\mathfrak{h}$. Пусть $\mathcal{U}_+$, $\mathcal{U}_-$, $\mathcal{U}_0$ суть $\mathbf{Z}$-подалгебры алгебры $U(\mathfrak{g})$, порожденные соответственно элементами $x_\alpha^{(n)}$ $(\alpha \in B$, $n \in \mathbf{N})$, $y_\alpha^{(n)}$ $(\alpha \in B$, $n \in \mathbf{N})$, $\binom{h}{n}$ $(h \in \mathscr{H}$, $n \in \mathbf{N})$, а $\mathcal{U}$ — $\mathbf{Z}$-подалгебра алгебры $U(\mathfrak{g})$, порожденная множествами $\mathcal{U}_+$, $\mathcal{U}_-$, $\mathcal{U}_0$.*

(i) $\mathcal{U}$ — бипорядок в биалгебре $U(\mathfrak{g})$.

(ii) $\mathcal{U} = \mathcal{U}_- . \mathcal{U}_0 . \mathcal{U}_+$, $\mathcal{U} \cap \mathfrak{h} = \mathscr{H}$, и при любом $\alpha \in B$ $\mathcal{U} \cap \mathfrak{g}^\alpha = \mathbf{Z}x_\alpha$, $\mathcal{U} \cap \mathfrak{g}^{-\alpha} = \mathbf{Z}y_\alpha$.

По лемме 5 и предложению 2 $\mathcal{U}_+$, $\mathcal{U}_-$, $\mathcal{U}_0$ — порядки в $\mathbf{Q}$-алгебрах $U(\mathfrak{n}_+)$, $U(\mathfrak{n}_-)$, $U(\mathfrak{h})$ соответственно, и

$$\binom{\pm h + q}{p} \in \mathcal{U}_0 \quad \text{для любых} \quad h \in \mathscr{H},\ q \in \mathbf{Z},\ p \in \mathbf{N}. \tag{23}$$

Положим $\mathscr{L} = \mathcal{U}_- . \mathcal{U}_0 . \mathcal{U}_+ \subset U(\mathfrak{g})$. По формуле (22) $\mathscr{L}$ — решетка в $U(\mathfrak{g})$. По построению

$$\mathcal{U}_- . \mathscr{L} \subset \mathscr{L}, \tag{24}$$

$$\mathscr{L} . \mathcal{U}_+ \subset \mathscr{L}, \tag{25}$$

в то время как из леммы 3 и формул (23) следует, что

$$\mathcal{U}_0 . \mathcal{L} \subset \mathcal{L}, \tag{26}$$

$$\mathcal{L} . \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{L}. \tag{27}$$

Пусть $\alpha \in B$, $n \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{N}$, $\varphi = (\varphi(i)) \in B^r$ и

$$(m(1), \ldots, m(r)) \in \mathbf{N}^r.$$

Покажем, что

$$x_\alpha^{(n)} y_{\varphi(1)}^{(m(1))} \ldots y_{\varphi(r)}^{(m(r))} \in \mathcal{L} \tag{28}$$

или ввиду условия (25) что

$$\left[x_\alpha^{(n)}, y_{\varphi(1)}^{(m(1))} \ldots y_{\varphi(r)}^{(m(r))}\right] \in \mathcal{L}. \tag{29}$$

Доказательство проведем индукцией по r. Рассматриваемый коммутатор представляет собой сумму членов вида

$$y_{\varphi(1)}^{(m(1))} \ldots y_{\varphi(k)}^{(m(k))} \left[x_\alpha^{(n)}, y_{\varphi(k+1)}^{(m(k+1))}\right] y_{\varphi(k+2)}^{(m(k+2))} \ldots y_{\varphi(r)}^{(m(r))}. \tag{30}$$

При $\alpha \neq \varphi(k+1)$ элементы x_α и $y_{\varphi(k+1)}$ перестановочны. Следовательно, $\left[x_\alpha^{(n)}, y_{\varphi(k+1)}^{(m(k+1))}\right] = 0$. Если $\alpha = \varphi(k+1)$, то выражение (30) является, согласно формуле (17_m), суммой выражений вида

$$y_{\varphi(1)}^{(m(1))} \ldots y_{\varphi(k)}^{(m(k))} y_{\varphi(k+1)}^{(m(k+1)-p)} \binom{q-h}{p} x_\alpha^{(n-p)} y_{\varphi(k+2)}^{(m(k+2))} \ldots y_{\varphi(r)}^{(m(r))}, \tag{31}$$

где $q \in \mathbf{Z}$, $p \in \mathbf{N} - \{0\}$, $h \in \mathcal{H}$. Из предположения индукции и условий (24) и (26) следует, что выражение (31) принадлежит решетке $\mathcal{L}$. Таким образом, мы доказали формулу (28).

Согласно (28), $x_\alpha^{(n)} \mathcal{U}_- \subset \mathcal{L}$; следовательно, согласно (25) и (27), $x_\alpha^{(n)} \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$, откуда $\mathcal{U}_+ . \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ и

$$\mathcal{L} . \mathcal{L} \subset \mathcal{U}_- . \mathcal{U}_0 . \mathcal{L} \subset \mathcal{U}_- . \mathcal{L} \subset \mathcal{L}.$$

Таким образом, $\mathcal{L}$ есть $\mathbf{Z}$-подалгебра в $U(\mathfrak{g})$; следовательно, $\mathcal{U} = \mathcal{L}$. Если c — копроизведение в коалгебре $U(\mathfrak{g})$, то $c(\mathcal{U}) \subset \subset \mathcal{U} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{U}$ (n°2, предложение 1). Пусть γ — коединица в коалгебре $U(\mathfrak{g})$. Так как $\gamma(x_\alpha^{(n)}) = \gamma(y_\alpha^{(n)}) = \gamma\left(\binom{h}{n}\right) = 0$ при $n > 0$, то $\gamma(\mathcal{U}) \subset \mathbf{Z}$. Это доказывает утверждение (i). С другой стороны, из предложения 2 n°4 вытекает, что

$$\mathcal{U} \cap \mathfrak{h} = \mathcal{L} \cap \mathfrak{h} = \mathcal{U}_0 \cap \mathfrak{h} = \mathcal{H},$$

и, аналогично, ввиду леммы 5

$$\mathcal{U} \cap \mathfrak{g}^\alpha = \mathcal{U}_+ \cap \mathfrak{g}^\alpha = \mathbf{Z} x_\alpha.$$

Это доказывает утверждение (ii).

Замечание. 4) По предложению 5 из § 4, n°4, существует единственный автоморфизм θ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, такой, что $\theta(x_\alpha) = y_\alpha$ и $\theta(y_\alpha) = x_\alpha$ при всех $\alpha \in B$ и $\theta(h) = -h$ при всех $h \in \mathfrak{h}$, причем $\theta^2 = 1$. Из построения решетки $\mathcal{U}$ следует, что автоморфизм алгебры $U(\mathfrak{g})$, который продолжает θ, переводит решетку $\mathcal{U}$ в себя.

Следствие 1. *Положим $\mathcal{G} = \mathcal{U} \cap \mathfrak{g}$. Тогда $\mathcal{G}$ — порядок в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, устойчивый относительно автоморфизма θ. Имеет место разложение $\mathcal{G} = \mathcal{H} + \sum_{\alpha \in R} (\mathcal{G} \cap \mathfrak{g}^\alpha)$. Для любых $\alpha \in B$ и $n \in \mathbf{N}$ отображения $(\operatorname{ad} x_\alpha)^n/n!$, $(\operatorname{ad} y_\alpha)^n/n!$ переводят решетки $\mathcal{U}$ и $\mathcal{G}$ в себя.*

Первое утверждение очевидно. Второе получается из сравнения градуировок типа $Q(R)$ в $U(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{U}$. Третье утверждение вытекает из леммы 2 n°5.

Следствие 2. *Пусть $w \in W$. Тогда существует элементарный автоморфизм φ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, перестановочный с θ, который переводит решетки $\mathcal{G}$ и $\mathcal{U}$ в себя и служит продолжением автоморфизма w.*

Достаточно исследовать случай, когда автоморфизм w имеет вид s_α $(\alpha \in B)$. Заметим, что эндоморфизмы $\operatorname{ad} x_\alpha$ и $\operatorname{ad} y_\alpha$ пространства $U(\mathfrak{g})$ локально нильпотентны, иначе говоря, для каждого $u \in U(\mathfrak{g})$ существует такое целое число n, что $(\operatorname{ad} x_\alpha)^n u = (\operatorname{ad} y_\alpha)^n u = 0$. Это позволяет определить эндоморфизмы $e^{\operatorname{ad} x_\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\operatorname{ad} x_\alpha)^n$ и $e^{\operatorname{ad} y_\alpha}$ пространства $U(\mathfrak{g})$. Легко проверить непосредственно, что эти автоморфизмы алгебры $U(\mathfrak{g})$ переводят решетку $\mathcal{U}$ в себя. Положим $\varphi_1 = e^{\operatorname{ad} x_\alpha} e^{\operatorname{ad} y_\alpha} e^{\operatorname{ad} x_\alpha}$, $\varphi_2 = e^{\operatorname{ad} y_\alpha} e^{\operatorname{ad} x_\alpha} e^{\operatorname{ad} y_\alpha}$. Так как $\varphi_1 | \mathfrak{g} = \varphi_2 | \mathfrak{g}$ (§ 2, n° 2, формула (1)), то $\varphi_1 = \varphi_2$. Положим $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Имеет место равенство $\theta\varphi\theta^{-1} = \varphi$, так что θ и φ перестановочны. С другой стороны, $\varphi | \mathfrak{h} = w$ вследствие леммы 1 из § 2, n°2.

Следствие 3. *Пусть $\alpha \in R$. Если $x \in \mathcal{G} \cap \mathfrak{g}^\alpha$ и $n \in \mathbf{N}$, то $x^{(n)} \in \mathcal{U}$ и эндоморфизм $(\operatorname{ad} x)^n/n!$ переводит решетки $\mathcal{G}$ и $\mathcal{U}$ в себя.*

Это непосредственно вытекает из построения решетки $\mathcal{U}$ и следствия 1, если $\alpha \in B$. В общем случае существует такой элемент $w \in W$, что $w(\alpha) \in B$ (гл. VI, § 1, n° 5, предложение 15). По следствию 2 существует автоморфизм φ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, который переводит решетки $\mathcal{G}$ и $\mathcal{U}$ в себя, а подпространство $\mathfrak{g}^\alpha$ в $\mathfrak{g}^{w(\alpha)}$, откуда мы получаем доказываемое следствие, используя перенос структуры под действием φ.

Следствие 4. *Существует такая система Шевалле* $(X_\alpha)_{\alpha\in R}$ *в алгебре* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (§ 2, n°4, определение 3), *что* $X_\alpha = x_\alpha$ *и* $X_{-\alpha} = y_\alpha$ *для* $\alpha \in B$. *Для любой системы Шевалле* $(X'_\alpha)_{\alpha\in R}$ *с этими свойствами и любого корня* $\alpha \in R$ *элемент* X'_α *составляет базис решетки* $\mathcal{G} \cap \mathfrak{g}^\alpha$.

Для $\alpha \in B$ положим $X_\alpha = x_\alpha$, $X_{-\alpha} = y_\alpha$. Для $\alpha \in R_+ - B$ выберем такой элемент $w \in W$, что $w(\alpha) \in B$, и такой автоморфизм φ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что $\theta\varphi = \varphi\theta$, $\varphi(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ и $\varphi(h) = w^{-1}(h)$ при $h \in \mathfrak{h}$ (следствие 2); положим $X_\alpha = \varphi(x_{w(\alpha)})$, $X_{-\alpha} = \varphi(y_{w(\alpha)})$. Тогда

$$[X_{-\alpha}, X_\alpha] = \varphi([y_{w(\alpha)}, x_{w(\alpha)}]) = \varphi(H_{w(\alpha)}) = w^{-1}(H_{w(\alpha)}) = H_\alpha,$$
$$\theta(X_\alpha) = \theta\varphi(x_{w(\alpha)}) = \varphi\theta(x_{w(\alpha)}) = \varphi(y_{w(\alpha)}) = X_{-\alpha}.$$

Следовательно, $(X_\alpha)_{\alpha\in R}$ — система Шевалле. Кроме того,

$$\mathcal{G} \cap \mathfrak{g}^\alpha = \varphi(\mathcal{G} \cap \mathfrak{g}^{w(\alpha)}) = \varphi(\mathbf{Z}x_{w(\alpha)}) = \mathbf{Z}X_\alpha, \tag{32}$$
$$\mathcal{G} \cap \mathfrak{g}^{-\alpha} = \varphi(\mathcal{G} \cap \mathfrak{g}^{-w(\alpha)}) = \varphi(\mathbf{Z}y_{w(\alpha)}) = \mathbf{Z}X_{-\alpha}. \tag{33}$$

Пусть $(X'_\alpha)_{\alpha\in R}$ — такая система Шевалле, что $X'_\alpha = x_\alpha$, $X'_{-\alpha} = y_\alpha$ при $\alpha \in B$, и S — множество таких корней $\alpha \in R$, что $X'_\alpha = \pm X_\alpha$. Ввиду предложения 7 из § 2, n°4, S — замкнутое множество корней. Так как $S \supset B \cup (-B)$, то $S = R$ (гл. VI, § 1, n°6, предложение 19). Из формул (32) и (33) следует, что $\mathcal{G} \cap \mathfrak{g}^\alpha = \mathbf{Z}X'_\alpha$ при всех $\alpha \in R$.

Замечания. 5) Рассмотрим систему Шевалле $(X_\alpha)_{\alpha\in R}$, построенную выше. Если α, β, $\alpha + \beta \in R$, то, полагая $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}$, мы получаем, что $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathcal{G} \cap \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$ и, следовательно, $N_{\alpha,\beta} \in \mathbf{Z}$ (см. § 2, n°4, предложение 7).

6) Мы получили здесь новое доказательство существования системы Шевалле (см. § 4, n°4, следствие предложения 5), не зависящее от леммы 4 § 2.

7. *Порядки Шевалле*

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — расщепленная редуктивная алгебра Ли над полем $\mathbf{Q}$, а R — ее система корней. Выберем

а) дозволенную решетку $\mathcal{H}$ в подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ (n°6, определение 1),

б) решетку $\mathcal{G}^\alpha$ в подпространстве $\mathfrak{g}^\alpha$ для каждого $\alpha \in R$.

Положим $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \sum_{\alpha\in R} \mathcal{G}^\alpha$. Это решетка в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathcal{U}$ $\mathbf{Z}$-подалгебру алгебры $U(\mathfrak{g})$, порожденную элементами $\binom{h}{n}$ ($h \in \mathscr{H}$, $n \in \mathbf{N}$) и элементами $x^{(n)}$ ($x \in \mathscr{G}^\alpha$, $\alpha \in R$, $n \in \mathbf{N}$). Наконец, для $\alpha \in R$ и $x \in \mathfrak{g}^\alpha - \{0\}$ положим

$$w_\alpha(x) = (\exp \operatorname{ad} x)(\exp \operatorname{ad} y)(\exp \operatorname{ad} x),$$

где y — единственный элемент пространства $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, для которого $[y, x] = \mathrm{H}_\alpha$. В этих обозначениях имеет место

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) *Существует такая система Шевалле* $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in R}$ *расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, *что* $\mathscr{G}^\alpha = \mathbf{Z}\mathrm{X}_\alpha$ *при всех* $\alpha \in R$.

(ii) $\mathscr{U} \cap \mathfrak{g} = \mathscr{G}$ *и* $[\mathscr{G}^\alpha, \mathscr{G}^{-\alpha}] = \mathbf{Z}\mathrm{H}_\alpha$ *при всех* $\alpha \in R$.

(iii) *Для любых* $\alpha \in R$, $x \in \mathscr{G}^\alpha$, $n \in \mathbf{N}$ *эндоморфизм* $(\operatorname{ad} x)^n/n!$ *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *отображает решетку* $\mathscr{G}$ *в себя, и* $[\mathscr{G}^\alpha, \mathscr{G}^{-\alpha}] = \mathbf{Z}\mathrm{H}_\alpha$.

(iv) *Для любого* $\alpha \in R$ *и любого базиса* x *пространства* $\mathscr{G}^\alpha$ *автоморфизм* $w_\alpha(x)$ *переводит решетку* $\mathscr{G}$ *в себя* (*т. е. отображает подпространство* $\mathscr{G}^\beta$ *в подпространство* $\mathscr{G}^{s_\alpha(\beta)}$ *при всех* $\beta \in R$).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Пусть $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in R}$ — такая система Шевалле расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, что $\mathscr{G}^\alpha = \mathbf{Z}\mathrm{X}_\alpha$ для любого $\alpha \in R$, и B — базис системы R. Для $\alpha \in B$ положим $x_\alpha = \mathrm{X}_\alpha$, $y_\alpha = \mathrm{X}_{-\alpha}$. Пусть $\mathscr{U}'$ — бипорядок, ассоциированный с решеткой $\mathscr{H}$ и элементами x_α и y_α согласно предложению 3 из n°6. Ясно, что $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$. По следствиям 3 и 4 предложения 3 $x^{(n)} \in \mathscr{U}'$ при всех $\alpha \in R$, $x \in \mathscr{G}^\alpha$ и $n \in \mathbf{N}$. Следовательно, $\mathscr{U} = \mathscr{U}'$, т. е. условие (ii) выполнено.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Это очевидно ввиду леммы 2 из n°5.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Пусть $\alpha \in R$, а x — базис решетки $\mathscr{G}^\alpha$. Так как $[\mathscr{G}^\alpha, \mathscr{G}^{-\alpha}] = \mathbf{Z}\mathrm{H}_\alpha$, то однозначно определенный элемент $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, для которого $[y, x] = \mathrm{H}_\alpha$, принадлежит решетке $\mathscr{G}^{-\alpha}$. Так как по условию (iii) решетка $\mathscr{G}$ устойчива относительно эндоморфизмов $\exp \operatorname{ad} x$ и $\exp \operatorname{ad} y$, то она устойчива также и относительно эндоморфизма $w_\alpha(x)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Пусть B — базис системы корней R. Для любого $\alpha \in B$ выберем базис x_α решетки $\mathscr{G}^\alpha$. Пусть $y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ — такой элемент, что $[y_\alpha, x_\alpha] = \mathrm{H}_\alpha$. Из формул (5) § 1, n°5, мы получаем, что $y_\alpha = w_\alpha(x_\alpha) \,.\, x_\alpha$; следовательно, по условию (iv) y_α — базис решетки $\mathscr{G}^{-\alpha}$. Пусть $\mathscr{G}'$ — порядок в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, определенный решеткой $\mathscr{H}$ и элементами x_α и y_α (n°6, следствие 1 предложения 3). Тогда решетка $\mathscr{G}'$ устойчива относительно эндоморфизмов $(\operatorname{ad} x_\alpha)^n/n!$, $(\operatorname{ad} y_\alpha)^n/n!$ (*там же*) и, следовательно, относительно $w_\alpha(x_\alpha)$.

Пусть теперь $\beta \in R$. Существуют такие корни $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, что

$$\beta = s_{\alpha_r} s_{\alpha_{r-1}} \ldots s_{\alpha_1}(\alpha_0)$$

(гл. VI, § 1, n° 5, предложение 15). Тогда по условию (iv) эндоморфизм $w_{\alpha_r}(x_{\alpha_r}) \cdot w_{\alpha_{r-1}}(x_{\alpha_{r-1}}) \ldots w_{\alpha_1}(x_{\alpha_1})$ отображает решетку $\mathscr{G}^{\alpha_0}$ на решетку $\mathscr{G}^{\beta}$ и по предыдущему отображает $\mathscr{G}' \cap \mathfrak{g}^{\alpha_0}$ на $\mathscr{G}' \cap \mathfrak{g}^{\beta}$. Так как $\mathscr{G}' \cap \mathfrak{g}^{\alpha} = \mathscr{G}^{\alpha}$ (предложение 3 (ii)), то $\mathscr{G}' \cap \mathfrak{g}^{\beta} = \mathscr{G}^{\beta}$. Следовательно,

$$\mathscr{G}' = \mathscr{H} \oplus \sum_{\beta \in R} (\mathscr{G}' \cap \mathfrak{g}^{\beta}) = \mathscr{H} \oplus \sum_{\beta \in R} \mathscr{G}^{\beta} = \mathscr{G},$$

а это ввиду следствия 4 предложения 3 завершает доказательство.

Определение 2. *Если выполняются эквивалентные условия* (i) — (iv) *теоремы 2, то порядок $\mathscr{G}$ называется порядком Шевалле расщепленной алгебры Ли* ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$)

Замечание. Порядки Шевалле в алгебре Ли ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$) всегда существуют. Действительно, порядком Шевалле является множество $\mathscr{H} \oplus \sum_{\alpha \in R} \mathbf{Z} X_{\alpha}$, где $(X_{\alpha})_{\alpha \in R}$ — система Шевалле алгебры Ли ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$), а $\mathscr{H}$ — такая решетка в подалгебре Картана $\mathfrak{h}$, что

$$Q(R^{\vee}) \subset \mathscr{H} \subset P(R^{\vee}) \oplus \mathfrak{c}$$

(где $\mathfrak{c}$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$).

Теорема 3. *Сохраним обозначения начала* n° 7, *и предположим, что $\mathscr{G}$ — порядок Шевалле расщепленной алгебры Ли* ($\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$).

(i) *$\mathscr{U}$ — бипорядок в алгебре $U(\mathfrak{g})$.*

(ii) *Пусть B — базис системы корней R и $(X_{\alpha})_{\alpha \in B \cup (-B)}$ — такое семейство элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что $\mathscr{G}^{\alpha} = \mathbf{Z} X_{\alpha}$ при $\alpha \in B \cup (-B)$. Тогда $\mathbf{Z}$-алгебра $\mathscr{U}$ порождается элементами $\binom{h}{n}$ и $X_{\alpha}^{(n)}$ ($h \in \mathscr{H}$, $\alpha \in B \cup (-B)$, $n \in \mathbf{N}$). Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста и $\mathscr{H} = Q(R^{\vee})$, то $\mathbf{Z}$-алгебра $\mathscr{U}$ порождается элементами $X_{\alpha}^{(n)}$ ($\alpha \in B \cup (-B)$, $n \in \mathbf{N}$).*

(iii) *Пусть B — базис системы корней R, R_+ — соответствующее множество положительных корней, $R_- = -R_+$, $\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}^{\alpha}$, $\mathfrak{n}_- = \sum_{\alpha \in R_-} \mathfrak{g}^{\alpha}$. Тогда*

$$\mathscr{U} = (\mathscr{U} \cap U(\mathfrak{n}_-)) \cdot (\mathscr{U} \cap U(\mathfrak{h})) \cdot (\mathscr{U} \cap U(\mathfrak{n}_+)).$$

Пусть $(h_i)_{i\in I}$ — *базис решетки* $\mathscr{H}$. *Для каждого* $\alpha \in R$ *пусть* X_α — *базисный вектор решетки* $\mathscr{G}^\alpha$. *Снабдим множество* $I \cup R$ *совершенным порядком (мы предположим, что* $I \cap R = \varnothing$). *Для* $\lambda \in I \cup R$ *и* $n \in \mathbf{N}$ *положим* $e_\lambda^{(n)} = \binom{h_\lambda}{n}$, *если* $\lambda \in I$, *и* $e_\lambda^{(n)} = X_\lambda^{(n)}$, *если* $\lambda \in R$. *Тогда произведения вида* $\prod_{\lambda \in I \cup R} e_\lambda^{(n_\lambda)}$, *где* (n_λ) *пробегает* $\mathbf{N}^{I \cup R}$, *образуют базис* $\mathbf{Z}$-*модуля* $\mathscr{U}$. *Произведения* $\prod_{\lambda \in I} \binom{h_\lambda}{n_\lambda}$, *где* (n_λ) *пробегает* $\mathbf{N}^I$, *образуют базис* $\mathbf{Z}$-*модуля* $\mathscr{U} \cap U(\mathfrak{h})$. *Произведения* $\prod_{\lambda \in R_+} X_\lambda^{(n_\lambda)}$, *где* (n_λ) *пробегает* $\mathbf{N}^{R_+}$, *образуют базис* $\mathbf{Z}$-*модуля* $\mathscr{U} \cap U(\mathfrak{n}_+)$.

Пусть B и $(X_\alpha)_{\alpha \in B \cup (-B)}$ такие же, как в утверждении (ii), причем $[X_{-\alpha}, X_\alpha] = H_\alpha$. Обозначим через $\mathscr{U}'$ $\mathbf{Z}$-подалгебру алгебры $U(\mathfrak{g})$, порожденную элементами $\binom{h}{n}$ и $X_\alpha^{(n)}$ ($h \in \mathscr{H}$, $\alpha \in B \cup (-B)$, $n \in \mathbf{N}$). При доказательстве импликации (i) ⇒ (ii) в теореме 2 мы видели, что решетка $\mathscr{U}'$ совпадает с $\mathscr{U}$ и является бипорядком в алгебре $U(\mathfrak{g})$. Это доказывает утверждение (i) и первую часть утверждения (ii); вторая следует из леммы 4 (ii). Утверждение (iii) следует из теоремы 1 (n° 3) и предложения 3 (n° 6).

8. *Допустимые*[1]) *решетки*

Обобщая терминологию, принятую в теории векторных пространств, мы будем говорить, что эндоморфизм u модуля M *приводится к диагональному виду*, если существует такой базис модуля M, что матрица эндоморфизма u в этом базисе диагональная.

Лемма 6. *Пусть* M — *свободный* $\mathbf{Z}$-*модуль конечного типа,* u — *эндоморфизм модуля* M, *а* v — *эндоморфизм* $u \otimes 1$ *модуля* $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. *Предположим, что для всех* $n \in \mathbf{N}$ *имеет место включение* $\binom{v}{n}(M) \subset M$. *Тогда эндоморфизм* u *приводится к диагональному виду.*

a) Для любого многочлена $P \in \mathbf{Q}[T]$, для которого $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$, выполнено включение $P(v) M \subset M$ (n° 4, следствие предложения 2); следовательно, $\det P(v) \in \mathbf{Z}$.

[1]) В оригинале admissibles, см. примечание к стр. 225. — *Прим. перев.*

б) Обозначим через $\chi_v(t)=t^d+\alpha_1 t^{d-1}+\ldots$ характеристический многочлен эндоморфизма v. Пусть $k\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$. Применяя рассуждение а) к многочлену $\binom{T-k}{n}$, мы видим, что число

$$a_n=\det\binom{v-k}{n}=\frac{1}{(n!)^d}\det(v-k)\det(v-k-1)\ldots$$
$$\ldots\det(v-k-n+1)=$$
$$=\frac{(-1)^n}{(n!)^d}\chi_v(k)\chi_v(k+1)\ldots\chi_v(k+n-1)$$

целое. Пусть $k-1<-\alpha_1/d$. Тогда мы получаем, что

$$\chi_v(k+n-1)=n^d+(\alpha_1+(k-1)d)n^{d-1}+\ldots$$

и

$$|a_n|=\frac{|\chi_v(k+n-1)|}{n^d}|a_{n-1}|.$$

Следовательно, если $a_n\neq 0$ при всех $n\in\mathbf{N}$, то, начиная с достаточно больших n, последовательность $|a_n|$ строго убывает, что невозможно. Отсюда следует, что эндоморфизм v имеет собственное значение, равное целому числу λ. Положим $M'=\operatorname{Ker}(u-\lambda.1)$ и $M''=M/M'$. Тогда M' совпадает с пересечением модуля M и некоторого векторного подпространства пространства $M\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$; следовательно, $\mathbf{Z}$-модуль M'' — модуль без кручения конечного типа, т. е. M'' — свободный модуль ранга $<d$. Будем доказывать наше утверждение индукцией по d и применим предложение индукции к эндоморфизму модуля M'', полученному по эндоморфизму u. Мы приходим к заключению, что все собственные числа эндоморфизма u в некотором алгебраически замкнутом расширении поля $\mathbf{Q}$ целые.

в) Покажем, что эндоморфизм v приводится к диагональному виду. Пусть λ — собственное значение эндоморфизма v, и пусть $x\in M\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ — такой элемент, что $(v-\lambda)^2x=0$. Тогда $v(vx-\lambda x)=\lambda(vx-\lambda x)$; следовательно,

$$\frac{1}{n!}(v-\lambda-n+1)(v-\lambda-n+2)\ldots(v-\lambda-1)(v-\lambda)x=$$
$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n}(vx-\lambda x).$$

Ввиду а) отсюда следует, что $vx-\lambda x\in nM$ при всех $n\in\mathbf{N}$, поэтому $(v-\lambda)x=0$.

г) Пусть λ — собственное значение эндоморфизма v, и пусть $[\lambda - a, \lambda + b]$ — отрезок в множестве $\mathbf{Z}$, содержащий все собственные значения эндоморфизма v. Рассмотрим многочлен

$$P(T) = (-1)^b \frac{(T-\lambda-1)(T-\lambda-2)\ldots(T-\lambda-b)}{b!} \times \\ \times \frac{(T-\lambda+1)(T-\lambda+2)\ldots(T-\lambda+a)}{a!}.$$

Тогда $P(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{Z}$, $P(\lambda) = 1$, $P(\mu) = 0$ при $\mu \in \mathbf{Z} \cap [\lambda - a, \lambda + b]$ и $\mu \neq \lambda$. Вследствие а) $P(v)(M) \subset M$. Ввиду в) эндоморфизм $P(v)$ проектирует пространство $M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ на собственное подпространство, соответствующее собственному значению λ. Ч. Т. Д.

Замечание. 1) Если мы предположим только, что эндоморфизм v приводится к диагональному виду с целыми собственными значениями, то эндоморфизм u не обязательно будет приводиться к диагональному виду (рассмотрим, например, $M = \mathbf{Z}^2$, полагая $u(x, y) = (y, x)$ при всех $(x, y) \in M$).

Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, R, $\mathscr{H}$, $\mathscr{G}^\alpha$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{U}$ такие же, как в п° 7, и предположим, что $\mathscr{G}$ — порядок Шевалле в расщепленной алгебре Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Определение 3. *Пусть E есть $\mathfrak{g}$-модуль. Скажем, что решетка $\mathscr{E}$ в модуле E допустима (относительно решетки $\mathscr{G}$), если выполняются следующие эквивалентные условия:*

(i) *алгебра $\mathscr{U}$ отображает решетку $\mathscr{E}$ в себя;*

(ii) *для любых $\alpha \in R$, $x \in \mathscr{G}^\alpha$, $n \in \mathbf{N}$, $h \in \mathscr{H}$ решетка $\mathscr{E}$ устойчива относительно эндоморфизмов $\binom{h}{n}$ и $x^{(n)}$.*

Замечания. 2) Пусть ρ — присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $U(\mathfrak{g})$ и α, x, n, h, такие же, как в приведенном выше условии (ii). По лемме 2 $\rho(x^{(n)})\mathscr{U} \subset \mathscr{U}$. С другой стороны, если $p \in \mathbf{N}$, то

$$\rho\left(\binom{h}{p}\right)x^{(n)} = \binom{\operatorname{ad} h}{p}x^{(n)} = \binom{n\alpha(h)}{p}x^{(n)}$$

(п° 5, формула (13)), поэтому $\rho\left(\binom{h}{p}\right).\mathscr{U} \subset \mathscr{U}$. Это доказывает, что $\mathscr{U}$ — допустимая решетка в алгебре $U(\mathfrak{g})$ и, следовательно, $\mathscr{G}$ — допустимая относительно присоединенного представления решетка в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

3) Пусть E — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, $\mathscr{E}$ — допустимая решетка в модуле E и $\mathfrak{c}$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$. По лемме 6 каждый элемент центра $\mathfrak{c}$ определяет в модуле E эндоморфизм,

который приводится к диагональному виду. Следовательно, модуль E полупрост (гл. I, § 6, n° 5, теорема 4). Таким образом, E — прямая сумма простых $\mathscr{D}\mathfrak{g}$-модулей, на которых $\mathfrak{c}$ действует как гомотетия. По лемме 6 $\mathscr{E}=\bigoplus(\mathscr{E}\cap E^{\lambda})$, и для любого веса λ модуля E

$$\lambda(\mathscr{H})\subset\mathbf{Z}.$$

4) Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста и если $\mathscr{H}=Q(R^{\vee})$, то по теореме 3 (ii) условия (i) и (ii) определения 3 эквивалентны условию

(iii) для любых $\alpha\in R$, $x\in\mathscr{G}^{\alpha}$, $n\in\mathbf{N}$ решетка $\mathscr{E}$ устойчива относительно эндоморфизмов $x^{(n)}$.

5) Пусть B — базис системы корней R; в приведенных выше условиях (ii) и (iii) можно заменить условие „$\alpha\in R$“ на „$\alpha\in B\cup(-B)$“ (*там же*).

Теорема 4. *Пусть E — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *в модуле E существует допустимая решетка;*

(ii) *каждый элемент решетки $\mathscr{H}$ определяет в модуле E эндоморфизм с целыми собственными значениями, который можно привести к диагональному виду.*

(i) $\Rightarrow$ (ii). Это следует из замечания 3.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Предположим, что условие (ii) выполнено, и докажем, что выполнено условие (i). По теореме 4 из гл. I, § 6, n° 5, можно предположить, что элементы из центра $\mathfrak{c}$ определяют гомотетии модуля E и что E — простой $\mathscr{D}\mathfrak{g}$-модуль. Пусть B — базис системы корней R и $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ — соответствующее разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть λ — старший вес $\mathscr{D}\mathfrak{g}$-модуля E и $e\in E^{\lambda}-\{0\}$. Положим $\mathscr{E}=\mathscr{U}.e$. Ясно, что $\mathscr{U}.\mathscr{E}\subset\mathscr{E}$. Так как модуль E прост, то $U(\mathfrak{g}).e=E$ и решетка $\mathscr{E}$ порождает модуль E как векторное пространство над $\mathbf{Q}$. При $h\in\mathscr{H}$ и $n\in\mathbf{N}$ имеет место равенство $\binom{h}{n}e=\binom{\lambda(h)}{n}e\in\mathbf{Z}e$. Следовательно,

$$(\mathscr{U}\cap U(\mathfrak{h})).e=\mathbf{Z}e.$$

Так как $U(\mathfrak{n}_+).e=0$, то $\mathscr{E}=(\mathscr{U}\cap U(\mathfrak{n}_-)).e$ ввиду предложения 3. Тогда из теоремы 3 (iii) следует, что $\mathscr{E}$ есть $\mathbf{Z}$-модуль конечного типа.

Следствие. *Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста и если $\mathscr{H}=Q(R^{\vee})$, то у любого конечномерного $\mathfrak{g}$-модуля есть допустимая решетка.*

§ 13. Расщепляемые простые алгебры Ли классического типа

В этом параграфе для каждого типа классических расщепляемых простых алгебр Ли будут явно описаны:

(I) алгебра этого типа, ее размерность и ее расщепляющие подалгебры Картана;

(II) ее дуальная система корней;

(III) ее подалгебры Бореля и параболические подалгебры;

(IV) ее простые фундаментальные представления;

(V) те простые фундаментальные представления, которые являются ортогональными или симплектическими;

(VI) алгебра инвариантных полиномиальных функций;

(VII) некоторые свойства групп $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, $\mathrm{Aut}_0\,\mathfrak{g}$ и $\mathrm{Aut}_e\,\mathfrak{g}$;

(VIII) ограничение формы Киллинга на подалгебру Картана;

(IX) порядки Шевалле.

1. *Алгебра Ли типа A_l* ($l \geqslant 1$)

(I) Пусть V — векторное пространство размерности $l+1$ над полем k, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли $\mathfrak{sl}(V)$ эндоморфизмов пространства V со следом нуль и $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant l+1}$ — базис пространства V. Отображение, которое каждому элементу алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ставит в соответствие его матрицу в этом базисе, позволяет отождествить алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(l+1, k)$ матриц со следом нуль. Известно, что $\mathfrak{g}$ полупроста (гл. I, § 6, n° 7, предложение 8).

Напомним (*Alg.*, chap. II, § 10, n° 3), что через E_{ij} мы обозначаем такую матрицу (α_{mp}), что $\alpha_{ij} = 1$ и $\alpha_{mp} = 0$ при $(m, p) \neq (i, j)$. Матрицы

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_{ij} && (1 \leqslant i,\ j \leqslant l+1,\ i \neq j), \\ &\mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{i+1,i+1} && (1 \leqslant i \leqslant l) \end{aligned}$$

образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом,

$$\dim \mathfrak{g} = l(l+2).$$

Пусть $\widehat{\mathfrak{h}}$ — множество диагональных элементов алгебры Ли $\mathfrak{gl}(l+1, k)$; семейство $(\mathrm{E}_{ii})_{1 \leqslant i \leqslant l+1}$ является базисом векторного пространства $\widehat{\mathfrak{h}}$. Пусть $(\hat{\varepsilon}_i)_{1 \leqslant i \leqslant l+1}$ — базис пространства $\widehat{\mathfrak{h}}^*$, дуальный к базису $(\mathrm{E}_{ii})_{1 \leqslant i \leqslant l+1}$. Для любого $h \in \widehat{\mathfrak{h}}$

$$[h, \mathrm{E}_{ij}] = (\hat{\varepsilon}_i(h) - \hat{\varepsilon}_j(h))\, \mathrm{E}_{ij} \tag{1}$$

вследствие формул (5) из гл. I, § 1, n° 2. Пусть $\mathfrak{h}$ — множество элементов пространства $\widehat{\mathfrak{h}}$ со следом нуль, и пусть $\varepsilon_i = \hat{\varepsilon}_i \,|\, \mathfrak{h}$. Тогда $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (гл. VII, § 2, n° 1, упражнение 4). Соотношение (1) доказывает, что это расщепляющая подалгебра Картана и что корнями расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ служат элементы $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j)$. Пусть $\widehat{\mathfrak{h}}_0^*$ — множество элементов пространства $\widehat{\mathfrak{h}}^*$, сумма координат которых в базисе $(\hat{\varepsilon}_i)$ равна нулю. Отображение $\lambda \mapsto \lambda \mid \mathfrak{h}$ пространства $\widehat{\mathfrak{h}}_0^*$ в $\mathfrak{h}^*$ биективно. Таким образом, система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — система типа A_l (гл. VI, § 4, n° 7). Следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста (§ 3, n° 2, следствие 1 предложения 6). Таким образом, $\mathfrak{g}$ — *простая расщепляемая алгебра Ли типа* A_l.

Любую расщепляющую подалгебру Картана $\mathfrak{h}'$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно получить из подалгебры $\mathfrak{h}$ с помощью элементарного автоморфизма (§ 3, n° 3, следствие предложения 10). Так как $\mathrm{Aut}_e\, \mathfrak{g}$ совпадает с множеством автоморфизмов $x \mapsto sxs^{-1}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ для $s \in \mathbf{SL}(V)$ (гл. VII, § 3, n° 1, замечание 2; см. также (VII)), то существует такой базис β пространства V, что $\mathfrak{h}'$ совпадает с множеством $\mathfrak{h}_\beta$ тех элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, матрицы которых в базисе β диагональны. Так как множество $\mathfrak{h}_\beta$ содержит эндоморфизм, собственные значения которого попарно различны, то единственные векторные подпространства пространства V, устойчивые относительно элементов $\mathfrak{h}_\beta$, — это те, которые порождены каким-либо подмножеством множества β. Отсюда следует, что отображение $\beta \mapsto \mathfrak{h}_\beta$ определяет при факторизации изоморфизм множества разложений пространства V в прямую сумму $l+1$ подпространств размерности 1 на множество расщепляющих подалгебр Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

(II) Пусть $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(i \neq j)$ — некоторый корень. Тогда $\mathfrak{g}^\alpha = k\mathrm{E}_{ij}$. Так как

$$[\mathrm{E}_{ij}, \mathrm{E}_{ji}] = \mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{jj}$$

и $\alpha(\mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{jj}) = 2$, то (§ 2, n° 2, теорема 1 (ii))

$$\mathrm{H}_\alpha = \mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{jj}.$$

(III) Положим $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, ..., $\alpha_l = \varepsilon_l - \varepsilon_{l+1}$. Вследствие n° 7 (I) гл. VI, § 4, мы видим, что $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — базис B системы корней R; положительными корнями относительно базиса B являются корни $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ при $i < j$; соответствующая подалгебра Бореля $\mathfrak{b}$ совпадает с множеством верхних треугольных матриц со следом нуль.

Флагом в пространстве V называется множество векторных подпространств пространства V, отличных от $\{0\}$ и V, которое совершенно упорядочено по включению. Упорядочим по включению множество флагов пространства V. Максимальными флагами будут множества $\{W_1, \ldots, W_l\}$, где W_i — векторное подпространство размерности i и

$$W_1 \subset \ldots \subset W_l.$$

Например, если V_i — подпространство в V, порожденное элементами $e_1, \ldots, e_i$, то $\{V_1, \ldots, V_l\}$ — максимальный флаг.

Немедленно получаем, что $\mathfrak{b}$ — множество элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, сохраняющих элементы максимального флага $\{V_1, \ldots, V_l\}$. Обратно, поскольку алгебра Ли $\mathfrak{b}$ содержит $\mathfrak{h}$ и матрицы E_{ij} при $i < j$, то мы видим, что единственными нетривиальными подпространствами, устойчивыми относительно $\mathfrak{b}$, будут векторные пространства V_i.

Пусть δ — максимальный флаг в пространстве V. Из предыдущего следует, что множество $\mathfrak{b}_\delta$ элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, относительно которых устойчивы все элементы флага δ, — подалгебра Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Поскольку все подалгебры Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$ получаются с помощью элементарных автоморфизмов из подалгебры $\mathfrak{b}$, то мы видим, что отображение $\delta \longmapsto \mathfrak{b}_\delta$ будет биективным отображением множества максимальных флагов на множество подалгебр Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть β — базис пространства V. Ввиду (I) и вследствие предыдущего подалгебрами Бореля, содержащими $\mathfrak{h}_\beta$, являются те подалгебры, которые отвечают максимальным флагам, каждый элемент которых порожден подмножеством множества β. Эти флаги находятся во взаимно однозначном соответствии со всеми совершенными порядками на множестве β. Это соответствие устанавливается следующим образом: каждому полному упорядочению ω на множестве β поставим в соответствие флаг $\{W_1, \ldots, W_l\}$, где W_i — векторное подпространство, порожденное первыми i элементами множества β относительно порядка ω. Так как имеется $(l+1)!$ совершенных порядков множества β, то мы получаем также, что существует $(l+1)!$ подалгебр Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{sl}(V), \mathfrak{h}_\beta)$ (§ 3, n° 3, *замечание*).

Пусть γ — флаг в пространстве V. Так как γ содержится в максимальном флаге, то множество $\mathfrak{p}_\gamma$ элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, относительно которых устойчивы элементы флага γ, — параболическая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Покажем, что единственными нетривиальными векторными подпространствами, устойчивыми относительно $\mathfrak{p}_\gamma$, будут элементы флага γ. Для этого предположим, что $\gamma = \{V_{i_1}, \ldots, V_{i_q}\}$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant l$. Положим $i_0 = 0$, $i_{q+1} = l+1$. Непустые отрезки

$$(i_0+1,\ i_1),\ (i_1+1,\ i_2),\ \ldots,\ (i_q+1,\ i_{q+1})$$

задают разбиение множества $\{1, \ldots, l+1\}$, что позволяет записать каждую квадратную матрицу порядка $l+1$ в виде блоков $(X_{ab})_{1 \leqslant a,\, b \leqslant q+1}$. Алгебра $\mathfrak{p}_\gamma$ совпадает, таким образом, с множеством $\mathfrak{p}_{i_1, \ldots, i_q}$ элементов $(X_{ab})_{1 \leqslant a,\, b \leqslant q+1}$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(l+1, k)$, таких, что $X_{ab} = 0$ при $a > b$. Так как $\mathfrak{p}_{i_1, \ldots, i_q} \supset \mathfrak{b}$, то нетривиальным векторным подпространством, устойчивым относительно эндоморфизмов из $\mathfrak{p}_{i_1, \ldots, i_q}$, является одно из пространств V_i; если $i_k < i < i_{k+1}$, то алгебра $\mathfrak{p}_{i_1, \ldots, i_q}$ содержит элемент $E_{i_{k+1}, i}$ и подпространство V_i не сохраняется под действием этой алгебры, откуда следует наше утверждение.

Таким образом, 2^l флагов, содержащихся в максимальном флаге $\{V_1, \ldots, V_l\}$, дают нам 2^l попарно различных параболических подалгебр, содержащих подалгебру $\mathfrak{b}$. Так как существует в точности 2^l параболических подалгебр, содержащих $\mathfrak{b}$ (§ 3, n° 4, *замечание*), то отсюда следует, что $\gamma \mapsto \mathfrak{p}_\gamma$ — биективное отображение множества флагов пространства V на множество параболических подалгебр алгебры $\mathfrak{g}$. Более того, $\mathfrak{p}_\gamma \supset \mathfrak{p}_{\gamma'}$ тогда и только тогда, когда $\gamma \subset \gamma'$.

Рассмотрим параболическую подалгебру $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{i_1, \ldots, i_q}$ $(1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant l)$. Пусть $\mathfrak{s}$ (соотв. $\mathfrak{n}$) — множество таких элементов $(X_{ab})_{1 \leqslant a,\, b \leqslant q+1}$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(l+1, k)$, что $X_{ab} = 0$ при $a \neq b$ (соотв. $a \geqslant b$). Ввиду предложения 13 из § 3, n° 4, мы получаем, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}$ и подалгебра $\mathfrak{s}$ редуктивна в пространстве $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{n}$ является сразу и наибольшим нильпотентным идеалом, и нильпотентным радикалом алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

(IV) Пусть $\bar{\omega}_r = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r$ при $r = 1, 2, \ldots, l$. Тогда $\bar{\omega}_i(H_{\alpha_j}) = \delta_{ij}$, а следовательно, $\bar{\omega}_r$ — фундаментальный вес, соответствующий корню α_r.

Пусть σ — тождественное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве V. Внешняя степень $\bigwedge^r \sigma$ представления σ действует в пространстве $E = \bigwedge^r V$. Пусть $(e_1, \ldots, e_{l+1})$ — фиксированный базис в пространстве V. Элементы $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$, где $i_1 < \ldots < i_r$, образуют базис в пространстве E. Если $h \in \mathfrak{h}$, то

$$(\bigwedge^r \sigma)(h) \cdot e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r} = (\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_r})(h) e_{i_r} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}.$$

Следовательно, каждый вес имеет кратность 1, $\bar{\omega}_r$ — вес представления $\bigwedge^r \sigma$, и любой другой вес имеет вид $\bar{\omega}_r - \mu$, где μ — положительный радикальный вес. Таким образом, $\bar{\omega}_r$ — старший вес представления $\bigwedge^r \sigma$ и $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$ — примитивный элемент, отвечающий данному старшему весу. Вследствие n° 7 (IX) гл. VI, § 4, группа Вейля в рассматриваемом случае отождествляется с симметрической группой элементов

$$\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{l+1}\}.$$

Следовательно, орбита веса $\bar{\omega}_r$ относительно группы Вейля состоит из всех весов $\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_r}$, где $i_1 < \ldots < i_r$. Таким образом, весами простого модуля, порожденного примитивным элементом $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$, будут веса вида $\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_r}$, и, следовательно, сам модуль совпадает с E. Поэтому $\bigwedge^r \sigma$ — *неприводимое представление со старшим весом* $\bar{\omega}_r$.

Таким образом, представления $\bigwedge^r \sigma$ $(1 \leqslant r \leqslant l)$ фундаментальные. При этом $\dim \bigwedge^r \sigma = \binom{l+1}{r}$.

(V) Имеют место равенства $w_0(\alpha_1) = -\alpha_l$, $w_0(\alpha_2) = -\alpha_{l-1}, \ldots$ (гл. VI, § 4, n° 7 (XI)); следовательно,

$$-w_0(\bar{\omega}_1) = \bar{\omega}_l, \quad -w_0(\bar{\omega}_2) = \bar{\omega}_{l-1}, \quad \ldots .$$

Пусть

$$\omega = n_1\bar{\omega}_1 + \ldots + n_l\bar{\omega}_l \qquad (n_1, \ldots, n_l \in \mathbf{N})$$

— некоторый доминантный вес. Тогда для того, чтобы неприводимое представление со старшим весом ω было ортогональным или симплектическим, необходимо и достаточно, чтобы

$$n_1 = n_l, \quad n_2 = n_{l-1}, \ \ldots$$

(§ 7, n° 5, предложение 12). В частности, если l четно, то ни одно фундаментальное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(l+1, k)$ не является ни ортогональным, ни симплектическим. Если l нечетно, то представление $\bigwedge^i \sigma$ при $i \neq (l+1)/2$ не является ни ортогональным, ни симплектическим. Вследствие n° 7 (VI) гл. VI, § 4, сумма координат веса $\bar{\omega}_{(l+1)/2}$ относительно системы простых корней $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ равна

$$\frac{1}{l+1}\left[\frac{l+1}{2}\left(1+2+\ldots+\frac{l-1}{2}\right)+\frac{l+1}{2}\left(1+2+\ldots+\frac{l+1}{2}\right)\right]= \\ = 1+2+\ldots+\frac{l-1}{2}+\frac{l+1}{4},$$

так что представление $\bigwedge^{(l+1)/2}\sigma$ является ортогональным при $l \equiv -1 \pmod 4$ и симплектическим при $l \equiv 1 \pmod 4$ (§ 7, n° 5, предложение 12). Этот последний результат можно уточнить следующим образом. Выберем ненулевой элемент e в пространстве $\bigwedge^{l+1} V$. Умножение во внешней алгебре модуля V определяет билинейное отображение пространства

$$\bigwedge^{(l+1)/2} V \times \bigwedge^{(l+1)/2} V$$

на пространство $\bigwedge^{l+1} V$, которое записывается в виде $(u, v) \mapsto \Phi(u, v) e$, где Φ — билинейная форма на пространстве $\bigwedge^{(l+1)/2} V$. Непосредственно проверяется, что Φ — ненулевая $\mathfrak{g}$-инвариантная (а следовательно, невырожденная, симметрическая, если $(l+1)/2$ четно, и знакопеременная, если $(l+1)/2$ нечетно, форма).

(VI) При всех $x \in \mathfrak{g}$ характеристический многочлен эндоморфизма $\sigma(x) = x$ записывается в виде

$$T^{l+1} + f_2(x) T^{l-1} + f_3(x) T^{l-2} + \ldots + f_{l+1}(x),$$

где $f_2, \ldots, f_{l+1}$ суть $\mathfrak{g}$-инвариантные полиномиальные функции (§ 8, п° 3, лемма 2).

Если $x = \xi_1 E_{11} + \ldots + \xi_{l+1} E_{l+1, l+1} \in \mathfrak{h}$, то с точностью до знака функции $f_i(x)$ совпадают с элементарными симметрическими функциями от $\xi_1, \ldots, \xi_{l+1}$ степеней $2, \ldots, l+1$ соответственно. Ввиду п° 7 (IX) гл. VI, § 4, функции $f_i | \mathfrak{h}$ порождают алгебру, состоящую из элементов в $\mathbf{S}(\mathfrak{h}^*)$, инвариантных относительно группы Вейля, и они алгебраически независимы. Таким образом (§ 8, п° 3, предложение 3), функции $f_2, f_3, \ldots, f_{l+1}$ порождают алгебру инвариантных полиномиальных функций на $\mathfrak{g}$ и являются алгебраически независимыми.

(VII) Пусть $\varphi_k(g) = \varphi(g)$ при любом $g \in \mathbf{GL}(l+1, k)$ — автоморфизм $x \mapsto gxg^{-1}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда φ — гомоморфизм группы $\mathbf{GL}(l+1, k)$ в группу $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Имеет место равенство

$$\varphi(\mathbf{SL}(l+1, k)) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$$

(VII, § 3, п° 1, *замечание* 2). Пусть $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k. Тогда

$$\mathbf{GL}(l+1, \bar{k}) = \bar{k}^* . \mathbf{SL}(l+1, \bar{k});$$

следовательно, $\varphi_{\bar{k}}(\mathbf{GL}(l+1, \bar{k})) = \varphi_{\bar{k}}(\mathbf{SL}(l+1, \bar{k})) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g} \otimes_k \bar{k})$. Отсюда следует, что $\varphi(\mathbf{GL}(l+1, k)) \subset \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$. С другой стороны, $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) \subset \varphi(\mathbf{GL}(l+1, k))$ ввиду предложения 2 из § 7, п° 1, примененного к тождественному представлению алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Значит,

$$\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) = \varphi(\mathbf{GL}(l+1, k)).$$

Ядром гомоморфизма φ является множество элементов группы $\mathbf{GL}(l+1, k)$, перестановочных со всеми матрицами порядка $l+1$, т. е. множество k^* обратимых скалярных матриц. Следовательно, группа $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ отождествляется с группой $\mathbf{GL}(l+1, k)/k^* = \mathbf{PGL}(l+1, k)$. Ядро гомоморфизма $\varphi' = \varphi | \mathbf{SL}(l+1, k)$ равно $\mu_{l+1}(k)$, где $\mu_{l+1}(k)$ — множество корней $(l+1)$-й степени из единицы в поле k. Следовательно, группа

$\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ отождествляется с группой $\mathbf{SL}(l+1, k)/\mu_{l+1}(k) = \mathbf{PSL}(l+1, k)$. С другой стороны, имеется точная последовательность

$$1 \to \mathbf{SL}(l+1, k) \to \mathbf{GL}(l+1, k) \xrightarrow{\det} k^* \to 1,$$

и образ k^* при гомоморфизме $\det$ совпадает с k^{*l+1}. Отсюда вытекают канонические изоморфизмы

$$\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \to \mathbf{PGL}(l+1, k)/\mathbf{PSL}(l+1, k) \to$$
$$\to \mathbf{GL}(l+1, k)/k^*.\mathbf{SL}(l+1, k) \to k^*/k^{*l+1}.$$

Если $k = \mathbf{R}$, мы видим, что $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ при нечетном $l+1$ и что группа $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ изоморфна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ при четном $l+1$.

В обозначениях § 5 $f(T_Q)$ есть множество автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, индуцирующих на подалгебре $\mathfrak{h}$ тождественное отображение, и, следовательно, это множество равно $\varphi(D)$, где D — множество диагональных матриц группы $\mathbf{GL}(l+1, k)$ (§ 5, предложение 4). Пусть D' — множество диагональных элементов в группе $\mathbf{SL}(l+1, k)$. Из предложения 3 § 5 и из определения группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ следует, что $f(q(T_P)) \subset \varphi(D')$. Покажем, что $f(q(T_P)) = \varphi(D')$. Пусть

$$d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{l+1} \end{pmatrix}$$

— элемент из D'. Существует такой элемент $\zeta \in \mathrm{Hom}(Q(R), k^*) = T_Q$, что $\zeta(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = \lambda_i\lambda_j^{-1}$ при любых i и j. Легко проверить, что $f(\zeta) = \varphi(d)$. Ввиду n° 7 (VIII) гл. VI, § 4, группа $P(R)$ порождена множеством $Q(R)$ и элементом $\varepsilon = \varepsilon_1$, образ которого в факторгруппе $P(R)/Q(R)$ имеет порядок $l+1$. Но

$$\zeta((l+1)\varepsilon) = \zeta((\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + \ldots + (\varepsilon_1 - \varepsilon_{l+1})) =$$
$$= \lambda_1^l\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1} \ldots \lambda_{l+1}^{-1} = \lambda_1^{l+1};$$

следовательно, гомоморфизм ζ продолжается до гомоморфизма группы $P(R)$ в k^*. Это доказывает, что $\zeta \in q(T_P)$, откуда $\varphi(d) \in f(q(T_P))$.

Напомним (§ 5, n° 3, следствие 2 предложения 5), что $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ при $l = 1$ и что группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ изоморфна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ при $l \geqslant 2$. Отображение θ: $x \mapsto -{}^tx$ является автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{sl}(l+1, k)$, и $a_0 = \theta \mid \mathfrak{h} \notin W$, если $l \geqslant 2$ (гл. VI, § 4, n° 7. XI); следовательно, класс элемента a_0 в факторгруппе $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ — нетривиальный элемент этой факторгруппы (§ 5, n° 2, предложение 4).

(VIII) Ограничение формы Киллинга на подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi(\xi_1 E_{11} + \ldots + \xi_{l+1}E_{l+1,\,l+1},\ \xi'_1 E_{11} + \ldots + \xi'_{l+1}E_{l+1,\,l+1}) &= \\ = \sum_{i \neq j} (\xi_i - \xi_j)(\xi'_i - \xi'_j) = \sum_{i,\,j} (\xi_i - \xi_j)(\xi'_i - \xi'_j) &= \\ = (l+1)\sum_i \xi_i\xi'_i + (l+1)\sum_j \xi_j\xi'_j - 2\Big(\sum_i \xi_i\Big)\Big(\sum_j \xi'_j\Big) &= \\ = 2(l+1)\sum_i \xi_i\xi'_i.\end{aligned}$$

(IX) При $1 \leqslant i < j \leqslant l+1$ положим

$$X_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = E_{ij}, \qquad X_{\varepsilon_j - \varepsilon_i} = -E_{ji}.$$

Тогда для любого $\alpha \in R$ выполняются равенства $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$ и $\theta(X_\alpha) = X_{-\alpha}$ (где θ — автоморфизм $x \mapsto -{}^t x$, введенный в (VII)). Следовательно, $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ — система Шевалле расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Положим $k = \mathbf{Q}$. Дозволенными решетками в подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ (§ 12, n° 6, определение 1) являются те, которые содержатся между $\mathbf{Z}$-модулем $Q(R^\vee)$, порожденным элементами $E_{ii} - E_{i+1,\,i+1}$, т. е. образованным диагональными матрицами из $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbf{Z})$, и $\mathbf{Z}$-модулем $P(R^\vee)$, порожденным множеством $Q(R^\vee)$ и $E_{11} - (l+1)^{-1}\sum E_{ii}$ (гл. VI, § 4, n° 7, VIII), т. е. образованным диагональными матрицами со следом нуль вида $x + (l+1)^{-1}a.1$, где коэффициенты матрицы x — целые числа и где $a \in \mathbf{Z}$. Отсюда следует, что алгебра $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbf{Z})$ является порядком Шевалле расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, ассоциированным с дозволенной решеткой $Q(R^\vee)$ и с системой Шевалле (X_α). Легко проверить, что $\bigwedge^r \mathbf{Z}^{l+1}$ — допустимая решетка в пространстве $\bigwedge^r \mathbf{Q}^{l+1}$ относительно $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbf{Z})$ (§ 12, n° 8, определение 3).

С другой стороны, $\mathfrak{gl}(l+1, \mathbf{Z})$ — порядок Шевалле в расщепленной редуктивной алгебре Ли $\mathfrak{gl}(l+1, \mathbf{Q})$; его проекция на $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbf{Q})$ параллельно центру $\mathbf{Q}.1$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(l+1, \mathbf{Q})$ есть порядок Шевалле расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, определенный дозволенной решеткой $P(R^\vee)$ в пространстве $\mathfrak{h}$ и системой Шевалле (X_α). Заметим, что алгебра Ли $\mathfrak{gl}(l+1, \mathbf{Z})$ не совпадает с прямой суммой своих пересечений с $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbf{Q})$ и с центром алгебры $\mathfrak{gl}(l+1, \mathbf{Q})$.

2. Алгебры Ли типа B_l ($l \geqslant 1$)

(I) Пусть V — конечномерное векторное пространство, а Ψ — невырожденная симметрическая билинейная форма на V. Множество эндоморфизмов x пространства V, таких, что

$\Psi(xv, v') + \Psi(v, xv') = 0$ при любых $v, v' \in V$, — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{sl}(V)$. Эта подалгебра полупроста, если $\dim V \neq 2$ (гл. I, § 6, n° 7, предложение 9). *Обозначим ее через* $\mathfrak{o}(\Psi)$ *и назовем ортогональной алгеброй Ли, ассоциированной с формой* Ψ.

Предположим, что V — пространство нечетной размерности $2l+1 \geqslant 3$, а Ψ — форма с максимальным индексом l. Обозначим через Q квадратичную форму, с которой ассоциирована билинейная форма Ψ. При $x \in V$ мы получаем, что $Q(x) = \frac{1}{2}\Psi(x, x)$. Согласно *Алг.*, гл. IX, § 4, n° 2, мы можем представить пространство V в виде прямой суммы двух максимальных вполне изотропных подпространств F и F' и неизотропного одномерного подпространства G, ортогонального к $F+F'$. С точностью до умножения формы Ψ на ненулевую константу можно предположить существование такого элемента $e_0 \in G$, что $\Psi(e_0, e_0) = -2$. Далее, Ψ устанавливает двойственность между пространствами F и F'; пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ — базис пространства F и $(e_{-i})_{1 \leqslant i \leqslant l}$ — дуальный к нему базис пространства F'. Тогда

$$(e_1, \ldots, e_l, e_0, e_{-l}, \ldots, e_{-1})$$

— базис пространства V и

$$Q\left(\sum x_i e_i\right) = -x_0^2 + \sum_{i=1}^{i=l} x_i x_{-i},$$

поэтому матрицей билинейной формы Ψ в этом базисе будет квадратная матрица порядка $2l+1$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & -2 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

где s — квадратная матрица порядка l, все коэффициенты которой равны нулю, кроме тех, что расположены на побочной диагонали[1]) и равны 1. Базис пространства V, который обладает этими свойствами, будет называться его *базисом Витта*. Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(\Psi)$ отождествляется с алгеброй Ли $\mathfrak{o}_S(2l+1, k)$ квадратных матриц a порядка $2l+1$, для которых $a = -S^{-1}\,{}^t a S$ (*Алг.*, гл. IX, § 1, n° 10, формулы (50)).

[1]) Побочной диагональю квадратной матрицы $(a_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ называется множество элементов a_{ij}, где $i + j = n + 1$.

Легко вычислить, что $\mathfrak{g}$ — множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} A & 2s^t x & B \\ y & 0 & x \\ C & 2s^t y & D \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где x и y — матрицы, состоящие из 1 строки и l столбцов, а A, B, C, D — такие квадратные матрицы порядка l, что $B = -s^t B s$, $C = -s^t C s$ и $D = -s^t A s$. Так как отображение $A \mapsto s^t A s$ пространства $\mathbf{M}_l(k)$ в себя — это отражение относительно побочной диагонали, то

$$\dim \mathfrak{g} = 2l + l^2 + 2\frac{l(l-1)}{2} = l(2l+1).$$

Пусть $\mathfrak{h}$ — множество диагональных элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Это коммутативная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, базис которой состоит из элементов

$$H_i = E_{i,i} - E_{-i,-i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant l).$$

Пусть (ε_i) — базис пространства $\mathfrak{h}^*$, дуальный к базису (H_i). Положим

$$\left.\begin{aligned}
X_{\varepsilon_i} &= 2E_{i,0} + E_{0,-i} && (1 \leqslant i \leqslant l),\\
X_{-\varepsilon_i} &= -2E_{-i,0} - E_{0,i} && (1 \leqslant i \leqslant l),\\
X_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= E_{i,j} - E_{-j,-i} && (1 \leqslant i < j \leqslant l),\\
X_{\varepsilon_j-\varepsilon_i} &= -E_{j,i} + E_{-i,-j} && (1 \leqslant i < j \leqslant l),\\
X_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= E_{i,-j} - E_{j,-i} && (1 \leqslant i < j \leqslant l),\\
X_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= -E_{-j,i} + E_{-i,j} && (1 \leqslant i < j \leqslant l).
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Легко проверить, что эти элементы образуют базис подпространства, дополнительного к $\mathfrak{h}$ в пространстве $\mathfrak{g}$, и что если $h \in \mathfrak{h}$, то

$$[h, X_\alpha] = \alpha(h) X_\alpha \tag{4}$$

для любого $\alpha \in R$, где R состоит из $\pm\varepsilon_i$ и $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant l)$. Отсюда вытекает, что подалгебра $\mathfrak{h}$ совпадает со своим нормализатором в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (а следовательно, она — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$) и является расщепляющей подалгеброй, а корни расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — элементы из R. Система корней R расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ имеет тип B_l при $l \geqslant 2$ и тип A_1 (иначе говоря, тип B_1) при $l = 1$ (n° 5 (I) гл. VI, § 4, распространенный на случай $l = 1$). Следовательно, $\mathfrak{g}$ — *полупростая расщепляемая алгебра Ли типа B_l*.

Каждая расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{o}(\Psi)$ получается из $\mathfrak{h}$ с помощью элементарного автоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{o}(\Psi)$, т. е. с помощью элемента группы $\mathbf{O}(\Psi)$ (см. (VII)). Следовательно, расщепляющей подалгеброй Картана будет множество тех элементов $\mathfrak{h}_\beta$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, матрицы которых в некотором базисе Витта β пространства V диагональны. Сразу же проверяется, что единственными векторными подпространствами, инвариантными относительно $\mathfrak{h}_\beta$, являются те, которые порождены некоторым подмножеством базиса β.

Если $l=1$, то у алгебр $\mathfrak{o}(\Psi)$ и $\mathfrak{sl}(2, k)$ одинаковые системы корней и, следовательно, они изоморфны (см. также § 1, упражнение 16). С этого момента мы будем предполагать, что $l \geqslant 2$.

(II) С помощью n° 5 (V) из гл. VI, § 4, определим систему корней $R^\vee$. Мы получаем, что

$$\mathrm{H}_{\varepsilon_i}=2\mathrm{H}_i,\quad \mathrm{H}_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}=\mathrm{H}_i-\mathrm{H}_j,\quad \mathrm{H}_{\varepsilon_i+\varepsilon_j}=\mathrm{H}_i+\mathrm{H}_j.$$

(III) Положим $\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2, \ldots, \alpha_{l-1}=\varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l, \alpha_l=\varepsilon_l$. Ввиду n° 5 (II) гл. VI, § 4, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — базис B системы корней R; положительными относительно базиса B являются корни ε_i и $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j (i<j)$. Соответствующая подалгебра Бореля $\mathfrak{b}$ — это множество верхних треугольных матриц алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Непосредственно проверяется, что единственными устойчивыми относительно подалгебры $\mathfrak{b}$ векторными подпространствами пространства V, отличными от $\{0\}$ и V, являются элементы максимального флага, соответствующего базису (e_i), т. е., с одной стороны, вполне изотропные подпространства $V_1, \ldots, V_l$, где V_i порождено векторами $e_1, \ldots, e_i$, а с другой стороны, ортогональные к ним подпространства $V_{-1}, \ldots, V_{-l}$, где ортогональное к V_i пространство V_{-i} порождено векторами $e_1, \ldots$ $\ldots, e_l, e_0, e_{-l}, \ldots, e_{-i-1}$ и не является вполне изотропным. Однако если некоторое векторное подпространство устойчиво относительно какого-то элемента из алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то относительно этого элемента устойчиво и ортогональное дополнение к этому подпространству. Следовательно, подалгебра Бореля $\mathfrak{b}$ совпадает с множеством элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, относительно которых устойчив флаг $\{V_1, \ldots, V_l\}$.

Скажем, что флаг *изотропен*, если каждый его элемент является вполне изотропным подпространством. Флаг $\{V_1, \ldots$ $\ldots, V_l\}$ — максимальный изотропный флаг. Так как группа Ли $\mathbf{O}(\Psi)$ действует транзитивно и на подалгебрах Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (ср. (VII)) и на максимальных изотропных флагах (*Алг.*, гл. IX, § 4, n° 3, теорема 1), то мы видим, что для каждого максимального изотропного флага δ пространства V множество $\mathfrak{b}_\delta$ элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, относительно которых устойчивы элементы флага δ, является подалгеброй Бореля в $\mathfrak{g}$, а $\delta \mapsto \mathfrak{b}_\delta$ — биективное отображение множества максимальных изотропных флагов на множество подалгебр Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть δ — изотропный флаг, и пусть $\mathfrak{p}_\delta$ — множество элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, относительно которых элементы флага δ устойчивы. Если $\delta \subset \{V_1, \ldots, V_l\}$, то $\mathfrak{p}_\delta$ — параболическая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{b}$, и легко проверить, что единственными устойчивыми относительно подалгебры $\mathfrak{p}_\delta$ вполне изотропными подпространствами $\neq \{0\}$ будут элементы флага δ. Таким образом, мы получаем 2^l параболических подалгебр в $\mathfrak{g}$, содержащих $\mathfrak{b}$. Как и выше, мы видим, что $\delta \mapsto \mathfrak{p}_\delta$ — биективное отображение множества изотропных флагов пространства V на множество параболических подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Более того, $\mathfrak{p}_\delta \supset \mathfrak{p}_{\delta'}$ тогда и только тогда, когда $\delta \subset \delta'$.

(IV) Согласно гл. VI, § 4, n° 5 (VI),

$$\bar{\omega}_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant l-1),$$
$$\bar{\omega}_l = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l)$$

— фундаментальные веса, соответствующие простым корням $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Пусть σ — тождественное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве V. Внешняя степень $\bigwedge^r \sigma$ действует в пространстве $E = \bigwedge^r V$. Если $h \in \mathfrak{h}$, то

$$\sigma(h) \cdot e_i = \varepsilon_i(h) e_i \quad \text{при} \quad -l \leqslant i \leqslant l.$$

Отсюда следует, что при $1 \leqslant r \leqslant l$ $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r$ — старший вес представления $\bigwedge^r \sigma$, причем элементы веса $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r$ пропорциональны вектору $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$. Мы покажем сейчас, что при $1 \leqslant r \leqslant l-1$ *представление* $\bigwedge^r \sigma$ — *фундаментальное представление алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *со старшим весом* $\bar{\omega}_r$. Для этого достаточно показать, что представление $\bigwedge^r \sigma$ неприводимо при $0 \leqslant r \leqslant 2l+1$. Билинейная форма Φ на пространстве $\bigwedge^r V \times \times \bigwedge^{2l+1-r} V$, определенная формулой

$$x \wedge y = \Phi(x, y) e_1 \wedge \ldots \wedge e_l \wedge e_0 \wedge e_{-l} \wedge \ldots \wedge e_{-1},$$

инвариантна относительно алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и устанавливает двойственность между пространствами $\bigwedge^r V$ и $\bigwedge^{2l+1-r} V$. Следовательно, представление $\bigwedge^r \sigma$ дуально представлению $\bigwedge^{2l+1-r} \sigma$, и достаточно доказать, что представления $\bigwedge^r \sigma$ при $0 \leqslant r \leqslant l$ неприводимы или, хотя бы, что наименьшее подпространство T_r пространства $\bigwedge^r V$, содержащее вектор $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$ и устойчивое относительно алгебры Ли $\mathfrak{g}$, совпадает со всем пространством $\bigwedge^r V$. Это непосредственно видно при $r=0$ и $r=1$ (см. формулу (2)). При $r=2$ (следовательно, $l \geqslant 2$) представление $\bigwedge^2 \sigma$ и присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (которое неприводимо) имеют одну и ту же размерность $l(2l+1)$ и один и тот же старший вес $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (гл. VI, § 4, n° 5. IV). Отсюда мы делаем вывод, что представление $\bigwedge^2\sigma$ *эквивалентно присоединенному представлению* и, следовательно, неприводимо. Это доказывает наше утверждение при $l=1$ и $l=2$.

Проведем индукцию по l, предполагая, что $l \geqslant r \geqslant 3$. Заметим сначала, что если W — неизотропное подпространство в V нечетной размерности, ортогональное подпространству W', то ограничение Ψ_W формы Ψ на W невырожденно и алгебру Ли $\mathfrak{o}(\Psi_W)$ можно отождествить с подалгеброй в $\mathfrak{g}$, образованной элементами, которые действуют на W' нулевым образом. Если $\dim W < \dim V$ и если Ψ_W — форма максимального индекса, то из предположения индукции следует, что пространство T_r, содержащее ненулевой элемент вида $w' \wedge w$, где $w' \in \bigwedge^{r-k} W'$ и $w \in \bigwedge^k W$ $(0 \leqslant k \leqslant r)$, содержит также $w' \wedge \bigwedge^{r-k} W$. Действительно, $a.(w' \wedge w) = w' \wedge a.w$ при всех $a \in \mathfrak{o}(\Psi_W)$. Докажем теперь индукцией по $p \in [0, r]$, что пространство T_r содержит элементы

$$x = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{r-p}} \wedge e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}$$

при $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{r-p} \leqslant l$ и $-l \leqslant j_1 < \ldots < j_p \leqslant 0$. При $p=0$ это следует из неприводимости действия алгебры Ли $\mathfrak{gl}(F)$ в пространстве $\bigwedge^r F$ (n° 1), так как в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ содержатся элементы, оставляющие устойчивым подпространство $F = V_l = \sum_{i=1}^{l} k e_i$ и индуцирующие на нем произвольный эндоморфизм (см. формулу (2)). Если $p=1$, то пусть $q \in [1, l]$ — такое число, что $q \neq -j_1$ и что существует $\lambda \in [1, r-p]$, для которого $q = i_\lambda$. Если $p \geqslant 2$, то пусть $q \in [1, l]$ — такое число, что $-q \in \{j_1, \ldots, j_p\}$. С точностью до перестановки элементов e_i можно предполагать, что $q=1$. Тогда возьмем в качестве W пространство, ортогональное к пространству $W' = ke_1 + ke_{-1}$. Если $p=1$, то $x \in e_1 \wedge \bigwedge^{r-1} W$; так как пространство T_r содержит вектор $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$, то мы видим, что T_r содержит вектор x. Если $p \geqslant 2$, то или $x \in e_{-1} \wedge \bigwedge^{r-1} W$, или $x \in e_1 \wedge e_{-1} \wedge \bigwedge^{r-2} W$. Так как по предположению индукции пространство T_r содержит $e_{-1} \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_{r-1}$ и $e_{-1} \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_{r-2}$, то мы видим, что T_r содержит вектор x. Это завершает доказательство.

Другое доказательство неприводимости представления $\bigwedge^r\sigma$ см. в упражнении 6.

Теперь мы определим фундаментальное представление со старшим весом $\bar{\omega}_l$.

Лемма 1. *Пусть V — конечномерное векторное пространство, Q — невырожденная квадратичная форма на V, Ψ — билинейная симметрическая форма, ассоциированная с формой Q, $C(Q)$ — алгебра Клиффорда пространства V относительно формы Q и*

$\mathfrak{f}_0$ — *композиция канонических отображений*

$$\mathfrak{o}(\Psi) \to \mathfrak{gl}(V) \to V \otimes V^* \to V \otimes V \to C^+(Q)$$

(*первое отображение — каноническое вложение, третье отображение определено с помощью канонического изоморфизма пространств* V^* *и* V, *устанавливаемого формой* Ψ, *а четвертое — с помощью умножения в алгебре* $C(Q)$, см. *Алг.*, гл. IX, § 9, n° 1). *Положим* $\mathfrak{f} = \frac{1}{2}\mathfrak{f}_0$.

(i) *Если* (e_r), (e'_r) — *такие базисы пространства* V, *что* $\Psi(e_r, e'_s) = \delta_{rs}$, *то* $\mathfrak{f}_0(a) = \sum_r (ae_r) e'_r$ *при всех* $a \in \mathfrak{o}(\Psi)$.

(ii) *Если* $a, b \in \mathfrak{o}(\Psi)$, *то* $\sum_r (ae_r)(be'_r) = -\sum_r (abe_r) e'_r$.

(iii) *Если* $a \in \mathfrak{o}(\Psi)$ *и* $v \in V$, *то* $[\mathfrak{f}(a), v] = av$.

(iv) *Если* $a, b \in \mathfrak{o}(\Psi)$, *то* $[\mathfrak{f}(a), \mathfrak{f}(b)] = \mathfrak{f}([a, b])$.

(v) *Множество* $\mathfrak{f}(\mathfrak{o}(\Psi))$ *порождает ассоциативную алгебру* $C^+(Q)$.

(vi) *Пусть* N — *некоторый левый* $C^+(Q)$-*модуль и* ρ — *соответствующий гомоморфизм алгебры* $C^+(Q)$ *в* $\mathrm{End}_k(N)$. *Тогда* $\rho \circ \mathfrak{f}$ — *представление алгебры Ли* $\mathfrak{o}(\Psi)$ *в пространстве* N. *Если* N — *простой* $C^+(Q)$-*модуль, то представление* $\rho \circ \mathfrak{f}$ *неприводимо.*

Утверждение (i) очевидно. Если $a, b \in \mathfrak{o}(\Psi)$, то (полагая $\Psi(x, y) = \langle x, y \rangle$)

$$\sum_r (ae_r)(be'_r) = \sum_{r, s, t} \langle ae_r, e'_s \rangle \langle be'_r, e_t \rangle e_s e'_t =$$
$$= \sum_{r, s, t} \langle e_r, ae'_s \rangle \langle e'_r, be_t \rangle e_s e'_t = \sum_{s, t} \langle ae'_s, be_t \rangle e_s e'_t =$$
$$= -\sum_{s, t} \langle e'_s, abe_t \rangle e_s e'_t = -\sum_t (abe_t) e'_t,$$

что доказывает утверждение (ii). Далее, ввиду (i) для каждого $v \in V$ имеем

$$[\mathfrak{f}(a), v] = \frac{1}{2} \sum_r ((ae_r) e'_r v - v (ae_r) e'_r) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_r ((ae_r) e'_r v + (ae_r) v e'_r - (ae_r) v e'_r - v (ae_r) e'_r) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_r ((ae_r) \langle e'_r, v \rangle - \langle ae_r, v \rangle e'_r) =$$
$$= \frac{1}{2} a \left(\sum_r \langle e'_r, v \rangle e_r \right) + \frac{1}{2} \sum_r \langle e_r, av \rangle e'_r =$$
$$= \frac{1}{2} av + \frac{1}{2} av = av,$$

что доказывает утверждение (iii). Теперь

$$[f(a), f(b)] = \left[f(a), \frac{1}{2}\sum_r (be_r)e'_r\right] \quad \text{(ввиду (i))} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_r ([f(a), be_r]e'_r + (be_r)[f(a), e'_r]) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_r ((abe_r)e'_r + (be_r)(ae'_r)) \quad \text{(ввиду (iii))} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_r ((abe_r)e'_r - (bae_r)e'_r) \quad \text{(ввиду (ii))} =$$
$$= f([a, b]) \quad \text{(ввиду (i))},$$

что доказывает утверждение (iv). При доказательстве утверждения (v) можно, расширив основное поле, предполагать, что поле k алгебраически замкнуто. Выберем такой базис (e_r) в пространстве V, что $\Psi(e_r, e_s) = \delta_{rs}$, откуда $e'_r = e_r$. Если $i \neq j$, то $\mathrm{E}_{ij} - \mathrm{E}_{ji} \in \mathfrak{o}(\Psi)$ и

$$f(\mathrm{E}_{ij} - \mathrm{E}_{ji}) = \frac{1}{2}(e_i e_j - e_j e_i) = e_i e_j,$$

но элементы $e_i e_j$ порождают алгебру $C^+(Q)$.

Утверждение (vi) следует из утверждений (iv) и (v). Ч. Т. Д.

Воспользуемся теперь обозначениями из начала этого пункта. Положим $\widetilde{V} = F + F'$, и пусть $\widetilde{Q}$ (соотв. $\widetilde{\Psi}$) — ограничение формы Q (соотв. Ψ) на пространство $\widetilde{V}$. Тогда $\widetilde{Q}$ — невырожденная квадратичная форма максимального индекса l на пространстве $\widetilde{V}$ размерности $2l$, и алгебра Клиффорда $C(\widetilde{Q})$ — центральная простая алгебра размерности 2^{2l} (*Алг.*, гл. IX, § 9, n° 4, теорема 2). Пусть N — внешняя алгебра максимального изотропного подпространства F', порожденного векторами $e_{-1}, \ldots, e_{-l}$. Отождествим пространство F и дуальное к нему пространство F' с помощью билинейной формы Ψ; обозначим через $\lambda(x)$ (соотв. через $\lambda(y)$) при $x \in F'$ (соотв. при $y \in F$) эндоморфизм левого внешнего умножения на x (соотв. левого внутреннего умножения на y) в пространстве N. Если $a_1, \ldots, a_k \in F'$, то

$$\lambda(x) \cdot (a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) = x \wedge a_1 \wedge \ldots a_k,$$
$$\lambda(y) \cdot (a_1 \wedge \ldots \wedge a_k) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \Psi(a_i, y) a_1 \wedge \ldots \wedge a_{i-1} \wedge a_{i+1} \wedge \ldots \wedge a_k.$$

Легко проверить, что $\lambda(x)^2 = \lambda(y)^2 = 0$ и

$$\lambda(x)\lambda(y) + \lambda(y)\lambda(x) = \Psi(x, y) \, . \, 1.$$

Отсюда мы получаем (*Алг.*, гл. IX, § 9, n° 1), что существует единственный гомоморфизм (обозначим его также через λ) алгебры $C(\widetilde{Q})$ в $\operatorname{End} N$, который продолжает отображение λ: $F \cup F' \to \operatorname{End} N$. Так как $\dim N = 2^l$, а у алгебры $C(\widetilde{Q})$ есть только один класс неприводимых модулей размерности 2^l (*Алг.*, гл. IX, § 9, n° 4, теорема 2), то представление алгебры $C(\widetilde{Q})$ в пространстве N, определенное гомоморфизмом λ, неприводимо. Это спинорное представление алгебры $C(\widetilde{Q})$ (*там же*).

Рассмотрим теперь отображение μ: $v \mapsto e_0 v$ пространства $\widetilde{V}$ в $C^+(Q)$. Для $v \in \widetilde{V}$ имеем

$$(e_0 v)^2 = -e_0^2 v^2 = -Q(e_0) Q(v) = Q(v) = \widetilde{Q}(v),$$

и отображение μ единственным образом продолжается до гомоморфизма (обозначим его также через μ) алгебры $C(\widetilde{Q})$ в $C^+(Q)$. Так как алгебра $C(\widetilde{Q})$ проста и

$$\dim C^+(Q) = \dim C(\widetilde{Q}) = 2^l,$$

то мы видим, что μ — *изоморфизм*. Следовательно, отображение $\lambda \circ \mu^{-1}$ определяет на пространстве N структуру простого $C^+(Q)$-модуля и $\rho = \lambda \circ \mu^{-1} \circ f$ — неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве N (лемма 1 (vi)).

С другой стороны, ввиду леммы 1 (i) имеем

$$f(\mathrm{H}_i) = \frac{1}{2}(e_i e_{-i} - e_{-i} e_i).$$

Так как $e_i e_{-i} = -e_0^2 e_i e_{-i} = e_0 e_i e_0 e_{-i}$ и $e_i e_{-i} + e_{-i} e_i = 1$, то

$$\mu^{-1} \circ f(\mathrm{H}_i) = \frac{1}{2} - e_{-i} e_i = -\frac{1}{2} + e_i e_{-i}.$$

Отсюда мы получаем, что при $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant l$

$$\rho(\mathrm{H}_i)(e_{-i_1} \wedge \ldots \wedge e_{-i_k}) =$$
$$= \begin{cases} -\frac{1}{2} e_{-i_1} \wedge \ldots \wedge e_{-i_k}, & \text{если } i \in \{i_1, \ldots, i_k\}, \\ \frac{1}{2} e_{-i_1} \wedge \ldots \wedge e_{-i_k}, & \text{если } i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}, \end{cases}$$

и для $h \in \mathfrak{h}$

$$\rho(h)(e_{-i_1} \wedge \ldots \wedge e_{-i_k}) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l) - (\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_k})\right)(h)(e_{-i_1} \wedge \ldots \wedge e_{-i_k}). \quad (5)$$

Это показывает, что $\bar{\omega}_l$ — старший вес представления ρ. Представление ρ называется *спинорным представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим, что все его веса просты (к тому же $\bar{\omega}_l$ — микровес).

(V) Так как $w_0 = -1$, то каждое простое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — или ортогональное, или симплектическое. Ввиду n° 5 (VI) гл. VI, § 4, сумма числовых координат веса $\bar{\omega}_r$ относительно базиса $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — целое число при $1 \leqslant r \leqslant l-1$. Следовательно, представление $\bigwedge^r \sigma$ ортогонально. Более того, расширение $\Psi_{(r)}$ формы Ψ на пространство $\bigwedge^r V$ инвариантно относительно этого представления.

Для спинорного представления сумма числовых координат веса $\bar{\omega}_l$ относительно базиса $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ равна $\frac{1}{2}(1 + \ldots + l) = \frac{l(l+1)}{4}$ (*там же*). Следовательно, это представление ортогональное при $l \equiv 0$ или $-1 \pmod 4$ и симплектическое при $l \equiv 1$ или $2 \pmod 4$. Рассмотрим дополнительную билинейную форму Φ на пространстве $N = \bigwedge F'$, определенную следующим образом: если $x \in \bigwedge^p F'$ и $y \in \bigwedge^q F'$, то $\Phi(x, y) = 0$ при $p + q \neq l$ и

$$x \wedge y = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \Phi(x, y) e_{-1} \wedge \ldots \wedge e_{-r}$$

при $p + q = l$. Легко проверить, что Φ — невырожденная форма, симметрическая при $l \equiv 0, -1 \pmod 4$ и знакопеременная при $l \equiv 1, 2 \pmod 4$. Далее, ввиду леммы 1 (i) мы получаем, что при $1 \leqslant i \leqslant l$

$$f(X_{\varepsilon_i}) = e_0 e_i, \quad f(X_{-\varepsilon_i}) = -e_0 e_{-i},$$

а при $1 \leqslant i < j \leqslant l$

$$f(X_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}) = \frac{1}{2}(e_i e_{-j} - e_{-j} e_i) = e_i e_{-j} = e_0 e_i e_0 e_{-j}.$$

Аналогично

$$f(X_{\varepsilon_j - \varepsilon_i}) = -e_0 e_j e_0 e_{-i}, \quad f(X_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}) = e_0 e_i e_0 e_j$$

и

$$f(X_{-\varepsilon_i - \varepsilon_j}) = e_0 e_{-i} e_0 e_{-j},$$

поэтому

$$\mu^{-1} \circ f(X_{\varepsilon_i}) = e_i, \quad \mu^{-1} \circ f(X_{-\varepsilon_i}) = -e_{-i}$$

и

$\mu^{-1} \circ f(X_{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j}) = c e_{\pm i} e_{\pm j}$ при $1 \leqslant i, j \leqslant l, i \neq j$, где $c \in \{1, -1\}$.

Легко проверить, что форма Φ $\mathfrak{g}$-инвариантна (см. упражнение 18).

(VI) Запишем характеристический многочлен эндоморфизма $\sigma(x)$ для $x \in \mathfrak{g}$ в виде

$$T^{2l+1} + f_1(x) T^{2l} + f_2(x) T^{2l-1} + \ldots + f_{2l+1}(x),$$

где $f_1, \ldots, f_{2l+1}$ — инвариантные полиномиальные функции на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Если $x = \xi_1 H_1 + \ldots + \xi_l H_l \in \mathfrak{h}$, то функции $f_i(x)$ равны с точностью до знака элементарным симметрическим функциям от переменных $\xi_1, \ldots, \xi_l, -\xi_1, \ldots, -\xi_l$. Такая симметрическая функция равна нулю, если ее степень нечетна, и

$$T^{2l+1} + f_2(x) T^{2l-1} + f_4(x) T^{2l-3} + \ldots + f_{2l}(x) T = \\ = T(T^2 - \xi_1^2) \ldots (T^2 - \xi_l^2),$$

так что функции $f_2(x), \ldots, f_{2l}(x)$ равны с точностью до знака элементарным симметрическим функциям от переменных $\xi_1^2, \ldots, \xi_l^2$ и являются алгебраически независимыми образующими алгебры $\mathbf{S}(\mathfrak{h}^*)^W$ (гл. VI, § 4, n° 5 (IX)). Учитывая теорему 1 (ii) из § 8, n° 3, мы видим, что $f_1 = f_3 = f_5 = \ldots = 0$ и $(f_2, f_4, \ldots, f_{2l})$ — алгебраически независимое семейство, порождающее алгебру инвариантных полиномиальных функций на $\mathfrak{g}$.

(VII) Поскольку единственный автоморфизм графа Дынкина — тождественное отображение, то $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

Пусть Σ — группа преобразований подобия пространства V относительно формы Ψ. Для любого $g \in \Sigma$ пусть $\varphi(g)$ — автоморфизм $x \mapsto gxg^{-1}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда φ — гомоморфизм группы Σ в группу $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Покажем, что этот гомоморфизм сюръективен. Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$. По предложению 2 из § 7, n° 1, существует такой элемент $s \in \mathbf{GL}(V)$, что $\alpha(x) = sxs^{-1}$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Таким образом, преобразование s переводит Ψ в билинейную форму Ψ' на V, тоже инвариантную относительно алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и, следовательно, пропорциональную форме Ψ (§ 7, n° 5, предложение 12). Это доказывает, что $s \in \Sigma$.

Так как тождественное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ неприводимо, то его коммутант состоит из скаляров (§ 6, n° 1, предложение 1); значит, ядром гомоморфизма φ является k^*. Поэтому группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ отождествляется с группой Σ/k^*. Но, согласно n° 5 из *Алг.*, гл. IX, § 6, группа Σ совпадает с произведением групп k^* и $\mathbf{SO}(\Psi)$; следовательно, группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ отождествляется с $\mathbf{SO}(\Psi)$.

Пусть $\mathbf{O}_0^+(\Psi)$ — приведенная ортогональная группа формы Ψ (*Алг.*, гл. IX, § 9, n° 5). Так как группа $\mathbf{SO}(\Psi)/\mathbf{O}_0^+(\Psi)$ коммутативна (*там же*), то группа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ содержится в $\mathbf{O}_0^+(\Psi)$

(§ 11, n°2, предложение 3). В действительности эти группы совпадают (упражнение 7).

(VIII) Каноническая билинейная форма Φ_R на пространстве $\mathfrak{h}^*$ задается формулой

$$\Phi_R(\xi_1\varepsilon_1 + \ldots + \xi_l\varepsilon_l, \xi'_1\varepsilon_1 + \ldots + \xi'_l\varepsilon_l) = \frac{1}{4l-2}(\xi_1\xi'_1 + \ldots + \xi_l\xi'_l)$$

(гл. VI, § 4, n°5 (V)). Изоморфизм пространства $\mathfrak{h}$ на пространство $\mathfrak{h}^*$, определяемый формой Φ_R, переводит элемент H_i в $(4l-2)\,.\,\varepsilon_i$. Стало быть, обратной к Φ_R формой, т. е. ограничением на $\mathfrak{h}$ формы Киллинга, будет

$$\Phi(\xi_1\mathrm{H}_1 + \ldots + \xi_l\mathrm{H}_l, \xi'_1\mathrm{H}_1 + \ldots + \xi'_l\mathrm{H}_l) = \\ = (4l-2)(\xi_1\xi'_1 + \ldots + \xi_l\xi'_l).$$

(IX) Рассмотрим элементы X_α $(\alpha \in R)$, определенные формулами (3). Легко проверить, что $[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}] = -\mathrm{H}_\alpha$ при $\alpha \in R$. С другой стороны, пусть M — матрица $\mathrm{I} + \mathrm{E}_{0,0}$. Так как $M = \mathrm{S}^t\mathrm{M}^{-1}\mathrm{S}$, то отображение

$$\theta\colon g \longmapsto -\mathrm{M}^{-1}\,{}^t g\mathrm{M}$$

— автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\theta(\mathrm{X}_\alpha) = \mathrm{X}_{-\alpha}$ при всех $\alpha \in R$. Следовательно, (X_α) — *система Шевалле расщепленной алгебры Ли* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Предположим, что $k = \mathbf{Q}$. Подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ содержит две дозволенные решетки: решетку $Q(R^\vee)$, порожденную элементами H_α, и решетку $P(R^\vee)$, порожденную элементами H_i и состоящую из тех диагональных матриц с целыми коэффициентами, которые содержатся в $\mathfrak{h}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{o}_S(2l+1, \mathbf{Z})$ (множество матриц из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с целыми коэффициентами) совпадает с порядком Шевалле $P(R^\vee) + \sum \mathbf{Z}\,.\,\mathrm{X}_\alpha$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как $(\mathrm{X}_{\pm\varepsilon_i})^2 = 2\mathrm{E}_{\pm i, \mp i}$, $(\mathrm{X}_{\pm\varepsilon_i})^3 = 0$ и $(\mathrm{X}_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j})^2 = 0$, то решетка $\mathscr{V}$, порожденная базисом Витта $(e_i)_{-l \leqslant i \leqslant l}$, — допустимая относительно $\mathfrak{o}_S(2l+1, \mathbf{Z})$ решетка в пространстве V. Аналогично, допустимой решеткой в пространстве $\bigwedge^r V$ будет $\bigwedge^r \mathscr{V}$.

Рассмотрим теперь спинорное представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $N = \bigwedge F'$. Так как веса этого представления не отображают решетку $P(R^\vee)$ в $\mathbf{Z}$, то у него нет решетки, допустимой относительно $\mathfrak{o}_S(2l+1, \mathbf{Z})$. Однако решетка $\mathscr{N}$, порожденная каноническим базисом $(e_{-i_1} \wedge \ldots \wedge e_{-i_k})$ пространства N (для $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant l$), является допустимой решеткой относительно порядка Шевалле $\mathscr{G} = Q(R^\vee) + \sum_{\alpha \in R} \mathbf{Z}\,.\,\mathrm{X}_\alpha$.

Действительно, ясно, что решетка $\mathscr{N}$ устойчива относительно внешнего умножения на e_{-i} и внутреннего умножения на e_i (при $1 \leqslant i \leqslant l$). Формулы из (V) показывают также, что решетка $\mathscr{N}$ устойчива относительно $\rho(\mathscr{G})$. Так как, кроме того, $\rho(X_\alpha)^2 = 0$ при всех $\alpha \in R$, то мы получаем, что решетка $\mathscr{N}$ допустима.

3. Алгебра Ли типа C_l $(l \geqslant 1)$

(I) Пусть Ψ — невырожденная знакопеременная билинейная форма на векторном пространстве V конечной размерности $2l \geqslant 2$. Множество эндоморфизмов x пространства V, для которых $\Psi(xv, v') + \Psi(v, xv') = 0$ при всех $v, v' \in V$, — полупростая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{sl}(V)$ (гл. I, § 6, n° 7, предложение 9). *Она обозначается через* $\mathfrak{sp}(\Psi)$ *и называется симплектической алгеброй Ли, ассоциированной с формой* Ψ.

Вследствие *Алг.*, гл. IX, § 4, n° 2, пространство V можно представить в виде прямой суммы двух максимальных вполне изотропных подпространств F и F', сопряженных относительно формы Ψ. Пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ — базис пространства F, а $(e_{-i})_{1 \leqslant i \leqslant l}$ — сопряженный базис пространства F'. Тогда

$$(e_1, \ldots, e_l, e_{-l}, \ldots, e_{-1})$$

— базис пространства V. Мы будем называть такой базис *базисом Витта* (или симплектическим базисом) пространства V. Матрица формы Ψ относительно этого базиса — квадратная матрица порядка $2l$ вида

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix},$$

где s — квадратная матрица порядка l, все элементы которой равны нулю, за исключением расположенных на побочной диагонали элементов, равных 1 (см. n° 2 (I)).

Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(\Psi)$ отождествляется с алгеброй Ли $\mathfrak{sp}(2l, k)$ таких квадратных матриц a порядка $2l$, что $a = -\mathrm{J}^{-1}\,{}^t a\mathrm{J} = \mathrm{J}\,{}^t a\mathrm{J}$ (*Алг.*, гл. IX, § 1, n° 10, формулы (50)); они имеют вид

$$a = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & -s\,{}^t\mathrm{A}s \end{pmatrix},$$

где A, B, C — такие матрицы порядка l, что $\mathrm{B} = s\,{}^t\mathrm{B}s$ и $\mathrm{C} = s\,{}^t\mathrm{C}s$; иначе говоря, B и C — матрицы, симметричные относительно побочной диагонали. Отсюда мы получаем, что

$$\dim \mathfrak{g} = l^2 + 2\frac{l(l+1)}{2} = l(2l+1).$$

Пусть $\mathfrak{h}$ — множество диагональных матриц алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Это коммутативная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, базисом которой будут элементы $H_i = E_{i,i} - E_{-i,-i}$ при $1 \leqslant i \leqslant l$. Пусть $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ — базис, сопряженный к (H_i). Для $1 \leqslant i < j \leqslant l$ положим

$$
\left.
\begin{aligned}
X_{2\varepsilon_i} &= E_{i,-i},\\
X_{-2\varepsilon_i} &= -E_{-i,i},\\
X_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= E_{i,j} - E_{-j,-i},\\
X_{-\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= -E_{j,i} + E_{-i,-j},\\
X_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= E_{i,-j} + E_{j,-i},\\
X_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= -E_{-i,j} - E_{-j,i}.
\end{aligned}
\right\} \tag{6}
$$

Легко проверить, что эти элементы образуют базис дополнительного к $\mathfrak{h}$ подпространства в пространстве $\mathfrak{g}$ и что если $h \in \mathfrak{h}$, то

$$[h, X_\alpha] = \alpha(h) X_\alpha \tag{7}$$

для любого $\alpha \in R$, где R — множество, образованное элементами $\pm 2\varepsilon_i$ и $\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(i < j)$. Из этого следует, что подалгебра Ли $\mathfrak{h}$ совпадает со своим нормализатором в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (и, следовательно, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$), подалгебра $\mathfrak{h}$ расщепляющая, а корнями расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ являются элементы из R. Система корней R расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ имеет тип C_l при $l \geqslant 2$ и тип A_1 (или, иначе говоря, тип C_1) при $l = 1$ (гл. VI, § 4, n° 6 (I) с учетом случая $l = 1$). Следовательно, $\mathfrak{g}$ — *простая расщепляемая алгебра Ли типа* C_l.

Каждая расщепляющая подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ может быть получена из $\mathfrak{h}$ с помощью элементарного автоморфизма, а следовательно, с помощью элемента из симплектической группы $\mathbf{Sp}(\Psi)$ (см. (VII) и совпадает, таким образом, с множеством $\mathfrak{h}_\beta$ тех элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, матрицы которых диагональны в некотором базисе Витта β. Непосредственно проверяется, что единственными устойчивыми относительно $\mathfrak{h}_\beta$ подпространствами векторного пространства V будут пространства, порожденные некоторым подмножеством базиса β.

Ясно, что $\mathfrak{sp}(2, k) = \mathfrak{sl}(2, k)$. Кроме того, у алгебр Ли $\mathfrak{sp}(4, k)$ и $\mathfrak{o}_S(5, k)$ одинаковые системы корней; следовательно, они изоморфны (см. упражнение 3). *С этого момента мы предполагаем, что* $l \geqslant 2$.

(II) Используя гл. VI, § 4, nn° 6 (I) и 6 (V), определим систему корней $R^\vee$. Мы получаем, что

$$H_{2\varepsilon_i} = H_i, \quad H_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = H_i - H_j, \quad H_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = H_i + H_j.$$

(III) Положим $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ \ldots, \ \alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l, \ \alpha_l = 2\varepsilon_l$. Ввиду VI, § 4, n° 6 (II), $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — базис B системы корней R. Положительными корнями относительно базиса B являются $2\varepsilon_i$ и $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(i < j)$. Соответствующая подалгебра Бореля $\mathfrak{b}$ — множество верхних треугольных матриц алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть δ — изотропный флаг пространства V (т. е. такой флаг, все элементы которого — вполне изотропные относительно формы Ψ подпространства) и $\mathfrak{p}_\delta$ — подалгебра, образованная теми элементами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, относительно которых элементы флага δ устойчивы. Рассуждая так же, как и в n° 2 (III), можно показать, что $\delta \mapsto \mathfrak{p}_\delta$ — биективное отображение множества изотропных флагов (соотв. максимальных изотропных флагов) на множество параболических подалгебр (соотв. подалгебр Бореля) алгебры Ли $\mathfrak{g}$; включение $\mathfrak{p}_\delta \supset \mathfrak{p}_{\delta'}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\delta \subset \delta'$.

(IV) Ввиду гл. VI, § 4, n° 6 (VI), фундаментальными весами, соответствующими $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, будут $\bar\omega_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$. Мы покажем, что фундаментальное представление σ_r, соответствующее весу $\bar\omega_r$, можно реализовать как подпредставление представления $\bigwedge^r \sigma$, где σ — тождественное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве V. Для этого изучим разложение представления $\bigwedge \sigma$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ во внешней алгебре $\bigwedge V$.

Пусть (e_i^*) — базис пространства V^*, дуальный к базису (e_i). Знакопеременную билинейную форму Ψ можно отождествить с элементом $\Gamma^* \in \bigwedge^2 V^*$ (*Alg.*, chap. III, § 11, n° 5), и легко проверить, что

$$\Gamma^* = -\sum_{i=1}^{l} e_i^* \wedge e_{-i}^*.$$

Пусть Ψ^* — форма, обратная к форме Ψ (*Алг.*, гл. IX, § 1, n° 7). Ясно, что

$$\Psi^*(e_i^*, e_j^*) = 0$$

при $i \neq -j$ и $\Psi^*(e_i^*, e_{-i}^*) = -1$ при $1 \leqslant i \leqslant l$. Если отождествить форму Ψ^* с элементом $\Gamma \in \bigwedge^2 V$, то

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{l} e_i \wedge e_{-i}.$$

Обозначим теперь через X_- эндоморфизм внешнего умножения слева на элемент Γ в пространстве $\bigwedge V$, а через X_+ —

эндоморфизм внутреннего умножения слева на $-\Gamma^*$ в пространстве $\bigwedge V$:

$$X_- u = \left(\sum_{i=1}^{l} e_i \wedge e_{-i}\right) \wedge u,$$

$$X_+ u = \left(\sum_{i=1}^{l} e_i^* \wedge e_{-i}^*\right) \wedge u.$$

Для того чтобы вычислить X_+ и X_-, рассмотрим следующий базис в пространстве $\bigwedge V$: для любой тройки (A, B, C), образованной тремя *непересекающимися* подмножествами отрезка $[1, l]$, положим

$$e_{A, B, C} = e_{a_1} \wedge \ldots \wedge e_{a_m} \wedge e_{-b_1} \wedge \ldots \wedge e_{-b_n} \wedge e_{c_1} \wedge e_{-c_1} \wedge \ldots \\ \ldots \wedge e_{c_p} \wedge e_{-c_p},$$

где $(a_1, \ldots, a_m)$ (соотв. $(b_1, \ldots, b_n)$, $(c_1, \ldots, c_p)$) — элементы из A (соотв. B, C), расположенные в возрастающем порядке. Таким образом, мы получаем базис пространства $\bigwedge V$, и простые вычисления показывают, что

$$X_- \cdot e_{A, B, C} = \sum_{i \in [1, l],\ i \notin A \cup B \cup C} e_{A, B, C \cup \{i\}}, \tag{8}$$

$$X_+ \cdot e_{A, B, C} = -\sum_{j \in C} e_{A, B, C - \{j\}}. \tag{9}$$

Пусть H — эндоморфизм пространства $\bigwedge V$, который на подпространстве $\bigwedge^r V$ сводится к умножению на $(l-r)$ $(0 \leqslant r \leqslant 2l)$. Легко проверить (см. упражнение 19), что

$$[X_+, X_-] = -H,$$
$$[H, X_+] = 2X_+,$$
$$[H, X_-] = -2X_-.$$

Иначе говоря, векторное пространство $\mathfrak{s}$, порожденное X_+, X_- и H, — подалгебра Ли в $\operatorname{End}(\bigwedge V)$, изоморфная $\mathfrak{sl}(2, k)$, и $\bigwedge^r V$ — подпространство элементов веса $l-r$. Обозначим через E_r подпространство в $\bigwedge^r V$, образованное примитивными элементами, т. е. $E_r = (\bigwedge^r V) \cap \operatorname{Ker} X_+$. Из § 1 следует, что при $r < l$ ограничение оператора X_- на $\bigwedge^r V$ инъективно и что при $r \leqslant l$ пространство $\bigwedge^r V$ разлагается в прямую сумму

$$\bigwedge^r V = E_r \oplus X_-(E_{r-2}) \oplus X_-^2(E_{r-4}) \oplus \ldots = \\ = E_r \oplus X_-(\bigwedge^{r-2} V).$$

Это показывает, в частности, что $\dim E_r = \binom{2l}{r} - \binom{2l}{r-2}$ при $0 \leqslant r \leqslant l$.

С другой стороны, само определение алгебры Ли $\mathfrak{sp}(\Psi)$ показывает, что элемент Γ^* аннулируется второй внешней степенью представления, дуального к представлению σ. Аналогично, элемент Γ аннулируется представлением $\bigwedge^2\sigma$. Из этого сразу следует, что эндоморфизмы X_+, X_-, а следовательно, и H перестановочны с эндоморфизмами $\bigwedge\sigma(g)$ при $g \in \mathfrak{g}$. Следовательно, подпространства E_r при $0 \leqslant r \leqslant l$ устойчивы относительно $\bigwedge^r\sigma$. Покажем, что *ограничение представления* $\bigwedge^r\sigma$ *на пространство* E_r — *фундаментальное представление* σ_r *веса* $\bar{\omega}_r$ $(1 \leqslant r \leqslant l)$.

Прежде всего заметим, что веса представления $\bigwedge^r\sigma$ относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ имеют вид $\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_k} - (\varepsilon_{j_1} + \ldots + \varepsilon_{j_{r-k}})$, где $i_1, \ldots, i_k$ (соотв. $j_1, \ldots, j_{r-k}$) — различные элементы отрезка $[1, l]$. Следовательно, старший вес представления $\bigwedge^r\sigma$ равен

$$\bar{\omega}_r = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r,$$

и векторы веса $\bar{\omega}_r$ — векторы, пропорциональные вектору $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r = e_{\{1, \ldots, r\}, \varnothing, \varnothing}$. Формула (9) показывает, что $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r \in E_r$. Достаточно, следовательно, показать, что ограничение представления $\bigwedge^r\sigma$ на пространство E_r неприводимо.

Если $s \in \mathbf{Sp}(\Psi)$, то продолжение эндоморфизма s на пространство $\bigwedge V$ (соотв. $\bigwedge V^*$) переводит элемент Γ (соотв. Γ^*) в себя и, следовательно, перестановочно с эндоморфизмами X_+ и X_-, а подпространства E_r устойчивы относительно этого продолжения. Следовательно, E_r содержит подпространство F_r, порожденное векторами, получающимися из $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$ под действием группы $\mathbf{Sp}(\Psi)$. Как показывает теорема Витта, это такие ненулевые разложимые r-векторы, что соответствующие векторные подпространства пространства V вполне изотропны. Такие r-векторы мы будем называть изотропными.

Лемма 2. *Пусть* F_r, $1 \leqslant r \leqslant l$, — *подпространство в* $\bigwedge^r V$, *порожденное изотропными* r*-векторами. Тогда*

$$\bigwedge^r V = F_r + X_-\left(\bigwedge^{r-2} V\right) = F_r + \left(\sum_{i=1}^{l} e_i \wedge e_{-i}\right) \wedge \bigwedge^{r-2} V.$$

Покажем сначала, как из леммы 2 следует наше утверждение. Так как $F_r \subset E_r$ и $E_r \cap X_-\left(\bigwedge^{r-2} V\right) = \{0\}$, то из леммы 2 вытекает, что $F_r = E_r$. С другой стороны, пусть $s \in \mathbf{Sp}(\Psi)$; тогда автоморфизм $a \mapsto sas^{-1}$ пространства $\mathrm{End}(V)$ оставляет $\mathfrak{g}$ устойчивой и индуцирует на ней некоторый автоморфизм из $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ (см. (VII)). Следовательно, он переводит каждое неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в эквивалентное представление (§ 7, n° 1, предложение 2). Так как вектор $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$ принадлежит неприводимой компоненте представления $\bigwedge^r\sigma$ и пространство $E_r = F_r$ порождено образами вектора $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$ при преобразованиях из группы $\mathbf{Sp}(\Psi)$, то представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве E_r изотипно. Однако кратность старшего веса $\tilde{\omega}_r$ равна 1, поэтому представление неприводимо.

Осталось доказать лемму. При $r = 1$ она очевидна. Будем доказывать ее по индукции; пусть $r \geqslant 2$. По предположению индукции нам достаточно доказать, что

$$F_{r-1} \wedge V \subset F_r + \Gamma \wedge \mathsf{\Lambda}^{r-2} V$$

или что если y — разложимый $(r-1)$-вектор и $x \in V$, то

$$z = y \wedge x \in F_r + \Gamma \wedge \mathsf{\Lambda}^{r-2} V.$$

Пусть $(f_i)_{1 \leqslant \pm i \leqslant l}$ — такой базис Витта пространства V, что $y = f_1 \wedge \ldots \wedge f_{r-1}$. Достаточно провести доказательство в случае, когда $x = f_i$. Если $i \notin [1-r, -1]$, то r-вектор $f_1 \wedge \ldots \wedge f_{r-1} \wedge f_i$ изотропен. В противном случае можно предположить с точностью до перенумерации элементов f_i, что $i = 1-r$. Тогда $\Gamma = \sum_{j=1}^{l} f_j \wedge f_{-j}$, откуда следует, что

$$f_{r-1} \wedge f_{1-r} = \frac{1}{l-r+2}\left(\Gamma - \sum_{i=1}^{r-2} f_i \wedge f_{-i} + \sum_{j=r}^{l} (f_{r-1} \wedge f_{1-r} - f_j \wedge f_{-j})\right),$$

$$z = \frac{1}{l-r+2}\,\Gamma \wedge f_1 \wedge \ldots \wedge f_{r-2} + \frac{1}{l-r+2} \sum_{j=r}^{l} (f_1 \wedge \ldots \wedge f_{r-2}) \wedge (f_{r-1} \wedge f_{1-r} - f_j \wedge f_{-j}).$$

Но

$$f_{r-1} \wedge f_{1-r} - f_j \wedge f_{-j} = (f_{r-1} + f_j) \wedge (f_{1-r} - f_{-j}) - f_j \wedge f_{1-r} + f_{r-1} \wedge f_{-j},$$

и мы сразу же получаем, что при $r \leqslant j \leqslant l$ r-векторы

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_{r-2} \wedge (f_{r-1} + f_j) \wedge (f_{1-r} - f_{-j}),$$

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_{r-2} \wedge f_j \wedge f_{1-r} \quad \text{и} \quad f_1 \wedge \ldots \wedge f_{r-1} \wedge f_{-j}$$

изотропны. Следовательно, $z \in F_r + \Gamma \wedge \mathsf{\Lambda}^{r-2} V$, что завершает доказательство.

(V) Так как $w_0 = -1$, то любое неприводимое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ортогональное или симплектическое. Вследствие n° 6 (VI) гл. VI, § 4, сумма координат веса $\bar{\omega}_r$ относительно базиса $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ равна

$$1+2+\ldots+(r-1)+r+r+\ldots+r+\frac{r}{2},$$

так что представление σ_r ортогональное при четных r и симплектическое при нечетных r.

Так как векторы $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$ и $e_{-1} \wedge \ldots \wedge e_{-r}$ принадлежат подпространству E_r и

$$\Psi_{(r)}(e_1 \wedge \ldots \wedge e_r, e_{-1} \wedge \ldots \wedge e_{-r}) = 1,$$

то ограничение формы $\Psi_{(r)}$ на пространство E_r является ненулевым; с точностью до постоянного множителя это инвариантная относительно σ_r билинейная форма, симметрическая, если r четно, и знакопеременная, если r нечетно.

(VI) Для любого $x \in \mathfrak{g}$ характеристический многочлен эндоморфизма $\sigma(x)$ имеет вид

$$T^{2l}+f_1(x)T^{2l-1}+\ldots+f_{2l}(x),$$

где $f_1, \ldots, f_{2l}$ — инвариантные полиномиальные функции на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Если $x = \xi_1 H_1 + \ldots + \xi_l H_l \in \mathfrak{h}$, то с точностью до знака функции $f_i(x)$ равны элементарным симметрическим функциям от $\xi_1, \ldots, \xi_l, -\xi_1, \ldots, -\xi_l$. В нечетных размерностях эти функции равны нулю, поэтому

$$T^{2l}+f_2(x)T^{2l-2}+\ldots+f_{2l}(x) = (T^2-\xi_1^2)\ldots(T^2-\xi_l^2).$$

Как и в n° 2 (VI), мы получаем, что $f_1 = f_3 = f_5 = \ldots = 0$ и

$$(f_2, f_4, \ldots, f_{2l})$$

— алгебраически независимое семейство, порождающее алгебру инвариантных полиномиальных функций на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

(VII) Так как тождественное отображение — единственный автоморфизм графа Дынкина, то $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

Пусть Σ — группа преобразований подобия пространства V относительно формы Ψ (*Алг.*, гл. IX, § 6, конец n° 5). Как и n° 2 (VII), можно показать, что автоморфизмы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеют вид $x \mapsto sxs^{-1}$, где $s \in \Sigma$, так что группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ отождествляется с Σ/k^*.

Для любого $s \in \Sigma$ пусть $\mu(s)$ — коэффициент подобия элемента s. Отображение $s \to \mu(s) \bmod k^{*2}$ группы Σ в группу k^*/k^{*2} является гомоморфизмом λ, ядро которого содержит $k^* . 1$; следовательно, λ — гомоморфизм группы Σ/k^* в группу k^*/k^{*2}.

При этом $\mathbf{Sp}(\Psi) \cap k^* = \{1, -1\}$. Рассмотрим последовательность гомоморфизмов

$$1 \to \mathbf{Sp}(\Psi)/\{1, -1\} \xrightarrow{\iota} \Sigma/k^* \xrightarrow{\lambda} k^*/k^{*2} \to 1. \qquad (10)$$

Отображение ι инъективно, и $\operatorname{Im}(\iota) \subset \operatorname{Ker}\lambda$, так как коэффициент подобия элементов из $\mathbf{Sp}(\Psi)$ равен 1. Если коэффициент подобия элемента $s \in \Sigma$ — элемент из k^{*2}, то существует такой элемент $\nu \in k^*$, что $\nu s \in \mathbf{Sp}(\Psi)$. Следовательно, $\operatorname{Im}(\iota) = \operatorname{Ker}(\lambda)$. Таким образом, последовательность (10) точна. Отождествим $\mathbf{Sp}(\Psi)/\{1, -1\}$ с подгруппой группы Σ/k^*. Так как группа k^*/k^{*2} коммутативна, то группа $\mathbf{Sp}(\Psi)/\{1, -1\}$ содержит производную группу группы Σ/k^*. Следовательно, $\operatorname{Aut}_e(\mathfrak{g})$ содержится в группе $\mathbf{Sp}(\Psi)/\{1, -1\}$ (§ 11, n° 2, предложение 3). В действительности они совпадают, и группа $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})/\operatorname{Aut}_e(\mathfrak{g})$ отождествляется с группой k^*/k^{*2} (упражнение 9).

(VIII) Каноническая билинейная форма Φ_R на пространстве $\mathfrak{h}^*$ задается формулой

$$\Phi_R(\xi_1\varepsilon_1 + \ldots + \xi_l\varepsilon_l, \xi'_1\varepsilon_1 + \ldots + \xi'_l\varepsilon_l) = \\ = \frac{1}{4(l+1)}(\xi_1\xi'_1 + \ldots + \xi_l\xi'_l)$$

(гл. VI, § 4, n° 6 (V)). Следовательно, обратная к Φ_R форма, т. е. ограничение на $\mathfrak{h}$ формы Киллинга, имеет вид

$$\Phi(\xi_1 H_1 + \ldots + \xi_l H_l, \xi'_1 H_1 + \ldots + \xi'_l H_l) = \\ = 4(l+1)(\xi_1\xi'_1 + \ldots + \xi_l\xi'_l).$$

(IX) Рассмотрим элементы X_α, определенные формулами (6) ($\alpha \in R$). Легко проверить, что $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$ при $\alpha \in R$. С другой стороны, отображение θ: $a \mapsto -{}^t a$ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\theta(X_\alpha) = X_{-\alpha}$ для любого корня $\alpha \in R$. Следовательно, $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ — система Шевалле расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Предположим, что $k = \mathbf{Q}$. Подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ содержит две дозволенные решетки $Q(R^\vee) = \sum_{i=1}^{l} \mathbf{Z} \cdot H_i$ и $P(R^\vee) = Q(R^\vee) + \frac{1}{2}\mathbf{Z} \cdot \sum_{i=1}^{l} H_i$ (гл. VI, § 4, n° 5 (VIII)). Легко видеть, что $Q(R^\vee)$ — множество матриц из $\mathfrak{h}$ с целыми коэффициентами. Следовательно, порядок Шевалле $Q(R^\vee) + \sum_{\alpha \in R} \mathbf{Z} \cdot X_\alpha$ совпадает с множеством $\mathfrak{sp}(2l, \mathbf{Z})$ матриц из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с целыми коэффициентами.

Рассмотрим редуктивную алгебру Ли $\mathfrak{sp}(\Psi) + \mathbf{Q}.1$. Легко видеть, что множество ее элементов с целыми коэффициентами является в ней порядком Шевалле; следовательно, его проекция на алгебру Ли $\mathfrak{sp}(\Psi)$ параллельно $\mathbf{Q}.1$ — порядок Шевалле $P(R^\vee) + \sum \mathbf{Z}.X_\alpha$.

Далее, для любого корня $\alpha \in R$ имеем $X_\alpha^r = 0$. Отсюда следует, что решетка $\mathscr{V}$ пространства V, порожденная векторами e_i, допустима относительно порядка Шевалле $\mathfrak{sp}(2l, \mathbf{Z})$. То же верно для решетки $E_r \cap \bigwedge^r \mathscr{V}$ в пространстве E_r.

Наконец, пространство E_r содержит допустимую относительно порядка Шевалле

$$P(R^\vee) + \sum_{\alpha \in R} \mathbf{Z}.X_\alpha$$

решетку только при четном r; $E_r \cap \bigwedge^r \mathscr{V}$ — одна из таких решеток.

4. *Алгебры Ли типа D_l* ($l \geqslant 2$)

(I) Пусть V — векторное пространство четной размерности $2l \geqslant 4$, и пусть Ψ — невырожденная симметрическая билинейная форма максимального индекса l на пространстве V. Ввиду n° 2 из *Алг.*, гл. IX, § 4, пространство V можно представить в виде прямой суммы двух максимальных вполне изотропных подпространств F и F'. Пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant l}$ — базис пространства F, а $(e_{-i})_{1 \leqslant i \leqslant l}$ — дуальный базис пространства F' (относительно двойственности между пространствами F и F', определенной формой Ψ). Тогда $e_1, \ldots, e_l, e_{-l}, \ldots, e_{-1}$ — базис пространства V. Будем называть его *базисом Витта* пространства V. Матрица билинейной формы Ψ в этом базисе — квадратная матрица S порядка $2l$, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов, расположенных на побочной диагонали и равных 1. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(\Psi)$ отождествляется с алгеброй $\mathfrak{o}_S(2l, k)$ тех квадратных матриц g порядка $2l$, для которых $g = -S^t g S$. Ее размерность равна $l(2l-1)$. Простое вычисление показывает, что $\mathfrak{g}$ совпадает с множеством матриц вида

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix},$$

где $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ — такие квадратные матрицы порядка l, что $\mathrm{B} = -s^t\mathrm{B}s$, $\mathrm{C} = -s^t\mathrm{C}s$ и $\mathrm{D} = -s^t\mathrm{A}s$ (s — матрица порядка l, все элементы которой равны нулю, за исключением элементов, расположенных на побочной диагонали и равных 1).

Пусть $\mathfrak{h}$ — множество диагональных матриц, принадлежащих алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Это коммутативная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, базис которой образуют элементы $H_i = E_{i,i} - E_{-i,-i}$ при $1 \leqslant i \leqslant l$. Пусть (ε_i) — базис пространства $\mathfrak{h}^*$, дуальный к базису (H_i). Положим для $1 \leqslant i < j \leqslant l$

$$\left\{\begin{aligned} X_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= E_{i,j} - E_{-j,-i}, \\ X_{-\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= -E_{j,i} + E_{-i,-j}, \\ X_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} &= E_{i,-j} - E_{j,-i}, \\ X_{-\varepsilon_i-\varepsilon_j} &= -E_{-j,i} + E_{-i,j}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Эти элементы образуют базис дополнительного к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ подпространства. Если $h \in \mathfrak{h}$, то

$$[h, X_\alpha] = \alpha(h) X_\alpha$$

для любого $\alpha \in R$, где R — множество элементов вида $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(i < j)$; следовательно, $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ и корнями расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ будут элементы системы R. При этом система корней R расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ имеет тип D_l при $l \geqslant 3$ и тип $A_1 \times A_1$ (иначе говоря, тип D_2) при $l = 2$ (гл. VI, § 4, n° 8 (I), с учетом случая $l = 2$). Следовательно, *если $l \geqslant 3$, то $\mathfrak{g}$ — расщепляемая простая алгебра Ли типа D_l.*

Любая расщепляющая подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ получается из подалгебры $\mathfrak{h}$ с помощью элементарного автоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. с помощью элемента группы $\mathbf{O}(\Psi)$ (см. (VII)), и, следовательно, совпадает с множеством $\mathfrak{h}_\beta$ тех элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, матрица которых относительно некоторого базиса Витта β диагональна. Непосредственно проверяется, что единственными инвариантными подпространствами относительно $\mathfrak{h}_\beta$ будут подпространства, порожденные некоторым подмножеством элементов базиса β.

Так как у алгебр Ли $\mathfrak{o}_S(4, k)$ и $\mathfrak{sl}(2, k) \times \mathfrak{sl}(2, k)$ одинаковые системы корней, то они изоморфны. По аналогичным соображениям изоморфны алгебры Ли $\mathfrak{o}_S(6, k)$ и $\mathfrak{sl}(4, k)$ (см. также упражнение 3). *Далее мы предполагаем, что $l \geqslant 3$.*

(II) Определим систему корней $R^\vee$, используя n° 8 (V) из гл. VI, § 4. Мы получаем, что

$$H_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = H_i - H_j, \quad H_{\varepsilon_i+\varepsilon_j} = H_i + H_j.$$

(III) Положим $\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, ..., $\alpha_{l-1} = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l$, $\alpha_l = \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l$. Согласно гл. VI, § 4, n° 8 (II), $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — базис B системы корней R; положительными корнями относительно этого базиса будут $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(i < j)$. Соответствующая подалгебра Бореля $\mathfrak{b}$ совпадает с множеством принадлежащих алгебре Ли $\mathfrak{g}$ верхних треугольных матриц.

Легко проверить, что единственными нетривиальными инвариантными относительно подалгебры Бореля $\mathfrak{b}$ подпространствами являются вполне изотропные подпространства $V_1, \ldots, V_l, V'_l$, где V_i порождено векторами $e_1, \ldots, e_i$, а V'_l — векторами $e_1, \ldots, e_{l-1}, e_{-l}$, а также ортогональные дополнения $V_{-1}, \ldots, V_{-l+1}$ подпространств $V_1, \ldots, V_{l-1}$. Ортогональное дополнение V_{-i} подпространства V_i порождено векторами $e_1, \ldots, e_l, e_{-l}, \ldots, e_{-(i+1)}$. Но простое вычисление показывает, что если элемент $a \in \mathfrak{g}$ переводит подпространство V_{l-1} в себя, то его матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & x & \mathrm{B} \\ 0 & \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} & y \\ 0 & 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix},$$

где A, B, D — квадратные матрицы порядка $l-1$, x (соотв. y) — матрица, состоящая из 2 столбцов и $l-1$ строк (соотв. 2 строк и $l-1$ столбцов) и $\lambda \in k$. Из этого следует, что пространства V_l и V'_l также устойчивы относительно элемента a. Следовательно, $\mathfrak{b}$ совпадает с множеством элементов $a \in \mathfrak{g}$, относительно которых устойчивы все элементы изотропного флага $(V_1, \ldots, V_{l-1})$. Заметим, что, как следует из предыдущего и теоремы Витта (*Алг.*, гл. IX, § 4, n°3, теорема 1), V_l и V'_l — единственные максимальные абсолютно изотропные подпространства, содержащие V_{l-1}.

Назовем изотропный флаг *квазимаксимальным*, если он состоит из $l-1$ вполне изотропных подпространств размерностей $1, \ldots, l-1$. Так же, как и в n°2, мы видим, что для каждого квазимаксимального изотропного флага δ множество $\mathfrak{b}_\delta$ элементов $a \in \mathfrak{g}$, относительно которых элементы флага δ устойчивы, является подалгеброй Бореля в $\mathfrak{g}$, а $\delta \mapsto \mathfrak{b}_\delta$ — биективное отображение множества квазимаксимальных изотропных флагов на множество подалгебр Бореля.

Будем называть изотропный флаг собственным, если он не содержит одновременно l-мерного и $(l-1)$-мерного подпространств. Пусть δ — такой изотропный флаг, и пусть $\mathfrak{p}_\delta$ — множество элементов $a \in \mathfrak{g}$, оставляющих устойчивым элементы флага δ. Если $\delta \subset \{V_1, \ldots, V_l, V'_l\}$, то $\mathfrak{p}_\delta$ — параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$, содержащая подалгебру $\mathfrak{b}$, и легко проверить, что единственными абсолютно изотропными $\neq \{0\}$ подпространствами, устойчивыми относительно $\mathfrak{p}_\delta$, будут элементы флага δ. Так как существует 2^{l-2} собственных изотропных флагов, содержащихся в флаге $\{V_1, \ldots, V_l, V'_l\}$ и содержащих элемент V_{l-1} (соотв. V_l, соотв. V'_l, соотв. не содержащих ни V_{l-1}, ни V_l, ни V'_l), то существует 2^l параболических подалгебр, содержащих подалгебру Бореля $\mathfrak{b}$. Как и выше, можно показать, что $\delta \mapsto \mathfrak{p}_\delta$ — биективное отображение множества собственных изотропных флагов на множество параболических подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

(IV) Вследствие n°8 (VI) из гл. VI, § 4, фундаментальными весами, соответствующими простым корням $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, будут

$$\bar{\omega}_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_i \quad (1 \leqslant i \leqslant l-2),$$

$$\bar{\omega}_{l-1} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{l-2} + \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l),$$

$$\bar{\omega}_l = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{l-2} + \varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l).$$

Пусть σ — тождественное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве V. Внешняя степень $\bigwedge^r\sigma$ представления σ действует в пространстве $E = \bigwedge^r V$. Если $h \in \mathfrak{h}$, то при $1 \leqslant i \leqslant l$ имеем

$$\sigma(h)e_i = \varepsilon_i(h)e_i, \quad \sigma(h)e_{-i} = -\varepsilon_i(h)e_{-i}.$$

Отсюда следует, что для $1 \leqslant r \leqslant l$ сумма $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r$ — старший вес представления $\bigwedge^r\sigma$, и элементы веса $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r$ совпадают с элементами, пропорциональными элементу $e_1 \wedge \ldots \ldots \wedge e_r$.

Покажем, что при $1 \leqslant r \leqslant l-2$ *представление* $\bigwedge^r\sigma$ — *фундаментальное представление веса* $\bar{\omega}_r$.

Для этого достаточно показать, что представление $\bigwedge^r\sigma$ неприводимо при $1 \leqslant r \leqslant l-1$ (заметим, что $\bigwedge^l\sigma$ приводимо, см. упражнение 10) или что наименьшее подпространство T_r пространства $\bigwedge^r V$, содержащее вектор $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$ и устойчивое относительно алгебры Ли $\mathfrak{g}$, совпадает со всем пространством $\bigwedge^r V$. Ясно, что это так при $r=1$. При $r=2$ получаем, как и в n°2, что представление $\bigwedge^2\sigma$ эквивалентно присоединенному представлению алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которое неприводимо, так как $\mathfrak{g}$ проста. Далее доказательство проводится индукцией по l так же, как и в n°2, но в предположении, что $l-1 \geqslant r \geqslant 3$.

Теперь нам надо определить фундаментальные представления, соответствующие старшим весам $\bar{\omega}_{l-1}$ и $\bar{\omega}_l$. Пусть Q—квадратичная форма $x \mapsto \frac{1}{2}\Psi(x, x)$. В n°2 (IV) мы определили спинорное представление λ алгебры Клиффорда $C(Q)$ в пространстве $N = \bigwedge F'$. Непосредственно проверяется, что подпространство N_+ (соотв. N_-) пространства N, равное сумме подпространств $\bigwedge^p F'$ для четных p (соотв. для нечетных p), устойчиво относительно ограничения представления λ на $C^+(Q)$. Следовательно, представления λ_+ и λ_- алгебры $C^+(Q)$ в пространствах N_+ и N_- соответственно — полуспинорные представления алгебры $C^+(Q)$ (*Алг.*, гл. IX, § 9, n° 4); они неприводимы, имеют размерность 2^{l-1} и неэквивалентны. Пусть $\rho_+ = \lambda_+ \circ f$ и $\rho_- = \lambda_- \circ f$ — соответствующие неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (n° 2, лемма 1 (vi)). Вследствие леммы 1 (i)

$$f(\mathrm{H}_i) = \frac{1}{2}(e_i e_{-i} - e_{-i} e_i) = e_i e_{-i} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e_{-i} e_i,$$

и мы видим, как и в n° 2 (IV), что при $h \in \mathfrak{h}$ и $1 \leqslant i_1 < \ldots \ldots < i_k \leqslant l$ имеет место равенство

$$\lambda \circ f(h)(e_{-i_1} \wedge \ldots \wedge e_{-i_k}) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_l) - (\varepsilon_{i_1} + \ldots + \varepsilon_{i_k})\right)(h)(e_{-i_1} \wedge \ldots \wedge e_{-i_k}).$$

Следовательно, старшим весом представления ρ_+ (соотв. ρ_-) будет $\bar{\omega}_l$ (соотв. $\bar{\omega}_{l-1}$).

Представления ρ_+ и ρ_- называются *полуспинорными представлениями* алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Все веса этих представлений просты. Представление $\rho = \lambda \circ f = \rho_+ \oplus \rho_-$ называют *спинорным представлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$.

(V) При $1 \leqslant r \leqslant l-2$ фундаментальные представления $\bigwedge^r \sigma$ ортогональны, и расширение формы Ψ на пространство $\bigwedge^r V$ инвариантно относительно этих представлений.

Рассмотрим теперь спинорное представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Как и в n° 2, можно показать, что при $1 \leqslant i,\ j \leqslant l,\ i \neq j$

$$f(\mathrm{X}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}) = \pm e_i e_{-j},$$
$$f(\mathrm{X}_{\varepsilon_i + \varepsilon_j}) = \pm e_i e_j,$$
$$f(\mathrm{X}_{-\varepsilon_i - \varepsilon_j}) = \pm e_{-i} e_{-j}.$$

Отсюда следует, что невырожденная билинейная форма Φ, введенная в n° 2 (V), инвариантна относительно $\rho(\mathfrak{g})$. Таким образом, спинорное представление ρ оставляет инвариантной невырожденную билинейную форму, симметрическую при $l \equiv 0$, $-1 \pmod 4$ и знакопеременную при $l \equiv 1,\ 2 \pmod 4$.

Если l четно, то ограничения формы Φ на пространства N_+ и N_- невырожденны, и полуспинорные представления будут ортогональными при $l \equiv 0 \pmod 4$ и симплектическими при $l \equiv 2 \pmod 4$. Заметим, что $w_0 = -1$ (гл. VI, § 4, n° 8 (XI)).

Наоборот, если l нечетно, то пространства N_+ и N_- вполне изотропны относительно формы Φ. При этом $-w_0(\alpha_i) = \alpha_i$ при $1 \leqslant i \leqslant l-2$, $-w_0(\alpha_l) = \alpha_{l-1}$ и $-w_0(\alpha_{l-1}) = \alpha_l$ (гл. VI, § 4, n° 8 (XI)), откуда следует, что $-w_0(\bar{\omega}_l) = \bar{\omega}_{l-1}$; полуспинорные представления не являются ни ортогональными, ни симплектическими, и каждое из них изоморфно представлению, дуальному к другому.

(VI) Для любого $x \in \mathfrak{g}$ характеристический многочлен эндоморфизма $\sigma(x)$ имеет вид

$$T^{2l} + f_1(x) T^{2l-1} + \ldots + f_{2l}(x).$$

Как и в n° 3, $f_1 = f_3 = f_5 = \ldots = 0$. Ввиду n° 8 (IX) из гл. VI, § 4, и теоремы 1 из § 8, n° 3, существует такая полиномиальная функция $\tilde{f}$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, что функции $f_2, f_4, \ldots, f_{2l-2}, \tilde{f}$ порождают алгебру $I(\mathfrak{g}^*)$ инвариантных полиномиальных функций на $\mathfrak{g}$; эти функции алгебраически независимы и $\tilde{f}^2 = (-1)^l f_{2l}$.

Для любого элемента $x \in \mathfrak{g}$ мы имеем ${}^t(Sx) = {}^t x S = -Sx$, следовательно, можно рассмотреть пфаффиан $\mathrm{Pf}(Sx)$, который является полиномиальной функцией от x. Однако

$$f_{2l}(x) = \det x = (-1)^l \det(Sx) = (-1)^l (\mathrm{Pf}(Sx))^2.$$

Следовательно, можно положить $\tilde{f}(x) = \mathrm{Pf}(Sx)$.

(VII) Напомним (§ 5, n° 3, следствие 1 предложения 5), что группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ отождествляется с группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(D)$ графа Дынкина D расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Когда $l \neq 4$, $\mathrm{Aut}\, D$ — группа порядка 2, образованная теми перестановками корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, которые не меняют корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-2}$. Когда $l = 4$, группа $\mathrm{Aut}\, D$ образована перестановками корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$, оставляющими корень α_2 на месте; эта группа изоморфна группе $\mathfrak{S}_3$ (см. гл. VI, § 4, n° 8 (XI)). Во всех случаях подгруппа группы $\mathrm{Aut}\, D$, образованная элементами, оставляющими на месте корень α_1, имеет порядок 2. Обозначим через $\mathrm{Aut}'(\mathfrak{g})$ соответствующую подгруппу в группе $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Если $l \neq 4$, то имеет место равенство $\mathrm{Aut}'(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, а если $l = 4$, то $(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) : \mathrm{Aut}'(\mathfrak{g})) = 3$; кроме того,

$$(\mathrm{Aut}'(\mathfrak{g}) : \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})) = 2.$$

Элемент $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ принадлежит группе $\mathrm{Aut}'(\mathfrak{g})$ тогда и только тогда, когда эндоморфизм $\sigma \circ s$ эквивалентен эндоморфизму σ (это следует из того, что $\bar{\omega}_1$ — старший вес представления σ). Отсюда мы, как и в n° 2 (VII), заключаем, что группа $\mathrm{Aut}'(\mathfrak{g})$ отождествляется с группой Σ/k^*, где Σ — группа преобразований подобия пространства V относительно формы Ψ.

Пусть $s \in \Sigma$, и пусть $\lambda(s)$ — коэффициент подобия элемента s. Тогда $\det(s) = \lambda(s)^l$, если s — *прямое* преобразование подобия, и $\det(s) = -\lambda(s)^l$, если s — *обратное* преобразование подобия (*Алг.*, гл. IX, § 6, n°5). Прямые преобразования подобия образуют подгруппу Σ_0 индекса 2 в группе Σ. Имеет место включение $\Sigma_0 \supset k^*$. *Группа* Σ/k^* *совпадает с подгруппой* $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ *группы* $\mathrm{Aut}'(\mathfrak{g}) = \Sigma/k^*$. Действительно, это достаточно доказать, когда поле k алгебраически замкнуто; тогда группа $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ равна своей производной группе (§ 11, n°2, предложение 3) и, следовательно, содержится в Σ_0/k^*, а так как обе группы имеют в Σ/k^* индекс 2, то они совпадают.

С другой стороны, как и в n°3(VII), мы видим, что имеет место точная последовательность

$$1 \to \mathbf{SO}(\Psi)/\{1, -1\} \to \Sigma_0/k^* \to k^*/k^{*2} \to 1.$$

Отождествим $\mathbf{SO}(\Psi)/\{1, -1\}$ с подгруппой группы $\Sigma_0/k^* = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$. Так как группа k^*/k^{*2} коммутативна, $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \subset \mathbf{SO}(\Psi)/\{1, -1\}$. На самом деле можно доказать (упражнение 11), что группа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ изоморфна образу в $\mathbf{SO}(\Psi)/\{1, -1\}$ приведенной ортогональной группы $\mathbf{O}_0^+(\Psi)$ формы Ψ (*Алг.*, гл. IX, § 9, n°5).

(VIII) Каноническая билинейная форма Φ_R на пространстве $\mathfrak{h}^*$ задается формулой

$$\Phi_R(\xi_1\varepsilon_1 + \ldots + \xi_l\varepsilon_l, \xi_1'\varepsilon_1 + \ldots + \xi_l'\varepsilon_l) = \frac{1}{4(l-1)}(\xi_1\xi_1' + \ldots + \xi_l\xi_l')$$

(гл. VI, § 4, n°8 (V)). Следовательно, ограничение на $\mathfrak{h}$ формы Киллинга имеет вид

$$\Phi(\xi_1 H_1 + \ldots + \xi_l H_l, \xi_1' H_1 + \ldots + \xi_l' H_l) = 4(l-1)(\xi_1\xi_1' + \ldots + \xi_l\xi_l').$$

(IX) Рассмотрим элементы X_α $(\alpha \in R)$, определенные формулами (11). Легко проверить, что $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$ при $\alpha \in R$. С другой стороны, отображение θ: $a \to -{}^t a$ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\theta(X_\alpha) = X_{-\alpha}$ при любых $\alpha \in R$. Следовательно, $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ — система Шевалле расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Предположим, что $k = \mathbf{Q}$. Вследствие n°8 (VIII) из гл. VI, § 4, в подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ имеются три дозволенные решетки, если l нечетно, и четыре, если l четно. Отметим, что решетка $\mathscr{H}$, порожденная элементами H_i, дозволенная. Но эта решетка совпадает с множеством диагональных матриц с целыми элементами из алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отсюда мы получаем, что $\mathfrak{o}_S(2l, \mathbf{Z})$ — порядок Шевалле $\mathscr{H} + \sum \mathbf{Z}.X_\alpha$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Так как $X_\alpha^2 = 0$ при любых $\alpha \in R$, то решетка $\mathscr{V}$ в пространстве V, порожденная базисом Витта (e_i) — допустимая решетка в пространстве V

относительно порядка $\mathfrak{o}_S(2l, \mathbf{Z})$. То же верно для решетки $\bigwedge^r\mathscr{V}$ в пространстве $\bigwedge^r V$.

Напротив, если взять $P(R^\vee)=\mathbf{Z}\,.\,\frac{1}{2}\sum_{i=1} \mathrm{H}_i+\mathscr{H}$ в качестве дозволенной решетки и $\mathscr{G}=P(R^\vee)+\sum \mathbf{Z}\,.\,\mathrm{X}_\alpha$ в качестве порядка Шевалле, то мы видим, что в пространстве $\bigwedge^r V$ допустимая решетка существует только при четном r; при таких r решетка $\bigwedge^r\mathscr{V}$ допустима.

Рассмотрим редуктивную алгебру $\mathfrak{o}(\Psi)+\mathbf{Q}\,.\,1$. Ясно, что $\tilde{\mathscr{G}}=(\mathfrak{o}(\Psi)+\mathbf{Q}\,.\,1)\cap\mathfrak{gl}(2l, \mathbf{Z})$ — порядок Шевалле. Порядок Шевалле $\mathscr{G}$ совпадает с проекцией порядка $\tilde{\mathscr{G}}$ на алгебру Ли $\mathfrak{o}(\Psi)$ параллельно центру $\mathbf{Q}\,.\,1$.

Наконец, как и в п° 2, мы видим, что решетка $\mathscr{N}_+$ (соотв. $\mathscr{N}_-$), порожденная элементами $e_{-i_1}\wedge\ldots\wedge e_{-i_{2k}}$ (соотв. $e_{-i_1}\wedge\ldots$ $\ldots\wedge e_{-i_{2k+1}}$), допустима относительно полуспинорного представления порядка Шевалле $\mathbf{Q}(R^\vee)+\sum_{\alpha\in R}\mathbf{Z}\,.\,\mathrm{X}_\alpha$. Однако в пространствах N_+ и N_- нет решеток, допустимых относительно порядка $\mathfrak{o}_S(2l, \mathbf{Z})$.

ТАБЛИЦА I

Каждому фундаментальному весу поставим в соответствие 1 (соотв. — 1, 0), если отвечающее ему неприводимое представление ортогональное (соотв. симплектическое, соотв. не ортогональное и не симплектическое). Вычисление этого числа для алгебр Ли типов A_l, B_l, C_l, D_l было сделано в § 13. Ниже указаны также результаты для алгебр Ли типов E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 (достаточно применить предложение 12 из § 7 и пп° 9 (VI), 9 (XI), 10 (VI), 10 (XI), 11 (VI), 11 (XI), 12 (XI), 12 (VI), 13 (VI), 13 (XI) из гл. VI, § 4)

A_l $(l \geqslant 1)$

$$\bar{\omega}_r \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq \dfrac{l+1}{2} \\ (-1)^r & \text{при } r = \dfrac{l+1}{2} \end{cases}$$

B_l $(l \geqslant 2)$

$\bar{\omega}_r$ 1 при $r \neq l$

$\bar{\omega}_l$ $(-1)^{l(l+1)/2}$

C_l $(l \geqslant 2)$

$\bar{\omega}_r$ $(-1)^r$

D_l $(l \geqslant 2)$

$\bar{\omega}_r$ 1 при $r \neq l-1, l$

$$\bar{\omega}_l \text{ и } \bar{\omega}_{l-1} \begin{cases} 0, & \text{если } l \text{ нечетно} \\ (-1)^{l/2}, & \text{если } l \text{ четно} \end{cases}$$

E_6		E_7		E_8		F_4		G_2	
$\bar{\omega}_1$	0	$\bar{\omega}_1$	1	$\bar{\omega}_1$	1	$\bar{\omega}_1$	1	$\bar{\omega}_1$	1
$\bar{\omega}_2$	1	$\bar{\omega}_2$	-1	$\bar{\omega}_2$	1	$\bar{\omega}_2$	1	$\bar{\omega}_2$	1
$\bar{\omega}_3$	0	$\bar{\omega}_3$	1	$\bar{\omega}_3$	1	$\bar{\omega}_3$	1		
$\bar{\omega}_4$	1	$\bar{\omega}_4$	1	$\bar{\omega}_4$	1	$\bar{\omega}_4$	1		
$\bar{\omega}_5$	0	$\bar{\omega}_5$	-1	$\bar{\omega}_5$	1				
$\bar{\omega}_6$	0	$\bar{\omega}_6$	1	$\bar{\omega}_6$	1				
		$\bar{\omega}_7$	-1	$\bar{\omega}_7$	1				
				$\bar{\omega}_8$	1				

ТАБЛИЦА 2

Для каждого фундаментального веса укажем размерность соответствующего неприводимого представления, вычисленную при помощи теоремы 2 из § 9

$A_l \ (l \geqslant 1)$

$\bar{\omega}_r \ (1 \leqslant r \leqslant l)$ $\quad \binom{l+1}{r}$

$B_l \ (l \geqslant 2)$

$\bar{\omega}_r \ (1 \leqslant r \leqslant l-1)$ $\quad \binom{2l+1}{r}$

$\bar{\omega}_l$ $\quad 2^l$

$C_l \ (l \geqslant 2)$

$\bar{\omega}_r \ (1 \leqslant r \leqslant l)$ $\quad \binom{2l}{r} - \binom{2l}{r-2}$

$D_l \ (l \geqslant 2)$

$\bar{\omega}_r \ (1 \leqslant r \leqslant l-2)$ $\quad \binom{2l}{r}$

$\bar{\omega}_{l-1}$ $\quad 2^{l-1}$

$\bar{\omega}_l$ $\quad 2^{l-1}$

E_6

$\bar{\omega}_1$	$27 = 3^3$
$\bar{\omega}_2$	$78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$
$\bar{\omega}_3$	$351 = 3^3 \cdot 13$
$\bar{\omega}_4$	$2\,925 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13$
$\bar{\omega}_5$	$351 = 3^3 \cdot 13$
$\bar{\omega}_6$	$27 = 3^3$

E_7

$\bar{\omega}_1$	$133 = 7 \cdot 19$
$\bar{\omega}_2$	$912 = 2^4 \cdot 3 \cdot 19$
$\bar{\omega}_3$	$8\,645 = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$
$\bar{\omega}_4$	$365\,750 = 2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
$\bar{\omega}_5$	$27\,664 = 2^4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19$
$\bar{\omega}_6$	$1\,539 = 3^4 \cdot 19$
$\bar{\omega}_7$	$56 = 2^3 \cdot 7$

E_8

$\bar{\omega}_1$	$3\,875 = 5^3 . 31$
$\bar{\omega}_2$	$147\,250 = 2 . 5^3 . 19 . 31$
$\bar{\omega}_3$	$6\,696\,000 = 2^6 . 3^3 . 5^3 . 31$
$\bar{\omega}_4$	$6\,899\,079\,264 = 2^5 . 3 . 7^2 . 11^2 . 17 . 23 . 31$
$\bar{\omega}_5$	$146\,325\,270 = 2 . 3 . 5 . 7^2 . 13^2 . 19 . 31$
$\bar{\omega}_6$	$2\,450\,240 = 2^6 . 5 . 13 . 19 . 31$
$\bar{\omega}_7$	$30\,380 = 2^2 . 5 . 7^2 . 31$
$\bar{\omega}_8$	$248 = 2^3 . 31$

F_4

$\bar{\omega}_1$	$52 = 2^2 . 13$
$\bar{\omega}_2$	$1\,274 = 2 . 7^2 . 13$
$\bar{\omega}_3$	$273 = 3 . 7 . 13$
$\bar{\omega}_4$	$26 = 2 . 13$

G_2

$\bar{\omega}_1$	7
$\bar{\omega}_2$	$14 = 2 . 7$

УПРАЖНЕНИЯ

Мы предполагаем, что характеристика основного поля k равна нулю. Если не оговорено противное, то рассматриваемые алгебры Ли предполагаются конечномерными.

§ 1

Через $\mathfrak{S}$ обозначим алгебру Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$.

1) Пусть U — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{S}$. Показать, что элемент

$$C = \mathrm{H}^2 - 2(\mathrm{X}_+\mathrm{X}_- + \mathrm{X}_-\mathrm{X}_+) = \mathrm{H}^2 + 2\mathrm{H} - 4\mathrm{X}_-\mathrm{X}_+$$

принадлежит центру универсальной обертывающей алгебры U и его образ в представлении, ассоциированном с модулем $V(m)$, является гомотетией с коэффициентом $m(m+2)$.

2) Пусть $\lambda \in k$ и $Z(\lambda)$ — векторное пространство с базисом (e_n), где $n = 0, 1, \ldots$, и X_+, X_-, H — эндоморфизмы пространства $Z(\lambda)$, определенные формулами (2) из предложения 1.

а) Показать, что таким образом на $Z(\lambda)$ задается структура $\mathfrak{S}$-модуля.

б) Предположим, что λ не является целым положительным числом. Показать, что $\mathfrak{S}$-модуль $Z(\lambda)$ прост.

в) Предположим, что λ — целое число $\geqslant 0$. Пусть Z' — подпространство в $Z(\lambda)$, порожденное элементами e_n, $n > \lambda$. Показать, что Z' есть $\mathfrak{S}$-подмодуль модуля $Z(\lambda)$, изоморфный модулю $Z(-\lambda-2)$, и фактормодуль $Z(\lambda)/Z'$ изоморфен простому $\mathfrak{S}$-модулю $V(\lambda)$. Показать, что единственными $\mathfrak{S}$-подмодулями модуля $Z(\lambda)$ являются модули 0, Z' и $Z(\lambda)$.

3) Пусть E — векторное пространство с базисом $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ Пусть

$$a(n) = a_0 + a_1 n, \quad b(n) = b_0 + b_1 n, \quad c(n) = c_0 + c_1 n$$

— три афинные функции с коэффициентами в поле k. Определим эндоморфизмы X_+, X_-, H пространства E с помощью формул

$$\mathrm{X}_+ e_n = a(n)\, e_{n-1}, \quad \mathrm{X}_- e_n = b(n)\, e_{n+1}, \quad \mathrm{H} e_n = c(n)\, e_n.$$

Доказать, что для того чтобы при этом на пространстве E была определена структура $\mathfrak{S}$-модуля, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия

$$a_1 b_1 = 1, \qquad c_1 = -2, \qquad c_0 = -a_0 b_1 - a_1 b_0.$$

При каких условиях этот модуль прост?

¶ 4) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли; $\mathfrak{g}$-модуль E называется *локально конечным*, если он является объединением своих конечномерных $\mathfrak{g}$-подмодулей. Другими словами, это значит, что любой $\mathfrak{g}$-подмодуль модуля E конечного типа (как $U(\mathfrak{g})$-модуль) конечномерен.

а) Пусть $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ — точная последовательность $\mathfrak{g}$-модулей. Показать, что если модули E' и E'' локально конечны, то и модуль E локально конечен (свести к случаю, когда E — модуль конечного типа, и использовать тот факт, что универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ нётерова, см. гл. I, § 2, n° 6).

б) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Показать, что модуль E локально конечен тогда и только тогда, когда он является прямой суммой простых конечномерных $\mathfrak{g}$-модулей.

в) Предположим, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}$. Показать, что модуль E локально конечен тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

в$_1$) E обладает базисом, образованным собственными векторами эндоморфизма H,

в$_2$) эндоморфизмы X_{+E} и X_{-E} локально нильпотентны.

(Сначала показать, что если модуль E удовлетворяет условиям в$_1$) и в$_2$) и не равен 0, то он содержит примитивный элемент e, вес которого равен целому числу $m \geqslant 0$; затем доказать, что $X^{m+1}_- e = 0$ и, следовательно, E содержит модуль $V(m)$. Доказательство завершается применением утверждения а) к максимальному локально конечному подмодулю F модуля E.)

5) Пусть E — локально конечный $\mathfrak{s}$-модуль (упражнение 4). Для любого $m \geqslant 0$ обозначим через L_m векторное пространство $\mathfrak{s}$-гомоморфизмов из $V(m)$ в E.

а) Построить изоморфизм модулей E и $\bigoplus_m L_m \otimes V(m)$.

б) Обозначим через Φ_m инвариантную билинейную форму на пространстве $V(m)$, определенную в n° 3, *замечание* 3. Пусть для любого $m \in \mathbf{N}$ b_m — некоторая билинейная форма на пространстве L_m, а b — билинейная форма на пространстве E, которая соответствует при изоморфизме из утверждения а) прямой сумме форм $b_m \otimes \Phi_m$. Показать, что форма b инвариантна и что любая инвариантная билинейная форма на пространстве E представляется так единственным образом. Для того чтобы форма b была симметрической (соотв. знакопеременной), необходимо и достаточно, чтобы при четных m формы b_m были симметрическими (соотв. знакопеременными) и чтобы при нечетных m формы b_m были знакопеременными (соотв. симметрическими). Чтобы форма b была невырожденной, необходимо и достаточно, чтобы формы b_m были невырожденными.

в) Предположим, что E — конечномерный модуль. Показать, что он тогда и только тогда является моногенным (как $U(\mathfrak{s})$-модуль), когда $\dim L_m \leqslant m+1$ при всех $m \geqslant 0$.

6) Если E — конечномерный $\mathfrak{s}$-модуль, а n — целое число, то обозначим через a_n размерность собственного подпространства эндоморфизма H_E, отвечающего собственному значению n. Обозначим через $c_E(T)$ элемент кольца $\mathbf{Z}[T, T^{-1}]$, определенный равенством $c_E(T) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n$.

а) Определим пространство L_m, как в упражнении 5. Показать, что

$$\dim L_m = a_m - a_{m+2} \text{ для любого целого числа } m \geqslant 0.$$

Вывести отсюда, что $c_E(T) = c_{E'}(T)$ тогда и только тогда, когда модули E и E' изоморфны. Получить этот результат, используя упражнение 18 д) из гл. VII, § 3.

б) Показать, что $c_{E \oplus F} = c_E + c_F$ и $c_{E \otimes F} = c_E \cdot c_F$.

в) Доказать, что $c_{V(m)}(T) = (T^{m+1} - T^{-m-1})/(T - T^{-1})$.

г) Вывести из утверждений а) — в), что если $m \geqslant m' \geqslant 0$, то $\mathfrak{s}$-модуль $V(m) \otimes V(m')$ изоморфен модулю

$$V(m+m') \oplus V(m+m'-2) \oplus V(m+m'-4) \oplus \ldots \oplus V(m-m').$$

Если $m \geqslant 0$, то $\mathfrak{s}$-модуль $\mathsf{S}^2 V(m)$ изоморфен модулю

$$V(2m) \oplus V(2m-4) \oplus V(2m-8) \oplus \ldots \oplus \begin{cases} V(0), & \text{если } m \text{ четно,} \\ V(2), & \text{если } m \text{ нечетно,} \end{cases}$$

а $\mathfrak{s}$-модуль $\Lambda^2 V(m)$ изоморфен модулю

$$V(2m-2) \oplus V(2m-6) \oplus V(2m-10) \oplus \ldots \oplus \begin{cases} V(2), & \text{если } m \text{ четно,} \\ V(0), & \text{если } m \text{ нечетно.} \end{cases}$$

7) Пусть E — $\mathfrak{s}$-модуль конечной размерности. Показать, что модуль, дуальный к модулю E, изоморфен модулю E.

8) Показать, что $\mathfrak{s}$-модуль $V(m)$ можно реализовать как пространство однородных многочленов $f(u, v)$ степени m от двух переменных, в котором операторы X_+, X_- и H заданы формулами

$$X_+ f = u \frac{\partial f}{\partial v}, \quad X_- f = -v \frac{\partial f}{\partial u}, \quad Hf = u \frac{\partial f}{\partial u} - v \frac{\partial f}{\partial v}.$$

¶ 9) Присоединенное действие алгебры Ли $\mathfrak{s}$ определяет действие этой алгебры на своей универсальной обертывающей алгебре U, а также на своей симметрической алгебре $\mathsf{S} = \bigoplus \mathsf{S}^n$.

а) Определить веса $\mathfrak{s}$-модуля S^n. Вывести с их помощью следующие изоморфизмы $\mathfrak{s}$-модулей:

$$\mathsf{S}^n \to V(2n) \oplus V(2n-4) \oplus V(2n-8) \oplus \ldots \oplus V(0), \quad n \text{ четно,}$$
$$\mathsf{S}^n \to V(2n) \oplus V(2n-4) \oplus V(2n-8) \oplus \ldots \oplus V(2), \quad n \text{ нечетно.}$$

В частности, элементы пространства S^n, инвариантные относительно действия алгебры Ли $\mathfrak{s}$, образуют подпространство размерности 1 (соотв. 0), если n четно (соотв. нечетно).

б) Показать, что подалгебра алгебры S, образованная инвариантными относительно $\mathfrak{s}$ элементами, совпадает с алгеброй многочленов $k(\Gamma)$, где $\Gamma = H^2 - 4X_-X_+$. Модуль $\mathsf{S}^n/\Gamma \cdot \mathsf{S}^{n-2}$ изоморфен модулю $V(2n)$.

в) Показать, что центр алгебры U совпадает с алгеброй многочленов $k[C]$, где C — элемент, определенный в упражнении 1 (использовать б) и теорему Пуанкаре — Биркгофа — Витта).

10) Пусть m — целое число >0, S — градуированная алгебра $k[X_1, \ldots, X_m]$ и $a_1, \ldots, a_m$ — элементы из k^*. Пусть $\Phi = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} X_i X_j$ — квадратичная форма; положим $D_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$, $D = \sum_{i,j=1}^{m} b_{ij} D_i D_j$, где (b_{ij}) — матрица, обратная к матрице (a_{ij}).

а) Показать, что на S существует, и притом единственная, структура $\mathfrak{s}$-модуля, для которой $X_+ f = \frac{1}{2} D(f)$, $X_- f = \frac{1}{2} \Phi f$ и $Hf = -(m/2 + n) f$, если f — однородный многочлен степени n.

б) Положим $A^n = \mathrm{S}^n \cap \operatorname{Ker} D$. Показать, что пространство S^n совпадает с прямой суммой подпространств $\Phi^p \cdot A^q$, где $2p + q = n$. Вывести отсюда тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim(A^n)\, T^n = (1 + T)/(1 - T)^{m-1}.$$

в) Если f — ненулевой элемент пространства A^n, то элементы $\Phi^p f$, $p \geqslant 0$, образуют базис простого $\mathfrak{s}$-подмодуля в S, который изоморфен модулю $Z\left(-\frac{m}{2} - n\right)$ из упражнения 2.

г) Разобрать случай $m = 1$ и $m = 2$. Использовать случай $m = 3$ для другого доказательства упражнения 9.

11) Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, V — простой $\mathfrak{g}$-модуль и D — тело эндоморфизмов $\mathfrak{g}$-модуля V. Показать, что если поле k несчетно [1]), то $D = k$. (Если это не так, то тело D содержит поле, изоморфное полю $k(X)$, где X — независимая переменная, и мы получаем, что $\dim_k D > \aleph_0$, откуда $\dim_k V > \aleph_0$, что невозможно, поскольку V — моногенный $U(\mathfrak{g})$-модуль.)

¶ 12) Пусть $q \in k$, и пусть W — векторное пространство с базисом $(e_0, e_1, e_2, \ldots)$.

а) Показать, что существует единственное представление ρ_q алгебры Ли $\mathfrak{s}$ в пространстве W, для которого

$$\rho_q(\mathrm{H})\, e_n = 2e_{n+1}, \quad \rho_q(\mathrm{X}_+)\, e_n = \left(\frac{1}{2}\rho_q(\mathrm{H}) - 1\right)^n e_0,$$

$$\rho_q(\mathrm{X}_-)\, e_n = \left(\frac{1}{2}\rho_q(\mathrm{H}) + 1\right)^n (-qe_0 + e_1 + e_2).$$

Тогда $\rho_q(C) = 4q$, где $C = \mathrm{H}^2 + 2\mathrm{H} - 4\mathrm{X}_-\mathrm{X}_+$ (см. упражнение 1). Представление ρ_q неприводимо. Элементы $x \in \mathfrak{s}$, для которых эндоморфизмы $\rho_q(x)$ имеют собственные значения, пропорциональны X_+. Эндоморфизм $\rho_q(\mathrm{X}_+)$ имеет собственное значение 1 кратности 1.

б) Пусть ρ — такое простое представление алгебры Ли $\mathfrak{s}$, что $\rho(C) = 4q$ и что эндоморфизм $\rho(X_+)$ имеет собственное значение 1. Показать, что представление ρ эквивалентно представлению ρ_q.

¶ 13) Предположим, что $k = \mathbf{C}$. Пусть $C = \mathrm{H}^2 + 2\mathrm{H} - 4\mathrm{X}_-\mathrm{X}_+$, см. упражнение 1. Представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ называется H-диагонализируемым, если пространство представления ρ имеет базис, образованный собственными векторами эндоморфизма $\rho(\mathrm{H})$. Пусть $q \in \mathbf{C}$ и $v \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

а) Предположим, что в пространстве S имеется базис $(e_w)_{w \in \mathbf{C}}$, занумерованный элементами из $\mathbf{C}$. Пусть $S_v = \sum_{w \in v} \mathbf{C}e_w$. Существует единственное представление $\rho_{v,q}$ алгебры Ли $\mathfrak{s}$ в пространстве S_v, такое, что

$$\rho_{v,q}(\mathrm{X}_+)\, e_w = (q - w^2 - w)^{1/2}\, e_{w+1},$$

$$\rho_{v,q}(\mathrm{X}_-)\, e_w = (q - w^2 + w)^{1/2}\, e_{w-1},$$

$$\rho_{v,q}(\mathrm{H})\, e_w = 2we_w.$$

---

[1]) Утверждение остается верным, даже если поле k счетно; см. Quillen D., On the endomorphism ring of a simple module over enveloping algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **XXI** (1969), 171—172.

(Условимся, что при всех $z \in \mathbf{C}$ $z^{1/2}$ — квадратный корень из элемента z, аргумент которого принадлежит отрезку $[0, \pi)$.) Обозначим через $S_{v,q}$ $\mathfrak{S}$-модуль, определенный представлением $\rho_{v,q}$. Тогда $\rho_{v,q}(C) = 4q$.

б) Если $q \neq u^2 + u$ при любых $u \in v$, то модуль $S_{v,q}$ прост.

в) Предположим, что $2v \neq 0$ и q имеет вид $u^2 + u$, где $u \in v$ (что однозначно определяет элемент u). Пусть $S^-_{v,q}$ $\left(\text{соотв. } S^+_{v,q}\right)$ — векторное подпространство в S_v, порожденное элементами e_w при $w \leqslant u$ (соотв. при $w > u$). Тогда $S^-_{v,q}$ и $S^+_{v,q}$ — простые $\mathfrak{S}$-подмодули модуля $S_{v,q}$.

г) Предположим, что $2v = 0$ и что q имеет вид $u^2 + u$, где $u \in v$, $u \geqslant 0$ (что однозначно определяет элемент u). Пусть $S^-_{v,q}$ $\left(\text{соотв. } S^0_{v,q}, S^+_{v,q}\right)$ — векторные подпространства в S_v, порожденные элементами e_w при $w < -u$ (соотв. при $-u \leqslant w \leqslant u$, $w > u$). Тогда $S^-_{v,q}$, $S^0_{v,q}$ и $S^+_{v,q}$ — простые $\mathfrak{S}$-подмодули модуля $S_{v,q}$.

д) Предположим, что $v = \frac{1}{2} + \mathbf{Z}$ и что $q = -\frac{1}{4}$. Пусть $S^-_{-1/2,-1/4}$ $\left(\text{соотв. } S^+_{-1/2,-1/4}\right)$ — векторное подпространство пространства $S_{-1/2}$, порожденное элементами e_w при $w \leqslant -\frac{1}{2}$ $\left(\text{соотв. при } w > -\frac{1}{2}\right)$. Тогда $S^-_{-1/2,-1/4}$ и $S^+_{-1/2,-1/4}$ являются простыми $\mathfrak{S}$-подмодулями модуля $S_{-1/2,-1/4}$.

е) Обозначим через $\rho^{\pm}_{v,q}$, $\rho^0_{v,q}$ представления, соответствующие модулям $S^{\pm}_{v,q}$, $S^0_{v,q}$. В случае б) элементы $x \in \mathfrak{S}$, для которых эндоморфизм $\rho^-_{v,q}(x)$ имеет собственное значение, — это элементы из $\mathbf{C}H$. В случаях в) — д) элементы $x \in \mathfrak{S}$, для которых эндоморфизм $\rho^-_{v,q}(x)$ обладает собственным значением, составляют $\mathbf{C}H + \mathbf{C}X_+$. Если элемент x нильпотентен (а следовательно, пропорционален X_+) и не равен нулю, то эндоморфизм $\rho^-_{v,q}(x)$ имеет собственное значение 0 кратности 1. Если элемент x полупрост, то пространство представления $\rho^-_{v,q}$ имеет базис, образованный собственными векторами эндоморфизма $\rho^-_{v,q}(x)$. Аналогичные результаты верны для представления $\rho^+_{v,q}$, если элемент X_+ заменить на X_-.

ж) Пусть V — простой $\mathfrak{S}$-модуль и ρ — соответствующее представление. Тогда $\rho(C)$ — гомотетия (использовать упражнение 11). Предположим, что $\rho(C) = 4q$. Показать, что если представление ρ H-диагонализируемо, то V изоморфен одному из модулей $S_{v,q}$, $S^{\pm}_{v,q}$ или $S^0_{v,q}$, рассмотренных в п. б)—д). Доказать, что представление ρ является H-диагонализируемым тогда и только тогда, когда у эндоморфизма $\rho(H)$ есть собственное значение; достаточно также, чтобы у эндоморфизма $\rho(X_+)$ было собственное значение 0.

¶ 14) Сохраним обозначения предыдущего упражнения. Обозначим через B_q факторалгебру алгебры $U(\mathfrak{S})$ по двустороннему идеалу, порожденному элементом $C - 4q$, а через $u \longmapsto u^{\bullet}$ обозначим канонический гомоморфизм $U(\mathfrak{S}) \to B_q$. Рассмотрим представления из упражнений 12 и 13 как представления алгебры B_q.

а) Все элементы алгебры B_q единственным образом выражаются в виде

$$\sum_{r \geqslant 0} X_+^{\bullet r} p_r(H^{\bullet}) + \sum_{s > 0} q_s(H^{\bullet}) X_-^{\bullet s},$$

где p_r и q_s — многочлены. Если два элемента алгебры B_q порождают один и тот же левый идеал, то они пропорциональны.

б) Пусть мы находимся в условиях п. б) упражнения 13. Пусть a — ненулевой элемент пространства $S_{v,q}$. Если a — собственный вектор эндоморфизма $\rho_{v,q}(\mathrm{H})$ с собственным значением λ, то аннулятором вектора a является левый идеал алгебры B_q порожденный элементом $\mathrm{H}' - \lambda$; если элемент a не является собственным вектором эндоморфизма $\rho_{v,q}(\mathrm{H})$, то его аннулятор — немоногенный левый идеал.

в) Рассмотрим представления $\rho^{\pm}_{v,q}$ из упражнения 13. Если a — ненулевой элемент в пространстве одного из этих представлений, то его аннулятор в алгебре B_q — немоногенный левый идеал.

г) Рассмотрим представление ρ_q из упражнения 12. Аннулятор элемента e_0 в алгебре B_q порожден элементом $\mathrm{X}'_{+} - 1$. Если элемент $a \in W$ не пропорционален элементу e_0, то его аннулятором является немоногенный левый идеал.

д) Любой автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{s}$ продолжается до автоморфизма алгебры $U(\mathfrak{s})$ и определяет при переходе к факторалгебре автоморфизм алгебры B_q; пусть A' — подгруппа группы $A = \mathrm{Aut}(B_q)$, полученная таким образом. Показать, что $A' \neq A$. (Пусть φ — эндоморфизм $x \mapsto [\mathrm{X}'^2_{+}, x]$ алгебры B_q; этот эндоморфизм локально нильпотентен, $e^{\varphi} \in A$, $e^{\varphi} \notin A'$.)

е) С помощью переноса структуры группа A действует на множестве классов простых представлений алгебры B_q. Пусть π_1 (соотв. π_2, π_3) — представление типа $\rho_{v,q}$ из упражнения 13 б) (соотв. представление типа $\rho^{\pm}_{v,q}$ из упражнения 13, соотв. представление типа ρ_q из упражнения 12). Тогда множества $A\pi_1$, $A\pi_2$ и $A\pi_3$ попарно не пересекаются. (Использовать а) — г).) Если $\psi \in A$ — такой автоморфизм, что $\psi\pi_1$ — представление типа $\rho_{v,q}$ из упражнения 13 б), то $\psi \in A'$ (использовать а) и б)). Вывести отсюда, что если ψ — автоморфизм вида e^{φ} из д), то представление $\sigma = \pi_1 \circ \psi$ обладает следующим свойством: для любого элемента $x \in \mathfrak{s} - \{0\}$ у эндоморфизма $\sigma(x)$ нет собственных значений[1]).

15) Пусть $\mathfrak{g}$ — трехмерная алгебра Ли Показать, что следующие условия эквивалентны (см. гл. I, § 6, упражнение 23).

(i) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(ii) форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ невырожденна.

(iii) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста.

(iv) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста.

¶ 16) Пусть $\mathfrak{g}$ — простая 3-мерная алгебра Ли, и пусть Φ — ее форма Киллинга. Обозначим через $\mathfrak{o}(\Phi)$ ортогональную алгебру формы Φ, т. е. подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, образованную элементами, относительно которых форма Φ инвариантна.

а) Показать, что $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{o}(\Phi)$ — изоморфизм.

б) Доказать, что следующие свойства алгебры Ли $\mathfrak{g}$ эквивалентны:

(i) $\mathfrak{g}$ содержит ненулевой изотропный (относительно формы Φ) вектор.

(ii) $\mathfrak{g}$ содержит ненулевой нильпотентный элемент.

(iii) $\mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{s}$.

в) Показать, что существует расширение k_1 поля k степени $\leqslant 2$, над которым алгебра Ли $\mathfrak{g}_{(k_1)} = k_1 \otimes_k \mathfrak{g}$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{s}_{(k_1)}$.

---

[1]) Подробности относительно упражнений 12—14 см. Arnal D., Pinczon G., Sur les représentations algébriquement irréductibles de l'algebre de Lie $\mathfrak{sl}(2)$, *J. of Math. Phys.*, **XV** (1974), 350—359.

г) Снабдим векторное пространство $A = k \oplus \mathfrak{g}$ единственной структурой алгебры, в которой 1 — единичный элемент и произведение $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to A$ задано формулой

$$x \cdot y = \frac{1}{8}\Phi(x, y) \cdot 1 + \frac{1}{2}[x, y] \quad (x, y \in \mathfrak{g}).$$

Показать, что A — алгебра кватернионов над полем k[1]) и что $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли алгебры A, образованная элементами со следом нуль (расширив основное поле, ограничиться случаем $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}$ и показать, что тогда алгебра A отождествляется с алгеброй матриц $\mathbf{M}_2(k)$).

Обратно, если D — алгебра кватернионов над полем k, то элементы со следом нуль образуют простую 3-мерную алгебру Ли и соответствующая алгебра A отождествляется с D.

д) Доказать формулы

$$\Phi(x, x) = -8\mathrm{Nrd}_A(x), \quad \Phi(x, y) = 4\mathrm{Trd}_A(xy),$$

$$2[x, [y, z]] = \Phi(x, y)z - \Phi(x, z)y \quad (x, y, z \in \mathfrak{g}).$$

е) Показать, что дискриминант формы Φ (относительно некоторого базиса алгебры Ли $\mathfrak{g}$) имеет вид $-2\lambda^2$, где $\lambda \in k^*$.

ж) Пусть n — целое число $\geqslant 0$. Показать, что $\mathfrak{g}$-модуль $\mathbf{S}^n(\mathfrak{g})$ обладает единственным простым подмодулем размерности $2n+1$, и этот модуль абсолютно прост (свести к случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}$ и воспользоваться упражнением 9).

Показать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет абсолютно простой модуль размерности $2n$, только если она изоморфна $\mathfrak{s}$, т. е. если алгебра A изоморфна $\mathbf{M}_2(k)$. (Пусть V — такой модуль. Если $n \geqslant 2$, то показать с помощью упражнения 6 в), что $\mathfrak{g}$-модуль $V \otimes \mathfrak{g}$ имеет единственный абсолютно простой подмодуль размерности $2n-2$. Свести все, таким образом, к случаю $n = 1$, который тривиален.)

¶ 17) Сохраним обозначения предыдущего упражнения. Показать, что при всех $n \geqslant 1$ алгебра $U(\mathfrak{g})$ содержит единственный двусторонний идеал $\mathfrak{m}_n$, такой, что $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}_n$ — простая центральная алгебра размерности n^2 (расширением поля скаляров свести анализ к случаю, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}$, и показать, что тогда $\mathfrak{m}_n$ — ядро гомоморфизма $U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V(n-1))$). Любой идеал конечной коразмерности в алгебре $U(\mathfrak{g})$ имеет вид $\mathfrak{m}_{n_1} \cap \mathfrak{m}_{n_2} \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_{n_h}$, где числа $n_1, \ldots, n_h$ попарно различны; его коразмерность равна $n_1^2 + \ldots n_h^2$ (применить теорему плотности). Идеалы $\mathfrak{m}_n$ — единственные максимальные двусторонние идеалы конечной коразмерности в алгебре $U(\mathfrak{g})$.

Показать, что $\mathfrak{m}_2$ порожден (как двусторонний идеал) элементами вида $x^2 - \frac{1}{8}\Phi(x, x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ и что факторалгебра $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}_2$ отождествляется с алгеброй кватернионов A из упражнения 16.

Когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{s}$, алгебра $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}_n$ изоморфна $\mathbf{M}_n(k)$. Если же алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не изоморфна $\mathfrak{s}$, то алгебра $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}_n$ изоморфна $\mathbf{M}_n(k)$ тогда и только тогда, когда n нечетно (использовать упражнение 16 ж))[2]).

¶ 18) Предположим, что k равно $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или полю, полному относительно дискретного нормирования с полем вычетов характеристики $p \neq 0$ (например, конечному расширению поля p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$).

---

[1]) Или алгебра матриц $\mathbf{M}_2(k)$. — *Прим. перев.*

[2]) Когда n четно, то можно показать, что алгебра $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}_n$ изоморфна алгебре $\mathbf{M}_{n/2}(A)$.

а) Пусть $\mathfrak{n}$ — нильпотентная алгебра Ли, N — группа Ли, полученная из $\mathfrak{n}$ с помощью закона умножения Хаусдорфа (гл. III, § 9, n° 5), и $\rho\colon \mathfrak{n} \to \mathfrak{gl}(E)$ — линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{n}$ в конечномерном векторном пространстве E. Предположим, что эндоморфизм $\rho(x)$ нильпотентен при любом $x \in \mathfrak{n}$, и положим $\pi(x) = \exp(\rho(x))$. Показать, что π — единственный гомоморфизм групп Ли $\varphi\colon N \to \mathbf{GL}(E)$, такой, что $L(\varphi) = \rho$.

(Когда $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, использовать связность группы N. Когда поле k ультраметрическое, показать, что собственные значения эндоморфизмов $\varphi(x)$, $x \in N$, равны 1; для этого доказать сначала, что если k' — конечное расширение поля k и $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots)$ — такая последовательность элементов поля k', что $\lambda_n = \lambda_{n+1}^p$ при всех n и $\lambda_1 = 1$, то $\lambda_n = 1$ при всех n.)

б) Пусть $\rho\colon \mathfrak{s} \to \mathfrak{gl}(E)$ — конечномерное линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{s}$, и пусть π — гомоморфизм группы $\mathbf{SL}(2, k)$ в группу $\mathbf{GL}(E)$, согласованный с представлением ρ (n° 4). Показать, что π — единственный гомоморфизм групп Ли $\varphi\colon \mathbf{SL}(2, k) \to \mathbf{GL}(E)$, такой, что $L(\varphi) = \rho$. (Использовать а) для доказательства того, что гомоморфизмы π и φ совпадают на элементах вида $\exp(n)$, где n — нильпотентный элемент в $\mathfrak{s}$, и заметить, что группа Ли $\mathbf{SL}(2, k)$ порождается элементами вида $\exp(n)$.)

§ 2

1) Пусть $\mathfrak{g}$ — простая 3-мерная алгебра Ли и Φ — ее форма Киллинга (см. § 1, упражнения 15—17).

а) Элемент $x \in \mathfrak{g}$ регулярен тогда и только тогда, когда $\Phi(x, x) \neq 0$. Пусть $\mathfrak{h}_x = kx$ — подалгебра Картана, порожденная таким элементом. Доказать, что $\mathfrak{h}_x$ — расщепляющая подалгебра тогда и только тогда, когда элемент $2\Phi(x, x)$ является квадратом в поле k.

б) Показать, что

$$\mathfrak{g} \text{ — расщепляемая алгебра Ли} \Longleftrightarrow \mathfrak{g} \text{ изоморфна } \mathfrak{sl}(2, k).$$

2) Пусть k_1 — расширение поля k конечной степени $n \geqslant 2$.

а) Показать, что полупростая k-алгебра $\mathfrak{sl}(2, k_1)$ нерасщепляема.

б) Показать, что расщепляемая простая k-алгебра $\mathfrak{sl}(n, k)$ содержит подалгебру Картана $\mathfrak{h}_1$, которая не является расщепляющей. (Рассмотреть некоторое вложение алгебры k_1 в алгебру $\mathbf{M}_n(k)$ и положить $\mathfrak{h}_1 = k_1 \cap \mathfrak{sl}(n, k)$.)

3) Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — расщепленная полупростая алгебра Ли, R — ее система корней и K — ограничение на подалгебру $\mathfrak{h}$ формы Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда в обозначениях гл. VI, § 1, n° 12, $K = B_{R^\vee}$ и $K = 4\gamma(R)\,\Phi_{R^\vee}$, если система корней R неприводима: если, кроме того, все корни системы R имеют одинаковую длину, то

$$K(\mathrm{H}_\alpha, \mathrm{H}_\alpha) = 4h \quad \text{при всех} \quad \alpha \in R,$$

где h — число Кокстера группы $W(R)$.

Если, например, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа E_6, E_7 или E_8, то $K(\mathrm{H}_\alpha, \mathrm{H}_\alpha)$ равно 48, 72 или 120.

4) Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — расщепленная полупростая алгебра Ли и $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in R}$ — семейство элементов, удовлетворяющих условиям леммы 2. Если $\alpha, \beta \in R$ и если $\alpha + \beta \in R$, то определим числа $N_{\alpha\beta}$ по формулам $[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = N_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$; если $\alpha + \beta \notin R$, то положим $N_{\alpha,\beta} = 0$. Доказать следующие формулы:

а) $N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha}$.

б) Если $\alpha, \beta, \gamma \in R$ — такие корни, что $\alpha + \beta + \gamma = 0$, то

$$\frac{N_{\alpha,\beta}}{\langle\gamma, \gamma\rangle} = \frac{N_{\beta,\gamma}}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = \frac{N_{\gamma,\alpha}}{\langle\beta, \beta\rangle}.$$

в) Если α, β, γ, $\delta \in R$ — такие корни, что $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$, и если сумма любых двух корней не равна нулю, то

$$\frac{N_{\alpha,\beta}N_{\gamma,\delta}}{\langle\gamma+\delta,\gamma+\delta\rangle}+\frac{N_{\beta,\gamma}N_{\alpha,\delta}}{\langle\alpha+\delta,\alpha+\delta\rangle}+\frac{N_{\gamma,\alpha}N_{\beta,\delta}}{\langle\beta+\delta,\beta+\delta\rangle}=0.$$

5) Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — расщепленная полупростая алгебра Ли, и пусть $(X_\alpha)_{\alpha\in R}$ — семейство элементов, удовлетворяющих условиям леммы 2. Пусть B — базис системы корней R. Элементы X_α $(\alpha\in R)$ и H_α $(\alpha\in B)$ образуют базис векторного пространства $\mathfrak{g}$. Показать, что дискриминант формы Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в этом базисе (*Алг.*, гл. IX, § 2) — рациональное число, не зависящее от выбора подалгебры Картана $\mathfrak{h}$, базиса B и элементов X_α [1]). Вывести отсюда, что элемент из пространства $\bigwedge^n\mathfrak{g}$, $n=\dim\mathfrak{g}$, определенный внешним произведением элементов H_α $(\alpha\in B)$ и X_α $(\alpha\in R)$, не зависит, с точностью до знака, от выбора подалгебры $\mathfrak{h}$, базиса B и элементов X_α.

6) Пусть $(X_\alpha)_{\alpha\in R}$ — система Шевалле расщепленной полупростой алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Пусть α, $\beta\in R$, и пусть p (соотв. q) — наибольшее целое число j, такое, что $\beta+j\alpha\in R$ (соотв. $\beta-j\alpha\in R$), см. лемму 4. Показать, что

$$\operatorname{ad}(X_\alpha)^k(X_{\beta-q\alpha})=\pm k!\,X_{\beta+(k-q)\alpha}\quad\text{при}\quad 0\leqslant k\leqslant p+q.$$

Вывести отсюда, что алгебра $\mathfrak{g}_{\mathbf{Z}}$ из определения 8 устойчива относительно операторов $\operatorname{ad}(X_\alpha)^k/k!$, а также относительно операторов $e^{\operatorname{ad}(X_\alpha)}$ (см. § 12).

7) Предположим, что k — упорядоченное поле. Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — расщепленная полупростая алгебра Ли ранга l; положим $\dim\mathfrak{g}=l+2m$.

а) Показать, что форма Киллинга Φ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ — прямая сумма двух форм: нейтральной формы ранга $2m$ и невырожденной положительно определенной формы ранга l; в частности, ее индекс равен m.

б) Пусть φ — инволютивный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, ограничение которого на подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ равно $-\mathrm{Id}$. Показать, что форма

$$(x, y)\longmapsto -\Phi(x, \varphi(y)),\quad x, y\in\mathfrak{g},$$

симметрическая, невырожденная и положительно определенная.

в) Пусть $k'=k(\sqrt{\alpha})$, где α — элемент <0 из k. Обозначим через c нетривиальный k-автоморфизм поля k'. Пусть $\mathfrak{g}_c$ — k-подпространство в $\mathfrak{g}_{(k')}=k'\otimes_k\mathfrak{g}$, образованное такими элементами y, что

$$(1\otimes\varphi)\cdot y=(c\otimes 1)\cdot y.$$

Показать, что $\mathfrak{g}_c$ есть k-подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}_{(k')}$ и что инъективное отображение из $\mathfrak{g}_c$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}_{(k')}$ продолжается до изоморфизма алгебры Ли $k'\otimes_k\mathfrak{g}_c$ на $\mathfrak{g}_{(k')}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_c$ полупроста и $\sqrt{\alpha}\,\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана.

г) Показать, что форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}_c$ отрицательно определена. Вывести отсюда, что $\mathfrak{g}_c$ — нерасщепляемая алгебра Ли (за исключением случая $\mathfrak{g}=0$).

д) В случае когда $k=\mathbf{R}$, показать, что группа $\operatorname{Int}(\mathfrak{g}_c)$ компактна.

8) а) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и n — целое число $\geqslant 0$. Пусть $\Sigma_n(\mathfrak{g})$ — подмножество пространства $\mathfrak{g}^n$, образованное семействами $(x_1, \ldots, x_n)$, которые

---

[1]) Подробное вычисление этого дискриминанта см. в работе: Springer T. A., Steinberg R., Conjugacy Classes (n° 4.8). Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Lect. Notes in Math. 131 Springer-Verlag, 1970.

порождают $\mathfrak{g}$ как k-алгебру. Показать, что множество $\Sigma_n(\mathfrak{g})$ открыто в пространстве $\mathfrak{g}^n$ в топологии Зарисского (гл. VII, дополнение I). Если k' — расширение поля k, то $\Sigma_n(\mathfrak{g}_{(k')}) \cap \mathfrak{g}^n = \Sigma_n(\mathfrak{g})$. Вывести отсюда, что пространство $\mathfrak{g}_{(k')}$ может быть порождено n элементами; это же верно и относительно всей алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

б) Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — расщепленная полупростая алгебра Ли. Пусть x — такой элемент пространства $\mathfrak{h}$, что $\alpha(x) \neq 0$ для любого корня $\alpha \in R$ и $\alpha(x) \neq \beta(x)$ для любой пары различных корней α, $\beta \in R$. Для любого $\alpha \in R$ пусть y_α — ненулевой элемент пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ и $y = \sum\limits_{\alpha \in R} y_\alpha$. Показать, что для любого корня $\alpha \in R$ существует такой многочлен $P_\alpha(T) \in k[T]$ без свободного члена, что $y_\alpha = P_\alpha(\operatorname{ad} x) \cdot y$. Вывести отсюда, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождена множеством $\{x, y\}$.

в) Показать, что вследствие а) и б) любая полупростая алгебра Ли может быть порождена двумя элементами.

¶ 9) Пусть G — связная вещественная конечномерная группа Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, и пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — порождающее семейство алгебры Ли $\mathfrak{g}$. При любом $m \geqslant 0$ обозначим через Γ_m подгруппу группы G, порожденную элементами $\exp(2^{-m}x_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда имеют место включения $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \ldots$.

а) Показать, что объединение групп Γ_m всюду плотно в группе G.

б) Пусть H_m — компонента единицы замыкания $\overline{\Gamma}_m$ группы Γ_m. Тогда имеют место включения $H_0 \subset H_1 \subset \ldots$ и последовательность (H_m) стабилизируется. Пусть H — объединение всех H_m. Показать, что группа H нормальна в G (заметить, что H нормализуется всеми подгруппами Γ_m) и что образ Γ_m в G/H — дискретная подгруппа группы G/H. Так как объединение этих подгрупп всюду плотно в G/H, то вывести из этого, что G/H нильпотентна (см. гл. III, упражнение 23 г)).

в) Предположим, что $\mathfrak{g} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$. Показать, что $G = H$, т. е. группа Γ_m всюду плотна в G для достаточно большого m

10) Пусть G — связная полупростая вещественная группа Ли. Показать, используя упражнения 8 и 9, что существует всюду плотная подгруппа группы G, порожденная двумя элементами.

11) Пусть R — система корней ранга l и Φ_R — соответствующая каноническая билинейная форма (гл. VI, § 1, n° 12). Ранг матрицы $\Phi = (\Phi_R(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in R}$ равен l и $\Phi^2 = \Phi$. Вывести отсюда формулу $\sum\limits_{\alpha \in R} \Phi_R(\alpha, \alpha) = \operatorname{Tr} \Phi = l$.

§ 3

1) Пусть Γ — подгруппа конечного индекса в группе $Q(R)$ и $P = \Gamma \cap R$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{h} + \mathfrak{h}^P$ редуктивна, и любая редуктивная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ получается таким образом. (Использовать гл. VI, § 1, упражнение 6 б)).

2) Пусть X — множество редуктивных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отличных от $\mathfrak{g}$ и содержащих $\mathfrak{h}$. Найти максимальные элементы множества X способом из гл. VI, § 4, упражнение 4. Показать, что размерность центра такой максимальной подалгебры Ли равна 0 или 1 в зависимости от того, находимся ли мы в условии а) или б) указанного упражнения.

3) Пусть $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $l = \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$. Показать, что минимальное число образующих алгебры Ли $\mathfrak{b}$ равно l, если $l \neq 1$, и 2 если $l = 1$.

4) Предположим, что $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Положим $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ и отождествим алгебру Ли группы G с $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и $\mathfrak{n}$ — множество ее нильпотентных элементов. Обозначим через H, B и N интегральные подгруппы группы Ли G, алгебры Ли которых равны $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{n}$ соответственно. Показать, что H, B, N — подгруппы Ли в G, группа N односвязна и B — полупрямое произведение групп H и N.

5) Пусть $\mathfrak{m}$ — параболическая подалгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{a}$.

а) Пусть $\mathfrak{p}$ — подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{m}$. Для того чтобы $\mathfrak{p}$ была параболической подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{a}$, необходимо и достаточно, чтобы алгебра Ли $\mathfrak{p}$ содержала радикал $\mathfrak{r}$ алгебры Ли $\mathfrak{m}$ и чтобы алгебра Ли $\mathfrak{p}/\mathfrak{r}$ была параболической подалгеброй в $\mathfrak{m}/\mathfrak{r}$.

б) Если $\mathfrak{m}'$ — параболическая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$, то каждая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}'$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{a}$. (Свести к случаю, когда $\mathfrak{a}$ — расщепляемая алгебра Ли, и применить предложение 10 к подалгебрам Бореля, содержащимся в $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$.)

6) Две подалгебры Бореля полупростой алгебры Ли $\mathfrak{a}$ называются *противоположными*, если их пересечение — подалгебра Картана. Показать, что если $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{b}$, то в $\mathfrak{a}$ существует единственная подалгебра Бореля, которая противоположна $\mathfrak{b}$ и содержит $\mathfrak{h}$. (Свести к расщепляемому случаю.)

7) Пусть $\mathfrak{a}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{s}$ — полупростая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$, содержащая подалгебру Картана $\mathfrak{h}$. Показать, что

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}) \text{ — расщепленная алгебра Ли} \Longleftrightarrow (\mathfrak{s}, \mathfrak{h}) \text{ — расщепленная алгебра Ли.}$$

Построить пример, когда алгебра Ли $\mathfrak{a}$ расщепляема, а алгебра Ли $\mathfrak{s}$ — нет. (Взять $\mathfrak{a} = \mathfrak{sp}(4, k)$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(2, k')$, где k' — квадратичное расширение поля k.)

8) Выберем базис системы корней R и определим множество положительных корней R_+. Предположим, что система R неприводима. Пусть $\tilde{\alpha}$ — наибольший корень, S — множество корней, ортогональных корню $\tilde{\alpha}$, и $S_+ = S \cap R_+$.

а) Пусть

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^S \oplus \mathfrak{h}_S, \quad \mathfrak{m}_+ = \sum_{\alpha \in S_+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{m}_- = \sum_{\alpha \in S_+} \mathfrak{g}^{-\alpha}.$$

Тогда $\mathfrak{g}'$ — полупростая алгебра Ли и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}_S \oplus \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{m}_-$.

б) Положим

$$\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{p} = \sum_{\alpha \in R_+ - S_+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{p}_0 = \sum_{\alpha \in R_+ - S_+ - \{\tilde{\alpha}\}} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Тогда

$$\mathfrak{n}_+ = \mathfrak{m}_+ \oplus \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{m}_+, \mathfrak{p}_0] \subset \mathfrak{p}_0, \quad [\mathfrak{n}_+, \mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}}] = 0.$$

В частности, алгебра Ли $\mathfrak{p}$ — идеал в алгебре Ли $\mathfrak{n}_+$.

в) Для любого корня $\alpha \in R_+ - S_+ - \{\tilde{\alpha}\}$ существует единственный корень $\alpha' \in R_+ - S_+ - \{\tilde{\alpha}\}$, такой, что $\alpha + \alpha' = \tilde{\alpha}$. Для любого корня $\alpha \in R_+ - S_+ - \{\tilde{\alpha}\}$ можно выбрать такой ненулевой элемент X_α из пространства $\mathfrak{g}^\alpha$, что

$$[X_\alpha, X_{\alpha'}] = \pm X_{\tilde{\alpha}}, \quad \text{если} \quad \alpha \in R_+ - S_+ - \{\tilde{\alpha}\},$$
$$[X_\alpha, X_\beta] = 0, \quad \text{если} \quad \alpha, \beta \in R_+ - S_+, \quad \beta \neq \alpha' \text{ [1]}.$$

[1]) Это упражнение нам сообщил Жозеф (Joseph A.).

9) Построить примеры таких полупростых алгебр Ли $\mathfrak{a}$, что

а) у алгебры Ли $\mathfrak{a}$ нет подалгебры Бореля;

б) у алгебры Ли $\mathfrak{a}$ есть подалгебра Бореля, но $\mathfrak{a}$ — нерасщепляемая алгебра Ли.

¶ 10) Пусть $\mathfrak{a}$ — полупростая алгебра Ли и x — ее элемент. Скажем, что *x приводится к диагональному виду*, если эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ приводится к диагональному виду (*Алг.*, гл. VII), т. е. если существует базис алгебры Ли $\mathfrak{a}$, образованный собственными векторами эндоморфизма $\operatorname{ad} x$.

а) Пусть $\mathfrak{c}$ — коммутативная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$, образованная элементами, которые приводятся к диагональному виду, и пусть L — множество весов алгебры Ли $\mathfrak{c}$ в представлении $\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}}$. Множество L — конечное подмножество в $\mathfrak{c}^*$, содержащее 0 (за исключением случая $\mathfrak{a} = 0$), и $\mathfrak{a} = \bigoplus_{\lambda \in L} \mathfrak{a}^{\lambda}(\mathfrak{c})$. Показать, что существует такое подмножество M множества L, что множество $L - \{0\}$ — несвязное объединение множеств M и $-M$ и что $(M + M) \cap L \subset M$. Если множество M обладает этими свойствами, то положим $\mathfrak{a}^M = \bigoplus_{\lambda \in M} \mathfrak{a}^{\lambda}(\mathfrak{c})$ и $\mathfrak{p}^M = \mathfrak{a}^0(\mathfrak{c}) \oplus \mathfrak{a}^M$. Алгебра Ли $\mathfrak{a}^0(\mathfrak{c})$ — централизатор подалгебры $\mathfrak{c}$ в алгебре Ли $\mathfrak{a}$. Подалгебра $\mathfrak{a}^0(\mathfrak{c})$ редуктивна в $\mathfrak{a}$ (гл. VII, § 1, n° 5), и ее подалгебры Картана являются подалгебрами Картана алгебры Ли $\mathfrak{a}$ (гл. VII, § 2, n° 3). Показать, что $\mathfrak{p}^M$ — параболическая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}^M$ — множество нильпотентных элементов из радикала алгебры Ли $\mathfrak{p}^M$. (Воспользоваться тем, что алгебра Ли $\mathfrak{c}$ содержится в подалгебре Картана алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и, расширив поле скаляров, свести все к случаю, когда эта подалгебра расщепляющая.)

б) Сохраним обозначения и предположения из п. а) и предположим, кроме того, что алгебра $\mathfrak{a}$ расщепляема Показать, что $\mathfrak{c}$ содержится в расщепляющей подалгебре Картана алгебры Ли $\mathfrak{a}$. (Рассмотреть расщепляющую подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{a}$, содержащуюся в алгебре Ли $\mathfrak{p}^M$. Таким образом, существует единственная подалгебра Картана $\mathfrak{h}'$ алгебры Ли $\mathfrak{a}^0(\mathfrak{c})$, такая, что подалгебра $\mathfrak{h}$ содержится в $\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{a}^M$. Показать, что $\mathfrak{h}'$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{h}'$ содержит $\mathfrak{c}$.)

11) Пусть $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{a}_i$ — произведение конечного числа полупростых алгебр Ли. Подалгебра $\mathfrak{q}$ алгебры Ли $\mathfrak{a}$ является параболической подалгеброй (соотв. подалгеброй Бореля) тогда и только тогда, когда она имеет вид $\mathfrak{q} = \prod \mathfrak{q}_i$, где $\mathfrak{q}_i$ — параболическая подалгебра (соотв. подалгебра Бореля) алгебры Ли $\mathfrak{a}_i$ для каждого i.

¶ 12) Пусть k' — конечное расширение поля k, $\mathfrak{a}'$ — полупростая k'-алгебра Ли и $\mathfrak{a}$ — соответствующая k-алгебра Ли. Показать, что у алгебр Ли $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ одинаковые параболические подалгебры (соотв. подалгебры Бореля). (Расширить поле скаляров до алгебраического замыкания поля k и воспользоваться упражнением 11.)

13) Пусть $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ — две параболические подалгебры полупростой алгебры Ли $\mathfrak{a}$, и пусть $\mathfrak{n}$ — нильпотентный радикал подалгебры $\mathfrak{p}$. Показать, что $\mathfrak{m} = (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) + \mathfrak{n}$ — параболическая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$. (Свести к случаю, когда $\mathfrak{a}$ — расщепляемая алгебра Ли, а $\mathfrak{q}$ — подалгебра Бореля, выбрать подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ содержащуюся в $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, и определить такое подмножество P соответствующей системы корней, что $\mathfrak{m} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^P$.)

14) Воспользуемся обозначениями из упражнения 9.

а) Пусть $\alpha \in B$. Показать, что $\mathfrak{n} \cap \operatorname{Ker} \operatorname{ad} X_\alpha$ — прямая сумма пространств $\mathfrak{g}^\beta$, где β пробегает множество таких элементов из R_+, для которых $\alpha + \beta \notin R_+$.

б) Вывести отсюда, что если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, то центр подалгебры $\mathfrak{n}$ равен $\mathfrak{g}^{\tilde\alpha}$, где $\tilde\alpha$ — наибольший корень системы R_+. В общем случае размерность центра алгебры Ли $\mathfrak{n}$ равна числу простых компонент алгебры Ли $\mathfrak{g}$

§ 4

Алгебры Ли, рассматриваемые в этом параграфе, не обязательно конечномерны.

1) Воспользуемся обозначениями из n° 2. Пусть $\lambda \in k^B$ Каждому корню $\alpha \in B$ поставим в соответствие такие эндоморфизмы $X_{-\alpha}^\lambda$, H_α^λ, X_α^λ векторного пространства E, что

$$X_{-\alpha}^\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

$$H_\alpha^\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left(\lambda(\alpha) - \sum_{i=1}^n n(\alpha_i, \alpha)\right)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Вектор $X_\alpha^\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ определяется индукцией по n с помощью формулы

$$X_\alpha^\lambda(\alpha_1, \ldots \alpha_n) = \left(X_{-\alpha_1}^\alpha X_\alpha^\lambda - \delta_{\alpha, \alpha_1} H_\alpha^\lambda\right)(\alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

где $\delta_{\alpha, \alpha_1}$ — символ Кронекера; условимся, что если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — пустой набор, то вектор $X_\alpha^\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ равен нулю.

Показать, что утверждения лемм 1 и 2 остаются справедливыми для этих эндоморфизмов. Мы получаем, таким образом, представление $\rho_\lambda \colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(E)$, для которого

$$\rho_\lambda(x_\alpha) = X_\alpha^\lambda, \quad \rho_\lambda(h_\alpha) = H_\alpha^\lambda, \quad \rho_\lambda(x_{-\alpha}) = X_{-\alpha}^\lambda.$$

¶ 2) Воспользуемся обозначениями из n° 3. Предположим, что $\mathfrak{m}$ — идеал в алгебре Ли $\mathfrak{a}$.

а) Пусть α и β — два различных элемента из B. Предположим, что для достаточно большого N элемент $(\operatorname{ad} x_\alpha)^N x_\beta$ принадлежит идеалу $\mathfrak{m}$. Показать, что $x_{\alpha\beta} \in \mathfrak{m}$. (Применить результаты § 1, n° 2, к факторалгебре $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}$, снабженной подходящей структурой $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуля.)

б) Показать, что $\mathfrak{n} + \theta\mathfrak{n}$ — наименьший идеал конечной коразмерности в алгебре Ли $\mathfrak{a}$. Показать, что это также наименьший идеал, содержащий векторы $(\operatorname{ad} x_\alpha)^4 x_\beta$ и $(\operatorname{ad} x_{-\alpha})^4 x_{-\beta}$.

3) Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — расщепленная полупростая алгебра Ли, R — соответствующая система корней и B — базис системы корней R. Пусть для любого корня $\alpha \in B$ (соотв. любой пары $(\alpha, \beta) \in B^2$) $R(\alpha)$ (соотв. $R(\alpha, \beta)$) — замкнутое подмножество в R, образованное корнями $\pm\alpha$ (соотв. наименьшее замкнутое подмножество системы R, содержащее $\pm\alpha$ и $\pm\beta$). Пусть $\mathfrak{g}(\alpha)$ (соотв. $\mathfrak{g}(\alpha, \beta)$) — производная алгебра алгебры $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{R(\alpha)}$ (соотв. $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{R(\alpha, \beta)}$), см. § 3.

а) Показать, что $\mathfrak{g}(\alpha) = kH_\alpha \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$; она изоморфна $\mathfrak{sl}(2, k)$.

б) Показать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}(\alpha, \beta)$ полупроста и порождается подалгебрами $\mathfrak{g}(\alpha)$ и $\mathfrak{g}(\beta)$. Ее система корней отождествляется с $R(\alpha, \beta)$.

в) Пусть $\mathfrak{s}$ — алгебра Ли (не обязательно конечномерная). Пусть при всех $\alpha \in B$ f_α — гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}(\alpha)$ в $\mathfrak{s}$. Предположим, что для любой пары (α, β) существует гомоморфизм $f_{\alpha\beta}$: $\mathfrak{g}(\alpha\ \beta) \to \mathfrak{s}$, который продолжает и гомоморфизм f_α, и гомоморфизм f_β. Показать, что тогда существует единственный гомоморфизм f: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{s}$, который продолжает все гомоморфизмы f_α. Воспользоваться предложением 4 (i).)

4) Пусть $\mathfrak{g}$ — расщепляемая полупростая алгебра Ли и σ — автоморфизм поля k. Пусть $\mathfrak{g}_\sigma$ — алгебра Ли, полученная из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ заменой поля скаляров с помощью автоморфизма σ. Показать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_\sigma$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (Воспользоваться следствием предложения 4.)

5) а) Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли и k_1 — коммутант присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Показать, что k_1 — поле, являющееся конечным расширением поля k, и что $\mathfrak{g}$ — абсолютно простая k_1-алгебра.

Наоборот, если k_1 — конечное расширение поля k и $\mathfrak{g}$ — абсолютно простая k_1-алгебра Ли, то $\mathfrak{g}$ — простая k-алгебра Ли, и коммутант ее присоединенного представления отождествляется с полем k_1.

б) Пусть k' — расширение Галуа поля k, содержащее поле k_1. Показать, что $\mathfrak{g}_{(k')}$ — произведение абсолютно простых алгебр Ли в количестве, равном $[k_1 : k]$. Поскольку алгебра Ли $\mathfrak{g}_{(k')}$ расщепленная, то эти алгебры Ли попарно изоморфны (воспользоваться упражнением 4).

6) Пусть A — коммутативное кольцо, и пусть $\mathfrak{u}$ есть A-алгебра Ли, определенная семейством образующих $\{x, y\}$ и соотношениями

$$[x, [x, y]] = 0, \qquad [y, [y, [y, x]]] = 0.$$

Показать, что $\mathfrak{u}$ — свободный A-модуль с базисом

$$\{x, y, [x, y], [y, [x, y]]\}.$$

Если $A = k$, показать, что алгебра Ли $\mathfrak{u}$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{a}_+/\mathfrak{n}$ соответствующей системе корней типа B_2.

¶ 7) Пусть A — коммутативное кольцо, в котором элемент 2 обратим, и пусть $\mathfrak{u}$ есть A-алгебра Ли, определенная семейством образующих $\{x, y\}$ и соотношениями

$$[x, [x, y]] = 0, \qquad [y, y, [y, [y, x]]]] = 0.$$

Показать, что $\mathfrak{u}$ — свободный A-модуль с базисом

$$\{x, y, [x, y], [y, [x, y]], [y, [y, [x, y]]], [x, [y, [y, [x, y]]]]\}.$$

Когда $A = k$, показать, что алгебра Ли $\mathfrak{u}$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{a}_+/\mathfrak{n}$, соответствующей системе корней типа G_2.

§ 5

1) Индекс подгруппы $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ в группе $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ конечен.

2) Если $\mathfrak{g}$ — расщепляемая простая алгебра Ли типа G_2, F_4 или E_8, то $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$

3) Пусть $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ и $N = \exp \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{n}$. Тогда

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = N \,.\, \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \,.\, N.$$

(Пусть $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Применить предложение 10 из § 3, n° 3, к алгебре Ли $\mathfrak{b} \cap s(\mathfrak{b})$, затем применить теорему 3 из гл. VII, § 3, n° 4.)

4) Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и s — такой элемент из группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, что $sH \neq H$ при всех отличных от нуля элементах H из $\mathfrak{h}$. Показать, что s — элемент конечного порядка. (Свести к случаю, когда $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана, и выбрать такое целое число $n \geqslant 1$, что $\varepsilon(s)^n = 1$. Тогда существует такой элемент $\varphi \in T_Q$, что $f(\varphi) = s^n$. Пусть σ — эндоморфизм, сопряженный к эндоморфизму $s \mid \mathfrak{h}$. Показать, что $1 + \sigma + \sigma^2 + \ldots + \sigma^{n-1} = 0$, и вывести отсюда, что $s^{n^2} = 1$.)

¶ 5) а) Пусть $a \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{n}$ — нильпространство эндоморфизма $a - 1$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) $\mathrm{Ker}(a - 1)$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

(ii) $\mathfrak{n}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $a \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

(iii) $\dim \mathfrak{n} = \mathrm{rg}(\mathfrak{g})$ и $a \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

б) Предположим теперь, что поле k алгебраически замкнуто. Пусть V — векторное пространство, R — система корней в пространстве V, T_Q — группа $\mathrm{Hom}(Q(R), k^*)$, n — целое число $\geqslant 1$ и T_n — подгруппа группы T_Q, образованная элементами, порядок которых делит n. Пусть ζ — примитивный корень степени n из единицы в поле k. Пусть для любого $H \in P(R^\vee)$ $\psi(H)$ — элемент $\gamma \mapsto \zeta^{\gamma(H)}$ из группы T_Q. Отображение ψ — гомоморфизм группы $P(R^\vee)$ на группу T_n, ядро которого равно $nP(R^\vee)$. Пусть $t \in T_n$ и C — альков в пространстве $P(R^\vee) \otimes \mathbf{R}$. Тогда существуют такие $w \in W(R)$ и $H \in P(R^\vee)$, что $\frac{1}{n} H \in \overline{C}$ и $\psi(wH) = t$. (Воспользоваться гл. VI, § 2, n° 1.)

в) Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и R — система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Пусть n, ζ, ψ такие же, как в б), а f — как в n° 2. Пусть $H \in P(R^\vee)$. Множество элементов из алгебры Ли $\mathfrak{g}$, инвариантных относительно $f(\psi(H))$, равно $\mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in R'} \mathfrak{g}^\alpha$, где R' — множество таких корней $\alpha \in R$, что $\alpha(H) \in n\mathbf{Z}$, и $f(\psi(H))$ удовлетворяет условиям п. а) тогда и только тогда, когда элемент $\frac{1}{n} H$ принадлежит некоторому алькову.

г) Предположим теперь, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста. Пусть $\mathfrak{h}$ и R такие же, как в утверждении в), $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — базис системы R, h — число Кокстера системы R, ζ — примитивный корень степени h из единицы в поле k и H — такой элемент из подалгебры Картана $\mathfrak{h}$, что $\alpha_i(H) = 1$ при $i = 1, \ldots, l$. Доказать, что выполняются следующие условия:

(i) Гомоморфизм $\gamma \mapsto \zeta^{\gamma(H)}$ группы $Q(R)$ в k^* определяет элемент группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, который удовлетворяет условиям утверждения а) и порядок которого равен h. (Воспользоваться утверждением в), а также предложением 5 из гл. VI, § 2, и предложением 31 из гл. VI, § 1.)

(ii) Порядок каждого автоморфизма конечного порядка алгебры Ли $\mathfrak{g}$, который удовлетворяет условиям п. а), не меньше h. (Воспользоваться б) и в).)

(iii) Автоморфизмы порядка h алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которые удовлетворяют условиям п. а), образуют класс сопряженных элементов в группе $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. (Воспользоваться предложением 5 из n° 3.)

д) Пусть $\mathfrak{h}$ и R такие же, как в в), и пусть w — преобразование Кокстера из группы $W(R)$. Пусть $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — такой автоморфизм, что $\varepsilon(s) = w$. Показать, что автоморфизм s удовлетворяет условиям п. а) и его порядок равен h. (Воспользоваться предложением 33 из гл. VI, § 1, гл. V, § 6, n° 2, и предложением 9 из гл. VII, § 4.)

e) Если $s \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$, то следующие условия эквивалентны:

(i) автоморфизм s удовлетворяет условиям утверждения а) и имеет порядок h;

(ii) существует такая подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, устойчивая относительно автоморфизма s, что ограничение $s \mid \mathfrak{h}$ — преобразование Кокстера из группы Вейля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (Воспользоваться пп. г) и д).)

ж) Характеристический многочлен автоморфизма из п. г) (i) равен

$$A(T) = (T-1)^l \prod_{\alpha \in R} \left(T - \zeta^{\alpha(H)}\right).$$

Характеристический многочлен автоморфизма s из п. д) равен

$$B(T) = (T^h - 1)^l \prod_{i=1}^{l} \left(T - \zeta^{m_i}\right) \quad (m_i \text{ — показатели системы } R).$$

(Воспользоваться предложением 33 (iv) из гл. VI, § 1, n° 11.) Вывести из соотношения $A(T) = B(T)$, что при всех $j \geqslant 1$ число таких i, что $m_i \geqslant j$, равно числу таких корней $\alpha \in R_+$, что $\alpha(H) = j$; так мы получаем другим путем результат упражнения 6 в) из гл. VI, § 4 [1]).

6) Предположим, что $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Пусть G — группа Ли $\operatorname{Aut}_0(\mathfrak{g})$. Показать, что элемент $a \in G$ регулярен (в смысле гл. VII, § 4, n° 2) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям упражнения 5 а).

7) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ расщепляема. Пусть $B(\mathfrak{g})$ — канонический базис канонической подалгебры Картана в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (n° 3, *замечание* 2). Если $s \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$, то автоморфизм s индуцирует перестановку на множестве $B(\mathfrak{g})$. Обозначим через $\operatorname{sgn}(s)$ знак этой перестановки. Показать, что автоморфизм s действует на пространстве $\bigwedge^n \mathfrak{g}$ (где $n = \dim \mathfrak{g}$) по формуле

$$x \longmapsto \operatorname{sgn}(s) \cdot x.$$

¶ 8) Пусть $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k и $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{k} \otimes_k \mathfrak{g}$. Группа Галуа $\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ естественным образом действует на алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ и на канонической подалгебре алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ (n° 3, замечание 2), а также на системе корней $\bar{R}$ и ее каноническом базисе $\bar{B}$. Таким образом, мы получаем непрерывный гомоморфизм (т. е. гомоморфизм, ядро которого открыто)

$$\pi \colon \operatorname{Gal}(\bar{k}/k) \to \operatorname{Aut}(\bar{R}, \bar{B}).$$

Показать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является расщепленной тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

(i) Гомоморфизм π тривиален.

(ii) В алгебре Ли $\mathfrak{g}$ содержится подалгебра Бореля $\mathfrak{b}$.

(Надо показать, что подалгебра Картана $\mathfrak{h}$, содержащаяся в алгебре Ли $\mathfrak{b}$, является расщепляющей тогда и только тогда, когда гомоморфизм π тривиален.)

9) Пусть R — приведенная система корней, B — базис системы R и $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0, B, (X_\alpha)_{\alpha \in B})$ — соответствующая размеченная полупростая алгебра Ли (§ 4). Пусть $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k и $\rho \colon \operatorname{Gal}(\bar{k}/k) \to \operatorname{Aut}(R, B)$ —

---

[1]) Подробности относительно этого упражнения см. в статье: Kostant B., The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group, *Amer. J. of Math.*, **LXXXI** (1959), 973—1032

непрерывный гомоморфизм (см. упражнение 8). Если $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, то обозначим через ρ_σ такой k-линейный автоморфизм алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}_0 = \bar{k} \otimes_k \mathfrak{g}_0$, что $\rho_\sigma(X_\alpha) = X_{\rho(\sigma)\alpha}$. Естественным образом продолжим действие группы $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ на $\bar{k}$ до действия на $\bar{\mathfrak{g}}_0$. Пусть $\mathfrak{g}$ — подмножество в $\bar{\mathfrak{g}}_0$, образованное такими элементами x, что $\rho_\sigma(x) = \sigma^{-1} . x$ при всех $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

а) Показать, что $\mathfrak{g}$ есть k-подалгебра Ли алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}_0$ и что инъективное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}_0$ продолжается до изоморфизма алгебр Ли $\bar{k} \otimes_k \mathfrak{g}$ и $\bar{\mathfrak{g}}_0$. В частности, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста.

б) Пусть $\mathfrak{b}_0$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}_0$, порожденная $\mathfrak{h}_0$ и элементами X_α. Положим

$$\bar{\mathfrak{b}}_0 = \bar{k} \otimes_k \mathfrak{b}_0, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{g} \cap \bar{\mathfrak{b}}_0, \quad \bar{\mathfrak{h}}_0 = \bar{k} \otimes_k \mathfrak{h}_0, \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g} \cap \bar{\mathfrak{h}}_0.$$

Показать, что $\bar{k} \otimes_k \mathfrak{b} = \bar{\mathfrak{b}}_0$, $\bar{k} \otimes_k \mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}}_0$, так что $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана.

в) Показать, что гомоморфизм π, ассоциированный с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (см. упражнение 8), совпадает с гомоморфизмом ρ.

¶ 10) Пусть $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ — система Шевалле расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, см. § 2, n° 4. Если $\alpha \in R$, то положим

$$\theta_\alpha = e^{\operatorname{ad} X_\alpha} e^{\operatorname{ad} X_{-\alpha}} e^{\operatorname{ad} X_\alpha}$$

и обозначим через $\overline{W}$ подгруппу группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, порожденную элементами θ_α.

а) Показать, что $\varepsilon(\overline{W}) = W(R)$.

б) Пусть $s \in \overline{W}$, и пусть $w = \varepsilon(s)$. Показать, что

$$s(X_\alpha) = \pm X_{w(\alpha)} \quad \text{при всех} \quad \alpha \in R.$$

(Воспользоваться упражнением 5 из § 2.)

в) Пусть M — ядро гомоморфизма $\varepsilon: \overline{W} \to W(R)$. Показать, что M содержится в подгруппе группы $f(T_Q)$, образованной такими элементами $f(\varphi)$, что $\varphi^2 = 1$. Показать, что M содержит элементы $f(\varphi_\alpha)$, определенные равенствами $\varphi_\alpha(\beta) = (-1)^{\langle \beta, \alpha^\vee \rangle}$ (заметить, что $\theta_\alpha^2 = f(\varphi_\alpha)$).

г) *Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}(Q, \{\pm 1\})$. Показать, что элемент $f(\varphi)$ принадлежит M тогда и только тогда, когда φ продолжается до гомоморфизма группы P в группу $\{\pm 1\}$. (Из достаточности следует, что M содержит элементы $f(\varphi_\alpha)$. Чтобы доказать необходимость, надо свести к случаю $k = \mathbf{Q}$ и воспользоваться тем, что M содержится в $f(T_Q) \cap \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) = \mathrm{Im}(T_P)$, см. § 7, упражнение 26 г).) Вывести отсюда, что M изоморфен двойственной группе группы $Q/(Q \cap 2P)$ [1]).

11) В обозначениях из n° 2 предположим, что k — *локально компактное* недискретное ультраметрическое поле, и, следовательно, оно изоморфно $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или конечному расширению поля $\mathbf{Q}_p$ (*Комм. алг.*, гл. VI, § 9, n° 3). При всех $n \geqslant 1$ факторгруппа k^*/k^{*n} конечна (см. *Комм. алг.*, гл. VI, § 9,

---

[1]) Подробности относительно этого упражнения см. в статье: Tits J., Normalisateurs de tores. I, Groupes de Coxeter étendus, *J. of Algebra*, IV (1966), 96—116.

упражнение 3, для ультраметрического случая). Вывести отсюда, что факторгруппы $T_Q/\mathrm{Im}(T_P)$ и $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ конечны.

Когда $k = \mathbf{R}$, показать, что $T_Q/\mathrm{Im}\, T_P$ изоморфна дуальному пространству к векторному пространству $(Q \cap 2P)/2Q$ над полем $\mathbf{F}_2$. Когда $k = \mathbf{C}$, то $T_Q = \mathrm{Im}(T_P)$; это интегральная подгруппа в группе Ли $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, алгебра Ли которой равна $\mathfrak{h}$.

¶ 12) Пусть $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, A — подмножество в $\mathfrak{h}$ и $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ — такой автоморфизм, что $sA = A$. Доказать существование такого автоморфизма $t \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, что $t \mid A = s \mid A$ и $ts^{-1} \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. (Пусть $\mathfrak{a}$ — централизатор множества A в алгебре Ли $\mathfrak{g}$; это редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$, в которой $s\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}$ — расщепляющие подалгебры Картана. Вывести отсюда существование такого автоморфизма $u \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{a})$, что $us\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Показать, что существует автоморфизм $v \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, который продолжает автоморфизм u и $v \mid A = \mathrm{Id}_A$. Положить $t = vs$.) Вывести отсюда, что если $s \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$, то существует такой элемент $w \in W(R)$, что $w \mid A = s \mid A$.

¶ 13) Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, B, (X_\alpha)_{\alpha \in B})$ — размеченная полупростая алгебра Ли, R — система корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, Δ — соответствующий граф Дынкина и Φ — подгруппа группы

$$\mathrm{Aut}(R, B) = \mathrm{Aut}(\Delta).$$

Если $s \in \Phi$, то продолжим s до автоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{g}$ по формулам

$$s(X_\alpha) = X_{s\alpha} \quad \text{и} \quad s(H_\alpha) = H_{s\alpha} \text{ при всех } \alpha \in B, \text{ ср. предложение 1.}$$

Отождествим таким образом группу Φ с подгруппой группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{g}}$ (соотв. $\tilde{\mathfrak{h}}$) подалгебру Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (соотв. алгебры Ли $\mathfrak{h}$), образованную инвариантными относительно Φ элементами.

а) Пусть $\alpha \in B$, и пусть $X = \Phi \cdot \alpha$. Показать, воспользовавшись таблицами из гл. VI, что возможны только следующие два случая:

(i) все элементы из X, отличные от α, ортогональны ему;

(ii) существует и притом только один элемент из множества $X - \{\alpha\}$, который не ортогонален корню α и $n(\alpha, \alpha') = n(\alpha', \alpha) = -1$.

б) Пусть i — отображение ограничения $\mathfrak{h}^* \to \tilde{\mathfrak{h}}^*$ и пусть $\tilde{B} = i(B)$. Отображение $B \to \tilde{B}$ отождествляет $\tilde{B}$ и B/Φ. Показать, что $\tilde{\mathfrak{g}}$ — полупростая алгебра Ли, что $\tilde{\mathfrak{h}}$ — расщепляющая подалгебра Картана и что $\tilde{B}$ — базис системы корней $R(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{h}})$. (Заметим, что $\tilde{B}$ содержится в системе корней $R(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{h}})$ и что все элементы из $R(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{h}})$ являются линейными комбинациями с целыми коэффициентами одного знака элементов из $\tilde{B}$.) Если $\tilde{\alpha} \in \tilde{B}$, то соответствующий дуальный корень $H_{\tilde{\alpha}} \in \tilde{\mathfrak{h}}$ задается формулами

$$H_{\tilde{\alpha}} = \sum_{i(\alpha) = \tilde{\alpha}} H_\alpha \quad \text{в случае (i) из а)},$$

$$H_{\tilde{\alpha}} = 2 \sum_{i(\alpha) = \tilde{\alpha}} H_\alpha \quad \text{в случае (ii) из а)},$$

где суммирование проводится по таким элементам $\alpha \in B$, что $i(\alpha) = \tilde{\alpha}$. Если образом элемента $\beta \in B$ является $\tilde{\beta} \in \tilde{B}$, то

$$n(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}) = \sum_{i(\alpha) = \tilde{\alpha}} n(\beta, \alpha) \quad \text{в случае (i)},$$

$$n(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}) = 2 \sum_{i(\alpha) = \tilde{\alpha}} n(\beta, \alpha) \quad \text{в случае (ii)}.$$

Вывести отсюда определение графа Дынкина системы корней $R(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{h}})$, независимое от пары (Δ, Φ).

в) Показать, что если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, то алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ тоже проста. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа A_l, $l \geqslant 2$, и порядок группы Φ равен 2, то $\tilde{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли типа $B_{l/2}$, если l — четное число, и типа $C_{(l+1)/2}$ если l — нечетное число.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа D_l, $l \geqslant 4$, и порядок группы Φ равен 2, то $\tilde{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли типа B_{l-1}.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа D_4 и порядок группы Φ равен 3 или 6, то $\tilde{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли типа G_2.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа E_6 и порядок группы Φ равен 2, то $\tilde{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли типа F_4.

§ 6

1) Показать, что можно определить модуль $Z(\lambda)$ как факторпредставление представления ρ_λ из упражнения 1 из § 4.

2) Пусть μ — вес модуля $Z(\lambda)$ (соотв. модуля $E(\lambda)$). Показать, что существует такая последовательность весов $\mu_0, \ldots, \mu_n$ модуля $Z(\lambda)$ (соотв. модуля $E(\lambda)$), что $\mu_0 = \lambda$, $\mu_n = \mu$ и $\mu_{i-1} - \mu_i \in B$ при $1 \leqslant i \leqslant n$.

3) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, и обозначим через $\tilde{\alpha}$ наибольший корень системы R. Тогда модуль $E(\tilde{\alpha})$ изоморфен $\mathfrak{g}$ относительно присоединенного представления. Если C — элемент Казимира, ассоциированный с формой Киллинга на $\mathfrak{g}$, то образ элемента C в $\operatorname{End} E(\tilde{\alpha})$ равен тождественному эндоморфизму (см. гл. I, § 3, n° 7, предложение 12). Вывести отсюда, учитывая следствие предложения 7, что

$$\Phi_R(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} + 2\rho) = 1,$$

где Φ_R — каноническая билинейная форма на пространстве $\mathfrak{h}^*$ (гл. VI, § 1, n° 12).

4) Воспользуемся обозначениями из n° 4.

а) Пусть $m \in \mathbf{N}$. Рассмотрим на $\mathbf{N}^m$ упорядочение, заданное произведением упорядочений. Показать, что для каждого подмножества S из $\mathbf{N}^m$ множество минимальных элементов в S конечно.

б) Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — попарно различные элементы из системы R, $X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i} - \{0\}$, S — множество таких ненулевых последовательностей $(p_i) \in \mathbf{N}^m$, что $\sum p_i \alpha_i = 0$, и M — множество минимальных элементов из S. Тогда $\mathfrak{h}$ и элементы $X_1^{p_1} \ldots X_m^{p_m}$, где $(p_1, \ldots, p_m) \in M$, порождают алгебру U^0.

в) Показать, что алгебра U^0 нётерова слева и справа. (Снабдить U^0 фильтрацией, индуцированной фильтрацией алгебры $U(\mathfrak{g})$, и показать, воспользовавшись а) и б), что $\operatorname{gr} U^0$ — коммутативная алгебра конечного типа.)

г) Показать, что при любом $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ U^λ — левый (соотв правый) U^0-модуль конечного типа.

д) Пусть V — простой $\mathfrak{g}$-модуль, такой, что $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$. Если одно из пространств V_λ не равно 0 и имеет конечную размерность, то все пространства V_λ конечномерны (Воспользоваться г).)

5) Показать, что если $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$, то модули $Z(\lambda)$ этого параграфа изоморфны модулям $Z(\lambda)$ из § 1, упражнение 2.

§ 7

Все рассматриваемые в этом параграфе (кроме упражнений 14 и 15) $\mathfrak{g}$-модули предполагаются конечномерными.

1) Пусть $\omega \in P_{++}$; обозначим через $S(\omega)$ множество весов модуля $E(\omega)$, иначе говоря, наименьшее R-насыщенное подмножество множества P, содержащее ω (предложение 5). Если $\lambda \in S(\omega)$, то $\lambda \equiv \omega \pmod{Q}$ Обратно, пусть $\lambda \in P$ — такой вес, что $\lambda \equiv \omega \pmod{Q}$. Доказать эквивалентность следующих свойств:

(i) $\lambda \in S(\omega)$;

(ii) $\omega - w\lambda \in Q_+$ при всех $w \in W$;

(iii) вес λ принадлежит выпуклой оболочке множества $W.\omega$ в пространстве $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$.

(Для доказательства импликации (iii) $\Rightarrow$ (ii) нужно заметить, что вес $\omega - w\omega$ является линейной комбинацией с коэффициентами $\geqslant 0$ элементов из R_+; отсюда нужно вывести, что в силу выпуклости вес $\omega - w\lambda$ тоже является линейной комбинацией с коэффициентами $\geqslant 0$ элементов из R_+, а так как $\omega - w\lambda$ принадлежит Q, то $\omega - w\lambda \in Q_+$ Для доказательства импликации (ii) $\Rightarrow$ (i) нужно выбрать такой элемент w, что $w\lambda \in P_{++}$, и применить следствие 2 предложения 3. Импликация (i) $\Rightarrow$ (iii) получается непосредственно.)

2) Пусть $(R_i)_{i \in I}$ — множество неприводимых подсистем системы корней R и $\mathfrak{g} = \prod_{i \in I} \mathfrak{g}_i$ — соответствующее разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в произведение простых алгебр Ли. Отождествим группу весов P с произведением групп $P(R_i)$ и снабдим каждую группу $P(R_i)$ отношением порядка, определенным базисом $B_i = B \cap R_i$.

а) Пусть $\omega = (\omega_i)_{i \in I}$ — элемент множества $P_{++} = \prod_{i \in I} P_{++}(R_i)$. Показать, что простой $\mathfrak{g}$-модуль $E(\omega)$ изоморфен тензорному произведению простых $\mathfrak{g}_i$-модулей $E(\omega_i)$

б) Пусть $\mathscr{M}$ (соотв. $\mathscr{M}_i$) — множество элементов из множества P_{++} (соотв. множества $P_{++}(R_i)$), которые обладают эквивалентными свойствами (i), (ii), (iii) и (iv) из предложений 6 и 7. Показать, что $\mathscr{M} = \prod_{i \in I} \mathscr{M}_i$, иначе говоря, что $\omega \in \mathscr{M}$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I$ вес ω_i — или нуль, или микровес системы корней R_i. Вывести отсюда, что $\mathscr{M}$ — множество представителей в группе P элементов из группы P/Q.

в) Пусть E — простой $\mathfrak{g}$-модуль, а $\mathscr{X}$ — множество его весов. Показать, что множество $\mathscr{X}$ содержит единственный элемент из $\mathscr{M}$, причем его кратность равна максимуму кратностей элементов $\mathscr{X}$.

3) а) Пусть E есть $\mathfrak{g}$-модуль. Показать эквивалентность следующих условий:

(i) Ранг полупрямого произведения алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на E строго больше ранга алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

(ii) 0 — вес модуля E.

(iii) У модуля E имеется радикальный вес (т. е. вес, принадлежащий группе Q).

б) Предположим, что модуль E прост. Показать, что условия (i), (ii), (iii) эквивалентны такому условию:

(iv) Старший вес модуля E — радикальный вес.

Если эти условия выполнены, то на пространстве E не существует никакой знакопеременной инвариантной билинейной формы, отличной от нуля. (Воспользоваться предложением 12 и предложением 1 (ii) из § 6.)

4) Пусть k' — расширение поля k и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{(k')}$. Показать, что каждый $\mathfrak{g}'$-модуль получается расширением поля скаляров из некоторого $\mathfrak{g}$-модуля, определенного однозначно с точностью до изоморфизма

5) Пусть E есть $\mathfrak{g}$-модуль Показать эквивалентность следующих условий:

(i) Модуль E точен (т. е. каноническое отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(E)$ инъективно).

(ii) Каждый корень алгебры Ли $\mathfrak{g}$ представляется в виде разности двух весов модуля E.

¶ 6) Пусть φ — инволютивный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, ограничение которого на подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ равно $-\mathrm{Id}$. Показать, что если E есть $\mathfrak{g}$-модуль, то на E существует такая невырожденная симметрическая билинейная форма Ψ, что

$$\Psi(x \cdot a, b) + \Psi(a, \varphi(x) \cdot b) = 0, \text{ где } x \in \mathfrak{g},\ a,\ b \in E.$$

(Свести к случаю, когда модуль E прост Показать, что модуль, получающийся из E под действием автоморфизма φ, изоморфен модулю E^*, дуальному к модулю E, откуда следует существование невырожденной билинейной формы Ψ, удовлетворяющей приведенному выше условию. Показать затем, что если e — примитивный вектор пространства E, то $\Psi(e, e) \neq 0$. Вывести отсюда, что Ψ — симметрическая форма.)

7) Если $\lambda \in P_{++}$, то обозначим через $\rho_\lambda\colon U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(E(\lambda))$ представление, определенное простым $\mathfrak{g}$-модулем $E(\lambda)$. Имеет место равенство $\mathrm{Im}(\rho_\lambda) = \mathrm{End}(E(\lambda))$; положим $\mathfrak{m}_\lambda = \mathrm{Ker}(\rho_\lambda)$.

а) Показать, что идеалы $\mathfrak{m}_\lambda$ попарно различны и что это единственные двусторонние идеалы $\mathfrak{m}$ алгебры $U(\mathfrak{g})$, такие, что $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}$ — простая конечномерная k-алгебра.

б) Если I — конечное подмножество множества P_{++}, то положим $\mathfrak{m}_I = \bigcap_{\lambda \in I} \mathfrak{m}_\lambda$. Показать, что каноническое отображение $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}_I \to \prod_{\lambda \in I} U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}_\lambda$ — изоморфизм и что каждый двусторонний идеал алгебры $U(\mathfrak{g})$ конечной коразмерности имеет вид $\mathfrak{m}_I$ и этот вид определен однозначно.

в) Показать, что главный антиавтоморфизм алгебры $U(\mathfrak{g})$ переводит $\mathfrak{m}_\lambda$ в $\mathfrak{m}_{\lambda^*}$, где $\lambda^* = -w_0\lambda$ (см. предложение 11).

¶ 8) Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли (в виде исключения в этом упражнении мы не предполагаем, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ расщепляемая). Пусть $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k и

$$\pi\colon \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathrm{Aut}(\overline{R}, \overline{B})$$

— гомоморфизм, определенный в § 5, упражнение 8. С помощью гомоморфизма π мы определяем действие группы $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ на множестве $\overline{P}_{++}$ доминантных весов системы $\overline{R}$ относительно базиса $\overline{B}$; пусть Ω — система представителей элементов фактормножества $\overline{P}_{++}/\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

а) Положим $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{k} \otimes_k \mathfrak{g}$. Тогда если I — конечное подмножество множества $\overline{P}_{++}$, устойчивое относительно группы $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, то двусторонний идеал $\bar{\mathfrak{m}}_I$ алгебры $U(\bar{\mathfrak{g}})$, ассоциированный с множеством I (см. упражнение 7), имеет вид $\bar{k} \otimes_k \mathfrak{m}_I$, где $\mathfrak{m}_I$ — двусторонний идеал алгебры $U(\mathfrak{g})$. Показать, что мы получаем таким образом точно по одному разу все двусторонние идеалы алгебры $U(\mathfrak{g})$ конечной коразмерности.

б) Пусть $\omega \in \Omega$, $I(\omega)$ — орбита этого веса ω под действием группы $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ и G_ω — его стационарная подгруппа. Пусть k_ω — подрасширение расширения $\bar{k}$, соответствующее, согласно теории Галуа, группе G_ω. Показать, что $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}_{I(\omega)}$ — простая алгебра, центр которой изоморфен полю k_ω. Каждый такой двусторонний идеал $\mathfrak{m}$ алгебры $U(\mathfrak{g})$, что $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}$ — простая конечномерная алгебра, совпадает с одним и только одним из идеалов $\mathfrak{m}_{I(\omega)}$.

в) Благодаря гомоморфизму π группа $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ действует на кольце $R(\bar{\mathfrak{g}})$. Обозначим через $R(\bar{\mathfrak{g}})^{\mathrm{inv}}$ подкольцо кольца $R(\bar{\mathfrak{g}})$, образованное элементами, инвариантными относительно группы $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Показать, что отображение $[E] \longmapsto [\bar{k} \otimes_k E]$ продолжается до инъективного гомоморфизма кольца $R(\mathfrak{g})$ в кольцо $R(\bar{\mathfrak{g}})^{\mathrm{inv}}$, коядро которого — группа кручения; этот гомоморфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого веса $\omega \in \Omega$ алгебра $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}_{I(\omega)}$ изоморфна алгебре матриц над полем k_ω. Показать, что это так, когда в алгебре Ли имеется подалгебра Бореля [1]).

9) Пусть $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$ — алгебры Ли. Показать, что существует единственный гомоморфизм

$$f\colon R(\mathfrak{a}_1) \otimes_{\mathbf{Z}} R(\mathfrak{a}_2) \to R(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2),$$

такой, что $f([E_1] \otimes [E_2]) = [E_1 \otimes E_2]$, где E_i есть $\mathfrak{a}_i$-модуль ($i = 1, 2$). Показать, что гомоморфизм f инъективен и что он биективен, если $\mathfrak{a}_1$ или $\mathfrak{a}_2$ — расщепляемая полупростая алгебра Ли.

10) Пусть Γ — подгруппа группы P, содержащая группу Q. Такая подгруппа устойчива относительно группы Вейля W.

а) Показать, что если $\lambda \in P_{++} \cap \Gamma$, то все веса модуля $E(\lambda)$ принадлежат Γ.

б) Пусть $R_\Gamma(\mathfrak{g})$ — подгруппа группы $R(\mathfrak{g})$ с базисом, образованным $[\lambda]$, где $\lambda \in P_{++} \cap \Gamma$. Если E есть $\mathfrak{g}$-модуль, то $[E] \in R_\Gamma(\mathfrak{g})$ тогда и только тогда, когда все веса модуля E принадлежат Γ. Вывести отсюда, что $R_\Gamma(\mathfrak{g})$ — подкольцо кольца $R(\mathfrak{g})$.

в) Показать, что гомоморфизм $\mathrm{ch}\colon R_\Gamma(\mathfrak{g}) \to \mathbf{Z}[\Gamma]$ — изоморфизм кольца $R_\Gamma(\mathfrak{g})$ на подкольцо кольца $\mathbf{Z}[\Gamma]$, образованное W-инвариантными элементами. (Использовать теорему 2 (ii).)

г) Описать кольца $R(\mathfrak{g})$ и $R_\Gamma(\mathfrak{g})$ при $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$ и $\Gamma = Q$.

¶ 11) Сохраним обозначения n° 7. Для любого целого $m \geqslant 1$ обозначим через Ψ^m эндоморфизм кольца $\mathbf{Z}[\Delta]$, который переводит e^λ в $e^{m\lambda}$. Мы получаем, что $\Psi^1 = \mathrm{Id}$ и $\Psi^m \circ \Psi^n = \Psi^{mn}$.

Пусть E есть Δ-градуированное конечномерное векторное пространство. Для каждого $n \geqslant 0$ обозначим через $a_n E$ (соотв. $s_n E$) n-ю внешнюю (соотв. симметрическую) степень модуля E, снабженную естественной градуировкой.

а) Показать, что

$$n\,\mathrm{ch}(s_n E) = \sum_{m=1}^{n} \Psi^m(\mathrm{ch}(E))\,\mathrm{ch}(s_{n-m}E)$$

и

$$n\,\mathrm{ch}(a_n E) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1}\,\Psi^m(\mathrm{ch}(E))\,\mathrm{ch}(a_{n-m}E).$$

---

[1]) Подробности относительно этого упражнения см. в статье: Tits J., Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *J. de Crelle*, **CCXLVII** (1971), 196—220.

Вывести отсюда, что $\mathrm{ch}(s_n E)$ и $\mathrm{ch}(a_n E)$ выражаются в виде многочленов от $\Psi^m(\mathrm{ch}(E))$ с рациональными коэффициентами, $1 \leqslant m \leqslant n$. Например, выполняются равенства

$$\mathrm{ch}(s_2 E) = \frac{1}{2}\mathrm{ch}(E)^2 + \frac{1}{2}\Psi^2(\mathrm{ch}(E)),$$

$$\mathrm{ch}(a_2 E) = \frac{1}{2}\mathrm{ch}(E)^2 - \frac{1}{2}\Psi^2(\mathrm{ch}(E)).$$

б) Доказать следующие тождества (в алгебре формальных степенных рядов от одной переменной T с коэффициентами из $\mathbf{Q}[\Delta]$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{ch}(s_n E)\, T^n = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \Psi^m(\mathrm{ch}(E))\, T^m/m\right\}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{ch}(a_n E)\, T^n = \exp\left\{\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1}\Psi^m(\mathrm{ch}(E))\, T^m/m\right\}.$$

в) Предположим, что Δ — группа; это дает возможность определить Ψ^m для любых $m \in \mathbf{Z}$. Показать, что если E^* — дуальный градуированный модуль [1]) модуля E, то

$$\mathrm{ch}(E^*) = \Psi^{-1}(\mathrm{ch}(E)).$$

г) С помощью гомоморфизма ch отождествим $R(\mathfrak{g})$ с подкольцом кольца $\mathbf{Z}[P]$. Показать, что кольцо $R(\mathfrak{g})$ устойчиво относительно Ψ^m, $m \in \mathbf{Z}$, и что это же утверждение справедливо для подкольца $R_\Gamma(\mathfrak{g})$, определенного в предыдущем упражнении.

12) Пусть $\lambda \in P_{++}$, и пусть $\mathscr{X}_\lambda$ — множество весов модуля $E(\lambda)$. Показать, что в общем случае включение

$$\mathscr{X}_\lambda \subset \lambda - P_{++}$$

не выполняется. (Рассмотреть, например, присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3, k)$.)

13) Пусть $\lambda = \sum_{\alpha \in B} a_\alpha \alpha$ — элемент из P_{++}. Обозначим через $\mathscr{X}_n$ при $n = 0, 1, \ldots$ множество таких весов μ модуля $E(\lambda)$, что вес $\mu - \lambda$ равен сумме n элементов из B. Пусть s_n — сумма кратностей элементов из $\mathscr{X}_n$ (рассматриваемых как веса в модуле $E(\lambda)$). Пусть $T = 2\sum_{\alpha \in B} a_\alpha$. Показать, что

а) T — целое число $\geqslant 0$;

б) $s_n = 0$ при $n > T$ и $s_{T-n} = s_n$;

в) если r — целая часть $T/2$, то $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_{r+1}$.

¶ 14) Пусть $\lambda \in P_{++}$, F_λ — наибольший собственный подмодуль модуля $Z(\lambda)$ и v — примитивный элемент веса λ в модуле $Z(\lambda)$, см. § 6, n° 3. Показать, что

$$F_\lambda = \sum_{\alpha \in B} U(\mathfrak{g})\, X_{-\alpha}^{\lambda(H_\alpha)+1} v = \sum_{\alpha \in B} U(\mathfrak{n}_-)\, X_{-\alpha}^{\lambda(H_\alpha)+1} v.$$

---

[1]) $E_i^* = (E_{-i})^*$, $i \in \Delta$. — *Прим. перев.*

15) Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и v (соотв. v') — примитивный элемент веса λ в модуле $Z(\lambda)$ (соотв $E(\lambda)$). Пусть I (соотв. I') — аннулятор элемента v (соотв. v') в алгебре $U(\mathfrak{g})$.

а) $I = U(\mathfrak{g})\,\mathfrak{n}_+ + \sum\limits_{h \in \mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h - \lambda(h))$.

б) Идеал I' является максимальным левым идеалом алгебры $U(\mathfrak{g})$, отличным от $U(\mathfrak{g})$ и содержащим идеал I.

в) Если $\lambda \in P_{++}$, то

$$I' = I + \sum_{\alpha \in B} U(\mathfrak{g})\, X_{-\alpha}^{\lambda(H_\alpha)+1} = I + \sum_{\alpha \in B} U(\mathfrak{n}_-)\, X_{-\alpha}^{\lambda(H_\alpha)+1}.$$

(Воспользоваться предыдущим упражнением.)

¶ 16) Пусть V и V' — два $\mathfrak{g}$-модуля. Скажем, что модуль V' *подчинен* модулю V, если существует такое линейное отображение $f\colon V \to V'$, что

α) отображение f сюръективно; β) образом примитивного элемента модуля V при отображении f является либо 0, либо примитивный элемент модуля V'; γ) отображение f есть $\mathfrak{n}_-$-гомоморфизм.

а) Пусть отображение f удовлетворяет условиям α), β), γ). Пусть v — примитивный элемент модуля V. Тогда образ при отображении f $\mathfrak{g}$-подмодуля, порожденного элементом v, равен $\mathfrak{g}$-подмодулю, порожденному элементом $f(v)$.

б) Пусть отображение $f\colon V \to V'$ удовлетворяет условиям α), β), γ). Пусть W есть $\mathfrak{g}$-подмодуль модуля V. Тогда $f(W)$ есть $\mathfrak{g}$-подмодуль модуля V', подчиненный модулю W.

в) Пусть $V = E_1 \oplus \ldots \oplus E_s$ и $V' = E'_1 \oplus \ldots \oplus E'_{s'}$ — разложения модулей V и V' в сумму простых модулей. Для того чтобы модуль V' был подчинен модулю V, необходимо и достаточно, чтобы было $s' \leqslant s$ и существовал такой элемент $\sigma \in \mathfrak{S}_s$, что модуль E'_i подчинен модулю $E_{\sigma(i)}$ при $i = 1, \ldots, s'$.

г) Если модуль V' подчинен модулю V и если модуль V прост, то модуль V' прост или равен 0.

д) Предположим, что модули V и V' просты. Пусть λ и λ' — их старшие веса. Чтобы модуль V' был подчинен модулю V, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda'(H_\alpha) \leqslant \lambda(H_\alpha)$ при всех $\alpha \in B$. (Для доказательства достаточности воспользоваться предыдущим упражнением.)

17) Пусть $\lambda, \mu \in P_{++}$ и $\alpha \in B$ таковы, что $\lambda(H_\alpha) \geqslant 1$ и $\mu(H_\alpha) \geqslant 1$. Пусть $F = E(\lambda) \otimes E(\mu)$.

а) Показать, что $\dim F^{\lambda+\mu} = 1$ и что $\dim F^{\lambda+\mu-\alpha} = 2$.

б) Показать, что отображение $X_\alpha\colon F^{\lambda+\mu-\alpha} \to F^{\lambda+\mu}$ сюръективно и что ненулевые элементы из ядра этого отображения — примитивные элементы (заметить, что если $\beta \in B$ — отличный от α корень, то $\lambda + \mu - \alpha + \beta$ не является весом модуля F).

в) Вывести отсюда, что модуль $E(\lambda) \otimes E(\mu)$ содержит, и притом только один, подмодуль, изоморфный модулю

$$E(\lambda + \mu - \alpha).$$

г) Показать, что $\mathbf{S}^2(E(\lambda))$ (соотв. $\bigwedge^2 E(\lambda)$) содержит, и притом только один, подмодуль, изоморфный модулю $E(2\lambda)$ (соотв. $E(2\lambda - \alpha)$).

¶ 18) Выберем на пространстве $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{R}}$ невырожденную положительно определенную W-инвариантную симметрическую билинейную форму $(\cdot|\cdot)$ Пусть $\lambda \in P_{++}$.

а) Пусть μ — вес модуля $E(\lambda)$. Представим вес $\lambda - \mu$ в виде $\sum\limits_{\alpha \in B} k_\alpha \alpha$.

Пусть $\alpha \in B$ — такой корень, что $k_\alpha \neq 0$. Показать, что существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in B$, что $(\lambda \mid \alpha_1) \neq 0$, $(\alpha_1 \mid \alpha_2) \neq 0, \ldots, (\alpha_{n-1} \mid \alpha_n) \neq 0$, $(\alpha_n \mid \alpha) \neq 0$.

б) Пусть v — примитивный элемент модуля $E(\lambda)$, и пусть корни $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_n \in B$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) $(\alpha_i \mid \alpha_{i+1}) \neq 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

(ii) $(\alpha_i \mid \alpha_j) = 0$ при $j > i+1$;

(iii) $\lambda(\mathrm{H}_{\alpha_1}) \neq 0$ и $\lambda(\mathrm{H}_{\alpha_2}) = \ldots = \lambda(\mathrm{H}_{\alpha_n}) = 0$.

Показать, что $\mathrm{X}_{-\alpha_n}\mathrm{X}_{-\alpha_{n-1}} \ldots \mathrm{X}_{-\alpha_1} v \neq 0$. (Заметить, что при $1 \leqslant s \leqslant n$

$$\lambda - \alpha_1 - \ldots - \alpha_{s-1} + \alpha_n$$

не является весом модуля $E(\lambda)$, и вывести отсюда индукцией по s, что $\mathrm{X}_{\alpha_s}\mathrm{X}_{-\alpha_s}\mathrm{X}_{-\alpha_{s-1}} \ldots \mathrm{X}_{-\alpha_1} v \neq 0$.) Если $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ и $\sigma \neq 1$, то $\mathrm{X}_{-\alpha_{\sigma(n)}}\mathrm{X}_{-\alpha_{\sigma(n-1)}} \ldots$ $\ldots \mathrm{X}_{-\alpha_{\sigma(1)}} v = 0$. (Пусть r — наименьшее целое число такое, что $\sigma(r) \neq r$. Воспользоваться утверждением а), чтобы доказать, что $\lambda - \alpha_{\sigma(1)} - \ldots - \alpha_{\sigma(r)}$ не является весом модуля $E(\lambda)$.)

в) Пусть $\lambda' \in P_{++}$. *Цепью*, соединяющей веса λ и λ', называется такая последовательность $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ элементов из B, что $n \geqslant 1$, $(\lambda \mid \alpha_1) \neq 0$, $(\alpha_1 \mid \alpha_2) \neq 0, \ldots, (\alpha_{n-1} \mid \alpha_n) \neq 0$, $(\alpha_n \mid \lambda') \neq 0$. Такая цепь называется ***минимальной***, если никакая строго содержащаяся в $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ подпоследовательность не соединяет веса λ и λ'. Тогда $(\alpha_i \mid \alpha_j) = 0$, если $|j - i| \geqslant 2$ $(\lambda \mid \alpha_i) = 0$, если $i \geqslant 2$, и $(\lambda' \mid \alpha_i) = 0$ если $i \leqslant n-1$.

г) Пусть $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ — минимальная цепь, соединяющая веса λ и λ'. Если v' — примитивный вектор из модуля $E(\lambda')$, то положим

$$v_s = \mathrm{X}_{-\alpha_s}\mathrm{X}_{-\alpha_{s-1}} \ldots \mathrm{X}_{-\alpha_1} v \qquad (s = 0\ 1\ \ldots, n),$$

$$v'_s = \mathrm{X}_{-\alpha_{s+1}}\mathrm{X}_{-\alpha_{s+2}} \ldots \mathrm{X}_{-\alpha_n} v' \quad (s = 0, 1, \ldots, n).$$

$a_0 = (\lambda \mid \alpha_1)$ $a_n = (-1)^n (\lambda' \mid \alpha_n)$, $a_s = (-1)^{s+1} (\alpha_s \mid \alpha_{s+1})$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Показать, что

$$\sum_{s=0}^{n} a_s v_s \otimes v'_s$$

— примитивный элемент веса $\lambda + \lambda' - \alpha_1 - \ldots - \alpha_n$ модуля $E(\lambda) \otimes E(\lambda')$ и что это единственный с точностью до гомотетии примитивный элемент такого веса.

(Воспользоваться утверждениями б) и в), чтобы показать, что любой элемент модуля $E(\lambda) \otimes E(\lambda')$ имеющий вес

$$\lambda + \lambda' - \alpha_1 - \ldots - \alpha_n,$$

является линейной комбинацией элементов $v_s \otimes v'_s$. Показать затем, что такая линейная комбинация — примитивный вектор.)

Вывести отсюда, что модуль $E(\lambda) \otimes E(\lambda')$ содержит, и притом только один, $\mathfrak{g}$-подмодуль, изоморфный модулю

$$E(\lambda + \lambda' - \alpha_1 - \ldots - \alpha_n).$$

(При $n = 1$ мы приходим к упражнению 17.)

д) Пусть w — примитивный элемент модуля $E(\lambda) \otimes E(\lambda')$. Предположим, что вес ν элемента w отличен от $\lambda + \lambda'$. Показать, что тогда существует такая цепь $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, соединяющая веса λ и λ', что

$$\nu \leqslant \lambda + \lambda' - \alpha_1 - \ldots - \alpha_n.$$

(Пусть C — множество таких корней $\alpha \in B$, что координата веса $\lambda + \lambda' - \nu$, отвечающая α, отлична от 0. Пусть D (соотв. D') — множество тех корней $\alpha \in C$, для которых существуют такие корни $\gamma_1, \ldots, \gamma_t \in C$, что $(\lambda \mid \gamma_1) \neq 0$ (соотв. $(\lambda' \mid \gamma_1) \neq 0$), $(\gamma_1 \mid \gamma_2) \neq 0, \ldots, (\gamma_{t-1} \mid \gamma_t) \neq 0$, $(\gamma_t \mid \alpha) \neq 0$. Пусть Y (соотв. Y') — множество весов модуля $E(\lambda)$ (соотв. модуля $E(\lambda')$) вида $\lambda - \sum_{\alpha \in C} k_\alpha \alpha$ $\left(\text{соотв. вида } \lambda' - \sum_{\alpha \in C} k_\alpha \alpha\right)$, где $k_\alpha \in \mathbf{N}$. Показать, что элемент w принадлежит модулю $\left(\sum_{\mu \in Y} E(\lambda)^{\mu}\right) \otimes \left(\sum_{\mu' \in Y'} E(\lambda')^{\mu'}\right)$. Воспользоваться утверждением а) и тем, что $\nu \neq \lambda + \lambda'$, и показать, что $D \cap D' \neq \varnothing$.)

e) Показать эквивалентность следующих свойств:

(i) Модуль $E(\lambda) \otimes E(\lambda')$ изоморфен модулю $E(\lambda + \lambda')$.

(ii) $E(\lambda) \otimes E(\lambda')$ — простой модуль.

(iii) Не существует цепи, соединяющей веса λ и λ'.

(iv) Система корней R — прямая сумма таких систем R_1 и R_1', что $\lambda \in P(R_1)$ и $\lambda' \in P(R_1')$.

(v) Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ — произведение двух идеалов $\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{s}'$, таких, что $\mathfrak{s}' . E(\lambda) = 0$ и $\mathfrak{s} . E(\lambda') = 0$.

(Воспользоваться утверждением г) для доказательства эквивалентности условий (ii) и (iii) [1].)

19) Воспользуемся обозначениями предложения 10. Пусть $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k. Если $x \in \mathfrak{g}$, то через $\mathscr{X}_E(k)$ (соотв. $\mathscr{X}_F(x)$, соотв. $\mathscr{X}_G(x)$) обозначим множество собственных значений эндоморфизма x_E (соотв. x_F, соотв. x_G) в $\bar{k}$. Показать, что $\mathscr{X}_G(x) = \mathscr{X}_E(x) + \mathscr{X}_F(x)$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ и что при заданных E и F это свойство определяет простой $\mathfrak{g}$-модуль G с точностью до изоморфизма.

20) Предположим, что $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Пусть Γ — односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть λ, μ, E, F, G такие же, как в предложении 10. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ (соотв. $(f_1, \ldots, f_p)$) — базис E (соотв. F), образованный векторами, собственными относительно $\mathfrak{h}$, причем $e_1 \in E^{\lambda}$ и $f_1 \in F^{\mu}$. Можно рассматривать E, F, G как Γ-модули. Если $\gamma \in \Gamma$, то обозначим через $a_i(\gamma)$ i-ю координату вектора $\gamma . e_1$, а через $b_j(\gamma)$ — j-ю координату вектора $\gamma . f_1$. Показать, что функция $a_i b_j$ на группе Γ не равна тождественно нулю. Вывести отсюда что для любой пары (i, j) найдется такой элемент в модуле $G \subset E \otimes F$, координата которого с номером (i, j) не равна 0, откуда при $k = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ следует новое доказательство предложения 10. Перейти отсюда к случаю $k = \mathbf{Q}$, затем к произвольному полю, см. упражнение 4.

21) Пусть $\lambda, \mu \in P_{++}$, E, F, G — простые $\mathfrak{g}$-модули со старшими весами λ, μ, $\lambda + \mu$ и n — целое число $\geqslant 1$. Тогда, если ω — вес модуля E кратности n, то $\omega + \mu$ — вес модуля G кратности $\geqslant n$. (Мы имеем $G^{\omega+\mu} \subset \bigoplus_{\nu+\sigma=\omega+\mu} E^{\nu} \otimes F^{\sigma}$. Если $\dim G^{\omega+\mu} < n$, то проекция пространства $G^{\omega+\mu}$ на пространство $E^{\omega} \otimes F^{\mu}$ имеет вид $E' \otimes F^{\mu}$, а E' строго содержится в E^{ω}. Вывести отсюда противоречие, выбрав подходящие базисы в модулях E и F и повторяя схему доказательства предложения 10.)

22) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, иначе говоря, предположим, что система R неприводима. Показать, что существует, и притом только

[1] Подробности см. в статье: Дынкин Е. Б., Максимальные подгруппы классических групп, Труды ММО, т. 1 (1952), стр. 39 — 166.

один, ненулевой доминантный вес $\lambda \neq 0$, такой, что множество весов модуля $E(\lambda)$ равно $W \cdot \lambda \cup \{0\}$; тогда $\lambda = \alpha$, где $\alpha \in R$ — такой корень, что H_α — наибольший корень системы $R^\vee$. Если все корни имеют одинаковую длину (случаи A_l, D_l, E_6, E_7, E_8), то $\lambda = \tilde{\alpha}$. Это единственный корень, являющийся доминантным весом; соответствующее представление — это присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В других случаях λ — единственный корень минимальной длины, являющийся доминантным весом; в обозначениях из гл. VI (*таблицы*) мы имеем $\lambda = \bar{\omega}_1$ (тип B_l), $\lambda = \bar{\omega}_2$ (тип C_l), $\lambda = \bar{\omega}_4$ (тип F_4), $\lambda = \bar{\omega}_1$ (тип G_2).

23) Пусть U^0 — централизатор подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ в алгебре $U(\mathfrak{g})$ (см. § 6, n° 4).

а) Пусть V — (конечномерный) $\mathfrak{g}$-модуль. Показать, что пространства V^λ, $\lambda \in P$, устойчивы относительно U^0 и что если модуль V прост, $V^\lambda \neq 0$, то V^λ — простой U^0-модуль (воспользоваться разложением $U(\mathfrak{g}) = \bigoplus U^\lambda$, *там же*).

б) Показать, что для любого элемента $c \neq 0$ из U^0 существует такое простое конечномерное представление ρ алгебры U^0, что $\rho(c) \neq 0$. (Воспользоваться утверждением а), а также упражнением 3 а) из гл. I, § 7.)

24) Пусть U — ассоциативная алгебра с единицей, и пусть M — множество ее двусторонних идеалов конечной коразмерности.

а) Пусть U^* — векторное пространство, двойственное к пространству U. Пусть $\theta \in U^*$. Показать эквивалентность следующих условий:

(i) существует такой идеал $\mathfrak{m} \in M$, что $\theta(\mathfrak{m}) = 0$;

(ii) существуют два таких конечных семейства (θ'_i) и (θ''_i) элементов из U^*, что

$$\theta(xy) = \sum_i \theta'_i(x)\,\theta''_i(y) \text{ при любых } x,\ y \in U.$$

Элементы θ с этим свойством образуют подпространство U' пространства U^*, которое совпадает с пространством, обозначенным в *Алг.*, гл. III, § 11, упражнение 27, через B'. На U' существует единственная структура коалгебры, в которой копроизведение c: $U' \to U' \otimes U'$ задается формулой

$$c(\theta) = \sum_i \theta'_i \otimes \theta''_i,$$

где θ'_i, $\theta''_i \in U'$ — такие элементы, что $\theta(xy) = \sum_i \theta'_i(x)\,\theta''_i(y)$ при любых x, $y \in U$ (см. (ii)).

Коалгебра U' — объединение фильтрующегося возрастающего семейства конечномерных подпространств $(U/\mathfrak{m})^*$, $\mathfrak{m} \in M$. Дуальное к ней пространство отождествляется с алгеброй $\hat{U} = \varprojlim U/\mathfrak{m}$. Если снабдить алгебру $\hat{U}$ топологией проективного предела дискретно топологизированных пространств $U/\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \in M$, то линейные формы, непрерывные на $\hat{U}$, совпадают с элементами из U'.

б) Пусть E — конечномерный левый U-модуль. Его аннулятор $\mathfrak{m}_E$ принадлежит множеству M; композиция $\hat{U} \to U/\mathfrak{m}_E \to \mathrm{End}(E)$ снабжает модуль E структурой левого $\hat{U}$-модуля. Если F — конечномерный левый U-модуль, то линейное отображение f: $E \to F$ является U-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда это $\hat{U}$-гомоморфизм. Если $a \in E$, $b \in E^*$, то линейная форма $\theta_{a,b}$: $x \mapsto \langle xa, b\rangle$ принадлежит U' и

$$\langle x, \theta_{a,b}\rangle = \langle xa, b\rangle \text{ при всех } x \in \hat{U}.$$

Линейные формы $\theta_{a,b}$ (при различных E, a, b) порождают векторное пространство U' над k.

в) Пусть X_U — множество классов изоморфных конечномерных левых U-модулей. Для любого $E \in X_U$ пусть u_E есть k-линейный эндоморфизм модуля E. Предположим, что

$$f \circ u_E = u_F \circ f \quad \text{для любого} \quad f \in \operatorname{Hom}_U(E, F) \quad \text{и} \quad E, F \in X_U.$$

Показать, что существует, и притом только один, такой элемент $x \in \hat{U}$, что $x_E = u_E$ для любого $E \in X_U$. (Свести к случаю, когда U — конечномерная алгебра.)

¶ 25) Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли и U — ее обертывающая алгебра. Применим определения и результаты упражнений 24 к алгебре U. В частности, мы получаем, что $U' \subset U^*$ и дуальное к U' пространство отождествлится с алгеброй $\hat{U} = \varprojlim U/\mathfrak{m}$; каноническое отображение $U \to \hat{U}$ инъективно (гл. I, § 7, упражнение 3).

а) Структура коалгебры на U (гл. II, § 1, n° 4) определяет некоторую структуру алгебры на дуальном пространстве U^* (см. гл. II, § 1, n° 5, предложение 10, а также *Alg.*, chap. III, § 2, n° 10). Доказать, что если E, F — конечномерные $\mathfrak{a}$-модули, то

$$\theta_{a,b} \cdot \theta_{c,d} = \theta_{a \otimes c,\, b \otimes d} \quad \text{при} \quad a \in E,\ b \in E^*,\ c \in F,\ d \in F^*.$$

Вывести отсюда, что U' — подалгебра алгебры U^*. Налнчие структур алгебры и коалгебры иа U' делает U коммутативной *биалгеброй* (*Alg.*, chap. III, § 11, n° 4).

б) Пусть x — элемент из $\hat{U}$; отождествим x с линейной формой $U' \to k$. Показать эквивалентность следующих условий:

(i) x — гомоморфизм алгебры U' в поле k.

(ii) $x_{E \otimes F} = x_E \otimes x_F$ для любых коиечномерных $\mathfrak{a}$-модулей E и F.

(Показать сначала, что условие (ii) эквивалентно условию

(ii′) $x(\theta_{a \otimes c,\, b \otimes d}) = x(\theta_{a,b})\, x(\theta_{c,d})$, где $a \in E$, $b \in E^*$, $c \in F$, $d \in F^*$,

и использовать то, что $\theta_{a,b}$ порождают U'.)

в) Пусть x — элемент алгебры $\hat{U}$, удовлетворяющий условиям (i) и (ii) утверждении. б). Показать эквивалентность следующих условий:

(iii) x переводит 1 алгебры U' в единицу поля k.

(iv) $x \neq 0$.

(v) Если снабдить поле k структурой тривиального $\mathfrak{a}$-модуля, то $x_k = \mathrm{Id}$.

(vi) Для любого $\mathfrak{a}$-модуля E эндоморфизм x_E обратим.

(Эквивалентность (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) следует нз того, что x — гомоморфизм алгебр. Одиако $x_k = \lambda\,\mathrm{Id}$, где $\lambda \in k$. Воспользовавшись $\mathfrak{a}$-изоморфизмом $k \otimes E \to E$, мы получаем, что $\lambda x_E = x_E$ для любого модуля E, и, в частности, полагая $E = k$, получаем, что $\lambda^2 = \lambda$. Случай $\lambda = 1$ соответствует $x \neq 0$, откуда следуют эквивалентность (iv) $\Leftrightarrow$ (v) и импликация (vi) $\Rightarrow$ (v). Для доказательства импликации (v) $\Rightarrow$ (vi) надо показать, что если F — дуальный к E модуль, то ${}^t x_F \circ x_E = \lambda\,\mathrm{Id}_E$.)

г) Пусть G — множество элементов из $\hat{U}$, удовлетворяющих приведенным выше условиям (i) — (vi). Показать, что G — подгруппа в группе обратимых элементов из $\hat{U}$.

Пусть $x \in G$. Если E — конечномерный $\mathfrak{a}$-модуль, то $x_E \in \mathbf{GL}(E)$. Применим это к случаю, когда $E = \mathfrak{a}$ относительно присоединенного представления. Следовательно, $x_{\mathfrak{a}} \in \mathbf{GL}(\mathfrak{a})$. Показать, что $x_{\mathfrak{a}}$ — автоморфизм алгебры

Ли $\mathfrak{a}$ (воспользоваться $\mathfrak{a}$-гомоморфизмом $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$, заданным коммутированием). Таким образом, мы получаем гомоморфизм групп v: $G\to\operatorname{Aut}(\mathfrak{a})$. Если E — конечномерный $\mathfrak{a}$-модуль, то

$$x_E(y\,.\,e)=v(x)(y)\,.\,x_E(e),\quad \text{где}\quad y\in\mathfrak{a},\ e\in E.$$

(Воспользоваться $\mathfrak{a}$-гомоморфизмом $\mathfrak{a}\otimes E\to E$, заданным действием $\mathfrak{a}$ на E.)

д) Главный антиавтоморфизм σ алгебры U продолжается по непрерывности до антиавтоморфизма $\widehat{U}$. Сопряженный эндоморфизм сохраняет U' и индуцирует на U' некоторую инверсию (*Alg.*, chap. III, § 11, exercice 4). Если $x\in G$, то $\sigma(x)=x^{-1}$.

е) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{a}$ полупроста [1]. Пусть n — нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Тогда существует, и притом только один, такой элемент e^n из группы G, что $(e^n)_E=\exp(n_E)$ для любого конечномерного $\mathfrak{a}$-модуля E. Мы получаем, что $v(e^n)=\exp(\operatorname{ad} n)\in\operatorname{Aut}(\mathfrak{a})$; следовательно, $\operatorname{Aut}_e(\mathfrak{a})\subset v(G)$.

Показать, что если $\mathfrak{b}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{a}$, образованная нильпотентными элементами, то

$$e^n\,.\,e^m=e^{H(n,\,m)},$$

где $n,\ m\in\mathfrak{b}$ и где через H обозначен ряд Хаусдорфа (гл. II, § 6).

¶ 26) Применим обозначения и результаты упражнения 25 к случаю $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}$ (расщепленный случай).

а) Пусть $x\in G$ и $\sigma=v(x)$ — его образ в группе $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$. Если ρ — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то представления ρ и $\rho\circ\sigma$ эквивалентны. Вывести отсюда (см. n° 2, *замечание* 1), что σ принадлежит $\operatorname{Aut}_0(\mathfrak{g})$. Распространить этот результат на произвольные полупростые алгебры.

б) Пусть $\varphi\in T_P=\operatorname{Hom}(P,k^*)$, где $P=P(R)$. Если E есть $\mathfrak{g}$-модуль, то пусть φ_E — эндоморфизм модуля E, ограничение которого на каждое подпространство E^λ $(\lambda\in P)$ является гомотетией с коэффициентом $\varphi(\lambda)$. Показать, что существует единственный такой элемент $t(\varphi)\in G$, что $t(\varphi)_E=\varphi_E$ для любого модуля E. (Воспользоваться упражнением 24 в) и характеризациями (ii) и (vi) из упражнения 25.) Таким образом, мы получаем гомоморфизм t: $T_P\to G$. Показать, что гомоморфизм t инъективен. Воспользуемся этим гомоморфизмом для отождествления T_P с подгруппой группы G. Композиция $T_P\to G\to\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ является гомоморфизмом, который в § 5, n° 2, обозначен через $f\circ q$.

в) Пусть $x\in G$ — такой элемент, что $\sigma=v(x)$ принадлежит подгруппе $f(T_Q)$ группы $\operatorname{Aut}_0(\mathfrak{g})$ (§ 5, n° 2); иначе говоря, этот элемент тривиально действует на $\mathfrak{h}$. Обозначим через ψ элемент из $T_Q=\operatorname{Hom}(Q,k^*)$, соответствующий элементу x. Доказать, что x принадлежит T_P. Последовательно доказать следующие утверждения:

в$_1$) Если E есть $\mathfrak{g}$-модуль, то x_E — это $\mathfrak{h}$-эндоморфизм модуля E.

(Воспользоваться $\mathfrak{g}$-гомоморфизмом $\mathfrak{g}\otimes E\to E$ и тем, что x тривиально действует на $\mathfrak{h}$.) В частности, пространства E^μ устойчивы относительно эндоморфизма x_E.

---

[1]) *В этом случае можно показать, что U' — биалгебра алгебраической односвязной полупростой группы A, алгебра Ли которой равна $\mathfrak{a}$, и что G — группа k-точек группы A.*

в$_2$) Существует такой элемент $\varphi \in T_P$, что для любого $\mathfrak{g}$-модуля E и любого примитивного элемента e из E веса λ имеет место равенство $x_E e = \varphi(\lambda) e$.

(Выбрать φ так, чтобы это равенство выполнялось, когда E — пространство, отвечающее фундаментальному представлению $E(\bar{\omega}_\alpha)$. Вывести отсюда доказательство для случая модулей $E(\lambda)$, $\lambda \in P_{++}$, воспользовавшись тем, что такой модуль вкладывается в тензорное произведение модулей типа $E(\bar{\omega}_\alpha)$. Перейти отсюда к общему случаю.)

в$_3$) Выберем φ таким же, как в в$_2$). Пусть E — простой $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ, и пусть μ — вес модуля E; тогда $\lambda - \mu \in Q$. Показать, что ограничение эндоморфизма x_E на пространство E^μ — гомотетия с коэффициентом $\varphi(\lambda)\psi(\mu - \lambda)$. (Доказательство проводится так же, как и в случае в$_1$)).

в$_4$) Если λ, $\mu \in P_{++}$ и если корень $\alpha \in B$ не ортогонален ни к λ, ни к μ, то

$$\varphi(\lambda + \mu - \alpha) = \varphi(\lambda + \mu)\psi(-\alpha),$$

откуда следует, что $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$. (Воспользоваться утверждениями в$_2$), в$_3$) и тем, что модуль $E(\lambda + \mu - \alpha)$ вкладывается в модуль $E(\lambda) \otimes E(\mu)$, см. упражнение 17.)

в$_5$) Вывести из утверждения в$_4$), что $\varphi \mid Q = \psi$, и воспользоваться утверждением в$_3$) для доказательства того, что $x = t(\varphi)$.

г) С помощью гомоморфизма f отождествим группу T_Q с подгруппой группы $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$. Вследствие утверждения а) мы получаем, что

$$\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \subset v(G) \subset \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$$

и ввиду в) имеет место равенство $v(G) \cap T_Q = \mathrm{Im}(T_P)$. Вывести отсюда, что $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \cap T_Q = \mathrm{Im}(T_P)$ и что $f(G) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ (см. § 5, n°3). Следовательно, каноническое отображение

$$\iota\colon T_Q/\mathrm{Im}(T_P) \to \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$$

— изоморфизм.

д) Ядро гомоморфизма $v\colon G \to \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ равно ядру гомоморфизма $T_P \to T_Q$; оно изоморфно

$$\mathrm{Hom}(P/Q, k^*).$$

Это конечная абелева группа содержащаяся в центре группы G, и ее порядок делит $(P : Q)$. Если поле k алгебраически замкнуто, то она совпадает с пространством, дуальным к P/Q (*Алг.*, гл. VII § 4, n°8).

е) Пусть $\alpha \in R$, $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ и $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ — такие элементы, что $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$, и пусть ρ_α — соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, k)$ в пространстве $\mathfrak{g}$. Если E есть $\mathfrak{g}$-модуль, то мы получаем (§ 1, n°4) представление группы Ли $\mathbf{SL}(2, k)$ в пространстве E и, следовательно (упражнение 25 б), в)), гомоморфизм

$$\varphi_\alpha\colon \mathbf{SL}(2, k) \to G.$$

Показать, что $\mathrm{Im}(\varphi_\alpha)$ содержит элементы из T_P вида $\lambda \mapsto t^{\lambda(H_\alpha)}$, $t \in k^*$. Вывести отсюда, что элементы $\mathrm{Im}(\varphi_\alpha)$, $\alpha \in B$ порождают группу G (показать сначала, что группа, которую они порождают, содержит T_P). В частности, группа G порождается элементами вида e^n, где $n \in \mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in B \cup -B$. Производная группа группы G совпадает с группой G.

ж) Если G' — такая подгруппа группы G, что $v(G') = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, то $G' = G$ (воспользоваться утверждением е)).

з) Пусть E — точный $\mathfrak{g}$-модуль, и пусть Γ — подгруппа группы P, порожденная весами модуля E. Тогда $P \supset \Gamma \supset Q$, см. упражнение 5. Показать, что ядро канонического гомоморфизма $G \to \mathbf{GL}(E)$ совпадает с подгруппой группы T_P, образованной элементами φ, ограничение которых на подгруппу Γ тривиально. Если, в частности, $\Gamma = P$, то гомоморфизм $G \to \mathbf{GL}(E)$ инъективен. Если $\Gamma = Q$, то этот гомоморфизм разлагается в композицию $G \xrightarrow{v} \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \to \mathbf{GL}(E)$ и гомоморфизм $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \to \mathbf{GL}(E)$ инъективен.

27) Пусть $\Omega = P/Q$. Если $\omega \in \Omega$ и если E есть $\mathfrak{g}$-модуль, то обозначим через E_ω прямую сумму пространств E^λ, где $\lambda \in \omega$. Тогда $E = \bigoplus_{\omega \in \Omega} E_\omega$.

а) Показать, что E_ω есть $\mathfrak{g}$-подмодуль модуля E. Выполняются равенства $(E^*)_\omega = (E_{-\omega})^*$ и

$$(E \otimes F)_\omega = \bigoplus_{\alpha+\beta=\omega} E_\alpha \otimes F_\beta,$$

где F — другой $\mathfrak{g}$-модуль.

б) Пусть $\chi \in \mathrm{Hom}(\Omega, k^*) = \mathrm{Ker}(T_P \to T_Q)$. Отождествим χ с элементом ядра $f\colon G \to \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, см. упражнение 26 д). Показать, что действие χ на модуле E_ω является гомотетией с коэффициентом $\chi(\omega)$.

в) Описать модули E_ω, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$.

§ 8

1) Пусть f — инвариантная полиномиальная функция на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Показать, что функция f инвариантна относительно группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ тогда и только тогда, когда $f\,|\,\mathfrak{h}$ инвариантна относительно группы $\mathrm{Aut}(R)$. Вывести отсюда, что если граф Дынкина системы корней R имеет нетривиальный автоморфизм, то существует инвариантная полиномиальная функция на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, которая не инвариантна относительно группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

2) Положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, k)$. Показать, что $x \mapsto \det(x)$ — инвариантная полиномиальная функция на $\mathfrak{g}$, которая не инвариантна относительно группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (воспользоваться автоморфизмом $x \mapsto -{}^t x$).

3) Пусть $\mathfrak{a}$ — полупростая алгебра Ли и $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$. Показать, что следующие утверждения эквивалентны:

(i) $s \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{a})$.

(ii) Автоморфизм s действует тривиально на центре универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{a})$.

(iii) Для любого $x \in \mathfrak{a}$ существует такой $t \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{a})$, что $tx = sx$.

(Воспользоваться предложением 6, чтобы показать, что (iii) $\Rightarrow$ (i).)

4) Показать, что в следствии 2 предложения 2 и в теореме 1 (ii) можно ограничиться представлениями ρ, веса которых — радикальные веса (заметить, что предложение 1 остается справедливым, если кольцо $k[P]^W$ заменить кольцом $k[Q]^W$, где Q — группа радикальных весов).

5) Воспользуемся обозначениями из § 6, 7. Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Если $(\lambda + \rho) - w(\lambda + \rho) \notin Q_+$ для любого $w \in W$, $w \neq 1$, то модуль $Z(\lambda)$ прост. (Воспользоваться следствием 1 (ii) из теоремы 2).

6) Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли, f — полиномиальная функция на $\mathfrak{a}$, а x, y — элементы из алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Положим $f_y = \theta^*(y) f$ (см. п° 3) и обозначим через $D_x f$ линейное отображение, касательное к отображению f в точке x (гл. VII, дополнение I, п° 2). Показать, что $f_y(x) = (D_x f)([x, y])$. Вывести отсюда, что когда f — инвариантная функция, то отображение $D_x f$ обращается на пространстве $\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}(x)$ в нуль.

7) *Пусть $d_1, \ldots, d_l$ — характеристические степени алгебры $I(\mathfrak{g})$, см. гл. V, § 5, n° 1. Для любого целого числа $n \geqslant 0$ обозначим через r_n число элементов степени n некоторого однородного базиса модуля $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ над $I(\mathfrak{g})$ (см. n° 3, *замечание* 2) и положим $r(T) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n T^n$. Показать, что

$$r(T) = (1-T)^{-N} \prod_{i=1}^{i=l} \left(1 - T^{d_i}\right) \quad \text{где} \quad N = \dim \mathfrak{g}._*$$

8) Положим $l = \mathrm{rg}(\mathfrak{g})$, $N = \dim(\mathfrak{g})$. Если $x \in \mathfrak{g}$, то определим $a_i(x)$, $0 \leqslant i \leqslant N$, по формуле

$$\det(T + \operatorname{ad} x) = \sum_{i=0}^{N} T^{N-i} a_i(x).$$

Таким образом определенная функция a_i является однородной полиномиальной функцией степени i и инвариантна относительно группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Если $x \in \mathfrak{h}$ и $i \leqslant N - l$, то $a_i(x)$ есть i-я элементарная симметрическая функция от $\alpha(x)$, $x \in R$. В частности, $a_{N-l}(x) = \prod\limits_{\alpha \in R} \alpha(x)$. Построить пример, когда функции a_i не порождают алгебру полиномиальных функций на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, инвариантных относительно группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

9) Обозначения те же, что и в n° 5. Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $z \in Z$, z' — образ элемента z под действием главного антиавтоморфизма алгебры $U(\mathfrak{g})$ и $w_0 \in W$ — элемент, который переводит B в $-B$. Показать, что $\chi_\lambda(z) = \chi_{-w_0(\lambda)}(z')$.

(Достаточно доказать утверждение при $\lambda \in P_{++}$. Затем надо рассмотреть действие элемента z на модулях $E(\lambda)$ и $E(\lambda)^*$ и воспользоваться предложением 11 из § 7.)

10) (В этом упражнении, как и в трех последующих, мы воспользуемся обозначениями из § 6.) Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

а) Пусть N, N' — такие $\mathfrak{g}$-подмодули модуля $Z(\lambda)$, что $N' \subset N$ и что фактормодуль N/N' прост. Показать, что существует такой вес $\mu \in \lambda - Q_+$, что фактормодуль N/N' изоморфен модулю $E(\mu)$ (применить теорему 1 из § 6) и что $\mu + \rho \in W \cdot (\lambda + \rho)$ (применить следствие 1 из теоремы 2).

б) Показать, что модуль $Z(\lambda)$ разлагается в ряд Жордана — Гёльдера. (Применить утверждение а) и использовать тот факт, что веса модуля $Z(\lambda)$ имеют конечную кратность.)

11) Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и V — ненулевой $\mathfrak{g}$-подмодуль модуля $Z(\lambda)$. Показать, что существует такой элемент $\mu \in \mathfrak{h}^*$, что модуль V содержит простой $\mathfrak{g}$-подмодуль, изоморфный $Z(\mu)$.

(Пусть A — множество таких элементов $\nu \in \mathfrak{h}^*$, что модуль V содержит $\mathfrak{g}$-подмодуль, изоморфный $Z(\nu)$. Воспользовавшись предложением 6 из § 6, надо показать сначала, что $A \neq \varnothing$. Затем показать, что множество A конечно, и рассмотреть такой элемент μ множества A, что $(\mu - Q_+) \cap A = \{\mu\}$.)

¶ 12) а) Пусть $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Любой ненулевой $\mathfrak{g}$-гомоморфизм модуля $Z(\mu)$ в модуль $Z(\lambda)$ инъективен. (Воспользоваться предложением 6 из § 6.)

б) Пусть $r \in \mathbf{N}$, A — конечное подмножество в $\mathbf{N}^r$, $m = \mathrm{Card}(A)$. Для любого $\xi \in \mathbf{N}^r$ пусть $s(\xi)$ — сумма координат вектора ξ и $\mathfrak{P}_A(\xi)$ — число таких наборов $(n_\alpha)_{\alpha \in A}$ неотрицательных целых чисел, что $\xi = \sum\limits_{\alpha \in A} n_\alpha \alpha$. Тогда $\mathfrak{P}_A(\xi) \leqslant (s(\xi) + 1)^m$ для всех $\xi \in \mathbf{N}^r$. (Доказать индукцией по m.)

в) Пусть λ, $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Показать, что $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(Z(\mu), Z(\lambda)) \leqslant 1$. (Пусть φ_1 и φ_2 — отличные от нуля $\mathfrak{g}$-гомоморфизмы из модуля $Z(\mu)$ в модуль $Z(\lambda)$. Если $\mathrm{Im}(\varphi_1) = \mathrm{Im}(\varphi_2)$, то ввиду предложения 1 (iii) из § 6 гомоморфизмы φ_1 и φ_2 линейно зависимы. Предположим, что $\mathrm{Im}(\varphi_1) \neq \mathrm{Im}(\varphi_2)$. Если модуль $Z(\mu)$ прост, то сумма $\mathrm{Im}(\varphi_1) + \mathrm{Im}(\varphi_2)$ прямая. Вывести отсюда, что $\mathfrak{P}(\xi + \lambda - \mu) \geqslant 2\mathfrak{P}(\xi)$ для любых $\xi \in \mathfrak{h}^*$, откуда следует противоречие с утверждением б). В общем случае воспользоваться упражнением 11.)

Когда $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(Z(\mu), Z(\lambda)) = 1$, мы, допуская вольность в обозначениях, пишем $Z(\mu) \subset Z(\lambda)$.

г) Пусть $\nu \in \mathfrak{h}^*$. Множество таких $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, что $Z(\lambda - \nu) \subset Z(\lambda)$, замкнуто в пространстве $\mathfrak{h}^*$ в топологии Зарисского.

¶ 13) а) Пусть $\mathfrak{a}$ — нильпотентная алгебра Ли, $x \in \mathfrak{a}$, $n \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}$. Тогда существует такое число $l \in \mathbf{N}$, что $x^l y_1 \ldots y_n \in U(\mathfrak{a}) x^p$ для любых $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{a}$.

б) Пусть λ, $\mu \in \mathfrak{h}^*$ и $\alpha \in B$ — такие элементы, что

$$Z(s_\alpha\mu - \rho) \subset Z(\mu - \rho) \subset Z(\lambda - \rho).$$

Предположим, что $\lambda \in P$. Пусть $p = \lambda(H_\alpha) \in \mathbf{Z}$. Показать, что

б$_1$) если $p \leqslant 0$, то $Z(\lambda - \rho) \subset Z(s_\alpha\lambda - \rho)$;

б$_2$) если $p > 0$, то $Z(s_\alpha\mu - \rho) \subset Z(s_\alpha\lambda - \rho) \subset Z(\lambda - \rho)$.

(Воспользоваться утверждением а) и следствием 1 предложения 6 § 6.)

в) Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \in R_+$ и $m = \lambda(H_\alpha)$. Предположим, что $m \in \mathbf{N}$. Показать, что

$$Z(s_\alpha\lambda - \rho) \subset Z(\lambda - \rho).$$

(Доказать сначала это утверждение для $\lambda \in P$, пользуясь утверждением б); затем доказать общий случай с использованием упражнения 12 г). [1])

14) *Пусть $\mathfrak{a}$ — полупростая алгебра Ли, $Z(\mathfrak{a})$ — центр алгебры $U(\mathfrak{a})$. Показать, что $U(\mathfrak{a})$ — свободный $Z(\mathfrak{a})$-модуль. (Заметить, что алгебра $\mathrm{gr}\, U(\mathfrak{a})$ изоморфна алгебрам $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ и $\mathrm{S}(\mathfrak{a}^*)$ и воспользоваться замечанием 2 из n° 3.)$_*$

¶ 15) Пусть x — приводящийся к диагональному виду элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (§ 3, упражнение 10), а y — такой полупростой элемент этой алгебры Ли, что $f(x) = f(y)$ для любой инвариантной полиномиальной функции f на $\mathfrak{g}$. Показать, что существует такой автоморфизм $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, что $sy = x$. (Заметить, что у эндоморфизмов $\mathrm{ad}\, x$ и $\mathrm{ad}\, y$ одинаковые характеристические многочлены, см. упражнение 8, откуда следует, что элемент y приводится к диагональному виду. Благодаря упражнению 10 из § 3 мы можем перейти к случаю, когда элементы x и y содержатся в подалгебре Картана $\mathfrak{h}$, и воспользоваться теоремой 1 (i) и леммой 6 для доказательства того, что элементы x и y сопряжены относительно группы Вейля W.)

16) Пусть $\mathfrak{a}$ — полупростая алгебра Ли, x — элемент из $\mathfrak{a}$ и x_s — полупростая составляющая элемента x. Показать, что если f — инвариантная полиномиальная функция на алгебре Ли $\mathfrak{a}$, то $f(x) = f(x_s)$. (Свести к случаю, когда функция f имеет вид $x \longmapsto \mathrm{Tr}\, \rho(x)^n$.)

---

[1]) Подробности относительно упражнений 10—13 см. в статье: Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И., Структура представлений, порожденных вектором старшего веса, *Функц. анализ.*, 5, вып. 1 (1971), стр. 1—9.

В этой работе доказано также, что если λ, $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$ — такие веса, что $Z(\lambda - \rho) \subset Z(\lambda' - \rho)$, то существуют такие $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in R_+$, что $\lambda = s_{\gamma_n} \ldots s_{\gamma_2} s_{\gamma_1} \lambda'$ и $\left(s_{\gamma_i} \ldots s_{\gamma_1} \lambda'\right)\left(H_{\gamma_{i+1}}\right) \in \mathbf{N}$ при $0 \leqslant i \leqslant n$. Отсюда получается, что модуль $Z(\lambda - \rho)$ прост тогда и только тогда, когда $\lambda(H_\alpha) \in \mathbf{N}^*$ при всех $\alpha \in R_+$.

17) Предположим, что поле k алгебраически замкнуто, и положим $G = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Пусть $x, y \in \mathfrak{g}$. Доказать эквивалентность следующих условий:

(i) Полупростые компоненты элементов x и y G-сопряжены.

(ii) Для каждой инвариантной полиномиальной функции f на $\mathfrak{g}$ имеет место равенство $f(x) = f(y)$.

(Воспользоваться упражнениями 15 и 16.)

18) Пусть $\mathfrak{a}$ — полупростая алгебра Ли, $l = \mathrm{rg}(\mathfrak{a})$, I — алгебра инвариантных полиномиальных функций на $\mathfrak{a}$ и $P_1, \ldots, P_l$ — однородные элементы из I, которые порождают алгебру I. Функции P_i определяют полиномиальное отображение $P: \mathfrak{a} \to k^l$. Если $x \in \mathfrak{a}$, то обозначим через $D_xP: \mathfrak{a} \to k^l$ линейное отображение, касательное к отображению P в точке x (гл. VII дополнение I, n° 2).

а) Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и $x \in \mathfrak{h}$. Доказать эквивалентность следующих условий:

(i) отображение $D_xP \mid \mathfrak{h}$ — изоморфизм пространства $\mathfrak{h}$ на k^l;

(ii) элемент x регулярен.

(Свести к расщепленному случаю. Выбрать базис в пространстве $\mathfrak{h}$ и обозначить через $d(x)$ детерминант матрицы, соответствующей в этом базисе отображению $D_xP \mid \mathfrak{h}$. Показать с помощью предложения 5 из гл. V, § 5, n° 4, что существует такой элемент $c \in k^*$, для которого $d(x)^2 = c \prod\limits_{\alpha \in R} \alpha(x)$, где α пробегает множество корней R расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{a}, \mathfrak{h})$.)

Если эти условия выполнены, то $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \oplus \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}(x)$ и $\mathrm{Ker}\, D_xP = \mathrm{Im}\,\mathrm{ad}(x)$ (воспользоваться упражнением 6, чтобы показать, что на пространстве $\mathrm{Im}\,\mathrm{ad}(x)$ отображение D_xP обращается в нуль).

б) Показать, что множество элементов $x \in \mathfrak{a}$, таких, что ранг отображения D_xP равен l, открыто и всюду плотно в $\mathfrak{a}$ в топологии Зарисского.

§ 9

Все рассматриваемые $\mathfrak{g}$-модули предполагаются конечномерными.

1) Если m—целое число $\geqslant 0$, то $\dim E(m\rho) = (m+1)^N$, где $N = \mathrm{Card}(R_+)$.

2) Показать, что существует, и притом только одна, такая полиномиальная функция d на пространстве $\mathfrak{h}^*$, что $d(\lambda) = \dim E(\lambda)$ для любого $\lambda \in P_{++}$. Степень этой функции равна $\mathrm{Card}(R_+)$. Имеет место равенство

$$d(w\lambda - \rho) = \varepsilon(w)\, d(\lambda - \rho), \quad \text{где} \quad w \in W,\ \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

В частности, функция $\lambda \longmapsto d(\lambda - \rho)^2$ инвариантна относительно W. Вывести отсюда, что существует единственный элемент u, принадлежащий центру алгебры $U(\mathfrak{g})$, для которого $\chi_\lambda(u) = d(\lambda)^2$ при всех $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ (применить теорему 2 из § 8, n° 5). Когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$, то $u = C + 1$, где C — элемент, определенный в упражнении 1 из § 1

3) Пусть $k_1, \ldots, k_l$ — характеристические степени алгебры инвариантов группы W (гл. V, § 5).

а) Показать, что при всех $j \geqslant 1$ число таких i, что $k_i > j$, равно числу таких $\alpha \in R_+$, что $\langle \rho, H_\alpha \rangle = j$ (Свести к случаю, когда система корней R неприводима, и воспользоваться упражнением 6 в) из гл VI, § 4.) (См. § 5, упражнение 5 ж).)

б) Вывести из предыдущего формулу

$$\prod_{\alpha \in R_+} \langle \rho, H_\alpha \rangle = \prod_{i=1}^{i=l} (k_i - 1)!$$

¶ 4) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, и обозначим через γ такой элемент из R_+, что H_γ — наибольший корень системы корней $R^\vee$. Представим H_γ в виде $H_\gamma = \sum_{\alpha \in B} n_\alpha H_\alpha$. Тогда $\langle \rho, H_\gamma \rangle = \sum n_\alpha = h - 1$, где h — число Кокстера системы корней R (гл. VI, § 1, n° 11, предложение 31).

а) Пусть $\alpha \in B$. Показать, что для любого $\beta \in R_+$

$$\langle \bar{\omega}_\alpha + \rho, H_\beta \rangle \leqslant h + n_\alpha - 1,$$

где равенство достигается при $\beta = \gamma$. Вывести отсюда, что каждый простой множитель числа $\dim E(\bar{\omega}_\alpha)$ не превосходит $h + n_\alpha - 1$.

б) Предположим, что $\bar{\omega}_\alpha$ — не микровес, т. е. $n_\alpha \geqslant 2$. Пусть $m \in (2, n_\alpha)$ и $p = h + m - 1$. Проверить (см. гл. VI, *таблицы*), что существует такой корень $\beta \in R_+$, для которого $\langle \bar{\omega}_\alpha, H_\beta \rangle = n_\alpha$ и $\langle \rho, H_\beta \rangle = h - 1 - (n_\alpha - m)$; следовательно, $\langle \bar{\omega}_\alpha + \rho, H_\beta \rangle = p$. Вывести отсюда, что если p — простое число, то оно делит $\dim E(\bar{\omega}_\alpha)$. (Заметить, что p не делит никакое из чисел $\langle \rho, H_\beta \rangle$, где $\beta \in R_+$, см. упражнение 3.)

в) Когда $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа G_2 (соотв F_4, E_8), то $h = 6$ (соотв. 12, 30) и $\dim E(\bar{\omega}_\alpha)$ делится на 7 (соотв. на 13, 31). Когда $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа E_6 (соотв. E_7) и $\bar{\omega}_\alpha$ не является микровесом, то $\dim E(\bar{\omega}_\alpha)$ делится на 13 (соотв. на 19).

¶ 5) а) Пусть $\alpha \in R$, $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, $y \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, и пусть E есть $\mathfrak{g}$-модуль. Показать, что для любого $\lambda \in P$

$$\operatorname{Tr}\left((xy)_E \mid E^\lambda\right) = \operatorname{Tr}\left((xy)_E \mid E^{\lambda+\alpha}\right) + \lambda([x, y]) \dim E^\lambda.$$

Вывести отсюда, что

$$\sum_{\lambda \in P} \lambda([x, y]) \dim\left(E^\lambda\right) . e^\lambda = \left(1 - e^{-\alpha}\right) \sum_{\lambda \in P} \operatorname{Tr}\left((xy)_E \mid E^\lambda\right) . e^\lambda.$$

б) Снабдим пространство $\mathfrak{h}^*$ невырожденной симметрической билинейной формой $\langle . , . \rangle$, инвариантной относительно W. Пусть Δ — такой эндоморфизм векторного пространства $k[P]$, что $\Delta\left(e^\mu\right) = \langle \mu, \mu \rangle e^\mu$ при всех $\mu \in P$ Если $a, b \in k[P]$, то положим

$$\Delta'(a, b) = \Delta(ab) - a\Delta(b) - b\Delta(a).$$

Доказать, что

$$\begin{aligned} &\Delta\left(J\left(e^\mu\right)\right) = \langle \mu, \mu \rangle J\left(e^\mu\right), && \text{где } \mu \in P, \\ &\Delta'\left(e^\lambda, e^\mu\right) = 2\langle \lambda, \mu \rangle e^{\lambda+\mu}, && \text{где } \lambda, \mu \in P, \\ &\Delta'(ab, c) = a\Delta'(b, c) + b\Delta'(a, c), && \text{где } a, b, c \in k[P]. \end{aligned}$$

в) Пусть $\lambda \in P_{++}$, $c_\lambda = \operatorname{ch}(E(\lambda))$ и $d = J\left(e^\rho\right)$. Доказать, что

$$\Delta\left(c_\lambda d\right) = \langle \lambda + \rho, \lambda + \rho \rangle c_\lambda d.$$

(Воспользоваться утверждениями а), б), следствием предложения 7 из § 6 и формулой (3) из гл. VI, § 3, n° 3.)

г) Вывести из предыдущего и из предложения 5 (iii) § 7, n° 2, другое доказательство формулы Г. Вейля.

д) Для любого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ положим $\dim E^\lambda = m(\lambda)$. Вывести из утверждения а), что

$$\mathrm{Tr}\left((xy)_E \mid E^\lambda\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} (\lambda + i\alpha)([x, y])\, m(\lambda + i\alpha),$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} (\lambda + i\alpha)([x, y])\, m(\lambda + i\alpha) = 0.$$

е) Пусть $\langle . , . \rangle$ — невырожденная инвариантная симметрическая билинейная форма на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, ограничение которой на подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ равно обратной форме к форме, выбранной выше. Пусть Γ — соответствующий элемент Казимира. Предположим, что модуль E прост. Положим $\Gamma_E = \gamma \cdot 1$, где $\gamma \in k$. Пользуясь утверждением д) и предложением 6 из § 2, n°3, показать, что для любого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ имеет место равенство

$$\gamma m(\lambda) = \langle \lambda, \lambda \rangle m(\lambda) + \sum_{\alpha \in R} \sum_{i=0}^{+\infty} \langle \lambda + i\alpha, \alpha \rangle m(\lambda + i\alpha),$$

а также что

$$\gamma m(\lambda) = \langle \lambda, \lambda \rangle m(\lambda) + \sum_{\alpha \in R_+} m(\lambda) \langle \lambda, \alpha \rangle + 2 \sum_{\alpha \in R_+} \sum_{i=1}^{+\infty} m(\lambda + i\alpha) \langle \lambda + i\alpha, \alpha \rangle =$$

$$= \langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle m(\lambda) + 2 \sum_{\alpha \in R_+} \sum_{i=1}^{+\infty} m(\lambda + i\alpha) \langle \lambda + i\alpha, \alpha \rangle.$$

ж) Предположим, что модуль E прост, и пусть ω — его старший вес. Вывести из утверждения е), что для любого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$

$$(\langle \omega + \rho, \omega + \rho \rangle - \langle \lambda + \rho, \lambda + \rho \rangle)\, m(\lambda) = 2 \sum_{\alpha \in R_+} \sum_{i=1}^{+\infty} m(\lambda + i\alpha) \langle \lambda + i\alpha, \alpha \rangle.$$

(Напомним, что ввиду предложения 5 из § 7 $\langle \omega + \rho, \omega + \rho \rangle > \langle \lambda + \rho, \lambda + \rho \rangle$, если λ — отличный от ω вес модуля E. Предыдущая формула дает, таким образом, способ последовательного вычисления размерности $m(\lambda)$ [1].)

6) Пусть $x \longmapsto x^*$ — инволюция в алгебре $k[P]$, которая переводит e^p в e^{-p} для любого $p \in P$.

а) Положим $D = d^* d = \prod_{\alpha \in R} (1 - e^\alpha)$. Показать, что $d^* = (-1)^N d$, где $N = \mathrm{Card}(R_+)$, и, следовательно, $D = (-1)^N d^2$.

б) Определим две линейные формы ε и I на $k[P]$ по формулам

$$\varepsilon(1) = 1, \quad \varepsilon(e^p) = 0, \quad \text{где} \quad p \in P - \{0\},$$

и

$$I(f) = \frac{1}{m} \varepsilon(D \cdot f), \quad \text{где} \quad m = \mathrm{Card}(W).$$

Показать, используя формулу $d = J(e^\rho)$, что $I(1) = 1$.

---

[1] Подробности относительно этого упражнения см. в статье: Freudenthal H., Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, Proc. Kon. Akad. Wet. Amsterdam, LVII (1954), 369—376.

в) Пусть $\lambda \in P_{++}$ и $c_\lambda = \operatorname{ch} E(\lambda) = J(e^{\lambda+\rho})/d$. Показать, что $I(c_\lambda) = 0$, если $\lambda \neq 0$. (Доказательство проводится так же, как и доказательство утверждения б).)

г) Показать, что форма I принимает целые значения на подалгебре $\mathbf{Z}[P]^W = \operatorname{ch} R(\mathfrak{g})$ алгебры $k[P]$. Если E есть $\mathfrak{g}$-модуль, то размерность подпространства инвариантных относительно $\mathfrak{g}$ элементов в E равна $I(\operatorname{ch} E)$ (Свести к случаю, когда E прост, и использовать б) и в).)

д) Доказать, что $\dim E = \sum\limits_{\lambda \in P_{++}} I\left(c_\lambda^* \operatorname{ch} E\right) d(\lambda)$, где $d(\lambda) = \dim E(\lambda)$.

В частности,

$$I\left(c_\lambda^* c_\mu\right) = \delta_{\lambda\mu}, \quad \text{если} \quad \lambda, \mu \in P_{++}.$$

е) Если $\lambda, \mu, \nu \in P_{++}$, то целое число $m(\lambda, \mu, \nu)$ из предложения 2 равно $I\left(c_\lambda c_\mu c_\nu^*\right)$. Вывести отсюда тождество

$$d(\lambda)\, d(\mu) = \sum_{\nu \in P_{++}} m(\lambda, \mu, \nu)\, d(\nu), \quad \lambda, \mu, \nu \in P_{++}$$

(Применить утверждение д) к $\mathfrak{g}$-модулю $E = E(\lambda) \otimes E(\mu)$.)

¶ 7) Воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 2.

а) Показать, что

$$f_\rho(J(e^\mu)) = \prod_{\alpha \in R_+} \left(e^{(\mu\,|\,\alpha)\,T/2} - e^{-(\mu\,|\,\alpha)\,T/2}\right).$$

б) Выберем в качестве $(\,.\,|\,.\,)$ каноническую билинейную форму Φ_R (гл. VI, § 1, n° 12). Показать, что

$$f_\rho(J(e^\mu)) \equiv d_\mu T^N \left(1 + \frac{T^2}{48}(\mu\,|\,\mu)\right) \pmod{T^{N+3}\mathbf{R}[[T]]},$$

где $d_\mu = \prod\limits_{\alpha \in R_+} (\mu\,|\,\alpha)$

в) Вывести из утверждения б) и из равенства $J(e^{\lambda+\rho}) = \operatorname{ch}(E) \,.\, J(e^\rho)$ формулу

$$\sum_{\mu \in P} (\mu\,|\,\rho)^2 \dim E^\mu = \frac{\dim E}{24} (\lambda\,|\,\lambda + 2\rho).$$

г) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста. Показать, что $(\rho\,|\,\rho) = \dim \mathfrak{g}/24$. (Применить утверждение в), взяв в качестве λ наибольший корень системы R, и воспользоваться упражнением 3 из § 6.)

¶ 8) Пусть ψ — полиномиальная функция на пространстве $\mathfrak{h}^*$ степени r. Показать, что существует единственная полиномиальная функция Ψ на пространстве $\mathfrak{h}^*$, инвариантная относительно W и степени $\leqslant r$, для которой

$$\sum_{\mu \in P} \psi(\mu) \dim E^\mu = \Psi(\lambda + \rho) \dim E$$

при любом простом $\mathfrak{g}$-модуле E со старшим весом λ.

(Исследовать сначала случай $\psi(\mu) = (\mu\,|\,\nu)^r$, где вес $\nu \in P$ не ортогонален никакому корню; для этого воспользоваться гомоморфизмом f_ν из доказательства теоремы 2, а также предложением 5 (i) из гл. V, § 5, n° 4.)

9) Воспользуемся обозначениями из гл. VI, *таблица* I, для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ типа A_2. Пусть n, p — целые числа $\geqslant 0$.

а) $\mathfrak{P}(n\alpha_1 + p\alpha_2) = 1 + \inf(n, p)$.

б) Пусть $\lambda = n\bar{\omega}_1 + p\bar{\omega}_2$ Тогда $\dim E(\lambda) = \frac{1}{2}(n+1)(p+1)(n+p+2)$. Кратность веса 0 в модуле $E(\lambda)$ равна 0, если λ — не радикальный вес, т. е. если $n \not\equiv p \pmod 3$, а если λ—радикальный вес, то кратность равна $1 + \inf(n, p)$.

10) Воспользуемся обозначениями из гл. VI, *таблица* II, для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ типа B_2. Пусть n, p — целые числа $\geqslant 0$.

а) Имеют место равенства

$$\mathfrak{P}(n\alpha_1 + p(\alpha_1 + 2\alpha_2)) = 1 + \frac{1}{2}p(p+3),$$

$$\mathfrak{P}(n\alpha_2 + p(\alpha_1 + \alpha_2)) = [p^2/4] + p + 1,$$

$$\mathfrak{P}(n(\alpha_1 + \alpha_2) + p(\alpha_1 + 2\alpha_2)) = [n^2/4] + n + 1 + np + \frac{1}{2}p(p+3).$$

б) Пусть $\lambda = n(\alpha_1 + \alpha_2) + p(\alpha_1 + 2\alpha_2)$. Кратность веса 0 в модуле $E(\lambda)$ равна

$$[n/2] + 1 + np + p.$$

11) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не является произведением алгебр ранга 1. Пусть $n \in \mathbf{N}$. Показать, что существует простой $\mathfrak{g}$-модуль, у которого есть вес кратности $\geqslant n$. (Предположить, что утверждение неверно. Пусть E_λ — простой модуль, отвечающий старшему весу $\lambda \in P_{++}$. Сравнить $\dim E_\lambda$ и число различных весов модуля E_λ, когда $(\lambda \mid \lambda) \to \infty$ (обозначения из теоремы 2).)

12) Пусть U^0 — централизатор подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ в алгебре $U(\mathfrak{g})$. Если ранг алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равен 1, то U^0 — коммутативная алгебра. Если ранг алгебры Ли $\mathfrak{g}$ не меньше 2, то у алгебры U^0 существуют неприводимые представления сколь угодно большой конечной размерности. (Воспользоваться упражнением 11, а также упражнением 23 а) из § 7.)

13) Пусть R — система корней в векторном пространстве V. Два элемента v_1 и v_2 из пространства V называются *разъединенными*, если система R — прямая сумма двух таких систем корней R_1 и R_2 (гл. VI, § 1, n° 2), что векторы v_i принадлежат векторным подпространствам пространства V, порожденным системами R_i, $i = 1, 2$. Показать, что два элемента пространства $V_{\mathbf{R}}$, принадлежащие одной камере системы R, будут разъединенными тогда и только тогда, когда они ортогональны.

¶ 14) а) Пусть μ, $\nu \in P_{++}$ и γ — вес модуля $E(\mu)$. Пусть ρ_μ — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $E(\mu)$. Пусть $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha - \{0\}$, $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha} - \{0\}$ Если $\alpha \in B$, то положим $\nu_\alpha = \nu(H_\alpha)$ и

$$E^+(\mu, \gamma, \nu) = E(\mu)^\nu \cap \bigcap_{\alpha \in B} \operatorname{Ker} \rho_\mu (X_\alpha)^{\nu_\alpha + 1},$$

$$E^-(\mu, \gamma, \nu) = E(\mu)^\nu \cap \bigcap_{\alpha \in B} \operatorname{Ker} \rho_\mu (Y_\alpha)^{\nu_\alpha + 1},$$

$$d^+(\mu, \gamma, \nu) = \dim E^+(\mu, \gamma, \nu),$$

$$d^-(\mu, \gamma, \nu) = \dim E^-(\mu, \gamma, \nu).$$

Для любого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ положим $\lambda^* = -w_0\lambda$, где w_0 — элемент из группы W, который переводит B в $-B$ Показать, что

$$d^+(\mu, \gamma, \nu) = d^-(\mu, -\gamma^*, \nu^*).$$

б) Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in P_{++}$, V есть $\mathfrak{g}$-модуль $\mathrm{Hom}_k\left(E\left(\lambda_1^*\right), E(\lambda_2)\right)$, U — множество таких $\varphi \in V$, что $Y_\alpha \cdot \varphi = 0$ при любых $\alpha \in B$, и w — примитивный вектор из модуля $E\left(\lambda_1^*\right)$. Показать, что отображение $\varphi \longmapsto \varphi(w)$ — изоморфизм множества U на множество таких векторов $v \in E(\lambda_2)$, что $Y_\alpha^{\lambda_1^*(H_\alpha)+1} \cdot v = 0$ при всех $\alpha \in B$. (Для доказательства сюръективности нужно воспользоваться упражнением 15 из § 7.)

в) В обозначениях из предложения 2 доказать, что если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in P_{++}$, то

$$m(\lambda_1, \lambda_2, \lambda) = d^+\left(\lambda, \lambda_2 - \lambda_1^*, \lambda_1^*\right) = d^-\left(\lambda, \lambda_1 - \lambda^*, \lambda_1\right) =$$
$$= d^+(\lambda_1, \lambda - \lambda_2, \lambda_2) = d^-\left(\lambda_1, \lambda_2^* - \lambda^*, \lambda_2^*\right).$$

(Заметить, что число $m(\lambda_1, \lambda_2, \lambda)$ равно размерности пространства $\mathfrak{g}$-инвариантных элементов в пространстве

$$E(\lambda)^* \otimes E(\lambda_1) \otimes E(\lambda_2),$$

и, следовательно, совпадает с $m\left(\lambda_1^*, \lambda, \lambda_2\right)$.)

г) Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in P_{++}$, и пусть λ — единственный элемент множества $P_{++} \cap W \cdot \left(\lambda_1 - \lambda_2^*\right)$. Тогда

$$m(\lambda_1, \lambda_2, \lambda) = 1.$$

(Воспользоваться утверждением в).) Вывести отсюда, что модуль $E(\lambda_1) \otimes E(\lambda_2)$ содержит, и притом только один, подмодуль, изоморфный модулю $E(\lambda)$.

д) Сохраним обозначения утверждения г). Показать эквивалентность следующих условий:

(i) $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$,

(ii) $\|\lambda\| = \|\lambda_1 + \lambda_2\|$,

(iii) веса λ_1 и λ_2^* ортогональны,

(iv) веса λ_1 и λ_2^* разъединенные (упражнение 13),

(v) веса λ_1 и λ_2 разъединенные.

Вывести отсюда, что модуль $E(\lambda_1) \otimes E(\lambda_2)$ прост, только если веса λ_1 и λ_2 разъединенные (откуда следует другое доказательство упражнения 18 е) из § 7).

15) Положим $N = \mathrm{Card}(R_+)$, $c = \prod_{\alpha \in R_+} \langle \rho, H_\alpha \rangle$ и $d(\lambda) = \dim E_\lambda$, если $\lambda \in P_{++}$. Показать, что для любого вещественного числа $s > 0$

$$\sum_{\lambda \in P_{++}} d(\lambda)^{-s} \leqslant \frac{1}{c}\left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}\right)^N.$$

Вывести отсюда, что $\sum_{\lambda \in P_{++}} d(\lambda)^{-s} < +\infty$, если $s > 1$.

¶ 16) а) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа F_4. Воспользуемся обозначениями из гл. VI, *таблица* VIII. Если $i = 1, 2, 3, 4$, то положим

$$\mathscr{X}_i = P_{++} \cap (\bar{\omega}_i - Q_+).$$

Множество весов модуля $E(\bar{\omega}_i)$ — несвязное объединение элементов $W\omega$, где ω пробегает множество $\mathscr{X}_i$ (см. § 7, предложение 5 (iv)). Тогда

$$\mathscr{X}_1 = \{0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_4\};$$
$$\mathscr{X}_2 = \{0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4, \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_4, 2\bar{\omega}_4\};$$
$$\mathscr{X}_3 = \{0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4\};$$
$$\mathscr{X}_4 = \{0, \bar{\omega}_4\}.$$

б) С помощью теоремы 2 показать, что

$$\dim E(\bar{\omega}_1) = 52, \quad \dim E(\bar{\omega}_2) = 1274,$$
$$\dim E(\bar{\omega}_3) = 273, \quad \dim E(\bar{\omega}_4) = 26.$$

в) Воспользовавшись предложением 1 из гл. V, § 3, и таблицами из гл. VI, показать, что

$$\mathrm{Card}\,(W\bar{\omega}_1) = 2^7 3^2 2^{-3} (3!)^{-1} = 24.$$

Вычислить также $\mathrm{Card}\,(W\bar{\omega}_2), \ldots, \mathrm{Card}\,(W \cdot 2\bar{\omega}_4)$. Вывести отсюда, что число весов модуля $E(\bar{\omega}_2)$ равно 553; так как это число строго меньше $\dim E(\bar{\omega}_2)$, то кратность одного из этих весов не меньше 2.

г) Провести аналогичные вычисления для весов $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4$. Вывести отсюда, воспользовавшись упражнением 21 из § 7, что если ρ — простое ненулевое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то у представления ρ есть вес, кратность которого не меньше 2.

д) Доказать аналогичное утверждение в случае простой алгебры Ли типа E_8.

е) Пусть $\mathfrak{a}$ — расщепляемая простая алгебра Ли. Вывести из утверждений г), д) и предложений 7 и 8 из § 7 эквивалентность следующих условий:

(i) у алгебры Ли $\mathfrak{a}$ имеется простое ненулевое представление, все веса которого имеют кратность 1,

(ii) тип алгебры Ли $\mathfrak{a}$ не равен ни F_4, ни E_8.

§ 10

1) Пусть $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(2, k)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, k)$. Отождествим $\mathfrak{s}$ с подалгеброй Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с помощью неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{s}$ степени 3. Показать, что все подпространства пространства $\mathfrak{g}$, содержащие алгебру Ли $\mathfrak{s}$ и устойчивые относительно $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{s}$, совпадают или с алгеброй Ли $\mathfrak{s}$ или с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Вывести отсюда, что $\mathfrak{s}$ — максимальная среди отличных от $\mathfrak{g}$ подалгебр Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

2) Пусть $m = \frac{1}{2}(\dim(\mathfrak{g}) + \mathrm{rg}(\mathfrak{g}))$. Размерность любой разрешимой подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{g}$ не превосходит m; если она равна m, то это подалгебра Бореля. (Свести к случаю, когда поле алгебраически замкнуто, и воспользоваться теоремой 2.)

3) Предположим, что поле k равно $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или полному недискретному ультраметрическому полю. Снабдим грассманиан $\mathbf{G}(\mathfrak{g})$ векторных подпространств пространства $\mathfrak{g}$ естественной структурой аналитического многообразия над k (*Мн. Св. рез.*, 5.2.6). Рассмотрим подмножества в $\mathbf{G}(\mathfrak{g})$, образованные

(i) подалгебрами,
(ii) разрешимыми подалгебрами,
(iii) нильпотентными подалгебрами,
(iv) подалгебрами, образованными нильпотентными элементами,
(v) подалгебрами Бореля.

Показать, что эти множества замкнуты (для доказательства этого утверждения в случае (v) воспользоваться упражнением 2). Вывести отсюда, что когда поле k локально компактно, то эти множества компактны.

Показать на примерах, что подмножества в $\mathbf{G}(\mathfrak{g})$, образованные

(vi) подалгебрами Картана,

(vii) редуктивными подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g}$,

(viii) полупростыми подалгебрами,

(ix) разделяющими подалгебрами,

не обязательно замкнуты, даже когда $k = \mathbf{C}$.

4) Предположим, что $k = \mathbf{C}$. Пусть $G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$, и пусть B — интегральная подгруппа в группе G, алгебра Ли $\mathfrak{b}$ которой является подалгеброй Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Показать, что B — нормализатор подалгебры $\mathfrak{b}$ в группе G (воспользоваться упражнением 4 из § 3 и упражнением 11 из § 5). С помощью упражнения 3 вывести отсюда, что G/B — компакт.

¶ 5) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ расщепляема. Если $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то обозначим через $E(\mathfrak{h})$ подгруппу группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, порожденную элементами $e^{\mathrm{ad}\,x}$, $x \in \mathfrak{g}^{\alpha}(\mathfrak{h})$, $\alpha \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, см. гл. VII, § 3, n° 2.

а) Пусть $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая подалгебру Картана $\mathfrak{h}$, и пусть $\mathfrak{h}_1$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{b}$. Показать, что подалгебры $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}$ сопряжены с помощью элемента из $E(\mathfrak{h})$. Вывести отсюда, что $E(\mathfrak{h}) = E(\mathfrak{h}_1)$.

б) Пусть $\mathfrak{h}'$ — расщепляющая подалгебра Картана в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Показать, что $E(\mathfrak{g}) = E(\mathfrak{h}')$. (Если $\mathfrak{b}'$ — подалгебра Бореля, содержащая $\mathfrak{h}'$, то выбрать подалгебру Картана $\mathfrak{h}_1$ в алгебре Ли $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$ и применить утверждение а), чтобы доказать равенство $E(\mathfrak{h}) = E(\mathfrak{h}_1) = E(\mathfrak{h}')$.)

в) Пусть x — нильпотентный элемент в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Показать, что $e^{\mathrm{ad}\,x} \in E(\mathfrak{h})$. (Воспользовавшись утверждением б) и следствием 2 теоремы 1, свести к случаю, когда $x \in [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$.) Вывести отсюда, что $E(\mathfrak{h}) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

6) (а) Показать эквивалентность следующих условий:

(i) в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ нет нильпотентных элементов $\neq 0$,

(ii) в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ нет параболических подалгебр, отличных от $\mathfrak{g}$.

(Воспользоваться следствием 2 теоремы 1.)

Такая алгебра называется *анизотропной*.

б) Пусть $\mathfrak{p}$ — минимальная параболическая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ — радикал в $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{s} = \mathfrak{p}/\mathfrak{r}$. Показать, что алгебра Ли $\mathfrak{s}$ анизотропна. (Заметить, что если $\mathfrak{q}$ — параболическая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{s}$, то прообраз алгебры Ли $\mathfrak{q}$ в $\mathfrak{p}$ — параболическая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, см. упражнение 5 а) из § 3.)

¶ 7) а) Показать, что следующие свойства поля k эквивалентны:

(i) Любая анизотропная полупростая алгебра Ли над k (упражнение 6) равна 0.

(ii) Любая полупростая алгебра Ли над k содержит подалгебру Бореля. (Воспользоваться упражнением 6 для доказательства импликации (i)⇒(ii).)

б) Показать, что из условий (i) и (ii) вытекает следующее условие[1]):

(iii) Любая конечномерная алгебра над k, являющаяся телом, есть поле. (Или: группа Брауэра любого алгебраического расширения поля k равна 0.) (Воспользоваться алгеброй Ли, состоящей из элементов такой алгебры, приведенный след которых равен нулю.)

в) Показать, что условия (i) и (ii) следуют из условии

---

[1]) На самом деле условие (iii) *эквивалентно* условиям (i) и (ii). См. по этому поводу Steinberg R., Regular elements of semisimple algebraic groups, *Publ. Math. I. H. E. S.*, XXV (1965), 49—80.

(iv) Для любого конечного набора таких однородных многочленов $f_\alpha \in k[(X_i)_{i \in I}]$ степени $\geqslant 1$, что $\sum_\alpha \deg f_\alpha < \operatorname{Card}(I)$, существуют такие элементы $x_i \in k$, не все равные нулю, что $f_\alpha((x_i)_{i \in I}) = 0$ при всех α. (Воспользоваться предложением 5 из § 8.)

§ 11

1) Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$. Положим $G = \operatorname{Aut}_e(\mathfrak{g})$; эта группа отождествляется с $\mathbf{PSL}_2(k)$, см. гл. VII, § 3, n° 1, замечание 2.

а) Доказать, что любой нильпотентный элемент из $\mathfrak{g}$ G-сопряжен с элементом $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ при некотором $\lambda \in k$. Такой элемент является главным тогда и только тогда, когда он ненулевой

б) Элементы $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где λ, $\mu \in k^*$, G-сопряжены тогда и только тогда, когда элемент $\lambda^{-1}\mu$ является квадратом в поле k.

в) Каждый простой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ G-сопряжен с элементом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Пусть $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда A — нильпотентная матрица, а AB — нет, и

$$[\mathrm{A}, [\mathrm{A}, \mathrm{B}]] = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вывести отсюда, что лемма 5 не обобщается на поля характеристики 2.

3) Пусть $\mathfrak{r}$ — радикал алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Показать эквивалентность следующих условий:

(i) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не содержит $\mathfrak{sl}_2$-троек;

(ii) алгебра Ли $\mathfrak{s}$ не содержит $\mathfrak{sl}_2$-троек;

(iii) алгебра Ли $\mathfrak{s}$ анизотропна (§ 10, упражнение 6);

(iv) алгебра Ли $\mathfrak{s}$ не содержит отличных от нуля элементов, которые приводятся к диагональному виду (§ 3, упражнение 10).

(Воспользоваться предложением 2 и упражнением 10 а) из § 3.)

4) Пусть V — векторное пространство размерности $n \geqslant 2$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ и группа Ли $G = \mathbf{PGL}(V)$ отождествляется с группой автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Произвольная $\mathfrak{sl}_2$-тройка в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ снабжает V структурой точного $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуля, и, наоборот, каждая такая структура доставляет $\mathfrak{sl}_2$-тройку; $\mathfrak{sl}_2$-тройка является главной тогда и только тогда, когда соответствующий $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуль прост; две $\mathfrak{sl}_2$-тройки G-сопряжены тогда и только тогда, когда соответствующие $\mathfrak{sl}(2, k)$-модули изоморфны. Вывести отсюда, что классы G-сопряженности $\mathfrak{sl}_2$-троек алгебры Ли $\mathfrak{g}$ взаимно однозначно соответствуют таким наборам неотрицательных целых чисел $(m_1, m_2, \ldots)$, что

$$m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \ldots = n \quad \text{и } m_1 < n.$$

¶ 5) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Пусть $\mathfrak{a}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, редуктивная в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, имеющая тот же ранг, что и $\mathfrak{g}$, и содержащая главную $\mathfrak{sl}_2$-тройку алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Показать, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$.

¶ 6) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ абсолютно проста, и обозначим через h ее число Коксетера. Пусть x — нильпотентный элемент в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Показать, что $(\operatorname{ad} x)^{2h-1} = 0$ и что $(\operatorname{ad} x)^{2h-2} \neq 0$ тогда и только тогда, когда x — главный нильпотентный элемент. (Свести к случаю, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$

расщепленная, а x содержится в подалгебре $\mathfrak{n}_+$ из предложения 10. Воспроизвести доказательство предложения 10.)

¶ 7) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Пусть x — нильпотентный элемент из $\mathfrak{g}$. Чтобы элемент x был главным, необходимо и достаточно, чтобы он содержался в подалгебре Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и притом только в одной. (Свести к случаю, когда поле k алгебраически замкнуто. Воспользоваться предложением 10, а также предложением 10 из § 3, n° 3.)

8) Для того чтобы в полупростой алгебре Ли была главная $\mathfrak{sl}_2$-тройка, необходимо и достаточно, чтобы алгебра Ли была ненулевой и содержала подалгебру Бореля.

9) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Пусть N (соотв. P) — множество нильпотентных (соотв. главных нильпотентных) элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

а) Показать, что P — открытое подмножество в множестве N в топологии Зарисского (воспользоваться упражнением 6).

б) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ расщепляема. Показать, что множество P всюду плотно в множестве N. (Воспользоваться предложением 10 и следствием 2 теоремы 1 из § 10.)

10) Предположим, что $\mathfrak{g}$ — полупростая расщепляемая алгебра Ли. Пусть (x, h, y) есть $\mathfrak{sl}_2$-тройка в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

а) Показать, что существует подалгебра Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая элемент h. (Воспользоваться упражнением 10 б) из § 3.)

б) Выберем $\mathfrak{h}$, как в утверждении а). Показать, что тогда $h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ и что существует такой базис B системы корней $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, для которого $\alpha(h) \in \{0, 1, 2\}$ при всех $\alpha \in B$ (см. предложение 5). Элемент x принадлежит подалгебре Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, порожденной пространствами $\mathfrak{g}^{\alpha}$, $\alpha \in B$.

в) Вывести из утверждений а) и б) и теоремы Джекобсона — Морозова новое доказательство того, что каждый нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$ содержится в подалгебре Бореля (см § 10, следствие 2 теоремы 1).

¶ 11) Пусть (x, h, y) — главная $\mathfrak{sl}_2$-тройка в полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Снабдим $\mathfrak{g}$ структурой $\mathfrak{sl}(2, k)$-модуля, определенной этой тройкой. Показать, что так определенный модуль изоморфен $\bigoplus_{i=1}^{l} V(2k_i - 2)$, где k_i — характеристические степени алгебры инвариантных полиномиальных функций на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. (Свести к случаю, когда $\mathfrak{g}$ — расщепляемая простая алгебра Ли. Воспользоваться следствием 1 теоремы 1 из § 8, n° 3, и упражнением 6 в) из гл VI, § 4 [1]).)

¶ 12) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Пусть $x \in \mathfrak{g}$ и s (соотв. n) — полупростая (соотв. нильпотентная) составляющая элемента x. Пусть $\mathfrak{a}_x$ (соотв $\mathfrak{a}_s$) — централизатор элемента x (соотв. s) в $\mathfrak{g}$.

а) Показать, что n — нильпотентный элемент полупростой алгебры $\mathscr{D}(\mathfrak{a}_s)$ и централизатор элемента n в $\mathfrak{a}_s$ равен $\mathfrak{a}_x$ Вывести отсюда, что $\dim \mathfrak{a}_x < \dim \mathfrak{a}_s$, если $n \neq 0$, т. е. если x — неполупростой элемент.

б) Показать, что $\dim \mathfrak{a}_x = \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$ тогда и только тогда, когда n — главный нильпотентный элемент в $\mathscr{D}(\mathfrak{a}_s)$.

в) Положим $G = \operatorname{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Показать, что для всех $\lambda \in k$ существует такой элемент $\sigma_\lambda \in G$, что $\sigma_\lambda x = s + \lambda^2 n$ (Если $n \neq 0$, показать, что существует

[1]) Подробности относительно упражнений 6 — 11 см. в статье: Kostant B. The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group, *Amer. J of Math.*, **LXXXI** (1959), 973 — 1032.

такая $\mathfrak{sl}_2$-тройка в алгебре Ли $\mathfrak{a}_s$, простая компонента которой равна n, и вывести отсюда, что имеется гомоморфизм φ: $\mathbf{SL}(2, k) \to G$; в качестве σ_λ взять образ под действием φ подходящего диагонального элемента из группы $\mathbf{SL}(2, k)$). Вывести отсюда, что элемент s принадлежит замыканию множества $G \cdot x$ в топологии Зарисского.

г) Показать, что если элемент x не полупрост, то он не принадлежит замыканию множества $G \cdot s$ в топологии Зарисского (воспользоваться неравенством $\dim \mathfrak{a}_x < \dim \mathfrak{a}_s$, см. утверждение а)).

д) Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Доказать эквивалентность следующих условий:

(i) элемент x полупрост;

(ii) множество $G \cdot x$ замкнуто в $\mathfrak{g}$ в топологии Зарисского.

(Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) следует из утверждения в). Если условие (i) выполнено и если x' принадлежит замыканию множества $G \cdot x$, то упражнение 15 из § 8 показывает, что полупростая компонента s' элемента x' принадлежит $G \cdot x$, так что элемент x' принадлежит замыканию множества $G \cdot s'$. Доказательство завершается применением утверждения г) к элементам x' и s'.)

е) Предположим, что поле k алгебраически замкнуто.

Пусть F_x — множество таких элементов $y \in \mathfrak{g}$, что $f(x) = f(y)$ для каждой инвариантной полиномиальной функции f на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ Включение $y \in F_x$ имеет место тогда и только тогда, когда полупростая составляющая элемента y G-сопряжена с элементом s (§ 8, упражнение 17). Показать, что F_x — объединение конечного числа орбит группы G и их число не превосходит $3^{l(x)}$, где $l(x)$ — ранг алгебры Ли $\mathscr{D}(\mathfrak{a}_s)$. Только одна из этих орбит замкнута — это орбита элемента s, и только одна из орбит открыта в F_x — это орбита, образованная такими элементами $y \in F_x$, что $\dim \mathfrak{a}_y = \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$.

13) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста.

а) Пусть (x, h, y) — главная $\mathfrak{sl}_2$-тройка в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля, содержащая элемент x (упражнение 7). Показать, что алгебра Ли $\mathfrak{b}$ содержится в $\operatorname{Im} \operatorname{ad} x$.

б) Предположим, что поле k алгебраически замкнуто. Показать, что для любого элемента z из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существуют такие $x, t \in \mathfrak{g}$, где x — главный нильпотентный элемент, что $z = [x, t]$ (применить утверждение а) к подалгебре Бореля, содержащей элемент z).

14) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста. Пусть $\mathfrak{p}$ — параболическая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и пусть f_1 и f_2 — два гомоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в конечномерную алгебру Ли. Показать, что из соотношения $f_1 | \mathfrak{p} = f_2 | \mathfrak{p}$ следует, что $f_1 = f_2$. (Свести к случаю, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ расщепленная, а затем к случаю $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$ и воспользоваться леммой 1 из n° 1.)

¶ 15) Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста.

а) Пусть x — нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Показать, что элемент x содержится в $\operatorname{Im}(\operatorname{ad} x)^2$ (воспользоваться предложением 2). Вывести отсюда, что из равенства $(\operatorname{ad} x)^2 = 0$ следует $x = 0$.

б) Пусть (x, h, y) есть $\mathfrak{sl}_2$-тройка в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{s} = kx \oplus kh \oplus ky$. Доказать эквивалентность следующих условий:

(i) $\operatorname{Im}(\operatorname{ad} x)^2 = k \cdot x$;

(ii) $\mathfrak{s}$-модуль $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ равен прямой сумме модулей размерности 1 и 2;

(iii) единственные собственные значения эндоморфизма $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} h$, отличные от 0, 1 и -1, равны 2 и -2, а их кратности равны 1.

в) Предположим, что $\mathfrak{g}$ — расщепляемая простая алгебра Ли. Пусть $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, B — базис системы корней $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и γ — старший корень системы $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ относительно базиса B. Пусть (x, h, y) — такая $\mathfrak{sl}_2$-тройка, что $h \in \mathfrak{h}_{\mathbf{Q}}$ и $\alpha(h) \geqslant 0$ при всех $\alpha \in B$

(см. предложение 5). Показать, что условия (i), (ii), (iii) утверждения б) выполнены тогда и только тогда, когда $h = H_\gamma$; в этом случае $x \in \mathfrak{g}^\gamma$ и $y \in \mathfrak{g}^{-\gamma}$.

г) Сохраним предположения утверждения в) и положим $G = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$. Показать, что $\mathfrak{sl}_2$-тройки, удовлетворяющие условиям (i), (ii), (iii), G-сопряжены (воспользоваться упражнением 10). Пусть x — ненулевой нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющий условию (i); показать, что замыкание множества $G.x$ в топологии Зарисского равно $\{0\} \cup G.x$.

16) Пусть (x, h, y) есть $\mathfrak{sl}_2$-тройка в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Показать, что если -2 — квадрат в поле k, то элементы $x - y$ и h сопряжены с помощью элемента из группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ (свести к случаю, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$). Вывести отсюда, что если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста, то элемент $x - y$ полупрост и регулярен тогда и только тогда, когда элемент h регулярен.

¶ 17) Пусть (x, h, y) — главная $\mathfrak{sl}_2$-тройка полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{g}_i$ для любого $i \in \mathbf{Z}$ собственное подпространство эндоморфизма $\operatorname{ad} h$ с собственным значением i. Имеет место равенство $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_i$, и $\mathfrak{g}_i = 0$, если i нечетно. Прямая сумма $\mathfrak{b}$ алгебр Ли $\mathfrak{g}_i$, $i \geqslant 0$, — подалгебра Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{g}_0$ — подалгебра Картана.

а) Показать, что при всех $z \in \mathfrak{b}$ централизатор элемента $y + z$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ имеет размерность $l = \mathrm{rg}(\mathfrak{g})$.

б) Пусть I — алгебра инвариантных полиномиальных функций на $\mathfrak{g}$ и $P_1, \ldots, P_l$ — однородные элементы алгебры I, которые ее порождают. Положим $\deg(P_i) = k_i = m_i + 1$. Показать, что базис централизатора $\mathfrak{c}$ элемента x в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ равен $x_1, \ldots, x_l$, где $x_i \in \mathfrak{g}_{2m_i}$ (см упражнение 11).

в) Пусть $i \in (1, l)$, и пусть J_i (соотв. K_i) — множество таких элементов $j \in (1, l)$, что $m_j = m_i$ (соотв. $m_j < m_i$). Пусть $f_i \in k[X_1, \ldots, X_l]$ — такой многочлен, что

$$f_i(a_1, \ldots, a_l) = P_i\left(y + \sum_{j=1}^{j=l} a_j x_j\right) \quad \text{при} \quad (a_j) \in k^l.$$

Показать, что многочлен f_i — сумма линейной формы L_i от элементов X_j, $j \in J_i$, и некоторого многочлена от переменных X_j, $j \in K_i$. (Если $t \in k^*$, то автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, который равен t^i на пространстве $\mathfrak{g}_i$, принадлежит $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ и переводит элемент y в $t^{-2}y$, а элемент x_j в $t^{2m_j}x_j$. Воспользоваться инвариантностью многочлена P_i относительно этого автоморфизма.)

г) Пусть P — отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в k^l, определенное с помощью многочленов P_i. Если $z \in \mathfrak{g}$, то обозначим через D_zP: $\mathfrak{g} \to k^l$ линейное отображение, касательное к отображению P в точке z (гл. VII, дополнение I, n°2).

Показать, что $\mathfrak{c} \cap \operatorname{Im} \operatorname{ad}(y - x) = 0$ (разложить алгебру Ли $\mathfrak{g}$ в прямую сумму простых подмодулей относительно подалгебры, порожденной данной $\mathfrak{sl}_2$-тройкой). Вывести отсюда, что ограничение $D_{y-x}P$ на алгебру Ли $\mathfrak{c}$ — изоморфизм пространств $\mathfrak{c}$ и k^l (воспользоваться предыдущим упражнением, а также упражнением 18) а) из § 8). Показать, воспользовавшись этим результатом, что определитель линейных форм L_i, определенных в утверждении в), отличен от нуля, откуда вытекают следующие результаты:

г$_1$) многочлены $f_1, \ldots, f_l$ алгебраически независимы и порождают алгебру $k[X_1, \ldots, X_l]$;

г$_2$) отображение $z \longmapsto P(y+z)$ алгебры Ли $\mathfrak{c}$ в k^l полиномиально и биективно, и обратное отображение тоже полиномиально:

г$_3$) для любого $z \in y+\mathfrak{c}$ линейное отображение $D_zP\,|\,\mathfrak{c}$ имеет ранг l. В частности, отображение P: $\mathfrak{g} \to k^l$ сюръективно.

д) Если поле k алгебраически замкнуто, то каждый элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, централизатор которого имеет размерность l, сопряжен с помощью группы $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ с одним и только одним элементом из множества $y+\mathfrak{c}$.

е) Привести пример простой алгебры Ли, которая не содержит главной $\mathfrak{sl}_2$-тройки и для которой отображение P не является сюръективным (положить $k=\mathbf{R}$ и $l=1$).

§ 13

1) Доказать, что ниже перечислены все расщепляемые простые алгебры Ли, размерность которых $\leqslant 80$:

3 ($A_1 = B_1 = C_1$), 8 (A_2), 10 ($B_2 = C_2$), 14 (G_2), 15 ($A_3 = D_3$), 21 (B_3 и C_3) 24 (A_4), 28 (D_4), 35 (A_5), 36 (B_4 и C_4), 45 (D_5), 48 (A_6), 52 (F_4), 55 (B_5 и C_5), 63 (A_7), 66 (D_6), 78 (B_6, C_6 и E_6), 80 (A_8).

2) Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — расщепленная простая алгебра Ли и B — базис системы корней $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Тогда простые $\mathfrak{g}$-модули $E(\lambda)$, $\lambda \in P_{++} - \{0\}$, минимальной размерности — это те, у которых λ — один из следующих фундаментальных весов:

$\bar{\omega}_1$ (A_1); $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_l$ (A_l, $l \geqslant 2$); $\bar{\omega}_1$ (B_l и C_l, $l \geqslant 2$); $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_3$ и $\bar{\omega}_4$ (D_4); $\bar{\omega}_1$ (D_l, $l \geqslant 5$); $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_6$ (E_6); $\bar{\omega}_7$ (E_7); $\bar{\omega}_8$ (E_8); $\bar{\omega}_4$ (F_4); $\bar{\omega}_1$ (G_2)

Два таких модуля получаются друг из друга автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Алгебра Ли типа E_8 — единственная, для которой минимальную размерность имеет присоединенное представление

3) а) Построить изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{sl}(4, k)$ и ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{o}_S(6, k)$. (Воспользоваться тем, что представление $\bigwedge^2 \sigma$ из n° 1 (V) — ортогональное представление размерности 6.) Доказать, что два типа неприводимых представлений размерности 4 алгебры Ли $\mathfrak{sl}(4, k)$ соответствуют двум полуспинорным представлениям алгебры Ли $\mathfrak{o}_S(6, k)$.

б) Построить изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4, k)$ и ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{o}_S(5, k)$. (Воспользоваться тем, что представление σ_2 из n° 3 (V) — ортогональное представление размерности 5.) Доказать, что неприводимое представление размерности 4 алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4, k)$ соответствует спинорному представлению алгебры Ли $\mathfrak{o}_S(5, k)$.

в) Построить изоморфизм $\mathfrak{sl}(2, k) \times \mathfrak{sl}(2, k) \to \mathfrak{o}_S(4, k)$, используя тензорное произведение тождественных представлений двух сомножителей $\mathfrak{sl}(2, k)$. Получить этот результат также с помощью гл. I, § 6, упражнение 26.

4) Пусть S — квадратная матрица порядка n

$$(\delta_{i,\,n+1-i}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементами алгебры Ли $\mathfrak{o}_S(n, k)$ являются матрицы (a_{ij}), антисимметричные относительно побочной диагонали:

$$a_{ij} = -a_{n+1-j,\, n+1-i} \quad \text{для любой пары} \quad (i, j).$$

Алгебра Ли $\mathfrak{o}_S(n, k)$ — расщепляемая простая алгебра Ли типа $D_{n/2}$, если n — четное число $\geqslant 6$, и типа $B_{(n-1)/2}$, если n — нечетное число $\geqslant 5$. Диагональные (соотв. верхние треугольные) матрицы из алгебры Ли $\mathfrak{o}_S(n, k)$ образуют расщепляющую подалгебру Картана (соотв подалгебру Бореля).

5) Воспользуемся обозначениями из n° 1 (IV), тип A_l. Показать, что если $n \geqslant 0$, то $\mathsf{S}^n\sigma$ — неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(l+1, k)$ со старшим весом $n\bar{\omega}_1$. (Реализовать представление $\mathsf{S}^n\sigma$ в пространстве однородных многочленов степени n от переменных $X_0, \ldots, X_l$ и заметить, что единственным многочленом f, таким, что $\partial f/\partial X_i = 0$ при $i \geqslant 1$, является одночлен X_0^n с точностью до умножения на скаляр.) Показать, что все веса этого представления имеют кратность 1.

6) Воспользуемся обозначениями из n° 2 (IV), тип B_l. Если $1 \leqslant r \leqslant l-1$, то показать, что размерность модуля $E(\bar{\omega}_r)$ равна $\binom{2l+1}{r}$, и вывести отсюда другое доказательство того, что $\bigwedge^r \sigma$ — фундаментальное представление с весом $\bar{\omega}_r$.

7) Воспользуемся обозначениями из n° 2 (VII), тип B_l. Показать, что $\mathbf{O}_0^+(\Psi)$ — группа, состоящая из коммутаторов элементов из $\mathbf{SO}(\Psi)$. (Заметить, что группа $\mathbf{O}(\Psi)$ равна $\{\pm 1\} \times \mathbf{SO}(\Psi)$, следовательно, имеет ту же группу коммутаторов, что и $\mathbf{SO}(\Psi)$, и применить *Алг.*, гл. IX, § 9, упражнение 11 б).) Вывести из этого, что $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) = \mathbf{O}_0^+(\Psi)$.

8) Воспользуемся обозначениями из n° 3 (IV), тип C_l ($l \geqslant 1$). Показать, что представление $\mathsf{S}^2\sigma$ эквивалентно присоединенному представлению алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

9) Воспользуемся обозначениями из n° 3 (VII), тип C_l ($l \geqslant 1$). В частности, отождествим группу $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ с подгруппой группы $\mathbf{Sp}(\Psi)/\{\pm 1\}$. Показать, что образ симплектической трансвекции в факторгруппе $\mathbf{Sp}(\Psi)/\{\pm 1\}$ (*Алг.*, гл. IX, § 4, упражнение 6) принадлежит группе $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Вывести отсюда, что $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) = \mathbf{Sp}(\Psi)/\{\pm 1\}$ (*Алг.*, гл. IX, § 5, упражнение 11) и что группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ отождествляется с k^*/k^{*2}.

¶ 10) Воспользуемся обозначениями из n° 4 (IV), тип D_l ($l \geqslant 2$).

а) Пусть x и y — элементы пространства $\bigwedge^l V$, определенные равенствами

$$x = e_1 \wedge \ldots \wedge e_{l-1} \wedge e_l$$

и

$$y = e_1 \wedge \ldots \wedge e_{l-1} \wedge e_{-l}.$$

Тогда x — примитивный элемент веса $2\bar{\omega}_l$, а y — примитивный элемент веса $2\bar{\omega}_{l-1}$. Подмодуль X (соотв Y) пространства $\bigwedge^l V$, порожденный элементом x (соотв. элементом y), изоморфен модулю $E(2\bar{\omega}_l)$ (соотв. модулю $E(2\bar{\omega}_{l-1})$). Показать, подсчитав размерности, что $\bigwedge^l V = X \oplus Y$; таким образом, пространство $\bigwedge^l V$ — прямая сумма двух простых неизоморфных модулей.

б) Пусть $e = e_1 \wedge \ldots \wedge e_l \wedge e_{-1} \wedge \ldots \wedge e_{-l} \in \bigwedge^{2l} V$, и пусть Ψ_l — продолжеиие формы Ψ на пространство $\bigwedge^l V$ Пусть $z \in \bigwedge^l V$ Доказать эквивалентности

$$z \in X \Leftrightarrow z \wedge t = \Psi_l(z, t)\, e \quad \text{для всех } t \in \bigwedge^l V,$$

$$z \in Y \Leftrightarrow z \wedge t = -\Psi_l(z, t)\, e \quad \text{для всех } t \in \bigwedge^l V.$$

(Если через X' и Y' обозначить подпространства, порожденные правыми частями этих равенств, то сначала надо доказать, что X' н Y' — пространства, инвариантные относительно $\mathfrak{g}$, содержащие x и y соответственно.)

в) Предположим, что z — *чистый*[1]) элемент (*Alg*., chap. III, § 11, n° 13), и обозначим через M_z ассоциированное с ним l-мерное подпространство пространства V. Показать, что M_z — абсолютно изотропное подпространство тогда н только тогда, когда z принадлежит или X, или Y. (Если M_z абсолютно изотропно, воспользоваться тем, что существует ортогональное преобразование, переводящее M_z в M_x; если M_z — не абсолютно изотропное подпространство, то построить такой l-вектор t, что $z \wedge t = 0$, $\Psi_l(z, t) = 1$, и применить пункт б).) Если $z \in X$ (соотв. $z \in Y$), то размерность пространства $M_x/(M_x \cap M_z)$ — четное целое число (соотв. нечетное), см. *Алг*., гл. IX, § 6. упражнение 18 г).

г) Пусть s — прямое (соотв. обратное) преобразование подобия в пространстве V. Показать, что преобразование $\bigwedge^l s$ оставляет устойчивыми, пространства X и Y (соотв. преобразует пространства X и Y друг в друга)

11) Воспользуемся обозначениями из n° 4 (VII), тип D_l ($l \geqslant 3$). Показать что $\mathbf{O}_0^+(\Psi)$ — группа, состоящая нз коммутаторов группы $\mathbf{SO}(\Psi)$. (Применить *Алг*., гл IX, § 6, упражнение 17 б), и *Алг*., гл. IX, § 9, упражнение 11 б).) Вывести отсюда, что группа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ совпадает с образом группы $\mathbf{O}_0^+(\Psi)$ в группе $\mathbf{SO}(\Psi)/\{\pm 1\}$. Для того чтобы элемент -1 принадлежал группе $\mathbf{O}_0^+(\Psi)$, необходимо и достаточно, чтобы l было четно или чтобы -1 была квадратом в поле k (*Алг*., гл. IX, § 9, упражнение 11 в)).

12) Формой Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{sl}(n, k)$ служит отображение $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto 2n \operatorname{Tr}(\mathrm{XY})$. Формой Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{sp}(n, k)$, где n четно, является отображение $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto (n+2) \operatorname{Tr}(\mathrm{XY})$. Формой Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{o}_S(n, k)$, где S — невырожденная симметрическая форма ранга n, является отображение $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto (n-2) \operatorname{Tr}(\mathrm{XY})$.

13) Алгебра инвариантных многочленов на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ порождена

а) в случае A_l функциями $X \mapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{X}^i)$, $2 \leqslant i \leqslant l+1$,

б) в случае B_l функциями $X \mapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{X}^{2i})$, $1 \leqslant i \leqslant l$,

в) в случае C_l функциями $X \mapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{X}^{2i})$, $1 \leqslant i \leqslant l$,

г) в случае D_l функциями $X \mapsto \operatorname{Tr}(\mathrm{X}^{2i})$, $1 \leqslant i \leqslant l-1$, и одной из двух таких полиномиальных функций $\tilde{f}$, что $\tilde{f}(\mathrm{X})^2 = (-1)^l \det \mathrm{X}$.

14) а) Пусть G — группа Ли, ассоциированная с алгеброй Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, k)$ по способу из § 7, упражнение 26. Естественная структура $\mathfrak{g}$-модуля на пространстве k^n порождает гомоморфизм $\varphi\colon G \to \mathbf{GL}(n, k)$. Использовать п. з), *там же*, чтобы доказать, что φ — инъективный гомоморфизм, и е), *там же*, чтобы доказать, что

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbf{SL}(n, k).$$

---

[1]) Напомним, что элемент z пространства $\bigwedge^l V$ называется чистым, если z отличен от нуля и совпадает с внешним произведением l элементов пространства V. — *Прим. перев.*

б) Пусть E — конечномерный $\mathfrak{sl}(n, k)$-модуль и ρ — соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n, k)$. Показать, что существует единственное такое представление π: $\mathbf{SL}(n, k) \to \mathbf{GL}(E)$, что $\pi(e^x) = e^{\rho(x)}$ для любого нильпотентного элемента x из алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n, k)$ (использовать п. а)). Скажем, что представления ρ и π *согласованы*. Обобщить результаты, доказанные при $n = 2$ в § 1, n° 4.

в) Предположим, что k совпадает с $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, или с полным относительно дискретного нормирования полем, характеристика поля вычетов которого $\neq 0$. Показать, что представления ρ и π согласованы тогда и только тогда, когда π — такой гомоморфизм группы Ли, что $L(\pi) = \rho$. (Использовать тот же метод, что в упражнении 18 б) из § 1.)

г) Доказать аналогичные утверждения относительно $\mathfrak{sp}(2n, k)$ и $\mathbf{Sp}(2n, k)$.

¶ 15) Пусть V — векторное пространство конечной размерности $\geqslant 2$, $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли алгебры Ли $\mathrm{End}(V)$ и θ — элемент из $\mathfrak{g}$. Предположим, что

(i) V — полупростой $\mathfrak{g}$-модуль;

(ii) θ — элемент ранга 1 (т. е. $\dim \mathrm{Im}(\theta) = 1$);

(iii) прямая $\mathrm{Im}(\theta)$ порождает $U(\mathfrak{g})$-модуль V.

а) Доказать, что условия (i) — (iii) выполняются (при подходящем выборе элемента θ), когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ или когда на пространстве V существует такая невырожденная знакопеременная форма Ψ, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(\Psi)$ или $\mathfrak{g} = k.1 \oplus \mathfrak{sp}(\Psi)$. В каждом из этих случаев в качестве θ можно взять нильпотентный элемент; во втором случае (и только в нем) в качестве θ можно взять полупростой элемент.

б) Мы собираемся показать, что четыре вышеприведенных случая — единственные возможности. Сведем сразу же к случаю, когда k — алгебраически замкнутое поле. Показать тогда, что V — простой $\mathfrak{g}$-модуль и что $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{s}$, где $\mathfrak{s}$ — полупростая алгебра Ли, а $\mathfrak{c}$ равна 0 или $k.1$. Показать, что модуль V не может быть изоморфен тензорному произведению $\mathfrak{g}$-модулей размерности $\geqslant 2$; вывести отсюда, что $\mathfrak{s}$ — простая алгебра Ли.

в) Выберем подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{s}$ и базис B системы корней $R(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$. Пусть λ — старший вес $\mathfrak{s}$-модуля V (относительно базиса B), и пусть e — ненулевой элемент пространства V веса λ. Тогда старший вес дуального модуля V^* равен $\lambda^* = -w_0\lambda$ (§ 7, n° 5). Пусть e^* — ненулевой элемент пространства V^* веса λ^*. Обычным образом отождествим пространства $V \otimes V^*$ и $\mathrm{End}(V)$. Показать, что существуют такие $x \in V$, $y \in V^*$, что $x \otimes y \in \mathfrak{g}$ и $\langle x, e^* \rangle \neq 0$, $\langle e, y \rangle \neq 0$ (рассмотреть элемент, сопряженный к элементу θ относительно e^n, где n — подходящий нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Использовать то, что $\mathfrak{g}$ есть $\mathfrak{h}$-подмодуль модуля $V \otimes V^*$, чтобы вывести отсюда, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ содержит элемент $e \otimes e^*$. Вследствие этого $\lambda + \lambda^* = \tilde{\alpha}$, где $\tilde{\alpha}$ — наибольший корень алгебры Ли $\mathfrak{s}$.

г) Показать что алгебра Ли $\mathfrak{s}$ не может быть алгеброй Ли типов B_l $(l \geqslant 2)$, D_l $(l \geqslant 4)$, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 (вследствие гл. VI, *таблицы*, $\tilde{\alpha}$ — фундаментальный вес и поэтому не может иметь указанный выше вид $\lambda + \lambda^*$). Вывести отсюда, что $\mathfrak{s}$ — или алгебра Ли типа A_l, или алгебра Ли типа C_l; в первом случае $\lambda = \tilde{\omega}_1$ или $\tilde{\omega}_l = \tilde{\omega}_1^*$, а во втором случае $\tilde{\alpha} = 2\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_1^*$, так как $\mathfrak{c}$ равна 0 или $k.1$, откуда получаются четыре случая п. а) [1]).

¶ 16) Пусть $\mathfrak{g}$ — абсолютно простая алгебра Ли типа A_l $(l \geqslant 2)$, $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k и π: $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathrm{Aut}(\bar{R}, \bar{B})$ — гомоморфизм, определенный в упражнении 8 из § 5.

---

[1]) Подробности см. Guillemin V. W., Quillen D., Sternberg S., The classification of the irreducible complex algebras of infinite type, *J. Analyse Math.*, XVII (1967), 107—112. [Русский перевод: сб. *Математика*, 12 : 6 (1968), 63—66.]

a) Предположим, что π — тривиальный гомоморфизм. Доказать, что существуют ровно два двусторонних идеала $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ в алгебре $U(\mathfrak{g})$, таких, что $D = U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}$ и $D' = U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}'$ — простые центральные алгебры размерности $(l+1)^2$ (воспользоваться упражнением 8 из § 7). Главный антиавтоморфизм алгебры $U(\mathfrak{g})$ переставляет $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$. В частности, алгебра D' изоморфна противоположиой алгебре алгебры D. Композиция $\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \to D$ отождествляет $\mathfrak{g}$ с подалгеброй Ли $\mathfrak{sl}_D$ алгебры D, образованной элементами со следом нуль Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была расщепляемой (и, следовательно, изоморфной $\mathfrak{sl}(l+1, k)$), необходимо и достаточно, чтобы алгебра D была изоморфна $\mathbf{M}_{l+1}(k)$.

Наоборот, если Δ — простая центральиая алгебра размерности $(l+1)^2$, то $\mathfrak{sl}_\Delta$ — абсолютно простая алгебра Ли типа A_l и соответствующий гомоморфизм π тривиален. Две такие алгебры $\mathfrak{sl}_\Delta$ и $\mathfrak{sl}_{\Delta'}$ изоморфны тогда и только тогда, когда алгебры Δ и Δ' изоморфны или антиизоморфны.

б) Предположим, что гомоморфизм π иетривиалеи. Так как в группе $\mathrm{Aut}(\overline{R}, \overline{B})$ два элемента, то ядро гомоморфизма π — открытая подгруппа в группе $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ индекса 2, которая по теории Галуа соответствует квадратичному расширению k_1 поля k. Обозначим через $x \longmapsto \bar{x}$ нетривиальную инволюцию поля k_1.

Показать, что существует единственный двусторонний идеал $\mathfrak{m}$ алгебры $U(\mathfrak{g})$, такой, что $D = U(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}$ — простая алгебра размерности $2(l+1)^2$, центр которой является квадратичным расширеиием поля k (доказывается тем же способом). Можно отождествить центр алгебры D и k_1. Идеал $\mathfrak{m}$ устойчив относительно главного антиавтоморфизма алгебры $U(\mathfrak{g})$; этот антиавтоморфизм определяет на факторалгебре D такой иволютивный антиавтоморфизм σ, что $\sigma(x) = \bar{x}$ при всех $x \in k_1$. Композиция $\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g}) \to D$ отождествляет $\mathfrak{g}$ с подалгеброй Ли $\mathfrak{su}_{D,\sigma}$ алгебры D, образованной такими элементами x, что $\sigma(x) = -x$ и $\mathrm{Tr}_{D/k_1}(x) = 0$. Наоборот, если Δ — простая центральная k_1-алгебра размерности $(l+1)^2$, снабженная инволютивным антиавтоморфизмом σ, ограничение которого на k_1 есть отображение $x \longmapsto \bar{x}$, то алгебра Ли $\mathfrak{su}_{\Delta,\sigma}$ — абсолютно простая алгебра Ли типа A_l и соответствующий гомоморфизм π — гомоморфизм, ассоциированный с квадратичным расширением k_1 поля k. Для того чтобы две такие алгебры Ли $\mathfrak{su}_{\Delta,\sigma}$ и $\mathfrak{su}_{\Delta',\sigma'}$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой k-изоморфизм $f\colon \Delta \to \Delta'$, что $\sigma' \circ f = f \circ \sigma$.

При $D = \mathbf{M}_{l+1}(k_1)$ показать, что существует такая обратимая эрмитова матрица H порядка $l+1$, единственная с точностью до умножения на элемент из k^*, что

$$\sigma(x) = \mathrm{H}\,.\,{}^t\bar{x}\,.\,\mathrm{H}^{-1}$$

для любого $x \in \mathbf{M}_{l+1}(k_1)$. Показать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ отождествляется с алгеброй Ли $\mathfrak{su}(l+1, \mathrm{H})$, образованной из таких матриц x, что $x\,.\,\mathrm{H} + \mathrm{H}\,.\,{}^t\bar{x} = 0$ и $\mathrm{Tr}(x) = 0$.

¶ 17) Пусть $\mathfrak{g}$ — абсолютно простая алгебра Ли типа B_l (соотв. C_l, D_l), где $l \geqslant 2$ (соотв. $l \geqslant 3$, $l \geqslant 4$). Когда $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа D_4, предположим, кроме того, что порядок образа гомоморфизма $\pi\colon \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathrm{Aut}(\overline{R}, \overline{B})$, определенного в упражиеиии 8 из § 5, не превосходит 2. Показать, что тогда существуют простая центральная алгебра размерности $(2l+1)^2$ (соотв. $4l^2$, $4l^2$) и такой иволютивный антиавтоморфизм σ алгебры D, что $\mathfrak{g}$ изоморфна подалгебре Ли алгебры D, образоваииой такими элемеитами x, что $\sigma(x) = -x$ и $\mathrm{Tr}_D(x) = 0$ (рассуждать так же, как в упражнении 16 а)) [1]).

[1]) Подробнее относительно упражнений 16 и 17 см. Джекобсон Н., Алгебры Ли, «Мир», М., 1964, гл. X, и Seligman G., Modular Lie Algebras, Springer-Verlag, 1967, chap. IV.

18) Пусть V — конечномерное векторное пространство, Q — невырожденная квадратичная форма на V и Ψ — симметрическая билинейная форма, ассоциированная с формой Q. Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли $\mathfrak{o}(\Psi)$ и через Ψ_2 — расширение формы Ψ на пространство $\bigwedge^2(V)$.

а) Показать, что существует изоморфизм векторных пространств θ: $\bigwedge^2(V) \to \mathfrak{g}$, характеризующийся следующими эквивалентными свойствами:

(i) Для любых a, b и x из пространства V имеет место равенство $\theta(a \wedge b) \, . \, x = a \, . \, \Psi(x, b) - b \, . \, \Psi(x, a)$.

(ii) Для x, y из V и u из $\bigwedge^2(V)$ имеет место равенство $\Psi_2(x \wedge y, u) = \Psi(x, \theta(u) \, . \, y)$.

Пусть σ — тождественное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве V; тогда изоморфизм θ устанавливает эквивалентность представления $\bigwedge^2(\sigma)$ и присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

б) Определим линейное представление f: $\mathfrak{g} \to C^+(Q)$, как в лемме 1 из n° 2 Показать, что $f\theta(a \wedge b) = \frac{1}{2}(ab - ba)$ при a, b из пространства V, и вывести отсюда новое доказательство утверждений (iii), (iv) и (v) леммы 1 из n° 2.

в) Пусть l, F, F', e_0, N, λ и ρ означают то же, что и в n° 2. Выберем элемент $e \neq 0$ в пространстве $\bigwedge(F')$ и определим билинейную форму Φ на пространстве N формулой

$$x \wedge y = (-1)^{p(p+1)/2} \, \Phi(x, y) \, . \, e \qquad (x \in \textstyle\bigwedge^p(F'), \; y \in N).$$

Показать, что $\Phi(\lambda(a) \, . \, x, y) + \Phi(x, \lambda(a) \, . \, y) = 0$ при всех x, y из N и a из $F \oplus F'$. Вывести отсюда, что форма Φ инвариантна относительно представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (заметить, что алгебра Ли $\rho(\mathfrak{g})$ порождена множеством $\lambda(F \oplus F')$ вследствие утверждений а) и б)).

19) Пусть V — конечномерное векторное пространство и $E = V \oplus V^*$. Определим на пространстве E невырожденную билинейную форму Φ, положив

$$\Phi((x, x^*), (y, y^*)) = \langle x, y^* \rangle + \langle y, x^* \rangle.$$

Положим $N = \bigwedge(V)$ и $Q(x) = \frac{1}{2}\Phi(x, x)$ при $x \in E$ Как и в n° 2 (IV), через λ: $C(Q) \to \operatorname{End}(N)$ обозначим спинорное представление, отображение f: $\mathfrak{o}(\Phi) \to C^+(Q)$ определено, как в лемме 1 из n° 2, и ρ — линейное представление $\lambda \circ f$ алгебры Ли $\mathfrak{o}(\Phi)$ в пространстве N.

а) Поставим в соответствие каждому эндоморфизму u пространства V эндоморфизм $\tilde{u}$ пространства E по формуле $\tilde{u}(x, x^*) = (u(x), -{}^t u(x^*))$ Показать, что $u \mapsto \tilde{u}$ — гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ в алгебру Ли $\mathfrak{o}(\Phi)$. Более того, для каждого эндоморфизма u из $\mathfrak{gl}(V)$ $\rho(\tilde{u})$ — единственное дифференцирование алгебры $\bigwedge(V) = N$, которое совпадает с эндоморфизмом u на пространстве V.

б) Пусть Ψ — невырожденная знакопеременная билинейная форма на пространстве V и γ: $V \to V^*$ — изоморфизм, определенный формулой $\Psi(x, y) = \langle x, \gamma(y) \rangle$, где x, y из пространства V. Показать, что эндоморфизмы $\tilde{X}_+$ и $\tilde{X}_-$ пространства E, определенные формулами

$$\tilde{X}_+(x, x^*) = (\gamma^{-1}(x^*), 0), \quad \tilde{X}_-(x, x^*) = (0, -\gamma(x)),$$

принадлежат алгебре Ли $\mathfrak{o}(\Phi)$. Положим $\tilde{H} = (-1)$. Показать, что $(\tilde{H}, \tilde{X}_+, \tilde{X}_-)$ есть $\mathfrak{sl}_2$-тройка в алгебре Ли $\mathfrak{o}(\Phi)$.

в) Показать, что гомоморфизм ρ переводит элементы $\tilde{H}$, $\tilde{X}_+$, $\tilde{X}_-$ алгебры Ли $\mathfrak{o}(\Phi)$ в эндоморфизмы пространства N, которые в n° 3 (IV) обозначены через H, X_+ и X_- соответственно Вывести отсюда, что (H, X_+, X_-) есть $\mathfrak{sl}_2$-тройка алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N)$.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Цифры в ссылках указывают последовательно главу, параграф и

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

СВОДКА НЕКОТОРЫХ ВАЖНЫХ СВОЙСТВ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

В этой сводке через $\mathfrak{g}$ обозначается полупростая алгебра Ли над полем k.

Подалгебры Картана

1) Пусть E — множество коммутативных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которые в ней редуктивны; это множество совпадает также с множеством коммутативных подалгебр этой алгебры Ли, все элементы которых полупросты. Подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$ являются максимальными элементами в E.

2) Пусть x — регулярный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда x полупрост. Существует единственная подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которая содержит x, — это централизатор элемента x в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

3) Пусть x — полупростой элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда x принадлежит некоторой подалгебре Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для того чтобы элемент x был регулярен, необходимо и достаточно, чтобы размерность его централизатора совпадала с рангом алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

4) Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. Она называется расщепляющей, если для любого $x \in \mathfrak{h}$ эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ приводится к треугольному виду. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется расщепляемой, если в $\mathfrak{g}$ содержится расщепляющая подалгебра Картана (это всегда имеет место, если поле k алгебраически замкнуто). Расщепленной полупростой алгеброй Ли называется пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, где $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ — расщепляющая подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$.

В дальнейшем в этой сводке через $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ обозначается расщепленная полупростая алгебра Ли.

Системы корней

5) Для каждого элемента α из пространства $\mathfrak{h}^*$, дуального к $\mathfrak{h}$, обозначим через $\mathfrak{g}^{\alpha}$ множество таких $x \in \mathfrak{g}$, что $[h, x] = \alpha(h)x$ при всех $h \in \mathfrak{h}$. Если $\alpha = 0$, то $\mathfrak{g}^{\alpha} = \mathfrak{h}$. Корнем расщепленной

алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называется каждый элемент $\alpha \in \mathfrak{h}^* - \{0\}$, для которого $\mathfrak{g}^\alpha \neq 0$. Обозначим через $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (или просто через R) множество корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Эта система корней в $\mathfrak{h}^*$ приведена в смысле гл. VI, § 1, n° 4. Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была проста, необходимо и достаточно, чтобы система R была неприводимой.

6) При любом $\alpha \in R$ размерность подпространства $\mathfrak{g}^\alpha$ равна 1. Векторное пространство $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ содержится в подалгебре $\mathfrak{h}$, размерность его равна 1, и в нем содержится ровно один такой элемент H_α, что $\alpha(H_\alpha) = 2$. Мы получаем, что $H_\alpha = \alpha^\vee$ (гл. VI, § 1, n° 1); множество элементов H_α, где $\alpha \in R$, — система корней $R^\vee$, дуальная к системе R.

7) Имеет место разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha$. Существует такой набор $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$, что при всех $\alpha \in R$ мы имеем $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ и $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha$. Любой элемент $x \in \mathfrak{g}$ однозначно записывается в виде

$$x = h + \sum_{\alpha \in R} \lambda_\alpha X_\alpha, \quad \text{где } h \in \mathfrak{h},\ \lambda_\alpha \in k.$$

Коммутатор двух элементов из $\mathfrak{g}$ вычисляется с помощью формул

$$\begin{aligned}
&[h, X_\alpha] = \alpha(h) X_\alpha,\\
&[X_\alpha, X_\beta] = 0, \text{ если } \alpha + \beta \notin R \cup \{0\},\\
&[X_\alpha, X_{-\alpha}] = -H_\alpha,\\
&[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}, \text{ если } \alpha + \beta \in R,
\end{aligned}$$

где $N_{\alpha, \beta}$ — ненулевые элементы из поля k.

8) Пусть B — базис системы корней R. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождена элементами X_α и $X_{-\alpha}$ при $\alpha \in B$. При этом $[X_\alpha, X_{-\beta}] = 0$, если $\alpha, \beta \in B$ и $\alpha \neq \beta$. Пусть $(n(\alpha, \beta))_{\alpha, \beta \in B}$ — матрица Картана системы R (относительно базиса B). Имеют место равенства $n(\alpha, \beta) = \alpha(H_\beta)$. Если $\alpha, \beta \in B$ и $\alpha \neq \beta$, то $n(\alpha, \beta)$ — целое отрицательное число. Выполняются следующие соотношения:

$$(\operatorname{ad} X_\beta)^{1-n(\alpha,\beta)} X_\alpha = 0, \quad (\operatorname{ad} X_{-\beta})^{1-n(\alpha,\beta)} X_{-\alpha} = 0.$$

9) Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$, то пусть $q_{\alpha\beta}$ — наибольшее такое целое число j, что $\beta - j\alpha \in R$. Можно выбрать систему $(X_\alpha)_{\alpha \in R}$ из п. 7) так, что $N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta}$, если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R$. Тогда $N_{\alpha,\beta} = \pm (q_{\alpha\beta} + 1)$. Существует инволютивный автоморфизм θ ал-

гебры Ли $\mathfrak{g}$, который переводит X_α в $X_{-\alpha}$ при всех $\alpha \in R$; мы получаем, что $\theta(h) = -h$ при всех $h \in \mathfrak{h}$. Тогда $\mathbf{Z}$-подмодуль в $\mathfrak{g}_\mathbf{Z}$, порожденный элементами H_α и X_α, является $\mathbf{Z}$-подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а каноническое отображение $\mathfrak{g}_\mathbf{Z} \otimes_\mathbf{Z} k \to \mathfrak{g}$ — изоморфизмом.

Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ получается из расщепленной полупростой алгебры Ли над $\mathbf{Q}$ расширением поля скаляров.

10) Группа Вейля, группа весов, ... системы корней R называется группой Вейля, группой весов, ... расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. В дальнейшем группа Вейля обозначается через W. Мы рассматриваем ее действие не только на $\mathfrak{h}^*$, но также и на $\mathfrak{h}$ (с помощью переноса структуры). Если через $\mathfrak{h}_\mathbf{Q}$ (соотв. $\mathfrak{h}^*_\mathbf{Q}$) обозначить векторное подпространство в $\mathfrak{h}$ (соотв. в $\mathfrak{h}^*$) над полем $\mathbf{Q}$, порожденное элементами H_α (соотв. α), то пространство $\mathfrak{h}$ (соотв. $\mathfrak{h}^*$) канонически отождествляется с пространством $\mathfrak{h}_\mathbf{Q} \otimes_\mathbf{Q} k$ (соотв. с $\mathfrak{h}^*_\mathbf{Q} \otimes_\mathbf{Q} k$) и пространство $\mathfrak{h}^*_\mathbf{Q}$ отождествляется с дуальным пространством к $\mathfrak{h}_\mathbf{Q}$. Камеры Вейля системы R мы рассматриваем или в пространстве $\mathfrak{h}_\mathbf{R} = \mathfrak{h}_\mathbf{Q} \otimes_\mathbf{Q} \mathbf{R}$, или в $\mathfrak{h}^*_\mathbf{R} = \mathfrak{h}^*_\mathbf{Q} \otimes_\mathbf{Q} \mathbf{R}$.

11) Пусть Φ — форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $\alpha + \beta \neq 0$, то пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{g}^\beta$ ортогональны относительно Φ. Ограничение формы Φ на $\mathfrak{g}^\alpha \times \mathfrak{g}^{-\alpha}$ невырожденно. Если $x, y \in \mathfrak{h}$, то $\Phi(x, y) = \sum_{\alpha \in R} \alpha(x)\alpha(y)$. Мы получаем, что $\Phi(H_\alpha, H_\beta) \in \mathbf{Z}$. Ограничение формы Φ на $\mathfrak{h}$ инвариантно относительно группы Вейля W и невырожденно; ограничение формы Φ на $\mathfrak{h}_\mathbf{Q}$ положительно определено.

12) С точностью до изоморфизма системы корней расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ зависят только от $\mathfrak{g}$ и не зависят от выбора подалгебры Картана $\mathfrak{h}$. Допуская вольность речи, мы называем группу Вейля, группу весов, ... расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ также группой Вейля, группой весов, ... алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Если R_1 — приведенная система корней, то существует такая полупростая расщепленная алгебра Ли $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$, что ее система корней $R(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1)$ изоморфна R_1; такая расщепленная алгебра Ли определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Классификация расщепляемых полупростых алгебр Ли, таким образом, сводится к классификации систем корней.

Подалгебры

13) Если $P \subset R$, то положим $\mathfrak{g}^P = \bigoplus_{\alpha \in P} \mathfrak{g}^\alpha$ и $\mathfrak{h}_P = \sum_{\alpha \in P} kH_\alpha$. Пусть $P \subset R$, $\mathfrak{h}'$ — подпространство векторного пространства $\mathfrak{h}$

и $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{g}^P$. Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{a}$ была подалгеброй в $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы P было замкнутым подмножеством системы корней R и чтобы пространство $\mathfrak{h}'$ содержало пространство $\mathfrak{h}_{P \cap (-P)}$. Чтобы алгебра Ли $\mathfrak{a}$ была редуктивна в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы $P = -P$. Чтобы алгебра Ли $\mathfrak{a}$ была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы $P \cap (-P) = \varnothing$.

14) Пусть P — замкнутое подмножество системы корней R, и пусть $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^P$. Следующие условия эквивалентны:

(i) $\mathfrak{b}$ — максимальная разрешимая подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$;

(ii) $P \cap (-P) = \varnothing$ и $P \cup (-P) = R$;

(iii) существует такая камера C в системе R, что $P = R_+(C)$ (см. VI, § 1, n° 6).

Подалгеброй Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называется подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ и удовлетворяющая приведенным выше условиям. Подалгебра $\mathfrak{b}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ее подалгеброй Бореля, если существует такая расщепляющая подалгебра Картана $\mathfrak{h}'$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$. Если поле k алгебраически замкнуто, то это эквивалентно тому, что $\mathfrak{b}$ — максимальная разрешимая подалгебра в $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{R_+(C)}$ — подалгебра Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Наибольший нильпотентный идеал алгебры Ли $\mathfrak{b}$ равен $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{g}^{R_+(C)}$. Пусть B — базис системы корней R, ассоциированный с камерой C. Алгебра Ли $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ порождается подпространствами $\mathfrak{g}^\alpha$, где $\alpha \in B$.

Если $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ — подалгебры Бореля алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то в $\mathfrak{g}$ существует подалгебра Картана, содержащаяся в $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}'$; такая подалгебра Картана является расщепляющей.

15) Пусть P — замкнутое подмножество в системе корней R и $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^P$. Следующие условия эквивалентны:

(i) алгебра Ли $\mathfrak{p}$ содержит подалгебру Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$;

(ii) $P \cup (-P) = R$;

(iii) существует такая камера C системы корней R, что $P \supset R_+(C)$.

Параболической подалгеброй расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называется подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая подалгебру Картана $\mathfrak{h}$ и удовлетворяющая приведенным выше условиям. Подалгебра $\mathfrak{p}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется параболической, если существует такая расщепляющая подалгебра Картана $\mathfrak{h}'$ в $\mathfrak{g}$, что $\mathfrak{p}$ — параболическая подалгебра расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$.

Пусть $\mathfrak{p}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}^P$ — параболическая подалгебра расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, Q — множество таких корней $\alpha\in P$, что $-\alpha\notin P$ и $\mathfrak{s}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}^{P\cap(-P)}$. Тогда $\mathfrak{p}=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{g}^Q$, алгебра Ли $\mathfrak{s}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^Q$ — наибольший нильпотентный идеал и нильпотентный радикал в алгебре Ли $\mathfrak{p}$. Центр алгебры Ли $\mathfrak{p}$ равен 0.

Автоморфизмы

16) Подгруппа группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$,порожденная элементами $e^{\mathrm{ad}\,x}$, где x — нильпотентный элемент, совпадает с группой $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ элементарных автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Это нормальная подгруппа в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, и она совпадает со своей производной группой.

Если $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k, то группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ естественным образом вкладывается в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}\otimes_k\bar{k})$. Положим

$$\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})=\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\cap\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}\otimes_k\bar{k}).$$

Это нормальная подгруппа группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, и она не зависит от выбора замыкания $\bar{k}$. Мы имеем

$$\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})\subset\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})\subset\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Производная группа группы $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ совпадает с $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ и $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ замкнуты в $\mathrm{End}_k(\mathfrak{g})$ в топологии Зарисского, $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ совпадает с компонентой нейтрального элемента в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, и группа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ всюду плотна в $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$.

Пусть B — базис системы корней R и $\mathrm{Aut}(R, B)$ — группа автоморфизмов системы корней R, относительно которой B устойчив. Тогда группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ является полупрямым произведением подгруппы, изоморфной $\mathrm{Aut}(R, B)$, и подгруппы $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$; в частности, факторгруппа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ изоморфна группе $\mathrm{Aut}(R, B)$, которая в свою очередь изоморфна группе автоморфизмов графа Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

17) Разметкой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется тройка $(\mathfrak{h}', B, (X_\alpha)_{\alpha\in B})$, где $\mathfrak{h}'$ — расщепляющая подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, B — базис системы корней $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$ и X_α — отличный от нуля элемент пространства $\mathfrak{g}^\alpha$ для всех $\alpha\in B$. Группа $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ просто транзитивно действует на множестве разметок алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Группа $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ транзитивно действует на множестве пар $(\mathfrak{k}, \mathfrak{b})$, где $\mathfrak{k}$ — расщепляющая подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{b}$ — подалгебра Бореля расщепленной алгебры Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$.

18) Обозначим через $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ множество таких автоморфизмов $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, что $s(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Положим

$$\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}),$$
$$\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}).$$

Если $s \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$, то отображение, контрагредиентное к отображению $s \mid \mathfrak{h}$, является элементом группы $A(R)$ автоморфизмов системы корней R; обозначим этот элемент через $\varepsilon(s)$. Отображение ε — гомоморфизм группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ в группу $A(R)$. При этом $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}) . \mathrm{Ker}\, \varepsilon$ и

$$\varepsilon(\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})) = \varepsilon(\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})) = W.$$

Пусть $T_P = \mathrm{Hom}(P(R), k^*)$, $T_Q = \mathrm{Hom}(Q(R), k^*)$. Вложение группы $Q(R)$ в $P(R)$ определяет гомоморфизм T_P в T_Q. Пусть $\mathrm{Im}(T_P)$ — его образ. Если $t \in T_Q$, то пусть $f(t)$ — такой эндоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что для любого $\alpha \in R \cup \{0\}$ ограничение $f(t) \mid \mathfrak{g}^\alpha$ — гомотетия с коэффициентом $t(\alpha)$. Тогда $f(t) \in \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и f — инъективный гомоморфизм группы T_Q в группу $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Последовательности

$$\{1\} \to T_Q \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \xrightarrow{\varepsilon} A(R) \to \{1\}$$

и

$$\{1\} \to T_Q \xrightarrow{f} \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \xrightarrow{\varepsilon} W \to \{1\}$$

точны. Имеет место включение $f(\mathrm{Im}(T_P)) \subset \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$; переходя к факторгруппам, получаем определенный эндоморфизмом f сюръективный[1]) гомоморфизм $T_Q/\mathrm{Im}(T_P) \to \mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})/\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$. Группа $f(T_Q)$ замкнута в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ в топологии Зарисского, и группа $f(\mathrm{Im}(T_P))$ всюду плотна в $f(T_Q)$.

Конечномерные модули

19) Пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Для любого $\mu \in \mathfrak{h}^*$ пусть V^μ — множество таких элементов $v \in V$, что $h . v = \mu(h) v$ при всех $h \in \mathfrak{h}$. Размерность пространства V^μ называется кратностью μ в модуле V. Если эта кратность не меньше 1, т. е. если $V^\mu \neq 0$, то μ называется весом модуля V. Имеет место разложение $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V^\mu$. Любой вес модуля V принадлежит группе $P(R)$. Если μ — вес модуля V, а $w \in W$, то $w\mu$ — вес модуля V той же кратности, что и μ. Если $v \in V^\mu$ и $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, то $x . v \in V^{\mu+\alpha}$.

[1]) На самом деле этот гомоморфизм биективен (§ 7, упражнение 26 г)).

20) Пусть B — базис системы корней R. Выбор B определяет отношение порядка на пространстве $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}}$: неотрицательными элементами пространства $\mathfrak{h}^*_{\mathbf{Q}}$ являются линейные комбинации элементов из B с неотрицательными рациональными коэффициентами. Обозначим через $Q_+(R)$ (соотв. через R_+) множество положительных элементов группы $Q(R)$ (соотв. системы R).

Пусть V — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда модуль V имеет старший вес λ. Кратность этого веса равна 1, и этот вес доминантный: если $\alpha \in R_+$, то $\lambda(\mathrm{H}_\alpha)$ — целое число $\geqslant 0$. Если $\mathfrak{g}^\alpha V^\lambda = 0$, то $\alpha \in R_+$. Любой вес модуля V имеет вид $\lambda - \nu$, где $\nu \in Q_+(R)$; обратно, если доминантный вес имеет вид $\lambda - \nu$, где $\nu \in Q_+(R)$, то это вес модуля V.

21) Два конечномерных простых модуля, имеющие одинаковые старшие веса, изоморфны. Любой доминантный вес является старшим весом некоторого конечномерного простого $\mathfrak{g}$-модуля.

Любой конечномерный простой $\mathfrak{g}$-модуль абсолютно прост.

22) Пусть Φ — форма Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $C \in U(\mathfrak{g})$ — соответствующий элемент Казимира, $\langle .,. \rangle$ — форма на пространстве $\mathfrak{h}^*$, обратная к $\Phi | \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$, и $\rho = \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in R_+} \alpha$. Пусть V — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ. Тогда C_V — гомотетия с коэффициентом $\langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle$.

23) Пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль, V^* — дуальный модуль. Для того чтобы элемент $\mu \in \mathfrak{h}^*$ был весом модуля V^*, необходимо и достаточно, чтобы элемент $-\mu$ был весом модуля V, и кратность веса μ в модуле V^* равна кратности веса $-\mu$ в модуле V. Если V — простой модуль со старшим весом λ, то V^* — простой модуль со старшим весом $-w_0\lambda$, где w_0 — элемент группы W, который переводит базис B в базис $-B$.

24) Пусть V — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ и $\mathscr{B}$ — векторное пространство $\mathfrak{g}$-инвариантных билинейных форм на пространстве V. Пусть m — целое число, равное $\sum\limits_{\alpha \in R_+} \lambda(H_\alpha)$, и пусть элемент $w_0 \in W$ такой же, как в п. 23). Если $w_0\lambda \neq -\lambda$, то пространства V и V^* не изоморфны и $\mathscr{B} = 0$. Если $w_0\lambda = -\lambda$, то $\dim \mathscr{B} = 1$ и все ненулевые элементы в пространстве $\mathscr{B}$ невырожденны; если m — четное (соотв. нечетное) число, то любая форма из пространства $\mathscr{B}$ симметрическая (соотв. знакопеременная).

25) Пусть $\mathbf{Z}[P]$ — групповая алгебра группы $P = P(R)$ с коэффициентами в $\mathbf{Z}$. Если $\lambda \in P$, то обозначим через e^λ соответ-

ствующий элемент алгебры $\mathbf{Z}[P]$. Элементы e^{λ}, $\lambda \in P$, образуют базис над $\mathbf{Z}$ групповой алгебры $\mathbf{Z}[P]$, и при всех $\lambda, \mu \in P$ выполнено соотношение $e^{\lambda}e^{\mu} = e^{\lambda+\mu}$.

Пусть V — конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль. Характером модуля V (обозначение $\operatorname{ch} V$) называется элемент $\sum_{\mu \in P} (\dim V^{\mu}) e^{\mu}$ групповой алгебры $\mathbf{Z}[P]$. Этот элемент принадлежит подалгебре $\mathbf{Z}[P]^{W}$ алгебры $\mathbf{Z}[P]$, образованной W-инвариантными элементами из $\mathbf{Z}[P]$. Выполняются соотношения

$$\operatorname{ch}(V \oplus V') = \operatorname{ch} V + \operatorname{ch}(V')$$

и

$$\operatorname{ch}(V \otimes V') = (\operatorname{ch} V) . (\operatorname{ch} V').$$

Два конечномерных $\mathfrak{g}$-модуля с одинаковыми характерами изоморфны.

Для любого корня $\alpha \in B$ пусть V_{α} — простой $\mathfrak{g}$-модуль, старший вес которого — фундаментальный вес $\bar{\omega}_{\alpha}$, соответствующий корню α. Элементы $\operatorname{ch} V_{\alpha}$, $\alpha \in B$, алгебраически независимы и порождают $\mathbf{Z}$-алгебру $\mathbf{Z}[P]^{W}$.

26) Пусть ρ — полусумма положительных корней. Для любого элемента $w \in W$ пусть $\varepsilon(w)$ — определитель автоморфизма w, равный ± 1. Если V — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ, то

$$\Big(\sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, e^{w\rho}\Big) . \operatorname{ch} V = \sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, e^{w(\lambda+\rho)}$$

и

$$\dim V = \prod_{\alpha \in R_{+}} \frac{\langle \lambda + \rho, H_{\alpha} \rangle}{\langle \rho, H_{\alpha} \rangle}.$$

27) Для любого веса $\nu \in P$ пусть $\mathfrak{P}(\nu)$ — число таких наборов $(n_{\alpha})_{\alpha \in R_{+}}$, где n_{α} — целые неотрицательные числа, что $\nu = \sum_{\alpha \in R_{+}} n_{\alpha}\alpha$. Пусть V — простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом λ. Если $\mu \in P$, то кратность веса μ в пространстве V равна

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w)\, \mathfrak{P}(w(\lambda+\rho) - (\mu+\rho)).$$

28) Пусть V, V', V'' — простые конечномерные $\mathfrak{g}$-модули, λ, μ, ν — их старшие веса. В модуле $V \otimes V'$ длина изотипной компоненты типа V'' равна

$$\sum_{w,\, w' \in W} \varepsilon(w w')\, \mathfrak{P}(w(\lambda+\rho) + w'(\mu+\rho) - (\nu+2\rho)).$$

В частности, если $\nu=\lambda+\mu$, то соответствующая изотипная компонента проста и порождается пространством $(V\otimes V')^{\lambda+\mu}=V^{\lambda}\otimes V'^{\mu}$.

Инвариантные полиномиальные функции

29) Алгебра полиномиальных функций на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ отождествляется с симметрической алгеброй $\mathsf{S}(\mathfrak{g}^*)$ пространства $\mathfrak{g}^*$ и, следовательно, является каноническим $\mathfrak{g}$-модулем; поэтому можно определить инвариантные полиномиальные функции на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $f\in\mathsf{S}(\mathfrak{g}^*)$. Для того чтобы функция f была инвариантной, необходимо и достаточно, чтобы $f\circ s=f$ при всех $s\in\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$ или чтобы $f\circ s=f$ при всех $s\in\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

30) Пусть $I(\mathfrak{g}^*)$ — алгебра инвариантных полиномиальных функций на $\mathfrak{g}$ и $\mathsf{S}(\mathfrak{h}^*)^W$ — алгебра W-инвариантных полиномиальных функций на подалгебре Картана $\mathfrak{h}$. Пусть

$$i\colon\ \mathsf{S}(\mathfrak{g}^*)\to\mathsf{S}(\mathfrak{h}^*)$$

— гомоморфизм ограничения. Отображение $i\,|\,I(\mathfrak{g}^*)$ является изоморфизмом алгебры $I(\mathfrak{g}^*)$ на $\mathsf{S}(\mathfrak{h}^*)^W$. Если l — ранг алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то в алгебре $I(\mathfrak{g}^*)$ существует l однородных элементов, которые алгебраически независимы и порождают эту алгебру.

31) Для того чтобы элемент a алгебры Ли $\mathfrak{g}$ был нильпотентен, необходимо и достаточно, чтобы $f(a)=0$ для любой однородной функции f из алгебры $I(\mathfrak{g}^*)$, степень которой >0.

32) Пусть $s\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Для того чтобы элемент s принадлежал группе $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{g})$, необходимо и достаточно, чтобы $f\circ s=f$ при всех $f\in I(\mathfrak{g}^*)$.

$\mathfrak{sl}_2$-тройки

33) $\mathfrak{sl}_2$-тройкой в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется набор (x, h, y) элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, отличный от $(0, 0, 0)$ и такой, что $[h, x]=2x$, $[h, y]=-2y$, $[x, y]=-h$. Тогда x, y — нильпотентные элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а элемент h полупрост.

34) Пусть x — ненулевой нильпотентный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда существуют такие элементы h, $y\in\mathfrak{g}$, что (x, h, y) есть $\mathfrak{sl}_2$-тройка.

35) Пусть (x, h, y) и (x', h', y') суть $\mathfrak{sl}_2$-тройки в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) существует такой автоморфизм $s\in\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, что $sx=x'$;

б) существует такой автоморфизм $s\in\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, что $sx=x'$, $sh=h'$, $sy=y'$.

36) Если поле k алгебраически замкнуто, то условия а) и б) из п. 35) эквивалентны условию

в) существует такой автоморфизм $s \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, что $sh = h'$.

Кроме того, число классов сопряженных относительно группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ ненулевых нильпотентных элементов не превосходит 3^l, где l — ранг алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

37) Нильпотентный элемент x в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется главным, если размерность его равна рангу алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Главные нильпотентные элементы в алгебре $\mathfrak{g}$ существуют. Если поле k алгебраически замкнуто, то все главные нильпотентные элементы сопряжены относительно группы $\mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., дом 2, издательство „Мир“.