

В. Босс

ЛЕКЦИИ *по*
МАТЕМАТИКЕ

ТОМ

15

**Нелинейные операторы
и неподвижные точки**

МОСКВА



URSS

Босс В.

**Лекции по математике. Т. 15: Нелинейные операторы
и неподвижные точки: Учебное пособие.**

М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 224 с.

Содержание группируется вокруг проблематики разрешимости нелинейных уравнений, широко известной отдельными принципами неподвижной точки. Главное внимание уделяется топологическим методам, основанным на понятиях степени отображения и вращения векторного поля. Большинство вопросов рассматриваются впервые в учебной литературе. В качестве приложений затрагиваются динамические системы и бифуркации.

Изложение отличается краткостью и прозрачностью.

Для студентов, преподавателей, инженеров и научных работников.


Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 14. Зак. № 3496.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-01328-4

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru
	Тел./факс: 7 (499) 135-42-16
	Тел./факс: 7 (499) 135-42-46
URSS	

8715 ID 111667



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Содержание

Предисловие к «Лекциям»	7
Предисловие к пятнадцатому тому	9
Глава 1. Симптомы и задачи	10
1.1. Линейный фон	10
1.2. Нелинейные системы	13
1.3. Парадоксы нелинейных цепей	18
1.4. Бесконечномерные задачи	21
Глава 2. Метрические инструменты	24
2.1. Принцип сжимающих отображений	24
2.2. Примеры и вариации	27
2.3. Нормы и линейные приближения	29
2.4. Теорема о неявной функции	33
2.5. Обращение принципов сжатия	35
Глава 3. Топологические принципы неподвижной точки	40
3.1. Вращение векторного поля	40
3.2. Вращение как вращение	45
3.3. Топологические аномалии	47
3.4. Гомотопия векторных полей	48
3.5. Ядро теории	51
3.6. Разрешимость уравнений	54
3.7. О теореме Брауэра	55
3.8. Теорема Карамардиана	57

Глава 4. Степень отображения и вращение	60
4.1. Дифференциальная преамбула	60
4.2. Степень отображения	66
4.3. Свойства степени	68
4.4. Степень и вращение	70
4.5. Невырожденное продолжение поля	74
Глава 5. К теории вращения векторного поля	77
5.1. Индексы и алгебраическое число нулей	77
5.2. Индексы на бесконечности	79
5.3. Накрытия и гомеоморфизмы	80
5.4. Параметрические уравнения	83
5.5. Лемма Лере—Шаудера	87
5.6. Итерации и принцип Браудера	89
5.7. Векторные поля нормалей	91
5.8. Нечетные поля	94
Глава 6. Динамические системы	95
6.1. Оператор сдвига по траекториям	95
6.2. Вынужденные колебания	97
6.3. Градиентные поля и невозвращаемость	102
6.4. О потенциалах	104
6.5. Деформационные мотивы	107
6.6. Нужна ли гладкость	112
6.7. Негradientные системы	113
6.8. Автоколебания и последование	115
Глава 7. Вполне непрерывные поля	117
7.1. Стягиваемость сферы по себе	117
7.2. Компактные операторы	119
7.3. Вращение вполне непрерывного поля	121
7.4. Вычисление и свойства	123
7.5. Невырожденные продолжения	127

7.6. Теоремы родственности	128
7.7. Итерации операторов	131
Глава 8. Нелинейные операторы в пространствах с конусом . .	135
8.1. Полуупорядоченность и авансы	135
8.2. Специфика монотонности	139
8.3. Феномен инвариантности конуса	141
8.4. Антураж текущего фарватера	146
8.5. Операторы сдвига в условиях полуупорядоченности	147
8.6. Конус положительно определенных матриц	150
8.7. Гетерогонные отображения	153
8.8. Гетерогонная динамика	157
8.9. Супероднородные операторы	158
8.10. K -системы	162
8.11. Теоремы о накрытиях и неравенства	166
8.12. Универсальные P -системы	168
8.13. Системы с ограниченным межэлементным взаимодействием	171
8.14. Комментарии и дополнения	173
Глава 9. Возмущения и бифуркации	175
9.1. О содержательных задачах и абстрактных постановках	175
9.2. Принцип смены индекса	178
9.3. Перестройки фазового портрета	181
9.4. Деформации с ограничениями	183
9.5. Многопараметрические задачи	186
9.6. Итерационные процессы	189
9.7. Иерархия циклов	193
9.8. Многомерный сценарий	197
9.9. Загадочность циклов типа Γ_3	202
9.10. Устойчивость и хаос	204

Глава 10. Многозначные поля	206
10.1. Причины многозначности	206
10.2. Замкнутые отображения	209
10.3. Отображения с выпуклыми образами	210
10.4. Теоремы о неподвижных точках	212
Сокращения и обозначения	216
Литература	218
Предметный указатель	220

Предисловие к «Лекциям»

*Whether you think you can or whether
you think you can't, you're right!*

Henry Ford

Для нормального изучения любого математического предмета необходимы, по крайней мере, 4 ингредиента:

- 1) *живой учитель;*
- 2) *обыкновенный подробный учебник;*
- 3) *рядовой задачник;*
- 4) *учебник, освобожденный от рутины, но дающий общую картину, мотивы, связи, «что зачем».*

До четвертого пункта у системы образования руки не доходили. Конечно, подобная задача иногда ставилась и решалась, но в большинстве случаев — при параллельном исполнении функций обыкновенного учебника. Акценты из-за перегрузки менялись, и намерения со второй-третьей главы начинали дрейфовать, не достигая результата. В виртуальном пространстве так бывает. Аналог объединения гантели с теннисной ракеткой перестает решать обе задачи, хотя это не сразу бросается в глаза.

«Лекции» ставят 4-й пункт своей главной целью. Сопутствующая идея — экономия слов и средств. Правда, на фоне деклараций о краткости и ясности изложения предполагаемое издание около 20 томов может показаться тяжеловесным, но это связано с обширностью математики, а не с перегрузкой деталями.

Необходимо сказать, на кого рассчитано. Ответ «на всех» выглядит наивно, но он в какой-то мере отражает суть дела. Обзорный вид, обнаженные конструкции доказательств, — такого сорта книги удобно иметь под рукой. Не секрет, что специалисты

самой высокой категории тратят массу сил и времени на освоение математических секторов, лежащих за рамками собственной специализации. Здесь же ко многим проблемам предлагается короткая дорога, позволяющая быстро освоить новые области и освежить старые. Для начинающих «короткие дороги» тем более полезны, поскольку облегчают движение любыми другими путями.

В вопросе «на кого рассчитано», — есть и другой аспект. На сильных или слабых? На средний вуз или физтех? Опять-таки выходит «на всех». Звучит странно, но речь не идет о регламентации кругозора. Простым языком, коротко и прозрачно описывается предмет. Из этого каждый извлечет свое и двинется дальше.

Наконец, последнее. В условиях информационного наводнения инструменты вчерашнего дня перестают работать. Не потому, что изучаемые дисциплины чересчур разрослись, а потому, что новых секторов жизни стало слишком много. И в этих условиях мало кто готов уделять много времени чему-то одному. Поэтому учить всему — надо как-то иначе. «Лекции» дают пример. Плохой ли, хороший — покажет время. Но в любом случае, это продукт нового поколения. Те же «колеса», тот же «руль», та же математическая суть, — но по-другому.

Предисловие к пятнадцатому тому

*When my horse is running good,
I don't stop to give him sugar.*

William Faulkner

Том планировался по нелинейному анализу¹⁾, но мало что поместилось. И содержание в итоге было сгруппировано вокруг неподвижных точек. Тематика широко известна по названию, но не очень хорошо — по существу. Тогда как в разрешимость уравнений и свойства решений — все упирается. В качестве приложений рассматриваются динамические системы и бифуркации.

¹⁾ Классический анализ в своей основе линеен, ибо скользит по нелинейностям, фокусируясь на малых окрестностях. Нелинейный анализ стремится видеть задачу целиком, но не всегда получается.

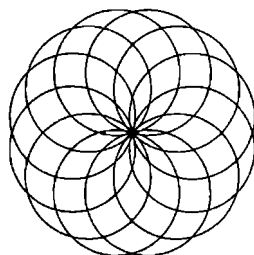
Глава 1

Симптомы и задачи

Imagination is more important than knowledge. Knowledge is limited¹⁾.

Einstein

Линейная теория опирается на один простой трюк, правда, выдающийся. На принцип суперпозиции решений. Но разнообразие обстоятельств порождает такой букет следствий, что забывается даже, откуда изобилие. Нелинейная карусель менее успешна. Нужны другие инструменты. Плюс к тому, линейные стереотипы мышления то и дело заманивают в ловушку, подстерегая на ровном месте.



1.1. Линейный фон

Линейные модели возникают когда как. Если система описывается конечным набором параметров

$$x = \{x_1, \dots, x_n\},$$

то поиск равновесия сводится к решению уравнения $Ax + b = 0$. И вообще, система оказывается запечатлена в матрице A .

При изучении динамических процессов возникают *однородные* либо *неоднородные* дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{x} = Ax + b(t),$$

¹⁾ Эпиграфы и ремарки даются без перевода умышленно. На другом языке состарившиеся истины иногда звучат откровениями, чему субтитры только мешают. Немаловажны и побочные эффекты.

и тут кажется, что ситуация кардинально другая. Отчасти это действительно так, но диффуры можно записывать в виде $Lx = 0$ с дифференциальным оператором

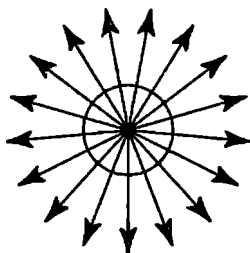
$$L = \frac{d}{dt} - A, \quad \text{либо} \quad L = \frac{d}{dt} - A - b(\cdot),$$

и разница с предыдущим заключается в том, что $Ax + b = 0$ — уравнение в \mathbb{R}^n , а $Lx = 0$ необходимо рассматривать в каком-либо бесконечномерном пространстве. То есть уравнения одинаковые, пространства разные.

В случае $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = b(t)$ задача опять-таки редуцируется к $Lx = b(t)$ с линейным дифференциальным оператором

$$Lx = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x.$$

То же самое происходит в системах с распределенными параметрами, где линейные уравнения с частными производными обретают форму $Lx = b$ по тому же рецепту [4, т. 11].



Таким образом, ядро линейной математики образуют линейные операторы, характеризующиеся свойством

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly, \quad (1.1)$$

которое как раз обеспечивает принцип суперпозиции:

если x_1 и x_2 — решения $Lx = 0$, то решением является также

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2$$

при произвольных константах α, β . В случае неоднородного уравнения принцип суперпозиции приобретает иную форму, хотя по сути ту же: если $x_1 = L^{-1}b_1$ — решение уравнения $Lx = b_1$, а $x_2 = L^{-1}b_2$ — решение $Lx = b_2$, то $\alpha x_1 + \beta x_2$ — решение

$$Lx = \alpha b_1 + \beta b_2,$$

« силу линейности обратного оператора L^{-1} .

Благодаря этому, если $x_k(t)$ — решение $Lx = a_k \sin kt$ и

$$b(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kt,$$

то $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$ — решение $Lx = b(t)$, что позволяет решать уравнения на основе разложения правой части в ряд Фурье.

Это уже фокус с далеко идущими последствиями, каковые рождают частотные методы изучения линейных систем. На соответствующем этаже корни уходят на второй план, и начинает казаться, что все дело в гармоническом анализе. Потом еще хуже, феномены типа интерференции, дифракции — начинают восприниматься как атрибуты устройства Вселенной, а не следствия суперпозиции (1.1).

Следствия (1.1), конечно, намного богаче. Частотный анализ — не единственная платформа, на которой можно размещать линейные системы. Важный срез образуют различные интегральные представления. Скажем, обращение дифференциального оператора в линейной задаче $Lx = b(t)$ обычно имеет вид²⁾

$$x(t) = L^{-1}b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)b(s) ds, \quad (1.2)$$

$G(t, s)$ — функция Грина³⁾.

В стационарном случае $G(t, s)$ является функцией одного параметра $\tau = t - s$, и (1.2) переходит в

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)b(t - \tau) d\tau, \quad (1.3)$$

²⁾ При определенных начальных или краевых условиях.

³⁾ В теории автоматического регулирования $G(t, s)$ называют *импульсной переходной функцией*, и на систему $Lx = b(t)$ смотрят как на преобразование входа $b(t)$ в выходной сигнал $x(t)$.

где $G(\tau)$ определяется как реакция системы на единственное импульсное воздействие $\delta(\tau)$ из уравнения $LG(\tau) = \delta(\tau)$. Таким образом, чтобы вычислять реакцию системы на любое внешнее воздействие $b(t)$ по формуле (1.3), реакцию системы достаточно измерить один раз на воздействие $\delta(\tau)$. На вход подается дельта-функция — и объект «расшифрован».

Перечисленное относится к аппаратным средствам, и всяк понимает, что за пределами линейной теории дееспособность этих инструментов ограничена. Но вот добываемые плоды нередко кажутся универсальными законами мироздания. Сознание закупоривается, и все выходящее за пределы линейной догматики представляется ересью.

1.2. Нелинейные системы

Учет нелинейных зависимостей, конечно, порождает новые феномены, однако фантазия быстро иссякает. Что первым делом приходит в голову при нелинейном усложнении моделей?

Если линейные системы *общего положения* имеют единственное равновесие, любая окрестность которого представляет слепок фазового пространства в целом⁴⁾, то в нелинейном случае это удобство теряется. Положений равновесия может быть несколько, разных по характеру устойчивости. Возможны также устойчивые колебательные режимы. Более-менее очевидна потенциальная возможность хитроумных *бифуркаций* в связи с ветвлением решений при изменении параметров.

Тут поток воображения и пересыхает. Особенно, если не хватает странствий по территории содержательных задач, каковые в математической среде не так популярны, но важны с точки зрения широты диапазона вопросов. Последнее существенно, ибо

⁴⁾ Локальная устойчивость, например, означает — глобальную, и т. п.

не имея вопросов, какие ответы можно искать? Поэтому к нелинейному анализу есть резон подходить с некоторым запасом практических ситуаций, питающих общие постановки задач и позволяющих проигрывать на себе абстрактные выводы.

Межотраслевой баланс. Пусть экономическая система состоит из n взаимосвязанных отраслей; i -я отрасль выпускает i -й продукт в количестве x_i , который внутри системы затрачивается в количестве

$$p_i(x_1, \dots, x_n) = p_i(x).$$

Чистый выпуск i -го продукта при этом равен

$$y_i = x_i - p_i(x),$$

и все сводится к изучению векторного уравнения⁵⁾

$$\begin{aligned} x - P(x) &= y, \\ P(x) &= \{p_1(x), \dots, p_n(x)\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь возникают следующие вопросы. Можно ли обеспечить заданный набор $y = \{y_1, \dots, y_n\}$ подходящим набором плановых выпусков

$$x = \{x_1, \dots, x_n\}?$$



Единственным ли образом это можно сделать? Можно ли обеспечить любой набор заданный набор чистых выпусков? Надо ли увеличивать объемы x_1, \dots, x_n для увеличения чистых выпусков? — Не всегда, кстати.

С формальной точки зрения перечисленные вопросы (и их логические продолжения) звучат примерно так. Существует ли решение уравнения (1.4) при заданном y ? Единственно ли оно? Существуют ли решения (1.4) при всех (в данном случае неотрицательных) y ? Если да, то однозначна ли и непрерывна ли функция $x(y)$?

Сбалансированный рост. Пусть в k -й период в системе имеются продукты в количествах $x^k = \{x_1^k, \dots, x_n^k\}$, из которых в следующий период может быть произведен набор продуктов

$$x^{k+1} = F(x^k).$$

⁵⁾ Если оператор $P(x)$ внутрисистемных затрат линеен, модель называется *леонтьевской*.

Возможность пропорционального роста выпусков сводится к вопросу о разрешимости параметрического уравнения ⁶⁾

$$F(x) = \lambda x, \quad \lambda > 1, \quad (1.5)$$

т. е. о существовании у нелинейного оператора F собственного вектора.

Рыночная модель. Допустим, на рынке продается n товаров, x_i — цена i -го товара, $f_i(x_1, \dots, x_n)$ — *избыточный спрос* на i -й товар ⁷⁾ (спрос минус предложение). Динамика цен естественна. Рыночная цена x_i растет, если $f_i(x) < 0$, и убывает, если $f_i(x) > 0$. В этом случае равновесным может быть лишь такой набор цен x , при котором все функции избыточного спроса обращаются в нуль ⁸⁾.

Задача опять-таки сводится к изучению нелинейного уравнения

$$f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\} = 0.$$

Существование и единственность решения автоматически попадают в фокус внимания, но появляются и специфические вопросы. В данном случае, например, описание системы (оператора f) довольно размыто. Едва ли можно рассчитывать, что функции избыточного спроса $f_i(x)$ известны сколько-нибудь точно в широких диапазонах изменения цен. В подобных ситуациях поначалу обычно возникает ощущение безвыходности. Как можно говорить о равновесии, если ничего не известно о системе? Конечно, если совсем ничего, — то никак. Но в таких случаях, как правило, все-таки есть информация качественного характера, чего бывает достаточно. Одной лишь *гетеротонности* иногда достаточно для далекоидущих выводов.

Равновесие по Нэшу. Пусть экономическая система состоит из n взаимосвязанных элементов (ячеек) A_i . Каждый A_i распоряжается выбором переменной $x_i \in X_i$, а $D_i(x_1, \dots, x_n)$ обозначает *функцию выигрыша* A_i . В теории игр x_i называют стратегией игрока A_i , что плохо укладывается в семантику слова «стратегия», но термин общепринят.

Описанная ситуация типична для экономики. Каждая ячейка имеет свою степень свободы ⁹⁾ x_i , но выбор x_i не определяет полностью собственный выигрыш D_i — кое-что зависит от действий других элементов системы. Возникает

⁶⁾ Требование $\lambda > 1$ проистекает из необходимости роста, а не затухания.

⁷⁾ Возможная зависимость f_i не только от собственной цены x_i — очевидна. Рост мясной цены увеличивает спрос на рыбу, а удорожание запчастей уменьшает спрос на изделие.

⁸⁾ Точнее говоря, вектор цен x^* считается равновесным, если для каждого i выполняется одно из двух: или $f_i(x^*) = 0$, или $f_i(x^*) < 0$, $x_i^* = 0$. Но бесплатные товары типа воздуха целесообразно исключать из рассмотрения.

⁹⁾ Объемы выпусков, заявки на сырье, график работ и т. д.

вопрос: какой выбор стратегий

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$$

будет равновесным? В принципе ответов может быть много. Один из широко распространенных вариантов — *равновесие по Нэшу*, в котором ни один из элементов не может добиться увеличения своего выигрыша изменением собственной переменной x_i . В естественных предположениях соответствующее равновесие \mathbf{x}^* будет решением системы уравнений

$$\frac{\partial D_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Более аккуратная и менее обязывающая формализация опирается на оператор

$$f(\mathbf{x}) = \{f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})\},$$

определяемый соотношениями

$$D_i(x_1, \dots, x_{i-1}, f_i(\mathbf{x}), x_{i+1}, \dots, x_n) = \max_{x_i \in X_i} D_i(\mathbf{x}),$$

в результате чего нэшевские решения становятся неподвижными точками оператора $f(\mathbf{x})$, т. е. либо решениями уравнения $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, либо (в многозначном варианте) решениями включения

$$\mathbf{x} \in f(\mathbf{x}).$$



Биологические сообщества. Пусть x_i обозначает численность i -й популяции в условиях сосуществования n биологических видов с общим ареалом обитания. Скорость изменения x_i (разность между рождаемостью и смертностью) в общем случае зависит не только от x_i , но и от других численностей x_j в силу взаимоотношений типа «хищник — жертва», конкуренции и др. Таким образом, динамика сообщества описывается некой системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

или в векторном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}). \quad (1.6)$$

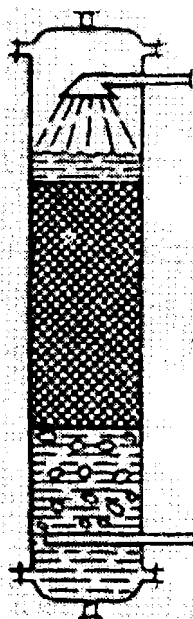
В правую часть (1.6) может входить некий вектор \mathbf{y} , символизирующий внешние воздействия на систему: отстрел или подкормка животных, использование ядохимикатов для борьбы с вредителями, вырубка леса, осушение болот, внедрение в сообщество новых видов и т. п. Динамика системы при этом описывается дифференциальным уравнением с параметром

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (1.7)$$



Разнообразие задач здесь достаточно велико: существование и устойчивость стационарных режимов и периодических колебаний, характер роста популяций, вырождение видов, бифуркационные изменения в системе и т. п. Все это, помноженное на многообразие конкретики, порождает разветвленную проблематику как биологического, так и математического толка.

Химические реакторы. Пусть в химической реакции участвуют n веществ, и x_i обозначает процентное содержание i -го реагента в смеси. Динамика системы описывается неким уравнением типа (1.7), где вектор u определяет внешние условия: температуру, давление, катализаторы, ингибиторы и т. п. На модельном уровне все сводится к упоминавшимся уже задачам. Но держать в поле зрения разное содержательное наполнение модели полезно по многим причинам. С одной стороны, физика задачи настраивает и ориентирует математическую мысль. С другой — независимая модель подталкивает к постановке «противоестественных в рассматриваемой области вопросов», ведущих иногда к неожиданным открытиям. Так или иначе, соприкосновение абстракции с конкретикой приводит ко взаимному обогащению сторон. Яркой иллюстрацией здесь может служить реакция Белоусова—Жаботинского (BZ-reaction).



Долгое время считалось, что автоколебания в химических системах невозможны. Открытие Белоусовым (1951) автоколебаний в реакции окисления лимонной кислоты броматом калия сначала было воспринято с недоверием, но в итоге породило ¹⁰⁾ многочисленные исследования, обогатившие как химию, так и абстрактную теорию нелинейных систем.

¹⁰⁾ Хотя и не без противодействия, характерного вообще для восприятия нового. Отказы в публикации, замалчивание, а то и высмеивание результатов, — все это сопутствует всякому приходу неожиданного. В то же время новое и неожиданное, как правило, оказывается «хорошо забытым старым», как и в данном случае, но это уже другая история.

1.3. Парадоксы нелинейных цепей

Рассмотрим ориентированный граф $G(P, E)$, где P — множество вершин, E — совокупность дуг. Каждое ребро $e \in E$ характеризуется тремя величинами: x_j — напряжение, y_j — ток, u_j — ЭДС. Вольт-амперные характеристики в дугах описываются функциями $y_j = f_j(x_j)$. Полный расчет электрической цепи выполняется на основе законов *Кирхгофа*, компактно записываемых в виде ¹¹⁾

$$Ry = 0, \quad Cx = Cu, \quad y = f(x), \quad (1.8)$$

где R — матрица инцидентий графа G , C — матрица циклов.

Иногда возникает иллюзия, что разрешимость системы (1.8) вытекает из физических соображений. Мол, соберем соответствующую электрическую схему и включим ее. В системе установится некоторое распределение токов и напряжений, которое и будет искомым решением. Увы, рассуждение не выдерживает критики. Простейшие примеры показывают, что решение нелинейной системы уравнений (1.8) может не существовать. Нетрудно понять, что в соответствующей электрической схеме при этом никакого стационарного распределения токов и напряжений не установится, а будет протекать сложный динамический процесс, определяемый малыми (паразитными) индуктивностями и емкостями, которые не учитываются моделью (1.8).

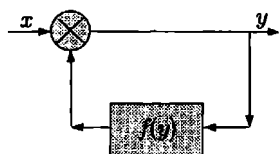
Сказанное подчеркивает не только важность проблемы существования решения, но еще и роль малых параметров в более широком контексте. Допустим, решение (1.8) существует и единственно. Есть ли основания ожидать, что поведение реальной системы будет ему соответствовать? Ведь паразитные индуктивности и емкости ¹²⁾ есть всегда. Не будут ли они играть окаянную

¹¹⁾ Подобные модели могут иметь не обязательно электрическую природу. Таковы модели финансовых потоков, товарных, информационных, потоков нефти в трубопроводах, пассажиропотоков и т. п.

¹²⁾ Спасаящие от противоречия в предыдущем случае.

роль? По сути это стандартный вопрос о структурной устойчивости модели, которая должна быть нечувствительна к малым возмущениям. Иначе что можно сказать о системе, которая заведомо, хотя и мало, отличается от модели?

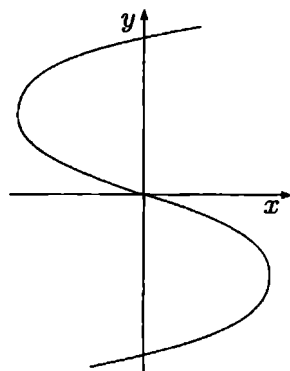
Присутствие малых параметров за кадром модели способно играть также позитивную роль, помогая выходить из логических тупиков. Вот простой пример блок-схемы ¹³⁾, где парадокс возникает на ровном месте.



Если в цепи положительной обратной связи (рисунок слева) стоит функциональный преобразователь

$$f(y) = \sqrt{|y|} \operatorname{sign} y,$$

то результирующая связь между входом x и выходом y определяется равенством $x + f(y) = y$, что приводит к многозначной зависимости выхода от входа, изображенной справа. Неожиданно выясняется, что выход не определяется однозначно входом, хотя все звенья системы детерминированы (осуществляют взаимно однозначное преобразование сигналов) — и не ясно, каков же выход y в реальной системе при данном входе x .



Неясен и выход из положения в рамках статической модели. Затруднение ликвидирует учет динамики. Задержки в прохождении сигнала по цепи все ставят на свои места. Разумеется, нет необходимости вводить чистое запаздывание. Адекватности описания можно достичь и с помощью обыкновенных диффузов, моделирующих «ничтожные» инерционные свойства системы.

¹³⁾ Дуги цепей выше характеризовались двумя переменными (ток и напряженье), каковых в общем случае может быть больше или меньше (многoproдуктовые либо однопродуктовые потоки, например), а законы «стыковки» — могут быть не обязательно кирхгофовскими.

Пример в некотором роде является простейшим идеологическим эталоном, побуждающим к осторожности при абстрагировании. В более громоздких моделях неприятности менее очевидны, но их природа так же примитивна, хотя замаскирована и приукрашена. Поэтому тривиальными с виду примерами не стоит пренебрегать. Наоборот, их стоит культивировать. Потому что в миниатюре они играют роль сторожевых пунктов, демонстрируя коварство Вселенной и уязвимость науки.

Движение шарика массы m в вязкой среде есть решение задачи Коши

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Но как будет происходить движение при $m = 0$? Степеней свободы для удовлетворения начальных условий перестает хватать.

Пример сам по себе не стоит выведенного яйца, но то же самое может происходить в завуалированной форме в задачах о бифуркациях, где причины менее обнажены.

Вернемся к цепям типа (1.8). Фиксируем в электрической схеме два узла и заменим всю систему одним пассивным нелинейным сопротивлением с подходящей вольт-амперной характеристикой. Это стандартная в электротехнике операция, каковая, вообще говоря, не всегда правомочна, но в определенных предположениях такой переход возможен. При этом возникает серия вопросов о влиянии изменений в электрической схеме на вольт-амперную характеристику эквивалентного сопротивления. Здесь можно указать ряд интуитивно неожиданных эффектов.

Например, хорошо известно, что эквивалентное сопротивление линейной цепи (все $f_i(x_i) = x_i/r_i$) увеличивается с ростом любого одного или нескольких сопротивлений r_i . Интуитивно такое положение вещей представляется вполне естественным. Если в некотором звене создается препятствие для прохождения тока, то суммарный ток через цепь должен уменьшиться. В нелинейных цепях картина может быть иной, что на практике может означать уменьшение пропускной способности транспортной сети в целом при увеличении пропускных способностей отдельных магистралей¹⁴⁾, увеличение пропускной способности

¹⁴⁾ И даже строительство новых магистралей.

сти водоканалов при полном перекрытии ее отдельных участков и т. п. Вот простая иллюстрация.

Рассмотрим электрическую схему, изображенную справа, где нелинейные сопротивления R_1 имеют вольт-амперную характеристику

$$x = y^2 \operatorname{sign} y,$$

а R_2 характеризуется связью

$$x = \sqrt{|y|} \operatorname{sign} y.$$

Результирующая вольт-амперная характеристика цепи между точками A и B в случае $R_3 = \infty$ (точки C и D не соединены) легко вычисляется:

$$X = \left[\left(\frac{Y}{2} \right)^2 + \sqrt{\frac{|Y|}{2}} \right] \operatorname{sign} Y,$$

где X — напряжение на зажимах A и B , а Y — суммарный ток. В случае $R_3 = 0$ (точки C и D соединены накоротко) имеем

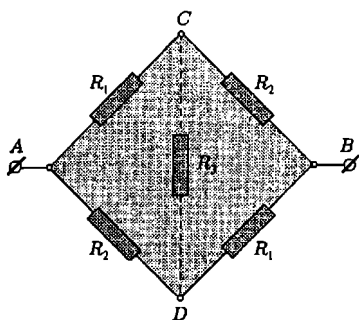
$$Y = \left[\left(\frac{X}{2} \right)^2 + \sqrt{\frac{|X|}{2}} \right] \operatorname{sign} X.$$

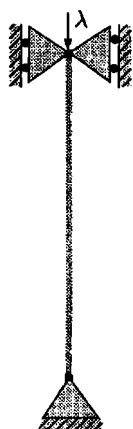
Легко проверить, что при любом напряжении $X \in (0, 2)$ увеличение R_3 с нуля до бесконечности влечет за собой увеличение тока Y , т. е. уменьшение эквивалентного сопротивления $R = X/Y$. Другими словами, закрытие канала R_3 увеличивает пропускную способность системы.

Это еще один пример, не имеющий самостоятельного прикладного значения, но благотворно подпиливающий линейное мировоззрение, каковое замечательно в своем секторе, но убийственно как универсальная парадигма.

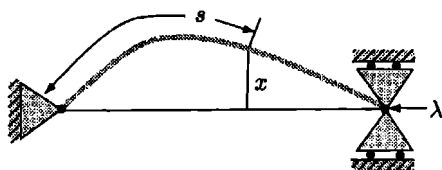
1.4. Бесконечномерные задачи

Бесконечные размерности возникают всякий раз при переводе самых простых задач в функциональные пространства.





Изучение устойчивости упругих конструкций опирается на простейшие эталоны. Один из них — задача об устойчивых формах шарнирно-закрепленного стержня единичной длины и переменной жесткости $\rho(s)$ в случае продольной нагрузки λ .



Здесь не место вникать в механические подробности. Что же касается внешней картины, то прогиб $x(s)$, как известно, является решением *двухточечной задачи*

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -\lambda \rho(s) \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2} x, \quad x(0) = x(1) = 0, \quad (1.9)$$

каковая «эквивалентна»¹⁵⁾ интегральному уравнению

$$y(s) = \lambda \rho(s) \sqrt{1 - \left[\int_0^1 G'_s(s, t) dt \right]^2} \cdot \int_0^1 G_s(s, t) y(t) dt, \quad (1.10)$$

где $G(t, s) = \begin{cases} t(s-1), & t \leq s \leq 1, \\ s(t-1), & 0 \leq s \leq t, \end{cases}$ — функция Грина оператора

$Lx = -x''$ при нулевых граничных условиях [4, т. 2], а $y(s)$ связано с $x(s)$ посредством

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = -y(s), \quad x(0) = x(1) = 0, \quad (1.11)$$

¹⁵⁾ Эквивалентна в кавычках в смысле зависимости понимания задачи от выбора функционального пространства.

т. е. после решения (1.10) для вычисления $x(s)$ надо решить еще линейную задачу (1.11).

Задача всегда имеет нулевое решение $x(s) \equiv 0$, а при малых λ — только нулевое. При λ , больших критического значения, появляются смежные формы равновесия¹⁶⁾. Таким образом, речь идет о параметрическом уравнении $F(x, \lambda) = 0$, решение которого $x(\lambda)$ ветвится, претерпевая бифуркационные изменения.

Список задач подобного сорта легко приумножить. Фактически это любые задачи из «дифуров» или «урматов», где решениями служат не числа, а функции. Причем форма представления — интегральное уравнение (1.10) или краевая задача (1.9) — с точки зрения использования функциональных пространств особой роли не играет¹⁷⁾. Во всех таких задачах обычно фигурируют параметры — силы, скорости, температуры, — которые чаще всего могут принимать критические значения, порождая ветвление и смену характеристик решения $x(\lambda)$.

¹⁶⁾ Для оценки устойчивости которых требуется, вообще говоря, дополнительный инструментарий.

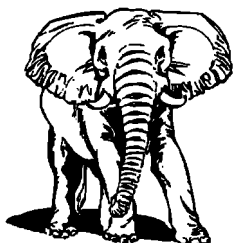
¹⁷⁾ На производные в (1.9) можно смотреть под разными углами зрения. Например, как на обобщенные функции и т. п. Форма представления задачи бывает важна с технической точки зрения.

Глава 2

Метрические инструменты

The fox has many tricks. The hedgehog has but one. But that is the best of all.

Erasmus Roterodamus



Речь, главным образом, идет о *принципе сжимающих отображений*, который прост, могуч и слишком хорошо известен, чтобы на нем долго задерживаться, но и обойти его не обойдешь — на пути к неподвижным точкам оператора f ,

$$\xi = f(\xi).$$

2.1. Принцип сжимающих отображений

2.1.1. *Отображение f , действующее в метрическом пространстве¹⁾ (X, ρ) , называется сжимающим (сжатием), если существует такое $\lambda < 1$, что*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y) \text{ для любых } x, y \in X. \quad (2.1)$$

2.1.2. Теорема. *Всякое сжимающее отображение f , действующее в полном метрическом пространстве²⁾ (X, ρ) , имеет неподвижную точку ξ , которая единственна, причем последовательные*

¹⁾ Источником метрики обычно служит норма, $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

²⁾ Пара (X, ρ) , где X — множество, $\rho(x, y)$ — метрика, является полным метрическим пространством, если любая последовательность Коши сходится. Другими словами, (X, ρ) полно, если из $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$ вытекает существование предела у последовательности x_n .

приближения

$$x^{k+1} = f(x^k)$$

сходятся к ξ при любом начальном значении $x^0 \in X$.

◀ Любая последовательность x^k , определяемая итерациями $x^{k+1} = f(x^k)$, является последовательностью Коши. Действительно,

$$\rho(x^n, x^m) \leq \rho(x^n, f(x^n)) + \rho(f(x^n), f(x^m)) + \rho(f(x^m), x^m),$$

т. е.

$$\rho(x^n, x^m) \leq \varphi(x^n) + \lambda \rho(x^n, x^m) + \varphi(x^m),$$

где $\varphi(x) = \rho(x, F(x))$. Следовательно,

$$\rho(x^n, x^m) \leq \frac{\varphi(x^n) + \varphi(x^m)}{1 - \lambda} \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty),$$

ибо $\varphi(x)$ на любой последовательности $x^{k+1} = f(x^k)$ убывает до нуля, поскольку из (2.1) вытекает $\varphi(x^{k+1}) \leq \lambda \varphi(x^k)$.

Таким образом, последовательность x^k фундаментальна, и в силу полноты (X, ρ) сходится, $x^k \rightarrow \xi$. А так как оператор f непрерывен, что вытекает из (2.1), то $\xi = f(\xi)$. Двух неподвижных точек быть не может, благодаря тому же неравенству (2.1). ▶

Вот как теорема 2.1.2 работает при обосновании разрешимости задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(s) = x_0, \quad (2.2)$$

в предположении *липшицевости*³⁾ $f(x, t)$.

◀ Задача (2.2) на промежутке $[t_0, t_0 + \Delta t]$ заменяется эквивалентным интегральным уравнением

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(\tau), \tau) d\tau, \quad (2.3)$$

которое получается интегрированием $\frac{dx}{d\tau} = f(x, \tau)$ по τ от t_0 до t .

³⁾ Функция $f(x, t)$ называется *липшицевой* по x , если существует такая константа L , что

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L\|x - y\|$$

для любых x, y, t в рассматриваемой области.

Правая часть (2.3) при $\Delta t < L^{-1}$ (L — константа Липшица) представляет собой сжимающий оператор F , поскольку для $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$

$$\left| \int_{t_0}^t [f(x(\tau), \tau) - f(y(\tau), \tau)] d\tau \right| \leq L\Delta t \|x - y\|,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $C[t_0, t_0 + \Delta t]$ — т. е. $\|x(t)\| = \max_t |x(t)|$. По той же причине F переводит в себя шарик из $C[t_0, t_0 + \Delta t]$ достаточно малого радиуса с центром в точке $x(t) \equiv x(t_0)$. Далее решает ссылка на п. 2.1.2 ►

Тот же инструмент 2.1.2 при более искусном обращении дает больше:

2.1.3. Пусть $f(x, t)$ при $t \in [0, T]$ удовлетворяет условию Липшица с константой L . Тогда через любую точку рассматриваемой области проходит единственное решение задачи Коши (2.2), определенное на $[0, T]$.

◀ Вместо обычной нормы $\|x(t)\| = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|$ в $C[0, T]$ возьмем эквивалентную норму⁴⁾

$$\|x\|_* = \max_{t \in [0, T]} e^{-Lt} |x(t)|. \quad (2.4)$$

Необходимое заключение следует из того, что оператор в правой части (2.3) сжимает по норме $\|\cdot\|_*$ с коэффициентом $1 - e^{-LT}$, что вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \left| e^{-Lt} \int_0^t [f(x(\tau), \tau) - f(y(\tau), \tau)] d\tau \right| &\leq \max_{t \in [0, T]} \int_0^t e^{L(\tau-t)} e^{-L\tau} L |x(\tau) - y(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq \|x - y\|_* \max_{t \in [0, T]} \int_0^t e^{L(\tau-t)} L d\tau = (1 - e^{-LT}) \|x - y\|_*. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

2.1.4. Если X компакт, то для сохранения выводов 2.1.2 вместо (2.1) достаточно потребовать

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y) \quad \text{для любых } x, y \in X, \quad x \neq y. \quad (2.5)$$

◀ Непрерывный функционал $\varphi(x) = \|x - f(x)\|$ на компакте X достигает минимума в некоторой точке x^* , и этот минимум обязан быть равен нулю, иначе возникает противоречие с (2.5):

$$\varphi(f(x^*)) = \|f(x^*) - f(f(x^*))\| < \|x^* - f(x^*)\| = \varphi(x^*). \quad \blacktriangleright$$

⁴⁾ Эквивалентную в силу $e^{-LT} \|x(t)\| \leq \|x(t)\|_* \leq \|x(t)\|$, откуда следует, что и норма $\|x(t)\|$ зажата в тиски, $\|x(t)\|_* \leq \|x(t)\| \leq e^{LT} \|x(t)\|_*$.

2.2. Примеры и вариации

Использование эквивалентных норм. Доказательство теоремы 2.1.3 в связи с трюком (2.4) иллюстрирует типовой переход к другой метрике, по которой изучаемый оператор сжимает со всеми вытекающими последствиями.

Переход к другой метрике может происходить и под другим флагом, имея целью уложить ситуацию в рамки какого-либо стандарта. При этом эквивалентность метрик (норм) оставляет задачу в избранном пространстве. В \mathbb{R}^n все нормы эквивалентны, и там годится любая, наиболее удобная. В функциональных пространствах требуются предосторожности [4, т. 5].

В качестве развития примера (2.3) рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \int_{t_0}^t G(t, s) f[s, x(s)] ds + \varphi(t). \quad (2.6)$$

Если $f(x, t)$ липшицева по x с константой L' и

$$\theta = \max \{ |G(t, s)| : s, t \in [0, T] \},$$

то оператор A , определенный правой частью (2.6) и удовлетворяющий в $C[0, T]$ неравенству

$$\|Ax - Ay\|_* \leq \frac{\theta L'}{L} (1 - e^{-Lt}) \|x - y\|_*,$$

оказывается сжимающим по норме (2.4). При желании обеспечить условия существования решения (2.6) в $C[0, T]$ достаточно в (2.4) положить $L \geq \theta L'$.

Выбор функционального пространства. Обратим вниманис, что запись оператора (2.6) не предполагает априори функционального пространства, в котором должны разворачиваться события. Это характерно для многих задач. Взаимоотношения переменных рождаются техническим блужданием мысли, а уж «поле битвы» выбирается задним числом, главным образом, из соображений удобства. Содержательная сторона дела тоже играет роль, безусловно, но задачу все же приходится ставить так, чтобы она решалась.

Поэтому L_2 вместо C выбирается иногда даже в ущерб смысловой подоплеке, если изучаемый оператор в C неподатлив, а в L_2 оказывается, например, сжимающим. Заказчик настаивает,

что сигналы должны быть близки поточечно, а исполнитель вместо $\max_t |x(t) - y(t)|$ избирает явно «противоестественную» меру близости $\int [x(t) - y(t)]^2 dt$, и тем не менее добивается успеха (если добивается), потому что неподвижная точка получается (если получается) все-таки непрерывной функцией.

Аналогичные мотивы возникают в задаче Коши (6.1), каковая подменяется эквивалентным (с некоторой натяжкой) уравнением (2.3), и задача дрейфует из естественного для (6.1) пространства $C^1[0, T]$ в «противоестественное» $C[0, T]$. Другое дело, что неподвижная точка интегрального оператора (2.3) оказывается непрерывно дифференцируемой функцией⁵⁾.

Выбор функционального пространства, разумеется, способен влиять на сам факт наличия или отсутствия неподвижной точки. Уравнение

$$x(t) = \int_0^t G(t, s)x(s) ds$$

с непрерывным на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ ядром

$$G(t, s) = \begin{cases} se^{1/t^2-1}, & \text{если } 0 \leq s \leq te^{1/t^2-1}, \\ t, & \text{если } te^{1/t^2-1} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

не имеет ненулевых суммируемых решений, но у него есть несуммируемое решение $x(t) = \frac{1}{t}$, $t \in (0, 1]$ (пример Урысона).

Иногда собака зарыта не в подборе игрового поля, а в исходной постановке задачи. И тогда приходится идти на крайние меры, меняя, скажем, минимизацию модуля $|f(x)|$ на минимизацию квадрата $f^2(x)$.

2.2.1. О коммутирующих операторах. Если $AB = BA$ и один из операторов, скажем, B — сжимающий, то A тоже имеет неподвижную точку⁶⁾.

⁵⁾ Поскольку интеграл благотворно действует на интегрируемые функции, производя дифференцируемые на выходе из непрерывных на входе.

⁶⁾ Ту же самую, что и B .

◀ Если $B\xi = \xi$, то и $A\xi$ — неподвижная точка оператора B , ибо

$$BA\xi = AB\xi = A\xi.$$

Но B , как сжимающий оператор, может иметь только одну неподвижную точку. Поэтому $A\xi = \xi$. ▶

Пункт 2.2.1 не выглядит многообещающе, ибо где за пределами виртуального мира найти коммутирующие операторы? Идея, тем не менее, находит применение в достаточно распространенной ситуации, когда некоторая степень оператора A является сжатием, $B = A^k$. В этом случае из 2.2.1 следует, что $\xi = A^k\xi$ является неподвижной точкой самого оператора A .

2.3. Нормы и линейные приближения

В \mathbb{R}^n наибольшей известностью пользуется *евклидова норма*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})},$$

наряду с *кубической*,

$$\|\mathbf{x}\|_m = \max_i |x_i|, \quad (2.7)$$

и *октаэдрической нормой*

$$\|\mathbf{x}\|_l = \sum_{i=1}^n |x_i|. \quad (2.8)$$

Для настройки в тематический резонанс тут неплохо вспомнить основополагающие факты. Характеристические свойства, двойственные и преобразованные нормы, — все это есть, например, в [4, т. 3]. В \mathbb{R}^n принципиальна эквивалентность всех норм⁷⁾, в силу которой сходимость по одной норме эквивалентна сходимости по любой другой — поэтому для решаемой задачи

⁷⁾ Нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ считаются эквивалентными, если можно указать такие константы α и β , что

$$\|\mathbf{x}\|_1 \leq \alpha \|\mathbf{x}\|_2, \quad \|\mathbf{x}\|_2 \leq \beta \|\mathbf{x}\|_1.$$

Выбор нормы «под задачу», как правило, существенно облегчает решение.

можно выбирать наиболее подходящую норму без всяких предосторожностей. Причина заключается в следующем ⁸⁾.

Функция $\varphi(x) = \|x\|_1$ на сфере $\|x\|_2 = 1$ достигает минимального и максимального значений, $\gamma > 0$ и $\delta > 0$, благодаря чему

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \gamma \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \delta \|x\|_2.$$

В общем случае банахова пространства такой фокус не проходит.

Норма матрицы обычно определяется как ⁹⁾

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|. \quad (2.9)$$

Нормам $\|\cdot\|_m$ и $\|\cdot\|_l$ подчинены, соответственно,

$$\|A\|_m = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{строчная норма}),$$

$$\|A\|_l = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{столбцовая норма}).$$

Евклидовой норме подчинена так называемая *спектральная норма матрицы*, равная квадратному корню из максимального модуля собственного числа матрицы $A^T A$.

Для нелинейного гладкого отображения f в \mathbb{R}^n имеем

$$\begin{aligned} \|f(x+y) - f(x)\| &= \left\| \int_0^1 f'(x + \tau y) y \, d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|f'(x + \tau y)\| \|y\| \, d\tau = \|f'(x + \theta y)\| \|y\|, \end{aligned}$$

при некотором $\theta \in (0, 1)$. Поэтому, если

$$\forall z : \|f'(z)\| \leq \lambda < 1, \quad (2.10)$$

⁸⁾ Напомним, норма однозначно определяется указанием единичного шара, в качестве которого может быть «назначено» любое выпуклое центрально-симметричное тело.

⁹⁾ Соотношение (2.9) задает так называемую *подчиненную норму* матрицы, и сохраняет форму при определении *нормы линейного оператора* в банаховом пространстве.

то f сжимает в метрике $\rho(x, y) = \|x - y\|$, и неравенство (2.10), таким образом, может служить удобным достаточным условием того, что f — сжатие. В частности, при условии

$$\max_i \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq 1 - \epsilon, \quad \epsilon > 0,$$

f сжимает по норме (2.7), а в случае

$$\max_j \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq 1 - \epsilon, \quad \epsilon > 0,$$

по норме (2.8).

Критерий (2.10) лишний раз подчеркивает особую роль линейных операторов в нелинейной теории.

2.3.1. Если спектральный радиус $\rho(A) < 1$, то существует норма $\|\cdot\|_*$, в которой $\|A\|_* < 1$, т. е. линейный оператор является сжимающим.

◀ В качестве $\|\cdot\|_*$ можно взять, например,

$$\|x\|_* = \max_{k=0,1,\dots} \frac{\|A^k x\|}{\lambda^k}, \quad (2.11)$$

где $\rho(A) < \lambda < 1$, $\|\cdot\|$ произвольная норма¹⁰⁾, — потому что

$$\|Ax\|_* = \max_{k=0,1,\dots} \frac{\|A^k Ax\|}{\lambda^k} = \lambda \max_{k=1,\dots} \frac{\|A^k x\|}{\lambda^k} \leq \lambda \|x\|_*.$$

Отсюда сразу следует, что всегда существует норма $\|\cdot\|_*$, в которой при любом $\epsilon > 0$

$$\|A\|_* < \rho(A) + \epsilon, \quad (2.12)$$

поскольку оператор

$$(\rho(A) + \epsilon)^{-1} A,$$

каково бы ни было A , имеет спектральный радиус < 1 . ▶

¹⁰⁾ Максимум (2.11) существует, ибо $\rho(A/\lambda) < 1 \Rightarrow (A/\lambda)^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Напомним также следующий известный результат [4, т. 5]:

2.3.2. В любой норме спектральный радиус линейного оператора

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}. \triangleright$$

• Рассмотрим в качестве примера *интегральный оператор Вольтерра* с непрерывным ядром $G(t, s)$,

$$Ax(t) = \int_0^t G(t, s)x(s) ds,$$

действующий в $C[0, 1]$. Последовательные итерации $x_{n+1} = Ax_n$ сходятся к нулю быстрее любой геометрической прогрессии. Действительно,

$$|x_k(t)| \leq K \int_0^t |x_{k-1}(s)| ds, \quad \text{где } K = \max_{0 \leq t, s \leq 1} |G(t, s)|,$$

откуда ¹¹⁾

$$|x_n(t)| \leq \frac{K^n t^n}{n!} \max_{0 \leq t \leq 1} |x_0(t)|,$$

т. е. $\|A^n x_0\| \leq \frac{K^n}{n!} \|x_0\|$, что называют *факториальной сходимостью*.

В итоге спектральный радиус $\rho(A) = 0$.

• Норму $\|\cdot\|_*$ типа (2.11), в которой $\|A\|_* < 1$, если $\rho(A) < 1$, всегда можно определить также с помощью подходящего скалярного произведения, $\|x\|_*^2 = (Vx, x)$, где V — положительно определенная матрица. Для этого достаточно показать, что из $\rho(A) < 1$ следует существование положительно определенной матрицы V , такой что при $x \neq 0$

$$(VAx, Ax) = (A^T VAx, x) < (Vx, x),$$

т. е.

$$(A^T VAx, x) - (Vx, x) = (Wx, x),$$

иначе говоря

$$A^T VA - V = W, \tag{2.13}$$

где W — отрицательно определенная матрица.

¹¹⁾ С использованием формулы n -кратного интегрирования

$$\int_0^t \dots \int_0^t \varphi(s) ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \varphi(s) ds.$$

Левая часть (2.13) представляет собой линейный оператор \tilde{A} , действующий в пространстве матриц, т. е.

$$\tilde{A} = A^T V A - V.$$

Покажем невырожденность \tilde{A} . Предположим противное: $A^T V_0 A - V_0 = 0$ при некотором $V_0 \neq 0$. Фиксируем некоторый элемент x^0 , такой что $(V_0 x^0, x^0) = \alpha \neq 0$, и рассмотрим итерационный процесс

$$x^{k+1} = A x^k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.14)$$

начинающийся в x^0 . В силу $A^T V_0 A - V_0 = 0$ мы получим $(V_0 x^k, x^k) = \alpha \neq 0$ при любом $k \geq 0$, но это противоречит сходимости (2.14), вытекающей из условия $\rho(A) < 1$. Итак, оператор \tilde{A} невырожден. Поэтому уравнение (2.13) имеет решение.

Остается показать, что при отрицательно определенной матрице W решение V уравнения (2.13) — положительно определенная матрица. В предположении противного найдется такой вектор $x^0 \neq 0$, что $(V x^0, x^0) \leq 0$. Для последовательности (2.14) в этом случае будем иметь

$$(V x^k, x^k) \leq (W x^0, x^0) < 0$$

при любом $k > 0$, но это противоречит сходимости (2.14).

Возвращаясь к (2.10), заметим, что в случае

$$\forall z : \rho(f'(z)) \leq \lambda < 1 \quad (2.15)$$

нелинейный оператор не обязан быть сжатием во всем пространстве, хотя локально он сжимает в окрестности любой точки. Тем не менее для разных z нормы, по которым f локально сжимает, могут быть разные, и консолидировать этот разнобой под крышей одной метрики не всегда возможно.

2.4. Теорема о неявной функции

Принцип неподвижной точки лежит в основе многих классических результатов.

2.4.1. Теорема о неявной функции. Пусть $\Phi(x_0, y_0) = 0$, и производная Фреше Φ'_x непрерывна (по норме оператора) в точке (x_0, y_0) ,

а линейный оператор $\Phi'_x(x_0, y_0)$ непрерывно обратим. Тогда уравнение

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (2.16)$$

локально разрешимо¹²⁾ в точке (x_0, y_0) .

При доказательстве здесь удобно опираться вместо п. 2.1.2 на следующий более общий результат.

2.4.2. Принцип равномерного сжатия. Если отображение $F(x, w)$ является равномерным сжатием¹³⁾ и непрерывно по w , то решение $x^*(w)$ уравнения $x = F(x, w)$ непрерывно.

◀ Существование решения $x^*(w)$ при каждом w вытекает из теоремы 2.1.2. В силу $\rho(F(x, w), F(y, w)) \leq \lambda \rho(x, y)$ имеем

$$\begin{aligned} \rho\{x^*(u), x^*(w)\} &= \rho\{F(x^*(u), u), F(x^*(w), w)\} \leq \\ &\leq \rho\{F(x^*(u), u), F(x^*(u), w)\} + \rho\{F(x^*(u), w), F(x^*(w), w)\} \leq \\ &\leq \rho\{F(x^*(u), u), F(x^*(u), w)\} + \lambda \rho\{x^*(u), x^*(w)\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\rho\{x^*(u), x^*(w)\} \leq (1 - \lambda)^{-1} \rho\{F(x^*(u), u), F(x^*(u), w)\}. \blacktriangleright$$

Теперь вернемся к п. 2.4.1. ◀ Заменим (2.16) эквивалентным уравнением $x = F(x, y)$, где оператор

$$F(x, y) = x - [\Phi'_x(x_0, y_0)]^{-1} \Phi(x, y),$$

как легко убедиться, удовлетворяет условиям теоремы 2.4.2.

Действительно, производная $F'_x(x, y) = I - [\Phi'_x(x_0, y_0)]^{-1} \Phi'_x(x, y)$ непрерывна и $F'_x(x_0, y_0) = 0$. Поэтому в окрестности, определяемой неравенствами $\|x - x_0\| \leq \gamma$, $\|y - y_0\| \leq \gamma$, при достаточно малом $\gamma > 0$ имеет место $\|F'_x(x, y)\| < \lambda < 1$. Наконец,

$$F(x_0, y_0) = x_0 \Rightarrow \|F(x_0, y) - x_0\| \leq (1 - \lambda)\gamma$$

при $\|y - y_0\| \leq \alpha$ и достаточно малом $\alpha \leq \gamma$, откуда следует, что $F(x, y)$ при $\|y - y_0\| \leq \alpha$ преобразует шар $\|x - x_0\| \leq \gamma$ в себя. Далее остается применить теорему 2.4.2. ▶

¹²⁾ Уравнение (2.16) называют локально разрешимым в точке (x_0, y_0) , если $\Phi(x_0, y_0) = 0$ и в некоторой окрестности этой точки уравнение $\Phi(x, y) = 0$ однозначно определяет неявную функцию $x(y)$, тождественно удовлетворяющую соотношению $\Phi(x(y), y) \equiv 0$.

¹³⁾ При любом фиксированном w сжимает по первому аргументу с коэффициентом $\lambda < 1$, не зависящим от w .

В частном случае $\Phi(x, y) = f(x) - y$ вопрос о существовании неявной функции превращается в вопрос об обратимости отображения $f(x)$. В случае $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ достаточным условием локальной обратимости является, например, невырожденность матрицы Якоби¹⁴⁾

$$f'(x) = [\partial f_i / \partial x_j].$$

К локальной гомеоморфности $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ достаточно при-
совокупить требование

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty,$$

чтобы f было гомеоморфизмом \mathbb{R}^n на \mathbb{R}^n , см. [4, т. 13].

2.4.3. Теорема Адамара. Пусть отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо и $\forall x: \|(f'(x))^{-1}\| \leq \mu < \infty$. Тогда f — гомеоморфизм \mathbb{R}^n на \mathbb{R}^n . \triangleright

2.5. Обращение принципов сжатия

2.5.1. Оператор f назовем сжатием, если для любого $\lambda \in (0, 1)$ существует метрика ρ_λ , эквивалентная исходной, по которой f является λ -сжатием в смысле (2.1).

Напомним, метрики ρ^1, ρ^2 считаются эквивалентными, если можно указать такие константы α и β , что

$$\rho^1(x, y) \leq \alpha \rho^2(x, y), \quad \rho^2(x, y) \leq \beta \rho^1(x, y). \quad (2.17)$$

Если метрики порождены нормами, то это равносильно топологической эквивалентности. В общем случае последняя менее «обязывающая», чем (2.17).

Определение 2.5.1 на первый взгляд кажется более жестким, чем 2.1.1, но всякое λ -сжатие является сжатием, как будет видно из дальнейшего.

Целью раздела является обращение принципа сжимающих отображений. Но формулировка 2.1.2 необратима, потому что предположения и выводы не сбалансированы. Слишком мало

¹⁴⁾ Разумеется, в предположении гладкости.

утверждается. Однако традиционный вариант *принципа сжимающих отображений* можно существенно дополнить.

2.5.2. Если f — λ -сжатие, $\lambda \in (0, 1)$, то:

A1 f имеет единственную неподвижную точку $\xi \in X$;

A2 $f^k(x) \rightarrow \xi$ при $k \rightarrow \infty$ и любом $x \in X$;

A3 существует окрестность U точки ξ , такая что $f^k(U) \rightarrow \{\xi\}$ при $k \rightarrow \infty$;

A4 оператор f непрерывен;

A5 по любой окрестности W точки ξ можно указать такую окрестность точки ξ , что из $x \in V$ следует $f^k(x) \subset W$ при любом $k \geq 0$.

Свойства A3–A5 существенно дополняют характеристику итерационного процесса

$$x^{k+1} = f(x^k)$$

и непосредственно не вытекают из условий A1, A2. В то же время их доказательство в предположениях теоремы 2.5.2 совершенно элементарно. Конечно, A1–A5 не все независимы. Например, *устойчивость* A5 процесса $x^{k+1} = f(x^k)$ следует из A1–A4, а вот для *равномерной сходимости* A3 в предположениях A1, A2, A4, A5 надо еще предположить существование у ξ компактной окрестности. Немаловажно также, что в условиях A1–A5 существование неподвижной точки у оператора f структурно устойчиво, т. е. сохраняется при малых возмущениях f .

Теперь, отправляясь от теоремы 2.5.2, а не от 2.1.2, можно говорить об обращении *принципа сжимающих отображений*.

2.5.3. Теорема Майерса. Пусть непрерывный (A4) оператор f , отображающий в себя полное метрическое пространство (X, ρ) , имеет единственную неподвижную точку $\xi \in X$ (A1), $f^k(x) \rightarrow \xi$ при любом $x \in X$ (A2), и имеет место равномерная сходимост (A3). Тогда f — сжатие. \triangleright

Доказательство, а также многочисленные вариации и обобщения вокруг теоремы 2.5.3 — имеются в [15]. Тематика довольно громоздкая. Поэтому для иллюстрации техники ограничимся доказательством менее общего, но более изящного результата.

2.5.4. Теорема Яноша. Пусть (X, ρ) компакт, оператор f непрерывен и

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(X) = \{\xi\}. \quad (2.18)$$

Тогда f — сжатие.

◀ Для доказательства достаточно по любому $\lambda \in (0, 1)$ указать метрику ρ_λ , эквивалентную¹⁵⁾ ρ , по которой оператор f является λ -сжимающим. Сделаем это в три этапа.

1. Построим метрику ρ^* , эквивалентную ρ , по которой оператор f является нестягивающим, т. е. $\rho^*(f(x), f(y)) \leq \rho^*(x, y)$. Положим

$$\rho^*(x, y) = \max \{ \rho(f^n(x), f^n(y)) : n = 0, 1, 2, \dots \}.$$

Аксиомы метрики здесь проверяются без труда. Очевидно также,

$$\begin{aligned} \rho^*(f(x), f(y)) &= \max \{ \rho(f^n(x), f^n(y)) : n = 1, 2, \dots \} \leq \\ &\leq \max \{ \rho(f^n(x), f^n(y)) : n = 0, 1, 2, \dots \} = \rho^*(x, y). \end{aligned}$$

Покажем, наконец, эквивалентность метрик ρ и ρ^* . Из определения следует $\rho^*(x, y) \geq \rho(x, y)$. Поэтому последовательность, фундаментальная по метрике ρ^* , фундаментальна и по ρ . Обратно, пусть $x_n \xrightarrow{\rho} x$, т. е. $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$. Покажем, что в этом случае $x_n \xrightarrow{\rho^*} x$. В предположении противного, $x_n \not\xrightarrow{\rho^*} x$, из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить такую подпоследовательность, которую снова обозначим через $\{x_n\}$, что $\rho^*(x_n, x) > \varepsilon > 0$. Определим далее последовательность $\{k_n\}$ из условия

$$\rho^*(x_n, x) = \rho(f^{k_n}(x_n), f^{k_n}(x)).$$

Если последовательность $\{k_n\}$ ограничена, то в ней имеется бесконечно повторяющийся номер k , и тогда на подходящим образом выбранной подпоследовательности имеем $\rho(f^k(x_n), f^k(x)) > \varepsilon$, что в силу непрерывности f (в исходной топологии) противоречит условию $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Если же $\{k_n\}$ неограничена, то $\rho(f^{k_n}(x_n), f^{k_n}(x)) > \varepsilon$ вступает в противоречие с условием (2.18). Итак, метрики ρ^* и ρ эквивалентны.

¹⁵⁾ В силу компактности (X, ρ) достаточно установить топологическую эквивалентность соответствующих метрик.

II. По любому наперед заданному $\lambda \in (0, 1)$ построим функционал $d_\lambda(x, y)$, такой что

$$d_\lambda(f(x), f(y)) \leq \lambda d_\lambda(x, y). \quad (2.19)$$

Положим $H_0 = X$, $H_1 = f(X)$, $H_2 = f^2(X)$, ... и введем функции

$$\nu(x) = \max\{n : x \in H_n\}, \quad \nu(x, y) = \min\{\nu(x), \nu(y)\}.$$

Функционал

$$d_\lambda(x, y) = \lambda^{\nu(x, y)} \rho^*(x, y)$$

в силу очевидного $\nu(f(x), f(y)) \geq \nu(x, y) + 1$ удовлетворяет неравенству (2.19). Заметим также, что $d_\lambda(x, y)$ удовлетворяет всем аксиомам метрики, за исключением, быть может, неравенства треугольника.

III. Сделаем последний шаг. Обозначим через Ω_{xy} множество цепей

$$\omega_{xy} = \{x = x_0, x_1, \dots, x_n = y\}$$

(n — произвольно) и положим длину цепи равной

$$D_\lambda(\omega_{xy}) = \sum_{i=1}^n d_\lambda(x_{i-1}, x_i).$$

Покажем теперь, что

$$\rho_\lambda(x, y) = \inf\{D_\lambda(\omega_{xy}) : \omega_{xy} \in \Omega_{xy}\}$$

является искомой метрикой.

Убедимся, во-первых, что ρ_λ — метрика. Очевидно, $\rho_\lambda(x, y)$ симметрична и $\rho_\lambda(x, x) = 0$ для любого $x \in X$, а неравенство треугольника вытекает из включения $\Omega_{xz} \cup \Omega_{zy} \subset \Omega_{xy}$. Остается показать положительную определенность ρ_λ . Пусть $x \neq y$ и без ограничения общности $\nu(y) \geq \nu(x)$. Если $y = \xi$, то $\rho_\lambda(x, \xi) \geq \lambda^{\nu(x)} \rho^*(x, H_{\nu(x)+1}) > 0$. В случае $y \neq \xi$ любая цепь ω_{xy} или полностью лежит в множестве $X \setminus H_{\nu(y)+1}$, или не лежит, откуда

$$\rho_\lambda(x, y) \geq \lambda^{\nu(x)} \min\{\rho^*(x, y), \rho^*(y, H_{\nu(y)+1})\} > 0.$$

Итак, ρ_λ — метрика.

Докажем эквивалентность ρ и ρ_λ , для чего достаточно показать эквивалентность ρ^* и ρ_λ . Из определения вытекает $\rho_\lambda(x, y) \leq d_\lambda(x, y) \leq \rho^*(x, y)$. Поэтому из $x_n \xrightarrow{\rho^*} x$ следует $x_n \xrightarrow{\rho_\lambda} x$. Обратно, пусть $x_n \xrightarrow{\rho_\lambda} x$. Предположим, что $x_n \not\xrightarrow{\rho^*} x$. Тогда в силу компактности (X, ρ^*) можно выбрать такую подпоследовательность, которую опять обозначим через $\{x_n\}$, что $x_n \xrightarrow{\rho^*} y$, $y \neq x$. Но тогда $x_n \xrightarrow{\rho_\lambda} y$. Полученное противоречие доказывает эквивалентность метрик ρ^* и ρ_λ .

Наконец, свойство

$$\rho_\lambda(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho_\lambda(x, y)$$

получается предельным переходом в неравенстве

$$D_\lambda(f(\omega_{xy})) \leq \lambda D_\lambda(\omega_{xy}),$$

где $f(\omega_{xy}) = \{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)\}$. ►

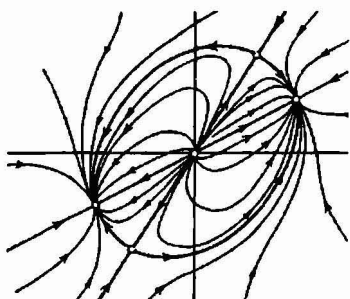


Глава 3

Топологические принципы неподвижной точки

*No great intellectual thing was
ever done by great effort.*

John Ruskin



Когда теория взмывает ввысь, уходя от конкретики, но тем не менее добивается результата, — она вдохновляет и настраивает «далеко за пределами». Эффект многократно усиливается, если по ходу дела сложное и простое сливаются воедино, а потом меняются местами.

3.1. Вращение векторного поля

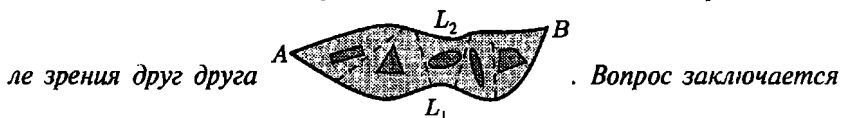
Многое в оценках зависит, откуда смотреть. Факт пересечения непрерывных кривых, соединяющих противоположные вершины прямоугольника, не вызывает особых эмоций.



(3.1)

Но совсем другое дело, когда к нему сводится ставшая классической задача, вроде бы совсем из другой оперы.

Из пункта A в пункт B ведут две дороги L_1 и L_2 , по которым две точки из A в B могут двигаться, оставаясь все время в поле зрения друг друга



в том, могут ли точки двигаться, — одна из A в B , другая из B в A , — оставаясь все время невидимы друг другу?

◀ Пусть x обозначает расстояние от A до точки на L_1 вдоль L_1 . Соответственно, y — расстояние от A до точки на L_2 вдоль L_2 . Одна кривая на рисунке (3.1) описывает движение точек из A в B , когда они остаются все время в поле зрения друг друга. Движению точек, одной из A в B , другой из B в A , — отвечает некоторая траектория, изображенная другой кривой на (3.1). В силу непрерывности кривые пересекаются. В пересечении точки видны друг другу. Решение задачи — отрицательно. ▶ Банальность (3.1) превращается таким образом в изюминку.

Описываемая далее теория в некотором роде подобна инструменту (3.1). Временами воспринимается как естественная и ясная методика, иногда запутывается, но в наивысших своих проявлениях преподносит неожиданные и важные результаты.

Сначала мы обрисуем (пп. 3.1–3.6) не вполне строгую, зато геометрически наглядную картину *вращения векторных полей*.

Решения нелинейных уравнений называют *неподвижными точками*, имея в виду, что любое $\Phi(x)=0$ приводится к виду $f(x)=x$ с помощью $f(x)=\Phi(x)+x$. Да и сам нуль векторного поля $\Phi(x)$ неподвижен в том смысле, что равновесие динамической системы $\dot{x}=\Phi(x)$ стоит на месте. Тема затрагивалась в [4, т. 1], подробнее излагалась в [4, т. 13], и здесь рассматривается более детально.

Итак, пусть Ω — некоторая область в \mathbb{R}^n , $\dot{\Omega}=\Gamma$ — ее граница, а $f(\Gamma)$ — образ границы при *непрерывном отображении* f . В этом случае f называют также *оператором*¹⁾ и говорят, что f задает в \mathbb{R}^n *векторное поле* $f(x)$.

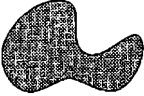
¹⁾ *Отображение, оператор, функция* — используются как синонимы.

Допустим, речь идет о существовании решения уравнения


$$f(x) = 0 \quad (3.2)$$

в области Ω , т. е. о принадлежности нуля образу $f(\Omega)$. Другими словами, покрывает образ $f(\Omega)$ точку 0 или нет? Если да, то элемент $x^* \in \Omega$, переходящий в нуль, $f(x^*) = 0$, называют нулем векторного поля $f(x)$.


В простейшем случае, когда некая «благообразная» область



слегка деформируется преобразованием f во что-нибудь типа




или даже



, вопрос о включении $0 \in f(\Omega)$ сводится к выяснению расположения нуля внутри образа границы $f(\Gamma)$ или — снаружи. В общем случае граница Γ может переходить в довольно хитроумные поверхности $f(\Gamma)$ —

хотя бы, например,



, и тут уже не ясно, есть ли

вообще резон говорить о внутренности $f(\Gamma)$. Но как бы там ни было, разрешимость (3.2) в Ω по значениям $f(x)$ на границе $\dot{\Omega}$ поддается выяснению²⁾. Путь к этому не очень длинный, если не злоупотреблять деталями.

Итак. Положим $\dot{\Omega}$ и f гладкими (в противном случае можно перейти к гладким аппроксимациям), и у поверхности $f(\Gamma)$ определим внешнюю и внутреннюю стороны. Для этого возьмем маленький кусочек Δ поверхности Γ — у него внутренняя сторона та, которая соприкасается с Ω , — и на фрагменте $f(\Delta) \subset f(\Gamma)$ стороны определим стандартным образом:

В *регулярной* точке $x \in \Delta$ локальный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ выбирается так, чтобы вектор e_1 был направлен по внешней нормали, а векторы e_2, \dots, e_n

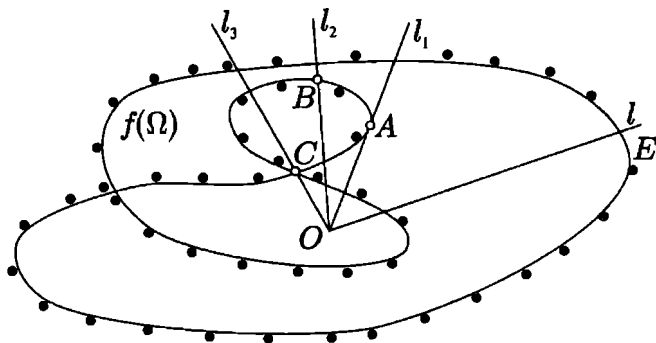
²⁾ Аналогично тому, как в одномерном случае о нуле $f(x)$ на $[a, b]$ можно судить, если $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки.

лежали в касательном пространстве T_x к Δ в точке x . Нормаль e'_1 к поверхности $f(\Delta)$ в точке $f(x)$ называют внешней, если базис

$$\{e'_1, \dots, e'_n\} = \{e_1, f'(x)e_2, \dots, f'(x)e_n\}$$

одинаково ориентирован с базисом³⁾ $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Далее разобьем $f(\dot{\Omega})$ на маленькие участки — *накладывающиеся друг на друга* — и, начиная с исходного Δ , продолжим определение внешней стороны на соседние участки, согласуя ориентацию на пересечениях. Пока не определится внешняя сторона на всей поверхности $f(\dot{\Omega})$. В плоском случае этому соответствует прокатывание шарика по одной из сторон, как на нижеследующем рисунке.



Считая поле $f(x)$ невырожденным на $\dot{\Omega}$, т. е. $f(x) \neq 0$ при $x \in \dot{\Omega}$, предположим также (для удобства рассуждений), что поверхность $f(\dot{\Omega})$ связна и не имеет слипшихся участков⁴⁾.

Выпустим из нуля произвольный луч l и посчитаем, сколько раз l протыкает $f(\dot{\Omega})$ *изнутри наружу* — допустим, γ_{\oplus} раз, и сколь-

³⁾ Два базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ называются одинаково ориентированными, если $e'_i = \sum a_{ij}e_j$ и $\det [a_{ij}] > 0$.

⁴⁾ Все эти требования снимаются рутинными приемами, см. далее.

ко — снаружи внутрь — пусть γ_{Θ} раз⁵⁾. Величину

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = \gamma_{\Theta} - \gamma_{\Theta} \quad (3.3)$$

назовем *вращением векторного поля f на $\dot{\Omega}$* .

Для *корректности* определения требуется независимость $\gamma(f, \dot{\Omega})$ от выбора l . Очевидно, величина $\gamma(f, \dot{\Omega})$, как функция l , локально постоянна — не меняется при малых шевелениях луча. Изменений можно ожидать, если при повороте луч пересекает точку самопересечения C или касания A . Однако геометрически ясно, что при вращении l против часовой стрелки и переходе, скажем, критического положения l_1 , появляется пара точек протыкания. Причем, если в одной из них луч протыкает $f(\dot{\Omega})$ изнутри наружу, то в другой — наоборот. Поэтому точки протыкания появляются или исчезают только парами (полярными), и γ не меняется.

Если $f(\dot{\Omega})$ имеет слипшиеся участки, то надо считать, что в соответствующем месте луч протыкает поверхность столько раз, сколько там слиплось слоев — и все остается по-прежнему. Это же должно быть сказано в отношении лучей, протыкающих поверхность в точках самопересечения $f(\dot{\Omega})$ (луч l_3 на рисунке). В рассматриваемом случае получается $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 2$.

В ситуации справа

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = 1,$$

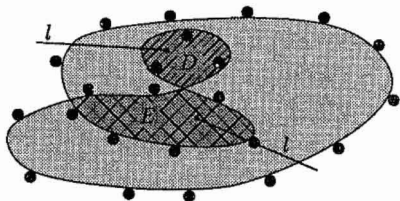
если O лежит в серой области;

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = 2,$$

если O — в области E ; наконец,

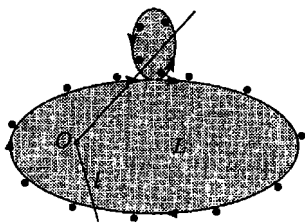
$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = 0,$$

если O — в области D .



⁵⁾ Если у $\dot{\Omega}$ несколько компонент связности , манипуляции прodelьваются

с каждой компонентой, и засчитываются в общую копилку.



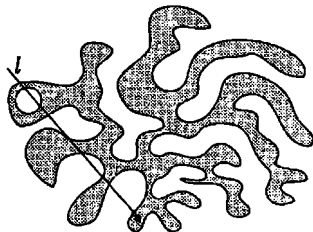
А в ситуации слева

$$\gamma(f, \hat{\Omega}) = -1,$$

если O лежит в области L .

3.1.1. Если $0 \in \Omega$, то вращение тождественного отображения $I(x) \equiv x$ на $\hat{\Omega}$ равно 1.

Это, пожалуй, единственная ситуация, где определение внешней стороны у $I(\hat{\Omega})$ не вызывает вопросов, поскольку $\hat{\Omega}$ остается на месте. Луч сначала протыкает $\hat{\Omega}$ изнутри, потом — снаружи, наконец последний раз — изнутри.



Все вышесказанное подразумевает пространства \mathbb{R}^n размерности $n \geq 2$. Для определенной «свободы передвижения» полезно доопределить вращение в одномерном случае.

Любая ограниченная область $\Omega \in \mathbb{R}^1$ представляет собой интервал (α, β) . Если $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$, то $\gamma(f, \hat{\Omega}) = 1$. В случае

$$f(\alpha) > 0, \quad f(\beta) < 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma(f, \hat{\Omega}) = -1.$$

Если же $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ одного знака, то $\gamma(f, \hat{\Omega}) = 0$.

В случае $n \geq 2$, как будет видно из дальнейшего, вращение $\gamma(f, \hat{\Omega})$ может принимать любые целочисленные значения из \mathbb{Z} .

3.2. Вращение как вращение

Из предыдущего не очень ясно, откуда берется само название «вращение». Термин происходит из специфического способа введения $\gamma(f, \hat{\Omega})$, пригодного только для плоскости, но проливающего дополнительный свет на природу понятия.

Пусть Ω — некоторая область в \mathbb{R}^2 с границей Γ . Допустим пока, что замыкание $\bar{\Omega}$ гомеоморфно кругу, и на контуре Γ задано направление обхода против часовой стрелки (так, что при обходе область Ω остается слева). Векторы $f(x)$ отображения

$$f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$$

можно представлять себе начинающимися в точках $x \in \Gamma$.

При обходе изображающей точкой x контура Γ — вектор $f(x)$ совершит целое число оборотов, каковое назовем *вращением* $\gamma(f, \Gamma)$ векторного поля $f(x)$ на Γ .

Легко убедиться в устойчивости характеристики $\gamma(f, \Gamma)$ по отношению к невырожденному гомотопическому преобразованию функции f . Во-первых, невырожденное на Γ поле $f(x)$ можно нормировать — от этого число оборотов у $f(x)/\|f(x)\|$ не изменится. Поэтому невырожденную деформацию $H(x, t)$, переводящую $f_0(x)$ в $f_1(x)$, без ограничения общности также можно считать нормированной, $\|H(x, t)\| \equiv 1$. Но тогда переход от

$$f_0(x) = H(x, 0) \quad \text{к} \quad f_1(x) = H(x, 1)$$

можно представить в виде последовательности достаточно малых шагов по точкам $t_1, \dots, t_n = 1$, при которых разность углов

$$H(x, t_{i+1}) - H(x, t_i)$$

будет мала при любом $x \in \Gamma$ — поэтому $H(x, t_{i+1})$ и $H(x, t_i)$ не могут разойтись по числу оборотов, а значит, не могут разойтись по числу оборотов $H(x, 0)$ и $H(x, 1)$. Следовательно, $\gamma(f, \Gamma)$ инвариантно по отношению к невырожденным деформациям.

Если область Ω не гомеоморфна шару и ее граница $\dot{\Omega}$ состоит из контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, то $\gamma(f, \dot{\Omega})$ определяется как

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = \sum_i \gamma(f, \dot{\Omega}_i),$$

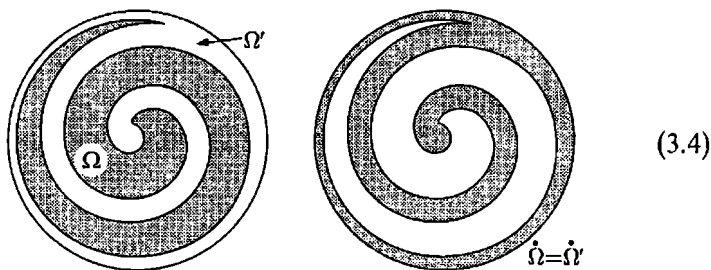
где направления обхода контуров выбраны так, что при обходе любого Γ_i область Ω остается слева.

Соответствие определения с методом «протыкающего луча» легко прослеживается. Относительно подробно плоский вариант теории вращения рассмотрен в [4, т. 13], см. также [10].

3.3. Топологические аномалии

Забегая вперед, надо отметить, что изложенная выше геометрическая картина дает представление об «освещенной» части теории. Кое-что остается во мраке и познается наощупь.

Возьмем полоску вида  и свернем ее в бесконечно раскручивающуюся спираль внутри круга B .



Серая область Ω имеет границу $\dot{\Omega}$, состоящую из двух компонент связности: из окружности \dot{B} и из достижимой изнутри части границы ⁶⁾ $\dot{\Omega}$. Если нуль лежит внутри B , а $f(x)$ тождественное отображение, — то любой луч, выходящий из нуля, протыкает $\dot{\Omega}$ бесконечное число раз, и инструмент (3.3) перестает работать. Аналогичная трудность принципиального характера возникает и при определении степени отображения через гладкие аппроксимации (разделы 4.2, 4.4), но барьер тем не менее преодолевается с помощью определенных технических уловок — см. текст в районе формулы (4.6). В результате *вращение и степень оказываются определены для произвольных ограниченных областей.*

Интересно, что светлая спираль Ω' , слева на рис. (3.4), как внутренность дополнения $B \setminus \Omega$, имеет ту же самую границу, т. е.

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}'.$$



⁶⁾ Окружность \dot{B} является частью границы области Ω , но ее точки не достигаются вдоль кривых, лежащих целиком в Ω .

Тем самым мы имеем пример двух ограниченных областей с одной и той же границей ⁷⁾ (!), более простой и наглядный, чем пример Брауэра — см. [4, т. 13] либо [3], — где результат достигается замысловатым предельным переходом, зато, правда, строится сколько угодно ограниченных областей с общей границей.

3.4. Гомотопия векторных полей

Вернемся на магистраль изложения. Первостепенную роль в топологии играют деформации, или гомотопические переходы.

3.4.1. Определение. *Невырожденные* ⁸⁾ на $\dot{\Omega}$ отображения f_0 и f_1 называются гомотопными на $\dot{\Omega}$, если существует такая невырожденная непрерывная деформация (гомотопия) $H(x, t)$,

$$H : \dot{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

что ⁹⁾

$$H(x, 0) \equiv f_0(x), \quad H(x, 1) \equiv f_1(x).$$

Операции гомотопического перехода соответствует непрерывное деформирование поверхности $f_0(\dot{\Omega})$ в поверхность $f_1(\dot{\Omega})$. Невырожденность гомотопии, $H(x, t) \neq 0$, означает, что деформируемая поверхность не пересекает точку 0.

Геометрически ясно, что невырожденная деформация не может поменять величину вращения $\gamma(\cdot)$, поскольку — двигается ли луч, деформируется ли поверхность — точки протыкания исчезают и возникают парами. Разумеется, пока деформируемая поверхность не пересекает нуля, т. е. $H(x, t) \neq 0$. Поэтому справедлив следующий важный результат.

3.4.2. Теорема. *Гомотопные векторные поля имеют одинаковые вращения.*

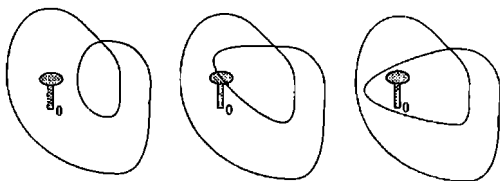
⁷⁾ Что априори, как правило, не укладывается в голове.

⁸⁾ Не обращающиеся в нуль.

⁹⁾ Построение гомотопии от f_0 к f_1 равносильно продолжению отображения $H : X \times \{0\} \times \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ на пространство $X \times [0, 1]$.

Становится ясно, что бесконечное разнообразие практических ситуаций может быть разбито на категории. Деформирование $f(\hat{\Omega})$ на единичную сферу S , с центром в нуле, и последующее разглаживание складок — порождает многослойную поверхность, окутывающую сферу $|\gamma(f, \hat{\Omega})|$ раз¹⁰⁾. Отрицательный знак $\gamma(f, \hat{\Omega})$ связан с выворачиванием $\hat{\Omega}$ наизнанку.

«Число окутываний» — не обязательно сферы, главное: нуля — и есть вращение $\gamma(f, \hat{\Omega})$ с точностью до знака. Если на плоскости в нуль вбить гвоздь, то число окутываний нуля деформацией контура $H(\hat{\Omega}, t)$ поменять невозможно, не нарушая условия $H(x, t) \neq 0$.



Несмотря на элементарный характер утверждения 3.4.2, оно играет принципиальную роль, поскольку служит основным инструментом для вычисления вращений векторных полей, позволяя переходить с помощью гомотопии от изучаемых полей к более простым, часто стандартным, вращение которых известно.

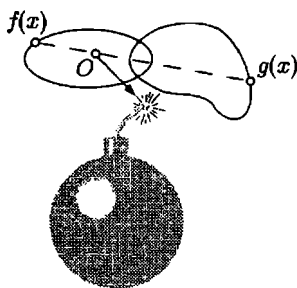
3.4.3. Самый распространенный на практике вид деформаций — линейная гомотопия:

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x),$$

связывающая отображения f и g .

Линейная гомотопия может оказаться вырожденной лишь в том случае, когда найдется точка $x \in \hat{\Omega}$, в которой $f(x)$ и $g(x)$ имеют разные знаки,

$$f(x) = -\frac{t}{1-t}g(x).$$



¹⁰⁾ Если f отображает S в S , то $\gamma(f, S)$ — это так называемая *топологическая степень* отображения f .

Поэтому в случае *непротивоположной направленности* в любой точке $x \in \dot{\Omega}$ отображения $f(x)$ и $g(x)$ линейно гомотопны и, в соответствии с теоремой 3.4.2, имеют одинаковые вращения.

В связи с теоремой 3.4.2 закономерно возникает вопрос о справедливости обратного утверждения. Обязательно ли гомотопны поля с одинаковым вращением? В общем случае это не так. Если же Ω — шар, положительный ответ на поставленный вопрос дает знаменитая *теорема Хопфа*.

3.4.4. Теорема. *Невырожденные на сфере $S \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, векторные поля с одинаковым вращением — гомотопны.* \triangleright

Теорема 3.4.4 не участвует в формировании излагаемого далее аппарата, но показывает, что «аппарат» достигает максимума возможного. В том смысле, что за рамками соответствующей «деформационной идеологии» не остается каких-либо других топологических инвариантов (помимо вращения), из которых можно было бы вытащить дополнительную информацию.

Выше подразумевался гомотопический переход от f_0 к векторному полю f_1 , деформирующий поверхность $f_0(\dot{\Omega})$ в $f_1(\dot{\Omega})$, с помощью гомотопии

$$f_t(x) = H(x, t).$$

Однако деформация может осуществляться не только за счет изменения оператора, но и за счет изменения области. Как бы деформация ни происходила, для сохранения величины вращения существенно лишь, чтобы деформируемая поверхность не пересекала точку 0. Вот точная формулировка результата. Пусть Ω_t ($t \in [0, 1]$) описывает непрерывный переход от области Ω_0 к Ω_1 . Результирующую деформацию $f_t(\dot{\Omega}_t)$ назовем невырожденной, если $f_t(x) \neq 0$ при любых $t \in [0, 1]$, $x \in \dot{\Omega}_t$.

3.4.5. Теорема. *Пусть деформация $f_t(\dot{\Omega}_t)$ невырождена. Тогда*

$$\gamma(f_0, \dot{\Omega}_0) = \gamma(f_1, \dot{\Omega}_1).$$

Это простое обобщение теоремы 3.4.2 иногда оказывается полезным, позволяя при вычислении вращения переходить не только к более простому полю, но и к более простой области.

3.5. Ядро теории

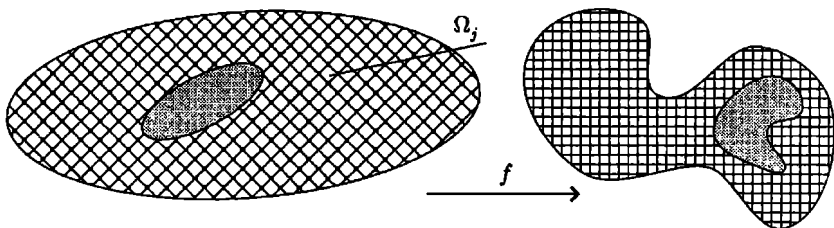
Вращение векторного поля обладает свойством аддитивности в следующем смысле.

3.5.1. Теорема. Пусть векторное поле $f(x)$ определено и невырождено на границах областей

$$\Omega, \Omega_1, \dots, \Omega_m, \dots,$$

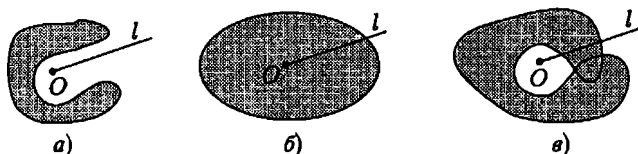
причем Ω_j попарно не пересекаются и $\bar{\Omega} = \bigcup \bar{\Omega}_j$. Тогда $\gamma(f, \dot{\Omega}_j)$ отличны от нуля лишь при конечном числе индексов j , и

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(f, \dot{\Omega}_j). \quad (3.5)$$



◀ Результат очевиден в контексте определения $\gamma(\cdot)$ методом «протыкающего луча». Если Ω_i и Ω_k граничат друг с другом, то граничат и $f(\Omega_i)$ с $f(\Omega_k)$ по некоторому участку Γ_{ik} . Протыканию лучом Γ_{ik} , например, изнутри при подсчете $\gamma(f, \dot{\Omega}_i)$ будет соответствовать протыкание Γ_{ik} снаружи при подсчете $\gamma(f, \dot{\Omega}_k)$. Поэтому в сумме (3.5) справа — все протыкания внутренних перегородок взаимно сократятся. Отличие от нуля $\gamma(f, \dot{\Omega}_j)$ лишь при конечном числе индексов j вытекает из теоремы 3.5.2 в комбинации с дополнительными соображениями элементарного характера. ▶

Будем говорить, что невырожденное на $\dot{\Omega}$ векторное поле $f(x)$ имеет *ахиллесово направление*¹¹⁾, если $f(x)$ не принимает значений какого-то направления, как на рис. а. Иначе говоря, $f(x) \neq \lambda h$ для всех $x \in \dot{\Omega}$, $\lambda > 0$ и некоторого ненулевого $h \in \mathbb{R}^n$. На рис. б и в направления $f(x)$ исчерпывают полный «телесный» угол, но ситуации, очевидно, разные.



3.5.2. Теорема. Если векторное поле $f(x)$ на $\dot{\Omega}$ имеет ахиллесово направление, то $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 0$.

◀ Для доказательства достаточно в качестве l взять луч, задаваемый вектором h ,

$$l = \{x : x = \lambda h, \lambda \in [0, \infty)\},$$

он поверхность $f(\dot{\Omega})$ вообще не протыкает. ▶

Если поле $f(x)$ на $\dot{\Omega}$ принимает все направления, т. е. параметрическое уравнение $f(x) = \lambda h$ имеет решение $x \in \dot{\Omega}$ при любом векторе $h \neq 0$ и некотором $\lambda > 0$, то для $\gamma(f, \dot{\Omega}) \neq 0$ этого, конечно, недостаточно. Однако:

3.5.3. Если поле $f(x)$ на $\dot{\Omega}$ принимает все направления только по одному разу¹²⁾, то $\gamma(f, \dot{\Omega}) \neq 0$, точнее: $|\gamma(f, \dot{\Omega})| = 1$.

3.5.4. Лемма. Пусть поле $f(x)$ невырождено на замыкании области Ω , т. е. $f(x) \neq 0$ при любом $x \in \bar{\Omega}$. Тогда $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 0$.

◀ Разобьем Ω на непересекающиеся области Ω_i настолько малых размеров, что все векторы на каждом замыкании $\bar{\Omega}_i$ составляют друг с другом

¹¹⁾ В [4, т. 13] наличие ахиллесова направления характеризовалось как прокол векторного поля, а в [10] использовался термин «поле выпускает направление», хотя по сути — как раз «не выпускает».

¹²⁾ Т. е. $f(x) = \lambda h$ при любом $h \neq 0$ имеет единственное решение $x \in \dot{\Omega}$.

острый угол. В этом случае на любой границе $\dot{\Omega}_j$ поле f имеет *ахиллесово направление*. Поэтому (теорема 3.5.2) все $\gamma(f, \dot{\Omega}_j) = 0$. Окончательный вывод следует из теоремы 3.5.1. ►

Из леммы 3.5.4 вытекает фундаментальный результат:

3.5.5. Теорема. Если $\gamma(f, \dot{\Omega}) \neq 0$, то уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в Ω , т. е. в Ω существует нуль векторного поля $x^* \in \Omega$, $f(x^*) = 0$.

Таким образом, любая теорема об отличии от нуля вращения векторного поля f может трактоваться как принцип разрешимости уравнения $f(x) = 0$.

Отметим в заключение справедливость полезного дополнения к теореме 3.5.1, вытекающего из объединения теоремы 3.5.1 с леммой 3.5.4.

3.5.6. Утверждение теоремы 3.5.1 справедливо без предположения $\bar{\Omega} = \bigcup \bar{\Omega}_j$, но при условии невырожденности f на $\bar{\Omega} \setminus \bigcup \bar{\Omega}_j$.

Что касается практического вычисления $\gamma(f, \dot{\Omega})$, то главный акцент приходится обычно на поиск *гомотопии* изучаемого поля к какому-либо довольно простому типу $I(x)$. В крайнем случае «станцией назначения» служит линейное поле.

3.5.7. Вращение линейного поля. Пусть $0 \in \Omega$ и A — линейное невырожденное преобразование. Тогда

$$\gamma(A, \dot{\Omega}) = \text{sign det } A, \quad (3.6)$$

причем $\gamma(A, \dot{\Omega}) = \text{ind}(A, 0)$.

◀ Если B шар с центром в нуле настолько малого радиуса, что $\bar{B} \subset \Omega$, то с учетом п. 3.5.6 имеем

$$\gamma(A, \dot{\Omega}) = \gamma(A, \dot{B}),$$

поскольку Ax невырождено на $\bar{\Omega} \setminus B$. Образ $A\dot{B}$ сферы \dot{B} также является сферой, вообще говоря, в другой норме. Следовательно, любой луч протыкает

поверхность $A\dot{B}$ ровно один раз, откуда $|\gamma(A, \dot{\Omega})| = 1$. Знак вращения определяется ориентацией, каковая легко контролируется несколько скучным образом [4, т. 13]. ►

Разумеется, в случае аффинного преобразования

$$f(x) = Ax + b, \quad Ax_0 + b = 0,$$

с невырожденной матрицей A — имеем

$$\text{ind}(f, x_0) = \text{ind}(A, 0).$$

3.6. Разрешимость уравнений

Стандартные ситуации в связи с разрешимостью уравнений

$$f(x) = 0$$

образуют функции $f(x)$, которые заданы на всем \mathbb{R}^n , но судить об их свойствах легко, например, где-нибудь на сферах достаточно большого радиуса. Иначе говоря, функции $f(x)$ даны, но себестоимость их наблюдения приемлема лишь местами.

3.6.1. Пусть $0 \in \Omega$ и на границе, т. е. для любого $x \in \dot{\Omega}$, выполняется одно из условий:

- векторы x и $f(x)$ не направлены противоположно;
- $\|f(x) - x\| < \|f(x)\| + \|x\|$;
- скалярное произведение $(f(x), x) > 0$.

Тогда уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в Ω .

◀ В случае непротивоположной направленности x и $f(x)$ теоремы 3.4.2, 3.1.1 обеспечивают равенства

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = \gamma(I(x), \dot{\Omega}) = 1,$$

что по теореме 3.5.5 влечет за собой разрешимость $f(x) = 0$. Два других условия влекут за собой непротивоположную направленность x и $f(x)$. ►

Изучаемые уравнения часто имеют специальный вид

$$x = T(x). \tag{3.7}$$

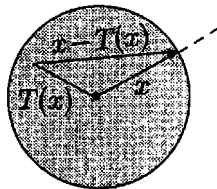
В этом случае решение (3.7) называют *неподвижной точкой* оператора T . Чтобы воспользоваться здесь результатом 3.6.1, достаточно перейти к векторному полю $f(x) = x - T(x)$. В итоге, например, можно гарантировать существование у T неподвижной точки, если

$$(Tx, x) < (x, x), \quad x \in \dot{\Omega}.$$

Широко известна нижеследующая *теорема Брауэра*.

3.6.2. Теорема. *Оператор T , переводящий в себя замкнутый шар B , всегда имеет неподвижную точку $x^* \in B$. При этом $\gamma(I - T, \dot{B}) = 1$.*

◀ Без ограничения общности центр шара B можно считать расположенным в нуле. Предположим противное: T не имеет неподвижной точки в B . Тогда поле $x - T(x)$ невырождено на сфере \dot{B} и, в силу $T(B) \subset B$, векторы $x \in \dot{B}$ и $x - T(x)$ — непротивоположно направлены, иначе точке $T(x)$ пришлось бы лежать на продолжении радиус-вектора $x \in \dot{B}$, что противоречит условию $T(B) \subset B$. ▶



Из доказательства видно, что непротивоположная направленность x и $x - T(x)$ обеспечивается и в более свободных предположениях. Поэтому справедлив следующий результат.

3.6.3. *Пусть Ω — произвольная область, $0 \in \Omega$ и оператор T на границе $\dot{\Omega}$ удовлетворяет условию $T(x) \neq \lambda x$ при $\lambda > 1$. Тогда у T существует неподвижная точка $x^* \in \bar{\Omega}$.*

3.7. О теореме Брауэра

Мечтая влипнуть в какую-нибудь красивую историю, чаще всего попадаешь в банальные ситуации. Так и с вращением векторного поля. Хорошо бы натолкнуться на нетривиальную задачу с вращением типа $\gamma(f, \dot{\Omega}) = -37$, но уравнения то и дело попадают с набившим оскомину

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = 1 \tag{3.8}$$

на области Ω типа шара.

Ситуация (3.8) очень широко распространена¹³⁾, и ее можно изучать на основе какого-либо избранного эталона, ибо по *теореме Хопфа* 3.4.4 при одинаковом вращении все f деформационно эквивалентны (гомотопны). Исторически на роль такого эталона попала *теорема Брауэра* 3.6.2. Поле $f(x) = x - T(x)$, где оператор T переводит в себя замкнутый шар B , удовлетворяет условию $\gamma(f, \dot{B}) = 1$, о котором по указанным выше причинам можно забыть, и сконцентрироваться на свойстве $T(B) \subset B$.

В результате практика использования топологических принципов неподвижной точки обедняется, зацикливаясь на единственном симптоме

$$T(B) \subset B.$$

Но охват приложений получается все-таки достаточно широкий, а сама *теорема Брауэра*, попадая в фокус внимания, становится трамплином для различных обобщений. Сразу ясно, например, что шар B в п. 3.6.2 с равным успехом *может быть заменен произвольным замкнутым ограниченным выпуклым множеством*. Не сразу ясно, но легко обнаруживается, что B можно заменить любым A , гомеоморфным замкнутому шару.

◀ Действительно, пусть оператор T переводит в себя множество A , гомеоморфное замкнутому шару B , и G — соответствующий гомеоморфизм. В этом случае оператор $G^{-1}TG$ отображает в себя B и по *теореме* 3.6.2 имеет неподвижную точку $x^* \in B$, т. е.

$$G^{-1}TG(x^*) = x^* \Rightarrow TG(x^*) = G(x^*).$$

Следовательно, $y^* = G(x^*) \in A$ — неподвижная точка оператора T . ▶

Дальнейшие обобщения, связанные с *ретракциями* и другими изысками (см. [4, т. 13]), имеют больше метафизические устремления, нежели утилитарные. Ключом к решению практических задач чаще всего оказывается первоисточник 3.6.2 либо его самые простые обобщения. Рассмотрим в качестве примера *лемму Кнастера—Куратовского—Мазуркевича*, в которой *теорема Брауэра* выступает в роли скрытого механизма.

¹³⁾ Видимо потому, что «Бог изощрен, но не злонамерен».

3.7.1. Лемма. Пусть X произвольное множество в \mathbb{R}^n , $A(x)$ — точно-множественное отображение (из X в \mathbb{R}^n) с компактными образами. Пусть для всякого конечного подмножества $\{x_1, \dots, x_k\} \subset X$ выпуклая оболочка точек $\{x_1, \dots, x_k\}$ содержится в объединении $\bigcup_{i=1}^k A(x_i)$. Тогда

$$\bigcap_{x \in X} A(x) \neq \emptyset.$$

◀ В силу компактности образов достаточно показать, что не пусто пересечение любого конечного множества образов. Предположим противное, т. е.

$\bigcap_{i=1}^k A(x_i) = \emptyset$ для некоторого множества точек $\{x_1, \dots, x_k\}$. Тогда $\bigcup_{i=1}^k Y_i = \mathbb{R}^n$, где Y_i обозначает дополнение к $A(x_i)$.

Пусть теперь $\rho_i(x)$ — разбиение единицы в \mathbb{R}^n , согласованное с покрытием $\{Y_i\}$, т. е. такой набор функций, что ¹⁴⁾

$$\sum_{i=1}^k \rho_i(x) \equiv 1, \quad \text{supp } \rho_i \subset Y_i.$$

Отображение $\varphi(x) = \sum_{i=1}^k \rho_i(x)x_i$, очевидно, преобразует в себя выпуклую оболочку $\text{co}\{x_1, \dots, x_k\}$ и, по *теореме Брауэра*, имеет неподвижную точку x^* . При этом $\rho_i(x^*) > 0$ для i из некоторого подмножества индексов $M \subset \{1, \dots, k\}$, и $\rho_i(x^*) = 0$ для $i \notin M$. Но тогда

$$x^* = \sum_{i \in M} \rho_i(x^*)x_i \in \text{co}\{x_i : i \in M\} \subset \bigcup_{i \in M} A(x_i).$$

Следовательно, $x^* \in A(x_i)$ для некоторого $i \in M$, т. е. $x^* \notin Y_i$, а значит, $\rho_i(x^*) = 0$, что приводит к противоречию. ▶

3.8. Теорема Карамардиана

«Круги по воде» от теоремы Брауэра расходятся весьма далеко, и, так или иначе, многие результаты являются ее следствиями. Вот своеобразная изюминка.

¹⁴⁾ Здесь $\text{supp } \rho$ обозначает носитель функции $\rho(x)$, т. е. множество тех x , для которых $\rho(x) > 0$.

3.8.1. Теорема Карамардиана¹⁵⁾. Пусть непрерывный оператор

$$f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$$

определен при всех $x \geq 0$ и является P -отображением, т. е. для любого ненулевого вектора $x \geq 0$ можно указать такой индекс j , что

$$x_j \cdot f_j(x) > 0.$$

Тогда неравенство $f(x) > 0$ положительно разрешимо¹⁶⁾.

Иными словами, уравнение $y = f(x)$ при некотором $y > 0$ имеет решение $x \geq 0$. Вкус и аромат скучному на вид утверждению придает следующая содержательная интерпретация.

Назовем переменные x_i действиями, y_i — результатами. Например, x_i — количество i -го лекарства, y_i — i -й показатель здоровья (температура, давление). Одинаковые номера за действиями закрепляют «свои» результаты. Понятно, что при наличии побочных влияний совместные стереотипные действия могут приводить к отрицательным последствиям, в результате чего лечение больного может оказаться невозможным.

Однако пусть связи $y_i = f_i(x)$ определяются P -отображением, т. е. любая совокупность положительных действий не может дать отрицательные результаты по всем номерам, для которых $x_i > 0$. Хотя бы один результат будет ожидаемым. Тогда теорема 3.8.1 гарантирует возможность так подобрать действия (лекарства) $x_i > 0$, что все результаты будут строго положительными (все показатели улучшатся, несмотря на побочные влияния).

◀ *Доказательство теоремы 3.8.1.* Применим лемму 3.7.1, которая, заметим, остается справедливой при замене предположения о компактности образов $A(x)$ требованием их открытости и ограниченности. В качестве X возьмем n вершин

¹⁵⁾ Karamardian S. Existence of solutions of certain systems of non-linear inequalities // Numer. Math. 1968. 12. № 4. P. 327–334.

¹⁶⁾ Под $f(x) > 0$ подразумевается $f_i(x) > 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

симплекса $\Delta = \{x : \|x\| = 1, x \geq 0\}$:

$$x_i = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\},$$

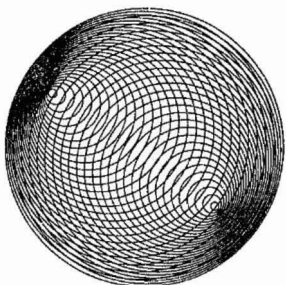
и положим

$$A(x_i) = \{x : f_i(x) > 0, x \in \Delta\}.$$

Из определения P -отображения следует, что выпуклая оболочка любого подмножества вершин симплекса Δ покрывается соответствующим объединением $\bigcup A(x_i)$, что позволяет (лемма 3.7.1) гарантировать непустоту пересечения всех $A(x_i)$. ►

Глава 4

Степень отображения и вращение



Визуальная ясность хороша с точки зрения освещения, но результаты достигаются изворотливой педантичностью. Поэтому мы возвращаемся в исходную точку с целью навести некоторый формальный порядок.

4.1. Дифференциальная преамбула

Кос-что напомним, чтобы иметь минимум под рукой.

О гомеоморфизмах и диффеоморфизмах — уже сто раз говорилось, но осведомленности должного уровня это, конечно, не гарантирует. Так что начинать приходится с той же стартовой позиции.

Гомеоморфизм — это взаимно однозначное и непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$, обратное к которому f^{-1} тоже непрерывно¹⁾. Пространства X и Y , между которыми можно установить гомеоморфизм, считаются *гомеоморфными*, и тогда пишут $X \sim Y$.

Отображение f называют *локальным гомеоморфизмом*, если у любой пары точек x, y , такой что $f(x) = y$, найдутся окрестности гомеоморфно отображаемые друг на друга.

Диффеоморфизм $f : X \rightarrow Y$ — это гладкий гомеоморфизм. Точнее, оба отображения f и f^{-1} предполагаются гладкими, т.е. непрерывно дифференцируе-

¹⁾ Насчет необходимости оговаривать непрерывность f^{-1} см. [4, т. 5], но это, вообще говоря, экзотика. *Взаимно однозначное отображение $f : X \rightarrow Y$ является гомеоморфизмом между X и образом $f(X)$ в том случае, когда $f(\bar{\Omega}) = \overline{f(\Omega)}$ для любого $\Omega \subset X$.*

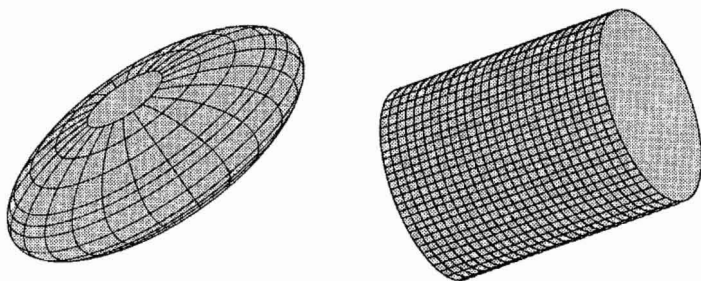
мыми²⁾. Пространства X и Y , между которыми можно установить диффеоморфизм, считаются *диффеоморфными*, и опять-таки пишут $X \sim Y$.

Карты и атласы. Система координат, или другими словами, параметризация множества M ,

$$x : M \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

называется *картой* на M , при условии что x диффеоморфизм M на $x(M)$. Карту на открытом подмножестве $U \subset M$ называют *локальной*. Таким образом, *локальная карта* определяется парой (U, x) , открытым множеством $U \subset M$ и гомеоморфизмом x .

Варианты координатных сеток различных криволинейных координат хорошо известны, но локальные карты на замкнутых поверхностях не выстраиваются



во взаимно однозначные глобальные координатные функции

$$x(p) = \{x_1(p), \dots, x_n(p)\}.$$

И тогда «во избежание» предпринимаются дополнительные меры.

Две карты (U, x) , (V, y) называют *согласованными*, если образы пересечения $x(U \cap V)$ и $y(U \cap V)$ — открыты³⁾ в \mathbb{R}^n . В зависимости от контекста предъявляются также те или иные требования гладкости: дифференцируемости композиции yx^{-1} .

Наконец, множество

$$A = \{U_\alpha, x_\alpha\}$$

согласованных между собой локальных карт (U_α, x_α) , покрывающих в совокупности M , — называется *атласом* множества M .

²⁾ Непрерывной дифференцируемости, как правило, хватает. Но не всегда. В *теореме Сарда*, например, требуется класс гладкости $f \in C^k$, $k = \max\{0, m - n\} + 1$, если f действует из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n . Поэтому дешевле предполагать бесконечную дифференцируемость $f : X \rightarrow Y$.

³⁾ Пустое множество \emptyset считается открытым.

Гладкие многообразия. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким m -мерным многообразием*, если для любой точки $x \in X$ можно указать окрестность $V \cap X$, диффеоморфную открытому множеству $U \subset \mathbb{R}^m$.

Установлен диффеоморфизм между U и $V \cap X$ равносильно введению параметризации области $V \cap X$: точки $y \in V \cap X$ описываются взаимно однозначным и взаимно гладким преобразованием

$$y_j = y_j(x_1, \dots, x_m), \quad j = 1, \dots, n.$$

Переменные x_1, \dots, x_m называют *локальными координатами* на $V \cap X$.

Далее. Пусть \mathbb{Q}_m обозначает полупространство

$$\mathbb{Q}_m = \{x : x = \{x_1, \dots, x_m\} \in \mathbb{R}^m, x_1 \geq 0\}.$$

Края \mathbb{Q}_m называется плоскость $x_1 \equiv 0$.

Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким m -мерным многообразием с краем*, если для любого $x \in X$ можно указать окрестность $V \cap X$, диффеоморфную открытому множеству $U \subset \mathbb{Q}_m$ полупространства \mathbb{Q}_m . Край X — это множество тех точек X , которые под действием соответствующих диффеоморфизмов переходят в точки края⁴⁾ \mathbb{Q}_m .

В определенных условиях более удобна бескоординатная точка зрения. Если $X \subset \mathbb{R}^n$ — m -мерное гладкое многообразие с краем или без, — то в каждой точке $x \in X$ вводится касательная m -мерная плоскость, наилучшим образом аппроксимирующая X вблизи x . Параллельная ей плоскость T_x , проходящая через начало координат, называется *касательным пространством* многообразия X в точке x . Иногда, чтобы подчеркнуть, что речь идет о касании многообразия X , вместо T_x используется обозначение TX_x . Аналогично определяются касательные пространства T_y (TY_y) в точках $y = f(x) \in Y$. Наилучшая линейная аппроксимация f , отображающая T_x в T_y , называется производной f в точке x . В случае многообразия без края эта производная f' может быть записана как *матрица Якоби* в локальных координатах.

Об *ориентации* уже было сказано в разделе 3.1, и для формализации картины нужны лишь некоторые дополнительные штрихи.

В \mathbb{R}^3 упорядоченная тройка некопланарных векторов

$$a, b, c$$

называется *правой*, если для наблюдателя, расположенного в нуле, обход концов a, b, c в указанном порядке происходит по часовой стрелке. В противном

⁴⁾ Например, краем замкнутого шара является сфера. Сфера же — многообразие без края.

случае тройка a, b, c — левая. Соответственно классифицируются базисы. В общем случае \mathbb{R}^n понятий «правого» и «левого» не существует, но дихотомия остается. Два базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ в \mathbb{R}^n считаются *одинаково ориентированными*, если

$$\{e'_1, \dots, e'_n\} = A\{e_1, \dots, e_n\} \quad \text{и} \quad \det A > 0.$$

При этом в случае $\det A < 0$ говорят, что базисы *противоположно ориентированы*. В результате все базисы распадаются на два класса эквивалентных между собой. Базис

$$e_1 = \{1, 0, \dots, 0\}, \quad e_2 = \{0, 1, \dots, 0\}, \dots, e_n = \{0, 0, \dots, 1\}$$

называют *стандартным*, а соответствующую ему ориентацию — *стандартной ориентацией*⁵⁾ \mathbb{R}^n . Использование *стандартного базиса* уравнивает в правах фиксацию базиса и фиксацию системы координат.

Ориентацию гладкого многообразия $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ определяет задание на Ω атласа, совокупности согласованных между собой *локальных карт* (координат). При наличии у Ω края $\Omega = \Gamma$, его ориентация считается *согласованной* с ориентацией Ω , если дополнение базисов касательных пространств $T\Gamma_x$ внешними нормальными в точках $x \in \Gamma$ образует базисы, одинаково ориентированные с локальными координатами Ω в тех же точках x .

Владение инструментом ориентации определяется главным образом умением согласовывать ориентации «взаимодействующих» многообразий. Вот одна из типичных ситуаций, произрастающих на феномене *гладкой гомотопии*.

4.1.1. Два отображения $f_0: X \rightarrow Y$ и $f_1: X \rightarrow Y$ называются *гладко гомотопными* ($f_0 \sim f_1$), если существует такое гладкое отображение $f: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, что

$$f(x; 0) = f_0(x), \quad f(x; 1) = f_1(x).$$

Здесь естественно возникает гладкое многообразие $X \times [0, 1]$ с краем, состоящим из двух экземпляров многообразия X :

$$X \times 0 \quad \text{и} \quad X \times 1.$$

При ориентации $X \times [0, 1]$ как произведения двух ориентированных многообразий X и $[0, 1]$, компоненты края $X \times 0$ и $X \times 1$ обретают противоположную ориентацию.

⁵⁾ Либо *положительной ориентацией*. Ориентации нульмерного многообразия также приписывают (для удобства) символы $+1$ или -1 .

О прообразах регулярных значений

4.1.2. В случае $\det f'(x) = 0$, где f' производная, — точка $x \in X$ называется *критической* отображения $f : X \rightarrow Y$. А точку $y \in Y$, прообраз $f^{-1}(y)$ которой состоит только из критических точек, называют *критическим значением* $f(x)$.

4.1.3. Точки $x \in X$, в которых $\det f'(x) \neq 0$, называются *регулярными*, а $y = f(x)$, прообразы которых состоят исключительно из регулярных точек, называют *регулярными значениями*⁶⁾ $f(x)$.

Если в $f : X \rightarrow Y$ размерности пространств X, Y различны, определения критических и регулярных точек и значений отталкиваются от ранга $f'(x)$. Условие $\det f'(x) \neq 0$ заменяется максимальностью ранга $f'(x)$, соответственно, $\det f'(x) = 0$ — условием «ранг $f'(x)$ меньше максимального».

Следующий на вид технический результат позволяет решать некоторые принципиальные вопросы.

4.1.4. Теорема Сарда. Множество критических значений отображения $f : X \rightarrow Y$ имеет нулевую лебегову меру в Y .

◀ Ограничимся рассмотрением случая равных размерностей X и Y . Поскольку X покрывается счетным множеством окрестностей, теорему достаточно доказать, когда X — единичный куб $[0, 1]^n$.

Разобьем $[0, 1]^n$ на N^n равных кубиков, разделив каждое ребро на N равных частей. Для любой пары точек x_0, x , лежащих в одном из таких кубиков,

$$\|f(x) - f'(x_0)(x - x_0)\| = o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (4.1)$$

Если x_0 — критическая точка, т. е. $\det f'(x_0) = 0$, то из (4.1) ясно, что объем образа этого кубика есть $o\left(\frac{1}{N^n}\right)$. Если теперь k обозначает число кубиков, содержащих критические точки, то суммарный объем образов таких кубиков есть $N^k \cdot o\left(\frac{1}{N^n}\right)$, причем заведомо $k \leq n$. В пределе при $N \rightarrow \infty$ приходим к выводу о том, что лебегова мера в Y множества критических значений равна нулю. ▶

⁶⁾ В случае, когда прообраз $f^{-1}(y)$ пуст, точку y относят к регулярным значениям. Очевидно, если X — компакт, то прообраз любого регулярного значения состоит не более чем из конечного числа точек.

4.1.5. Следствие. Множество регулярных значений отображения $f : X \rightarrow Y$ всюду плотно в Y .

Если условие невырожденности f в виде $\det f'(x) \neq 0$ заменить более общим требованием максимальности ранга $f'(x)$, то о регулярных точках и значениях можно говорить и в случае $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \neq n$. Для таких ситуаций теорема 4.1.4 остается справедливой (равно как и следствие 4.1.5).

В определенных ситуациях представляют интерес результаты об индивидуальных прообразах регулярных точек.

4.1.6. Пусть f отображает $(k+1)$ -мерное многообразие X в k -мерное Y ; точка y регулярна, и ее прообраз $f^{-1}(y)$ непуст. Тогда $f^{-1}(y)$ является гладким одномерным многообразием.

◀ Если $x \in f^{-1}(y)$, то $f'T_x = T_y$. Поэтому ядро линейного оператора f' в точке x является одномерным пространством, скажем, E^1 .

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^N$ и P — ортогональный проектор \mathbb{R}^N на E^1 . Определим отображение $g : X \rightarrow Y \times E^1$ как $g = \{f, P\}$. Очевидно, $g' = \{f', P\}$ является изоморфизмом пространства T_x на $T_y \times E^1$, и по теореме о неявной функции отображение g диффеоморфно отображает некоторую окрестность $U \subset X$ точки $x \in X$ на окрестность $V \subset Y \times E^1$ точки $\{y, Px\}$. При этом отображении множество $f^{-1}(y)$ является прообразом прямой $y \times E^1$, а множество $f^{-1}(y) \cap U$ диффеоморфно отображается на $(y \times E^1) \cap V$. ▶

Аналогично устанавливается:

4.1.7. Пусть $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция на гладком многообразии X , и нуль — регулярное значение φ . Тогда множество

$$X = \{x \in X : \varphi(x) \geq 0\}$$

является гладким многообразием с краем $\dot{X} = \varphi^{-1}(0)$. ◀

4.1.8. Пусть f отображает $(k+1)$ -мерное многообразие X с краем в k -мерное гладкое многообразие Y ; точка $y \in Y$ регулярна как для f , так и для сужения f на край \dot{X} . Тогда $f^{-1}(y)$ является гладким одномерным многообразием с краем. ◀

4.2. Степень отображения

Пусть X и Y — гладкие ориентированные n -мерные многообразия, причем X компактно, а Y связно. Степень $\deg(f; y)$ гладкого отображения $f: X \rightarrow Y$ для регулярного значения y определяется как

$$\deg(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign det } f'(x). \quad (4.2)$$

В силу компактности X и регулярности y — число точек в прообразе $f^{-1}(y)$ конечно. Из определения ясно, что $\deg(f; y)$ — локально постоянная целочисленная функция от y , определенная на открытом подмножестве Y полной меры⁷⁾. Этого, правда, не хватает для установления независимости $\deg(f; y)$ от y . Тем не менее функция $\deg(f; y)$ постоянна на множестве регулярных значений, см. далее, и это общее значение $\deg(f; y)$ называется *степенью отображения* $f: X \rightarrow Y$ и обозначается через $\deg f$.

Вот первоочередные меры, расчищающие стартовую площадку.

4.2.1. Пусть X — $(n+1)$ -мерное многообразие с краем \dot{X} , Y — связное n -мерное многообразие. Если $f: \dot{X} \rightarrow Y$ продолжается до гладкого отображения $F: X \rightarrow Y$, то $\deg(f; y) = 0$ для любого регулярного значения⁸⁾ y .

◀ Допустим сначала, что y — регулярное значение как для f , так и для F . В силу п. 4.1.6 множество $F^{-1}(y)$ является одномерным гладким многообразием, край которого, состоящий из конечного числа простых дуг, получается в результате пересечения $F^{-1}(y)$ с краем \dot{X} . При этом граничные точки дуг лежат на \dot{X} . Пусть Γ — одна из дуг $F^{-1}(y)$ и $\dot{\Gamma} = \{a\} \cup \{b\}$. Тогда

$$\text{sign det } f'(a) + \text{sign det } f'(b) = 0, \quad (4.3)$$

откуда следует утверждение 4.2.1, так как прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из концов дуг, лежащих в прообразе $F^{-1}(y)$.

Справедливость (4.3) вытекает из простого анализа согласования ориентаций. Источник (4.3) заключен в том, что если касательный к Γ в точке x вектор $e_1(x)$ — положительно ориентирует Γ , то один из векторов $e(a)$, $e(b)$ направлен внутрь X , другой наружу, откуда в итоге и следует (4.3).

⁷⁾ В силу теоремы Сарда.

⁸⁾ Это аналог леммы 3.5.4 о равенстве нулю вращения $\gamma(f, \dot{\Omega})$, если поле $f(x)$, невырожденное на границе $\dot{\Omega}$, невырожденно продолжается на Ω .

Пусть теперь y — регулярное значение отображения $f: X \rightarrow Y$, но не $F: X \rightarrow Y$. Поскольку любая достаточно малая окрестность $V \subset Y$ точки y состоит из регулярных значений отображения f , — функция $\deg(f; y)$ постоянна на V . С другой стороны, множество регулярных значений отображения $F: X \rightarrow Y$ плотно в V (п. 4.1.5). Поэтому в V найдется точка z , являющаяся регулярным значением как f , так и F , и задача сводится, после замены y на z , к уже рассмотренной ситуации. ►

4.2.2. Гладко гомотопные отображения $f_0: X \rightarrow Y$ и $f_1: X \rightarrow Y$ имеют одинаковые степени

$$\deg(f_0; y) = \deg(f_1; y).$$

◀ У сужения \bar{f} гладкой гомотопии $f: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, связывающей f_0 и f_1 , степень $\deg(\bar{f}; y)$ для регулярных значений y равна разности степеней $\deg(f_1; y)$ и $\deg(f_0; y)$, поскольку многообразия $X \times 0$ и $X \times 1$ ориентированы противоположно⁹⁾. Далее остается сослаться на п. 4.2.1. ►

4.2.3. Диффеоморфные отображения $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ называются гладко изотопными, если существует гладкая гомотопия $f: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, которая соединяет f_0 и f_1 , и при каждом $\tau \in [0, 1]$ отображение $f(x; \tau)$ является диффеоморфизмом X на Y .

4.2.4. Лемма. Пусть y и z — произвольные точки гладкого связного многообразия Y . Тогда существует гладко изотопный тождественному диффеоморфизм $h: Y \rightarrow Y$, переводящий y в z .

За доказательством, равно как и за другими подробностями дифференциальной топологии, проще всего отослать читателя к [13]. Но тут, на примере, хотелось бы обратить внимание на технический прием, полезный и часто используемый при построении гомотопических переходов.

◀ Сам по себе факт 4.2.4 более-менее очевиден в простых ситуациях¹⁰⁾, но при усложнении многообразия Y возникает опасение «как бы чего не вышло», которое в итоге не оправдывается.

Итак, построим сначала гладкую изотопию \mathbb{R}^n на себя,

$$h: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

которая оставляет неподвижными точки вне единичного шара B и переводит начало координат в наперед заданную точку $z \in B$.

⁹⁾ См. абзац, идущий вслед за определением 4.1.1

¹⁰⁾ В частном случае n -мерной сферы S^n подходящий диффеоморфизм дает поворот S^n , переводящий y_0 в y_1 .

Оператор сдвига U_t по траекториям дифференциального уравнения

$$\dot{x} = \varphi(x)c,$$

где $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что $\varphi(x) > 0$ при $x \in B$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$, — является диффеоморфизмом¹¹⁾ \mathbb{R}^n на себя при любом t . Очевидно, при подходящем выборе¹²⁾ c и t отображение U_t переводит центр B в точку $z \in B$.

В общем случае связного многообразия Y любая точка $y \in Y$ имеет окрестность в Y , диффеоморфную \mathbb{R}^n . Поэтому приведенное выше рассуждение показывает, что достаточно близкие к y точки изотопны¹³⁾ y . Следовательно, Y распадается на открытые множества (классы) изотопных точек. Поскольку Y связно, класс изотопных точек может быть только один. ►

Теперь установим, наконец, корректность определения степени отображения, т. е. независимость $\deg(f; y)$ от y .

4.2.5. *Функция $\deg(f; y)$ постоянна на множестве регулярных значений y .*

◀ Пусть y и z — регулярные значения отображения $f : X \rightarrow Y$, и $h : Y \rightarrow Y$ — изотопный тождественному диффеоморфизм, переводящий y в z (лемма 4.2.4). Так как h сохраняет ориентацию, то

$$\deg(f; y) = \deg(hf; h(y)) = \deg(hf; z),$$

а поскольку диффеоморфизм h еще и гладко изотопен тождественному, то f гладко гомотопно отображению hf , причем z — регулярное значение отображения hf . Тогда (п. 4.2.2)

$$\deg(hf; z) = \deg(f; z) \Rightarrow \deg(f; y) = \deg(f; z). \quad \blacktriangleright$$

4.3. Свойства степени

Кое-что уже было установлено в предыдущем разделе, но об этом целесообразно сказать еще раз с учетом постоянства $\deg(f; y)$ на множестве регулярных значений (п. 4.2.5), заменяя общее значение $\deg(f; y)$ степенью $\deg f$. Как и прежде X, Y — гладкие ориентированные многообразия одинаковой размерности, причем X компактно, а Y связно.

¹¹⁾ Изотопным тождественному.

¹²⁾ Использование операторов сдвига для гомотопических переходов легко спасает в некоторых ситуациях, где простых выходов из положения сразу не видно.

¹³⁾ В смысле существования изотопного тождественному диффеоморфизма, переводящего точки друг в друга.

4.3.1. Гомотопическая эквивалентность. *Гладко гомотопные отображения $f_0 : X \rightarrow Y$ и $f_1 : X \rightarrow Y$ имеют одинаковую степень,*

$$\deg f_0 = \deg f_1.$$

◀ Факт 4.3.1 получается объединением утверждений 4.2.2 и 4.2.5. ▶

4.3.2. Признак нулевой степени. *Пусть Ω — $(n+1)$ -мерное многообразие с краем $\dot{\Omega}$, Y — связное n -мерное многообразие. Если $f : \dot{\Omega} \rightarrow Y$ продолжается до гладкого отображения $F : \Omega \rightarrow Y$, то $\deg f = 0$.*

◀ Факт 4.3.2 — переформулировка леммы 4.2.1 с учетом п. 4.2.5. ▶
Очевидна аналогия с леммой 3.5.4 о равенстве нулю вращения $\gamma(f, \dot{\Omega})$, если поле $f(x)$, невырожденное на границе $\dot{\Omega}$, невырожденно продолжается на Ω .

4.3.3. Признак нулевой степени. *Пусть $f : \dot{\Omega} \rightarrow Y$ — гладкое отображение и $f(\dot{\Omega}) \neq Y$. Тогда $\deg f = 0$.*

◀ Если $y \in Y \setminus f(\dot{\Omega})$, то y — регулярное значение отображения f , не имеющее прообразов. ▶ Признак 4.3.3 очевидным образом переключается с теоремой 3.5.2 о нулевом вращении поля, имеющего *ахиллесово направление*.

4.3.4. Аддитивность. *Пусть гладкое отображение F на многообразии Y определено на границах областей*

$$\dot{\Omega}, \dot{\Omega}_1, \dots, \dot{\Omega}_m \subset \mathbb{R}^n,$$

причем области Ω_j ($j = 1, \dots, m$) попарно не пересекаются, замыкание $\bar{\Omega} = \bigcup \bar{\Omega}_j$, и f, f_1, \dots, f_m — сужения F , соответственно, на $\dot{\Omega}, \dot{\Omega}_1, \dots, \dot{\Omega}_m$. Тогда

$$\deg f = \sum_{i=1}^m \deg f_i. \quad (4.4)$$

◀ Если Ω_i и Ω_k граничат друг с другом, то при использовании формулы (4.2) для подсчета степеней в (4.4) выясняется, что общие точки $x \in f_i^{-1}(y)$, $x \in f_k^{-1}(y)$ дадут в сумме (4.4) слагаемые разных знаков,

$$\text{sign det } f'_i(x) = -\text{sign det } f'_k(x).$$

Поэтому все слагаемые в (4.4) справа по внутренним перегородкам взаимно сократятся, что и дает требуемое равенство. ▶

4.3.5. Степень диффеоморфизма.

Если диффеоморфизм $f : X \rightarrow Y$ сохраняет ориентацию, то

$$\deg f = 1,$$

если не сохраняет, — то

$$\deg f = -1.$$

◀ Все значения отображения f регулярны и каждому отвечает один прообраз. Поэтому $|\deg f| = 1$. Знак определяется ориентацией. ▶

4.3.6. Теорема о произведении. Пусть

$$f : X \rightarrow Y, \quad g : Y \rightarrow Z,$$

где $X, Y, Z \subset \mathbb{R}^n$ — гладкие многообразия, причем X компактно, а Y и Z связны. Тогда степень композиции равна произведению степеней

$$\deg(gf) = \deg g \cdot \deg f.$$

◀ Если $z \in \mathfrak{A}$ — регулярное значение отображений gf и g , то $y \in g^{-1}(z)$ регулярное значение f . Поэтому

$$\begin{aligned} \deg(gf) &= \sum_{z \in (gf)^{-1}(z)} \text{sign det } (gf)'_z = \sum_{z \in (gf)^{-1}(z)} \text{sign det } g'_{f(z)} \text{sign det } f'_z = \\ &= \sum_{y \in g^{-1}(z)} \left(\text{sign det } g'_y \cdot \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign det } f'_x \right) = \\ &= \sum_{y \in g^{-1}(z)} \text{sign det } g'_y \cdot \deg f = \deg g \cdot \deg f. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

4.4. Степень и вращение

4.4.1. Вращение $\gamma(f, \dot{\Omega})$ определяется как степень отображения

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \quad (4.5)$$

границы $\dot{\Omega}$ в единичную сферу S .

Для «воплощения сказанного в металл» необходимы кое-какие технические усилия. Первым делом в определении степени

снимается требование гладкости отображения $F : X \rightarrow S^n$ с помощью гладких ε -аппроксимаций $F_\varepsilon : X \rightarrow S^n$,

$$\|F(x) - F_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon \quad (\forall x \in X),$$

степень каковых, $\deg F_\varepsilon$, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ стабилизируется (п. 4.3.1), поскольку

$$F(x; \lambda) = \frac{(1 - \lambda)F_\varepsilon^0(x) + \lambda F_\varepsilon^1(x)}{\|(1 - \lambda)F_\varepsilon^0(x) + \lambda F_\varepsilon^1(x)\|} \quad (x \in X, 0 \leq \lambda \leq 1)$$

является гладкой гомотопией, соединяющей F_ε^0 и F_ε^1 .

4.4.2. *Общую степень гладких ε -аппроксимаций отображения F называют степенью $\deg F$ этого отображения.*

Далее вводится понятие гомотопии непрерывных отображений (как и в разделе 3.4), и легко устанавливается, что степень непрерывных отображений обладает теми же свойствами, что и степень гладких отображений (п. 4.3). В частности:

4.4.3. *Гомотопные отображения $F_0 : X \rightarrow S^n$, $F_1 : X \rightarrow S^n$ имеют одинаковую степень:*

$$\deg F_0 = \deg F_1.$$

Если теперь Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с гладкой границей $\dot{\Omega}$, то для определения $\gamma(f, \dot{\Omega})$ надо лишь позаботиться о правильной ориентации границы $\dot{\Omega}$. Для этого в каждом касательном пространстве $T\dot{\Omega}_x$ выбирается такой базис $e_1(x), \dots, e_{n-1}(x)$, определяющий ориентацию $T\dot{\Omega}_x$, чтобы его дополнение вектором внешней нормали $n(x)$ к $\dot{\Omega}$ в точке x определяло стандартную ориентацию \mathbb{R}^n . Аналогично ориентируется единичная сфера $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Далее, в соответствии с п. 4.4.1, вращение $\gamma(f, \dot{\Omega})$ определяется как степень отображения

$$\|f\|^{-1} f : \dot{\Omega} \rightarrow S^{n-1}.$$

Если граница $\dot{\Omega}$ не обязательно гладкая, возникает дополнительная морока. Пусть F определено на $\dot{\Omega}$, и F_0 — произвольное

невыврожденное непрерывное продолжение поля F с $\dot{\Omega}$ на замыкание области $\bar{\Omega}$. Пусть Z_0 — множество нулей поля F_0 . Поскольку Z_0 и $\dot{\Omega}$ компактны и $Z_0 \cap \dot{\Omega} = \emptyset$, то существует область Ω_0 с гладкой границей, для которой

$$Z_0 \subset \Omega_0 \subset \Omega. \quad (4.6)$$

В силу (4.6) поле F_0 невырождено на $\dot{\Omega}_0$. Поэтому определено его вращение $\gamma(F_0, \dot{\Omega}_0)$, которое не зависит ни от продолжения F_0 поля F , ни от выбора области Ω_0 , удовлетворяющей условию (4.6). Это общее вращение называют *вращением* $\gamma(F, \dot{\Omega})$ поля F на границе $\dot{\Omega}$ области Ω .

Интересно что в последней конструкции $\gamma(F, \dot{\Omega})$ присутствует не только граница $\dot{\Omega}$, но и область Ω , тогда как определение вращения на областях с гладкими границами не требует привлечения самих областей. И это принципиально, что связано с существованием в \mathbb{R}^n различных непересекающихся областей $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ с общей границей¹⁴⁾. Поэтому если на общей границе областей Ω_i задано невырожденное поле F , то вращения $\gamma(F, \dot{\Omega}_i)$ могут оказаться различными. *Поэтому в обозначении $\gamma(F, \dot{\Omega})$ символ $\dot{\Omega}$ нужно понимать как границу именно области Ω .*

С учетом перечисленных нюансов вслед за свойствами степени (раздел 4.3) выполняются аналогичные свойства вращения отображения $\gamma(F, \dot{\Omega})$, описанные еще в пп. 3.4, 3.5. Доказательства сводятся к простым реверансам в сторону определений.

К оговоренным уже свойствам вращения с помощью определения через степень легче присовокупляются некоторые другие факты, характеризующие вращение векторного поля. Например, к утверждениям 4.3.5, 4.3.6 очевидным образом добавляются аналоги для вращения непрерывных полей, не обязательно гладких. Комбинация этих аналогов приводит к следующему принципиальному результату.

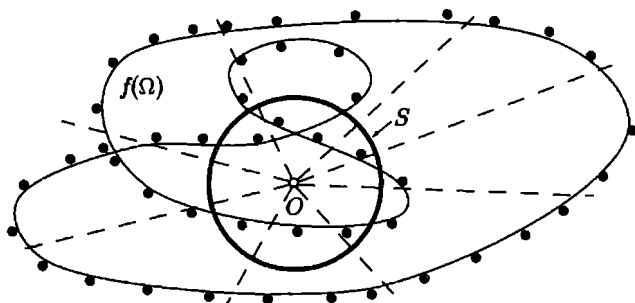
4.4.4. Пусть $h : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Upsilon}$ — гомеоморфизм, и поле $f(x)$ невырождено на $\dot{\Omega}$. Тогда

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = \gamma(hfh^{-1}, \dot{\Upsilon}).$$

¹⁴⁾ Пример Брауэра [4, т. 13].

Это означает, что вращение векторного поля не меняется при переходе к другой системе координат.

Введенное здесь вращение полезно сопоставить с определением методом протыкающего луча (п. 3.1). Для этого достаточно представить, что $f(\Omega)$ центрально проектируется в соответствии с (4.5) на S , т. е. $F(x) = f(x)/\|f(x)\|$. В результате поверхность



$f(\Omega)$ укладывается на S в несколько слоев¹⁵⁾, после чего для регулярных значений $y \in S$ сумма в (4.2), вернее

$$\sum_{x \in F^{-1}(y)} \text{sign det } F'(x),$$

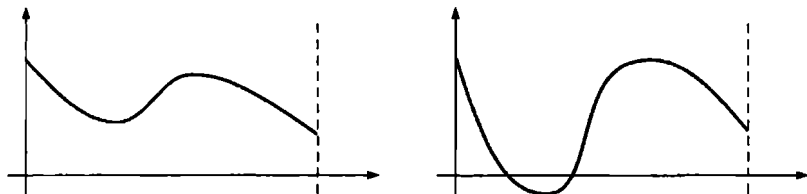
дает как раз «сумму» протыканий луча по формуле (3.3).

Структурная устойчивость вращения. Важно подчеркнуть, что вращение векторного поля относится к разряду *грубых* характеристик. Оно не меняется при малых изменениях как отображения f , так и области Ω . Поэтому любые теоремы о разрешимости уравнений, опирающиеся на оценки $\gamma(\cdot)$, выдерживают малые возмущения. При вычислении самого вращения это дает возможность пользоваться различными аппроксимациями, не нарушая выводов, — например, вместо $f(x)$ в окрестности x_0 можно рассматривать линейное приближение $f'(x_0)(x - x_0)$, разумеется, если производная $f'(x_0)$ невырождена.

¹⁵⁾ Число слоев над каждой точкой $y \in S$ может быть разным.

4.5. Невырожденное продолжение поля

К центральной теореме 3.5.5 о разрешимости уравнения $f(x) = 0$ в случае $\gamma(f, \dot{\Omega}) \neq 0$ — напрашивается дополнение, характеризующее ситуацию $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 0$. Конечно, нуль может существовать в любом случае, но при условии $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 0$ поле $f(x)$ всегда



можно продолжить с $\dot{\Omega}$ на Ω невырожденным образом. Это не так уж легко доказать в размерностях $n > 1$, но и не очень

4.5.1. Теорема Хопфа. Если $f(x) \neq 0$ на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной связной области Ω и $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 0$, то $f : \dot{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ можно продолжить до невырожденного на замыкании $\bar{\Omega}$ поля. \triangleleft

Конечно, более знаменита другая теорема Хопфа системобразующего характера:

4.5.2. Теорема Хопфа. Если невырожденные на сфере $S \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) векторные поля имеют одинаковое вращение, то они гомотопны¹⁶⁾. \triangleright

4.5.3. Теорема 4.5.2 сохраняет силу при замене сферы S границей $\dot{\Omega}$ такой ограниченной связной области Ω , что $\mathbb{R}^n \setminus \dot{\Omega}$ имеет две компоненты связности¹⁷⁾. \triangleright

Роль теоремы Хопфа 4.5.2 и ее более общего варианта 4.5.3 заключается в характеристизации силы метода. Как инструмент, она

¹⁶⁾ Заметим, что задача о гомотопии двух отображений есть задача о возможности продолжения $H(x, t)$ с $S \times \{0, 1\}$ на множество $S \times [0, 1]$.

¹⁷⁾ В качестве поверхности $\dot{\Omega}$ годится, в частности, тор, и вообще сферы с ручками [4, г. 13]. Дальнейшее ослабление требований к $\dot{\Omega}$ наталкивается на препятствия. Например, векторные поля, имеющие одинаковые вращения на границе шарового слоя, могут быть не гомотопны.

малоупотребительна. Но важна как опора всей теории вращения. Из теоремы 4.5.3, вкуче с результатом 3.4.2, следует, что вращение векторного поля¹⁸⁾ несет в себе исчерпывающую информацию для гомотопической классификации отображений

$$f : \dot{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Тем самым гарантируя, что вопрос об обязательной разрешимости $f(x) = 0$ в Ω по данным о поведении $f(x)$ на границе $\dot{\Omega}$ и отсутствии другой информации об $f(x)$ — всегда может быть решен (принципиально) вычислением вращения $\gamma(f, \dot{\Omega})$.

Возвращаясь к п. 4.5.1, заметим, что задача продолжения отображений является одной из центральных в топологии [4, т. 13]. Относительно бесхитростные продолжения характеризует следующий более-менее очевидный результат.

4.5.4. Теорема. Любое векторное поле $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, M — замкнутое множество, может быть продолжено на все \mathbb{R}^n со значениями в замкнутой выпуклой оболочке $\overline{\text{co}}f(M)$. \triangleleft

Продолжения при дополнительных требованиях доставляют больше хлопот. В данный контекст естественно вписывается, например, следующий инструмент, иногда выстреливающий с тем или иным эффектом.

4.5.5. Теорема. Векторное поле $f(x)$, заданное и невырожденное на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной связной области Ω , такой что $\mathbb{R}^n \setminus \dot{\Omega}$ имеет две компоненты связности, всегда можно продолжить на все \mathbb{R}^n до поля с единственным нулем $x^* \in \Omega$.

Если же $\mathbb{R}^n \setminus \dot{\Omega}$ имеет k компонент связности, то $f(x)$ можно продолжить на все \mathbb{R}^n до поля не более чем с $k - 1$ нулями, «по одному» в ограниченных компонентах связности. \triangleright

Особый интерес (см. раздел 5.1) представляет следующая

¹⁸⁾ По крайней мере для указанного в п. 4.5.3 типа областей.

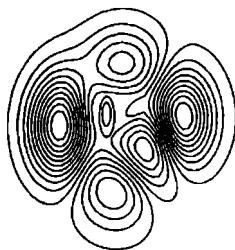
4.5.6. Теорема. *Непрерывное векторное поле $f(x)$, заданное и невырожденное на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области Ω , можно так продолжить на замыкание $\bar{\Omega}$, что продолжение f будет непрерывно дифференцируемым на Ω , и у него будет конечное число нулей x_j с невырожденными производными $f'(x_j)$. \triangleright*

Глава 5

К теории вращения векторного поля

*Some horses are specially trained
to buck their riders off.*

Хорошее вооружение нет необходимости применять. Достаточно факта его существования, изредка подкрепляемого демонстрациями. Такая же история возникает в связи с топологическими методами, да и другими научными дисциплинами.



5.1. Индексы и алгебраическое число нулей

Нуль $x_0 \in \Omega$ векторного поля $f(x)$ называют *изолированным*, если в достаточно малой окрестности x_0 нет других нулей. Вращение поля f на сферах достаточно малого радиуса с центром в x_0 называют *индексом* x_0 и обозначают $\text{ind}(f, x_0)$.

Корректность такого определения вытекает из одинаковости вращений f на сферах достаточно малого радиуса. Действительно, если шары B_1 и B_2 не содержат других нулей, кроме x_0 , и $B_1 \subset B_2$, то из теоремы 3.5.6 следует

$$\gamma(f, \dot{B}_1) = \gamma(f, \dot{B}_2).$$

5.1.1. Теорема об алгебраическом числе нулей. Пусть векторное поле $f(x)$ невырождено на $\dot{\Omega}$ и имеет в Ω лишь изолированные нули. Тогда

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = \sum_j \text{ind}(f, x_j), \quad (5.1)$$

где суммирование идет по всем нулям $x_j \in \Omega$ поля f .

◀ Доказательство сразу вытекает из п. 3.5.6, если области Ω_j определить как шары достаточно малых радиусов с центрами в точках x_j . ▶

Теорема 5.1.1 имеет разнообразные применения. Гарантирует, например, существование неизвестного нуля, если сумма индексов известных нулей отлична от $\gamma(f, \dot{\Omega})$. В различных вариантах позволяет также устанавливать единственность решения. Скажем, пусть $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 1$ и производная (матрица Якоби) $f'(x)$ невырождена на Ω . Этого, оказывается, достаточно для существования и *единственности* решения $f(x) = 0$ на Ω .

◀ Действительно, если x_0 — нуль поля f , то $f(x)$ и $f'(x_0)(x - x_0)$ непротивоположно направлены в достаточно малой окрестности x_0 , поскольку

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

В силу невырожденности $f'(x)$ детерминант $\det f'(x)$ сохраняет знак, поэтому индексы всех нулей обязаны быть одинаковы,

$$\text{ind}(f, x_0) = \text{sign} \det f'(x_0) = 1.$$

А это, благодаря условию $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 1$, допускает не более одного нуля. ▶

С учетом теорем 5.1.1 и 4.5.6 становится ясно, что любое поле f с любым вращением $\gamma(f, \dot{\Omega})$ можно продолжить с $\dot{\Omega}$ на $\bar{\Omega}$ так, что f будет иметь в Ω конечное число нулей с индексами ± 1 , а вращение $\gamma(f, \dot{\Omega})$ в соответствии с (5.1) будет представлять собой алгебраическую сумму¹⁾

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = \sum (\pm 1).$$

Индексы нулей изначально заданного на $\bar{\Omega}$ поля $f(x)$, разумеется, могут быть любыми, но из сказанного ясно, что такие нули «возникают» в результате слипания²⁾ нулей с индексами ± 1 .

Свойства индексов в силу определения естественным образом перекликаются со свойствами вращения. Из теоремы 4.3.6, например, легко следует

¹⁾ Тут уместно напомнить формулу (3.3).

²⁾ В процессе деформации, например.

5.1.2. Теорема о произведении индексов. Пусть x_0 — изолированный нуль векторного поля $f(x)$, а 0 — изолированный нуль поля $g(x)$. Тогда x_0 — изолированный нуль поля $gf(x)$ и

$$\text{ind}(gf, x_0) = \text{ind}(g, 0) \cdot \text{ind}(f, x_0).$$

Пусть теперь поле $f(x)$ невырождено на границе $\dot{\Omega}$ области Ω , а $g(x)$ невырождено на множестве $\Upsilon = f(\dot{\Omega})$. Тогда на $\dot{\Omega}$ невырождена композиция полей gf . Допустим при этом,

$$0 \in \bigcap_i \Omega_i,$$

где Ω_i — ограниченные компоненты связности множества $\mathbb{R}^n \setminus \Upsilon$. В этом случае справедлива формула произведения вращений:

$$\gamma(gf, \dot{\Omega}) = \gamma(f, \dot{\Omega}) \cdot \sum_i \gamma(g, \dot{\Omega}_i), \quad (5.2)$$

следующая из п. 5.1.2.

В случае, когда $\mathbb{R}^n \setminus \Upsilon$ состоит только из двух компонент связности, и нуль лежит в ограниченной компоненте Ω_0 , соотношение (5.2) переходит в

$$\gamma(gf, \dot{\Omega}) = \gamma(f, \dot{\Omega}) \cdot \gamma(g, \dot{\Omega}_0).$$

5.2. Индексы на бесконечности

Если поле f невырождено при больших по норме $x \in \mathbb{R}^n$, то говорят, что особая точка ∞ поля f изолирована. При этом теорема 3.5.1 и лемма 3.5.4 гарантируют, что вращение $f(x)$ на сферах достаточно большого радиуса одно и то же. Это общее вращение называют индексом на бесконечности и обозначают $\text{ind}(f, \infty)$.

Если поле $f(x)$ имеет лишь изолированные нули x_j и определен индекс f на бесконечности (т.е. $f(x)$ невырождено при достаточно больших по норме $x \in \mathbb{R}^n$), то число нулей x_j конечно, и в силу п. 3.5.6 имеет место равенство

$$\sum_j \text{ind}(f, x_j) = \text{ind}(f, \infty).$$

Допустим, для некоторой матрицы $f'(\infty)$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|f(x) - f'(\infty)x\|}{\|x\|} = 0. \quad (5.3)$$

В этом случае поле f называют *асимптотически линейным*, а матрицу $f'(\infty)$ — *производной на бесконечности* оператора f .

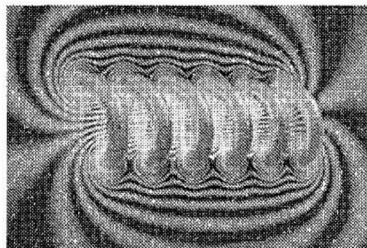
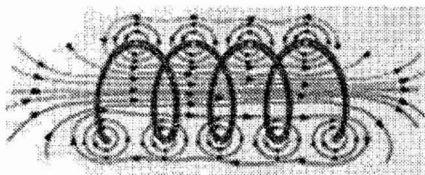
5.2.1. Пусть поле f асимптотически линейно и $\det f'(\infty) \neq 0$. Тогда особая точка ∞ поля f изолирована и

$$\text{ind}(f, \infty) = \text{sign } \det f'(\infty).$$

◀ Доказательство совсем просто. По условию $\|f(x) - f'(\infty)x\| = o(\|x\|)$. Но так как матрица $f'(\infty)$ невырождена, это влечет за собой справедливость неравенств

$$\|f(x) - f'(\infty)x\| \leq \|f'(\infty)x\|$$

на сферах достаточно больших радиусов, что гарантирует непротивоположную направленность полей $f(x)$ и $f'(\infty)x$. ▶



5.3. Накрытия и гомеоморфизмы

Вопросы о гомеоморфизмах достаточно подробно (как правило, с доказательствами) рассмотрены в [4, т. 13]. Ограничимся здесь формулировкой двух результатов.

5.3.1. Теорема. Чтобы f было гомеоморфизмом \mathbb{R}^n на \mathbb{R}^n , необходимо и достаточно выполнение двух условий:

- (i) f является локальным гомеоморфизмом,
- (ii) прообраз любого ограниченного множества ограничен. ▶

Условие (ii) равносильно

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty, \quad (5.4)$$

что полезно тренировочно осмыслить³⁾.

5.3.2. Теорема. Пусть $f : X \rightarrow Y$, где X, Y линейно связны, причем любая замкнутая кривая в Y может быть стянута в точку. Тогда, чтобы f было гомеоморфизмом X на Y , необходимо и достаточно выполнение двух условий:

(a) f является локальным гомеоморфизмом,

(b) прообраз любого компакта из Y компактен в X . \triangleright

Теоремы о гомеоморфизмах гарантируют одновременно: разрешимость $f(x) = y$ при любом $y \in Y$, единственность решения и непрерывность обратного оператора f^{-1} . Иногда возникает самостоятельный вопрос о разрешимости $f(x) = y$ при любом $y \in Y$. В случае положительного ответа говорят, что отображение $f : X \rightarrow Y$ накрывает⁴⁾ пространство Y .

5.3.3. Теорема. Пусть $\text{ind}(f, \infty) \neq 0$ и выполняется условие (5.4). Тогда уравнение $f(x) = y$ разрешимо при любом $y \in \mathbb{R}^n$.

◀ Для доказательства достаточно заметить, что в силу (5.4) на сферах достаточно большого радиуса поля $f(x)$ и $f(x) - y$ непротивоположно направлены. ▶

5.3.4. Пусть $f(x)$ — локальный гомеоморфизм и образ $f(\mathbb{R}^n)$ замкнут в \mathbb{R}^n . Тогда f накрывает \mathbb{R}^n . ◀

В конкретных задачах довольно часто речь идет об операторах, определенных лишь на некотором подмножестве \mathbb{R}^n . В отдельных

³⁾ Если (ii) справедливо, а (5.4) не выполняется, то найдется последовательность x_k , уходящая в бесконечность, на которой $f(x_k) = y_k \rightarrow y^*$. В этом случае прообраз ограниченного множества $\{y_k\} \cup \{y^*\}$ будет неограничен.

Наоборот, пусть (5.4) справедливо, но существует ограниченное множество Ω , прообраз которого $f^{-1}(\Omega)$ неограничен. Тогда найдется последовательность $x_k \in f^{-1}(\Omega)$, такая что $\|x_k\| \rightarrow \infty$. В силу (5.4) $\|f(x_k)\| \rightarrow \infty$. С другой стороны, $\forall k : f(x_k) \in \Omega$, что противоречит ограниченности Ω .

⁴⁾ Гомеоморфизм осуществляет однолистное накрытие.

случаях при этом удастся обойтись применением общих теорем о преобразованиях всего пространства. Вот простая иллюстрация.

Определим на внутренности неотрицательного ортанта \mathbb{R}_+^n отображение

$$L(x) = \{\ln x_1, \dots, \ln x_n\}.$$

5.3.5. Теорема. Пусть локальный гомеоморфизм $G: \text{int } \mathbb{R}_+^n \rightarrow \text{int } \mathbb{R}_+^n$ удовлетворяет условию

$$\|LG(x)\| \rightarrow \infty \text{ при } \|L(x)\| \rightarrow \infty.$$

Тогда G — гомеоморфизм $\text{int } \mathbb{R}_+^n$ на $\text{int } \mathbb{R}_+^n$. \triangleleft

Более общей задачей рассматриваемого типа является разрешимость неявных функций, т. е. разрешимость уравнения

$$\Phi(x, y) = z_0, \quad (5.5)$$

где $\Phi: X \times Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Пространства X , Y считаем линейно связными, а Y стягиваемым по себе.

5.3.6. Определение. Уравнение (5.5) локально разрешимо, если:

- 1) существует хотя бы одна пара $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, удовлетворяющая (5.5);
- 2) для любой пары $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, удовлетворяющей (5.5), можно указать окрестности $V \subset X$, $W \subset Y$ и непрерывное отображение $G: W \rightarrow V$, такие что для любого $y \in W$

$$\Phi(G(y), y) = z_0,$$

и $\Phi(x, y) \neq z_0$, если $x \neq G(y)$. Другими словами, (5.5) на множестве $V \times W$ эквивалентно уравнению $x = G(y)$.

5.3.7. Определение. Уравнение (5.5) глобально разрешимо, если существует непрерывное отображение $G: Y \rightarrow X$, такое что (5.5) на $X \times Y$ эквивалентно уравнению $x = G(y)$. В этом случае говорят также, что (5.5) неявно задает функцию $G(y)$.

5.3.8. Теорема [14]⁵⁾. Чтобы уравнение (5.5) было глобально разрешимо, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- уравнение (5.5) локально разрешимо;

⁵⁾ Доказательство несколько менее общего утверждения есть в [4, т. 13].

- если множество $S \subset Y$ компактно, то множество

$$T = \{x : \Phi(x, y) = z_0, y \in S\} \text{ компактно в } X. \quad \triangleright$$

Вот менее универсальный инструмент, который в \mathbb{R}^n более удобен.

5.3.9. Для глобальной разрешимости

$$\Phi(x, y) = 0, \quad \Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

относительно x необходимо и достаточно выполнение двух условий:

- уравнение $\Phi(x, y) = 0$ локально разрешимо;
- если $\Phi(x_k, y_k) = 0$, $\|x_k\| \rightarrow \infty$, то $\|y_k\| \rightarrow \infty$. \triangleright

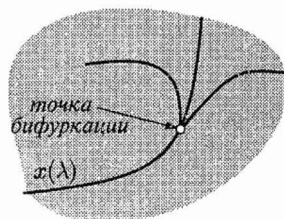
5.4. Параметрические уравнения

На практике часто приходится рассматривать уравнения

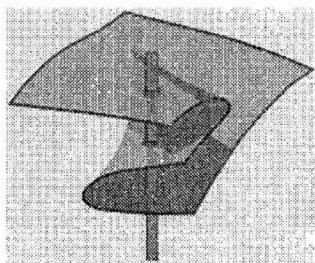
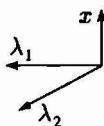
$$G(x, \lambda) = 0 \tag{5.6}$$

со скалярным параметром λ . Параметрические задачи, вообще-то говоря, правило, а не исключение, как иногда думается. В любой модели присутствуют силы, температуры, цены, численности. Так что (5.6) исключительно, скорее, в том смысле, что параметр всего один. Однако концентрация внимания на одном параметре играет важную роль, потому что дело не только в существовании решения $x(\lambda)$, но и в его ветвлении, связанном с бифуркационными изменениями в системе⁶⁾. При этом критические «нагрузки» определяют, как правило, фиксируя остальные переменные. Одновременное отслеживание нескольких параметров уводит проблематику в область *теории катастроф*.

⁶⁾ Кроме того, несколько параметров часто «упаковываются» в один. Скажем, простейшие задачи гидродинамики определяются: плотностью ρ , коэффициентом вязкости μ , характерным линейным размером l и характерной скоростью v . Из ρ, μ, l, v можно образовать только одну безразмерную величину $R = \frac{lv\rho}{\mu}$, называемую числом Рейнольдса. Поэтому в любой задаче, определяемой перечисленными параметрами, все безразмерные величины будут функциями только R [4, т. 8].



$$\varphi(x, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$



Особая ситуация возникает в задаче об автоколебаниях в системе

$$\dot{x} = f(x), \quad (5.7)$$

где изначально параметр отсутствует, но далее привносится в качестве инструмента. Дело в том, что в отличие от $\dot{x} = f(x, t)$ с T -периодической правой частью, в случае (5.7) период искомого колебания неизвестен — и в этом главная трудность.

Спасает рассмотрение вспомогательного уравнения

$$\dot{y} = \lambda f(y). \quad (5.8)$$

Очевидно, если $x^*(t)$ — T -периодическое решение уравнения (5.7), то

$$y^*(t) = x^*(Tt)$$

является 1-периодическим решением уравнения (5.8), соответствующим значению $\lambda = T$, и наоборот. Таким образом, задача отыскания периодических решений уравнения (5.7) эквивалентна поиску таких значений параметра λ , при которых уравнение (5.8) имеет решения периода 1.

Задача (5.8) стандартным образом сводится к интегральному уравнению

$$y(t) = y(1) + \lambda \int_0^t f(y(s)) ds,$$

что помещает ситуацию в рамки (5.6). Специфика данной задачи заключена в том, что нетривиальное⁷⁾ решение $x(\lambda)$ возможно только при дискретных значениях λ — некий аналог дискретного спектра нелинейного оператора.

Теория вращения в параметрическом случае (5.6) работает в сочетании с дополнительными ухищрениями.

⁷⁾ Являющееся циклом, а не равновесием.

5.4.1. Пусть

$$\gamma[G(x, \lambda_1), \dot{\Omega}] \neq \gamma[G(x, \lambda_2), \dot{\Omega}].$$

Тогда при некотором $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ на $\dot{\Omega}$ существует решение уравнения $G(x, \lambda) = 0$.

◀ В противном случае поля $G(x, \lambda_1)$ и $G(x, \lambda_2)$ соединял бы невырожденный гомотопический мост

$$H(x, t) = G[x, t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2]. \quad \blacktriangleright$$

Еще одна популярная идея — *функционализация параметра*. В (5.6) вместо λ подставляют функционал $\lambda(x)$, в результате чего $G(x, \lambda) = 0$ переходит в

$$G(x, \lambda(x)) = F(x) = 0,$$

и если вращение $\gamma(F, \dot{\Omega})$ оказывается ненулевым, то (5.6) имеет решение $x^* \in \Omega$ при $\lambda^* = \lambda(x^*)$.

От идеи до исполнения путь, конечно, неблизок. По щучьему веленью обычно не получается, потому что выбор функционала $\lambda(x)$ — самостоятельная проблема. Но она все же менее сложна и более конкретна, чем расплывчатая задача (5.6), не привязанная ни к какому конструктивному замыслу.

Когда уравнение с параметром имеет специальный вид

$$f(x) = \lambda x,$$

его решения называют *собственными векторами оператора*⁸⁾ f .

5.4.2. В нечетномерном пространстве в случае $0 \in \Omega$ невырожденный на $\dot{\Omega}$ оператор f всегда имеет на $\dot{\Omega}$ собственный вектор, т. е. $f(x) = \lambda x$ при некоторых $\lambda \neq 0$ и $x \in \dot{\Omega}$.

◀ Если $\gamma(f, \dot{\Omega}) \neq 1$, то поле f не гомотопно тождественному и, следовательно, при некоторых $x \in \dot{\Omega}$ и $t \in (0, 1)$

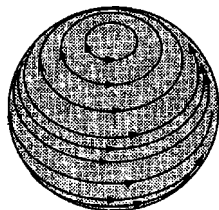
$$tf(x) + (1-t)x = 0, \quad \text{т. е.} \quad f(x) = \frac{t-1}{t}x.$$

⁸⁾ По аналогии с линейным случаем.

Если же $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 1$, то поле f не гомотопно полю $-I(x)$, и тогда при некоторых $x \in \dot{\Omega}$ и $t \in (0, 1)$

$$tf(x) - (1-t)x = 0, \quad \text{т. е.} \quad f(x) = \frac{1-t}{t}x. \quad \blacktriangleright$$

• Пусть $0 \notin \Omega$ и вращение поля $x - f(x)$ на $\dot{\Omega}$ не равно нулю. Тогда уравнение $f(x) = \lambda x$ разрешимо на $\dot{\Omega}$ при некотором $\lambda > 1$. (?)



5.4.3. В нечетномерном пространстве сферу невозможно причесать (без макушки), т. е. задать на сфере невырожденное касательное поле.

◀ Это сразу становится ясным, если центр сферы расположить в нуле и применить результат 5.4.2 к касательному полю $f(x)$. ▶

Отсюда следует, что на сфере в \mathbb{R}^3 любая динамическая система имеет равновесие. Иначе говоря, любой оператор сдвига U_t , осуществляющий гомеоморфизм S на S при любом фиксированном t , имеет неподвижную точку⁹⁾.

Динамические системы обязаны иметь равновесие не только на сфере, но и на других гладких поверхностях в \mathbb{R}^3 . Если $U_t : M \rightarrow M$ — оператор сдвига по траекториям «приличного» дифференциального уравнения, имеющего на M только изолированные положения равновесия, то [4, т. 13]:

$$\forall t : \sum_j \text{ind}(I - U_t, x_j) = \chi(M),$$

где $\chi(M)$ — характеристика Эйлера многообразия M , x_j — неподвижные точки U_t . А поскольку в ассортименте двусторонних связных поверхностей¹⁰⁾ в \mathbb{R}^3

$$M_0, M_1, \dots, M_p, \dots \quad (5.9)$$

⁹⁾ Но существуют гомеоморфизмы S на S без неподвижных точек [4, т. 13].

¹⁰⁾ В (5.9) M_0 — сфера, M_1 — тор, ..., M_p — сфера с p ручками.

нулевую характеристику Эйлера имеет лишь тор M_1 , то касательное поле без особых точек невозможно ни на одной замкнутой поверхности M_p , $p \neq 1$, а не только на сфере S^2 .

5.5. Лемма Лере—Шаудера

Частная на вид ситуация, когда $f(x)$, действуя в ¹¹⁾

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^s, \quad (5.10)$$

фактически производит изменения лишь в подпространстве \mathbb{R}^k , — оказывается одним из краугольных камней теории вращения, обеспечивая в том числе легкий переход к рассмотрению *компактных векторных полей* (глава 7).

Итак, пусть $P_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $P_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ — проекторы, отвечающие разложению (5.10).

5.5.1. Лемма Лере—Шаудера. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\Omega_k = \Omega \cap \mathbb{R}^k \neq \emptyset$, и при этом поле f определено на $\dot{\Omega}$, невырождено и удовлетворяет условию ¹²⁾

$$\forall x \in \dot{\Omega} : P_s f(x) = P_s x. \quad (5.11)$$

Тогда $\gamma(f, \dot{\Omega}) = \gamma(f_k, \dot{\Omega}_k)$, где f_k — сужение поля f на $\dot{\Omega}_k$.

◀ Ограничимся рассуждением в предположении связности Ω_k .

Допустим сначала $|\gamma(f_k, \dot{\Omega}_k)| = m \neq 0$, и пусть $A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ — некоторое невырожденное линейное отображение с детерминантом, знак которого совпадает с $\text{sign } \gamma(f_k, \dot{\Omega}_k)$. Выберем в Ω_k различные точки x_1, \dots, x_m и число $r > 0$ таким образом, чтобы шары $B(r, x_i)$ ($i = 1, \dots, m$) попарно не пересекались и лежали в Ω .

Построим далее непрерывное отображение φ ,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= P_k f(x) \quad \text{на } \dot{\Omega}, \\ \varphi(x) &= A(P_k x - x_i) \quad \text{на шарах } B(r, x_i), \end{aligned}$$

¹¹⁾ Соотношение (5.10) подразумевает, что любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ представим в виде суммы $x = u + v$, где $u \in \mathbb{R}^k$, $v \in \mathbb{R}^s$.

¹²⁾ В подходящей системе координат условие (5.11) означает $f(x) = \{f_1(x), \dots, f_k(x), x_{k+1}, \dots, x_n\}$.

и продолжим его на $\bar{\Omega}_k$ так, чтобы у него не появились новые нули¹³⁾ и образ $\bar{\Omega}_k$ лежал в \mathbb{R}^k . Затем продолжим его уже произвольным образом на все множество $\bar{\Omega}$ со значениями в \mathbb{R}^k (теорема 4.5.4). Положим, наконец,

$$h(x) = \varphi(x) + P_s x. \quad (5.12)$$

По построению, нулями поля h будут точки x_i и только они. При этом¹⁴⁾

$$\text{ind}(h, x_i) = \text{ind}(h_k, x_i),$$

где h_k — сужение поля h на $\bar{\Omega}_k$. Поэтому из теоремы об алгебраическом числе нулей следует

$$\gamma(h, \dot{\Omega}) = \gamma(h_k, \dot{\Omega}_k).$$

А поскольку $h(x) = f(x)$ на $\dot{\Omega}$, то

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = \gamma(f_k, \dot{\Omega}_k).$$

В случае $\gamma(f_k, \dot{\Omega}_k) = 0$ доказательство совсем просто. Вначале отображение $P_k f$ продолжается до невырожденного на $\bar{\Omega}_k$ отображения со значениями в \mathbb{R}^k , а затем уже произвольно на $\bar{\Omega}$ со значениями в \mathbb{R}^k . Далее вводится функция $h(x)$ вида (5.12), при этом оба вращения $\gamma(h, \dot{\Omega})$ и $\gamma(h_k, \dot{\Omega}_k)$ будут равны нулю. С другой стороны, $\gamma(h, \dot{\Omega}) = \gamma(f, \dot{\Omega})$, $\gamma(h_k, \dot{\Omega}_k) = \gamma(f_k, \dot{\Omega}_k)$. ►

Лемма 5.5.1 эффективна как инструмент понижения размерности задачи при вычислении вращения.

На практике «случаются» отображения Φ , являющиеся *прямой суммой* $\Phi = \Phi_k \oplus \Phi_s$ полей Φ_k и Φ_s в смысле

$$\Phi(x) = \Phi_k(P_k x) + \Phi_s(P_s x), \quad (5.13)$$

где $P_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $P_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ — проекторы, отвечающие разложению (5.10). Это чуть более общая ситуация, чем в лемме 5.5.1, где $\Phi_s(P_s x) \equiv P_s x$. Попросту говоря, (5.13) при удачном выборе системы координат означает, что первые k компонент $\Phi(x)$ зависят только от $\{x_1, \dots, x_k\}$, остальные — только от $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$.

5.5.2. Пусть поля Φ_k , Φ_s заданы и невырождены, соответственно, на $\Omega_k = \Omega \cap \mathbb{R}^k$ и $\Omega_s = \Omega \cap \mathbb{R}^s$, и выполняется (5.13). Тогда поле

¹³⁾ Это возможно в силу теоремы 4.5.1, ибо вращение φ на границе области определения равно нулю, по построению.

¹⁴⁾ В силу утверждения 5.1.2.

$\Phi_k \oplus \Phi_s$ невырождено на $\hat{\Omega}$, и

$$\gamma(\Phi_k \oplus \Phi_s; \hat{\Omega}) = \gamma(\Phi_k; \hat{\Omega}_k) \cdot \gamma(\Phi_s; \hat{\Omega}_s). \quad (5.14)$$

◀ Комплект «5.1.2 плюс 5.5.1» легко справляется с доказательством. ▶

Теорема 5.5.2 оказывается кстати при изучении системы слабо связанных уравнений

$$\begin{cases} G_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F_1(\mathbf{u}) + Q_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \\ G_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F_2(\mathbf{u}) + Q_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Слабо связанных в том смысле, что добавки Q_1 и Q_2 достаточно малы по норме по сравнению с нормами главных частей F_1 и F_2 . Малость по норме добавок на $\hat{\Omega}$ обеспечивает невырожденность гомотопии

$$H(\mathbf{u}, \mathbf{v}, t) = \{F_1(\mathbf{u}) + tQ_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), F_2(\mathbf{u}) + tQ_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})\},$$

которая деформирует $G = \{G_1, G_2\}$ из (5.15) в поле $F = \{F_1, F_2\}$. И если $\gamma(F_1, \hat{\Omega}_1) \neq 0$, $\gamma(F_2, \hat{\Omega}_2) \neq 0$, то теорема 5.5.2 гарантирует

$$\gamma(G, \hat{\Omega}) \neq 0,$$

откуда следует разрешимость (5.15).

5.6. Итерации и принцип Браудера

После того как преодолевается топологический барьер, теория вращения на первых порах становится очень простой и скучной. Потому что все крутится в основном около линейных деформаций, и многократно варьируется из-за многообразия сопутствующих обстоятельств. Однако на следующем витке спирали построения уходят в довольно крутые виражи, и там хватает головокружных осложнений, например, в связи с *теоремами родственности*.

О соприкосновении теории вращения с тонкими материями свидетельствует также более-менее широко известный *принцип неподвижной точки Браудера*.

5.6.1. Теорема Браудера. Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое выпуклое множество, и оператор A , действующий в \mathbb{R}^n , непрерывен, причем для некоторого $k_0 \geq 1$ при любом $k \geq k_0$

$$A^k(B) \subset B. \quad (5.16)$$

Тогда A имеет в B неподвижную точку, причем $\gamma(I - A, \hat{B})$.

Сразу очевидно приложение к *диссипативным системам*, в которых (5.16) выполняется¹⁵⁾ из-за энергетических потерь, и *принцип* 5.6.1 гарантирует существование равновесия.

Доказательство теоремы 5.6.1 громоздко, и при выбранном уровне детализации изложения проще обойти его стороной. Однако на самой схеме есть резон остановиться, ибо там всплывают полезные факты относительно *итераций операторов*¹⁶⁾ и зависимости между вращениями векторных полей

$$\Phi_1 = I - A \quad \text{и} \quad \Phi_p = I - A^p.$$

Если $A^p \xi = \xi$, то ξ может не быть неподвижной точкой оператора¹⁷⁾ A , но

$$A\xi, A^2\xi, \dots, A^{p-1}\xi \quad (5.17)$$

будут неподвижными точками оператора A^p , что легко устанавливается: $A^p A\xi = A A^p \xi = A\xi$ и т. д. При этом если $A\xi \neq \xi$ и число p простое, то *все точки* (5.17) *различны*. (?) А если ξ — изолированный ноль поля $A^p(x)$, то (*теорема 7.7.3*)

$$\text{ind}(\Phi_p, \xi) = \text{ind}(\Phi_p, A\xi) = \dots = \text{ind}(\Phi_p, A^{p-1}\xi). \quad (5.18)$$

Поэтому в случае простого p , если у A нет неподвижных точек, все нули $\Phi_p = I - A^p$ в B распадаются на группы

$$\xi^j, A\xi^j, A^2\xi^j, \dots, A^{p-1}\xi^j.$$

В результате по теореме 5.1.1 об алгебраическом числе индексов, с учетом (5.18), должно быть

$$\gamma(\Phi_p, \dot{B}) = p \sum_j \text{ind}(I - A^p, \xi^j),$$

т. е. $\gamma(\Phi_p, \dot{B}) = 0 \pmod{p}$, что в любом случае не вяжется с необходимостью $\gamma(\Phi_p, \dot{B}) = 1$, вытекающей из требования (5.16).

¹⁵⁾ Если под A подразумевать сдвиг по траекториям за единицу времени.

¹⁶⁾ Подробно рассмотренные в разделе 7.7.

¹⁷⁾ Сравните с утверждением 2.2.1.

Таким образом, предположение об отсутствии у A неподвижных точек ведет к противоречию.

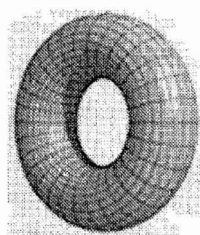
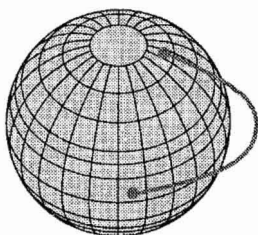
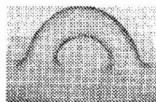
Основная тяжесть доказательства приходится на обоснование (5.18), не считая всяких оговорок, позволяющих, в частности, вести рассуждения в предположении изолированности нулей.

5.7. Векторные поля нормалей

В теоретических построениях довольно часто приходится оценивать вращение векторного поля $f(x)$ внешних нормалей области Ω с гладкой связной границей. Полный список двусторонних поверхностей $\hat{\Omega}$ в \mathbb{R}^3 исчерпывают *сферы с ручками* [4, т. 13].

Приклеивание ручки к сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ можно представлять себе как приклеивание к S^2 одномерной дуги с последующим раздутием той в двумерную трубку и удалением перегородок меж-

ду внутренностями сферы и трубки¹⁸⁾ . В результате получается *тор*.



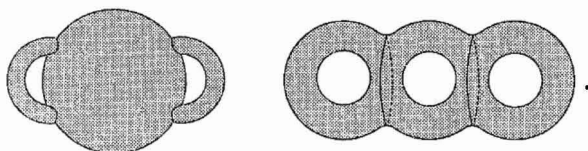
Весь список двусторонних поверхностей в \mathbb{R}^3 принято записывать в виде (5.9),

$$M_0, M_1, \dots, M_p, \dots,$$

где M_0 — сфера, M_1 — тор, ..., M_p — сфера с p ручками. Поверхности классифицируются с точностью до гомеоморфизма, поэтому

¹⁸⁾ В [4, т. 13] операция описывается иначе, и более подробно.

их конкретный вид подвержен деформационному произволу. Вот варианты M_2 и M_3 :



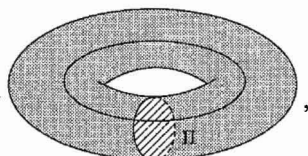
Поначалу может показаться, что список (5.9) неполон, потому что дуги можно приклеивать не к исходной сфере, а к готовым уже ручкам. Но в пределах топологической эквивалентности это не дает новых поверхностей, в чем легко убедиться¹⁹⁾.

5.7.1. Вращение поля $f(x)$ внешних нормалей на сфере с p ручками M_p , содержащей нуль пространства внутри себя, равно

$$\gamma(f, M_p) = 1 - p. \quad (5.19)$$

◀ Пусть Θ_p обозначает замыкание внутренности M_p , т. е. Θ_p — шар с p ручками. В случае $p = 0$ поверхность M_0 является сферой, и (5.19) очевидно.

Перейдем к тору M_1 . Разрежем Θ_1 по меридиану



и продолжим поле нормалей с M_1 на сечение Π без нулей²⁰⁾, соблюдая требование²¹⁾ $\|f(x)\| = 1$ и направляя все $f(x)$, скажем, вправо от Π . Далее разведем образовавшиеся торцы, и получим цилиндр \mathcal{C} с боковой поверхностью M_1 и основаниями Π_l и Π_r , каковые суть копии Π вместе с построенным продолжением $f(x)$ на Π . Образ границы цилиндра $f(\dot{\mathcal{C}})$ совпадает с единичной сферой S , причем образы оснований Π_l и Π_r попадают на S в одно и то же место, образуя двуслойное «пятно», в котором ориентации слоев противоположны, и потому

$$\gamma(f, M_1) = \gamma(f, \dot{\Theta}_1) = \gamma(f, \dot{\mathcal{C}}) = 1 - 1 = 0,$$

что опять-таки укладывается в (5.19).

¹⁹⁾ Гораздо труднее ориентироваться в классификации односторонних поверхностей, получаемых заклеиванием отверстий в S^2 листами Мёбиуса, но и там вопрос исчерпывающе решается [4, т. 13].

²⁰⁾ Возможность невырожденного продолжения $f(x)$ на круг Π очевидна, поскольку продолжение не обязано оставаться в плоскости круга.

²¹⁾ Чего всегда можно добиться переходом от $f(x)$ к $f(x)/\|f(x)\|$.

Далее такое же разрезание одной из ручек ²²⁾ в M_p , $p > 1$, аналогичным образом увеличивает вращение $\gamma(f, M_p)$ на единицу, т. е. до $\gamma(f, M_{p-1})$, что индуктивно доказывает (5.19). ►

Проведенное рассуждение является не столько доказательством, сколько отправным пунктом для самостоятельной тренировки, потому что содержит массу мелких погрешностей, требующих уточнений и оговорок. Идея и каркас доказательства — здесь налицо, остальное в естественных условиях разумно оставлять за кадром. Потому что когда все разжевано и забрызгано деталями, разобраться бывает еще сложнее. Попросту говоря, опираться на чужую помощь удобно, но чистить зубы лучше самому.

В \mathbb{R}^4 на сфере S^3 помимо ручек, получаемых приклеиванием к S^3 одномерных дуг с последующим их раздутием, можно ставить и другие «присоски», получаемые приклеиванием к S^3 двумерных кругов (не пересекающих S^3) по граничным окружностям с последующим раздутием этих кругов в \mathbb{R}^4 .

5.7.2. Если $M_{p,q}$ обозначает сферу $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ с приклеенными p ручками и q «присосками», то вращение поля $f(x)$ внешних нормалей на $M_{p,q}$ равно

$$\gamma(f, M_{p,q}) = 1 - p + q. \quad (5.20)$$

◀ Хотя пейзаж в \mathbb{R}^4 теряет наглядность, аналогично предыдущему, с помощью разрезов устанавливается, что вращение поля нормалей уменьшается на 1 при добавлении ручки и увеличивается на 1 при добавлении «присоски», что с учетом $\gamma(f, S^3) = 1$ дает (5.20). ►

Обратим внимание, что в \mathbb{R}^3 вращение поля внешних нормалей двусторонней связной поверхности может принимать только значения

$$\dots, -k, \dots, -1, 0, 1,$$

тогда как в \mathbb{R}^4 , а значит, ²³⁾ и в \mathbb{R}^n при $n > 4$, может быть любым.

²²⁾ В некотором отношении удобнее делать два разреза, вырезая небольшой цилиндр и продолжая $f(x)$ на оставшейся части «вовне», а на цилиндрике «внутри», после чего пользоваться формулой (3.5).

²³⁾ См. лемму 5.5.1 Лере—Шаудера.

5.8. Нечетные поля

Векторное поле f называют *нечетным* на центрально-симметричном множестве Γ , если $f(-x) = -f(x)$ при любом $x \in \Gamma$. Если нечетное поле f задано на границе шара B с центром в нуле, то его вращение *всегда нечетно*, а значит, не равно нулю [4, т. 13]. Факт относится к весьма частному случаю нечетных полей, но линейная гомотопия «деформирует» безделицу в продуктивное утверждение:

5.8.1. Пусть векторы невырожденного на \dot{B} поля $f(x)$ в симметричных точках направлены неодинаково, т. е.

$$\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \neq \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|}, \quad x \in \dot{B}.$$

Тогда $\gamma(f, \dot{B})$ нечетно, и уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в B .

◀ В указанных предположениях $f(x)$ гомотопно нечетному векторному полю $f(x) - f(-x)$. Деформацией может служить

$$H(x, t) = f(x) - tf(-x). \quad \blacktriangleright$$

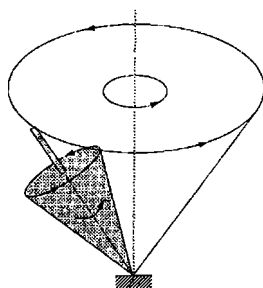
Глава 6

Динамические системы

When a man is out of sight, it is not too long before he is out of mind.

Thomas Kempis

Никто не знает, что такое реальное пространство и время. Но в модельном исполнении это коррелирует с «измерениями» и ощущениями, что одевает мироздание в виртуальные одежды, маскируя суть, но давая намек. И мы обречены искать истину, довольствуясь аналогией.



6.1. Оператор сдвига по траекториям

Решение $x(t) = p(t; s, x_0)$ задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(s) = x_0, \quad (6.1)$$

может быть записано как

$$U_{ts}(x_0) = p(t; s, x_0),$$

где U_{ts} , переводящий точку $x(s) = x_0$ в $x(t)$, называют *оператором сдвига* по траекториям дифференциального уравнения (6.1). Автономные системы ¹⁾ характеризуются свойством

$$U_{ts} = U_{t-s}.$$

¹⁾ В которых $f(x, t)$ фактически не зависит от t .

Полугрупповое свойство оператора сдвига,

$$U_{ts}U_{sr} = U_{tr}, \quad (6.2)$$

означает, что движение из любой точки x_s не зависит от того, как система двигалась до этого. Другими словами, если ²⁾

$$x_t = U_{tr}x_r,$$

и «по дороге» в момент s система пришла в точку x_s , то о предыстории можно забыть и определить x_t как $x_t = U_{ts}x_s$.

В автономном случае (6.2) трансформируется в

$$U_\sigma U_\tau = U_{\sigma+\tau}, \quad (6.3)$$

откуда

$$U_1^k = U_k,$$

в силу чего динамика $\dot{x} = f(x)$ большей частью сводится к изучению итераций U^k оператора сдвига $U = U_1$ за единицу времени.

В некоторых срезах теории представляют интерес условия дифференцируемости оператора сдвига.

Пусть $x_0(t) = \{x_1^0(t), \dots, x_N^0(t)\}$ — решение (6.1) в случае $s = 0$. Допустим, правая часть $f(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x в окрестности траектории решения $x_0(t)$ ($0 \leq t \leq T$).

6.1.1. Фундаментальная матрица $X_0(t)$ линейной системы ³⁾

$$\dot{x} = A_0(t)x, \quad (6.4)$$

где

$$A_0(t) = \left[\frac{\partial f_i(t, x_1^0(t), \dots, x_N^0(t))}{\partial x_j} \right],$$

является производной Фреше оператора сдвига $U_{0t}(x_0)$. <

²⁾ Аргумент оператора сдвига часто указывают без скобок, $U_{tr}x = U_{tr}(x)$.

³⁾ Систему (6.4) называют *уравнением в вариациях*.

◀ Дифференцируя

$$\frac{d}{dt}p(t; 0, x) = f(t, p(t; 0, x)),$$

по x в точке x_0 , получаем

$$\frac{d}{dt}p'_x(t; 0, x_0) = f'_x(t, p(t; 0, x_0))p'_x(t; 0, x_0).$$

Поэтому матрица $p'_x(t; 0, x_0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dX}{dt} = A_0(t)X.$$

А так как $p'_x(0; 0, x_0) = I$, то $p'_x(t; 0, x_0) = X_0(t)$. ▶

6.2. Вынужденные колебания

Когда в $\dot{x} = f(x, t)$ правая часть T -периодична⁴⁾ по t ,

$$f(x, t + T) \equiv f(x, t), \quad (6.5)$$

в системе возможны T -периодичные решения, характеризующиеся условием $x(t + T) \equiv x(t)$.

6.2.1. Теорема. Для существования T -периодичных решений $x(t)$ необходимо и достаточно, чтобы у оператора сдвига $U_T = U_{T,0}$ была неподвижная точка x_0 , т. е. $U_T(x_0) = x_0$.

◀ Равенство $U_T(x_0) = x_0$ означает, что траектория $\dot{x} = f(x, t)$, выходящая из x_0 , возвращается в x_0 через время T , а это и есть T -периодическое решение. Так что необходимость очевидна.

С достаточностью тоже все просто, но не без иллюзий, см. ниже. Следствием T -периодичности $f(x, t)$ является

$$U_{t+T, T} = U_{t, 0}.$$

Поэтому из существования T -периодического решения $x(t) = U_{t,0}(x(0))$, в силу $x(t + T) \equiv x(t)$, вытекает $U_T(x_0) = x_0$. ▶

⁴⁾ При упоминании T -периодичности подразумеваются минимальные значения $T > 0$, для которых имеют место тождества типа (6.5).

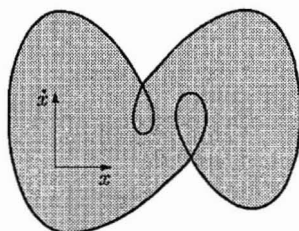
Задача об автоколебаниях в автономной системе

$$\dot{x} = f(x)$$

с ходу кажется проще, но решается во сто крат сложнее — из-за того, что период искомым колебаний априори неизвестен⁵⁾.

Упомянутые выше иллюзии связаны с тем, что след от периодического решения в фазовом пространстве представляет собой замкнутый контур, и при легкомысленном взгляде кажется, что любая точка этого контура неподвижна в смысле $U_T(x_0) = x_0$, из-за чего траектория колебания не может самопересекаться. Это в самом деле так в случае автономной системы. В неавтономном случае точки $x(t)$ периодического решения являются неподвижными для операторов U_{T+i} . Примером может служить самопересекающаяся траектория нелинейного уравнения Дуффинга⁶⁾

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \gamma x^3 = A \sin \omega t$$



при некотором соотношении параметров.

Изучение *вынужденных колебаний* естественно и поучительно начинать с линейных систем вида

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

с T -периодичной матрицей $A(t)$. Решения (6.6), как известно [4, т. 2], могут быть записаны в форме

$$x(t) = X(t)x_0,$$

⁵⁾ Равновесие в $\dot{x} = f(x)$ является T -периодическим при любом T . Под *автоколебаниями* подразумеваются периодические решения, отличные от состояний равновесия.

⁶⁾ Точнее, уравнения Уэда, описывающего движение шарика в потенциальной яме $\frac{1}{4}\gamma x^4$ при наличии трения.

где фундаментальная матрица $X(t)$ есть оператор сдвига U_{0t} — T -периодичность которого проверяется подстановкой в (6.6).

Фундаментальную матрицу $X(T)$ (сдвиг на период) называют матрицей монодромии, а ее собственные значения — мультипликаторами системы (6.6)⁷⁾.

Решения однородной системы (6.6) позволяют стандартным образом вычислить решения неавтономной системы

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \quad (6.7)$$

с T -периодичными $A(t)$ и $f(t)$. Распространенный при этом вариант: матрица — не зависит от времени, а внешнее воздействие на систему $f(t)$ периодически.

◀ Решение (6.7), как известно, дается формулой

$$x_t = X(t)x_0 + \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s) ds. \quad (6.8)$$

Поэтому из $x_0 = x(T)$ (п. 6.2.1) следует

$$x_0 = [I - X(T)]^{-1} \int_0^T X(T)X^{-1}(s)f(s) ds, \quad (6.9)$$

для справедливости чего необходимо и достаточно, чтобы 1 не была мультипликатором системы (6.6). ▶

Устойчивость периодического решения — является одним из главных вопросов.

6.2.2. Теорема. Если все мультипликаторы системы (6.6) по модулю строго меньше единицы, то периодическое решение (6.7) существует, единственно и асимптотически устойчиво.

⁷⁾ Для системы $\dot{x} = Ax$ с постоянными коэффициентами: $X(T) = e^{AT}$, а мультипликаторы $\mu_k = e^{\lambda_k T}$, где λ_k — собственные значения матрицы A . При этом $|\mu_k| < 1$ в том случае, когда $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$. И если матрица A устойчива (все $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$), оператор сдвига за период имеет спектральный радиус меньший 1, и поэтому сжимает в некоторой норме, п. 2.3.1.

◀ Существование и единственность периодического решения $x^*(t)$ гарантируется вычислением x_0 по формуле (6.9) с последующей подстановкой в (6.8).

Из общей записи (6.8) решения (6.7) вытекает

$$x(t) - x^*(t) = X(t)[x(0) - x^*(0)],$$

где оператор сдвига $X(t)$ по траекториям (6.6) T -периодичен, и поэтому, если $t = kT + s$, где $s < T$,

$$X(t) = X(kT + s) = X^k(T)X(s),$$

что влечет за собой $X(t) \rightarrow 0$, т. е. $x(t) - x^*(t) \rightarrow 0$. Помимо этого, в норме из леммы 2.3.1 $\|X(t)\|_* < \lambda^k \|X(s)\|_*$. Поэтому $X(t)$ стягивает в точку любой шар $\|x\|_* \leq r$, что обеспечивает *устойчивость по Ляпунову*. ▶

Периодическое решение (6.7), получаемое вычислением x_0 по формуле (6.9) с последующей подстановкой в (6.8), принято записывать в форме

$$x^*(t) = \int_0^T G(t, s) f(s) ds, \quad (6.10)$$

где, как нетрудно проследить,

$$G(t, s) = \begin{cases} X(t)(I - X(T))^{-1} X^{-1}(s), & \text{если } 0 \leq s \leq t \leq T, \\ X(t)(I - X(T))^{-1} X(T) X^{-1}(s), & \text{если } 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases} \quad (6.11)$$

Функция Грина. Ядро $G(t, s)$ ($t, s \in [0, T]$) линейного интегрального оператора \mathbf{G} ,

$$\mathbf{G}f = \int_0^T G(t, s) f(s) ds, \quad (6.12)$$

определенное правой частью (6.11), называют *функцией Грина* линейного дифференциального оператора

$$Lx = \dot{x}(t) - A(t)x(t)$$

при T -периодических граничных условиях. Оператор \mathbf{G} является обратным к L , $\mathbf{G} = L^{-1}$.

Трансформация задачи из дифференциальной в интегральную форму, и обратно, позволяет на «чужой» территории снять пенки и достичь определенных выгод. По этой причине свойства оператора (6.12) попадают в фокус пристального внимания.

6.2.3. Теорема. *Оператор G действует и вполне непрерывен как оператор из $C[0, T]$ в $C[0, T]$, а также из $L_p[0, T]$ в $C[0, T]$ при любом $p > 1$. \triangleleft*

Функция Грина возникает и в более широком контексте при обращении линейного дифференциального оператора⁸⁾ с теми или иными краевыми условиями. Например, пусть $G(t, s)$ обозначает решение уравнения

$$LG(t, s) = \delta(t - s)$$

при некоторых заданных краевых условиях, где

$$Lx = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x$$

— дифференциальный оператор, а $\delta(t - s)$ — единичный импульс.

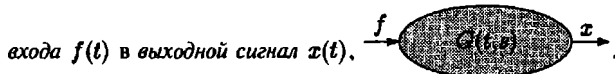
Поскольку

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(t - s) ds, \quad Lf(s)G(t, s) = f(s)\delta(t - s),$$

и система удовлетворяет принципу суперпозиции, то решением уравнения $Lx = f(t)$ будет

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)f(s) ds.$$

В теории автоматического регулирования $G(t, s)$ называют *импульсной переходной функцией*, и на систему $Lx = f(t)$ смотрят как на преобразование



В стационарном случае $G(t, s)$ является функцией лишь одного параметра $\tau = t - s$. Это приводит к зависимости

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)f(t - \tau) d\tau, \quad (6.13)$$

ибо уравнение $LG(t - s) = \delta(t - s)$, определяющее функцию G , после замены $\tau = t - s$ переходит в $LG(\tau) = \delta(\tau)$, что определяет $G(\tau)$ как реакцию системы на единственное импульсное воздействие $\delta(\tau)$, зная которую, впоследствии можно вычислять реакцию системы на любое внешнее воздействие $f(t)$ по формуле (6.13).

Некоторые принципиальные аспекты использования функций Грина, которые часто остаются незамеченными, обсуждаются в [4, т. 2].

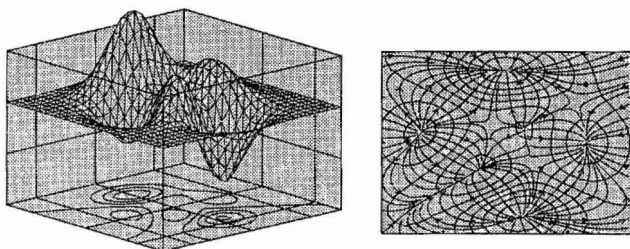
⁸⁾ С частными производными в том числе.

6.3. Градиентные поля и невозвращаемость

Для изучения наиболее комфортны градиентные системы⁹⁾

$$\dot{x} = \nabla\varphi(x). \quad (6.14)$$

Удобство (6.14) заключается в концентрации хитросплетений многомерного векторного поля на одной поверхности $z = \varphi(x)$. «Траектории» $\{x(t), z(t)\}$, $z(t) = \varphi(x(t))$, взбираются на вершины этой поверхности, либо стекаются во впадины в случае антиградиентного движения $\dot{x} = -\nabla\varphi(x)$.



В чистом виде градиентные системы редко встречаются¹⁰⁾, но для изучения динамики общего вида

$$\dot{x} = f(x) \quad (6.15)$$

эталонны типа (6.14) часто играют благотворную роль. На сравнении (6.15) с антиградиентным движением $\dot{x} = -\nabla\varphi(x)$ основан, собственно, *второй метод Ляпунова* [4, т. 2]. Центральная идея совсем проста. Если существует такой потенциал φ , что движение (6.15) происходит под острым углом к градиенту φ , т. е.

$$\nabla\varphi(x) \cdot f(x) > 0, \quad (6.16)$$

то траектории (6.15) в проекции также взбираются на вершины поверхности $z = \varphi(x)$, хотя уже и не строго перпендикулярно

⁹⁾ Потенциалы здесь и далее предполагаются непрерывно дифференцируемыми, если не оговорено противное.

¹⁰⁾ Чтобы $\dot{x} = f(x)$ имело вид (6.14), т. е. чтобы существовал такой потенциал $\varphi(x)$, что $\nabla\varphi(x) = f(x)$, необходимо и достаточно (в предположении непрерывной дифференцируемости f) равенство всех перекрестных производных, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i \neq j$.

вверх, — и местоположения вершин $z = \varphi(x)$ оказываются устойчивыми равновесиями не только (6.14), но и (6.15)¹¹⁾.

Функция $z = \varphi(x)$ на траекториях (6.15) все время растет, потому что ее производная по времени вдоль этих траекторий положительна,

$$\dot{z} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} F_i(x) = \nabla \varphi \cdot f(x) > 0.$$

Инструмент (6.14) может быть приспособлен также к изучению вынужденных периодических колебаний в системе

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (6.17)$$

с T -периодической правой частью.

По теореме 6.2.1 существование T -периодического решения обеспечивается наличием неподвижной точки у оператора сдвига $U_T = U_{T,0}$ за период. Поэтому естественно было бы ориентироваться на вычисление вращения векторного поля¹²⁾

$$\Phi(x) = x - U_T(x) \quad (6.18)$$

на границе некоторой подходящей области Ω , типа шара большого радиуса. На этом пути возникают трудности, связанные с тем, что оператор сдвига U_T , как правило, в явном виде не известен. Однако вращение поля (6.18) в естественных предположениях удастся связать с вращением поля $-f(x, 0)$.

6.3.1. Теорема. Пусть все точки границы $\dot{\Omega}$ являются точками невозвращаемости¹³⁾ при движении (6.17), и векторное поле

$$\Psi(x) = -f(x, 0) \quad (x \in \dot{\Omega}) \quad (6.19)$$

¹¹⁾ В теории Ляпунова принято вместо (6.14) рассматривать движение $\dot{x} = -\nabla \varphi(x)$, и тогда устойчивы точки минимума $\varphi(x)$.

¹²⁾ В (6.18) $U_T(x) = p(T; 0, x)$, где $p(t; 0, x)$ — решение 6.17, проходящее через точку x в нулевой момент времени.

¹³⁾ Точка x называется точкой невозвращаемости, если $p(t; 0, x) \neq x$ при любом $t \in (0, T]$, т. е. траектория, выходя из x , обратно не возвращается.

невырождено на $\dot{\Omega}$. Тогда вращения $\gamma(\Phi, \dot{\Omega})$ и $\gamma(\Psi, \dot{\Omega})$ равны,

$$\gamma(\Phi, \dot{\Omega}) = \gamma(\Psi, \dot{\Omega}).$$

Соответственно, в случае $\gamma(\Psi, \dot{\Omega}) \neq 0$ гарантируется существование T -периодического решения, которое, безусловно, может оказаться и стационарным. Но если $f(x, t)$ не равно тождественно по t нулю ни в одной точке внутри Ω , периодическое решение заведомо нетривиально.

◀ Что касается обоснования теоремы 6.3.1, то с реверансами на это может уйти целая страница, тогда как суть предельно проста. Поля

$$x - U_s(x) \quad \text{и} \quad x - U_t(x)$$

гомотопны на $\dot{\Omega}$ при любых $s, t > 0$, поскольку гомотопия

$$H(x, \lambda) = x - U_{\lambda s + (1-\lambda)t}(x)$$

невырождена в силу невозвращаемости траекторий на $\dot{\Omega}$. А при малых t поле $x - U_t(x)$ гомотопно полю $-f(x, 0)$ на $\dot{\Omega}$ в силу их противоположной направленности вследствие

$$x - U_t(x) = -f(x, 0)t + o(t). \quad \blacktriangleright$$

6.4. О потенциалах

Потенциалы $\varphi(x)$, градиенты которых удовлетворяют (6.16), значительно облегчают анализ векторных полей $f(x)$, равно как и динамических систем (6.15), — позволяя, например, вычислять вращение более простого градиентного поля $\nabla\varphi(x)$ вместо вращения векторного поля $f(x)$.

Движение

$$\dot{x} = \nabla\varphi(x) \tag{6.20}$$

замечательно тем, что любая точка, в которой $\nabla\varphi(x) \neq 0$, является *точкой невозвращаемости*¹⁴⁾. То же самое можно сказать и о *псевдоградиентном движении* $\dot{x} = f(x)$ под острым углом

¹⁴⁾ Поскольку $\varphi(x)$ не может вернуться к прежнему значению из-за $\dot{\varphi}(x) = \nabla\varphi(x) \cdot \nabla\varphi(x) \geq 0$ и $\neq 0$.

к градиенту направляющего потенциала, $\nabla\varphi(x) \cdot f(x) > 0$. Траектория $\dot{x} = f(x)$, выходящая из x , не может вернуться обратно, если $\nabla\varphi(x) \neq 0$. Благодаря этому аналог теоремы 6.3.1 не требует предположений о невозвращаемости¹⁵⁾.

6.4.1. Теорема. Пусть градиентное поле $\nabla\varphi(x)$ невырождено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области Ω . Тогда при любом $t > 0$ векторные поля $\Psi(x) = -f(x)$ и $\Phi_t(x) = x - U_t(x)$, где U_t — оператор сдвига по траекториям $\dot{x} = f(x)$, $\nabla\varphi(x) \cdot f(x) > 0$, имеют одинаковые вращения,

$$\gamma(\Phi_t, \dot{\Omega}) = \gamma(\Psi, \dot{\Omega}). \quad (6.21)$$

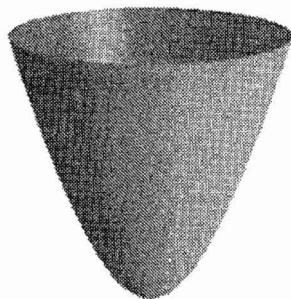
◀ Из-за «невозвращаемости» все поля $\Phi_t(x) = x - U_t(x)$ невырождены на $\dot{\Omega}$, а при малых $t > 0$ — непровратно направлены с $\Psi(x) = -f(x)$ вследствие $x - U_t(x) = -f(x)t + o(t)$. ▶ Заметим, с тем же успехом под U_t можно подразумевать оператор сдвига по траекториям $\dot{x} = \nabla\varphi(x)$, ибо в качестве $f(x)$ годится, в том числе, $\nabla\varphi(x)$.

Так или иначе, если к $f(x)$ удастся подобрать направляющий потенциал $\varphi(x)$, градиент которого составляет острые углы, $\nabla\varphi(x) \cdot f(x) > 0$, с полем $f(x)$, хотя бы на границе некоторой области $\dot{\Omega}$, — исследование $f(x)$ значительно упрощается. Это повышает значимость градиентных полей как инструмента, не говоря об их самостоятельной роли в задачах оптимизации.

На общем фоне особо выделяются потенциалы, неограниченно растущие на бесконечности,

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty. \quad (6.22)$$

Это могут быть простые параболоиды, но возможны и экзотические варианты с бесконечным числом экстремальных точек.



¹⁵⁾ Каковы в общем случае очень трудно проверить.



6.4.2. Если $\|\nabla\varphi(x)\| \geq \varepsilon_0 > 0$ и $\varphi(x) > 0$ при $\|x\| \geq r_0 > 0$,

то $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (6.22). \triangleleft

Если в дополнение к (6.22) потребовать невырожденность градиента при достаточно больших по норме x , система

$$\dot{x} = -\nabla\varphi(x), \quad (6.23)$$

двигающаяся строго против (6.20), становится диссипативной, поскольку любая траектория с течением времени попадает в некий шар $\|x\| \leq R_0$, и более из него не выходит. В результате на сферах S достаточно большого радиуса вращение $\gamma(-\nabla\varphi(x), S) = 1$ ¹⁶⁾. При этом (в ситуации изолированных критических точек x_j) по теореме 5.1.1 об алгебраическом числе нулей

$$\sum_j \text{ind}(-\nabla\varphi(x), x_j) = \gamma(-\nabla\varphi(x), S) = 1, \quad (6.24)$$

и тогда $\varphi(x)$ имеет право лишь на один минимум, если критических точек другого типа не должно быть¹⁷⁾. В данном контексте очевидно также: любое асимптотически устойчивое положение равновесие x^* (изолированный минимум φ) имеет индекс

$$\text{ind}(\nabla\varphi(x), x^*) = 1. \quad (6.25)$$

То же самое можно сказать и об асимптотически устойчивых положениях равновесия x^* неградиентных систем $\dot{x} = f(x)$,

$$\text{ind}(-f(x), x^*) = 1.$$

¹⁶⁾ Потому что при больших t оператор сдвига U_t по траекториям (6.23) отображает шар $\|x\| \leq R_0$ в себя, следствием чего является

$$\gamma(x - U_t(x), S_0) = 1$$

(см. доказательство теоремы 3.6.2 Брауэра). Далее остается сослаться на теорему 6.4.1, полагая $f(x) = \nabla\varphi(x)$.

¹⁷⁾ Если (6.22) не выполняется, $\varphi(x)$ может иметь сколько угодно локальных минимумов, не имея критических точек другого типа.

Редакция вышесказанного с уточнениями выливается в описание более строгого формата.

6.4.3. Теорема. Пусть x^* — единственная критическая точка¹⁸⁾ функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию (6.22). Тогда в x^* достигается глобальный минимум $\varphi(x)$.

◀ При любом достаточно большом R множество $L_R = \{x : \varphi(x) \leq R\}$ является компактом, в силу (6.22). Функция $\varphi(x)$ обязана достигать минимального значения на L_R в некоторой критической точке, т. е. в x^* . ▶

6.4.4. Теорема. Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (6.22) и ее градиент невырожден при достаточно больших по норме x , то на сферах S достаточно большого радиуса вращение $\gamma(-\nabla\varphi(x), S)$ равно 1, иначе говоря,

$$\text{ind}(-\nabla\varphi(x), \infty) = 1.$$

◀ Пусть $\bar{\Omega}(R)$ — множество¹⁹⁾ таких элементов x , что $\varphi(x) \leq \alpha$, где

$$\alpha = \max \{\varphi(x) : \|x\| \leq R\}.$$

Пусть поле $\nabla\varphi(x)$ невырождено при $\|x\| > R_0$. Выберем R_1 так, чтобы шар $\|x\| \leq R_1$ содержал $\bar{\Omega}(R_0)$. Движение (6.23), начинающееся на сфере $\|x\| = R_1$, не может выйти за пределы $\Omega(R_1)$, и при достаточно больших $t > 0$ попадает и остается в $\Omega(R_0)$, так как норма градиента на $\Omega(R_1) \setminus \Omega(R_0)$ ограничена снизу некоторой положительной величиной. Поэтому при достаточно больших $t > 0$ оператор U_t отображает шар $\|x\| \leq R_1$ в себя, откуда $\gamma(I - U_t, S)$, где S обозначает сферу $\|x\| = R_1$. ▶

6.5. Деформационные мотивы

Гомотопирование векторных полей подталкивает к мысли в градиентном случае деформировать сами потенциалы, рассматривая гомотопические переходы $\varphi(x, \lambda)$ от

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{к} \quad \varphi(x, 1) = \varphi_1(x).$$

¹⁸⁾ Критическая точка x^* является положением локального минимума функции $\varphi(x)$ в том случае, когда равновесие x^* системы (6.23) асимптотически устойчиво. (?)

¹⁹⁾ Ограниченность $\bar{\Omega}(R)$ вытекает из (6.22).

Не о сохранении вращения идет речь, потому что оно заведомо не меняется. Да и нет смысла ограничивать свободу маневра *градиентными гомотопическими переходами* вида

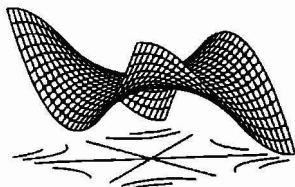
$$H(x, \lambda) = \nabla_x \varphi(x, \lambda), \quad (6.26)$$

когда $H(x, \lambda)$ навязывается градиентный характер в процессе деформации. Вопрос в другом. Не сохраняют ли деформации типа (6.26) характер критических точек, хотя бы невырожденных.

Напомним, критические точки считаются невырожденными в том случае, когда невырождена матрица Гессе $\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right]$. Лемма Морса [4, т. 7] гарантирует существование в некоторой окрестности невырожденной критической точки — локальной системы координат x_1, \dots, x_n , в которой

$$\varphi = \varphi(0) + x_1^2 + \dots + x_l^2 - x_{l+1}^2 - \dots - x_n^2.$$

При этом функция называется *морсовским l -седлом*. В случае $l = 0$ имеем максимум, при $l = n$ — минимум.



Лемма Морса дает полную классификацию невырожденных критических точек. Для вырожденных критических точек такой классификации, вообще говоря, нет. Простой пример вырожденной критической точки — *обезьянье седло*, которое описывается функцией

$$\varphi(x, y) = x^3 - 3xy^2.$$

Само понятие эквивалентности критических точек, разумеется, существует, но оно неконструктивно и сопряжено с большими хлопотами, см. [4, т. 7], а также [18], где вопрос излагается подробно.

6.5.1. Определение. Гладкие функции $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ локально эквивалентны в нуле, если существует такой локальный диффеоморфизм $z(x)$, что $\varphi(x) = \psi[z(x)] + \xi$ в некоторой окрестности нуля при подходящей константе ξ . Если при этом $\nabla \varphi(0) = \nabla \psi(0) = 0$, то говорят об эквивалентности критических точек.

Малейшие возмущения потенциала $\varphi(x)$ могут очень сильно менять градиент, разрушая и нагромождая критические точки. Однако малые деформации никогда не ликвидируют минимума.

6.5.2. Лемма. Если непрерывная функция $\varphi(x, \lambda)$ имеет при λ_0 изолированный минимум по x в точке $x^*(\lambda_0)$, то при достаточно малом возмущении $\Delta\lambda$ минимум сохраняется, смещаясь в близлежащую точку $x^*(\lambda_0 + \Delta\lambda)$.

◀ Пусть, например, $\varphi(x)$ имеет в нуле изолированный минимум, и

$$\nu(\varepsilon) = \min\{\varphi(x) : \|x\| = \varepsilon\}.$$

Разумеется, $\nu(\varepsilon) > \varphi(0)$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Если возмущение функционала $\delta\varphi(x)$ по модулю меньше $\frac{\nu(\varepsilon) - \varphi(0)}{2}$ при любом x из шара $\|x\| \leq \varepsilon$, то $\varphi(x) + \delta\varphi(x)$ имеет в шаре $\|x\| \leq \varepsilon$ хотя бы один минимум, ибо $\varphi(0) + \delta\varphi(0)$ меньше минимума $\varphi(x) + \delta\varphi(x)$ на границе $\|x\| = \varepsilon$. ▶

Отсюда вроде бы напрашивается вывод, что деформации потенциала (невырожденные на $\dot{\Omega}$) вообще никогда не ликвидируют минимума. Но это не так. Более того, *градиентные поля*

$$\nabla\varphi_0(x) \quad \text{и} \quad \nabla\varphi_1(x),$$

гомотопные на $\dot{\Omega}$ как непрерывные отображения (раздел 3.4), являются также градиентно гомотопными, в смысле существования связывающей их деформации вида (6.26), невырожденной на $\dot{\Omega}$. Это далеко не очевидная теорема Парусинского²⁰⁾.

Таким образом, любые потенциалы φ_0 и φ_1 , заданные на $\bar{\Omega}$, вращения градиентных полей которых равны,

$$\gamma(\nabla\varphi_0(x), \dot{\Omega}) = \gamma(\nabla\varphi_1(x), \dot{\Omega}),$$

могут быть градиентно деформированы друг в друга²¹⁾ без выхода критических точек $\nabla_x\varphi(x, \lambda)$ на границу $\dot{\Omega}$.

Это означает, что все морсовские l -седла распадаются всего лишь на два класса, внутри которых седла переводятся друг в друга градиентной гомотопией. В частности,

- на шаре $\|x\| \leq 1$ в четномерном пространстве \mathbb{R}^{2m} потенциал φ_0 с единственным минимумом может быть гомотопирован в φ_1 с единственным максимумом — невырожденной на сфере $\|x\| = 1$ деформацией $\varphi(x, \lambda)$;

²⁰⁾ Доказательство и ссылка на первоисточник есть в [6].

²¹⁾ С учетом теоремы Хопфа 3.4.4.

- В \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, потенциал φ_0 , имеющий единственный глобальный минимум на замыкании области $\bar{\Omega}$, может быть гомотопирован в φ_1 с единственным локальным, но не глобальным минимумом на $\bar{\Omega}$ — невырожденной на $\bar{\Omega}$ деформацией $\varphi(x, \lambda)$.

Вышесказанное настраивает на пессимистический лад. Выходит, переход к деформациям потенциалов, вместо деформаций их градиентов как просто непрерывных полей, — ничего не дает.

На этом фоне довольно неожиданна теорема Бобылева:

6.5.3. Пусть \mathbb{F} обозначает класс гладких функционалов $\varphi(x)$ с единственной в шаре $\|x\| \leq 1$ нулевой критической точкой²²⁾. Если $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ гомотопны в \mathbb{F} и нуль — точка локального минимума $\varphi_0(x)$, то это также локальный минимум $\varphi_1(x)$.

Доказательство есть в [4, т. 7], там же указано обобщение:

6.5.4. Теорема. Если $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ подвижно гомотопны в $\mathbb{F}(\Omega)$ и нуль — точка локального минимума $\varphi_0(x)$, то нуль — точка локального минимума $\varphi_1(x)$.

Под $\mathbb{F}(\Omega)$ здесь подразумевается класс гладких функционалов $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ с единственной на замыкании ограниченной области Ω критической точкой $x^*(\varphi)$. Функционалы $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ считаются подвижно гомотопными в $\mathbb{F}(\Omega)$, если существует гладкая деформация²³⁾ $\varphi(x, \lambda) \in \mathbb{F}(\Omega)$, $\lambda \in [0, 1]$, такая что $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$, $\varphi(x, 1) = \varphi_1(x)$.

Через окуляр леммы 6.5.2, «не позволяющей» минимуму исчезать при малых деформациях, результаты 6.5.3, 6.5.4 могут показаться очевидными. Поскольку, дескать, решение $x(\lambda)$ уравнения $\nabla_x \varphi(x, \lambda) = 0$ предполагается единственным при любом $\lambda \in [0, 1]$, — точка $x(\lambda)$ вынуждена оставаться положением минимума. Но не тут-то было. Из леммы 6.5.2 следует лишь, что множество Λ тех $\lambda \in [0, 1]$, при которых $x(\lambda)$ является точкой

²²⁾ При этом гомотопность в \mathbb{F} функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ означает, что $\nabla_x \varphi(x, \lambda) = 0$ при любом $\lambda \in [0, 1]$ имеет единственное решение $x(\lambda)$.

²³⁾ Таким образом, по сравнению с п. 6.5.3 ситуация обобщается. Шар заменяется произвольной ограниченной областью Ω . При деформации критическая по-прежнему обязана быть единственной, но теперь может двигаться.

минимума $\varphi(x, \lambda)$, открыто в $[0, 1]$. Обоснование замкнутости Λ , что вкупе с предыдущим обеспечивает $\Lambda = [0, 1]$, связано с некоторыми осложнениями, отчасти головоломными.

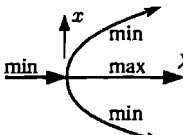
Без требования «единственности» на множестве $x(\lambda)$ возможно ветвление, и там деформация может завести куда угодно. Например, в случае

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{\lambda_0 - \lambda}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4, \quad \nabla_x \varphi(x, \lambda) = (\lambda_0 - \lambda)x + x^3,$$

при $\lambda \leq \lambda_0$ потенциал $\varphi(x, \lambda)$ имеет минимум в нуле, который при $\lambda > \lambda_0$ превращается в максимум, а в его окрестности появляется два новых положения минимума $x = \pm \sqrt{\lambda - \lambda_0}$. Требование единственности решения $\nabla_x \varphi(x, \lambda) = 0$ запрещает подобные бифуркации.

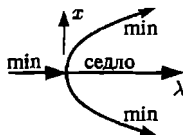


Таким образом, совокупность критических точек $x(\lambda)$ в данном случае

представляет собой трезубец , и если не запрещать выход

ветвей $x(\lambda)$ за пределы рассматриваемой области Ω , то ветви $x = \pm \sqrt{\lambda - \lambda_0}$ покинут Ω , и минимум окажется деформированным в максимум. Однако запрет градиенту $\nabla_x \varphi(x, \lambda)$ обнуляться на границе Ω заставляет деформацию $\varphi(x, \lambda)$ вариться в собственном соку, не выходя «за пределы». И тогда минимум не может обратиться в максимум²⁴⁾ по *теореме Парусинского*, потому что в нечетномерном пространстве минимум и максимум имеют разные индексы. Но стоит перейти к аналогичной деформации на плоскости $\{x, y\}$,

$$\varphi(x, y, \lambda) = \frac{\lambda_0 - \lambda}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 + y^2,$$

с ветвлением , как та же *теорема Парусинского* гарантирует

существование градиентной гомотопии, переводящей единственный минимум в единственный максимум, но при этом, в силу деформационных теорем, без бифуркационного ветвления внутри Ω нельзя обойтись.

²⁴⁾ Единственный минимум — в единственный максимум.

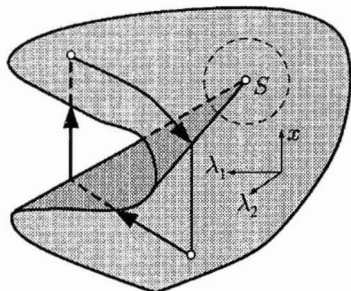
Бифуркационные возможности получают дополнительное освещение, если отталкиваться от векторных деформаций. Например, критическими точками потенциала

$$\varphi(x, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x$$

являются решения уравнения

$$\nabla_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = x^3 + \lambda_2 x + \lambda_1 = 0,$$

задающего катастрофу сборки [4, т. 7].



Двигаясь в плоскости $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ вдоль разных кривых $\lambda(\tau) = \{\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau)\}$, будем иметь различные скалярные деформации $\varphi(x, \tau)$, непрерывные либо разрывные, в том числе — петли гистерезиса, и даже переходы в нестабильную область, выделенную на рисунке более темным цветом, где достигается максимум потенциала. Все эти возможности спрессованы в окрестности особой точки S , см. п. 9.5.

6.6. Нужна ли гладкость

Стержневая опора 6.5.2 деформационной рецептуры 6.5.3, 6.5.4 в предположении гладкости $\varphi(x, \lambda)$ вообще не нуждается, и возникает соблазн «обойтись без», чтобы охватить негладкие территории. Но чем заменить в пп. 6.5.3, 6.5.4 требование единственности решения $\nabla_x \varphi(x, \lambda) = 0$?

Выход из положения заключается в использовании, например, *субдифференциала Кларка* [4, т. 7] с определением критической точки x^* как нуля многозначного векторного поля,

$$0 \in \partial f(x^*),$$

что юридически строго очерчивает круг особенностей, за которыми необходимо следить в процессе деформации. В итоге все развивается по тем же выкройкам, с теми же формальными выводами²⁵⁾. При этом нельзя сказать, что результаты чувствительно

²⁵⁾ Подобного сорта анализ см. в [6].

способствуют решению прикладных задач, но они важны в идеологическом отношении.

Идеологическая часть математики заслуживает почтительного обращения по многим причинам, хотя смотрится как ничтожная составляющая, которая переливает из пустого в порожнее. Разумеется, это не инструмент повышенного спроса для решения ходовых задач. Но для прагматики это фундамент, дающий опору, и среда, создающая атмосферу.

6.7. Неградиентные системы

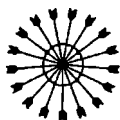
На фоне предыдущего естественно возникает мысль о применении деформационных методов к неградиентным системам

$$\dot{x} = f(x).$$

Кое-что в самом деле возможно, только не бог весть сколько. Мешающие причины очевидны. Простейшие системы

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \quad \text{и} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \quad (6.27)$$

с притягивающим и отталкивающим равновесием



деформационно эквивалентны²⁶⁾. Переводятся друг в друга гомотопией $H(x, \lambda)$, каковая может быть выбрана так, что при любом фиксированном λ будет невырожденно линейной по x .

Соответствующая деформация достигается кусочно-линейным трюком.

Сначала $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ линейно гомотопируется в $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

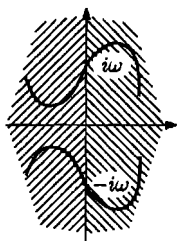
²⁶⁾ В классе непрерывных деформаций. Однако сами по себе обе системы (6.27) градиентны, хотя градиентной деформацией с *единственным равновесием* друг в друга не переводятся. Если же требование единственности равновесия в процессе деформации снять, то они будут и градиентно гомотопны, по *теореме Парусинского*.

$$\lambda \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda - 1 \\ 1 - \lambda & -\lambda \end{bmatrix},$$

затем $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ — в $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Равновесие в процессе деформации остается единственным, но фазовый портрет системы скачкообразно меняется.

Таким образом, даже сужение класса допустимых деформаций $H(x, \lambda)$ до невырожденных линейных по x отображений не сохраняет динамические характеристики равновесия в системах $\dot{x} = Ax$. Как и в теории вращения, Ax разбиваются всего на два класса, $\det A > 0$ и $\det A < 0$. Однако линейные системы можно деформационно поделить и с прицелом на асимптотическую устойчивость.

6.7.1. Пусть C^+ обозначает множество невырожденных матриц, квадраты которых не имеют отрицательных собственных значений. Матрицы A и B обе одновременно гурвицевы или негурвицевы в том же случае, когда в C^+ существует невырожденная деформация от A к B .



◀ Понять результат легко. При деформации спектр матрицы меняется непрерывно, а поскольку в C^+ матрицы не могут иметь чисто мнимых собственных значений, то невырожденная деформация в C^+ не может перевести собственные значения из левой полуплоскости в правую, и наоборот. ▶

С точки зрения устойчивости критический момент описанной выше деформации — трансформация в промежуточную систему $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$, имеющую периодические решения $x(t) = x_0 e^{\pm i\omega t}$. И запрет на автоколебания сразу реабилитирует деформационный инструмент.

Интересно, что в нелинейном случае к успеху приводят аналогичные меры. Только запрета на автоколебания не хватает. Приходится запретить существование в системе ограниченных решений — ограниченных на всей оси, при $t \in (-\infty, \infty)$. Подходящие случаю результаты (для дискретного времени) см. в [11].

6.8. Автоколебания и последование

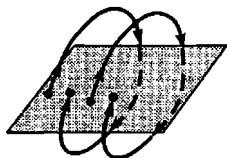
Одна из главных трудностей изучения автоколебаний в системе

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (6.28)$$

— неизвестность периода. Другая неприятность: неизолерованность решений²⁷⁾, циклов. Если $x^*(t)$ — периодическое решение (6.28), то и $x_*(t+s)$ — решение (6.28), при любом s . Все это вместе взятое приводит к определенным неудобствам и требует привлечения дополнительных соображений. Довольно часто используется методика Пуанкаре, основанная на введении функции последования. В простейшей модификации это выглядит так.

Пусть $L \subset \mathbb{R}^n$ — $(n-1)$ -мерная гиперплоскость; $p(t, x)$ — решение (6.28), начинающееся в точке x в нулевой момент времени, и $t(x)$ — время первого возвращения траектории на L , если $x \in L$. В этом случае отображение

$$P(x) = p(x, t(x))$$

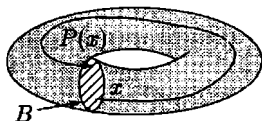


называется *функцией последования*. Очевидно:

6.8.1. Неподвижные точки оператора последования, $x = P(x)$, лежат на замкнутых траекториях, т. е. являются начальными условиями периодических решений (6.28).

Таким образом, если на L удастся выделить такую область $\Omega \subset L$, что $\gamma(I - P, \dot{\Omega}) \neq 0$, проблема существования периодического решения в системе (6.28) оказывается решенной.

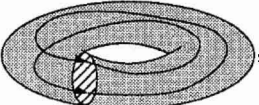
Скажем, если движение (6.28) имеет «круговой характер» и происходит внутри сплошного тора (рис. справа), то оператор последования переводит в себя шар B ,



²⁷⁾ В неавтономных системах $\dot{x} = f(x, t)$ с T -периодической правой частью решения, как правило, изолированы.

и теорема Брауэра в компании с п. 6.8.1 — гарантируют существование автоколебания.

При этом, если $x^* = P(x^*)$, то период соответствующего периодического режима равен $t(x^*)$. Это не исключает существования периодических траекторий, замыкающихся после двух

оборотов ²⁸⁾ , но не идущих по следу первого.

В этом случае $x^* = P^2(x^*)$ с периодом колебания $t(x^*) + t(P(x^*))$.

Если же инвариантным для (6.28) является не сплошной тор, а его граница, т. е. просто тор, то наличие автоколебания не гарантировано. Окружность \dot{B} , например, после оборота может поворачиваться на иррациональный угол, — и тогда на инвариантном торе нет ни одного периодического решения.

В связи с отмеченной выше неизолированностью периодических решений автономных систем ²⁹⁾ обычное понятие индекса соответствующего решения ³⁰⁾ становится бессмысленным. Поэтому индекс цикла ³¹⁾ Γ , трансверсального ³²⁾ гиперплоскости L , определяется с помощью функции последования $P(x)$ как обычный индекс векторного поля $I - P : L \rightarrow L$,

$$\text{ind } \Gamma = \text{ind } (I - P, x_0), \quad \text{где } x_0 \in L \cap \Gamma,$$

и такое понятие оказывается эффективным на практике.

²⁸⁾ И вообще, k оборотов.

²⁹⁾ По этой причине, кстати, нетривиальное автоколебание не может быть *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, и даже просто устойчивым — ибо малые возмущения угловой скорости приводят к большим расхождениям траекторий. Но тут возможна и достаточно широко распространена *орбитальная устойчивость* [4, т. 2].

³⁰⁾ Топологического индекса в функциональном пространстве, см. главу 7.

³¹⁾ Циклом мы называем след замкнутой траектории.

³²⁾ Трансверсальность — эквивалент типичности, отвечающий ситуации общего положения при пересечении многообразий. Две гиперплоскости $L, M \subset \mathbb{R}^n$ трансверсальны, если любой вектор $z \in \mathbb{R}^n$ представим в виде $z = x + y$, где $x \in L, y \in M$.

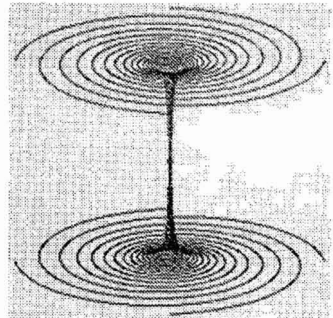
Глава 7

Вполне непрерывные поля

In the middle of difficulty lies opportunity.

Einstein

Все невырожденные непрерывные векторные поля, определенные на границе ограниченной области в бесконечномерном банаховом пространстве, гомотопны между собой. Это драматическое обстоятельство исключает гомотопическую классификацию непрерывных полей в функциональных пространствах и не позволяет построить общую теорию вращения, аналогичную конечномерной. Но уменьшение ширины замаха все ставит на свои места.



7.1. Стягиваемость сферы по себе

Сначала есть резон разобраться с угрозами бесконечномерности. Их долго перечислять, но все они могут быть сфокусированы в нарушении следующего конечномерного свойства.

7.1.1. В \mathbb{R}^n сфера $S = \{x : \|x\| = 1\}$ не стягивается по себе в точку $x_0 \in S$ с помощью непрерывной деформации.

◀ В противном случае существовала бы такая непрерывная деформация $H(x, t)$, что для всех $x \in S$

$$H(x, 0) \equiv x, \quad H(x, 1) \equiv x_0 \in S, \quad (7.1)$$

причем $\|H(x, t)\| = 1$ при любом $t \in [0, 1]$. Но это бы означало равенство вращений тождественного поля $H(x, 0) \equiv x$ и постоянного $H(x, 1) \equiv x_0$, чего не может быть. ▶

7.1.2. В любом бесконечномерном банаховом пространстве E факт 7.1.1 теряет силу. Сфера $S = \{x : \|x\| = 1\} \subset E$ стягивается по себе в точку с помощью непрерывной деформации.

◀ Геометрически наглядный пример стягивания $S = \{x : \|x\| = 1\}$ в пространстве $C[0, 1]$ рассматривался в [4, тт. 12, 13]. Универсальная конструкция есть в [10]. ▶

Вот несложный пример Какутани в подтверждение п. 7.1.2. Пусть E — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$. Нетрудно видеть, что

$$\Phi(x, t) = \frac{tx + (1-t)f(x)}{\|tx + (1-t)f(x)\|}, \quad t \in [0, 1],$$

где

$$f(x) = (x, e_1)e_2 + \dots + (x, e_n)e_{n+1} + \dots,$$

деформирует единичную сферу $S \subset E$ в единичную сферу $S_{\perp e_1}$ полупространства векторов x , ортогональных e_1 , — которую уже легко деформировать по S в точку¹⁾.

Из 7.1.2 сразу следует гомотопность друг другу всех невырожденных на S отображений $\Phi : S \rightarrow R \setminus \{0\}$, ибо если $H(x, t)$ — непрерывная деформация вида (7.1), то $\Phi H(x, t)$ деформирует $\Phi(x)$ в $\Phi(x_0)$, т. е. все $\Phi(x)$ на S получают гомотопными постоянному отображению $\Phi(x_0)$. При этом попытка ограничиться равномерно невырожденными на S отображениями не спасает²⁾.

Стягиваемость сферы позволяет невырожденно (без нулей) продолжить любое отображение $\Phi(x)$ с S на весь шар $\|x\| \leq 1$, что достигается отображением

$$\Psi(x) = \Phi H(x/\|x\|, 1 - \|x\|).$$

Так что при бесконечном числе измерений принципиально нельзя судить о нулях непрерывного поля внутри шара $\|x\| \leq 1$ по его поведению на границе $\|x\| = 1$.

¹⁾ Так же как окружность по двумерной сфере в R^3 .

²⁾ Невырожденное отображение $\Phi(x) \neq 0$ называют *равномерно невырожденным*, если дополнительно $\|\Phi(x)\| \geq \epsilon$ при некотором $\epsilon > 0$. Указанная деформация $\Phi H(x, t)$ равномерно невырождена, если таково $\Phi(x)$, причем невырожденное $\Phi(x)$ автоматически равномерно невырождено, п. 7.3.2.

7.2. Компактные операторы

Как следует из вышесказанного, непрерывные отображения в функциональных пространствах с точки зрения топологического изучения неподвижных точек — не имеют перспективы. Однако на практике задачи подобного рода сводятся обычно к интегральным уравнениям типа $x - A(x) = 0$, например, с *интегральным оператором Урысона*

$$Ax(t) = \int_0^1 G[t, s, x(s)] ds. \quad (7.2)$$

В таких случаях векторные поля $\Phi(x) = x - A(x)$ принадлежат обычно более узким классам отображений, для которых теория вращения сохраняет прежнюю форму.

Итак, игровым полем далее вместо \mathbb{R}^n служит вещественное банахово пространство E , что не исключает, конечно, $E = \mathbb{R}^n$. Отображение Φ называется *вполне непрерывным векторным полем*, если

$$\Phi(x) = x - A(x),$$

где A — *вполне непрерывный оператор*, переводящий, по определению, ограниченные множества $M \subset E$ в предкомпактные, и, разумеется, непрерывный в обычном смысле. Заметим, вполне непрерывным иногда называют оператор, переводящий ограниченные множества в компактные, а не предкомпактные, — что способствует нарастанию вселенского беспорядка³⁾.

Причины лежат у терминологических истоков.

7.2.1. Множество $M \subset E$ мы называем *компактным*, либо *компактом*, если всякая последовательность в M содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M . А множество $M \subset E$, замыкание которого компактно, называется *предкомпактным*.

³⁾ Линейный функционал $\varphi(x) = \int_0^1 x(t) dt$ вполне непрерывен в $C[0, 1]$, но замкнутое ограниченное множество функций $M = \{x : \|x\| = 1, x(t) \geq 0\}$ переводит в полуинтервал $(0, 1]$.

Декларировать известные определения приходится из-за неразберихи в функциональном анализе по поводу компактности. Компактность $M \subset X$ называют также *компактностью в себе*, а предкомпактность — *компактностью в X* , или просто компактностью. Не говоря о том, что компактность в данном выше определении называют еще *бикompактностью*⁴⁾.

Напомним заодно определения дифференциальных свойств.

7.2.2. *Оператор A , действующий в банаховом пространстве E , называют дифференцируемым по Фреше в точке $x \in E$, если существует линейный ограниченный оператор $A'_x : E \rightarrow E$, называемый производной Фреше в точке x , — такой что*

$$A(x + h) - A(x) = A'_x h + o(\|h\|).$$

При этом линейную часть приращения $A'_x h$ называют *дифференциалом Фреше*, а A'_x — *производной Фреше*, либо *сильной производной*, либо просто *производной*, если из контекста ясно, о чем речь.

◀ Производная Фреше *интегрального оператора Урысона* (7.2) в случае непрерывности ядра $G[t, s, x]$ по совокупности переменных и непрерывной дифференцируемости по x определяется выражением

$$A'_x h(t) = \int_0^1 G'_x[t, s, x(s)] h(s) ds,$$

как в C , так и в L_p . ▶

Дифференциалом Гато называют предел⁵⁾

$$\delta A(x, h) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{A(x + \tau h) - A(x)}{\tau}.$$

В случае линейности по h ,

$$\delta A(x, h) = A'_x h,$$

оператор A'_x называют *производной Гато* (*слабой производной*) в точке x .

Производная Фреше, если существует, является производной Гато. Обратное верно, если производная Гато непрерывна по x .

⁴⁾ В альтернативной терминологии есть своя логика. Определение предкомпактного множества на самом деле подразумевает, что объемлющее пространство X оговорено. В противном случае возникает неоднозначность. Множество рациональных точек из $(0, 1)$ предкомпактно в \mathbb{R} , но не предкомпактно в пространстве рациональных чисел.

⁵⁾ Слабый дифференциал называют также *вариацией A* .

7.2.3. Теорема. Производная Фреше вполне непрерывного оператора — вполне непрерывна.

7.3. Вращение вполне непрерывного поля

Пусть Ω — ограниченная область в E , на границе $\dot{\Omega}$ которой задано вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$. Ключевой факт в определении вращения $\gamma(I - A, \dot{\Omega})$ заключается в возможности конечномерной аппроксимации компактного оператора.

7.3.1. Теорема. Для любого $\varepsilon > 0$ существует вполне непрерывный конечномерный⁶⁾ оператор A_ε , аппроксимирующий A на $\dot{\Omega}$ с точностью:

$$\|A(x) - A_\varepsilon(x)\| < \varepsilon \quad (x \in \dot{\Omega}). \quad (7.3)$$

◀ Пусть M обозначает замыкание множества $A(\dot{\Omega})$. В силу компактности M для любого $\varepsilon > 0$ в M существует конечная ε -сеть $\{x_1, \dots, x_n\}$. С помощью проектора Шаудера

$$P_\varepsilon(x) = \left(\sum_{k=1}^n \mu_k(x) \right)^{-1} \sum_{k=1}^n \mu_k(x) x_k \quad (x \in M), \quad (7.4)$$

где

$$\mu_k(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_k\| & \text{при } \|x - x_k\| \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \|x - x_k\| > \varepsilon, \end{cases}$$

оператор A_ε , удовлетворяющий (7.3), строится в виде композиции

$$A_\varepsilon(x) = P_\varepsilon(A(x)) \quad (x \in \dot{\Omega}). \quad \blacktriangleright$$

Вот еще один существенный технический момент.

7.3.2. Всякое невырожденное на $\dot{\Omega}$ вполне непрерывное векторное поле $\Phi = I - A$ — равномерно невырождено, т. е.

$$\|\Phi(x)\| \geq \varepsilon \quad (x \in \dot{\Omega}) \quad (7.5)$$

при некотором $\varepsilon > 0$.

⁶⁾ Принимающий значения в конечномерном подпространстве. Например, оператор Гаммерштейна $Ax(t) = \int_D G(t, s) f[s, x(s)] ds$ конечномерен в случае $G(t, s) = \sum_{j=1}^m e_j(t) h_j(s)$. Значения $Ax(t)$ лежат в подпространстве с базисом $\{e_1(t), \dots, e_m(t)\}$.

◀ В предположении противного

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - A(x_k)\| = 0 \quad (7.6)$$

на некоторой последовательности точек $x_k \in \dot{\Omega}$.

Но $A(x_k) \rightarrow x^*$ в силу полной непрерывности A , откуда, с учетом (7.6),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x^*\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - A(x_k)\| + \lim_{k \rightarrow \infty} \|A(x_k) - x^*\| = 0.$$

В итоге $\Phi(x^*) = 0$, что противоречит невырожденности $\Phi(x)$ на $\dot{\Omega}$. ▶

Вращение $\gamma(\Phi, \dot{\Omega})$ невырожденного вполне непрерывного поля $\Phi = I - A$ на $\dot{\Omega}$ определяется так. Пусть $E_\varepsilon \subset E$ — произвольное подпространство, содержащее конечную ε -сеть множества $A(\dot{\Omega})$, а A_ε — вполне непрерывная ε -аппроксимация оператора A на $\dot{\Omega}$ (теорема 7.3.1).

Конечномерное поле $\Phi_\varepsilon = I - A_\varepsilon$ на границе $\dot{\Omega}_\varepsilon$ области $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap E_\varepsilon \subset E_\varepsilon$ невырождено на $\dot{\Omega}_\varepsilon$, поскольку на $\dot{\Omega}_\varepsilon$ при условии $\|\Phi(x)\| \geq 2\varepsilon > 0$, см. п. 7.3.2,

$$\|\Phi_\varepsilon(x)\| = \|x - A_\varepsilon(x)\| \geq \|x - A(x)\| - \|A(x) - A_\varepsilon(x)\| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Поэтому определено вращение $\gamma(\Phi_\varepsilon, \dot{\Omega}_\varepsilon)$ на $\dot{\Omega}_\varepsilon$, каковое и назовем вращением $\gamma(\Phi, \dot{\Omega})$ вполне непрерывного векторного поля Φ на $\dot{\Omega}$.

Для обоснования корректности этого определения необходимо убедиться в его независимости от выбора подпространства E_ε и оператора A_ε , — что требует некоторых усилий.

◀ Пусть E_ε и E'_ε — различные конечномерные подпространства, содержащие ε -сети множества M , а

$$A_\varepsilon = P_\varepsilon A : \dot{\Omega} \rightarrow E_\varepsilon \quad \text{и} \quad A'_\varepsilon = P'_\varepsilon A : \dot{\Omega} \rightarrow E'_\varepsilon$$

соответствующие вполне непрерывные ε -аппроксимации оператора A на $\dot{\Omega}$.

Покажем, что вращения $\gamma(\Phi_\varepsilon, \dot{\Omega})$ и $\gamma(\Phi'_\varepsilon, \dot{\Omega})$ конечномерных векторных полей $\Phi_\varepsilon = I - A_\varepsilon$ и $\Phi'_\varepsilon = I - A'_\varepsilon$ на границах $\dot{\Omega}_\varepsilon$ и $\dot{\Omega}'_\varepsilon$ областей $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap E_\varepsilon$ и $\Omega'_\varepsilon = \Omega \cap E'_\varepsilon$ одинаковы.

Пусть E^* — линейная оболочка подпространств E_ε и E'_ε . Рассмотрим на границе $\dot{\Upsilon}$ области $\Upsilon = \Omega \cap E^*$ векторное поле

$$\Psi_\varepsilon(x) = x - P_\varepsilon A(x) \quad (x \in \dot{\Upsilon}).$$

Это поле невырождено на $\dot{\Upsilon}$ и потому определено его вращение $\gamma(\Psi_\epsilon, \dot{\Upsilon})$, причем (по лемме 5.5.1 Лере—Шаудера) $\gamma(\Psi_\epsilon, \dot{\Upsilon})$ совпадает с вращением $\gamma(\psi_\epsilon, \dot{\Upsilon})$ сужения ψ_ϵ поля Ψ_ϵ на $\dot{\Omega}_\epsilon$, т. е.

$$\gamma(\Psi_\epsilon; \dot{\Upsilon}) = \gamma(\psi_\epsilon; \dot{\Omega}_\epsilon).$$

Но на $\dot{\Omega}_\epsilon$ поле ψ_ϵ гомотопно полю ⁷⁾ Φ_ϵ . Поэтому

$$\gamma(\psi_\epsilon; \dot{\Omega}_\epsilon) = \gamma(\Phi_\epsilon; \dot{\Omega}_\epsilon).$$

В результате

$$\gamma(\Psi_\epsilon; \dot{\Upsilon}) = \gamma(\Phi_\epsilon; \dot{\Omega}_\epsilon). \quad (7.7)$$

Аналогично, отталкиваясь от поля

$$\Psi'_\epsilon(x) = x - P'_\epsilon(A(x)),$$

устанавливается

$$\gamma(\Psi'_\epsilon; \dot{\Upsilon}) = \gamma(\Phi'_\epsilon; \dot{\Omega}'_\epsilon). \quad (7.8)$$

Кроме того, поля Ψ_ϵ и Ψ'_ϵ линейно гомотопны на $\dot{\Upsilon}$. Поэтому

$$\gamma(\Psi_\epsilon, \dot{\Upsilon}) = \gamma(\Psi'_\epsilon, \dot{\Upsilon}). \quad (7.9)$$

Объединяя (7.7), (7.8), (7.9), получаем

$$\gamma(\Phi_\epsilon; \dot{\Omega}_\epsilon) = \gamma(\Phi'_\epsilon; \dot{\Omega}'_\epsilon),$$

что означает корректность введенного понятия *вращения вполне непрерывного векторного поля*. ►

7.4. Вычисление и свойства

Свойства вращения $\gamma(I - A, \dot{\Omega})$ аналогичны свойствам вращения конечномерных полей, но кое-что требует уточнения. В первую очередь, понятие гомотопии вполне непрерывных полей.

7.4.1. Определение. *Вполне непрерывные векторные поля $\Phi_0 = I - A_0$ и $\Phi_1 = I - A_1$, определенные на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области $\Omega \subset E$, называются гомотопными ⁸⁾ на $\dot{\Omega}$, если существует такое однопараметрическое семейство невырожденных векторных полей*

$$\Phi(x, t) = x - A(x, t) \quad (x \in \dot{\Omega}, \quad 0 \leq t \leq 1),$$

⁷⁾ Годится линейная гомотопия $(1-t)\psi_\epsilon(x) + t\Phi_\epsilon(x)$, невырожденность которой легко проверяется.

⁸⁾ Иногда говорят *невырожденно гомотопными*.

что оператор $A : \dot{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow E$ вполне непрерывен⁹⁾ и

$$\Phi(x, 0) = \Phi_0(x), \quad \Phi(x, 1) = \Phi_1(x).$$

Таким образом, к понятию гомотопии в \mathbb{R}^n (раздел 3.4) добавляется обязательная форма деформации $\Phi(x, t) = x - A(x, t)$ с требованием полной непрерывности $A(x, t)$. Итог прежний (см. теорему 3.4.2), но уже на новом витке спирали.

7.4.2. Гомотопные поля имеют одинаковые вращения.

Дословно повторяются, на том же витке, и другие факты:

7.4.3. Пусть векторное поле $\Phi(x) = I - A$ определено и невырождено на границах областей $\Omega, \Omega_1, \dots, \Omega_m, \dots$, причем области Ω_j попарно не пересекаются и $\bar{\Omega} = \bigcup \bar{\Omega}_j$. Тогда вращения $\gamma(\Phi, \dot{\Omega}_j)$ отличны от нуля лишь при конечном числе индексов j , и

$$\gamma(\Phi, \dot{\Omega}) = \sum_j \gamma(\Phi, \dot{\Omega}_j).$$

7.4.4. Если векторное поле $\Phi(x)$ на $\dot{\Omega}$ имеет ахиллесово направление, то $\gamma(\Phi, \dot{\Omega}) = 0$.

7.4.5. Если $\Phi(x)$ невырождено на замыкании области Ω , то $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 0$.

7.4.6. Если $\gamma(\Phi, \dot{\Omega}) \neq 0$, то уравнение $\Phi(x) = 0$ разрешимо в Ω , т. е. в Ω существует нуль векторного поля $x^* \in \Omega$, $\Phi(x^*) = 0$.

Доказательства перечисленного, благодаря определению вращения вполне непрерывных полей через вращения полей в \mathbb{R}^n , сводятся к простым ссылкам на конечномерные аналоги¹⁰⁾ (п. 3.5) утверждений 7.4.2–7.4.6.

⁹⁾ Как отображение от двух переменных, $A(x, t)$. Полной непрерывности $A(x, t)$ при каждом фиксированном t недостаточно (для последующей гомотопической классификации полей). Заметим также, что невырожденность гомотопии влечет за собой равномерную невырожденность, каковая бывает инструментально полезна, и легко устанавливается, как и факт 7.3.2.

¹⁰⁾ Кое-где помимо ссылок имеют смысл небольшие разъяснения, но тогда шаг за шагом изложение приобретает рутинно-усыпляющий характер, что является уделом монографической литературы.

Развитие бесконечномерной теории вращения во многом протекает параллельно ее конечномерному варианту, вплоть до аналогов *теоремы Хопфа* 4.5.2 и ее обобщения 4.5.3. Сохраняют форму и технические инструменты. Точно так же вводится, например, понятие *индекса нуля*¹¹⁾ с повторением результата 5.1.1:

7.4.7. Пусть векторное поле $\Phi(x)$ невырождено на $\dot{\Omega}$ и имеет в Ω конечное число нулей x_1, \dots, x_m . Тогда

$$\gamma(\Phi, \dot{\Omega}) = \sum_j \text{ind}(\Phi, x_j). \quad (7.10)$$

Можно даже сохранить форму конечномерного аналога 5.1.1, требуя лишь изолированности нулей x_j , а не конечности их числа, — потому что второе вытекает из первого в силу полной непрерывности оператора A в $\Phi = I - A$.

Точно так же, при дословном повторении доказательства, устанавливается подобие *теоремы Брауэра* 3.6.2:

7.4.8. Принцип Шаудера. Вполне непрерывный оператор A , переводящий в себя замкнутый шар $B \subset E$, всегда имеет в B неподвижную точку¹²⁾.

Полезно иметь в виду следующий элементарный результат, замыкающий на себе немало замаскированных ситуаций.

7.4.9. Теорема. В случае $x_0 \in \Omega$ вращение векторного поля $\Phi(x) = x - x_0$ на $\dot{\Omega}$ равно 1.

Что касается вращения *линейного поля* $\Phi = I - A$ с линейным оператором A , то здесь необходим обходной маневр, чтобы обойти использование детерминанта. В \mathbb{R}^n , очевидно,

$$\text{sign det } C = (-1)^\delta, \quad (7.11)$$

¹¹⁾ Нуль $x_0 \in \Omega$ векторного поля $\Phi(x)$ называют *изолированным*, если в достаточно малой окрестности x_0 нет других нулей. Вращение поля $\Phi(x)$ на сферах достаточно малого радиуса с центром в x_0 называют *индексом* x_0 и обозначают $\text{ind}(\Phi, x_0)$.

¹²⁾ Шар в формулировке п. 7.4.8 можно заменить выпуклым замкнутым и ограниченным множеством. Бесконечномерный аналог обобщенной теоремы Брауэра 3.6.3 называют *принципом неподвижной точки Лере—Шаудера*.

где δ — число отрицательных вещественных собственных значений (с учетом кратностей) матрицы C . И это уже годится в качестве основы для обобщения.

7.4.10. Пусть 1 не является собственным значением вполне непрерывного оператора A . Тогда индекс изолированного нуля линейного поля $\Phi = I - A$ определяется равенством

$$\text{ind}(\Phi, 0) = (-1)^\delta, \quad (7.12)$$

где δ — число вещественных собственных значений (с учетом кратностей) оператора A , больших единицы ¹³⁾.

Простой ссылкой на теорему 3.5.7 даже с учетом (7.11) здесь трудно отделаться, хотя при наличии опыта работы с банаховыми пространствами — все очевидно. Тем не менее приведем обоснование. Не столько ради самого результата 7.4.10, сколько для иллюстрации внутренней кухни и повышения бдительности.

◀ Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — все вещественные собственные значения ¹⁴⁾ оператора A , большие единицы, и $P(\lambda_j)$ обозначает коммутирующий с A линейный оператор проектирования на корневое подпространство $E(\lambda_j)$ оператора A , отвечающее λ_j . Оператор

$$P_0 = P(\lambda_1) + \dots + P(\lambda_k)$$

проектирует на подпространство $E_0 = E(\lambda_1) + \dots + E(\lambda_k)$ размерности δ . Сужение A_0 оператора A на E_0 имеет те же собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ с теми же кратностями, а сужение A^0 оператора A на дополнительное к E_0 подпространство E_0^\perp не имеет вещественных собственных значений, больших единицы. Поэтому вполне непрерывная гомотопия

$$\Phi(x, \tau) = x - [2\tau + (1 - \tau)A_0]P_0x - (1 - \tau)A^0P^0x$$

невыврождена на единичной сфере S . Следовательно,

$$\text{ind}(\Phi, 0) = \gamma(\Phi(x, 0), S) = \gamma(\Phi(x, 1), S),$$

что с учетом $\Phi(x, 0) = \Phi(x)$, $\Phi(x, 1) = x - 2P_0x$ и п. 3.5.7 вместе с (7.11) — дает (7.12), поскольку $\gamma(\Phi(x, 1), S)$ совпадает с вращением $\Phi^0(x) = -x$ на единичной сфере δ -мерного подпространства E_0 , равным $(-1)^\delta$. ▶

Об индексах нулей нелинейного поля можно судить, очевидно, по линейным приближениям, если те невырождены.

¹³⁾ Охватывается в том числе ситуация $\delta = 0$.

¹⁴⁾ «Почему их конечное число», и на другие сопутствующие вопросы — ответы следует искать в спектральной теории [4, т. 5].

7.4.11. Пусть вполне непрерывный оператор A дифференцируем по Фреше в некоторой окрестности точки x_0 , и единица не является собственным значением оператора $A'(x_0)$. Тогда x_0 — изолированный нуль поля $\Phi = I - A$ и

$$\text{ind}(\Phi, x_0) = (-1)^\delta,$$

где δ — число вещественных собственных значений (с учетом кратностей) оператора $A'(x_0)$, больших единицы.

Отметим, наконец, полезный технический результат, в некотором роде обобщающий лемму Лере—Шаудера на общий случай банахова пространства E . Пусть $E_0 \subset E$ — замкнутое подпространство, $\Omega \subset E$ — ограниченная область, $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$. Пусть вполне непрерывный оператор A на $\bar{\Omega}$ принимает значения в подпространстве E_0 и не имеет неподвижных точек на $\bar{\Omega}$.

7.4.12. Пусть A_0 — сужение оператора A на $\bar{\Omega}_0$. Тогда

$$\gamma(I - A, \bar{\Omega}) = \gamma(I - A_0, \bar{\Omega}_0).$$

7.5. Невырожденные продолжения

Аналог теоремы 4.5.4 в общем случае банахова пространства E требует для своего обоснования больше усилий, но остается все же простым фактом.

7.5.1. Теорема. *Вполне непрерывный оператор $A : M \rightarrow E$, где $M \subset E$ — замкнутое множество, может быть продолжен на все E со значениями в замкнутой выпуклой оболочке $\overline{\text{co}}A(M)$.*

Принципиальную роль в теории вращения играет обобщение теоремы Хопфа 4.5.1:

7.5.2. *Если вполне непрерывное поле $\Phi(x)$ невырождено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной связной области Ω и $\gamma(\Phi, \dot{\Omega}) = 0$, то $\Phi = I - A$ можно продолжить до вполне непрерывного поля, невырожденного на замыкании $\bar{\Omega}$. \triangleright*

Другая, более знаменитая теорема Хопфа 4.5.2 также обобщается на вполне непрерывные векторные поля¹⁵⁾.

7.5.3. Теорема Хопфа. *Если невырожденные на сфере $S \subset E$ вполне непрерывные векторные поля имеют одинаковое вращение, то они гомотопны.* \triangleright

Обобщается и теорема 4.5.5:

7.5.4. Теорема. *Вполне непрерывный оператор $A(x)$, не имеющий неподвижных точек на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной связной области Ω , такой что $E \setminus \dot{\Omega}$ имеет две компоненты связности, всегда можно продолжить на все E до вполне непрерывного оператора с одной неподвижной точкой в Ω .* \triangleright

Если же $E \setminus \dot{\Omega}$ имеет k компонент связности, то $A(x)$ можно продолжить на все E до вполне непрерывного оператора с $k - 1$ неподвижными точками, лежащими «по одной» в ограниченных компонентах связности.

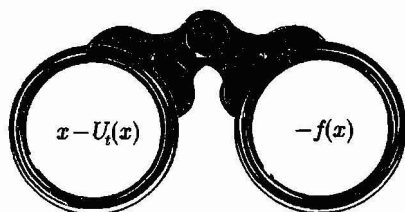
Специфика теории вращения, как видно из перечисленного, заключается в «необходимости» изложения конечномерного варианта теории с последующим повторением сказанного после замены \mathbb{R}^n на E , — что навеивает скуку. Избежать повторений можно, но это не так легко, да и едва ли целесообразно, ибо при унификации теряется наглядность, каковой и так недостает.

7.6. Теоремы родственности

Одну и ту же задачу бывает удобно рассматривать с разных точек зрения. Скажем, динамическая система $\dot{x} = -f(x)$, с одной стороны, характеризуется правой частью $-f(x)$, с другой — векторным полем $x - U_t(x)$, где U_t — оператор сдвига. Теорема 6.3.1 обнаруживает равенство вращений этих полей, что позволяет по ходу дела переμεтнуться на более удобный путь¹⁶⁾.

¹⁵⁾ Равно как и ее более общая версия 4.5.3.

¹⁶⁾ Вычисляя вращение $-f(x)$ и переходя к использованию неявно заданного векторного поля $x - U_t(x)$.



Правда, если речь идет о существовании равновесия, то переход от $f(x)$ к рассмотрению оператора сдвига особых преимуществ не дает. Скорее наоборот, втягивает в пучину размытых представлений. Зачем искать неподвижные точки оператора U_t , заданного окольным путем, когда проще иметь дело с нулями векторного поля $f(x)$, «данного в ощущениях». Но вот если стоит вопрос о наличии авто-, либо вынужденного колебания, то смотреть на задачу через призму

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{или} \quad \dot{x} = f(x, t)$$

уже малоэффективно. Приходится анализировать неподвижные точки U_T . Правда, теорема 6.3.1¹⁷⁾ тут чаще всего не спасает, — потому что условие «невозвращаемости» трудно проверить.

Но есть другой выход. Интегрируя

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, \tau)$$

по τ от нуля до t , можно перейти от $\dot{x} = f(x, t)$ к интегральному уравнению на $[0, T]$:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau, \quad (7.13)$$

уходя при этом от неудобств, связанных с использованием оператора сдвига, но попадая в бесконечномерные функциональные пространства, где от геометрической наглядности ничего не остается. Зато уравнение (7.13) явно задано и, кроме того, исчезает

¹⁷⁾ О совпадении вращений $\gamma(-f(x, 0), \hat{\Omega})$ и $\gamma(x - U_T(x), \hat{\Omega})$.



потребность в единственности решений соответствующей задачи Коши, и в нелокальной продолжимости траекторий, что освобождает руки для достижения главной цели.

Рассмотренные модели задачи о периодических колебаниях, несмотря на разные декорации, имеют общий стержень, дающий основание рассчитывать на совпадение свойств. Вот один из принципиальных результатов на эту тему.

7.6.1. Теорема. Пусть U_t — оператор сдвига по траекториям системы $\dot{x} = f(x, t)$ с T -периодической правой частью; и области $\Upsilon \subset \mathbb{R}^n$ и $\Omega \subset C[0, T]$ имеют одинаковую сердцевину¹⁸⁾. Тогда

$$\gamma(I - U_T, \dot{\Upsilon}) = \gamma(I - F, \dot{\Omega}),$$

где F — оператор, определяемый правой частью (7.13). \triangleright

Результаты типа 7.6.1 называют теоремами родственности, и детали здесь довольно громоздки [10]. Поэтому в общеобразовательных целях тема едва ли заслуживает подробного изучения. Но общие представления достойны внимания, ибо расширяют горизонты осведомленности, что снимает напряжение.

Проблематика в целом объемиста не только частностями обоснований, но и многообразием обстоятельств. Возьмем, например, задачу об автоколебаниях в системе $\dot{x} = f(x)$, эквивалентную поиску таких значений параметра λ , при которых уравнение $\dot{y} = \lambda f(y)$ имеет решения периода 1 (см. раздел 5.4). Интегральный вариант постановки задачи

$$y(t) = y(1) + \lambda \int_0^t f(y(s)) ds$$

¹⁸⁾ Области $\Upsilon \subset \mathbb{R}^n$ и $\Omega \subset C[0, T]$ имеют одинаковую сердцевину, если поля $I - U_T$ и $I - F$ невырождены, соответственно, на $\dot{\Upsilon}$ и $\dot{\Omega}$ и если множество лежащих в Υ начальных значений T -периодических решений уравнения $\dot{x} = f(x, t)$ совпадает с множеством значений при $t = 0$ всех T -периодических решений этого уравнения, лежащих в Ω .

функционализацией параметра сводится к интегральному уравнению

$$x(t) = x(1) + \lambda(x) \int_0^t f(x(s)) ds, \quad (7.14)$$

и при «надлежащем выборе» функционала $\lambda(x)$ периодическое решение $x^*(t)$ уравнения (7.14) в $C[0, T]$, отвечающее изолированному циклу Γ , также будет изолированным. Общее для допустимых $\lambda(x)$ значение индекса $\text{ind}(I - A, x^*)$, где оператор A определяется правой частью (7.14), — называют функциональной характеристикой $\mu(\Gamma)$ цикла Γ . Теорема родственности, пробивающая здесь туннель между \mathbb{R}^n и $C[0, T]$, дает равенство¹⁹⁾ $\mu(\Gamma)$

$$\text{ind } \Gamma = \mu(\Gamma).$$

7.7. Итерации операторов

Под крыло теории родственности попадает множество ситуаций. Одна из них: необходимость изучения уравнения

$$x = BAx, \quad (7.15)$$

тогда как выгоднее было бы иметь дело с уравнением

$$y = ABu, \quad (7.16)$$

где $A : E_1 \rightarrow E_2$, $B : E_2 \rightarrow E_1$ — вполне непрерывные операторы, E_1, E_2 — банаховы пространства.

Конечно, всякое решение $x^* \in E_1$ уравнения $x = BAx$ дает решение уравнения $y^* = Ax^* \in E_2$ уравнения $y = ABu$. И наоборот, любое решение $y^* \in E_2$ второго уравнения дает решение — первого $x^* = By^* \in E_1$.

¹⁹⁾ Подробности в [10].



Однако дело не только в решениях, но и в обстоятельствах. Поэтому интерес часто представляет взаимосвязь вращений векторных полей

$$I - BA \quad \text{и} \quad I - AB.$$

В частности, в определенных условиях²⁰⁾

$$\gamma(I - BA, \dot{\Omega}_1) = \gamma(I - AB, \dot{\Omega}_2), \quad (7.17)$$

где $\Omega_1 \subset E_1$, $\Omega_2 \subset E_2$ — ограниченные области.

7.7.1. Теорема. Пусть области $\Omega_1 \subset E_1$ и $\Omega_2 \subset E_2$ имеют одинаковую сердцевину²¹⁾ относительно уравнений $x = BAx$ и $y = ABu$. Тогда справедливо равенство (7.17).

◀ На замыкании области $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ рассмотрим векторные поля

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) &= \{x - By, y - Ax\}, \\ \Psi_2(x, y) &= \{x - BAx, y - Ax\}, \\ (x, y) &\in E = E_1 + E_2, \end{aligned}$$

каковые невырождены на $\dot{\Omega}$, как нетрудно убедиться, и непротивоположно направлены, ибо направлены противоположно могут быть лишь при условии $y = Ax$. Но в таких точках (x, y) векторы $\Psi_1(x, y)$ и $\Psi_2(x, y)$ одинаковы. Поэтому поля $\Psi_1(x, y)$ и $\Psi_2(x, y)$ гомотопны на Ω . Следовательно,

$$\gamma(\Psi_1, \dot{\Omega}) = \gamma(\Psi_2, \dot{\Omega}). \quad (7.18)$$

Пусть множество $A(\bar{\Omega}_1)$ лежит в шаре U_2 , и $U = \Omega_1 \times U_2$. Поскольку поле Ψ_2 не имеет нулей на $U \setminus \Omega$, то (п. 7.4.3) к (7.18) можно присовокупить

$$\gamma(\Psi_2, \dot{\Omega}) = \gamma(\Psi_2, \dot{U}).$$

²⁰⁾ В (7.17) $x - BAx$ и $y - ABu$ — это векторные поля в разных пространствах, первое — в E_1 , второе — в E_2 .

²¹⁾ Под *одинаковой сердцевиной* в данном случае подразумевается взаимно однозначное соответствие между множеством $X \subset \Omega_1$ корней (7.15) и множеством $Y \subset \Omega_2$ корней (7.16), т. е. $AX = Y$, $BY = X$. Иначе говоря, все «образы» Y корней $X \subset \Omega_1$ попадают в Ω_2 , а все «прообразы» X корней $Y \subset \Omega_2$ лежат в Ω_1 .

Далее, поле Ψ_2 гомотопно на \dot{U} полю

$$\Psi_3(x, y) = \{x - BAx, y\},$$

опять-таки в силу непротивоположной направленности, и потому

$$\gamma(\Psi_3, \dot{U}) = \gamma(\Psi_2, \dot{U}).$$

А поскольку Ψ_3 является прямой суммой поля $I - BA$ и тождественного поля I , то с учетом теоремы 7.4.12 и установленной цепочки гомотопий

$$\gamma(\Psi_3, \dot{U}) = \gamma(I - BA, \dot{\Omega}_1) = \gamma(\Psi_1, \dot{\Omega}).$$

Равенство $\gamma(I - AB, \dot{\Omega}_2) = \gamma(\Psi_1, \dot{\Omega})$ устанавливается аналогично. ►

В спектр приложений теоремы 7.7.1 попадает изучение векторных полей с итерациями операторов, о чем уже шла речь в разделе 5.6 при обсуждении принципа Браудера 5.6.1, который остается справедливым при замене \mathbb{R}^n банаховым пространством E в предположении полной непрерывности оператора A .

Итак, рассмотрим вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi_p(x) = I - A^p x, \quad x \in E.$$

Если $A^p \xi = \xi$, то

$$A\xi, A^2\xi, \dots, A^{p-1}\xi \quad (7.19)$$

также являются неподвижными точками оператора A^p , что очевидно: $A^p A\xi = A A^p \xi = A\xi$ и т. д. При этом если $A\xi \neq \xi$ и число p простое, то все точки (5.17) различны. А если ξ — изолированный нуль поля $A^p(x)$, то и все нули (7.19) изолированы.

7.7.2. Теорема. Если ξ — изолированный нуль поля Φ_p , то

$$\text{ind}(\Phi_p, A\xi) = \text{ind}(\Phi_p, \xi). \quad (7.20)$$

◀ Теорема 7.7.1 быстро приводит к необходимому выводу. В качестве Ω_1 и Ω_2 возьмем малые окрестности точек соответственно ξ и $A\xi$. Настолько малые, чтобы точка ξ была единственным нулем поля Φ_p на $\bar{\Omega}_1$, а $A(\xi)$ — единственным нулем Φ_p на $\bar{\Omega}_2$. Области Ω_1 и Ω_2 имеют одинаковую сердцевину по отношению к полям $I - AB$ и $I - BA$, где $B = A^{p-1}$, что влечет за собой (7.21), т. е.

$$\gamma(\Phi_p, \dot{\Omega}_1) = \gamma(\Phi_p, \dot{\Omega}_2). \quad (7.21)$$

А это и есть (7.20), с учетом выбора Ω_1 и Ω_2 . ►

Непосредственное следствие теоремы 7.7.2:

7.7.3. Теорема. Если ξ — изолированный нуль поля Φ_p , то

$$\text{ind}(\Phi_p, \xi) = \text{ind}(\Phi_p, A\xi) = \dots = \text{ind}(\Phi_p, A^{p-1}\xi). \quad (7.22)$$

Отметим вскользь следующий результат, который существенно дополняет принцип Браудера.

7.7.4. Пусть p — простое число, $A(X) \subset \Omega$, где X — множество нулей поля Φ_p , лежащих в замыкании $\bar{\Omega}$ ограниченной области Ω , причем поле Φ_p невырождено на $\dot{\Omega}$. Тогда

$$\gamma(I - A^p, \dot{\Omega}) = \gamma(I - A, \dot{\Omega}) \pmod{p}. \quad \triangleright \quad (7.23)$$

Глава 8

Нелинейные операторы в пространствах с конусом

*The whole of science is nothing more
than a refinement of everyday thinking.*

Einstein

Отображения в *полуупорядоченных пространствах* выпали из системы общего математического образования по недоразумению. Потому что там не только все хорошо решается, но туда помещается чуть ли не весь нелинейный анализ, если смотреть, разумеется, оптимально прищурившись.



8.1. Полуупорядоченность и авансы

Теория положительных операторов бегло рассматривалась в [4, т. 2] с акцентом на дифференциальных уравнениях в \mathbb{R}^n , и в [4, т. 5] с ориентацией на линейные операторы. Здесь проблематика излагается с более широким размахом. Поскольку тематика остается малоизвестной, излагать ее приходится максимально просто, что само по себе не так плохо. Но в данном случае ясность и акценты особенно важны, если думать не столько о «наполнении сосудов», сколько о «зажигании факелов».

8.1.1. Теорема [4, т. 2]. Пусть матрица $A(t)$ внедиагонально положительна¹⁾, $b(t) > 0$, и система

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

¹⁾ При $i \neq j$ все $a_{ij}(t) \geq 0$.

имеет единственное положение равновесия $x^* > 0$. Тогда x^* асимптотически устойчиво. \triangleright

Если присмотреться — результат фантастический. Устойчивость обеспечивается «почти без предположений».

Вот другая изюминка [4, т. 5]. *Линейный положительный оператор в банаховом пространстве, полуупорядоченном воспроизводящим конусом, — непрерывен*²⁾.

Еще один «пустячок»³⁾:

8.1.2. *Многочлен $p(z)$ гурвицев в том случае, когда строго положительны коэффициенты и $p(z)$, и многочлена $q(z)$, имеющего корнями все суммы пар корней многочлена $p(z)$.* \triangleright

Ясное дело, может показаться, что речь идет о специфических задачах. Но за счет универсальных трюков в рамки «положительности» удастся поместить очень широкие классы задач. Например, с помощью специальной полуупорядоченности получаются самые общие утверждения о свойствах матриц произвольного вида (раздел 8.6).

Основной фокус рассматриваемых методов заключается, конечно, не в положительных числах, а в полуупорядоченности, вводимой с помощью конусов.

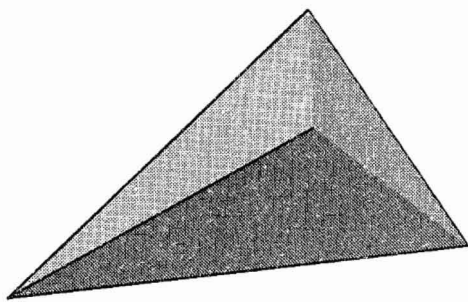
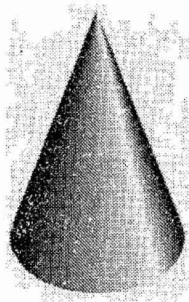
8.1.3. *Замкнутое выпуклое множество K в банаховом пространстве E называется конусом, если для любого ненулевого $x \in K$*

$$\lambda x \in K \text{ при } \lambda \geq 0 \text{ и } \lambda x \notin K \text{ при } \lambda < 0.$$

В \mathbb{R}^n конусы бывают круглые, граненые и другие. Частный случай: *неотрицательный ортант \mathbb{R}_+^n* — вариант наиболее популярный. Любой конус в \mathbb{R}^n представляет собой объединение совокупности уходящих в бесконечность лучей, выходящих из нуля и протыкающих замкнутое выпуклое ограниченное множество, не содержащее нуля.

²⁾ О разрывных линейных функциях см. [4, т. 12].

³⁾ *Sirelitz Sh. // Amer. Math. Monthly. 1977. 84. 542–544.*

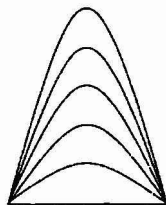


Каков бы ни был конус, элементы $x \in K$ принято называть *положительными*, ибо

$$x \in K \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0,$$

а знак \geq трактуется как *больше*.

Простейшими примерами конусов в бесконечномерных пространствах служат конусы неотрицательных функций K_+ в C и L_p ; конус выпуклых на $[0, 1]$ функций с нулевыми концами, $x(0) = x(1) = 0$.



Конус определяет в E полуупорядоченность: $x \geq y$ (равносильно $y \leq x$), если $x - y \in K$. Такие неравенства, как и обычные, можно умножать на неотрицательные числа; складывать одноименные; переходить к пределам; $x \leq y$, $y \leq z$ влечет за собой $x \leq z$ (свойство транзитивности); а из $x \leq y$, $y \leq x$ следует $x = y$.

Набор свойств знака \geq существенно богаче. Например, ограниченная монотонная ($x_{k+1} \geq x_k$) числовая последовательность $\{x_k\}$ обязательно сходится. Но последовательность, монотонная в смысле $x_{k+1} \geq x_k$, будь она ограниченной хоть по норме, хоть по конусу (все $x_k \leq z$), — в общем случае не обязана сходиться, хотя в \mathbb{R}^n сходится независимо от конуса.

Положительные и монотонные операторы. Оператор $f : E \rightarrow E$ называется *положительным*, если $f(K) \subset K$; и *монотонным*, если

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

В случае полуупорядоченности \mathbb{R}^n неотрицательным ортантом, линейный оператор положителен, когда у определяющей его матрицы неотрицательны все

элементы. Интегральные операторы при полуупорядоченности с помощью K_+ положительны при положительном ядре.

Для введения полуупорядоченности используются десятки разновидностей конусов. Их описание подчеркнуло бы сразу богатство и разнообразие теории, но для первого знакомства это едва ли допустимо. На простейших разновидностях все же необходимо остановиться, чтобы дальше не отвлекаться.

Нормальные и правильные конусы. Конус K называется *нормальным*, если справедлива лемма о трех милиционерах: из сходимости крайних последовательностей в $v^k \leq x^k \leq w^k$ к общему пределу следует сходимость x^k к тому же пределу.

В общем случае это не так. Конус K_+ неотрицательных функций в пространстве C^1 (непрерывно дифференцируемых функций) свойством нормальности не обладает. Все конусы в \mathbb{R}^n нормальны. Конусы K_+ в C и L_p также нормальны.

Для проверки нормальности могут использоваться различные критерии. Например, конус нормален, если из $0 \leq x \leq y$ следует $\|x\| \leq N(K)\|y\|$, и константа $N(K)$ не зависит от x и y .

Нормальность равносильна отсутствию в K элементов, которые «почти противоположно направлены». Точнее, конус K нормален в том случае, когда существует такое $\delta > 0$, что $\|e_1 + e_2\| \geq \delta$ для любых единичных векторов $e_1, e_2 \in K$.

Конус, содержащий внутренние точки, считается *телесным*. Конус называется *воспроизводящим*, если каждый элемент $x \in E$ представим в виде

$$x = u - v \quad (u, v \in K).$$

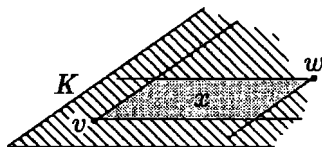
Всякий телесный конус является воспроизводящим. Конус K_+ в C телесен, в L_p — воспроизводящий, но не телесный.

Наконец, конус K называется *правильным*, если любая неубывающая ограниченная по конусу последовательность сходится по норме, и — *вполне правильным*, если сходятся по норме неубывающие ограниченные по норме последовательности.

Правильные конусы нормальны, вполне правильные — правильны. Телесный правильный конус вполне правилен. Конус K_+ в L_p вполне правилен. Все конусы в \mathbb{R}^n правильные.

8.2. Специфика монотонности

При рассмотрении монотонных операторов часто используются так называемые *конусные отрезки* $\langle v, w \rangle$: множества элементов x , заключенных между v и w , т. е. $v \leq x \leq w$.



- Если конус нормален, конусный отрезок $\langle v, w \rangle$ ограничен по норме. (?)

В случае монотонного оператора из $v \leq x \leq w$ следует $f(v) \leq f(x) \leq f(w)$. Поэтому конусный отрезок $\langle v, w \rangle$ оператором f отображается в себя как только $f(v) \geq v, f(w) \leq w$. Соединяя сказанное с *принципом Шаудера* 7.4.8, получаем следующий тривиальный в контексте, но весьма полезный результат.

8.2.1. Теорема. Пусть конус K нормален. Тогда вполне непрерывный оператор f , удовлетворяющий неравенствам

$$f(v) \geq v, \quad f(w) \leq w \quad (v \leq w),$$

имеет на конусном отрезке $\langle v, w \rangle$ неподвижную точку⁴⁾,

$$x^* = f(x^*).$$

Тут, конечно, трудно не упомянуть знаменитый *принцип Биркгофа—Тарского*, гарантирующий существование неподвижной точки у монотонного оператора, не обязательно непрерывного. Факт уникален, но больше как феномен, а не как инструмент. Доказательство в простейшей ситуации \mathbb{R}^n есть в [4, т. 1], максимально общий результат сформулирован и доказан в [4, т. 5].

⁴⁾ Выпуклость конусного отрезка очевидна, замкнутость и ограниченность обеспечивается нормальностью конуса, задающего полуупорядоченность.

Монотонные операторы широко применяются для организации вычислений с помощью *итерационного процесса*

$$x^{k+1} = f(x^k),$$

каковой в случае монотонного оператора f обладает следующим характерным свойством. Если точка x^0 под действием f идет вперед (назад), т. е. $f(x^0) \geq x^0$ ($\leq x^0$), то вся последовательность x^k монотонно возрастает (убывает),

$$x^0 \leq \dots \leq x^k \leq \dots \quad (x^0 \geq \dots \geq x^k \geq \dots),$$

что сразу вытекает из применения к неравенству $x^k \geq x^{k-1}$ оператора f , в результате чего $x^{k+1} = f(x^k) \geq f(x^{k-1}) = x^k$ и т. д.

Если теперь есть две точки $v^0 \leq w^0$, «меньшая» из которых идет вперед, а «бóльшая» — назад, то для

$$v^{k+1} = f(v^k), \quad w^{k+1} = f(w^k)$$

имеем

$$v^0 \leq \dots \leq v^k \leq \dots \leq w^k \leq \dots \leq w^0.$$

8.2.2. Обе последовательности v^k , w^k оказываются монотонными и ограниченными по конусу, и в случае непрерывного f и правильного конуса сходятся к неподвижным точкам⁵⁾

$$v^* = f(v^*), \quad w^* = f(w^*).$$

А если f имеет лишь одну неподвижную точку x^* , то любая последовательность x^k процесса $x^{k+1} = f(x^k)$ при условии $v^0 \leq x^0 \leq w^0$ оказывается зажата в тиски⁶⁾:

$$v^k \leq x^k \leq w^k, \tag{8.1}$$

и потому тоже сходится, $x^k \rightarrow x^*$. \triangleleft

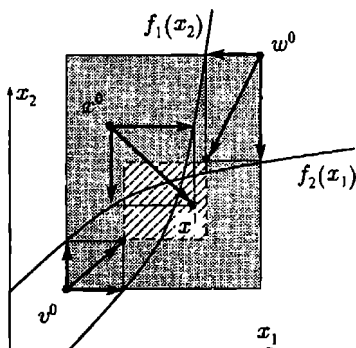
⁵⁾ Таким образом, в случае правильного конуса теорема 8.2.1 справедлива и без предположения о полной непрерывности f , и даже без предположения о непрерывности f , но это требует отдельного доказательства — см. [4, т. 5].

⁶⁾ Поскольку применение монотонного оператора f к неравенству $v^0 \leq x^0 \leq w^0$ дает $f(v^0) \leq f(x^0) \leq f(w^0)$, т. е. $v^1 \leq x^1 \leq w^1$. Индуктивное повторение процесса приводит к (8.1).

В случае

$$f(x) = \{f_1(x_2), f_2(x_1)\}$$

первый итерационный шаг изображен на рисунке справа. Конусный отрезок $\langle v^0, w^0 \rangle$ на первом шаге переходит в $\langle v^1, w^1 \rangle$ — заштрихованный прямоугольник. Любая точка x_0 после первой итерации попадает в $\langle v^1, w^1 \rangle$.



8.3. Феномен инвариантности конуса

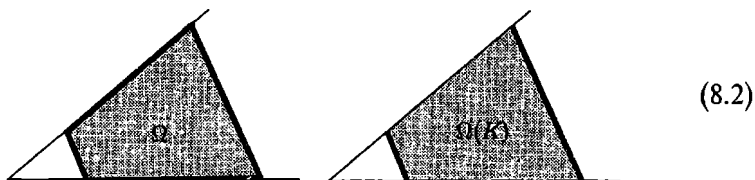
Положительный оператор f , как следует из определения, оставляет конус инвариантным, $f(K) \subset K$. Как ни малозначительно на первый взгляд сие обстоятельство — из него многое следует. Достаточно вспомнить теорию *положительных матриц* [4, т. 3] и вообще — *позитивных линейных операторов* [4, т. 5]. Ощутимы выгоды и для нелинейного анализа.

Одно лишь понятие *вращения положительного поля* свидетельствует о внушительном потенциале явления $f(K) \subset K$. Фабула здесь такова. Пусть $\Omega(K)$ обозначает ограниченную область в конусе $K \subset E$, т.е. $\Omega(K)$ открыто в K , но не обязательно в E . Причем $\Omega(K)$ содержит вершину конуса — нуль E . Очевидно, всегда можно указать такую область $\Omega \subset E$, что

$$\Omega \cap K = \Omega(K), \quad \dot{\Omega} \cap K = \dot{\Omega}(K).$$

Далее положительное вполне непрерывное векторное поле $I - f$, определенное и невырожденное на $\dot{\Omega}(K)$, продолжается с сохранением положительности и полной непрерывности на $\dot{\Omega}$, после чего $\gamma(I - f, \dot{\Omega})$ объявляется *вращением положительного поля* $I - f$ на $\dot{\Omega}(K)$ с фиксацией обозначения $\gamma(I - f, \dot{\Omega}(K))$. Корректность определения легко устанавливается.

На первый взгляд, хитрость невелика. Достаточно ясно, что после некоей подготовительной работы можно раз и навсегда избавиться от необходимости гомотопировать отображения на той части границы $\dot{\Omega}$, рис. (8.2), которая является одновременно частью границы конуса.



Такой эффект в самом деле достигим, что немаловажно с точки зрения удобства и экономии — см. далее. Но преимущества вращения положительного поля этим не исчерпываются. Скажем, конус может быть не телесным (конусы K_+ в L_p). В этом случае обычное вращение $I - f$ на границе $\Omega(K)$ вообще не определено.

Индексы положительного оператора. Стандартная техника изучения положительных операторов ориентируется на анализ их поведения на пересечениях $S(\tau)$ сфер $S_\tau = \{x : \|x\| = \tau\}$ с конусом K , как правило, в окрестности нуля и на бесконечности, т. е. при малых и больших значениях $\tau > 0$.

8.3.1. Определение. Положительные вполне непрерывные операторы f_0 и f_1 называются положительно гомотопными на множестве Γ , если существует такой положительный вполне непрерывный (по совокупности переменных) оператор $H(x, t)$,

$$H : \Gamma \times [0, 1] \rightarrow K \setminus \{0\},$$

что

$$H(x, 0) \equiv f_0(x), \quad H(x, 1) \equiv f_1(x), \quad x \in \Gamma,$$

причем $H(x, t) \neq x$ при $x \in \Gamma, t \in [0, 1]$.

8.3.2. Пусть оператор f положителен и вполне непрерывен на конусе K . Если при достаточно малых (достаточно больших) $\tau > 0$ оператор f положительно гомотопен на $S(\tau)$ оператору $H_0(x) \equiv 0$,

то индекс f в нуле (на бесконечности) равен ⁷⁾ 1,

$$\text{ind}(f, 0) = 1 \quad (\text{ind}(f, \infty) = 1).$$

Если же f положительно гомотопен на $S(r)$ оператору ⁸⁾

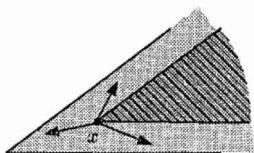
$$H_r(x) \equiv rh_0, \quad h_0 \in K, \quad \|h_0\| > 1,$$

то $\text{ind}(f, 0) = 0$ ($\text{ind}(f, \infty) = 0$).

Вот простые достаточные условия.

8.3.3. Пусть при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x \in K$, $x \neq 0$, положительный вполне непрерывный оператор f удовлетворяет условию

$$f(x) \not\geq x. \quad (8.3)$$

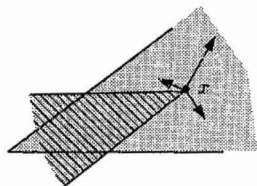


Тогда $\text{ind}(f, 0) = 1$ ($\text{ind}(f, \infty) = 1$).

◀ Положительной гомотопией от f к $H_0(x) \equiv 0$ может служить, например, $H(x, t) = tf(x)$. Невырожденность $tf(x) \not\geq x$ вытекает из (8.3). ▶

8.3.4. Пусть при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x \in K$, $x \neq 0$, положительный вполне непрерывный оператор f удовлетворяет условию

$$f(x) \not\leq x. \quad (8.4)$$



Тогда $\text{ind}(f, 0) = 0$ ($\text{ind}(f, \infty) = 0$).

⁷⁾ В соответствии с данным выше определением положительного векторного поля $x - f(x)$. Но так как связь с общей схемой мы здесь не прослеживаем, декларации в данном случае трактуются как определения.

⁸⁾ Заметим, все операторы $H_\beta(x) \equiv \beta h_0$ ($\beta \geq r$) на $S(r)$ положительно гомотопны друг другу.

◀ Оператор f положительно гомотопен на $S(r)$ оператору $H_\beta(x) \equiv \beta h_0$, где β достаточно велико. Положительной гомотопией служит

$$H(x, t) = tf(x) + (1-t)\beta h_0.$$

Невырожденность $H(x, t)$ вытекает из следующего рассуждения. Предположим противное. Тогда для любой последовательности $\beta_k \rightarrow \infty$ можно указать последовательности $x^k \in S(r)$ и $t_k \in [0, 1]$, такие что

$$x^k - t_k f(x^k) = (1-t_k)\beta_k h_0. \quad (8.5)$$

Но так как $x^k \in S(r)$ и оператор f вполне непрерывен, без ограничения общности можно считать $f(x^k) \rightarrow z$ — в противном случае можно перейти к сходящейся подпоследовательности. Отсюда вытекает ограниченность последовательности $x^k - t_k f(x^k)$, а значит, и $(1-t_k)\beta_k h_0$, что в свою очередь позволяет считать

$$(1-t_k)\beta_k \rightarrow \gamma \geq 0, \quad t_k \rightarrow 1.$$

Из (8.5) теперь следует, что последовательность x^k сходится к некоторому $x^0 \in S(r)$, причем

$$x^0 - f(x^0) = \gamma h_0,$$

т. е. $f(x^0) \leq x^0$. Но это противоречит (8.4). ▶

8.3.5. Пусть $\text{ind}(f, \infty) = 1$, где f положительный вполне непрерывный оператор. Тогда у f существует в конусе неподвижная точка.

◀ Условие $\text{ind}(f, \infty) = 1$ гарантирует существование положительной гомотопии $H(x, t)$ на $S(R)$ (R достаточно велико) от $f(x)$ к $H_0(x) \equiv 0$. Пусть, для определенности,

$$H(x, 0) \equiv 0, \quad H(x, 1) \equiv f(x).$$

Введем в рассмотрение оператор (везде $x \in K$)

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } \|x\| \leq R, \\ \frac{\|x\|}{R} H\left(\frac{Rx}{\|x\|}, 2 - \frac{\|x\|}{R}\right), & \text{если } R \leq \|x\| \leq 2R, \\ 0 & \text{если } \|x\| \geq 2R. \end{cases}$$

Очевидно, оператор \hat{f} вполне непрерывен и преобразует конус K в свою компактную часть. Поэтому из принципа Шаудера следует существование у \hat{f} неподвижной точки $x^* \in K$. Для завершения доказательства остается убедиться в том, что $\|x^*\| \leq R$. Возможность $\|x^*\| \geq 2R$ очевидным образом отпадает. А если $R \leq \|x^*\| \leq 2R$, то $H(x^0, t_0) = x^0$, где

$$t_0 = 2 - \frac{\|x^*\|}{R}, \quad x^0 = \frac{Rx^*}{\|x^*\|},$$

что противоречит невырожденности гомотопии $H(x, t)$. ▶

Довольно часто в приложениях уравнение

$$x = f(x)$$

имеет нулевое решение, которое с содержательной точки зрения тривиально, и вопрос заключается в существовании ненулевых (нетривиальных) решений. Таково уравнение

$$x(t) = \int_{\Omega} G(t, s)\varphi[x(s), s] ds$$

при условии $\varphi(0, s) \equiv 0$.

8.3.6. Пусть индексы в нуле и на бесконечности положительного вполне непрерывного оператора f не равны,

$$\text{ind}(f, 0) \neq \text{ind}(f, \infty).$$

Тогда у f существует в конусе ненулевая неподвижная точка.

◀ Допустим, $\text{ind}(f, 0) = 0$, $\text{ind}(f, \infty) = 1$. В силу $\text{ind}(f, 0) = 0$ существует положительная гомотопия $H(x, t)$ на $S(r)$ (r достаточно мало), связывающая $f(x)$ и $H_0(x) \equiv rh_0$ ($\|h_0\| > 1$). Введем в рассмотрение оператор (везде $x \in K$)

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} \frac{r}{2}h_0, & \text{если } \|x\| \leq \frac{r}{2}, \\ \frac{\|x\|}{r}H\left(\frac{rx}{\|x\|}, \frac{2\|x\|}{r} - 1\right), & \text{если } \frac{r}{2} \leq \|x\| \leq r, \\ f(x), & \text{если } \|x\| \geq r. \end{cases}$$

Так как $\widehat{f}(x) = f(x)$ при достаточно больших по норме $x \in K$, то $\text{ind}(\widehat{f}, \infty) = \text{ind}(f, \infty) = 1$, и по теореме 8.3.5 существует неподвижная точка $x^* \in K$ оператора \widehat{f} . Остается показать, что $\|x^*\| \geq r$. Возможность $\|x^*\| \leq \frac{r}{2}$ заведомо исключена. Если же $\frac{r}{2} \leq \|x^*\| \leq r$, то $H(x^0, t_0) = x^0$, где

$$t_0 = \frac{2\|x^*\|}{r} - 1, \quad x^0 = \frac{rx^*}{\|x^*\|},$$

что противоречит невырожденности гомотопии $H(x, t)$.

Другой возможный вариант $\text{ind}(f, 0) = 1$, $\text{ind}(f, \infty) = 0$ сводится к предыдущему с помощью перехода к оператору⁹⁾

$$F(x) = \|x\|^2 f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \quad x \in K, \quad x \neq 0,$$

так как $\text{ind}(F, 0) = 0$, $\text{ind}(F, \infty) = 1$. Действительно, положим $R = 1/r$, и r достаточно мал. Пусть $H_1(x, t)$ — положительная гомотопия на $S(r)$ от $f(x)$ к $H_0(x) \equiv 0$, а $H_2(x, t)$ — положительная гомотопия на $S(R)$ от $f(x)$ к $H_R(x) \equiv Rh_0$ ($h_0 \in K$, $\|h_0\| > 1$). Тогда $\|x\|^2 H_1(x/\|x\|^2, t)$ будет положительной гомотопией на $S(R)$ от F к H_0 , а $\|x\|^2 H_2(x/\|x\|^2, t)$ — положительной гомотопией на $S(r)$ от F к H_r .

Поэтому из уже доказанного следует существование ненулевой неподвижной точки $x_0 \in K$ у оператора F . Тогда $x^* = x_0/\|x_0\|^2$ — неподвижная точка оператора f . ►

8.4. Антураж текущего фарватера

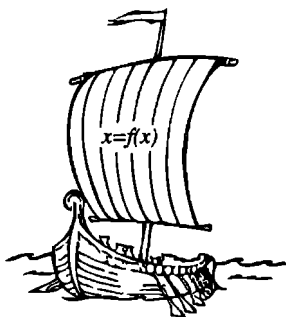
В текущем фарватере более-менее очевидны следующие результаты, каковые полезно додумать¹⁰⁾.

8.4.1. Оператор f называют *сжатием конуса*, если при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x \in K$, $x \neq 0$

$$f(x) \ll x \quad (f(x) \succ x),$$

и наоборот, — *растяжением конуса*, если при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x \in K$, $x \neq 0$

$$f(x) \succ x \quad (f(x) \ll x).$$



8.4.2. Пусть положительный вполне непрерывный оператор f является сжатием или растяжением конуса. Тогда f имеет в K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку x^* .

Безусловно, это просто более слабый вариант теоремы 8.3.6. Но факт 8.4.2 легче запоминается и легче проверяется¹¹⁾. И это бывает важно, чтобы теорема не погибла под грузом максимальной

⁹⁾ Выворачивающему $f(x)$ наизнанку.

¹⁰⁾ Подробности и дополнительные детали есть в [14].

¹¹⁾ Если имеет место.

общности. Внятные и удобные упрощения часто дают больший эффект, чем тяжеловесные обобщения.

8.4.3. Условия

$$f(x) \not\geq x, \quad f(x) \not\leq x$$

на одной и той же поверхности $S(\tau)$ несовместимы. \triangleleft

8.5. Операторы сдвига в условиях полуупорядоченности

В случае $\forall x, t: f(x, t) \in K$ оператор сдвига по траекториям

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, t), \end{cases}$$

т. е.

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{8.6}$$

положителен, но это малоинтересная ситуация. Внимания заслуживают системы (8.6), в которых движение не может покинуть конус по более деликатным причинам, каковые в принципе очевидны. Требуется $f(x, t) \geq 0$ как только траектория выходит на границу конуса. Внутри же конуса движение произвольно.

В случае полуупорядоченности с помощью \mathbb{R}_+^n это приобретает форму *внедиагональной положительности* правой части (8.6): если при любых $x \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ и $j = 1, \dots, n$

$$f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n, t) \geq 0.$$

Другими словами, значения $f(x, t)$ при $x > 0$, т. е. $x \in \text{int } K$, не контролируются, но как только x попадает на границу \mathbb{R}_+^n — вектору $f(x, t)$ запрещается быть направленным вовне конуса.

8.5.1. Теорема. Оператор сдвига U_{st} по траекториям внедиагонально положительной системы (8.6) — положителен.

◀ Траектории вспомогательной системы

$$\dot{x} = f(x, t) + \varepsilon \quad (8.7)$$

со строго положительным $\varepsilon > 0$ — не могут выйти из конуса, ибо в граничных точках направлены строго внутрь \mathbb{R}_+^n . Поэтому оператор сдвига по траекториям (8.7) положителен. При $\varepsilon \rightarrow 0$ траектории (8.7) переходят в траектории (8.6). ▶

По горячим следам разделяемся сразу и с монотонностью. Правая часть (8.6) называется *внедиагонально монотонной*, если при любых $x \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ и $j = 1, \dots, n$

$$f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n, t) \geq f_j(y_1, \dots, y_{j-1}, 0, y_{j+1}, \dots, y_n, t).$$

Проще говоря, внедиагональная монотонность означает монотонность роста каждой $f_i(x, t)$ по любой чужой координате x_j , $j \neq i$. В гладком случае это равносильно $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0$, $j \neq i$.

8.5.2. Теорема. *Оператор сдвига U_{st} по траекториям внедиагонально монотонной системы (8.6) — монотонен.*

◀ Если $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют, соответственно,

$$\dot{x} = f(x, t) \quad \text{и} \quad \dot{y} = f(y, t), \quad t \geq s,$$

то $z(t) = x(t) - y(t)$ удовлетворяет системе

$$\dot{z} = f(y + z, t) - f(y, t) \quad (8.8)$$

с внедиагонально положительной правой частью. Теорема 8.5.1 гарантирует $z(t) = x(t) - y(t) \geq 0$ при условии $x(s) \geq y(s)$. ▶

Теоремы 8.5.1 и 8.5.2 при изучении внедиагонально положительных и внедиагонально монотонных систем (8.6) позволяют переходить на стандартный язык теории положительных и монотонных операторов, избавляя от необходимости строить новую «внедиагональную» теорию. Вот как это работает.

Пусть система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) \quad (8.9)$$

описывает динамику химического реактора, x_i обозначает концентрацию i -го реагента. Если система замкнута, то движение происходит в плоскости $S(1)$:

$$\sum_i x_i = 1 \quad (100 \%).$$

В силу инвариантности $S(1)$ оператор сдвига U_t по траекториям (8.9) не может удовлетворять на $S(1)$ ни условию $U_t(x) \geq x$, ни условию $U_t(x) \leq x$. И тогда в силу п. 8.4.3 система обязана иметь равновесие¹²⁾. Конечно, тут можно было бы обойтись *теоремой Брауэра*. Вот менее очевидный пример.

Пусть (8.9) описывает динамику в модели сосуществования n биологических видов, x_i — численность популяции i -го вида. Правдоподобно выглядит следующее предположение. Если суммарная численность $\sum_i x_i$ достаточно мала (велика), то численность хотя бы одного вида возрастает (убывает). Отсюда следует $U_t(x) \leq x$ при малых по норме x , и $U_t(x) \geq x$ при больших по норме x . Но тогда существование равновесия, периодического режима в случае (8.6), вытекает из *теоремы 8.4.2 о сжатии конуса*.

Для овладения инструментом полезно осмыслить простые вопросы.

8.5.3. Если траектория $x(t)$ системы (8.6) с монотонным¹³⁾ оператором сдвига начинает двигаться вперед (назад), то она все время будет двигаться вперед (назад). \triangleleft

- В системе с монотонным оператором сдвига из $x \in \langle v, w \rangle$ следует

$$v(t) \leq x(t) \leq w(t), \quad (8.10)$$

где $v(t)$, $x(t)$, $w(t)$ — траектории (8.6), выходящие из точек

$$v(s) = v, \quad x(s) = x, \quad w(s) = w \quad (s \leq t).$$

¹²⁾ Либо периодическое решение, если вместо (8.9) система подчиняется уравнению (8.6) с периодической правой частью.

¹³⁾ Из-за внидиагональной монотонности правой части или по другим причинам, например, в случае *матричного конуса*, см. далее.

Если дополнительно

$$f(v, s) \geq 0, \quad f(w, s) \leq 0,$$

то $v(t) \geq v$, $w(t) \leq w$, причем $v(t)$ монотонно растет, а $w(t)$ — убывает, т. е. конусный отрезок $\langle v, w \rangle$ инвариантен: $v \leq x(t) \leq w$, если $x(s) \in \langle v, w \rangle$.

8.5.4. Если система с монотонным оператором сдвига имеет на инвариантном конусном отрезке $\langle v, w \rangle$ единственное равновесие x^* , то из монотонности роста $v(t)$ и ограниченности, в силу $v(t) \leq w(t) \leq w$, — следует $v(t) \rightarrow x^*$. По аналогичной причине $w(t) \rightarrow x^*$. И тогда из сходимости крайних функций в (8.10) к одному пределу — следует

$$x(t) \rightarrow x^* \quad \text{при любом} \quad x(0) \in \langle v, w \rangle,$$

а также асимптотическая устойчивость x^* . \triangleleft

Выделим также более-менее очевидный в рассматриваемом окружении результат.

8.5.5. Теорема¹⁴⁾. Если

$$\dot{x} \geq f(x, t), \quad \dot{y} \leq f(y, t), \quad x(0) \geq y(0),$$

и отображение $f(x, t)$ внедиагонально монотонно, то

$$x(t) \geq y(t) \quad \text{при} \quad t > 0. \quad \triangleleft$$

8.6. Конус положительно определенных матриц

Нижеследующий пример показывает широкие возможности использования полуупорядоченности.

Полуупорядочим пространство E симметричных матриц конусом K неотрицательно определенных матриц, и рассмотрим оператор $H: R^n \rightarrow E$,

$$H(x) = xx^T,$$

¹⁴⁾ Теорема 8.5.5 обобщает хорошо известный и широко применяемый в скалярном случае результат, где условие внедиагональной монотонности теряет смысл и потому исключается.

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n],$$

$$H = \begin{bmatrix} x_1 x_1 & x_1 x_2 & \dots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2 x_2 & \dots & x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n x_1 & x_n x_2 & \dots & x_n x_n \end{bmatrix}.$$

Производная $H(x)$ вдоль траекторий линейной системы

$$\dot{x} = Ax$$

равна

$$\frac{d}{dt}(xx^T) = xx^T A^T + Axx^T,$$

т. е.

$$\dot{H} = HA^T + AH. \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11) линейно и может быть записано в стандартной форме

$$\dot{h} = \bar{A}h,$$

где h это вытянутая в столбик матрица H ,

$$h = [h_{11}, \dots, h_{n1}, \dots, h_{1n}, \dots, h_{nn}]^T,$$

а матрица \bar{A} записывается с помощью *кронекерова произведения* [4, г. 3]:

$$\bar{A} = I \otimes A + A^T \otimes I,$$

причем \bar{A} невырождена в том случае, когда A не имеет таких собственных значений, что $\lambda_i + \lambda_j = 0$ при любых i, j , в том числе при $i = j$.

Таким образом, с решением (8.11) нет проблем, надо лишь озаботиться переводом с кронекерова языка на обычный. В итоге получается¹⁵⁾

$$H(t) = e^{At} H(0) e^{A^T t}. \quad (8.12)$$

¹⁵⁾ В (8.12) для упрощения обозначений полагается $H(t) = H(x(t))$.

Можно обойтись и без этих хлопот, убеждаясь подстановкой, что (8.12) является решением (8.11), и ссылаясь на единственность решения линейного диффура.

Из $H_1(0) \geq H_2(0)$ следует

$$\begin{aligned} H_1(t) - H_2(t) &= e^{At} H_1(0) e^{A^T t} - e^{At} H_2(0) e^{A^T t} = \\ &= e^{At} [H_1(0) - H_2(0)] e^{A^T t} \geq 0, \end{aligned}$$

что означает *монотонность оператора сдвига по траекториям матричного дифференциального уравнения* (8.11), а заодно и *положительность*.

Для асимптотической устойчивости нулевого равновесия системы с монотонным оператором сдвига достаточно (см. п. 8.5.4), чтобы нашлась точка $H_0 \in \text{int } K$, идущая под действием оператора сдвига назад. При этом точка $-H_0 \in -\text{int } K$ автоматически идет вперед, и конусный отрезок $\langle H_0, -H_0 \rangle$ будет инвариантным для оператора сдвига по траекториям (8.11), в силу монотонности. Наличие такого H_0 в данном случае гарантирует разрешимость в $\text{int } K$ уравнения

$$H_0 A^T + A H_0 = -G_0 \quad (8.13)$$

при любом $G_0 \in \text{int } K$, каковое представляет собой известное *уравнение Ляпунова*¹⁶⁾, дающее необходимые и достаточные условия гурвицевости матрицы A .

Обратим внимание, что полуупорядоченность и монотонность привели к необходимым и достаточным условиям асимптотической устойчивости линейных систем *общего вида*, без каких бы то ни было ограничений на структуру матриц. Так что конусная идеология не так узка и одностороння, как иногда кажется. Вопрос лишь в том, как преобразовать задачу и подобрать конус, чтобы вскрыть спрятанную монотонность.

¹⁶⁾ В котором обычно полагают $G_0 = I$. Решением (8.13) в случае гурвицевой матрицы A является $H_0 = \int_0^{\infty} e^{At} G_0 e^{A^T t} dt$.

8.7. Гетеротонные отображения

Расширять диапазон приложений можно, не только манипулируя выбором подходящего конуса, но и препарировав надлежащим образом изучаемый оператор. В результате практически всегда можно добиться трансформации задачи в «монотонную». Вот один из естественных способов.

8.7.1. *Отображение $f : E \rightarrow E$ называется гетеротонным, если оно представимо в диагональном виде*

$$f(x) = \widehat{f}(x, x),$$

причем сопутствующий оператор $\widehat{f}(v, w)$ монотонно растет по v и убывает по w .

Сопутствующий оператор \widehat{f} действует из $E \times E$ в E . При желании ситуацию можно дожать до чисто монотонной следующим образом. Вводится тильда-оператор

$$\widetilde{f} : E \times E \rightarrow E \times E,$$

сопоставляющий паре элементов (v, w) пару $(\widehat{f}(v, w), \widehat{f}(w, v))$. Легко видеть, что если теперь пространство $E \times E$ пар (v, w) полуупорядочить конусом $\{K, -K\}$, где конус K лежит в первом экземпляре E , а $-K$ — во втором, то $\widetilde{f}(v, w)$ будет монотонным¹⁷⁾ по конусу $\{K, -K\}$. В результате изучение $f(x)$ сводится к исследованию монотонного оператора $\widetilde{f}(v, w)$ в $E \times E$.

Идея диагонального расщепления оператора заслуживает быть осмысленной на примерах.

- На практике широко распространены операторы в \mathbb{R}^n

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

¹⁷⁾ Полуупорядоченность в $E \times E$ с помощью конуса $\{K, -K\}$ означает:

$$(v', w') \succ (v, w) \Leftrightarrow v' \geq v, w' \leq w.$$

у которых каждая компонента f_i по каждой координате x_j либо возрастает, либо убывает¹⁸⁾. Такие операторы называются *гетерогенными*. Сопутствующий оператор в этом случае может быть получен заменой в компонентах f_i переменных x_j на v_j либо w_j , в зависимости от того, возрастает или убывает f_i по j -му аргументу. Вот как это выглядит. Пусть

$$\begin{cases} f_1(x) = 1 - e^{-x_1} + \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}, \\ f_2(x) = \frac{\ln(1+x_2)}{x_1} + \sqrt[3]{\frac{x_2}{x_1}}. \end{cases} \quad (8.14)$$

Сопутствующим будет оператор \widehat{f} с компонентами

$$\begin{cases} \widehat{f}_1(v, w) = 1 - e^{-v_1} + \sqrt{\frac{v_1}{w_2}}, \\ \widehat{f}_2(v, w) = \frac{\ln(1+v_2)}{w_1} + \sqrt[3]{\frac{v_2}{w_1}}. \end{cases} \quad (8.15)$$

В общем случае удобно ввести две матрицы $P = [p_{ij}]$ и $Q = [q_{ij}]$, где $q_{ij} = 1 - p_{ij}$, а $p_{ij} = 1$, если f_i растет по j -му аргументу, и $p_{ij} = 0$ в противном случае. Сопутствующий оператор записывается тогда как

$$\widehat{f}(v, w) = f(Pv + Qw).$$

- Такой же фокус можно проделать с интегральным оператором

$$Gx(t) = \int_{\Omega} G(t, s)x(s) ds, \quad (8.16)$$

если $G(t, s)$ представить в виде разности двух положительных функций,

$$G(t, s) = P(t, s) - Q(t, s),$$

что всегда можно сделать. Сопутствующим оператором будет

$$\widehat{G}(v(t), w(t)) = \int_{\Omega} [P(t, s)v(s) - Q(t, s)w(s)] ds. \quad (8.17)$$

Аналогично можно представить оператор суперпозиции $f(t, x)$:

$$f[t, x(t)] = p[t, x(t)] - q[t, x(t)], \quad (8.18)$$

где p и q положительные и монотонно возрастающие по второму аргументу функции. Сопутствующим для $f[t, x(t)]$ будет

$$\widehat{f}[t, v(t), w(t)] = p[t, v(t)] - q[t, w(t)]. \quad (8.19)$$

¹⁸⁾ Таков всякий линейный оператор Ax с матрицей произвольной знаковой структуры. Таковы функции избыточного спроса в рыночных моделях, нелинейные связи в моделях сосуществования биологических видов и др.

Объединяя теперь идеи (8.17) и (8.19), легко определить сопутствующий для интегрального оператора Гаммерштейна

$$G[f(x(t))] = \int_{\Omega} G(t, s) f[s, x(s)] ds,$$

как сопутствующий — композиции гетеротонных операторов¹⁹⁾:

$$\widehat{G}(f)(v, w) = \widehat{G}(\widehat{f}(v, w), \widehat{f}(w, v)). \quad (8.20)$$

- В случае оператора f с компонентами

$$\begin{cases} f_1(x) = \operatorname{arctg} x_1 + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \\ f_2(x) = \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{5 + x_1}} + \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{cases} \quad (8.21)$$

уже нельзя сказать, что f_1, f_2 монотонно возрастают или убывают по x_1 или x_2 . Однако идея построения сопутствующего оператора может быть оставлена прежней. Каждое конкретное x_i заменяется на v_i или w_i , в зависимости от того, возрастает или убывает по нему функция f_i . В итоге:

$$\begin{cases} \widehat{f}_1(v, w) = \operatorname{arctg} v_1 + \sqrt{\frac{v_2}{w_1}}, \\ \widehat{f}_2(v, w) = \sqrt{\frac{v_1 + v_2}{5 + w_1}} + \sqrt{\frac{v_1}{w_2}}. \end{cases} \quad (8.22)$$

- Для монотонного $f(x)$ в качестве сопутствующего можно взять $\widehat{f}(v, w) = f(v)$, для антимонотонного (убывающего по x): $\widehat{f}(v, w) = f(w)$.

Легкость образования сопутствующих операторов, конечно, настораживает. Почти все отображения оказываются гетеротонными, а значит, и монотонными в $E \times E$. И если бы монотонность в голом виде обеспечивала выигрыш, жизнь упростилась бы повсеместно. Однако монотонность сама по себе мало что дает.

Если на прицеле, например, неподвижные точки, то желательно наличие инвариантного конусного отрезка, роль которого теперь играет *сильно инвариантный* конусный отрезок $\langle v, w \rangle$, определяемый неравенствами

$$\widehat{f}(v, w) \geq v, \quad \widehat{f}(w, v) \leq w. \quad (8.23)$$

¹⁹⁾ Формула (8.20) образования сопутствующего оператора годится для композиции любых гетеротонных отображений.

Неравенства (8.23) обеспечивают обычную инвариантность конусного отрезка $\langle (v, w), (w, v) \rangle$ для тильда-оператора $\tilde{f}(v, w)$.

Роль предположения о единственности неподвижной точки теперь играет единственная разрешимость системы уравнений

$$\hat{f}(v, w) = v, \quad \hat{f}(w, v) = w, \quad (8.24)$$

означающая единственность неподвижной точки у оператора $\hat{f}(v, w)$, обеспечивающую (см. п. 8.2.2) сходимость итерационной процедуры

$$(v^{k+1}, w^{k+1}) = \tilde{f}(v^k, w^k),$$

т. е.

$$\begin{cases} v^{k+1} = \hat{f}(v^k, w^k), \\ w^{k+1} = \hat{f}(w^k, v^k), \end{cases} \quad (8.25)$$

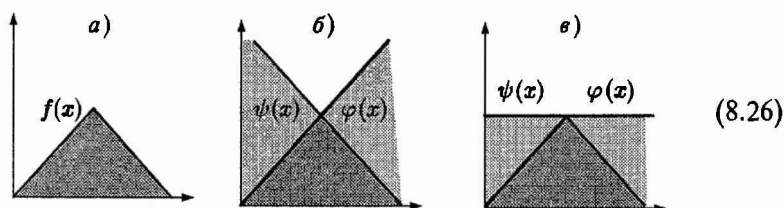
к неподвижной точке x^* оператора f ,

$$v^k \rightarrow x^*, \quad w^k \rightarrow x^*, \quad x^* = f(x^*).$$

Из сказанного ясно, что к выбору сопутствующего оператора (всегда неоднозначного) необходимо подходить предусмотрительно. Скажем диагональное расщепление скалярной функции $f(x)$, рис. (8.26) (а), вида

$$f(x) = \min \{ \varphi(x), \psi(x) \},$$

где $\varphi(x)$ монотонно возрастает, а $\psi(x)$ — убывает, может быть образовано с помощью различных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Два варианта изображены на рис. (8.26) (б, в).



Качество сопутствующего оператора

$$\widehat{f}(v, w) = \min \{ \varphi(v), \psi(w) \}$$

будет разным.

8.8. Гетеротонная динамика

Изучение системы уравнений

$$\dot{x} = f(x) - x \quad (8.27)$$

может опираться на *сопутствующую систему*

$$\begin{cases} \dot{v} = \widehat{f}(v, w) - v, \\ \dot{w} = \widehat{f}(w, v) - w, \end{cases}$$

оператор сдвига по траекториям которой \widehat{U}_{ts} будет «половинкой» монотонного оператора

$$\widetilde{U}_{ts}(v, w) = \{ \widehat{U}_{ts}(v, w), \widehat{U}_{ts}(w, v) \},$$

и при выполнении условий (8.23) и единственности решения (8.24) будет существовать единственное на $\langle v, w \rangle$ асимптотически устойчивое равновесие (п. 8.5.4) исходной системы $\dot{x} = f(x) - x$.

Обобщение теоремы 8.5.5:

8.8.1. Пусть оператор $f(x, t)$ гетеротонный, и $\widehat{f}(v, w, t)$ — сопутствующий для него. Тогда из

$$\dot{x} = f(x, t), \quad \dot{v} \geq \widehat{f}(v, w, t), \quad \dot{w} \leq \widehat{f}(w, v, t), \quad v(0) \leq x(0) \leq w(0)$$

следует

$$\forall t > 0 : v(t) \leq x(t) \leq w(t). \quad \triangleleft$$

В тех случаях, когда динамика не укладывается в рамки (8.27) и записывается в форме

$$\dot{x} = f(x),$$

сопутствующую систему надо задавать иначе:

$$\begin{cases} \dot{v} = \widehat{f}(v, w), \\ \dot{w} = \widehat{f}(w, v), \end{cases} \quad (8.28)$$

где *внедиагонально сопутствующий оператор* \widehat{f} отличается от \widehat{f} тем, что в диагональном представлении компонент

$$f_i(x) = \widehat{f}_i(x, x)$$

каждая $\widehat{f}_i(x, x)$ растет по всем x_j (кроме $j = i$) первого векторного аргумента, а по второму векторному аргументу убывает (как обычно).

Оператор сдвига по траекториям (8.28) оказывается *гетеротонным*.

8.9. Супероднородные операторы

Теория гетеротонных операторов [16] довольно ветвиста из-за многообразия обстоятельств — неодинаковые вторичные признаки операторов (типа полной или обычной непрерывности, сильной положительности и др.), вариации предположений, разные пространства и конусы. При этом стержневые идеи во всех случаях одинаковы, и с ними целесообразно знакомиться на фоне простейших декораций, чему удовлетворяет пространство \mathbb{R}^n , полуупорядоченное неотрицательным ортантом \mathbb{R}_+^n .

8.9.1. Монотонный сильно положительный оператор²⁰⁾ $f(x)$ назовем *супероднородным*, если для любых $x > 0$ и $\tau \in (0, 1)$

$$f(\tau x) > \tau f(x), \quad (8.29)$$

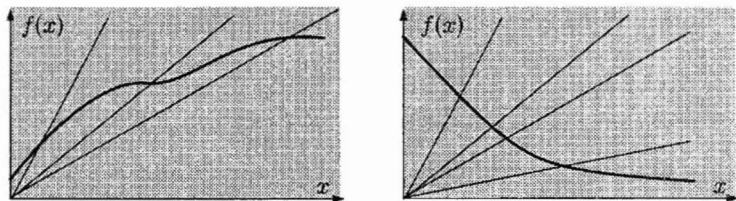
где знак $>$ усиливает \succ , означая: $a > b \Rightarrow a - b \in \text{int } K$.

В рассматриваемом пока случае \mathbb{R}^n , полуупорядоченном ортантом \mathbb{R}_+^n , неравенство $a > b$ означает, что все $a_i > b_i$.

В [9] операторы из п. 8.9.1 называются *вогнутыми*. По инерции эта «псевдовогнутая» терминология сохраняется до сих пор,

²⁰⁾ *Сильно положительным* называют оператор $f(x)$, переводящий ненулевые точки $x \in K$ во внутренние: $f(x) \in \text{int } K$.

хотя изначально было ясно, что название неудачно. Вогнутые скалярные функции неравенством (8.29), конечно, охватываются, но (8.29) покрывает гораздо более широкие классы отображений. В одномерном случае это те функции, которые с любым лучом, выходящим из нуля, пересекаются не более одного раза. Термин



«супероднородность» представляется более адекватным.

Что касается основных свойств супероднородных операторов, то это *единственность ненулевой неподвижной точки x^* , если она существует, и сходимость к x^* итераций*

$$x^{k+1} = f(x^k) \quad (8.30)$$

из любого начального положения $x^0 > 0$, $x^0 \neq 0$.

◀ Сие просто доказывается с помощью метрики Биркгофа

$$\rho(x, y) = \min\{\alpha : e^{-\alpha}x \leq y \leq e^{\alpha}x\} \quad (x, y > 0).$$

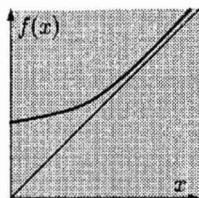
Очевидно,

$$\begin{cases} f(x) > f(e^{-\rho(x,y)}y) > e^{-\rho(x,y)}f(y), \\ f(y) > f(e^{-\rho(x,y)}x) > e^{-\rho(x,y)}f(x), \end{cases}$$

откуда

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y), \quad (8.31)$$

что и влечет за собой вышесказанное. ▶



Требование (8.29) недотягивает до кондиций, обеспечивающих существование неподвижной точки. Рисунок слева дает пример скалярной функции, которая удовлетворяет всем условиям определения 8.9.1, но уравнение $x = f(x)$ решений не имеет.

Усиление (8.29) до

$$f(\tau x) \geq \tau^\theta f(x), \quad \theta \in (0, 1), \quad (8.32)$$

уже гарантирует наличие ненулевой неподвижной точки, поскольку выкладки, ведущие к (8.31), в условиях (8.32) дают²¹⁾

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \theta \rho(x, y),$$

т. е. f удовлетворяет принципу сжимающих отображений на внутренности конуса, которая по метрике Биркгофа является полным пространством. Однако надо иметь в виду, что в практических задачах часто выполняется лишь (8.29), но не (8.32). Скажем, в случае $f(x) = Ax + b$, где A положительная матрица и $b > 0$, на (8.32) нельзя рассчитывать, но (8.29) справедливо — и этого хватает для положительной разрешимости $x = Ax + b$.

Надежды охватить гетеротонный случай супероднородностью типа 8.9.1 принципиально обречены на провал²²⁾.

8.9.2. Гетеротонный оператор $f(x)$ при условии

$$v, w \geq 0 \Rightarrow \hat{f}(v, w) > 0$$

и

$$\hat{f}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}(v, w) \quad (\tau \in (0, 1); v, w > 0) \quad (8.33)$$

называется супероднородным²³⁾.

Подставляя в (8.33) $v' = \tau v$, $w' = \frac{1}{\tau} w$, получаем обратное неравенство

$$\hat{f}\left(\frac{1}{\tau} v', \tau w'\right) < \frac{1}{\tau} \hat{f}(v', w') \quad (\tau \in (0, 1); v', w' > 0).$$

²¹⁾ С поправками вида $f(x) \geq f(e^{-\rho(x,y)} y) \geq e^{-\theta \rho(x,y)} f(y)$.

²²⁾ Потому что концы с концами не сходятся. Во-первых, для положительности тильда-оператора требуется, чтобы один аргумент в паре (v, w) был положителен, другой — отрицателен. Но тогда рассыпается главная идея «осмотревшись в $E \times E$, вернуться на диагональ $v = w = x$ ». Во-вторых, если попытаться обойтись без положительности, условие (8.29) для тильда-оператора приводит к несовместимым неравенствам.

²³⁾ Гетеротонные операторы (8.14)–(8.15), (8.21)–(8.22) супероднородны.

Поэтому

$$\begin{cases} f(x) = \widehat{f}(x, x) > \widehat{f}(e^{-\rho(x,y)}y, e^{\rho(x,y)}y) > e^{-\rho(x,y)}f(y), \\ f(y) = \widehat{f}(y, y) > \widehat{f}(e^{-\rho(x,y)}x, e^{\rho(x,y)}x) > e^{-\rho(x,y)}f(x), \end{cases}$$

откуда, как и в чисто монотонном случае, вытекает (8.31) с теми же последствиями для f из п. 8.9.2, а именно: единственность ненулевой неподвижной точки x^* , если таковая существует, и сходимость к x^* итераций (8.30) из любого начального положения $x^0 \geq 0$, $x^0 \neq 0$.

Усиление (8.33) до

$$\widehat{f}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau^\theta \widehat{f}(v, w) \quad (v, w > 0, \theta \in (0, 1)) \quad (8.34)$$

обеспечивает существование неподвижной точки $x^* > 0$.

К сказанному можно многое добавить. Правда, это дополнения второго порядка малости. Скажем, в случае (8.34) сжимает по метрике Биркгофа не только сам оператор f , но и его тильда-оператор \widehat{f} . Как следствие, сходятся также итерационные процессы (8.25), каковые зажимают снизу и сверху вычислительную процедуру²⁴⁾ (8.30), если начинаются в вершинах *сильно инвариантного* конусного отрезка $\langle v^0, w^0 \rangle$, который заведомо существует. Все это сохраняет силу, если (8.34) ослабить до (8.33), но оговорить существование неподвижной точки $x^* > 0$.

С выходом в функциональные пространства теория многократно расслаивается. Обстоятельства варьируются в широких диапазонах, и в один саквояж не помещаются. Новости появляются в самом начале. Целесообразным, а иногда необходимым оказывается образование *пространства* E_{u_0} из u_0 -измеримых элементов $x \in E$, зажатых в тиски:

$$-\gamma u_0 \leq x \leq \gamma u_0, \quad (8.35)$$

где $u_0 \in K$ — изначально фиксированный ненулевой элемент. Наименьшее в (8.35) $\gamma > 0$ называется u_0 -нормой x , $\|x\|_{u_0}$.

При $u_0(t) \equiv 1$ и полуупорядоченности с помощью K_+ , в случае C^1 пространство E_{u_0} совпадает с C^1 , а u_0 -норма — с нормой C . В случае L_p

²⁴⁾ Давая тем самым оценку последовательных приближений (8.30).

пространство E_{u_0} совпадает с L_∞ , наконец, в случае C «ничего не меняется», $E_{u_0} = C$. Если же $u_0(t) = t(1-t)$, то E_{u_0} представляет собой совокупность таких функций $x(t)$, что $|x(t)| \leq \gamma t(1-t)$, $\gamma > 0$.

Далее вводится множество $K(u_0)$ ненулевых $x \in K$, удовлетворяющих неравенству $\alpha u_0 \leq x \leq \beta u_0$, при некоторых $\alpha, \beta > 0$, и требование $f : K \rightarrow \text{int } K$ в пп. 8.9.1, 8.9.2 заменяется на $f : K \rightarrow K(u_0)$, поскольку чистой положительности оператора бывает недостаточно, как недостаточно неотрицательности матрицы, скажем, для *теоремы Перрона* [4, т. 3].

В дальнейшем ветвлении исследования определенную роль начинают играть свойства конуса (нормальность, правильность), взаимосвязь u_0 -нормы с исходной нормой пространства E , полная непрерывность оператора (но не всегда). Связное изложение есть в [16].

Определенный интерес представляют различные достаточные условия супероднородности, которую, в частности, может обеспечивать тем или иным образом усиленное неравенство

$$\widehat{f}(v, w) - \widehat{f}'_v(v, w)v + \widehat{f}'_w(v, w)w \geq 0, \quad (8.36)$$

где $\widehat{f}'_v(v, w)$, $\widehat{f}'_w(v, w)$ — производные Фреше.

В случае \mathbb{R}^n , полуупорядоченного телесным конусом, в (8.36) достаточно \geq поменять на $>$. А для гетерогенного оператора в \mathbb{R}^n соответствующее неравенство, обеспечивающее супероднородность, приобретает вид

$$\forall i : f_i(x) - \sum_j \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| x_j > 0.$$

8.10. K -системы

В разделе K обозначает некоторый телесный конус в \mathbb{R}^n . Отображения предполагаются непрерывными.

8.10.1. Определение. Оператор $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется K -отображением, если граничные точки K он не переводит во внутренние, т. е. в $\text{int } K$.

8.10.2. *Отображения f_0 и f_1 называются K -гомотопными на множестве $\Gamma \subset K$, если существует такая невырожденная деформация (гомотопия) $H(x, \lambda)$,*

$$H : \Gamma \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

что

$$H(x, 0) \equiv f_0(x), \quad H(x, 1) \equiv f_1(x)$$

и $H(x, \lambda)$ при любом $\lambda \in [0, 1]$ является K -отображением.

Отношение K -гомотопии разбивает K -отображения на классы эквивалентности, позволяя тем самым строить топологическую теорию с ориентацией на изучение нулей векторного поля. Избегая идеологических повторений, ограничимся наиболее результативным срезом.

8.10.3. *Пусть K -отображение f при достаточно малых (достаточно больших) $r > 0$ K -гомотопно на пересечениях $S(r)$ сфер $S_r = \{x : \|x\| = r\}$ с конусом K — оператору²⁵⁾*

$$H_r(x) \equiv x - r h_0, \quad h_0 \in K, \quad \|h_0\| > 1.$$

В этом случае говорят, что K -индекс оператора f в нуле (на бесконечности) равен нулю, и пишут

$$\text{ind}_K(f, 0) = 0 \quad (\text{ind}_K(f, \infty) = 0).$$

8.10.4. Теорема. *Пусть f — K -отображение и $\text{ind}_K(f, \infty) \neq 0$. Тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет положительное решение $x^* > 0$.*

8.10.5. Теорема. *Пусть K -индексы в нуле и на бесконечности не равны,*

$$\text{ind}_K(f, 0) \neq \text{ind}_K(f, \infty).$$

Тогда $f(x) = 0$ имеет ненулевое положительное решение $x^* > 0$.

Теоремы 8.10.4, 8.10.5 (см. [14]), вообще говоря, голословны, поскольку ненулевые индексы не были определены. Однако в русле теории вращения

²⁵⁾ Заметим, что все операторы $H_r(x)$ при $r \geq r$ K -гомотопны друг другу.

непрерывных, и тем более положительных, векторных полей — легко понять, о чем идет речь²⁶). Например, $\text{ind}_K(f, \cdot) = 1$, если f на $S(\tau)$ K -гомотопно тождественному отображению.

К сожалению, удобные критерии оценки K -индексов типа сжатия и растяжения конуса (теорема 8.4.2) в данном случае не работают. Но удобства сохраняются в случае полуупорядоченности с помощью \mathbb{R}_+^n , и *внедиагональной отрицательности* оператора f , определяемой как

$$f_j(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n) \leq 0$$

при любых $x \geq 0$, и $j = 1, \dots, n$. В этом случае f заведомо является K -отображением.

8.10.6. *Внедиагонально отрицательный оператор f назовем K -сжатием конуса, если при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x \in K$, $x \neq 0$*

$$f(x) \leq 0 \quad (f(x) \geq 0),$$

и наоборот, — K -растяжением конуса, если при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x \in K$, $x \neq 0$

$$f(x) \geq 0 \quad (f(x) \leq 0).$$

8.10.7. *Пусть внедиагонально отрицательный оператор f является сжатием или растяжением конуса. Тогда f имеет по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку $x^* > 0$. \triangleleft*

Сюда можно приплюсовать также упрощение теоремы 8.10.4.

8.10.8. Теорема. *Пусть внедиагонально отрицательный оператор f при достаточно больших по норме $x \in K$, либо при $x \in S(\tau)$ для некоторого $\tau > 0$, удовлетворяет условию*

$$f(x) \leq 0.$$

Тогда $f(x) = 0$ имеет положительное решение $x^ > 0$. \triangleleft*

Конечно, если бы затея с K -отображениями конструктивно сводилась лишь к внедиагонально отрицательным операторам, с

²⁶ См. хотя бы доказательства теорем 8.3.5, 8.3.6.

последних и надо было начинать, минуя декорации²⁷⁾. Однако K -индексы считаются и в общем случае. Если, скажем, при достаточно малых (достаточно больших) по норме $x > 0$ K -отображение имеет положительное ахиллесово направление h_0 ($f(x) \neq \mu h_0$ при любых $\mu > 0$), то

$$\text{ind}_K(f, 0) = \text{ind}_K(f, \infty) = 0.$$

Ситуация

$$\text{ind}_K(f, 0) = \text{ind}_K(f, \infty) = 1 \quad (8.37)$$

несколько сложнее, но и она разруливается так или иначе.

Но самое главное — это аппаратная роль. K -отображения оказываются той «средой», в которой можно деформировать, скажем, внедиагонально отрицательные операторы, не меняя топологических свойств.

8.10.9. Теорема. Если гомотопия $H(x, \lambda)$ внедиагонально монотонна при любом $\lambda \in [0, 1]$, то свойство асимптотической устойчивости равновесия сохраняется при деформации.

◀ В контексте раздела 8.5 ясно, что внедиагональная монотонность $H(x, \lambda)$ влечет за собой обычную монотонность оператора сдвига по траекториям $\dot{x} = H(x, \lambda)$. Далее, необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости нулевого равновесия является свойство A° : в $\text{int } \mathbb{R}_+^n$ существует точка, идущая под действием оператора сдвига назад, и точка в $\text{int } \mathbb{R}_-^n$, идущая под действием оператора сдвига вперед. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить инвариантность условия A° по отношению к внедиагонально монотонным деформациям.

Последние сохраняют K -индекс, причем для асимптотически устойчивого равновесия любой системы $\dot{x} = F(x)$

$$\text{ind}_K(-F, 0) = 1. \quad (8.38)$$

Из (8.38) следует, что отображение $-F(x)$ не может иметь ахиллесова направления, т. е. для любого $h \in \mathbb{R}_+^n$ можно указать такую точку $x \in \mathbb{R}_+^n$, что $-F(x) = \mu h$ ($\mu > 0$). Если взять $h \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$, то в силу внедиагональной монотонности точка x , в которой $-F(x) = \mu h$, также принадлежит внутренности неотрицательного ортанта. Но

$$F(x) = -\mu h, \quad h \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$$

²⁷⁾ Хотя как сказать, см. ниже.

означает, что точка $x \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$ под действием оператора сдвига идет назад. Наличие точки $x \in \text{int } \mathbb{R}_+^n$, идущей под действием оператора сдвига вперед, устанавливается аналогично. ►

8.11. Теоремы о накрытиях и неравенства

Пусть $f'(0)$ и $f'(\infty)$ обозначают производные K -отображения f в нуле и на бесконечности, и $K = \mathbb{R}_+^n$.

В определении (5.3) матрицы $f'(\infty)$ к $\|x\| \rightarrow \infty$ целесообразно добавить требование $x \in K$, что ослабит условия дифференцируемости f на бесконечности. В этом случае отображение f естественно трактовать как *асимптотически линейное по конусу*.

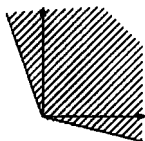
Если f непрерывно дифференцируемо и является K -отображением, то $f'(0)$ и $f'(\infty)$ — также K -отображения, и наоборот. Поэтому в естественных предположениях индексы $\text{ind}_K(f, 0)$ и $\text{ind}_K(f'(0), 0)$ совпадают²⁸⁾. То же самое можно сказать и об индексах на бесконечности.

Линейные K -отображения, в свою очередь, оказываются тесно связаны с положительной обратимостью.

8.11.1. Теорема. Матрица A положительно обратима²⁹⁾ в том случае, когда Ax является K -отображением, и уравнение $Ax = y$ имеет положительное решение хотя бы при одном $y > 0$.

◀ Доказательство совсем просто. Множество $A\mathbb{R}_+^n$ есть конус, и если Ax является K -отображением, возможны лишь два варианта³⁰⁾. Либо

$$\mathbb{R}_+^n \subset A\mathbb{R}_+^n,$$



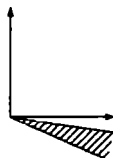
²⁸⁾ K -индексы, как топологические характеристики, не меняются при достаточно малых возмущениях оператора.

²⁹⁾ То есть уравнение $Ax = y$ имеет положительное решение $x \geq 0$ при любом положительном $y > 0$.

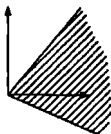
³⁰⁾ Иначе найдется граничная точка $x \in \mathbb{R}_+^n$, переходящая внутрь \mathbb{R}_+^n .

либо

$$\mathbb{R}_+^n \cap A\mathbb{R}_+^n = \emptyset.$$



В первом случае $Ax = y$ разрешимо при любом $y > 0$, т.е. A положительно обратима. Во втором случае у $Ax = y$ положительных решений при $y > 0$ вообще

нет. В ситуации  матрица A не может быть K -отображением. ►

Нелинейное накрытие конуса \mathbb{R}_+^n , т.е. положительная разрешимость уравнения

$$f(x) = y \quad (8.39)$$

при любом $y \geq 0$, обеспечивается близкими по духу условиями.

8.11.2. Теорема. Если K -отображение f удовлетворяет условию

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty, \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \quad (8.40)$$

и $\text{ind}_K(f, \infty) \neq 0$, то уравнение (8.39) положительно разрешимо при любом $y \in \mathbb{R}_+^n$.

◀ Возьмем любое $y > 0$. В силу (8.40) при достаточно больших по норме $x > 0$ векторы $f(x)$ и $f(x) - y$ не могут быть противоположно направлены. Поэтому на $S(R)$ их связывает невырожденная гомотопия

$$H(x, \lambda) = f(x) - \lambda y,$$

каковая при любом $\lambda \in [0, 1]$ является K -отображением, если уж f таково. Следовательно,

$$\text{ind}_K(f - y, \infty) = \text{ind}_K(f, \infty) \neq 0.$$

Далее остается сослаться на теорему 8.10.4. ►

Результат 8.4.3 в отношении положительного оператора о несовместимости условий $f(x) \not\geq x$, $f(x) \not\leq x$ на одной и той же поверхности $S(r)$ мог быть сформулирован в эквивалентной форме о разрешимости неравенств. Вот аналог для K -отображений.

8.11.3. Если $\text{ind}_K(f, \infty) \neq 0$, то неравенство $f(x) > 0$ разрешимо в \mathbb{R}_+^n . Более того, для любого ненулевого $y > 0$ уравнение $f(x) = \mu y$ положительно разрешимо при некотором $\mu > 0$. \triangleleft

В случае внедиагонально отрицательного оператора, в частности, положительная разрешимость неравенства $f(x) > 0$ вытекает (теорема 8.10.8) из условия $f(x) \ll 0$ при достаточно больших по норме $x \in \mathbb{R}_+^n$.

8.12. Универсальные P -системы

Вернемся к P -отображениям, определенным в разделе 3.8 как

$$f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\},$$

которые не обращают знак ни одного ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}_+^n$, т. е. для любого ненулевого $x \geq 0$ найдется такой индекс j , что

$$x_j \cdot f_j(x) > 0.$$

Затрапезное определение оживает в системах «действия — результаты». Действия x_i обеспечивают свои положительные результаты

$$y_i = f_i(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0),$$

но могут пагубно влиять на чужие y_j . Поэтому из-за побочных влияний совокупный результат $y = f(x)$ может оказаться частично отрицательным.

Иногда P -отображение устроено так, что строго положительных результатов можно добиться, не используя всех действий. Другими словами, $f(x) > 0$ при $x \geq 0$, но не $x > 0$. Содержательно это отвечает избыточности набора действий. Если же набор действий неизбыточен, то $f(x)$ — K -отображение. Причем независимо от того, является ли $f(x)$ — P -отображением. Просто неизбыточность равносильна K -свойству, и могла бы использоваться вместо определения 8.10.1 (в случае $K = \mathbb{R}_+^n$).

Но самой по себе неизбыточности еще недостаточно для положительной разрешимости $f(x) > 0$. Дополнительно требуется что-нибудь вроде $\text{ind}_K(f, \cdot) \neq 0$. Однако если K -отображение является еще и P -отображением, то уже ничего больше не требуется. Положительная разрешимость неравенства $f(x) > 0$ гарантируется теоремой 3.8.1 Карамардиана:

Неравенство $f(x) > 0$ с P -отображением $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ всегда положительно разрешимо.

◀ В предположении противного f является K -оператором. Но тогда f K -гомотопна на $S(r)$ (при любом $r > 0$) *внедиагонально отрицательному* отображению

$$x \otimes f(x) = \{x_1 f_1(x), \dots, x_n f_n(x)\}.$$

K -гомотопией может служить $H(x, t)$ с компонентами

$$h_i(x_i, t) = f_i(x)(1 - t + tx_i).$$

Из определения P -отображения следует $x \otimes f(x) \ll 0$ на $S(r)$, что влечет за собой $\text{ind}_K(f, \infty) \neq 0$, и теорема 8.11.3 приводит к противоречию с предположением о неразрешимости $f(x) > 0$. ▶

Переменные x_i по-прежнему будем называть действиями, $y_i = f(x)$ — результатами, но теперь будем считать, что x_i могут принимать не только положительные значения, но и отрицательные, причем $f(0) = 0$ и

$$\text{sign } f_i(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0) = \text{sign } x_i,$$

т. е. «при отсутствии помех» каждое действие x_i дает результат y_i того же знака.

Допустим, некоторые y_i надо увеличить, другие — уменьшить. Естественный вопрос: можно ли такого изменения добиться *стереотипными* действиями, т. е. увеличивая x_i , если y_i надо увеличить, и уменьшая x_i , если y_i надо уменьшить.

Положительный ответ на этот вопрос можно дать, если $f(x)$ является *универсальным P -отображением*, каковым мы называем отображение

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(0) = 0,$$

в том случае, когда для любого вектора $x \neq 0$ можно указать такой номер j , что $x_j \cdot f_j(x) > 0$, т. е. хотя бы один результат является «ожидаемым».

8.12.1. Теорема. Пусть $f(x)$ является универсальным P -отображением и \mathbb{R}_{+-}^n обозначает некоторый ортант. Тогда существует вектор $x \in \mathbb{R}_{+-}^n$, такой что ³¹⁾ $f(x) \in \mathbb{R}_{+-}^n$.

³¹⁾ То есть все результаты являются «ожидаемыми», все действия «стереотипными».

◀ Для доказательства достаточно перейти к другой системе координат, в которой \mathbb{R}_+^n станет неотрицательным ортантом, и воспользоваться *теоремой Карамардиана*. ▶

Универсальным P -отображением по приращению назовем отображение $f(x)$, если для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и любого ненулевого $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ существует такой номер j , что

$$[f_j(x + \Delta x) - f_j(x)] \Delta x_j > 0. \quad (8.41)$$

Если (8.41) выполняется для Δx , достаточно малых по норме, оператор f будем считать *локально универсальным P -отображением*. До некоторой степени удивительно, что

8.12.2. Локально универсальное P -отображение является универсальным P -отображением по приращению.

◀ В предположении противного найдется пара точек $a \neq b$, таких что

$$\forall j : [f_j(a) - f_j(b)](a_j - b_j) \leq 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $a \geq b$ и даже $\forall j : a_j > b_j$ (иначе можно перейти к «усеченному» оператору, обнуляя «лишние» f_j). Пусть Θ — множество тех $x \in \langle a, b \rangle$, для которых $f(x) \leq f(a)$. Поскольку оператор f непрерывен, Θ компактно. А так как f локально универсальное P -отображение — точка a является изолированной точкой множества Θ . Но тогда компактно и множество $\Theta \setminus \{a\}$, на котором непрерывная функция $\varphi(x) = \sum |x_i|$ вынуждена достигать минимального значения в некоторой точке $x^* \in \Theta \setminus \{a\}$. С другой стороны, должен существовать (*теорема 8.12.1* в локальном варианте) малый по норме вектор $\Delta x \leq 0$, такой что

$$\forall j : f_j(x^* + \Delta x) < f_j(x^*).$$

Следовательно, $x^* + \Delta x \in \Theta \setminus \{a\}$, но тогда $\varphi(x^* + \Delta x) < \varphi(x^*)$. ▶

Обратим внимание, что любое *универсальное P -отображение по приращению* f взаимно однозначно, а в случае $\|f(x)\| \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$, f — еще и гомеоморфизм \mathbb{R}^n на \mathbb{R}^n .

Теорема 8.12.2 освобождает от необходимости следить за $f(x)$ в целом. И если отображение $f(x)$ гладкое, задача сводится к выяснению того, является ли производная $f'(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$ P -матрицей, т. е. линейным *универсальным P -отображением*.

8.12.3. Теорема. Матрица является P -матрицей в том случае, когда все ее главные миноры строго положительны³²⁾.

8.13. Системы с ограниченным межэлементным взаимодействием

Максимально просты для изучения системы, в которых внутренних взаимосвязей (побочных влияний) вообще нет, т. е. все $y_i = f(x_i)$, соответственно, все частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ при $i \neq j$ тождественно нулевые. Понятно, что появление малых побочных влияний до определенного предела не должно мешать успешному функционированию системы.

Если абсолютную величину частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($i \neq j$) принимать за количественную меру внутренних взаимодействий в системе, то ясно, что эту меру надо сопоставлять с величиной частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} > 0$. Другими словами, малость взаимодействий должна быть не абсолютной, а относительной.

Универсальными P -отображениями по приращению будут, например, гладкие отображения, удовлетворяющие одному из следующих условий³³⁾

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} - \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right| > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.42)$$

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} - \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} \right| > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.43)$$

Строго положительны все главные миноры и у положительно определенных матриц, и потому в категорию универсальных

³²⁾ Доказательство и комментарии см. в [4, т. 3].

³³⁾ Поскольку у матрицы с положительной доминирующей диагональю все главные миноры строго положительны, и тогда п. 8.12.2 вслед за 8.12.3 дает требуемое заключение.

P -отображений по приращению попадают f при условии

$$\forall x, z : \langle f'(x)z, z \rangle > 0. \quad (8.44)$$

Аналоги условий (8.42)–(8.44) в конечных приращениях выглядят так³⁴⁾:

$$\Delta f_k(x)\Delta x_k > 0 \quad (|\Delta x_k| = \max_i |\Delta x_i|), \quad (8.42)^\Delta$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta f_i(x)\text{Sign}\Delta x_i > 0, \quad (8.43)^\Delta$$

где $\text{Sign } \alpha$ отличается от $\text{sign } \alpha$ только при $\alpha = 0$, принимая в случае $\alpha = 0$ все значения из $[-1, 1]$. Наконец,

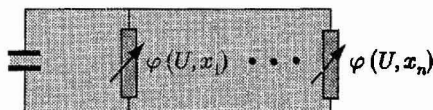
$$\sum_{i=1}^n \Delta f_i(x)\Delta x_i > 0, \quad (8.44)^\Delta.$$

Существование такого индекса i , что $\Delta f_i(x)\Delta x_i > 0$, в ситуациях (8.42)^Δ–(8.44)^Δ очевидно.

Пример. Пусть n потребителей тока параллельно подсоединены к источнику ЭДС. Вольт-амперная характеристика i -го потребителя имеет вид

$$I_i = \varphi_i(U, x_i),$$

где I_i — ток, U — напряжение, x_i — проводимость. Нелинейные функции $\varphi_i(U, x_i)$ предполагаются монотонно возрастающими. Источник ЭДС также нелинеен, $U = U(I)$, где $I = \sum I_i$, причем $U(I)$ монотонно убывает, из-за внутреннего сопротивления источника.



Законы Кирхгофа приводят к следующей системе уравнений:

$$I_i = \varphi_i(U(I), x_i), \quad I = \sum I_i,$$

³⁴⁾ $\Delta f_i(x) = f_i(x + \Delta x) - f_i(x)$.

которая в указанных предположениях всегда имеет решение

$$I_i = f_i(x_1, \dots, x_n). \quad (8.45)$$

Покажем, что набор функций (8.45) удовлетворяет условию (8.43)^Δ. Возьмем $\Delta x \neq 0$ и разобьем множество индексов на три подмножества:

- $K_>$ состоит из таких индексов, что $\Delta x_i > 0$;
- K_0 состоит из таких индексов, что $\Delta x_i = 0$;
- $K_<$ состоит из таких индексов, что $\Delta x_i < 0$.

Возможны три случая: $\Delta I > 0$, $\Delta I = 0$, $\Delta I < 0$. Рассмотрим ситуацию $\Delta I > 0$. В силу убывания $I_i = \varphi_i(U(I), x_i)$ по I и возрастания по x_i , имеем $\Delta I_i \leq 0$ для всех $i \in K_< \cup K_0$. Таким образом,

$$\sum_i \Delta I_i = \sum_{i \in K_>} \Delta I_i - \sum_{i \in K_< \cup K_0} \Delta |I_i| > 0,$$

что означает (8.43)^Δ. Случаи $\Delta I = 0$, $\Delta I < 0$ разбираются аналогично.

8.14. Комментарии и дополнения

• Множество $\Omega \subset E$ ограничено по конусу сверху, если $x \leq y$ для всех $x \in \Omega$ и некоторого элемента $y \in E$, который называют *верхней границей* Ω . Аналогично определяется — *нижняя граница*.

Если в множестве P верхних границ множества Ω есть наименьший элемент z_0 ($z_0 \leq z$, $z \in P$), то он называется *точной верхней границей* множества Ω и обозначается через $\sup \Omega$. Аналогично определяется *точная нижняя граница* $\inf \Omega$.

Конус K называется *миниздральным*, если любое множество из двух элементов $\{x, y\}$ имеет точную верхнюю границу $\sup\{x, y\}$. Если же точная верхняя граница имеется у каждого ограниченного множества, то конус называется *сильно миниздральным*.

Конус K_+ в C миниздрален, в L_p — сильно миниздрален. Сильно миниздральны ортанты в \mathbb{R}^n . «Круглые» конусы $K(\Omega)$ и граненые, в общем случае, — не миниздральные.

• Конус K_+ в $C[0, 1]$ — нормален, телесен, миниздрален, не правилен. В $C^1[0, 1]$ — не воспроизводящий, не нормальный, не миниздральный. В $L_p[0, 1]$ — нормальный, воспроизводящий, но не телесный, сильно миниздральный, вполне правильный.

• Линейные положительные операторы интегрированы в нелинейный анализ, поэтому их теорию [4, тт. 3, 5] желательно иметь под рукой. Остановимся на формулировке принципиальных результатов. Далее A — линейный положительный оператор.

8.14.1. Если $Ax_0 \geq \gamma x_0$, $x_0 \in K$, то спектральный радиус $\rho(A) \geq \gamma$.

Аналогичная оценка спектрального радиуса по обратному неравенству

$$Ax_0 \leq \gamma x_0, \quad x_0 \in K, \quad x_0 \neq 0, \quad (8.46)$$

в общем случае не имеет места, но в достаточно свободных предположениях (8.46) влечет за собой $\rho(A) \leq \gamma$. Например, если K — нормальный телесный конус, а x_0 — внутренний элемент K .

Естественный отправной пункт изучения позитивного спектра линейного положительного оператора — классическая теорема Перрона:

8.14.2. Пусть матрица $A = [a_{ij}]$ строго положительна. Тогда:

- Спектральный радиус $\rho(A) > 0$ является собственным значением алгебраической кратности единица, и ему отвечает строго положительный собственный вектор.
- Других положительных собственных значений и векторов матрица A не имеет.
- Если $Ax = \lambda x$, $\lambda \neq \rho(A)$, $x \neq 0$, то $|\lambda| < \rho(A)$.

Сюда можно приплюсовать: если матрица $A \geq 0$ неразложима, то $\rho(A) > 0$ является собственным значением алгебраической кратности 1, которому отвечает строго положительный собственный вектор. Других положительных собственных значений и векторов у A нет. Далее проблематика упирается в изучение импримитивных матриц, имеющих периферический спектр (собственные значения, совпадающие по модулю с $\rho(A)$).

Многое сохраняется в функциональных пространствах, разумеется, в модифицированной форме.

8.14.3. Если конус K нормальный и воспроизводящий, то у линейного положительного оператора A число $\rho(A)$ является точкой его спектра.

8.14.4. Пусть линейный u_0 -ограниченный оператор A вполне непрерывен и u_0 -положителен. Тогда A имеет единственный положительный собственный вектор x_0 , которому отвечает ведущее собственное значение $\lambda_0 > 0$.

8.14.5. Пусть линейный u -положительный оператор A имеет положительный собственный вектор x_0 , отвечающий позитивному собственному значению $\lambda_0 = 1$. Тогда для всех $x \in K$, отличных от νx_0 ($\nu > 0$), элементы x и Ax несравнимы: $x - Ax \notin K$, $Ax - x \notin K$, т. е.

$$x \not\geq Ax, \quad x \not\leq Ax.$$

Глава 9

Возмущения и бифуркации

*The ark was built by amateurs,
the Titanic — by professionals.*

Теория бифуркаций знает ответы на вопросы, которые еще не пришли в голову. До поры до времени никто ведь не догадывался, к чему ведет лишний грамм урана. А маятник, «стоящий на ушах» из-за небольшой вибрации? А черные дыры? Так что залежи неведомого заслоняет лишь броня консерватизма. Да ослабит Господь инерцию созерцания, которая противится резким изменениям картины явления.



9.1. О содержательных задачах и абстрактных постановках

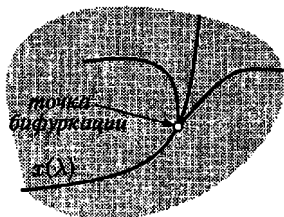
Параметрические уравнения

$$G(x, \lambda) = 0 \quad (9.1)$$


со скалярным параметром λ , и акцентом на «неприятностях», — настолько широко распространены, что даже неуместно ломиться в открытую дверь с какими-то частными примерами.

Потеря устойчивости упругих конструкций при увеличении нагрузки, возникновение взрывной волны, порхающего эха, резонанса, турбулентности, гравитационного коллапса — все это те самые «частные примеры», вмещающие большие теории.





Общий знаменатель при этом — метаморфозы, происходящие с решением $x(\lambda)$ уравнения (9.1). Фокус внимания — на точках бифуркации, в которых $x(\lambda)$ так или иначе ветвится, — то ли однозначная функция становится многозначной, то ли меняется число ветвей, то ли возникает хаос.

Для определенности можно иметь в виду возникновение смежных форм равновесия у шарнирно-закрепленного стержня в случае увеличения продольной нагрузки λ (п. 1.4), где исходное нулевое равновесие не зависит от λ , а при $\lambda > \lambda_0$ появляются симметричные ненулевые формы равновесия, что условно можно изобразить как . Таким образом, нулевое решение стоит на месте, и от трезубца остаются только усы.



9.1.1. Ситуацию $G(0, \lambda) \equiv 0$ примем за каноническую, и λ_0 назовем точкой бифуркации, если любому $\varepsilon > 0$ отвечает

$$\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon),$$

при котором уравнение (9.1) имеет хотя бы одно ненулевое решение в шаре $\|x\| < \varepsilon$.

Задачи с дрейфующим однозначным решением $x^*(\lambda)$ помещаются «в рамки» переходом к уравнению

$$G(x^*(\lambda) + x, \lambda) = 0.$$

Под (9.1) далее подразумевается либо уравнение в \mathbb{R}^n , либо

$$G(x, \lambda) = x - A(x, \lambda), \quad (9.2)$$

где $A : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ — вполне непрерывный оператор, что позволяет применять теорию вращения, несмотря на бесконечную размерность пространства E .

В том случае, когда линейное приближение ¹⁾ $G'_x[x(\lambda_0), \lambda_0]x$ невырождено, отображение $G(x, \lambda_0)$ в точке $x(\lambda_0)$ является *локальным гомеоморфизмом*. Соответственно (теорема 2.4.1) — в некоторой окрестности $(x(\lambda_0), \lambda_0)$ существует и единственно решение $x(\lambda)$ уравнения (9.1). Поэтому, с учетом $G(0, \lambda) \equiv 0$,

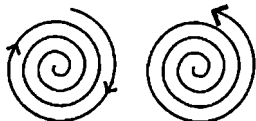
точкой бифуркации может быть лишь такое λ_0 , при котором оператор $G'_x(0, \lambda_0)$ вырожден ²⁾.

Обратное, разумеется, неверно. Вырождение $G'_x(0, \lambda_0)$ необязательно влечет за собой бифуркацию. Однако *Эйлером* была предложена некая рецептура отыскания критических нагрузок на основе перехода от (9.2) к линеаризованному уравнению, которая основывалась как раз на вырождении линейной модели и вне топологических рамок выглядела туманно, причем долгое время, несмотря на многочисленные попытки, не поддавалась обоснованию. В рамках *теории вращения* правомерность *метода Эйлера* устанавливается тривиально ³⁾, см. далее.

Наконец, вернемся к самому понятию *бифуркации*. Термин неоднозначен, и встречается в разных модификациях. Данное выше определение ориентируется на изменение числа решений. Однако играть роль может и качество решения. При этом возможны сюрпризы. Скажем, в системе

$$\dot{x} = G(x, \lambda)$$

устойчивый фокус может деформироваться в — неустойчивый, без возникновения в окрестности дополнительных особенностей,



А родственные, вроде бы, устойчивые равновесия могут не переводиться друг в друга без аномальных видоизменений, см. разделы 6.7, 9.3. Но пока остановимся на бифуркациях, основанных исключительно на ветвлении решений.

¹⁾ В предположении достаточной гладкости G .

²⁾ В случае (9.2) вырожденным обязан быть оператор $G - A'_x(0, \lambda_0)$.

³⁾ *Красносельский М. А. // УМН. 1957. 12. Вып. 1.*

9.2. Принцип смены индекса

Допустим, $x(\lambda)$ — однозначная ветвь изолированных нулей⁴⁾ векторного поля $G(x, \lambda)$, и Ω_λ — область, не содержащая других нулей кроме $x(\lambda)$. Тогда по теореме 3.4.5

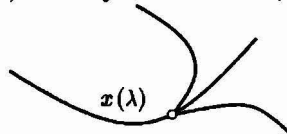
$$\gamma(G(\cdot, \mu), \dot{\Omega}_\mu) = \gamma(G(\cdot, \nu), \dot{\Omega}_\nu),$$

т. е. деформация по $\lambda \in [\mu, \nu]$ не меняет вращения⁵⁾ на $\dot{\Omega}_\lambda$ и, как следствие, индекса

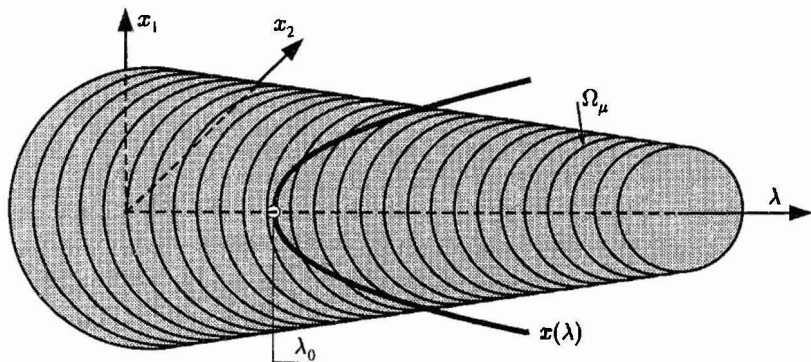
$$\text{ind} [G(x, \lambda), x(\lambda)]. \quad (9.3)$$

Поэтому, если индекс (9.3) меняется в некоторой точке λ_0 , то это гарантировано точка бифуркации.

Сказанное требует уточнения, потому что не ясно, за каким

рукавом ветвления надо следить, . И здесь

удобно как раз введенное выше предположение $G(0, \lambda) \equiv 0$, при котором одна из ветвей — просто точка (нулевое равновесие).



⁴⁾ То есть $x(\lambda)$ при каждом фиксированном λ является изолированным нулем векторного поля $G(x, \lambda)$.

⁵⁾ Непрерывность деформации Ω_λ легко достигается переходом к деформации шарика $B_\lambda \subset \Omega_\lambda$.

В этом случае λ_0 назовем *точкой смены индекса*, если существуют сходящиеся к λ_0 последовательности

$$\mu_k \rightarrow \lambda_0, \quad \nu_k \rightarrow \lambda_0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

такие что

$$\text{ind} [G(x, \mu_k), 0] \neq \text{ind} [G(x, \nu_k), 0] \quad \text{при всех } k.$$

9.2.1. Теорема. *Всякая точка смены индекса является точкой бифуркации.*

◀ Разумеется, имеет смысл говорить лишь об изолированном нуле⁶⁾ $x(\lambda_0) = 0$. Но тогда можно считать, что

$$\text{ind} [G(x, \mu_k), 0] \neq \text{ind} [G(x, \lambda_0), 0] \quad \text{при всех } k. \quad (9.4)$$

В этом случае в достаточно малых шарах $\|x\| < \varepsilon$ уравнение $G(x, \lambda_0) = 0$ не имеет ненулевых решений. Но в силу непрерывности⁷⁾ $G(x, \lambda)$ при достаточно больших k поля $G(x, \mu_k)$ будут невырождены на границе $\|x\| = \varepsilon$, и, с учетом (9.4), уравнения $G(x, \mu_k) = 0$ обязаны иметь ненулевые решения. ▶

Понятно, обратное необязательно, но к п. 9.2.1 можно добавить: *в ситуациях «общего положения» точки бифуркации являются точками смены индекса.*

На практике чаще всего сценарий бифуркационной мутации заключается в вырождении $G'_x(0, \lambda)$ «на одно мгновение», т. е. лишь в точке $\lambda = \lambda_0$, слева и справа от которой оператор $G'_x(0, \lambda)$ невырожден и имеет разные индексы⁸⁾. Другими словами, в большинстве случаев индексы по разные стороны от точки бифуркации равны ± 1 и вычисляются по линейному приближению.

В точке смены индекса линейного оператора $G'_x(0, \lambda)$ должно происходить вырождение G'_x нечетной алгебраической крат-

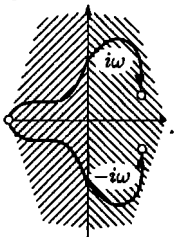
⁶⁾ Иначе сразу ясно, что λ_0 — точка бифуркации.

⁷⁾ Либо полной непрерывности векторного поля (9.2), если задача рассматривается в функциональном пространстве.

⁸⁾ Разные знаки детерминанта, если сюжет развивается в \mathbb{R}^n (п. 3.5.7), либо, в случае (9.2), п. 7.4.10, число вещественных собственных значений (с учетом кратностей) оператора $A'_x(0, \lambda)$, больших единицы, — слева и справа от λ_0 должно быть разным.

ности⁹⁾. Просто потому, что ликвидация вещественных отрицательных собственных значений парами — не приводит к изменению индекса¹⁰⁾. «Парное исчезновение» может происходить в процессе деформации по λ расщеплением кратных отрицательных собственных значений на комплексно-сопряженные (с возможным, но необязательным уходом в правую полуплоскость в

результате пересечения мнимой оси в точках $\pm i\omega$) λ_0



Но хотя бы одна траектория движения отрицательного собственного значения вправо должна, раз уж индекс меняется, пройти через нуль комплексной плоскости.

Поэтому по кратности вырождения $G'_x(0, \lambda)$ в ситуациях общего положения можно судить о наличии бифуркации. В этом русле представляет интерес совсем простой — но покрывающий массу приложений — результат:

9.2.2. Теорема Красносельского. Пусть в случае (9.2) производная $A'_x(0, \lambda)$ имеет вид

$$A'_x(0, \lambda) = \lambda B, \quad (9.5)$$

и λ_0^{-1} — собственное значение нечетной кратности линейного оператора B . Тогда λ_0 — точка бифуркации уравнения

$$x = A(x, \lambda). \quad \triangleleft$$

Разумеется, обойтись теоремой 9.2.2 не всегда удастся. Рамки (9.5) могут оказаться тесны, и тогда приходится выяснять,

⁹⁾ По поводу разницы между алгебраической и геометрической кратностью см. [4, т. 3].

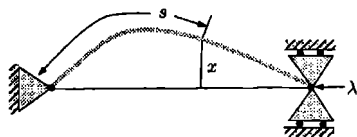
¹⁰⁾ Поскольку индекс линейного оператора G'_x (пп. 3.5.7, 7.4.10)

$$\text{ind}(G'_x, 0) = \text{sign det } G'_x = (-1)^\beta,$$

где β — число вещественных отрицательных собственных значений G'_x .

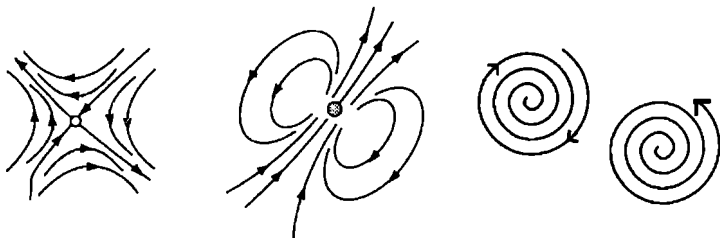
не возвращается ли собственное значение у $A'_x(0, \lambda)$ обратно, коснувшись нуля и не пересекая мнимую ось. Не говоря о ситуациях, где $A'_x(0, \lambda)$ вырождается, начиная с λ_0 , и далее необходимо иметь дело либо с исходным нелинейным вариантом задачи, либо с ее приближением, но уже нелинейным.

Разбор полетов в задаче о смежных формах равновесия шарнирно-закрепленного стержня (см. раздел 1.4) — есть в [10].



9.3. Перестройки фазового портрета

Метаморфозы, происходящие с системой, могут быть связаны не только с ветвлением «положений равновесия», но и с качественными изменениями иного сорта. Рождение автоколебаний, «перерождение» экстремальных точек (раздел 6.5), наконец, различные перестройки фазовых портретов динамических систем. Во всех таких случаях скачкообразного изменения свойств объекта также принято говорить о бифуркациях.



Рассмотрим трансформации нулевого равновесия системы

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad (9.6)$$

при условии что изменение скалярного параметра λ не ведет к появлению в окрестности нуля других положений равновесия.

Индексу равновесия системы $\dot{x} = f(x)$ можно было бы приписать значение $\text{ind}(f, 0)$, но правильно: $\boxed{\text{ind}(-f, 0)}$, ибо оный

естественно привязывать к индексу поля $x - U_t(x)$, где U_t — оператор сдвига по траекториям (9.6), и t достаточно малó. А при малых $t > 0$ поля $x - U_t(x)$ и $-f(x) \cdot t$ непротивоположно направлены в силу¹¹⁾

$$x - U_t(x) = -f(x) \cdot t + o(t),$$

и потому индексы $x - U_t(x)$ и $-f(x)$ одинаковы.

9.3.1. Теорема. *Индекс асимптотически устойчивого равновесия (9.6) равен*

$$\text{ind}(I - U_t, 0) = \text{ind}(-f, 0) = 1, \quad (9.7)$$

где U_t — оператор сдвига по траекториям (9.6).

◀ Асимптотически устойчивое равновесие x^* в \mathbb{R}^n является [15] равномерно асимптотически устойчивым, т. е. существует окрестность Ω точки x^* , такая что $U_t^k(\Omega) \rightarrow \{x^*\}$ при $k \rightarrow \infty$. Но тогда с учетом теоремы Браудера (п. 5.6.1) $\text{ind}(I - U_t, 0) = 1$. При этом $t > 0$ — любое¹²⁾. ▶

Широко распространено заблуждение, что (9.7) имеет место и для устойчивого положения равновесия¹³⁾. В \mathbb{R} и на плоскости \mathbb{R}^2 это действительно так. Но в бóльших размерностях интуиция сталкивается с неожиданностью.

9.3.2. Теорема. *В \mathbb{R}^3 индекс устойчивого равновесия x^* может быть любым числом из $\dots, -1, 0, 1$, а в \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, — любым целым из \mathbb{Z} .*

◀ Пусть $x^* = 0$, и $\Theta_p^1 \supset \Theta_p^2 \supset \dots$ — последовательность вложенных друг в друга шаров с p ручками, диаметры которых стремятся к нулю, и все Θ_p^k содержат точку x^* . Пусть $f^k(x)$ — поле внешних нормалей M_p^k . Поскольку вращения

$$\gamma(f^k, \dot{\Theta}_p^k) = \gamma(f^k, M_p^k)$$

не зависят от k и равны $1 - p$ (теорема 5.7.2), — вращение соответствующего поля на каждом «шаровом слое с p ручками» $\Theta_p^k \setminus \Theta_p^{k+1}$ равно нулю, и потому

¹¹⁾ Что получается переносом слагаемых в $U_t(x) = x + f(x)t + o(t)$.

¹²⁾ Самó $x - U_t(x)$ служит гомотопией между операторами с разными значениями t . Невырожденность следует из $U_t(x) \rightarrow x^*$ при $t \rightarrow \infty$.

¹³⁾ Без требования обязательной сходимости траекторий к равновесию из достаточно малой окрестности.

может быть продолжено на «слой» невырожденно (теорема 4.5.1). В результате получается невырожденное продолжение $f(x)$ на $\Theta_p^1 \setminus \{0\}$. При этом ясно, что нулевое равновесие системы

$$\dot{x} = -f(x) \quad (9.8)$$

устойчиво, потому что траектории не могут покидать Θ_p^k , поскольку на границе скорости $-f(x)$ направлены внутрь. Наконец (см. начало раздела), индекс нуля системы (9.8) есть индекс $\text{ind}(f(x), 0) = 1 - p$.

В больших размерностях система с устойчивым равновесием, имеющим любой индекс из \mathbb{Z} , строится аналогично на базе теоремы 5.7.2. ►

9.4. Деформации с ограничениями

Из теоремы 9.3.1 следует, что *равновесие гарантировано не является асимптотически устойчивым, если $\text{ind}(I - U_t, 0) \neq 1$* . Это полезный критерий. Но случай $\text{ind}(I - U_t, 0) = 1$ в некотором роде покрыт мраком, поскольку допускает «что угодно», как показывает пример из раздела 6.7, где асимптотически устойчивая система $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$ невырожденно¹⁴⁾ деформируется в систему $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$, все решения которой (за исключением $x(t) \equiv 0$) уходят в бесконечность, а индекс в обоих случаях равен 1.

Однако сужение класса допустимых деформаций способно в точности очертить границу гурвицевости, как уже отмечалось в разделе 6.7. Но класс C^+ (см. п. 6.7.1), деформации в котором сохраняют гурвицевость, не совсем удобен с точки зрения контроля процесса. Вот другой рецепт, основанный на переходе от матриц A размера $n \times n$ к матрицам A^* размера $n^2 \times n^2$:

$$A^* = I \otimes A + A^T \otimes I, \quad (9.9)$$

где \otimes обозначает *кронекерово произведение*. Фокус состоит в том, что [4, т. 3]: *собственные значения A^* исчерпываются комбинациями $\lambda_i + \lambda_j$ собственных значений λ_k самой матрицы A* . И это делает очевидным следующий факт.

¹⁴⁾ То есть без появления ненулевых положений равновесия.

9.4.1. Теорема. Матрица A гурвицева в том случае, когда гурвицева матрица A^* .

Более того, если множеству E всех матриц $n \times n$ поставить в соответствие множество E^* матриц вида (9.9), то вполне ясно, что невырожденные в E^* деформации сохраняют неизменным число собственных значений матрицы как в левой полуплоскости \mathbb{C} , так и в правой¹⁵⁾. Поэтому:

9.4.2. Теорема. Матрицы A и B обе одновременно гурвицевы или негурвицевы в том случае, когда существует деформация от A к B , невырожденная¹⁶⁾ в E^* .

Получается совсем простой критерий. Деформации $H(\cdot, t)$ в E сопоставляется деформация $H^*(\cdot, t)$ в E^* , и надо «всего лишь» следить за условием

$$\det H^*(\cdot, t) \neq 0.$$

Невырожденные деформации в E^* оказываются, таким образом, достаточно тонким инструментом¹⁷⁾, позволяющим не только классифицировать устойчивые и разнообразно неустойчивые линейные системы, но и разобраться, скажем, с невырожденными критическими точками, не разделяя их всего на два класса, как это происходит при использовании деформаций в исходном пространстве. Конечно, выход в E^* связан с увеличением размерности, но тут рассчитывать на бесплатный сыр нет оснований.

Уместно вернуться к разделу 8.6 и напомнить, что маневр перехода от A к матрице A^* связан с переходом от исходной системы $\dot{x} = Ax$ к матричной системе

$$\dot{H} = HA^T + AH, \quad (9.10)$$

¹⁵⁾ По причине, которая указывалась в п. 6.7. Невырожденная деформация в E^* исключает возможность наличия в спектре чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$, и потому не может перевести собственные значения из левой полуплоскости в правую, и наоборот.

¹⁶⁾ Если H деформация, то матрица $H^*(\cdot, t)$ невырождена при любом t .

¹⁷⁾ С более высоких этажей задачи выглядят проще, см. главу 9 в [4, т. 6].

каковая одновременно с $\dot{x} = Ax$ асимптотически устойчива или неустойчива, причем оператор сдвига по траекториям (9.10) положителен и монотонен. И тогда теоремы 9.4.1, 9.4.2 получают новое обоснование с учетом соображений полуупорядоченности. Последние состоят в «обобщении» теоремы 8.10.9, в которой условие внедиагональной монотонности нужно лишь для того, чтобы оператор сдвига был монотонен. Поэтому соответствующий результат может звучать так:

9.4.3. Теорема. Если оператор сдвига по траекториям

$$\dot{x} = S(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

при любом фиксированном λ монотонен, то свойство асимптотической устойчивости равновесия сохраняется при невырожденной деформации $S(x, \lambda)$.

Подъем из \mathbb{R}^n к матричным уравнениям — с эффектом использования идей полуупорядоченности — возможен и в нелинейных вариантах. Например, от $\dot{x} = f(x, t)$ по схеме

$$H(x) = xx^T, \quad \dot{H} = xf^T(x, t) + f(x, t)x^T \leq F(H, t),$$

при условии что оператор сдвига по траекториям $\dot{H} = F(H, t)$ монотонен по конусу положительно определенных матриц.

Фокус (9.9) работает и в другом контексте. Полином

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

представим в виде $\det(A - \lambda I)$, где A сопровождающая матрица [4, т. 3],

$$A = \begin{bmatrix} 0 & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & . & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Но тогда многочлен $q(z)$, имеющий корнями все суммы пар корней многочлена $p(z)$, можно записать в форме $q(z) = \det(A^* - \lambda I)$. В результате (п. 8.1.2): для

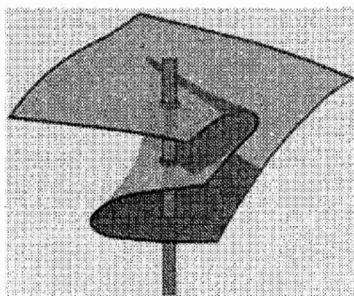
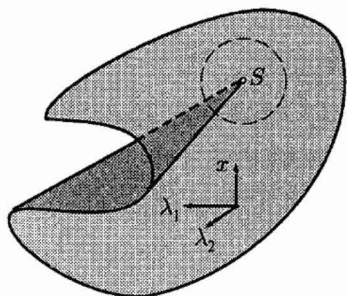
гравитационности многочлена $p(z)$ необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты многочленов

$$\det(A - \lambda I) \quad \text{и} \quad \det(A^* - \lambda I)$$

были строго положительными.

9.5. Многопараметрические задачи

Бифуркационные мотивы усложняются, когда в системе меняются сразу несколько параметров. Наглядную иллюстрацию дает



пресловутая *катастрофа сборки*, представляющая множество критических точек потенциала

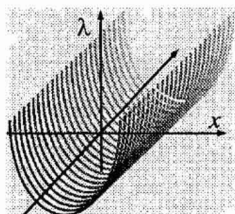
$$\varphi(x, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x, \quad (9.11)$$

т. е. совокупность точек $(x, \lambda_1, \lambda_2)$, удовлетворяющих уравнению

$$\varphi'_x = x^3 + \lambda_2 x + \lambda_1 = 0. \quad (9.12)$$

Катастрофа сборки всплывает каждый раз при упоминании теории катастроф по простой причине. При двух, как говорят, управляющих параметрах λ_1, λ_2 — нет «ничего другого» структурно устойчивого, за исключением еще *катастрофы складки*

$$\varphi'_x = x^2 + \lambda = 0,$$



которая также относится к системам с двумя параметрами, хотя второй параметр немой¹⁸⁾. Как только управляющих параметров становится три и больше — ситуация выходит из-под визуального контроля, потому что хотя бы еще одним параметром приходится описывать состояние системы¹⁹⁾.

Особого внимания в данном контексте заслуживает *структурная устойчивость* [18], о которой уже говорилось в [4, т. 7], и здесь не хотелось бы повторяться. Но бросить еще один камень в тот же огород стоит потому, что структурная неустойчивость потенциалов $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^4$ и

$$\varphi(\mathbf{x}, \lambda_2) = \frac{1}{4} \mathbf{x}^4 + \frac{1}{2} \lambda_2 \mathbf{x}^2 \quad (9.13)$$

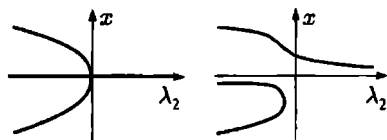
на фоне структурной устойчивости (9.11) — часто вызывает недоумение, происходящее из нежелания вникать в определение.

9.5.1. Определение. Семейства функций $\varphi(\mathbf{x}, \lambda)$, $\psi(\mathbf{x}, \lambda)$, т. е.

$$\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R},$$

эквивалентны в нуле, если $\varphi(\mathbf{x}, \lambda) = \psi[z(\mathbf{x}, \lambda), \mu(\lambda)] + \xi(\lambda)$, где $\xi(\lambda)$ — гладкое отображение, $\mu(\lambda)$ — диффеоморфизм, $z(\mathbf{x}, \lambda)$ — семейство диффеоморфизмов.

Неустойчивость (9.13) проявляется следующим образом. Критические точки $\varphi(\mathbf{x}, \lambda_2)$ определяются уравнением $\mathbf{x}^3 + \lambda_2 \mathbf{x} = 0$, т. е. представляют собой объединение прямой $\mathbf{x} = 0$ и параболы $\mathbf{x}^2 + \lambda_2 = 0$ (рисунок слева). График возмущенного уравнения $\mathbf{x}^3 + \lambda_2 \mathbf{x} + \epsilon = 0$



¹⁸⁾ В $\mathbf{x}^2 + \mu \mathbf{x} + \lambda$ от члена $\mu \mathbf{x}$ можно избавиться заменой системы координат, каковая входит в реестр допустимых эквивалентностей с точки зрения структурной устойчивости.

¹⁹⁾ Конечно, можно рисовать различные трехмерные срезы многомерных катастроф,

$$\mathbf{x}_1^5 + \lambda_3 \mathbf{x}_1^3 + \lambda_2 \mathbf{x}_2^2 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 = 0 \quad (\text{ласточкин хвост}),$$

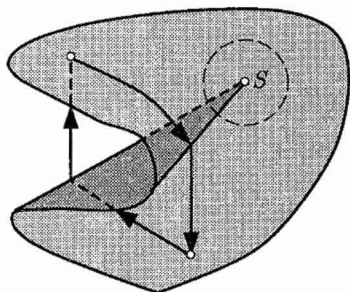
$$\mathbf{x}_1^6 + \lambda_4 \mathbf{x}_1^4 + \lambda_3 \mathbf{x}_1^3 + \lambda_2 \mathbf{x}_2^2 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 = 0 \quad (\text{бабочка}),$$

$$\mathbf{x}_1^7 + \lambda_5 \mathbf{x}_1^5 + \lambda_4 \mathbf{x}_1^4 + \lambda_3 \mathbf{x}_1^3 + \lambda_2 \mathbf{x}_2^2 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 = 0 \quad (\text{вигвам}),$$

плюс небольшая серия *омбилических катастроф* [18]. Но эти «срезы», надо признать, визуальной ясности не добавляют, а то и запутывают.

(рисунок справа) имеет другой топологический тип ²⁰⁾, хотя в чисто аппроксимационном отношении он какую-то часть населения может устраивать. Однако формальное определение 9.5.1 таких эксцессов не допускает.

Семейство же поверхностей (9.12) укладывается в прокрустово ложе определения 9.5.1, поскольку линейные члены и константы «легализованы», а от квадратичных — можно избавиться заменой переменных. Поэтому возмущения степени ≤ 3 с точностью до «эквивалентности» меняют лишь параметры (9.12). Что касается возмущений степени > 3 , то они не играют роли, потому что в данном случае не могут изменить топологию поверхности, но это устанавливается уже нетривиальным образом.



Вернемся к бифуркациям. Меняя значения параметров $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ системы (9.12) вдоль кривой $\lambda(\tau) = \{\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau)\}$, получаем однопараметрическую деформацию

$$\varphi'_x(x, \tau) = \varphi'_x(x, \lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau)),$$

в результате которой могут происходить скачки гистерезисного типа.

Такого сорта «драматические преобразования», характеризующие систему в целом, на фоне объемного просмотра ситуации становятся более зрими и понятны. Когда видны окрестности однопараметрической деформации вдоль кривой

$$\lambda(\tau) = \{\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau)\},$$

картина проясняется за счет дополнительного обзора.

Рассмотренные в предыдущих разделах задачи о критических значениях параметра соответствуют прохождению кривой

$$\{x(\tau), \lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau)\} \quad (9.14)$$

через точку S . А в данном случае, при более широкой панораме, видно, как бифуркация зависит от выбора пути (9.14). Но дело

²⁰⁾ Нарушена связность, исчезло самопересечение.

не только в этом. Визуальные декорации вокруг катастрофы сборки важны также как образец, показывающий, что может стоять за кадром изменения одного параметра.

О прикладной роли теории катастроф. *Постон и Стюарт* [18] пишут, что проникновение теории катастроф в термодинамику произвело больше тепла, чем света, — не рискуя сказать «ни тепла, ни света», что многие поддержали бы. Поддержали бы, поскольку технической помощи от ТК не видно. Да, *уравнение Ван-дер-Ваальса* в два счета сводится к описанию *катастрофы сборки*, но физике от этого ни холодно ни жарко. Конечно, столпившиеся вокруг философы говорят много интересного о фазовых переходах, но все это не вписывается в утилитарное русло. И тогда физики заявляют, что не было случая, когда бы ТК принесла практическую пользу. Оно, конечно, так и есть, но все же не так. Не так в том смысле, что акцент делается неправильно.

Хорошая теория, как хороший подарок, не должна иметь утилитарной ценности. Ввысь и вглубь, — вот что поддерживает и удерживает прагматику, т. е. Поднебесную вместе со всей рутинной и научными дисциплинами. Утилитарным потокам необходимы рамки, опора, — и это главное, хотя не сразу бросается в глаза. А когда обзор полностью замыкается в овеществленной части Вселенной, наука, как и вообще жизнь, сводится к требованию «хлеба и зрелищ» и теряет смысл.

Теория катастроф прививает определенный стиль мышления, и в этом ее роль. Стиль же дает результаты не прямо, а опосредованно. Поэтому искать плоды раньше времени неразумно. Не стоит даже думать о них. *Curiosity has its own reason for existing*, — писал *Эйнштейн*.

9.6. Итерационные процессы

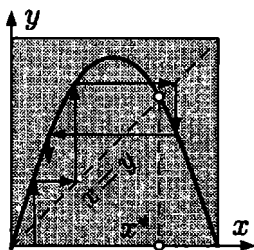
Когда аудитория внимательна и благожелательна, там разумно не перегибать палку. Недоговаривая, недооценивая, не настаивая, — что стратегически оптимально. Когда же у слушателей нет

интереса, вплоть до тошноты, там допустимо переоценить, зайти с неожиданной стороны, даже приврать. Но отложенная реакция при этом, как правило, негативная. Где же, мол, обещанные чудеса. С чем-то подобным столкнулась на определенном этапе теория катастроф. В меньшей степени те же проблемы возникают и в теории хаоса. Первоначальное воодушевление сменяется разочарованием, а причина заключается не в отсутствии якобы обещанных результатов, а в неоправданных ожиданиях.

Скажем, до сих пор при объяснении перехода к динамическому хаосу обычно пересказывается классическая работа *Фейгенбаума*²¹⁾, основанная главным образом на анализе одномерного итерационного процесса

$$x_{m+1} = f(x_m, \lambda)$$

в простейшем варианте:



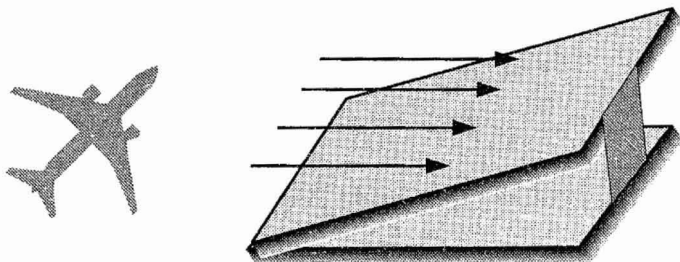
$$x_{m+1} = \lambda x_m (1 - x_m). \quad (9.15)$$

Читатель, воспринимая модель как игрушечную, обычно благодарен за пояснения на пальцах, но ждет перехода к изложению теории. И становится на дыбы, когда общие результаты (*турбулентность, аттракторы*) начинают излагаться лишь по аналогии со свойствами (9.15), чем грешит сам *Фейгенбаум*. Надо признать, читатель отчасти прав. Но только отчасти.

Дело в том, что науку вперед двигают исключительно *игрушечные задачи*. В пользу этого тезиса работают многочисленные примеры [3]. Напомним один пример — *флаттер-эффект*, приведивший

²¹⁾ *Feigenbaum M.J. Universal Behavior in Nonlinear Systems // Los Alamos Science. 1980. № 1. P. 4–27. Перевод: УФН. 1983. 141 (вып. 2). С. 343–374.*

в тридцатые годы прошлого столетия к необъяснимым катастрофам в авиации. Природа явления была совершенно не ясна. Однако в попытках разобраться никому в голову не пришло исследовать обтекание газовым потоком фюзеляжа или хотя бы крыла самолета. Взяли простейшую упруго закрепленную пластинку в газовом потоке, записали уравнения и долго пробовали и ошибались, пока не «поймали» эффект.



Потом, конечно, были эксперименты в аэродинамических трубах, но мини-задача с прямоугольной пластинкой сыграла решающую роль, вскрыв суть явления и его закономерности.

Аналогичную роль по отношению к сложным динамическим системам играет модель (9.15). Как ни велика пропасть между ними на первый взгляд.

В двух словах суть дела такова. Итерации (9.15) есть $x_m = f(x_{m-1})$, где ²²⁾ $f(x) = \lambda x(1-x)$, что равносильно

$$x_m = f^m(x_0), \quad f^m = \underbrace{f(f(\dots f))}_{m \text{ раз}}.$$

При этом $f^m(x)$ — полиномы возрастающей степени 2^m , отображающие в себя отрезок $[0, 1]$, и даже $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, при условии ²³⁾

$$\lambda \in (0, 4 - \varepsilon).$$

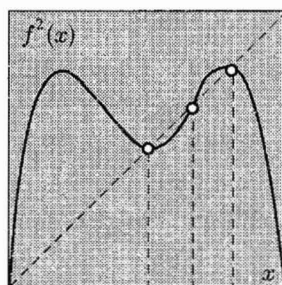
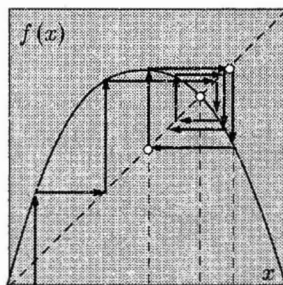
²²⁾ Зависимость от λ не фигурирует в обозначении $f(x)$, чтобы не рябило в глазах. При необходимости «напомнить и подчеркнуть» используется индекс, f_λ .

²³⁾ Сужение поля зрения до $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ удобно с точки зрения избавления от мешающей, в некоторых отношениях, нулевой точки.

Поэтому все $f^m(x)$ обязаны иметь на отрезке $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ хотя бы одну неподвижную точку при условии $2 < \lambda < 4 - \varepsilon$. При этом у $f(x)$ неподвижная точка $x^* = f(x^*)$ на $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ только одна. А при λ , близких к 2, и у всех $f^m(x)$ нет других неподвижных точек, кроме x^* . Но по мере увеличения λ наступает момент $\lambda = \lambda_1$, при прохождении которого происходит бифуркация, и у $f^2(x) = f(f(x))$ появляются еще две неподвижные точки x_1^* , x_2^* , не совпадающие с положением равновесия x^* . При этом ясно:

$$f(x_1^*) = x_2^*, \quad f(x_2^*) = x_1^*, \quad x_1^* \neq x_2^*,$$

что означает возникновение цикла Γ_2 периода 2, причем x_1^* , x_2^*



являются неподвижными точками всех функций f^m при $m = 2^j$, $j \in \mathbb{N}$. Затем наступает момент, в котором происходит бифуркация рождения невырожденного цикла²⁴⁾ Γ_4 , и т. д. Характерная особенность процесса — последовательное рождение циклов Γ_{2^j} в окрестности точек бифуркации $\lambda = \lambda_j$. При этом рождение каждого нового цикла, сопровождаемое удвоением периода, разрушает предыдущие (в смысле потери устойчивости), новый же цикл появляется на свет устойчивым.

Последовательность точек бифуркации

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots$$

²⁴⁾ Невырожденным циклом Γ_p длины p называют траекторию x_1, \dots, x_p из попарно несовпадающих точек, удовлетворяющую (9.15) и условию $x_1 = x_p$.

сходится к некоторому бифуркационному значению λ_∞ , при котором наступает хаос²⁵⁾. Изображающая точка (9.15) мечется по игровому полю, «не находя покоя».

Фейгенбаум заметил стабилизацию

$$\delta_n = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \rightarrow \delta = 4,669 \dots,$$

и в некотором роде настоял, что константа δ не меняется в «широком» диапазоне варьирования функции $f(x)$ в процессе

$$x_{m+1} = f(x_m).$$

«Зрительный зал» воспринял явление как сногшибательное²⁶⁾, и это порядком оживило интерес к итерационным процессам, что лишний раз показывает доминирующее влияние второстепенных факторов на репутацию. Главный феномен в этой истории все-таки — переход к хаосу через удвоение периодов колебаний.

9.7. Иерархия циклов

Имея намерение распространить, до некоторой степени, философию удвоения циклов на многомерный случай (раздел 9.8), задержимся на одномерной модели, ибо в ней — намек.

Фейгенбаум вместе со своими предшественниками²⁷⁾ концентрировался в основном на удвоении периодов. Дальнейшие исследования сместили акценты, выдвинув на авансцену *иерархию циклов Шарковского*, вокруг которой закрутилась целая карусель работ. Центральный результат здесь состоит в следующем. Если в итерационном процессе $x_{m+1} = f(x_m)$ из существования цикла Γ_p следует существование Γ_q , пишут $p \succ q$, либо $\Gamma_p \succ \Gamma_q$.

²⁵⁾ Понятие *динамического хаоса* носит, вообще говоря, расплывчатый характер, см. раздел 9.10.

²⁶⁾ Нельзя сказать, что факт неправильный, но аргументация в пользу — несколько размазана, хотя это не так важно, ибо фарватер в стороне.

²⁷⁾ См. обзорную статью: *Misiurewicz M. Remarks on Sharkovsky's Theorem // Amer. Math. Monthly. 1997. 104. № 9.*

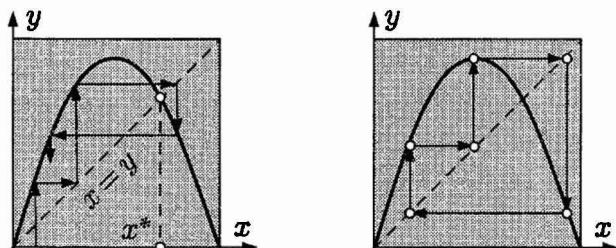
Шарковский установил общую закономерность:

$$\begin{aligned}
 &3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ 11 \succ \dots \\
 &2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ 2 \cdot 9 \succ 2 \cdot 11 \succ \dots \\
 &2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ 2^2 \cdot 9 \succ 2^2 \cdot 11 \succ \dots \quad (9.16) \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 &\dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.
 \end{aligned}$$

Здесь в первой строке в порядке возрастания идут все нечетные числа, кроме 1, далее следует первая строка, умноженная на 2, затем на 2^2 , 2^3 и т.д. Наконец, последняя строка состоит из степеней двойки в порядке убывания вплоть до $2^0 = 1$.

Так что при упорядочении (9.16) натурального ряда из $p \succ q$ и существования цикла Γ_p следует существование цикла Γ_q . Кроме того, по *теореме Шарковского* (1964) для любого p можно указать унимодальную функцию $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, у которой есть цикл Γ_p , но отсутствуют циклы периодов $q \succ p$, что легко устанавливается выбором подходящей кусочно-линейной функции.

Таким образом, в случае (9.15) при увеличении λ естественно ожидать последовательного появления циклов периода 2^k и далее вплоть до некоторого максимального в смысле (9.16) значения. При $\lambda = 1 + 2\sqrt{2}$ здесь возникает доминирующий над всеми цикл Γ_3 .



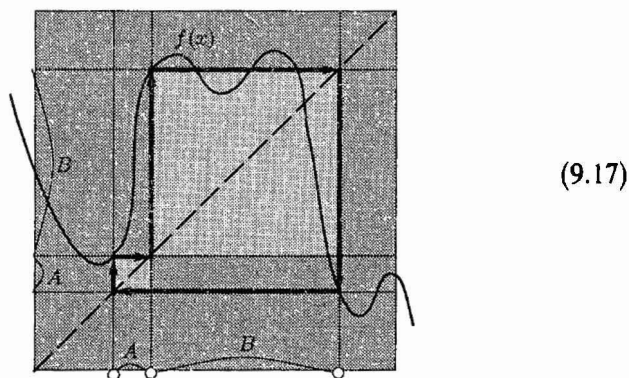
Исходное доказательство *теоремы Шарковского* было сложным, но постепенно стала вырисовываться относительно простая картина. Установим для иллюстрации частный результат.

9.7.1. Теорема. Из существования цикла Γ_3 в системе

$$x_{m+1} = f(x_m),$$

где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ произвольная непрерывная функция, следует существование циклов Γ_p любого периода²⁸⁾.

Мини-подготовка. В процессе рассуждений перед глазами полезно иметь геометрическую картинку²⁹⁾.

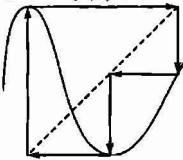


Сегменты A и B на (9.17), с концевыми точками из Γ_3 , обладают, как легко проверить, следующими свойствами: образ $f(A)$ накрывает B — пишем $A \xrightarrow{f} B$, а $f(B)$ накрывает и A , и B , т. е. $f(B) \supset A$, $f(B) \supset B$. Таким образом³⁰⁾,

$$A \xrightarrow{f} B, \quad B \xrightarrow{f} A, \quad B \xrightarrow{f} B. \quad (9.18)$$

²⁸⁾ Факт 9.7.1 нередко приписывают Ли и Йорке (Li and Yorke) (1975), частично переоткрывшим Шарковского много лет спустя.

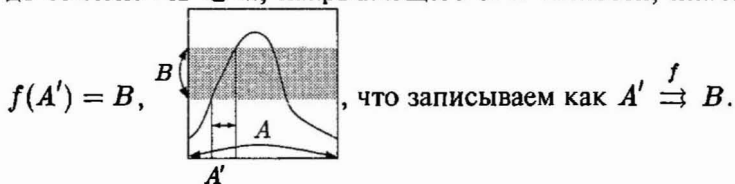
²⁹⁾ Чтобы разнообразить варианты начинать надо не с функции, а с цикла, и потом уже через три точки проводить график $f(x)$. Для циклов вида (9.17) возможна унимодальная

функция. В случае Γ_3 типа  график $f(x)$ неизбежно извивается.

³⁰⁾ Если 3-цикл устроит по-другому, переобозначение сегментов, концами которых служат точки Γ_3 , сводит ситуацию к (9.18).

9.7.2. Если отрезок $[\alpha, \beta]$ при отображении f накрывает себя, то у f на $[\alpha, \beta]$ существует неподвижная точка³¹⁾ $x^* = f(x^*)$.

Заметим, что в случае $A \xrightarrow{f} B$ сегмент A всегда можно ужать до сегмента $A' \subset A$, накрывающего B в точности, иначе говоря



Поэтому любую цепочку

$$J_1 \xrightarrow{f} J_2 \xrightarrow{f} J_3 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} J_n$$

можно сделать точной,

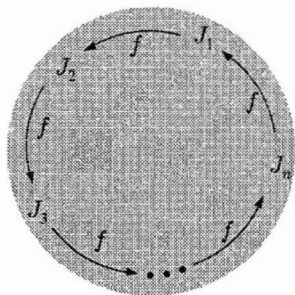
$$J'_1 \xrightarrow{f} J'_2 \xrightarrow{f} J'_3 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} J'_{n-1} \xrightarrow{f} J_n,$$

заменяя последовательно J_1, \dots, J_{n-1} на $J'_1 \subset J_1, \dots, J'_{n-1} \subset J_{n-1}$, но только в обратном порядке:

$$f(J'_{n-1}) = J_n, f(J'_{n-2}) = J'_{n-1}, \dots, f(J'_2) = J'_1.$$

Аналогичный трюк можно проделать с замкнутой цепью

$$J_1 \xrightarrow{f} J_2 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} J_n \xrightarrow{f} J_1,$$



³¹⁾ Теорема Брауэра напрямую не работает, особенно если концы $[\alpha, \beta]$ уходят за пределы $[\alpha, \beta]$ в одну сторону. Но выбирая на $[\alpha, \beta]$ точки a, b так, чтобы $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$, имеем

$$f(a) - a \leq 0 \leq f(b) - b,$$

откуда $f(x) - x = 0$ для некоторого x между a и b .

в результате чего получится замкнутая «почти» точная цепь

$$J'_1 \xrightarrow{f} J'_2 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} J'_n \xrightarrow{f} J_1.$$

9.7.3. *А поскольку*

$$J'_1 \subset J_1 = f^n(J'_1),$$

т. е. $J'_1 \xrightarrow{f^n} J'_1$, то f^n имеет в J'_1 неподвижную точку x^ , каковая автоматически оказывается n -циклической³²⁾.*

◀ *Доказательство теоремы 9.7.1.* Существование 1-цикла (неподвижной точки f) следует из $B \xrightarrow{f} B$ (п. 9.7.2), а 2-цикла — из $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f} A$ (п. 9.7.3), причем в невырожденности этого 2-цикла легко убедиться. Далее. Для любого $p > 3$ в силу (9.18) справедливо

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f} A,$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{p-1 \text{ раз}}$

откуда (п. 9.7.3) следует существование p -цикла

$$x^* \in A, f(x^*) \in B, \dots, f^{p-1}(x^*) \in B, f^p(x^*) = x^* \in A, \quad (9.19)$$

невырожденность которого вытекает из следующих соображений. Концевые точки B после трех и более итераций вдоль цепочки $B \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} B$ уходят за пределы B , и потому не могут входить в цикл (9.19). Следовательно, x^* в (9.19) лежит внутри A , а $f^k(x^*) \notin \text{int } A$ при $1 \leq k \leq p-1$. И только $f^p(x^*)$ снова попадает в $\text{int } A$. Поэтому x^* имеет период p . ▶

9.8. Многомерный сценарий

Игрушечная модель (9.15) вызывает естественные ассоциации с реальными динамическими системами. Тем не менее обычные рассуждения о турбулентности с экивоками в сторону одномерного блуждания $x_{m+1} = \lambda x_m(1 - x_m)$ выглядят несерьезно.

³²⁾ Хотя не исключен тривиальный вариант $x^* = f(x^*)$, что невозможно, если в замкнутой цепи существует хотя бы одна пара сегментов с непересекающимися внутренностями, а концевые точки J_k не могут быть неподвижными для f^n по той или иной причине. Например, если концевые точки J_k принадлежат Γ_p , а n и p взаимно просты.

Хотя, надо признать, «теоретические выводы с прикладным уклоном» почти всегда опираются на теоремно необеспеченную аргументацию³³⁾. Физические прозрения проистекают из догадок. А догадки возникают на базе не относящихся к делу теорем, вызывающих побочный резонанс.

Так или иначе, но одномерная безделушка (9.15) издевательски многозначительна. При этом странно, что «исследования вокруг», породившие целые научные дисциплины³⁴⁾, не выходят в общем-то в многомерные пространства, чтобы хоть как-то поддержать измышления Космического толка. Выход в банахово пространство E позволяет осуществить *теория вращения векторных полей*.

Далее рассматривается динамическая система

$$x_{m+1} = f_\lambda(x_m), \quad (9.20)$$

где скалярный параметр λ меняется в некотором диапазоне $[\alpha, \beta]$, а вектор x принадлежит \mathbb{R}^n или даже $x \in E$, но тогда предполагается дополнительно *полная непрерывность* оператора $f_\lambda(x)$. Считается, что f_λ преобразует в себя ограниченную область Ω при любом $\lambda \in [\alpha, \beta]$, замыкание $\bar{\Omega}$ гомеоморфно шару, и поле $I - f_\lambda$ невырождено на Ω . Наконец, неподвижная точка x_λ^* оператора $f_\lambda(x)$ единственна в Ω опять-таки при любом λ .

Для обнаружения циклов Γ_p надо рассматривать векторные поля $I - f_\lambda^p$, нули которых (неподвижные точки f_λ^p),

$$\xi, f_\lambda(\xi), f_\lambda^2(\xi), \dots, f_\lambda^{p-1}(\xi), \quad (9.21)$$

образуют циклы периода p , среди которых всегда есть цикл стоящей на месте точки $x_\lambda^* = f_\lambda(x_\lambda^*)$, и возможны подциклы периода q в случае составного $p = sq$. Что касается циклов Γ_p , то они по определению невырождены, т. е. все точки (9.21) различны.

³³⁾ Стоит упомянуть знаменитую историю открытия омега-минус бариона, предсказанного Гелл-Манном на основе туманной аналогии. История кратко описана и прокомментирована в [3].

³⁴⁾ Символическая динамика, комбинаторная динамика.

9.8.1. По теореме 7.7.3 индексы всех неподвижных точек (9.21), для каждого конкретного ξ , — одинаковы³⁵⁾, т. е.

$$\text{ind}(I - f_\lambda^p, \xi) = \text{ind}(I - f_\lambda^p, f_\lambda(\xi)) = \dots = \text{ind}(I - f_\lambda^p, f_\lambda^{p-1}(\xi)). \quad (9.22)$$

Факт 9.8.1, пребывавший в облике никчемного инструмента, в данном контексте играет первостепенное значение. Поэтому здесь стоит на миг задержаться. Важно обратить внимание, что (9.22) уравнивает индексы точек (9.21) при одном и том же p . Но индексы $\text{ind}(I - f_\lambda^p, \xi)$ и $\text{ind}(I - f_\lambda^{kp}, \xi)$ могут быть различны.

9.8.2. Определение. Систему (9.20) назовем *нормальной*, если она при любом λ не имеет разных циклов Γ_p одного периода p и не имеет циклов с нулевым топологическим индексом (9.22), а об индексах неподвижных точек $x_p(\lambda)$ операторов f_λ^p вне точек бифуркации можно судить по линейным приближениям модели в малых окрестностях $x_p(\lambda)$, т. е. по знакам детерминантов³⁶⁾

$$\left| I - \left(f_\lambda^p(x_p(\lambda)) \right)' \right|. \quad (9.23)$$

В определении 9.8.2 собраны фильтры типичности системы. Хотя, конечно, как посмотреть. Но шаг в омут многомерности далее настолько рискован, что указанные предосторожности не выглядят чрезмерными. Да и не минимизация требований сейчас стоит на очереди. Проблема — в центральном механизме.

9.8.3. Теорема. В указанных выше предположениях нормальная система (9.20) может иметь циклы Γ_p только периодов $p = 2^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, причем при любом фиксированном λ

$$\dots \succ \Gamma_{2^k} \succ \dots \succ \Gamma_4 \succ \Gamma_2 \succ \Gamma_1, \quad (9.24)$$

³⁵⁾ Нули (9.21) поля $x - f_\lambda^k(x)$, само собой, предполагаются изолированными.

³⁶⁾ Другими словами, индексы по разные стороны от точки бифуркации равны ± 1 , и не так легко указать задачи, где бы индексы были другими.

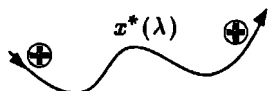
и если в системе существует конечное число циклов, то старший — в смысле (9.24) — цикл Γ_{2^k} имеет индекс $+1$, а индексы всех его подциклов равны -1 .

◀ Поскольку f_λ , равно как и все f_λ^p , отображают $\bar{\Omega}$ в себя, то (п. 3.6.2 плюс п. 4.4.4)

$$\gamma(I - f_\lambda^p, \bar{\Omega}) = 1, \quad p = 1, 2, \dots$$

Соответственно, по теореме 5.1.1 об алгебраическом числе нулей, в силу единственности равновесия $x^*(\lambda)$ (неподвижной точки оператора f_λ), индекс $x^*(\lambda)$ вдоль ветви остается равным $+1$,

$$\text{ind}(I - f_\lambda, x_\lambda^*) = +1.$$

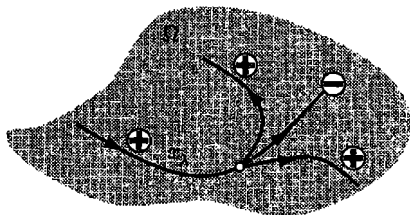


• Далее необходимо рассматривать векторные поля $I - f_\lambda^p$. Множество неподвижных точек оператора f_λ^p содержит цикл³⁷⁾ Γ_p и все его подциклы, включая тривиальный $\Gamma_1 = \{x^*(\lambda)\}$. Таким образом, у f_λ^2 ровно три неподвижные точки: одна $x^*(\lambda)$ и две из Γ_2 . Причем у пары из Γ_2 индексы должны совпадать (п. 9.8.1), а в силу $\gamma(I - f_\lambda^2, \bar{\Omega}) = 1$ и необходимости

$$\gamma(I - f_\lambda^2, \bar{\Omega}) = \sum_j \text{ind}(I - f_\lambda^2, x_j) \quad (\text{теорема 5.1.1})$$

выход из положения единственный: у Γ_2 индексы по $+1$, а у неподвижной точки f_λ , но уже как неподвижной точки f_λ^2 , индекс меняется с $+1$ на -1 . И тогда, как и требуется, $+1 + 1 - 1 = +1$. Визуально бифуркационное ветвление происходит так:

$$x - f_\lambda^2(x) = 0.$$



• У f_λ^3 — четыре неподвижные точки: одна $x^*(\lambda)$ и три из Γ_3 , причем у всех из Γ_3 индексы должны быть равны либо $+1$ либо -1 . Но тогда не удастся удовлетворить теореме об алгебраическом числе нулей с учетом $\gamma(I - f_\lambda^3, \bar{\Omega}) = 1$. Цикл Γ_3 невозможен. По аналогичной причине отсеиваются все циклы за исключением циклов Γ_{2^p} .

³⁷⁾ Элементы траектории.

• Специфика отображения $f_\lambda^{2^k}$ заключена в том, что его множество неподвижных точек включает элементы траекторий всех циклов

$$\Gamma_{2^k}, \dots, \Gamma_4, \Gamma_2, \Gamma_1,$$

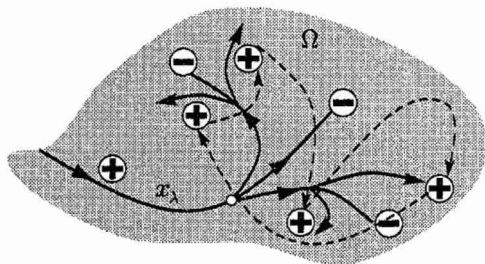
и если элементы Γ_{2^k} имеют индекс $+1$, а индексы его подциклов -1 , то это единственно возможным образом поддерживает вращение на границе³⁸⁾

$$+2^k - 2^{k-1} - \dots - 2^0 = +1.$$

Например, ветвление решений уравнения

$$x - f_\lambda^4(x) = 0$$

естественно происходит следующим образом,



и после второй бифуркации включает четыре точки невырожденного цикла Γ_4 индекса $+1$ и три точки индекса -1 — подциклов Γ_2 и Γ_1 , что обеспечивает необходимую сумму индексов $\gamma(I - f_\lambda^4, \Omega) = +1$.

• Теорема, разумеется, не утверждает существование циклов Γ_p , но допускает только периоды $p = 2^k$, причем если в системе появляется Γ_p , при изменении λ , то гарантируется наличие всех младших, в смысле упорядоченности (9.24), циклов. ►

Результат 9.8.3 держится на *теореме об алгебраическом числе нулей* (п. 5.1.1) и одинаковости индексов любого цикла (9.21) (п. 9.8.1). Определенную роль играет и предположение о нормальности системы 9.8.2, хотя тут кое-что можно убрать с небольшими потерями. Теорема 9.8.3 пострадала бы, но не рухнула, даже если снять ограничение на количество циклов Γ_p одинакового периода p и запрет на обнуление индексов. В системе тогда могли бы

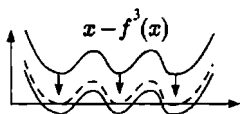
³⁸⁾ Из-за отрицательности индексов все подциклы $\Gamma_{2^{k-1}}, \dots, \Gamma_2, \Gamma_1$ не могут быть асимптотически устойчивы.

появиться другие циклы, в том числе Γ_3 , но отрезок иерархии (9.24) остался бы. С той разницей что, скажем, число циклов Γ_2 с индексом $+1$ выходило бы на один больше, чем с индексом -1 , остальные — с нулевым индексом. Так что механизм удвоения циклов сохраняется и в многомерном сценарии, и ведет к хаосу едва ли не той же дорогой. Вмешательство циклов других периодов либо невозможно, либо вторично по своему эффекту.

9.9. Загадочность циклов типа Γ_3

Циклы Γ_{2^k} возникают в результате ветвления неподвижных точек операторов $f^{2^k}(x)$, — и это более-менее стандартный тип бифуркационных метаморфоз. Привычный и понятный. Цикл Γ_3 возникает из ниоткуда³⁹⁾, если возникает.

Три неподвижные точки ненулевого индекса оператора⁴⁰⁾ $f^3(x)$ не могут «вырасти» из $\xi = f(\xi)$ — сумма индексов будет неподходящей. Остается вроде бы невероятная возможность, когда три неподвижные точки у $f^3(x)$ появляются одновременно «с потолка». Сначала, разумеется, индекс каждой неподвижной точки нулевой, а потом эти точки раздваиваются на точки с противоположными индексами, в результате чего возникают два уже структурно устойчивых цикла Γ_3 .



В скалярном случае это похоже на такую подгонку графика $x - f^3(x)$, чтобы при деформации коснуться оси абсцисс в трех точках синхронно, а потом уже дрейфовать дальше вниз.

Ситуация не выглядит типичной. Поэтому на бегу думается, что феномен Γ_3 — не более чем патология. Но в одномерных моделях-то циклы Γ_3 возникают заурядным образом, реализуя как раз сценарий одновременного появления нулей векторного поля, хотя синхронизацией заниматься вроде бы «некому».

³⁹⁾ То же самое можно сказать о циклах Γ_p простых периодов p .

⁴⁰⁾ Параметр λ у f_λ мы опускаем, чтобы не загромождать обзор.

Рассмотрим для иллюстрации систему $x_{k+1} = f(x_k)$ с кусочно-линейной функцией $f(x)$, где цикл периода 3 вот-вот появится — стоит подключить небольшую деформацию. Загадочность проявляется при построении графика троекратной композиции $f^3(x)$.

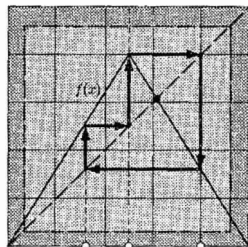
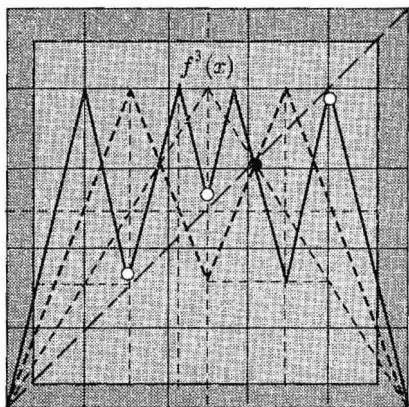
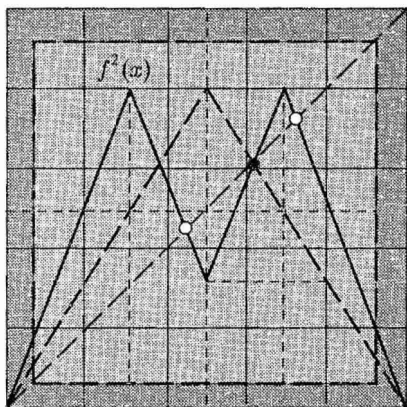


График $f^2(x)$ в данном случае выглядит вполне невинно, а вот график $f^3(x)$ — неожиданно, если «на бегу».



Языки $y = f^3(x)$ кончиками (белые кружочки) синхронно приближаются к прямой $y = x$, как будто ими управляет невидимая рука. В окрестности положения равновесия (черный кружочек) «ничего не происходит», индекс остается равным $+1$.

Фокус, безусловно, заключен в устройстве композиции $f^3(x)$, но природа явления до конца все же не ясна. Особенно смутные впечатления возникают в связи с иерархией (9.16). Обоснование, конечно, просто и понятно, — но оно с того же этажа, что и вопрос. Тогда как хотелось бы — с высоты птичьего полета. Где еще дикий порядок (9.16) подменяет анархию?

9.10. Устойчивость и хаос

Цикл $\Gamma_p = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\}$ в системе ⁴¹⁾

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

мы называем *устойчивым*, если ⁴²⁾ $f^{kp}(x) \rightarrow x_1^*$ при $k \rightarrow \infty$ для x близких к x_1^* , и *неустойчивым* — в противном случае.

Такое определение вызывает естественный ассоциативный отклик. Хотя строго говоря, здесь надо было бы говорить об асимптотической устойчивости, как о сходимости плюс устойчивости АЗ — см. раздел 2.5.

Итак, *устойчивость* цикла характеризуется спектральным радиусом ρ производной Фреше (матрицы Якоби) ⁴³⁾

$$(f^p(x_1^*))'_x = f'_x(x_p^*) \dots f'_x(x_1^*). \quad (9.25)$$

Для устойчивости цикла достаточно $\rho < 1$; $\rho > 1$ влечет за собой неустойчивость.

Теорема 9.8.3, утверждающая отрицательность индексов всех циклов, кроме старшего Γ_{2^k} , тем самым гарантирует неустойчивость всех подциклов $\Gamma_{2^{k-1}}, \dots, \Gamma_2, \Gamma_1$. У старшего цикла топологический индекс равен $+1$, но это не обеспечивает устойчивости, хотя и не исключает. Поэтому для определения бифуркационных значений λ в общем случае надо следить за *сменой индекса* у старшего цикла ⁴⁴⁾, а не за потерей устойчивости Γ_{2^k} , что годится для одномерных моделей.

Что касается циклов за пределами ряда (9.24), — каковые могут возникать в скалярном случае, а также в многомерных вариантах модели (9.20) при ослаблении требований нормальности системы, — то они всегда возникают с нулевым

⁴¹⁾ Как и ранее, под Γ_p подразумевается цикл периода p без подциклов.

⁴²⁾ Разумеется, вместо x_1^* можно взять любую другую точку x_j^* .

⁴³⁾ Спектр матрицы (9.25) не зависит от порядка сомножителей [4, т. 3].

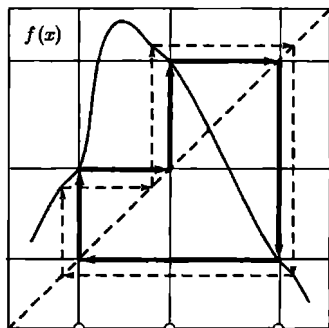
⁴⁴⁾ То есть за сменой знака детерминанта (9.23). Появление циклов все более высокого порядка в модели (9.20) — необязательно. Для этого надо делать те или иные предположения о зависимости $f_\lambda(x)$ от λ .

индексом, т. е. неустойчивыми. И от малейшего возмущения то ли исчезают, «как утренний туман», то ли раздваиваются на циклы с противоположными индексами.

Поэтому из двух близких циклов, скажем Γ_3 , один обязательно неустойчив, другой — может быть. Но если в одномерной модели существует какой-нибудь цикл вне (9.24), то все циклы

$$\dots, \Gamma_{2^k}, \dots, \Gamma_4, \Gamma_2, \Gamma_1$$

неустойчивы, чего вполне хватает для наступления хаоса.



Последнее, конечно, чересчур сильно сказано. Потому что безупречного определения детерминированного хаоса в общем-то нет. Варианты крутятся обычно вокруг перемешивания [4, т. 2, раздел 7.1], расходимости траекторий, плотности орбит либо вообще отсутствия чисто периодических решений. Но в каждом направлении находятся свои подводные камни. Например, повышенная чувствительность к начальным данным нередко преподносится как увеличение с течением времени расстояния между точками. Легко сказать, но как сделать, имея в виду закрытые системы?

9.10.1. Если f отображает в себя метрический компакт C , и

$$\forall x, y \in C : \rho(f(x), f(y)) \geq \rho(x, y),$$

то $\rho(f(x), f(y)) \equiv \rho(x, y)$, и нижний предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x, f^k(x)) = 0$$

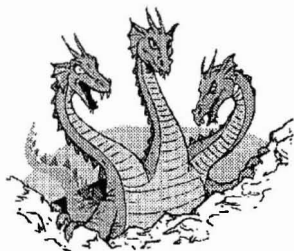
для любого $x \in C$. \triangleleft

Выбирая в качестве f оператор сдвига U_t при некотором t , имеем ту же помеху в непрерывном времени. Выход из положения, конечно, есть, но волокита — как «та же добыча радия».

Глава 10

Многозначные поля

Anything you lack can be trained.



В главе рассматриваются вопросы, связанные с разрешимостью включений

$$0 \in T(x) \text{ либо } x \in T(x).$$

В первом случае говорят о нуле, во втором — о неподвижной точке многозначного векторного поля.

10.1. Причины многозначности

Многозначные отображения возникают всякий раз, когда функции задаются неявно. Скажем, если

$$\Phi(x, y) = 0$$

определяет зависимость $y = T(x)$ — в смысле $\Phi(x, T(x)) \equiv 0$, — то в общем случае нет гарантии, что $T(x)$ однозначная функция. Та же ситуация возникает в связи с оптимизацией. Оператор

$$T(x) = \operatorname{Arg} \max_y \varphi(x, y),$$

как правило, многозначен¹⁾. Аналогичны сценарии в теории игр [4, гл. 7] и других задачах, где зависимости особых состояний от параметров извлекаются из опосредованных моделей.

¹⁾ Но даже если однозначен, на этом бывает удобнее не фокусироваться, допуская многозначность и получая те же самые результаты, — например, с помощью *теоремы Какутани* вместо *теоремы Брауэра*.

Многозначен субдифференциал²⁾ $\partial\varphi(x)$, широко используемый в выпуклом анализе, с помощью которого положение минимума x^* выпуклой функции $\varphi(x)$ характеризуется условием

$$0 \in \partial\varphi(x^*), \quad (10.1)$$

т. е. x^* обязан быть нулем многозначного векторного поля $\varphi(x)$.

Еще один источник интереса к многозначным объектам — дифференциальные включения

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad (10.2)$$

где $F(x, t)$ возникает опять-таки из рассмотрения ситуаций, изначально описываемых обычными функциями. Скажем, неявное дифференциальное уравнение

$$f(\dot{x}, x, t) = 0$$

может быть записано в виде (10.2) с оператором

$$F(x, t) = \{y : f(y, x, t) = 0\},$$

а дифференциальное неравенство

$$f(\dot{x}, x, t) \geq 0$$

принимает вид (10.2), если положить

$$F(x, t) = \{y : f(y, x, t) \geq 0\}.$$

Происхождение (10.2) бывает другим. В *системах с переменной структурой*, например, движение возможно по траекториям одной из двух систем

$$\dot{x} = f(x; 0) \quad \text{либо} \quad \dot{x} = f(x; 1), \quad (10.3)$$

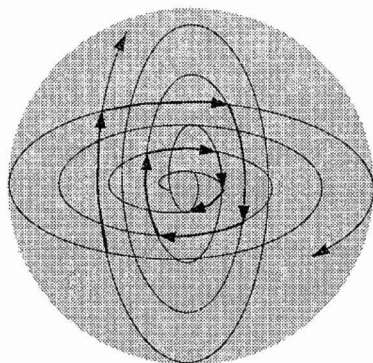
что естественно описывать как

$$\dot{x} = f(x; u), \quad (10.4)$$

где u может принимать одно из двух значений: 0 или 1.

²⁾ А также субдифференциал Кларка [4, г. 7], пригодный для исследования невыпуклых функций.

Разумное переключение параметра u способно обеспечивать неожиданные эффекты. Скажем, если движение в обоих случаях (10.3) происходит по раскручивающимся спиральям, то надлежащее переключение u , как показано на рисунке (10.5), может превратить систему в устойчивую.



(10.5)

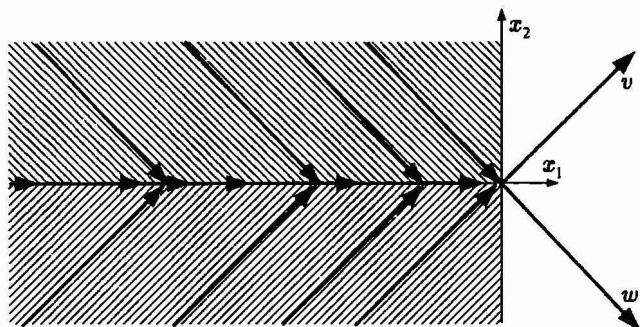
Запись (10.4) вызывает ассоциации с задачей управления

$$\dot{x} = f(x; u), \quad u \in U. \quad (10.6)$$

В том и другом случае все укладывается в схему (10.2), если положить

$$F(x, t) = \{y : y = f(x; u), \quad u \in U\}.$$


В случае двухточечного множества U система мечется меж двух огней, но необязательно в духе (10.5). При бесконечно быстром переключении могут возникать *скользящие режимы*.



(10.7)

Если, например, в (10.3) $f(x; 0) \equiv v$, $f(x; 1) \equiv w$, и переключение между системами

$$\dot{x} = v, \quad \dot{x} = w$$

происходит на оси x_1 , то возникает скользящее движение вдоль x_1 , как на рис. (10.7). Такое движение обычно мыслится как предел зигзагообразного движения  при уменьшении «перерегулирования».

Предельные переходы подобного рода являются самостоятельной головной болью, для избавления от которой применяется специальное теоремное сопровождение, меняющее облик первоначальной задачи. Производная в (10.2) заменяется так называемой *контингентией*, в результате чего $\dot{x} \in F(x, t)$ переходит в $\text{cont } x \subset F(x, t)$. Множество U при этом естественным образом овыпукливается, что узаконивает скользящие режимы. Но это другая история, которая нас здесь не интересует.

10.2. Замкнутые отображения

Многозначным отображением $T : X \rightarrow 2^Y$ называется оператор, сопоставляющий каждому элементу $x \in X$ некоторое непустое подмножество множества Y , т. е. $T(x) \subset Y$ для любого $x \in X$.

Далее отображения $T : X \rightarrow 2^Y$ предполагаются *ограниченными*, переводящими каждое ограниченное множество $A \subset X$ в ограниченное множество

$$T(A) = \bigcup \{T(x) : x \in A\}.$$

10.2.1. Определение. *Многозначное отображение $T : X \rightarrow 2^Y$ называется замкнутым, если его график*

$$Z = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X, y \in T(x)\}$$

замкнут в $X \times Y$.

Замкнутые отображения называют также *полунепрерывными сверху*³⁾. В частном случае, когда $T(x)$ оказывается однозначным отображением, его замкнутость, или полунепрерывность сверху, равносильна обычной непрерывности. Первоначальное знакомство с операторами вида $T : X \rightarrow 2^Y$ сопровождается обычно дополнительной атрибутикой: *полунепрерывность снизу, непрерывность по Какутани* и т. п. Все это малополезно, но необходимо как любое «оформление документов». Что же касается полунепрерывности сверху, то она проходит красной нитью через большинство приложений.

Время от времени на авансцену выходит *непрерывность по Хаусдорфу*, возникающая в рамках следующей схемы. Допустим, все образы отображения $T : X \rightarrow 2^Y$ компактны. Если через Y_C обозначить множество всех компактных подмножеств множества Y , то T можно рассматривать как обычное однозначное отображение $T : X \rightarrow Y_C$. Если при этом Y_C метризовано с помощью *метрики Хаусдорфа*⁴⁾, то о непрерывности T можно говорить как о непрерывности однозначного отображения $T : X \rightarrow Y_C$. В этом случае T считается *непрерывным по Хаусдорфу*.

10.3. Отображения с выпуклыми образами

Пусть Ω обозначает ограниченную область в \mathbb{R}^n , многозначное отображение T задано на $\bar{\Omega}$, и образы $T(x) \subset \mathbb{R}^n$ выпуклы при любом $x \in \bar{\Omega}$.

Выпуклость образов $T(x)$ характерна для большинства приложений. *Субдифференциал* и даже *субдифференциал Кларка* [4, т. 7] имеют выпуклые образы,

³⁾ При исключении из сценария требования ограниченности образов возникает некоторая турбулентность во взаимодействии понятий [2].

⁴⁾ *Метрика Хаусдорфа* конструируется следующим образом. Для множеств $A, B \subset Y$ *уклонение* A от B определяется как

$$\delta(A, B) = \sup_{z \in A} \rho(z, B) = \sup_{z \in A} \inf_{y \in B} \rho(z, y),$$

где ρ — метрика в Y . *Хаусдорфовым расстоянием* между A и B называется максимальное из уклонений $\delta(A, B)$, $\delta(B, A)$.

а в задачах управления овыпукливание образов неизбежно, если допускаются быстрые переключения управляющих параметров.

Многозначное отображение $T(x)$ называют также *многозначным векторным полем*, а точку x , в которой $0 \in T(x)$, — *нулем многозначного поля*. Поле $T(x)$ считается невырожденным на множестве Γ , если на Γ оно не имеет нулей. Изучаемые далее поля предполагаются невырожденными на границах $\dot{\Omega}$ рассматриваемых областей. Теория вращения многозначных полей во многом аналогична теории вращения обычных векторных полей и опирается на следующую аппроксимационную конструкцию.

10.3.1. *В силу компактности $\dot{\Omega}$ при любом $\varepsilon > 0$ в $\dot{\Omega}$ существует ε -сеть*

$$L_\varepsilon = \{x_1, \dots, x_N\}.$$

В каждом множестве $T(x_i)$ фиксируем произвольную точку $y_i \in T(x_i)$, и определим N весовых функций

$$\alpha_{i\varepsilon} = \frac{\Theta_{i\varepsilon}(x)}{\sum_j \Theta_{j\varepsilon}(x)},$$

где $\Theta_{j\varepsilon}(x) = \max\{0, \varepsilon - \|x - x_j\|\}$. Заметим, что $\sum \Theta_{j\varepsilon}(x) > 0$ для любого $x \in \dot{\Omega}$, поскольку набор точек x_j образует ε -сеть.

Назовем теперь однозначное отображение

$$t(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_{j\varepsilon}(x) y_i \quad (10.8)$$

ε -аппроксимацией отображения $T(x)$.

10.3.2. Определение. *Пусть отображение $T(x)$ (с выпуклыми образами) невырождено на $\dot{\Omega}$ и замкнуто. В этом случае вращением $\gamma(T, \dot{\Omega})$ многозначного векторного поля $T(x)$ на $\dot{\Omega}$ назовем вращение однозначного векторного поля (10.8) на $\dot{\Omega}$ при достаточно малых ε .*

◀ Проверка корректности определения в данном случае сводится к проверке независимости вращения ε -аппроксимаций (10.8) от выбора ε -сети (при достаточно малых ε) и от выбора точек y_j .

В силу невырожденности T на $\hat{\Omega}$ любое замкнутое выпуклое множество $T(x)$ не содержит нуля. Поэтому существует некоторая выпуклая окрестность U множества $T(x)$, также не содержащая нуля. Но так как отображение T полунепрерывно сверху, то в U лежат все образы $T(y)$ точек y из некоторой окрестности V исходной точки x . Таким образом, каждой точке $x \in \hat{\Omega}$ можно поставить в соответствие шаровую окрестность V_x , обладающую тем свойством, что ее образ $T(V_x)$ лежит в выпуклом множестве, не содержащем нуля. Из покрытия компакта $\hat{\Omega}$ открытыми шарами V_x выберем конечное подпокрытие. Пусть такое подпокрытие образуют шары V_1, \dots, V_m .

10.3.3. Лемма. *Существует такое $\delta > 0$, что шар радиуса δ с центром в любой точке $x \in \hat{\Omega}$ целиком лежит в одном из множеств V_1, \dots, V_m .*

◀ Пусть $\varepsilon(x)$ обозначает максимальный радиус шара с центром в x , целиком лежащего в одном из множеств V_1, \dots, V_m . Очевидно,

$$\varepsilon(x) \geq \varepsilon(y) - \|x - y\|, \quad \varepsilon(y) \geq \varepsilon(x) - \|x - y\|$$

для достаточно близких точек x, y . Отсюда $|\varepsilon(x) - \varepsilon(y)| \leq \|x - y\|$, т. е. функция $\varepsilon(x)$ непрерывна на $\hat{\Omega}$. Для завершения доказательства достаточно положить

$$\delta = \min\{\varepsilon(x) : x \in \hat{\Omega}\}. \quad \triangleright$$

Возьмем любую ε_1 -сеть и любую ε_2 -сеть ($\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \delta/2$) на $\hat{\Omega}$, и пусть

$$t_1(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_{j\varepsilon_1}(x) y_i, \quad t_2(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_{j\varepsilon_2}(x) z_i \quad (10.9)$$

соответствующие однозначные аппроксимации вида (10.8). Для произвольного $x \in \hat{\Omega}$ в суммах (10.9) ненулевые коэффициенты могут быть только при тех y_i, z_i , которые принадлежат образу δ -окрестности точки x . Но этот образ лежит в одном из образов $T(V_k)$, который, в свою очередь, лежит в некотором выпуклом множестве, не содержащем нуля. Поэтому в любой точке $x \in \hat{\Omega}$ все векторы y_i, z_i , коэффициенты при которых в (10.9) отличны от нуля, также лежат в выпуклом множестве, не содержащем нуля. Отсюда вытекает невырожденность и непротивоположная направленность однозначных полей $t_1(x), t_2(x)$ на $\hat{\Omega}$, что влечет за собой их гомотопность. Корректность определения вращения многозначного поля доказана. ▶

10.4. Теоремы о неподвижных точках

После того как $\gamma(T, \hat{\Omega})$ сведено к вращению однозначной аппроксимации (10.8), теория вращения многозначных полей развивается проторенными путями. Доказательства фактически не требуются. Достаточно ссылок на скалярные аналоги пп. 3.5, 3.6.

10.4.1. Определение. Многочисленные векторные поля $T_0(x)$ и $T_1(x)$ называются гомотопными на $\dot{\Omega}$, если существует замкнутое по совокупности переменных многочисленное отображение (с выпуклыми образами) $H(x, t)$ ($x \in \dot{\Omega}$, $t \in [0, 1]$), такое что при любом $t \in [0, 1]$ поле $H(x, t)$ невырождено на $\dot{\Omega}$ и

$$H(x, 0) \equiv T_0(x), \quad H(x, 1) \equiv T_1(x).$$

10.4.2. Теорема. Гомотопные многочисленные векторные поля имеют одинаковые вращения.

10.4.3. Лемма. Если многочисленное векторное поле T невырождено на замыкании $\bar{\Omega}$, то $\gamma(T, \dot{\Omega}) = 0$.

◀ При достаточно малых ε аппроксимации (10.8)⁵⁾ поля T невырождены на $\bar{\Omega}$. Далее остается сослаться на лемму 3.5.4. ▶ Такому образцу следуют и другие доказательства.

10.4.4. Теорема. Пусть $\gamma(T, \dot{\Omega}) \neq 0$. Тогда включение $0 \in T(x)$ разрешимо в Ω , т. е. существует точка $x^* \in \Omega$, в которой

$$0 \in T(x^*).$$

10.4.5. Теорема. Если при любом $x \in \dot{\Omega}$ произвольные векторы $y_1 \in T_1(x)$, $y_2 \in T_2(x)$ не направлены противоположно, то поля $T_1(x)$ и $T_2(x)$ гомотопны.

Теорему Брауэра обобщает получившая широкое распространение

10.4.6. Теорема Какутани. Пусть многочисленное отображение $T(x)$ переводит в себя замкнутый шар B , т. е. $T: B \rightarrow 2^B$. Тогда у T в B есть неподвижная точка $x^* \in T(x^*)$.

◀ Без ограничения общности центр шара B можно считать расположенным в нуле. Предположим противное: T не имеет неподвижной точки в B . Тогда поле $x - T(x)$ невырождено на сфере \dot{B} и, в силу $T(B) \subset B$, векторы $x \in \dot{B}$ и $x - y$ при любом $y \in T(x)$ — непротивоположно направлены, иначе точке y пришлось бы лежать на продолжении радиус-вектора $x \in \dot{B}$, что противоречит условию $T(B) \subset B$. Далее решает ссылка на теорему 10.4.5. ▶ Обратим

⁵⁾ Имеются в виду ε -аппроксимации не на границе, а на замыкании $\bar{\Omega}$.

внимание, что схема доказательства почти слово в слово повторяет обоснование теоремы 3.6.2. Такая аналогия имеет место и для следующих результатов.

10.4.7. Теорема. Пусть $0 \in \Omega$ и $x \cdot y \geq 0$ для любой пары векторов

$$x \in \dot{\Omega}, \quad y \in T(x). \quad (10.10)$$

Тогда включение $0 \in T(x)$ разрешимо в $\bar{\Omega}$.

10.4.8. Теорема. Пусть $0 \in \Omega$ и $x \cdot y \leq x \cdot x$ для любой пары векторов (10.10). Тогда отображение T имеет неподвижную точку $x^* \in \bar{\Omega}$.

10.4.9. Теорема. Пусть $0 \in \Omega$ и для любой пары векторов (10.10) существует индекс i , такой что $x_i y_i > 0$. Тогда включение $0 \in T(x)$ разрешимо в Ω .

10.4.10. Теорема. Пусть $0 \in \Omega$ и $y \neq \lambda x$ для любой пары векторов (10.10) и любого $\lambda > 1$. Тогда отображение T имеет неподвижную точку $x^* \in \bar{\Omega}$.

Аналогию с однозначными отображениями можно было бы продолжить. Так, например, легко доказать аналоги теорем о существовании у многозначных отображений собственных векторов, т. е. о разрешимости включений $\lambda x \in T(x)$ при некотором λ . Для многозначных отображений справедлива также теорема об алгебраическом числе неподвижных элементов поля, аналогичная теореме 5.1.1. Под неподвижными элементами в данном случае понимаются связные множества нулей многозначного поля, и речь идет об изолированных неподвижных элементах, имеющих непересекающиеся окрестности.

В приведенных выше теоремах фигурируют различные предположения относительно пары векторов (10.10). Эти предположения было бы полезно ослабить, требуя справедливости тех или иных условий не для любого $x \in \dot{\Omega}$ и любого $y \in T(x)$, а для любого $x \in \dot{\Omega}$ и некоторого $y \in T(x)$. В отдельных случаях такое послабление возможно. Вот два примера соответствующих утверждений, первое из которых обобщает теорему Какутани.

10.4.11. Пусть B — замкнутый шар и для любого $x \in \dot{B}$ некоторый вектор $y \in T(x)$ принадлежит B , т. е. пересечение любого образа $T(x)$ ($x \in \dot{B}$) с B не пусто. Тогда у T в B есть неподвижная точка $x^* \in T(x^*)$.

◀ Сначала заметим, что теорема Какутани остается справедливой, если T переводит в B не весь шар B , а лишь его границу (только это и было использовано в доказательстве теоремы 10.4.6). В данном случае этому условию удовлетворяет отображение $B \cap T(x)$. Далее желаемый вывод обеспечивается ссылкой на п. 10.4.6). ▶

10.4.12. Теорема. Пусть $0 \in \Omega$ и $x \cdot y \geq 0$ для любого $x \in \dot{\Omega}$ и некоторого $y \in T(x)$. Тогда включение $0 \in T(x)$ разрешимо в $\bar{\Omega}$.

◀ Положим $P(x) = \{z : x \cdot z \geq 0\}$. Отображение $P(x) \cap T(x)$ удовлетворяет предположениям теоремы 10.4.7. ▶

Сокращения и обозначения

◀ и ▶ — начало и конец рассуждения, темы, доказательства

▷ — утверждение приводится без доказательства

◁ — утверждение легко может быть доказано

(?) — предлагает проверить или доказать утверждение в качестве упражнения, либо довести рассуждение до «логической точки»

(!) — предлагает обратить внимание

«в томм случае» — «в том и только том случае»

$A \Rightarrow B$ — из A следует B

$x \in X$ — x принадлежит X

$X \cup Y, X \cap Y, X \setminus Y$ — объединение, пересечение и разность множеств

$X \subset Y$ — X подмножество Y , в том числе имеется в виду возможность

$X \subseteq Y$, т. е. между $X \subset Y$ и $X \subseteq Y$ различия не делается

\sim — отношение эквивалентности, определяемое контекстом

\emptyset — пустое множество

$\bar{\Omega}$ — замыкание Ω

$\dot{\Omega} = \partial\Omega$ — граница Ω

2^Ω — множество всех подмножеств множества Ω

\mathbb{N} — множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$

\mathbb{Z} — группа целых чисел $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ по сложению

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ — вещественная прямая

\mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство

\exists — квантор существования

\forall — квантор общности

S^{n-1} — единичная сфера в \mathbb{R}^n

I_X — тождественное отображение $X \rightarrow X$

\succsim — знак полуупорядоченности по конусу K ; $x \succsim y$ означает $x - y \in K$;
а векторное неравенство $x \succ y$ означает $x - y \in \text{int } K$

K_+ — конус неотрицательных функций

\mathbb{R}_+^n — неотрицательный ортант

$x \cdot y = \langle x, y \rangle$ — скалярное произведение векторов x и y

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ — производная по времени

$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x$ — частная производная функции u по переменной x

$\nabla f(x)$ — градиент функции $f(x)$

Литература

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М., 2004.
2. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: URSS, 2005.
3. Босс В. Интуиция и математика. Изд. 3-е. М.: URSS, 2008.
4. Босс В. Лекции по математике. Т. 1: Анализ; Т. 2: Дифференциальные уравнения; Т. 3: Линейная алгебра; Т. 4: Вероятность, информация, статистика; Т. 5: Функциональный анализ; Т. 6: От Диофанта до Тьюринга; Т. 7: Оптимизация; Т. 8: Теория групп; Т. 9: ТФКП; Т. 10: Перебор и эффективные алгоритмы; Т. 11: Уравнения математической физики; Т. 12: Контрпримеры и парадоксы; Т. 13: Топология; Т. 14: Теория чисел. М.: URSS, 2004–2010.
5. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения. М.: Мир, 1968.
6. Емельянов С. В., Коровин С. К., Бобылев Н. А., Булатов А. В. Гомотопии экстремальных задач. М.: Наука, 2001.
7. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М., 1988.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
9. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
10. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
11. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы: метод положительных операторов. М.: Наука, 1985.
12. Лэм Дж. Л. Введение в теорию солитонов. М., 2000.
13. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.
14. Опойцев В. И. Нелинейная системостатика. М.: Наука, 1986.

15. *Опойцев В. И.* Обращение принципа сжимающих отображений // УМН. 1976. 31, вып. 4. С. 169–198.
16. *Опойцев В. И.* Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Тр. Моск. матем. об-ва. 1978. 36. С. 237–273.
17. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. Изд. 6-е. М.: КомКнига/URSS, 2007.
18. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М., 1980.
19. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: URSS, 2001.

Предметный указатель

Автоколебание 98

атлас 61

ахиллесово направление 52

Базис стандартный 63

бифуркация 176

Вариация 120

векторное поле 41

— — многозначное 211

верхняя граница 173

внедиагональная

монотонность 148

— отрицательность 164

— положительность 147

вполне непрерывное поле 119

— непрерывный оператор 119

вращение векторного поля 44

— вполне непрерывного

векторного поля 122

— линейного поля 53

— положительного поля 141

входной сигнал 12

вынужденное колебание 97

выходной сигнал 12

Гетеротонный оператор 153

гладкая гомотопия 63

— изотопия 67

гомеоморфизм 60

— локальный 60

гомеоморфные пространства 60

гомотопные отображения 48

Диагональное расщепление

оператора 153

диффеоморфизм 60

диффеоморфные

пространства 61

дифференциал Гато 120

— Фреше 120

дифференцируемость

по Фреше 120

Задача Коши 95

Иерархия циклов

Шарковского 193

импульсная переходная

функция 12, 101

индекс на бесконечности 79

— нуля 77

— цикла 116

интегральный оператор

Вольтерра 32

Карта 61

— локальная 61

карты согласованные 61

касательное пространство 62

катастрофа сборки 112, 186

компакт 119

компактность в себе 120

конус 136

— воспроизводящий 138

— вполне правильный 138

— матричный 150

- миниедральный 173
- неотрицательных функций 137
- нормальный 138
- правильный 138
- сильно миниедральный 173
- телесный 138
- конусный отрезок 139
- критическая точка 64
- критическое значение 64

- Лемма Кнастера—Куратовского—Мазуркевича** 56
- липшицевость 25
- локальная эквивалентность функций 108
- локальные координаты 62

- Матрица монодромии** 99
- метрика Биркгофа 159
- Хаусдорфа 210
- многообразии гладкое 62
- с краем 62
- множество компактное 119
- предкомпактное 119
- морсовское I -седло 108
- мультипликатор 99

- Накрытие конуса** 167
- направляющий потенциал 105
- невырожденная деформация 48
- неотрицательный ортант 82
- непрерывность
 - по Хаусдорфу 210
- неявная функция 34
- норма евклидова 29
- кубическая 29
- линейного оператора 30
- матрицы 30
- октаэдрическая 29
- подчиненная 30
- спектральная 30
- столбцовая 30
- строчная 30
- нуль векторного поля 42, 53, 77

- Обезьянье седло** 108
- ограниченность по конусу 173
- оператор Гаммерштейна 121, 155
- гетерогенный 154
- монотонный 137
- положительный 137
- сдвига 95
- сильно положительный 158
- суперпозиции 154
- Урысона 119
- ориентация положительная 63
- стандартная 63
- отображение замкнутое 209
- многозначное 209
- полунепрерывное сверху 210

- Подвижно гомотопные функционалы** 110
- положительно гомотопные отображения 142
- полуупорядоченность 137
- пример Какутани 118
- Урысона 28
- принцип Браудера 89
- Лере—Шаудера 125
- сжимающих отображений 24, 25
- Шаудера 125
- проектор Шаудера 121
- производная Гато 120
- на бесконечности 80
- Фреше 120
- пространство E_n 161

- Равновесие по Нэшу** 15
 равномерная
 невыврожденность 118
 растяжение конуса 146
 реакция Белоусова—Жаботинского 17
 регулярная точка 64
 регулярное значение 64
- Сжатие конуса** 146
 сжимающее отображение 24
 сильная производная 120
 слабая производная 120
 сопутствующая динамическая система 157
 сопутствующий оператор 153
 степень отображения 49, 66
 структурная устойчивость вращения 73
- Теорема Адамара** 35
 — Бобылева 110
 — Брауэра 55
 — Какутани 213
 — Красносельского 180
 — о неявной функции 33
 — Парусинского 109
 — Перрона 174
 — Сарда 64
 — Хопфа 74
 — Шарковского 194
 теоремы родственности 130
- тильда-оператор 153
 точка невозвращаемости 103
 — смены индекса 179
 точная верхняя граница 173
 — нижняя граница 173
 трансверсальность 116
- Уравнение в вариациях** 96
 — Дурффинга 98
- Факториальная сходимость** 32
 формула произведения вращений 79
 функционализация параметра 85
 функция Грина 12
 — последования 115
- Цикл** 115, 116
 — невырожденный 192
- Число Рейнольдса** 83
- Эквивалентность критических точек** 108
- K*-растяжение конуса 164
K-сжатие конуса 164
P-отображение 58
 — локально универсальное 170
 — универсальное 169
 — — по приращению 170
 u_0 -измеримый элемент 161
 u_0 -норма 161