И.Ф. ШАРЫГИН В.И.ГОЛУБЕВ

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

11

И.Ф. ШАРЫГИН В.И. ГОЛУБЕВ

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ 11 КЛАССА
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ**

*Рекомендовано
Главным учебно-методическим управлением
общего среднего образования
Госкомитета СССР по народному образованию*

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1991

Предисловие

Настоящее пособие является второй книгой факультатива «Решение задач» (см.: Ш а р ы г и н И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк.— М.: Просвещение, 1989), формальная цель которого — подготовить выпускника средней школы к сдаче конкурсного экзамена по математике и продолжению образования в вузах, где дисциплины математического цикла относятся к числу ведущих, профилирующих.

Эта декларируемая цель скрывает, маскирует целый ряд других, возможно, более социально значимых целей. Главное — математическое развитие. Поэтому стоит напомнить совет, данный читателю в предисловии к первой книге. Не следует заранее ограничивать себя сверху каким-либо определенным уровнем. Чем глубже изучите вы предлагаемый материал, чем дальше продвинетесь по цепочке задач внутри каждого параграфа, а задачи эти расположены в основном по возрастанию сложности, тем лучше.

Кто познакомился с первой книгой, смог убедиться, что диапазон сложности, в котором расположен задачный материал, весьма велик. Можно даже сказать о преобладании достаточно трудных задач, хотя и не очень сильный ученик найдет материал, соответствующий его возможностям. Вероятно, не так много, как ему хотелось бы, но все же.

Тенденция к более сложным задачам определена как целями факультатива, так и основными методическими принципами. Надо постоянно работать на предельных и даже запредельных высотах. Длительная и напряженная работа над достаточно трудной задачей и последующим (в случае как успеха, так и неуспеха) изучением решения, данного в пособии, полезнее десятка одноходовых и стереотипных примеров. Даже чисто технические навыки лучше отрабатывать на содержательном материале, чем посредством специально подобранных упражнений.

Обе книги являются книгами для учащихся. И если вы достаточно хорошо владеете школьной программой, то вполне можете заниматься по этому пособию самостоятельно. Никаких знаний, выходящих за школьные рамки, не требуется. Однако лучше, если эти занятия будут организованы посредством школьного или межшкольного факультатива и проводиться под руководством учителя.

Думается, что предлагаемые пособия будут полезными и учителю, ведущему занятия в классе с углубленным изучением математики, при этом сам факультатив стоит ввести вовнутрь обычного урока, «растворить» в нем.

Вторая книга существенно опирается на первую. Полезно, работая по материалу второй книги, одновременно регулярно возвращаться к первой, поэтому здесь на нее даются ссылки с указанием номера задачи и параграфа, например: X, 34, § 7, а в конце факультативного курса провести повторение по материалам обеих книг. Очень важно выделить основные идеи, пронизывающие весь курс. Так, ведущие принципы и методы решения алгебраических уравнений и неравенств остаются таковыми и для тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений и неравенств. Многие идеи, рассмотренные в теме «Квадратный трехчлен» первой книги, получают свое продолжение и развитие в теме «Нестандартные задачи» второй книги. Следует также обратить внимание читателя на то, что в этих двух темах и большинстве других большое внимание уделяется методам, основанным на наглядно-геометрических интерпретациях. С одной стороны, это обстоятельство носит отпечаток авторских вкусов и пристрастий, с другой — подобные методы имеют ярко выраженный развивающий характер. Акцентируя внимание на них, мы рассчитываем в определенной мере компенсировать недостатки геометрического развития, присущие многим выпускникам средней школы, а также подчеркиваем первичность и приоритетность геометрических представлений в элементарной математике и математике вообще.

Особое положение темы «Основы математического анализа» обусловлено, кроме очевидных причин, также и специфическими методическими принципами, которые должны определять структуру и содержание соответствующего раздела школьного математического курса. Для школ и классов негуманитарных типов эти принципы в определенной мере аналогичны принципам, определяющим роль компьютера в школе. Главное — приложения. Надо научиться осознанно и грамотно пользоваться аппаратом математического анализа (компьютером), не слишком вникая в теоретические детали и обоснования (устройство компьютера), имея о них общие представления.

Также особняком стоит § 5 «Планиметрия». Во-первых, в него включены разделы, которые для большей части абитуриентов не имеют практического значения (геометрические места точек, построения и др.). А во-вторых, включенные в него задачи конкурсного типа достаточно трудны. По уровню сложности они соответствуют конкурсным задачам некоторых ведущих вузов и олимпиадным задачам. Переходить к изучению этого параграфа можно лишь в том случае, если вы «переросли» § 3 «Планиметрия» первой книги. Вполне можно на втором году факультатива продолжать работать по материалам первой книги.

С точки зрения подготовки непосредственно к конкурсному экзамену в технические (и многие другие) вузы наиболее значимы § 1 и 2. Здесь много типичных и традиционных задач конкурсного экзамена. Сделаем в связи с этим одно замечание, относящееся к обеим книгам факультатива. Многие читатели, возможно с неудовольствием, обратили внимание на отсутствие ссылок, традиционных для сборников конкурсных задач: когда и где та или иная задача фигурировала на экзамене. Сделано это, конечно же, сознательно. Подобная информация скорее вредна, чем полезна. Многие вузы не имеют своей четкой концепции конкурсного экзамена. Кроме того, готовиться надо не в конкретный вуз, а на определенном уровне.

В первых двух параграфах, особенно в § 1, немало уравнений и иных задач, решаемых при помощи специфических приемов, многие из которых далеки от идей и методов современной математики. Да и сам этот тип задач — решить уравнение — сегодня встречается лишь в школе. И все же не стоит торопиться в архив. Для развития интеллектуальной мускулатуры, как и физической, необходимы разнообразные снаряды и упражнения, необязательно встречающиеся в реальной жизни.

Работа над текстом книги распределилась следующим образом: § 1, 5, 6 — И. Ф. Шарыгин, § 2 — И. Ф. Шарыгин (вводная часть, задачи), В. В. Затакавай (задачи), § 3, 4 — И. Ф. Шарыгин (вводная часть, задачи), В. И. Голубев (задачи).

§ 1. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Выделим прежде всего два наиболее часто встречающихся типа задач, содержащих тригонометрические функции: преобразование тригонометрических выражений и решение тригонометрических уравнений или систем уравнений. Анализ различных сборников задач по математике показывает, что задачи именно этих двух типов представляют в них абсолютное большинство. Все прочие виды задач можно объединить под заглавием «Разные задачи».

1. Некоторые дополнительные тригонометрические формулы

Одно из важнейших умений, которое необходимо развить при изучении темы «Тригонометрия»,— это умение выполнять достаточно сложные преобразования тригонометрических выражений. Для этого следует для начала расширить, по сравнению со школьным учебником, запас основных, «рабочих» формул. Приведем небольшой список таких формул.

(1) $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$,

(2) $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$,

(3) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

(4) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,

(5) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,

(6) $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$,

(7) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$,

(8) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$,

$$(9)\quad \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$(10)\quad \operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$(11)\quad \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$(12)\quad \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

Все приведенные здесь формулы доказываются несложно. Так, для проверки справедливости формул (7) — (12) достаточно применить к стоящим в правых частях тригонометрическим функциям соответствующие формулы, выражающие функцию от суммы или разности аргументов через функции отдельных аргументов. Группа формул (3) — (6) получается из группы (7) — (9), по существу, «направлением» чтения — справа налево. Если мы обозначим $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$, откуда $\alpha=\frac{x+y}{2}$, $\beta=\frac{x-y}{2}$, и заменим α и β в формулах (7) — (9) на x и y, то получим с точностью до обозначений (вместо α и β будут x и y) формулы (3), (5) и (6). Формула (4) получается из формулы (3) заменой β на $-\beta$. Обратим внимание также на то, что формулы (1), (2) являются частным случаем формул (8), (9) (положим в формулах (8), (9) $\alpha=\beta$).

Начнем наш обзор с решения «разных» задач.

2. Разные задачи

А. **Вычисление и сравнение значений тригонометрических функций**

В частности, сюда относятся задачи, в которых требуется определить знак тригонометрического выражения. При этом следует различать задачи, в которых тригонометрические функции имеют аргумент, заданный градусной мерой, и задачи, в которых аргумент — число.

1. *Определить знак числа* $\sin 355$.

Решение. Нам надо определить, в какой четверти расположен угол, соответствующий 355 радианам. Легко проверить, что $112\pi<355$ $(112\pi<112\cdot 3{,}15<355)$. Так же легко проверяется, что $114\pi>355$. Сложнее выяснить, что больше: 113π или 355. Лишь взяв π с семью знаками после запятой (!), из неравенства $3{,}1415926<\pi<3{,}1415927$ найдем, что $113\pi<355$, а $113\pi+\frac{\pi}{2}>355$.

Таким образом, рассматриваемый угол расположен в третьей четверти, его синус отрицателен.

2. *Что больше:* $\sin 10$ *или* $\sin 11$?

Решение. Стандартный путь состоит в следующем. Рассмотрим разность $\sin 11 - \sin 10$, по формуле (4) преобразуем ее в произведение $2 \sin 0{,}5 \cos 10{,}5$. Поскольку угол (0,5) находится в первой четверти, то $\sin 0{,}5 > 0$.

Остается выяснить, где расположен угол 10,5. Поскольку $3\pi < 10{,}5 < 3\pi + \frac{\pi}{2}$, то $\cos 10{,}5 < 0$. Следовательно, $\sin 11 < \sin 10$.

Если бы речь шла о сравнении разноименных функций $\sin \alpha$ и $\cos \beta$, то сначала следовало бы одну из них перевести в другую. Например, заменить $\cos \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$.

3. *Вычислить:* а) $\cos 105°$; б) $\sin 2 \arcsin \frac{1}{3}$; в) $\sin 18°$.

Решение. а) Имеем $\cos 105° = \cos(60° + 45°) = -\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$.

б) Наша задача эквивалентна следующей: найти $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, т. е. $\cos \alpha \geqslant 0$.

Имеем $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

в) Известно, что сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность радиусом R, равна $\frac{\sqrt{5}-1}{2} R$ (X, 34, § 7)*. Стороне десятиугольника соответствуют вписанные углы в 18°. Следовательно, $2R \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R$, $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Б. **Графики тригонометрических функций. Периодичность и непериодичность**

Ограничимся рассмотрением графиков функций, задаваемых в виде формул, содержащих символы обратных тригонометрических функций.

4. *Построить графики функций:* а) $y = \cos 2 \arcsin x$; б) $y = \arccos \cos x$.

Решение. а) Заметим, что данная функция определена при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Далее, по определению $\arcsin x$: если обозначить $\arcsin x = \alpha$, то $\sin \alpha = x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Таким образом, $y = \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2x^2$. Графиком функции будет дуга параболы $y = 1 - 2x^2$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 1).

б) Данная функция является периодической, ее значения не меняются при замене x на $x + 2\pi$. Построим сначала ее график для $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Если $0 \leqslant x \leqslant \pi$, то $y = x$. Это следует из определения арккосинуса: если $y = \arccos \cos x$, то $\cos y = \cos x$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$. А по-

* См. предисловие.

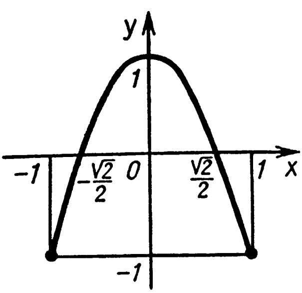


Рис. 1

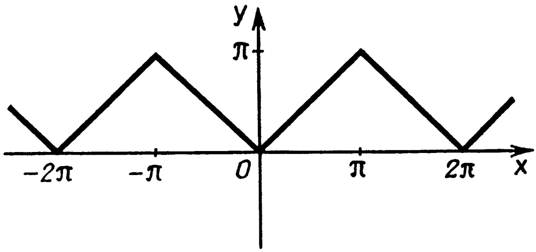


Рис. 2

скольку на отрезке $[0; \pi]$ каждое значение косинуса достигается в одной точке, то $y=x$.

Пусть $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$. Поскольку $\cos x = \cos(2\pi - x)$, а при $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ будем иметь $0 \leqslant 2\pi - x \leqslant \pi$, то из определения арккосинуса получим при $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ $y = 2\pi - x$. Окончательно график изображен на рисунке 2.

5. *Доказать периодичность данной функции и найти наименьший период:* а) $y=\cos x + \cos 3x$; б) $y = \sin\frac{2}{3}x + \cos\frac{3}{5}x$.

Решение. а) Нетрудно заметить, что заданная функция имеет период 2π. Докажем, что 2π является наименьшим периодом. В самом деле, при $x=2\pi k$, где k — целое, $y=2$, а во всех остальных точках $y<2$ ($\cos x<1$). На любом периоде данная функция хотя бы один раз должна принять значение, равное 2. Значит, период не может быть меньше 2π, поскольку расстояние между соседними значениями аргумента, в которых $y=2$, равно 2π.

б) Воспользуемся следующим очевидным соображением: если некоторая функция имеет период T, то и любая ее производная (при условии, что это производная существует) также имеет период, равный T.

Имеем $y' = \frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}\sin\frac{3}{5}x$, $y'' = -\frac{4}{9}\sin\frac{2}{3}x - \frac{9}{25}\cos\frac{3}{5}x$. Понятно, что если две функции имеют одинаковый период, то и любая их комбинация имеет тот же период (возможно, не наименьший). Но $y + \frac{9}{4}y'' = \frac{19}{100}\cos\frac{3}{5}x$. Любой период функции $f(x)=\cos\frac{3}{5}x$ равен $k\cdot\frac{5}{3}\cdot 2\pi$. (Функция $f(x)=\cos mx$ имеет наименьший период, равный $\frac{2\pi}{m}$. Докажите.) Значит, если T — наименьший период исходной функции, то $T=\frac{10}{3}\pi k$.

Аналогично из равенства $y+\frac{25}{9}y'' = -\frac{19}{81}\sin\frac{2}{3}x$ получим

$T=3\pi n$. Таким образом, $\frac{10}{3}k=3n$, $10k=9n$, откуда $k=9p$, $n=10p$, $T=30\pi p$, наименьший период не меньше чем 30π. Осталось проверить, что 30π является периодом данной функции.

6. *Доказать непериодичность следующих функций:*
а) $y=\sin\sqrt{x}$; б) $y=\cos x+\cos\sqrt{2}x$; в) $y=\cos x^2$.

Решение. а) Непериодичность этой функции следует уже из того, что ее область определения $x\geqslant 0$, в то время как для периодической функции (по определению периодической функции) должно выполняться следующее свойство: если T — период функции $y=f(x)$, то для любого x и любого целого n все числа $x+nT$ одновременно или входят, или не входят в область определения функции $y=f(x)$.

б) Эта функция при $x=0$ равна 2. Больше ни в одной точке эта функция не равна 2 из-за иррациональности $\sqrt{2}$. (Если $\cos x=1$, $x=2\pi k$, то $\cos\sqrt{2}x<1$.)

в) Производная этой функции непериодична (см. решение пункта б) предыдущей задачи). В самом деле, $y'=-2x\sin x^2$. На любом отрезке эта функция ограничена, а на всей прямой она неограничена, поскольку при $x=\sqrt{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}$, $n\geqslant 0$, будет $y'=$ $=2\sqrt{\frac{3\pi}{2}+2\pi n}$.

3. Преобразование тригонометрических выражений

К этому виду задач мы относим задачи, в которых требуется доказать равенство (упростить выражение), содержащее тригонометрические функции или их числовые значения. Используется известный по алгебраическим задачам арсенал формул и методов, пополненный специфическими тригонометрическими формулами.

Рассмотрим два не совсем стандартных примера.

7. *Доказать, что если* α, β, γ — *углы треугольника, то* $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1$.

Решение. На основании формулы (11), а также формул приведения и сложения имеем

$$\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)=$$
$$=\operatorname{ctg}\gamma\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{ctg}\gamma\frac{\sin(\pi-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta}=$$
$$=\frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin\alpha\sin\beta-\cos\beta\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=1-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta,$$

откуда следует требуемое равенство.

8. *Доказать равенство* $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\ldots\cos\frac{7\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^7$.

Решение. Умножим обе его части на $\sin\frac{\pi}{15}$. Начнем постепенно «сворачивать» левую часть. Пара $\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15}$ заменится на $\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{15}$. Появилась новая пара $\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}$, которую заменим на $\frac{1}{2^2}\sin\frac{4\pi}{15}$.

Далее, $\frac{1}{2^2}\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}=\frac{1}{2^3}\sin\frac{8\pi}{15}=\frac{1}{2^3}\sin\frac{7\pi}{15}$.

И наконец, $\frac{1}{2^3}\sin\frac{7\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^4}\sin\frac{14\pi}{15}=\frac{1}{2^4}\sin\frac{\pi}{15}$.

Таким образом, $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Нам осталось доказать равенство $\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, или $\left(\text{поскольку } \cos\frac{5\pi}{15}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right)$ $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Умножая обе части на $\sin\frac{\pi}{5}$, аналогично предыдущему будем иметь $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}$,

$$\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5},\ \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{5}.$$

Следует заметить, что во многих случаях упрощение тригонометрических выражений не является самоцелью, а представляет собой существенный элемент решения задач иных типов (например, решение уравнений).

4. Тригонометрические уравнения. Общие положения

Основная схема, которой мы будем руководствоваться при решении тригонометрических уравнений, совпадает со схемой, описанной нами ранее (см. X, § 2). Напомним ее. Решение заданного уравнения сводится к решению элементарных уравнений. Средства решения — преобразования, разложение на множители, замена неизвестного. Ведущий принцип — не терять корней. (Что с возу упало, то пропало.) Это означает, что при переходе к следующему уравнению (уравнениям) мы не опасаемся появления лишних (посторонних) корней, а заботимся лишь о том, чтобы каждое последующее уравнение нашей «цепочки» (или совокупность уравнений в случае ветвления) являлось следствием предыдущего. Одним из возможных методов отбора корней, отсеивания лишних, является проверка. Сразу заметим, что в случае тригонометрических уравнений трудности, связанные с отбором корней, с проверкой, как правило, резко возрастают (по сравнению с уравнениями алгебраическими). Ведь проверять приходится серии, состоящие из бесконечного числа членов.

Элементарные тригонометрические уравнения — это уравнения вида $f(kx+b)=a$, где $f(x)$ — одна из тригонометрических функций: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Особо следует сказать о замене неизвестных при решении тригонометрических уравнений. В большинстве случаев после нужной замены получается алгебраическое уравнение. Более того, не так уж редки уравнения, которые, хотя и являются тригонометрическими по внешнему виду, по существу, таковыми не оказываются, поскольку уже после первого шага — очевидной замены неизвестного — превращаются в алгебраические, а возвращение к тригонометрии происходит лишь на этапе решения элементарных тригонометрических уравнений.

Еще раз напомним: замену неизвестного следует делать при первой возможности, получившееся после замены уравнение необходимо решить до конца, включая этап отбора корней, а уж затем возвратиться к первоначальному неизвестному.

Итак, решение алгебраического уравнения — очень часто встречающийся этап решения уравнений самых различных видов. Именно поэтому навыки, умения решать алгебраические уравнения являются фундаментальными и должны быть отработаны в первую очередь.

Одна из особенностей тригонометрических уравнений состоит в том, что ответ во многих случаях может быть записан различными способами. Даже для уравнения $\sin x=a\ (|a|\leqslant 1)$ ответ может быть записан следующим образом: 1) В виде двух серий:

$$x_1=\arcsin a+2\pi k,\quad x_2=\pi-\arcsin a+2\pi k,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots .$$

2) В стандартной форме, представляющей собой объединение указанных выше серий: $x=(-1)^k \arcsin a+\pi k$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$. Отдельно следует запомнить запись ответа для $a=0$, $a=-1$, $a=1$. Соответственно будем иметь $x=\pi k$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$. В двух последних случаях и та и другая серии, указанные в пункте 1, совпадают. 3) Поскольку $\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, то ответ можно записать в виде $x=\frac{\pi}{2}\pm\arccos a+2\pi k$, $k=0$, ± 1, ± 2, ... (В дальнейшем наличие параметра k, n или m в записи ответа автоматически означает, что этот параметр принимает всевозможные целочисленные значения. Исключения будут оговариваться.)

Очевидно, что тремя перечисленными случаями не исчерпываются все возможности для записи ответа рассматриваемого уравнения (их бесконечно много).

Например, при $|a|\neq 1$ справедливо равенство $\arcsin a=$ $=\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$. (Докажите.) Следовательно, в двух первых случаях, если $|a|<1$, мы можем заменить $\arcsin a$ на $\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.

Обычно ответ записывается на основании формулы пункта 2. Полезно запомнить следующую рекомендацию: если на решении уравнения $\sin x=a$ работа не заканчивается, необходимо еще произвести исследование, отбор корней, то наиболее удобна форма записи, указанная в пункте 1. (Аналогичную рекомендацию следует дать и для уравнения $\cos x=a$.)

Приведенный пример и указанные различные формы записи ответа могут показаться надуманными. Однако на практике вполне возможны уравнения (и с такими примерами нам придется сталкиваться неоднократно), которые могут быть решены разными способами, приводящими к различным элементарным уравнениям. Рассмотрим один простой, но поучительный пример.

9. *Решить уравнение* $\operatorname{tg}^2 x=a$ $(a>0)$.

Решение. Наиболее очевидным является следующий путь. Данное уравнение распадается на два: $\operatorname{tg} x=\sqrt{a}$ и $\operatorname{tg} x=-\sqrt{a}$. Решая каждое из них и объединяя полученные ответы, найдем $x=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{a}+\pi k$.

Другой путь. Поскольку $\operatorname{tg}^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$, то, заменяя $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ по формулам (1) и (2) (кстати, эти две формулы смело можно отнести к категории наиболее популярных формул в теме «Тригонометрические уравнения»), найдем после небольших преобразований $\cos 2x=\frac{1-a}{1+a}$, откуда $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-a}{1+a}+\pi k$.

На первый взгляд никаких особых преимуществ у второй формулы по сравнению с первой нет. Однако если возьмем, например, $a=7-4\sqrt{3}$, то окажется, что $\frac{1-a}{1+a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. уравнение $\operatorname{tg}^2 x=7-4\sqrt{3}$ имеет решение $x=\pm\frac{\pi}{12}+\pi k$, в то время как первый способ приводит нас к ответу $x=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\pi k$. «Увидеть» и доказать равенство $\operatorname{arctg}\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\frac{\pi}{12}$ не так просто.

5. Преобразование уравнений, разложение на множители

Сначала рассмотрим несколько несложных уравнений, иллюстрирующих наиболее распространенные схемы решений.

10. *Решить уравнение:* $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$.

Решение. Группируем слагаемые, расположенные в левой части, в пары. (В данном случае любой способ группировки приводит к цели.) А затем применяем формулу (5). Имеем:

$$2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}+2\cos\frac{7}{2}x\cos\frac{x}{2}=0,$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{7}{2}x\right)=0,\ 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{5}{2}x\cos x=0.$$

Возникают три случая:

1) $\cos\frac{x}{2}=0,\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_1=\pi+2\pi k;$

2) $\cos\frac{5}{2}x=0,\ \frac{5}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_2=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k;$

3) $\cos x=0,\ x_3=\frac{\pi}{2}+\pi k.$

Ответ. $x_1=\pi+2\pi k,\ x_2=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k,\ x_3=\frac{\pi}{2}+\pi k.$

Обратим внимание на то, что вторая серия включает в себя первую. Поэтому нельзя сказать, что правильнее, но во всяком случае «культурнее и красивее» будет выглядеть *ответ*: $x_1=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k,\ x_2=\frac{\pi}{2}+\pi k.$ (Вновь типичная ситуация, приводящая к различным формам записи ответа.) Первый ответ также верен.

Рассмотренное уравнение иллюстрирует весьма типичную схему решения — разложение уравнения на множители за счет попарной группировки и использования формул (3) — (6).

Другая схема состоит из двух этапов. На первом произведения преобразуются в суммы (формулы (7) — (9)). На втором, наоборот, суммы преобразуются в произведения. Например:

11. *Найти решения уравнения:* $\cos 4x\cos 5x=\cos 6x\cos 7x.$

Решение. $\frac{1}{2}(\cos 9x+\cos x)=\frac{1}{2}(\cos 13x+\cos x),$

$$\cos 9x-\cos 13x=0,$$
$$2\sin 11x\sin 2x=0.$$

1) $\sin 2x=0,\ x_1=\frac{\pi}{2}k;$ 2) $\sin 11x=0,\ x_2=\frac{\pi}{11}k.$

Ответ. $\frac{\pi}{2}k,\ \frac{\pi}{11}k.$

12. *Решить уравнение:* $\cos 3x\cos^3 x+\sin 3x\sin^3 x=\frac{1}{2}\cos 6x.$

Решение. Преобразуем первое слагаемое левой части:

$$\cos 3x\cos^3 x=\cos 3x\cos x(\cos^2 x)=\frac{1}{4}(\cos 4x+\cos 2x)\times$$

$$\times(1+\cos 2x)=\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 4x+\cos^2 2x+\cos 2x\cos 4x).$$

Можно и дальше преобразовывать, освобождаясь от произведений. А лучше остановиться и преобразовать второе слагаемое.

Оно примет вид:

$$\frac{1}{4}(\cos 2x-\cos 4x-\cos^2 2x+\cos 2x\cos 4x),$$

а все уравнение приведется к

$$\cos 2x+\cos 2x\cos 4x=\cos 6x.$$

Теперь второй этап — разложение на множители. Имеем «цепочку»:

$$\cos 2x-\cos 6x+\cos 2x\cos 4x=0,$$

$$2\sin 4x\sin 2x+\cos 2x\cos 4x=0,$$

$$4\sin 2x\cos 2x\sin 2x+\cos 2x\cos 4x=0,$$

$$\cos 2x(4\sin^2 2x+\cos 4x)=0.$$

1) $\cos 2x=0$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$;

2) $4\sin^2 2x+\cos 4x=0$, $2-2\cos 4x+\cos 4x=0$, $\cos 4x=2$. Это уравнение не имеет решений.

Ответ. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$.

Нередко в практике конкурсного экзамена возникает необходимость преобразовывать выражения вида $a\cos x+b\sin x$. Стандартным является следующий прием: пусть φ — угол, задаваемый равенствами $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Для любых a и b такой угол φ существует. Это следует из того, что любые числа m и n, такие, что $m^2+n^2=1$, можно рассматривать как косинус и синус некоторого угла.

Таким образом,

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\cos x+\sin\varphi\sin x)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi).$$

Итак, получим формулу (13)

$$(13)\quad a\cos x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi),$$

где $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

В зависимости от знаков a и b можно взять угол φ равным $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ или $\pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. $\Big($Если $a>0$, $b>0$ или $a>0$, $b<0$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, в других случаях $\varphi=\pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.$\Big)$

13. *Решить уравнение:* $3\cos x+4\sin x=5\sin 5x$.

Решение. Преобразуем левую часть:

$$3\cos x+4\sin x=5\left(\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x\right)=5\cos(x-\varphi),$$

где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Получаем уравнение $\cos(x-\varphi)-\sin 5x=0$.

Заменим $\sin 5x$ на $\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)$, теперь можно применить формулу (6). (Обратите внимание на этот прием. Он встречается часто.)

$$\cos(x-\varphi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=0,$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}-2x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}-3x\right)=0.$$

Возникли два случая:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}-2x\right)=0$, $\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}-2x=\pi k$, $x=\frac{\pi}{8}-\frac{\varphi}{4}-\frac{\pi k}{2}$.

Лучше заменить $-k$ на k. Получаемая при этом совокупность решений не изменится. Таким образом,

$$x_1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}k.$$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}-3x\right)=0$, $x_2=\frac{\pi}{12}+\frac{\varphi}{6}+\frac{\pi}{3}k$.

Ответ. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}k$,

$\frac{\pi}{12}+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi}{3}k$.

6. Замена неизвестного

Большей частью замена неизвестного в тригонометрических уравнениях делается с целью сведения данного тригонометрического уравнения к уравнению алгебраическому, в частности к квадратному.

Так, если уравнение имеет вид

$$a\cos 2x+b\sin^2 x+c\cos^2 x+d\sin x+e=0,$$

то замена $y=\sin x$ приводит его к квадратному, поскольку $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, $\cos^2 x=1-\sin^2 x$.

Если же вместо слагаемого $d\sin x$ будет $d\cos x$, то нужная замена будет $y=\cos x$.

При помощи замены $y=\operatorname{tg} x$ могут быть сведены к алгебраическим уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$, или уравнения, приводящиеся к однородным. Приведем пример.

14. *Решить уравнение:* $3\cos 2x+\sin^2 x+\sin 2x=1$.

Решение. Перенесем 1 в левую часть, заменив ее на $\sin^2 x+\cos^2 x$, $\cos 2x$ и $\sin 2x$ выразим через $\cos x$ и $\sin x$.

Получим (после упрощений) $3\sin^2 x-2\sin x\cos x-2\cos^2 x=$ $=0$.

Разделив почленно на $\cos^2 x$ ($\cos x\neq 0$), сделаем замену $y=\operatorname{tg} x$:

$$3y^2-2y-2=0,\ y=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}.$$

Возвращаясь к x, найдем $x=\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}+\pi k$.

Полезно запомнить следующие формулы, позволяющие сделать замену $y=\operatorname{tg} x$ без предварительных преобразований. Эти формулы особенно удобны при решении уравнений, в которых необходимые преобразования не столь просты, как в уравнении 14:

$$(14)\qquad \begin{aligned}\sin^2 x&=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x},\\ \sin 2x&=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x},\quad \cos 2x=\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.\end{aligned}$$

Замечание. При применении этих формул надо иметь в виду, что левые части определены при всех значениях x, а правые — при $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, следовательно, есть опасность потери корней. (Очень часто две последние формулы записывают, взяв в качестве аргумента слева x, а аргумента справа $\frac{x}{2}$, и называют их «универсальной» заменой.)

При помощи формул (14) теоретически почти любое тригонометрическое уравнение может быть сведено к алгебраическому. Однако практическая значимость этих формул зачастую невелика из-за возникновения алгебраических уравнений высоких степеней при их использовании.

Уравнение 14 может быть решено и иначе — без замены неизвестного, при помощи приема, описанного в предыдущем пункте (формула (13)).

Поскольку $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, то наше уравнение приводится к виду

$$5\cos 2x+2\sin 2x=1$$

или

$$\frac{5}{\sqrt{29}}\cos 2x+\frac{2}{\sqrt{29}}\sin 2x=\frac{1}{\sqrt{29}}.$$

Обозначим $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2}{5}$.

Имеем $\cos(2x-\varphi)=\frac{1}{\sqrt{29}}$, $2x=\varphi\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{29}}+2\pi k$,

$$x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{5}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{29}}+\pi k.$$

(Сравните с ответом, найденным выше.)

Если в уравнение входят лишь выражения $\sin x+\cos x$ (или $\sin x-\cos x$) и $\sin 2x$, то к цели может привести замена $y=\sin x+\cos x$ ($y=\sin x-\cos x$). Например:

15. *Решить уравнение:* $3\sin 2x+2(\sin x-\cos x)=2$.

Решение. Обозначим $y=\sin x-\cos x$. Тогда $y^2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=1-\sin 2x$, т. е. $\sin 2x=1-y^2$.

Получаем уравнение $3y^2-2y-1=0$; $y_1=1$, $y_2=-\frac{1}{3}$.

1) $\sin x-\cos x=1$, $\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$,

$2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$x_1=\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k.$

2) $\sin x-\cos x=-\frac{1}{3}$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{2}}$,

$x_2=\frac{\pi}{4}-(-1)^k\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+\pi k.$

Ответ. $x_1=\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$,

$x_2=\frac{\pi}{4}-(-1)^k\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}}+\pi k.$

16. *Найти решение уравнения:* $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-9\operatorname{ctg}^2 x-1$.

Схема решения выглядит довольно просто: раскроем $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ по формуле тангенса суммы, а затем введем новое неизвестное $y=\operatorname{tg}x$. Но здесь есть одно «но». Применяя формулу тангенса суммы, мы сужаем область определения данного уравнения, исключая из нее значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ (сравните с замечанием к формулам (14)). Значит, нам надо проверить, не являются ли значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ корнями уравнения. Оказывается, являются. Теперь, выделив найденные корни, можно закончить решение по приведенной схеме.

Можно обойти эту опасность иначе, например выразив левую часть через $\operatorname{ctg}x$: $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\operatorname{ctg}x}{\operatorname{ctg}x-1}$. При этом область определения не меняется.

Ответ. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}3+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$.

7. Отбор корней в тригонометрических уравнениях

Проблема отбора корней, отсеивания лишних корней при решении тригонометрических уравнений весьма специфична и обычно оказывается более сложной, чем это имело место для уравнений алгебраических. Приведем решения уравнений, иллюстрирующие типичные случаи появления лишних (посторонних) корней и методы «борьбы» с ними.

Лишние корни могут появиться вследствие того, что в процессе решения произошло расширение области определения уравнения. Приведем пример.

17. *Решить уравнение:* $\frac{\sin 4x - \sin 2x - \cos 3x + 2\sin x - 1}{2\sin 2x - \sqrt{3}} = 0.$

Решение. Приравниваем нулю числитель (при этом происходит расширение области определения уравнения — добавляются значения x, обращающие в нуль знаменатель) и постараемся разложить его на множители.

Имеем

$$2\cos 3x \sin x - \cos 3x + 2\sin x - 1 = 0,$$
$$(\cos 3x + 1)(2\sin x - 1) = 0.$$

Получаем два уравнения:

1) $\cos 3x + 1 = 0$, $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k$.

Посмотрим, какие k нам подходят. Прежде всего заметим, что левая часть нашего уравнения представляет собой периодическую функцию с периодом 2π. Следовательно, достаточно найти решения уравнения, удовлетворяющие условию $0 \leqslant x < 2\pi$ (один раз «обойти» круг), затем к найденным значениям прибавить $2\pi k$.

Неравенству $0 \leqslant x < 2\pi$ удовлетворяют три числа (полезно изобразить соответствующие точки на единичной окружности, рис. 3): $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$.

Первое не подходит, поскольку $\sin 2\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, знаменатель обращается в нуль.

Ответ. $x_1 = \pi + 2\pi k$, $x_2 = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$ (можно $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$).

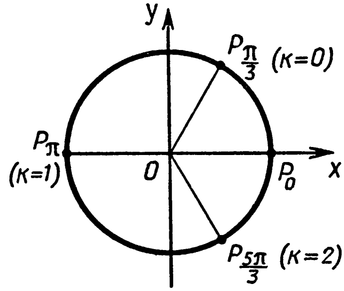


Рис. 3

2) $\sin x = \frac{1}{2}$.

Найдем решения этого уравнения, удовлетворяющие условию $0 \leqslant x < 2\pi$. Их два: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$. Подходит второе значение.

Ответ. $\pi + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

С появлением лишних корней вследствие возведения обеих частей в квадрат мы часто встречались при решении алгебраических уравнений. Вот пример уравнения тригонометрического:

18. *Найти корни уравнения:* $\sqrt{\cos 2x + \sin 3x} = \sqrt{2} \cos x$.

Решение этого уравнения распадается на два этапа: 1) решение уравнения, получающегося из данного возведением в квадрат обеих его частей; 2) отбор тех корней, которые удовлетворяют условию $\cos x \geqslant 0$. При этом (как и в случае алгебраических уравнений) заботиться об условии $\cos 2x + \sin 3x \geqslant 0$ нет необходимости. Все значения k, удовлетворяющие возведенному в квадрат уравнению, этому условию удовлетворяют.

Первый шаг приводит нас к уравнению $\sin 3x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} k$.

Теперь надо определить, при каких k будет $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} k\right) \geqslant 0$. Для этого достаточно для k рассмотреть значения 0, 1, 2, т. е. как обычно «обойти один раз круг», поскольку дальше значения косинуса начнут повторяться, получающиеся углы будут отличаться от уже рассмотренных на величину, кратную 2π.

Ответ. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{3}{2}\pi + 2\pi k$.

19. *Решить уравнение:* $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 11x$.

Решение. Из равенства $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ следует, что $\alpha - \beta = \pi k$. (Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, каждое значение на периоде принимается один раз.)

Значит, $11x - x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{10} k$.

Обратно: если $\alpha - \beta = \pi k$, то $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} \beta$ или равны, или не существуют. Следовательно, мы должны из найденных значений x выкинуть x, равные $\frac{\pi}{2} + \pi n$.

Найдем соответствующие k: $\frac{\pi k}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $k = 5 + 10n$.

Ответ. $x = \frac{\pi k}{10}$, где $k \neq 5 + 10n$.

Итак, основная схема отбора корней состоит в следующем. Находится наименьший общий период всех тригонометрических функций, входящих в уравнение. На этом периоде отбираются корни, а затем оставшиеся корни периодически продолжаются. В частности, если период равен 2π, то основная рекомендация — «обойти» тригонометрический круг.

Несколько иной прием был использован при решении уравнения 19: найдена общая формула для запрещенных значений x, после чего эти значения удаляются из выписанной серии.

Рассмотрим решения еще двух уравнений, в которых отбор корней делается иначе.

20. *Решить уравнение:*

$$\sqrt{\cos\frac{x}{1990}-\frac{1}{2}}+\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}=\sqrt{\cos\frac{x}{1990}+\cos x-1}.$$

Р е ш е н и е. После возведения уравнения в квадрат и очевидных упрощений получим две возможности:

$$1)\ \cos\frac{x}{1990}=\frac{1}{2};\ 2)\ \cos x=\frac{1}{2}.$$

В первом случае $x=\pm\left(663\pi+\frac{\pi}{3}\right)+3980\pi k$. Однако все эти значения не удовлетворяют условию $\cos x-\frac{1}{2}\geqslant 0$, поскольку для них $\cos x=-\frac{1}{2}$.

Во втором случае имеем $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$. Среди этих значений надо отобрать те, для которых $\cos\frac{x}{1990}-\frac{1}{2}\geqslant 0$.

Понятно, что если x_0 удовлетворяет условию $\cos\frac{x_0}{1990}-\frac{1}{2}\geqslant 0$, то и $x_0+3980\pi n$ удовлетворяет этому условию при любом целом n.

(Наименьший период функции $\cos\frac{x}{1990}$ равен 3980π.)

Пусть $-\pi\leqslant\frac{x_0}{1990}\leqslant\pi$. Для таких x_0 из неравенства $\cos\frac{x_0}{1990}-\frac{1}{2}\geqslant 0$ получим $-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{x_0}{1990}\leqslant\frac{\pi}{3}$.

Пусть $x_0=\frac{\pi}{3}+2\pi k$. Получаем:

$$-663\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+2\pi k\leqslant 663\pi+\frac{\pi}{3},$$

$$-663-\frac{2}{3}\leqslant 2k\leqslant 663,\ -331-\frac{5}{6}\leqslant k\leqslant 331\,\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $-331\leqslant k\leqslant 331$.

Те же значения k получим и в случае, если $x_0 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Ответ. $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) + 3980\pi n$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 331$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

21. *Решить уравнение:* $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{x} = \operatorname{ctg}\pi x$.

Решение. Имеем $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right)$.

Следовательно, $\frac{2\pi}{x} - \left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) = k\pi$, $\quad 2x^2 - (2k+1)x + 4 = 0$, $x = \frac{2k+1 \pm \sqrt{(2k+1)^2 - 32}}{4}$.

Теперь самое главное — отбор корней. Первое условие — дискриминант неотрицателен: $(2k+1)^2 - 32 \geqslant 0$. Поскольку $(2k+1)$ — число целое и нечетное, а первый квадрат нечетного числа, больший 32, есть $49 = 7^2$, то $2k+1 \geqslant 7$ или $2k+1 \leqslant -7$, откуда $k \geqslant 3$ или $k \leqslant -4$.

Далее необходимо «выкинуть» те x, при которых не существуют одновременно левая и правая части исходного уравнения. (См. решение уравнения 18.)

Но $\operatorname{ctg}\pi x$ не существует, если $x = n$, где n — целое. При n целых $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ не существует, если $n = \pm 4$. Следовательно, из найденных корней надо «выкинуть» $x = \pm 4$.

Подставляя $x = 4$ в квадратное уравнение, определяющее x, найдем $2 \cdot 4^2 - (2k+1)4 + 4 = 0$, $k = 4$.

При $k = 4$ уравнение $2x^2 - 9x + 4 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Второй корень удовлетворяет уравнению. Аналогично корень $x = -4$ будет при $k = -4$, второй корень при этом будет $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ответ. $\frac{2k+1 \pm \sqrt{4k^2 + 4k - 31}}{4}$, $k \geqslant 3$, $k \neq 4$ или $k \leqslant -5$.

Кроме того, есть еще два корня: $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$.

8. Системы тригонометрических уравнений. Запись ответа в системах тригонометрических уравнений

22. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} \sin(2x + 3y) = 0, \\ \cos(3x - 2y) = 1. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения находим $2x + 3y = \pi k$, а из второго $3x - 2y = 2\pi n$.

Получаем систему $\begin{cases} 2x+3y=\pi k, \\ 3x-2y=2\pi n. \end{cases}$

Ответ. $x=\frac{\pi}{13}(2k+6n)$, $y=\frac{\pi}{13}(3k-4n)$.

Как видим, в ответе фигурируют два параметра k и n, независимо друг от друга «пробегающие» множества целых чисел. Нетрудно убедиться, что использование одного и того же параметра (например, k) при решении уравнений системы 22 приведет к потере решений. (Каких?)

Это явление характерно для систем тригонометрических уравнений. Вообще если система тригонометрических уравнений свелась к системе, состоящей из элементарных тригонометрических уравнений (т. е. к системе, в которой все уравнения имеют вид $f(u)=a$, где $f(u)$ есть $\sin u$, $\cos u$, $\operatorname{tg} u$ или $\operatorname{ctg} u$), то при решении каждого из этих элементарных уравнений необходимо использовать свой целочисленный параметр. Для сравнения напомним, что при решении тригонометрических уравнений с одним неизвестным мы, как правило, обходились одним параметром. Точнее, если уравнение распадалось на элементарные (возникало объединение элементарных уравнений, а не пересечение — система; соединяющим был союз «или», а не «и»), то при решении каждого из них мы использовали один и тот же параметр. Возможно, не стоило бы уделять этой детали столько внимания, поскольку математическая сторона здесь достаточно прозрачна, если бы не многочисленные и типичные ошибки, допускаемые при решении несложных систем тригонометрических уравнений, ошибки тем более обидные, что допускаются они очень часто на заключительной стадии — записи ответа.

Проблемы, связанные с записью ответа в системах тригонометрических уравнений, не исчерпываются их многопараметричностью.

23. *Решить систему:*

$$\begin{cases} 2\sin x \sin y+\cos x=0, \\ 1+\sin y \cos x=2\cos^2 y \sin x. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Путь решения достаточно очевиден: выразим из первого уравнения $\sin y$ и подставим во второе ($\cos^2 y=1-$ $-\sin^2 y$), получим уравнение с одним неизвестным x, найдем x, а затем y. Имеем из первого уравнения $\sin y=-\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin x}$ (понятно, что $\sin x\neq 0$). После подстановки во второе и упрощений получим для x уравнение $\sin x=\frac{1}{2}$.

Прежде чем решать это уравнение, подумаем, в какой форме нам лучше всего записать ответ. Общая форма неудобна, поскольку для определения y нам надо найти $\cos x$, а $\cos x$ может принимать два значения: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому запишем для x две серии: $x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x_2=\frac{5}{6}\pi+2\pi k$.

Для первой: $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_1=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$.

Для второй: $y_2=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k, (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$; $\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi k, (-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$.

24. *Решите систему:*

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x=1+\cos y,\\ \sqrt{2}\sin x=\sin y.\end{cases}$$

Решение. Почленно возведя уравнения в квадрат и сложив их, получим после очевидных преобразований $\cos y=0$, откуда $y=\frac{\pi}{2}+\pi k$. Для этих y будет $\sin y=(-1)^k$.

Поэтому удобно рассмотреть два случая:

1) $k=2n$, тогда $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m$.

2) $k=2n+1$, тогда $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi m$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi m, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$; $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi m, \frac{3}{2}\pi+2\pi n\right)$.

9. Несколько стандартных приемов решения систем тригонометрических уравнений

Основные методы решения систем тригонометрических уравнений те же, что и алгебраических систем (X, § 2). Прежде всего это — исключение неизвестных и замена неизвестных. Исключать неизвестные, как мы уже знаем, можно при помощи двух основных приемов. Можно из одного уравнения выразить какое-то неизвестное (функцию от него) и подставить в остальные. Так была решена система 23. Можно преобразовывать данные уравнения и составлять затем комбинации, в которых число неизвестных уменьшается, как это было сделано при решении системы 24.

25. *Решить систему:*

$$\begin{cases}\cos 3x-4\sin 2y+\cos x=0,\\ \cos 2x-2\cos x(2\cos y-\sin y)+1-2\sin 2y=0.\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим второе уравнение как квадратное относительно $t=\cos x$. (С этим приемом мы уже встречались: X, § 2 и X, § 5.)

Имеем $t^2-t(2\cos y-\sin y)-2\sin y\cos y=0$. Корнями этого уравнения являются $t_1=2\cos y$, $t_2=-\sin y$.

Рассмотрим первый случай: $\cos x=2\cos y$. Первое уравнение преобразуем к виду $2\cos 2x\cos x-8\sin y\cos y=0$ или $(2\cos^2 x-1)\cos x-4\sin y\cos y=0$.

Заменив $\cos x$ на $2\cos y$, получим

$$\cos y(8\cos^2 y-1-2\sin y)=0,$$
$$\cos y(8\sin^2 y+2\sin y-7)=0,$$

откуда:

а) $\cos y=0$, $\cos x=0$; $y=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$;

б) $8\sin^2 y+2\sin y-7=0$.

Корнями соответствующего квадратного уравнения будут $\frac{-1-\sqrt{57}}{8}$ и $\frac{-1+\sqrt{57}}{8}$. Но $\frac{-1-\sqrt{57}}{8}<-1$.

Если же $\sin y=\frac{-1+\sqrt{57}}{8}$, то

$$|\cos x|=2|\cos y|=2\sqrt{1-\frac{(\sqrt{57}-1)^2}{64}}=\frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{57}}>1.$$

Рассмотрим второй случай. Преобразовав первое уравнение, будем иметь после замены $\cos x$ на $-\sin y$

$$\sin y(2\cos^2 y-4\cos y-1)=0,$$

откуда:

а) $\sin y=0$, $\cos x=0$; $y=\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$;

б) $2\cos^2 y-4\cos y-1=0$, $\cos y=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$.

Нам подходит один корень $\frac{2-\sqrt{6}}{2}$, т. е. $\cos y=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$. Запишем решение последнего уравнения в виде двух серий:

$$y=\arccos\frac{2-\sqrt{6}}{2}+2\pi k=\pi-\arccos\frac{\sqrt{6}-2}{2}+2\pi k$$

и

$$y=-\pi+\arccos\frac{\sqrt{6}-2}{2}+2\pi k.$$

Для первой серии y находится во второй четверти, $\sin y>0$ и $\cos x=-\sin y=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}-2}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{6}-6}$,

$x=\pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{6}-6}+\pi(2n+1)$.

Для второй серии $x=\pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{6}-6}+2\pi n$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}k\right)$, $\left(\pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{6}-6}+\pi(2n+1),\right.$ $\left.-\arccos\frac{\sqrt{6}-2}{2}+\pi(2k+1)\right)$, $\left(\pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{6}-6}+2\pi n,\right.$ $\left.\arccos\frac{\sqrt{6}-2}{2}+\pi(2k+1)\right)$.

Замечание. В ответе объединены пункты а) обоих случаев. Можно было бы объединить и два других множества и записать ответ более компактно: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}k\right)$, $\left(\pm\arccos\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{6}-6}+\right.$ $\left.+\pi n,\ (-1)^n\arccos\frac{\sqrt{6}-2}{2}+\pi(2k+1)\right)$.

26. *Решить систему:*

$$\begin{cases}\sin(4x-2y)+\sqrt{2}\sin(3x-y)=0,\\ \sqrt{2}\sin(2x-y)+\sin(3x-2y)=0.\end{cases}$$

Решение. В каждом из уравнений перенесем второе слагаемое в правую часть и перемножим соответственно правые и левые части получившихся уравнений.

Получим:

$$\sin(4x-2y)\sin(2x-y)=\sin(3x-y)\sin(3x-2y),$$

откуда $\cos(2x-y)-\cos(6x-3y)=\cos y-\cos(6x-3y)$.

Далее имеем $2\sin x\sin(x-y)=0$.

Возникают два случая:

1) $x=\pi k$: а) k — четное, $k=2n$.

Подставив $x=2\pi n$ в любое из уравнений, получим $\sin 2y-\sqrt{2}\sin y=0$. Это уравнение легко решается.

Итак, в случае $x=2\pi n$ будет $y=\pi m$ или $y=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi m$;

б) $x=\pi(2n+1)$, тогда $y=\pi m$ или $y=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi m$. Объединив пункты а) и б), получим ответы: $(\pi k,\ \pi m)$, $\left(2\pi k,\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi m\right)$; $\left(\pi(2k+1),\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi m\right)$.

2) $\sin(x-y)=0$, $x-y=\pi k$.

В этом случае $\sin(2x-y)=\pm\sin x$, $\sin(3x-2y)=\sin x$, и из второго уравнения системы найдем $x=\pi n$. Нетрудно видеть, что получившаяся серия совпадает с первой серией ответов, полученных в пункте а).

Ответ. $(\pi k,\ \pi m)$; $\left(2\pi k,\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi m\right)$; $\left(\pi(2k+1),\ \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi m\right)$.

Замечание. Вторую и третью серии можно объединить в одну: $\left(\pi k,\ \pm\frac{\pi}{4}+\pi(2m+k)\right)$.

Сравните решения систем 24 и 26. В системе 24 мы возводили уравнения в квадрат и складывали, с тем чтобы, используя тождество $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, уменьшить число неизвестных. (В других случаях этот прием применяется после предварительных преобразований.) В системе 26 перемножались нужным образом преобразованные уравнения, после чего полученное уравнение вновь преобразовывалось при помощи формул перехода от произведения тригонометрических функций к сумме и наоборот.

В большинстве случаев замена неизвестных в системах тригонометрических уравнений делается с целью свести данную тригонометрическую систему к алгебраической. Например:

27. *Решить систему:* $\begin{cases} 5\sin 2x \operatorname{tg} y=12, \\ 5\sin 2y \operatorname{tg} x=6. \end{cases}$

Решение. Обозначим $\operatorname{tg} x=u$, $\operatorname{tg} y=v$.

Выразив $\sin 2x$ и $\sin 2y$ через u и v, получим систему

$$\begin{cases} 10uv=12+12u^2, \\ 10uv=6+6v^2. \end{cases}$$

Разделим обе части первого уравнения на 2 и вычтем одно из другого. Получим: $6u^2+5uv-6v^2=0$.

Это — известное нам (X, § 2) однородное уравнение.

Разделив обе части уравнения на v^2, будем иметь квадратное уравнение относительно $t=\frac{u}{v}$, из которого найдем $t_1=\frac{2}{3}$, $t_2=-\frac{3}{2}$.

Далее находим u и v: $(\pm 2,\ \pm 3)$. (В случае $\frac{u}{v}=-\frac{3}{2}$ решений нет.) Затем возвращаемся к исходным неизвестным.

Ответ. $(\pm\operatorname{arctg} 2+\pi k,\ \pm\operatorname{arctg} 3+\pi n)$.

10. Нестандартные тригонометрические уравнения

В практике конкурсного экзамена не так уж редко встречаются уравнения, решение которых основывается на ограниченности функций $\sin x$ и $\cos x$. Например:

28. *Решить уравнение:* $\sin 5x-2\cos 2x=3$.

Решение. Поскольку $\sin 5x\leqslant 1$, $-\cos 2x\leqslant 1$, то левая часть не превосходит 3 и равна 3, если

$$\begin{cases} \sin 5x=1, \\ \cos 2x=-1. \end{cases}$$

Для нахождения значений x, удовлетворяющих обоим уравнениям, поступим следующим образом. Решим одно из них. Затем среди найденных значений отберем те, которые удовлетворяют и другому.

Начнем со второго: $\cos 2x = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Тогда $5x = \frac{5\pi}{2} + 5\pi k$, $\sin 5x = \sin\left(\frac{5}{2}\pi + 5\pi k\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$.

Понятно, что лишь для четных k будет $\sin 5x = 1$.

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Другая идея реализуется при решении следующего уравнения:

29. *Решить уравнение:* $\sin^8 x - \cos^5 x = 1$.

Решение этого уравнения основывается на следующем простом соображении: если $0 < a < 1$, то a^t убывает с ростом t.

Значит, $\sin^8 x \leqslant \sin^2 x$, $-\cos^5 x \leqslant \cos^2 x$.

Сложив почленно эти неравенства, будем иметь:

$$\sin^8 x - \cos^5 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Следовательно, левая часть данного уравнения равна 1 тогда (и только тогда), когда выполняются два равенства:

$$\sin^8 x = \sin^2 x, \quad -\cos^5 x = \cos^2 x,$$

т. е. $\sin x$ может принимать значения -1, 0, 1, а $\cos x$ может принимать значения -1, 0.

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\pi + 2\pi k$.

Для полноты картины рассмотрим еще два примера.

30. *Решить уравнение:* $3 \sin x + 4 \cos 3x \cos x + 2 \sin 5x = 7$.

Решение. Ранее была выведена формула (13): $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos (x - \varphi)$.

Из этого равенства, в частности, следует, что $a \sin x + b \cos x \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, причем a и b могут зависеть от x.

Применив это неравенство к первым двум слагаемым в левой части нашего уравнения и учтя, что $|\cos 3x| \leqslant 1$, $2 \sin 5x \leqslant 2$, получим: вся левая часть не превосходит 7.

Для того чтобы выполнялось равенство, необходимо (но не достаточно), чтобы $|\cos 3x| = 1$, $\sin 5x = 1$. Последние два уравнения несовместимы. (Докажите!) Следовательно, данное уравнение не имеет решений.

31. *Решить уравнение:* $4 \cos^2 x - 4 \cos^2 3x \cos x + \cos^2 3x = 0$.

Решение. Будем рассматривать левую часть данного уравнения как квадратный трехчлен относительно $\cos x$.

Пусть D — дискриминант этого трехчлена:

$$\frac{1}{4} D = 4 (\cos^4 3x - \cos^2 3x).$$

Из неравенства $D \geqslant 0$ следует $\cos^2 3x \leqslant 0$ или $\cos^2 3x \geqslant 1$. Значит, возникают две возможности: $\cos 3x = 0$ и $\cos 3x = \pm 1$.

Если $\cos 3x = 0$, то из уравнения следует, что и $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Эти значения x удовлетворяют уравнению.

Если $|\cos 3x| = 1$, то из уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ находим $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$. Эти значения также удовлетворяют уравнению.

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

11. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

К нестандартным следует отнести также уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.

32. *Решить уравнение:* $\arccos x = \operatorname{arctg} x$.

Решение. По определению обратных тригонометрических функций $\cos(\arccos x) = x$. Найдем $\cos(\operatorname{arctg} x)$.

Эта задача сводится к следующей: «Найти $\cos \alpha$, если $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} \alpha = x$ $(\alpha = \operatorname{arctg} x)$».

Поскольку $\cos \alpha > 0$, то

$$\cos \alpha = \sqrt{\cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + x^2}}.$$

Получаем уравнение $x = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$, откуда $x^4 + x^2 - 1 = 0$. Получаем для x два значения: $x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Второе значение для x не подходит, поскольку $x_2 < 0$.

Ответ. $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Замечание. Данное уравнение можно решить и иначе. Обозначим левую и правую части данного уравнения через y. Тогда $\cos y = \operatorname{tg} y$. Для y имеем тригонометрическое уравнение, сводящееся к квадратному относительно $z = \sin y$ $(\cos^2 y = \sin y$, $\sin^2 y + \sin y - 1 = 0)$.

По смыслу задачи $0 < y < \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\sin y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, значит, $x = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

33. *Решить уравнение:* $\arcsin\frac{x}{2}+2\arccos x=\pi$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $2\arccos x=\pi-\arcsin\frac{x}{2}$. Если равны углы, то равны и тригонометрические функции от них. (Обратное неверно.) Осталось удачно выбрать эту функцию. Понятно, что выбирать надо между синусом и косинусом. В данном случае предпочтительнее оказывается косинус. Можно привести некоторые соображения в пользу такого выбора. А лучше убедиться в этом на практике.

Итак, имеем $\cos 2\arccos x=\cos\left(\pi-\arcsin\frac{x}{2}\right)$.

Поскольку $\cos 2\arccos x=2x^2-1$, $\cos\left(\pi-\arcsin\frac{x}{2}\right)=-\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, то получаем уравнение $2x^2-1=-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$.

Это уравнение имеет единственный корень $x=0$ (два других корня уравнения, получающегося при возведении в квадрат данного, оказываются посторонними).

Ответ. 0.

12. Тригонометрические неравенства

При решении неравенств вида $f(x)>0$ ($\geqslant 0$), где $f(x)$ — периодическая функция с периодом T, следует сначала решить это неравенство на одном периоде, например для $0\leqslant x<T$, а затем получившееся решение периодически продолжить.

В некоторых случаях тригонометрическое неравенство сводится к решению элементарных неравенств вида $\sin x>a$, $\cos x\leqslant a$ и т. д. Рассматривая график соответствующей тригонометрической функции или изучая ее изменение на тригонометрическом круге, выписываем ответ для одного периода, а затем к обеим частям полученного неравенства прибавляем kT, где T — период. Так, решением неравенства $\sin x>a$ ($|a|<1$) будет совокупность интервалов

$$\arcsin a+2\pi k<x<\pi-\arcsin a+2\pi k.$$

Основным методом решения тригонометрических неравенств является метод интервалов. Например:

34. *Решить неравенство:* $\dfrac{\sin 3x\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x}\leqslant 0$.

Решение. Функция, расположенная в левой части неравенства, имеет наименьший период, равный 2π. Найдем, где на отрезке $[0, 2\pi]$ меняют знаки отдельные множители числителя и знаменателя (рис. 4): $\sin 3x=0$, $x=\frac{\pi}{3}k$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$;

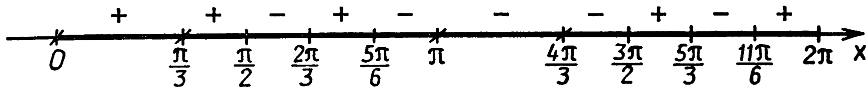


Рис. 4

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$; $\sin 2x=0$, $x=\frac{\pi}{2}k$. $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Внутри первого отрезка $\left(0<x<\frac{\pi}{3}\right)$ все три функции положительны. Далее расставляем знаки. Затем выписываем ответ для одного периода (включая в него те граничные значения x, для которых обращается в нуль числитель, но не равен нулю знаменатель).

Получаем $x=\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5}{6}\pi\leqslant x<\pi$, $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{3}\pi\leqslant x\leqslant\frac{11}{6}\pi$. После чего окончательный ответ получаем, прибавляя $2\pi k$ к граничным значениям.

Ответ. $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k<x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $\frac{5}{6}\pi+2\pi k\leqslant x<$ $<\pi+2\pi k$, $\pi+2\pi k<x<\frac{3}{2}\pi+2\pi k$, $\frac{5}{3}\pi+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{11}{6}\pi+2\pi k$.

Иногда при решении тригонометрических неравенств могут возникать проблемы, связанные с упорядочением корней тригонометрических функций. Например:

35. *Решить неравенство:*

$$(3\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x-2-\sqrt{3})(2\sin 2x-1)\geqslant 0.$$

Решение. Период функции, расположенной в левой части неравенства, равен 2π. Корни второго сомножителя легко находятся (для $0\leqslant x<2\pi$): $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{17\pi}{12}$.

Решим уравнение $3\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x-2-\sqrt{3}=0$.

Имеем (формула (13)) $3\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x=2\sqrt{5}\cos(x+\varphi)$, где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\left(\cos\varphi=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}},\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\right)$.

Получаем уравнение $\cos(x+\varphi)=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$, откуда

$$x=\pm\arccos\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}-\varphi+2\pi k.$$

Пусть $\arccos\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\alpha$. Легко видеть, что $\alpha>\varphi$. На отрезок $[0, 2\pi]$ попадают два значения $\alpha-\varphi$ и $2\pi-\alpha-\varphi$. Найдем

$\cos(\alpha-\varphi)$. Поскольку $\cos\alpha=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha=$ $=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\frac{13-4\sqrt{3}}{20}}=\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{5}}$, то $\cos(\alpha-\varphi)=\cos\alpha\cos\varphi+$ $+\sin\alpha\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\cos\frac{\pi}{12}$. Значит, $\alpha-\varphi=\frac{\pi}{12}$, $\alpha=\frac{\pi}{12}+$ $+\varphi=\frac{\pi}{12}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Поскольку $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}<\frac{\pi}{4}$, то $2\pi-\alpha-\varphi=2\pi-\left(\frac{\pi}{12}+\varphi\right)-$ $-\varphi=\frac{23}{12}\pi-2\varphi>\frac{23}{12}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{17}{12}\pi$. При $x=0$ левая часть отрицательна, в точке $x=\frac{\pi}{12}$ меняют знак оба множителя, в остальных — по одному. Теперь выписываем ответ на периоде, а затем периодически его продолжаем.

Ответ. $x=\frac{\pi}{12}+2\pi k$, $\frac{5\pi}{12}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{13\pi}{12}+2\pi k$,

$$\frac{17\pi}{12}+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{23\pi}{12}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi k.$$

13. Задачи

1. Определите знак числа:

а) $\sin 1000°$; б) $\cos 1989°$; в) $\operatorname{tg} 901°\operatorname{ctg} 1078°$; г) $\sin 8$; д) $\sin 22$; е) $\operatorname{tg} 5$; ж) $\sin 3142$.

2. Вычислите без помощи таблиц и калькуляторов:

а) $\operatorname{tg} 570°+\cos 210°$; г) $\sin 15°$;

б) $\cos\frac{22\pi}{21}-\cos\frac{9\pi}{7}+\cos\frac{50\pi}{21}$; д) $\cos 67°30'$;

в) $\cos^2 73°+\cos^2 47°+\cos 73°\cos 47°$; е) $\operatorname{tg} 75°$.

3. Что больше:

а) $\sin 7$ или $\sin 8$; г) $\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5}$;

б) $\sin 3$ или $\cos 5$; д) $\sin 121°$ или $0{,}85$;

в) $\cos 6$ или $\sin 1{,}5$; е) $\sin 22$ или $-0{,}01$?

4. Найдите:

а) $\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$; в) $\sin 2\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$;

б) $\cos(\operatorname{arctg}(-2))$; г) $\cos 3\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$.

5. Найдите:

а) $\arcsin(\sin 5)$; б) $\arccos(\sin(-3))$; в) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-7))$.

Докажите тождество (6—18):

6. $1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^3 x=\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos^3 x}$.

7. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

8. $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=4\sin 3\alpha\cos^2\alpha$.

9. $\dfrac{\sin 2x-\sin 3x+\sin 4x}{\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x}=\operatorname{tg} 3x$.

10. $\dfrac{\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}=\sin 2x$.

11. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg} 2\alpha-4\operatorname{tg} 4\alpha=8\operatorname{ctg} 8\alpha$.

12. $\dfrac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, $(\pi<\alpha<2\pi)$.

13. $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

14. $\dfrac{\sqrt{2}-\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$.

15. $\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}-1=\dfrac{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

16. $\dfrac{\cos 6\alpha-\cos 7\alpha-\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}{\sin 6\alpha-\sin 7\alpha-\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}=\operatorname{ctg}\frac{15}{2}\alpha$.

17. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

18. $\sqrt{\operatorname{tg} x+\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg} x-\sin x}=-2\sqrt{\operatorname{tg} x}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ $\left(2\pi\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}\pi\right)$.

19. Вычислите $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ и $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, если $\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{21}{65}$, $\cos\alpha+\cos\beta=-\frac{27}{65}$, $\frac{5}{2}\pi<\alpha<3\pi$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$.

20. Найдите $\cos 2\alpha$, если известно, что $2\operatorname{ctg}^2\alpha+7\operatorname{ctg}\alpha+3=0$ и а) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{4}<\alpha<2\pi$.

Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то выполняется равенство (21—24):

21. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

22. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$.

23. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

24. $1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0$.

25. Докажите, что если $\cos x=\cos\alpha\cos\beta$, то $\operatorname{tg}\frac{x+\alpha}{2}\times$ $\times\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$. (Если все функции определены.)

26. Найдите $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x$, если $\sin x+\cos x=a$.

Докажите равенство (27—48):

27. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\pi}{4}$.

28. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)=\frac{7}{5}$.

29. $\arccos(\cos(2\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)))=\frac{\pi}{4}$.

30. $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13}\right)=-\frac{119}{120}$.

31. $\operatorname{tg}142^\circ 30'=2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

32. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

33. $2\arcsin|x|=\arccos(1-2x^2)$.

34. $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4$.

35. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

36. $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

37 $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{15}}+\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{15}}-\frac{1}{\sin\frac{4\pi}{15}}+\frac{1}{\sin\frac{8\pi}{15}}=4\sqrt{3}$.

38. $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{18}+\operatorname{tg}^2\frac{5\pi}{18}+\operatorname{tg}^2\frac{7\pi}{18}=9$.

39. $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=\frac{3}{2}$.

40. а) $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}$; б) $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}$.

41. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

42. $\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}50^\circ\operatorname{tg}70^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

43. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9}-8\sin\frac{2\pi}{9}=\sqrt{3}$.

44. $\operatorname{tg} 10° + \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 70° + \operatorname{tg} 100° + \operatorname{tg} 130° + \operatorname{tg} 160° = -2\sqrt{3}$.

45. $\cos\frac{\pi}{35}\cos\frac{2\pi}{35}\cos\frac{3\pi}{35}\ldots\cos\frac{17\pi}{35} = \left(\frac{1}{2}\right)^{17}$.

46. $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{11} + 4\sin\frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}$.

47. $\operatorname{arctg}\frac{x}{k(k+1)+x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{k} - \operatorname{arctg}\frac{x}{k+1}$ $(x \geqslant 0,\ k > 0)$.

48. $\operatorname{arctg}\frac{2k}{2+k^2+k^4} = \operatorname{arctg}(1+k+k^2) - \operatorname{arctg}(1-k+k^2)$.

49. Постройте график функции (изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению):

а) $y=\sin 2x$; б) $y=\cos\frac{x}{3}$; в) $y=\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$;

г) $y=\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$; д) $y=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x}$; е) $y=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$;

ж) $y=\sin x+|\sin x|$; з) $y=\sin x+\sin|x|$; и) $y=\operatorname{tg}|x|+|\operatorname{tg} x|$;

к) $y=|\cos x|\operatorname{tg} x$; л) $y=\frac{1}{2}\left(\frac{|\sin x|}{\cos x}+\frac{\sin x}{|\cos x|}\right)$; м) $y=|\sin|x||$;

н) $y=|y-\sin x|$; о) $\sin x+\sin y=0$; п) $\sin x+\cos y=2$;
р) $y=\arcsin x$; с) $y=\cos\arcsin x$; т) $y=\arcsin\sin x$;

у) $\sin x+\cos y=\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}$; ф) $y=\sin 2\operatorname{arctg} x$;

х) $y=\arcsin(\arcsin x)+\arccos\frac{2\arccos x}{\pi-2}$.

50. Для каждой из следующих функций найдите наименьший период или докажите ее непериодичность:

а) $y=\sin 2\pi x$; б) $y=\cos(1-x)$; в) $y=\sin\frac{x}{\pi}+\cos\frac{x}{\pi}$;

г) $y=\cos|x|$; д) $y=\cos 2x+\cos 3x$; е) $y=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{3}+\sin\frac{x}{5}$;
ж) $y=\sin 2x+\cos 3x$; з) $y=\sin\sin x$; и) $y=\cos\cos x$;
к) $y=\arcsin(1+|\sin x|)$; л) $y=\sin x+\cos\sqrt{2}x$; м) $y=\sin|x|$;
н) $y=\sin x^2$; о) $y=\cos\sqrt[3]{x}$.

Решите уравнение (51—236):

51. $\cos^2 2x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$. **52.** $\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}$.

53. $(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x$.

54. $1-\sin 3x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$.

55. $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0.$

56. $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x.$

57. $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0.$ **58.** $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0.$

59. $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0.$ **60.** $\cos 2x = \sqrt{2} (\cos x - \sin x).$

61. $3 \cos 2x + 2 \cos x = 5.$ **62.** $(2 \sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x.$

63. $1 + \sin x \cos 2x = \sin x + \cos 2x.$ **64.** $\sin^4 x + \cos^4 x = 1.$

65. $\cos x + 2 \cos 2x = 1.$ **66.** $4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7.$

67. $5 \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{\cos^4 x} = 29.$ **68.** $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$

69. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x.$

70. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$

71. $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0.$ **72.** $\cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$

73. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$ **74.** $\cos 3x = \sin 5x.$

75. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 0.$ **76.** $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}.$

77. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}.$ **78.** $\sin 3x + \sin^3 x = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sin 2x.$

79. $\sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x + \sin 2x = 4.$

80. $\cos (5x + 516°) - \cos (3x + 172°) = \cos (4x + 254°).$

81. $\cos 7x (\sin 5x - 1) = 0.$ **82.** $\sin 4x + 2 \sin^2 7x = 1.$

83. $3 + 2 \sin 3x \sin x = 3 \cos 2x.$

84. $\cos 2x + 4\sqrt{2} \sin x = 2.$ **85.** $\cos x + \cos 2x + \cos 4x = 0.$

86. $\left(2 \sin^4 \frac{x}{2} - 1\right) \frac{1}{\cos^4 \frac{x}{2}} = 2.$ **87.** $\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} - 1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \cos x.$

88. $3 \operatorname{tg}^2 x + 7 = \frac{2}{\sin^2 2x}.$ **89.** $\frac{\cos^2 2x}{\cos x + \cos \frac{\pi}{4}} = \cos x - \cos \frac{\pi}{4}.$

90. $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3x}{2} - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0.$

91. $\cos 3x \sin x + 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1.$

92. $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \sin 2x = (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x + 1.$

93. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}.$

94. $\sin\left(2x + \frac{5}{2}\pi\right) - 3 \cos\left(x - \frac{7}{2}\pi\right) = 1 + 2 \sin x.$

95. $\frac{\sin^8 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^8 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{4}.$ **96.** $3 \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 2 \cos^2 x - 1.$

97. $\sin^7 x \cos^3 x - \cos^7 x \sin^3 x = \cos 2x.$ **98.** $\sin 3x = 8 \sin^3 x.$

99. $4 \cos 3x = 15 \sin 2x.$ **100.** $3 \cos x = 13 \sin \frac{2x}{3} + 17 \cos \frac{x}{3}.$

101. $\sqrt{2}\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0.$

102. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} 4x=0.$

103. $\sin 2x=\sin^4 x+\cos^4 x.$

104. $\operatorname{tg} x+2\operatorname{tg} 2x+3\operatorname{ctg} 3x+4\operatorname{ctg} 4x=0.$

105. $\cos 3x\operatorname{tg} 5x=\sin 7x.$ **106.** $\sin x\operatorname{tg} x=\cos x+\operatorname{tg} x.$

107. $\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin x}\right)=1.$ **108.** $\frac{\cos 2x+3\sin x-2}{12x^2-8\pi x+\pi^2}=0.$

109. $\frac{\cos 3x}{\sin 3x-2\sin x}=\operatorname{tg} x.$ **110.** $\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x.$

111. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{5}{9}.$

112. $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+8\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0.$

113. $8\cos^3 x-6\cos x+\sqrt{2}=0.$

114. $\cos 2x+\sin 2x+\cos x-\sin x=1.$

115. $\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{ctg} x=2\operatorname{ctg} 4x.$

116. $(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg} x.$

117. $2\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{ctg} x=\sin 2x+3\sin x.$

118. $\cos^2 x-2\cos x=4\sin x-\sin 2x.$

119. $\sqrt[4]{8}\cos x-1=(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})\sqrt{\cos x}.$

120. $\frac{2}{\sin 2x}=\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{ctg} 3x.$ **121.** $4\sin 2x+\operatorname{ctg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=4.$

122. $\cos 4x+\sin^2 3x=1.$

123. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)=\sin^2 x\cos 9x+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+4x\right).$

124. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} 3x+\operatorname{ctg} 4x=0.$

125. $\cos x(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x)=4\sin 3x\sin 4x.$

126. $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x=\sin 4x.$

127. $(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=3-\sin 4x$

128. $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2.$

129 $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{9}{8}.$

130. $\cos^2 7x+\sin^2 6x=0.$ **131.** $\operatorname{tg}\left(5x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)}{1-\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)}.$

132. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 3x.$ **133.** $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 5x.$

134. $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{7}x+\frac{\pi}{7}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\right).$

135. $3(\cos x-\sin x)=1+\cos 2x-\sin 2x.$

136. $1+\sin 2x=\cos x-\sin x.$ **137.** $\cos 2x+2\sin 2x=2\sqrt{2}\cos x.$

138. $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin 3x}{1-\cos 3x}=-\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$

139. $\operatorname{tg} 2x+\frac{1}{\sin x}=\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin 5x}$.

140. $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}=0$. **141.** $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin 2x}=\frac{1}{\sin 3x}$.

142. $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin 2x}=\frac{1}{\sin 4x}$.

143. $\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)=3+2\sqrt{2}$.

144. $8\cos x=\frac{1}{\cos x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin x}$. **145.** $2\cos 3x=3\sin x+\cos x$.

146. $\frac{3\sqrt{3}\cos 2x+3\sin 2x}{\sqrt{3}\cos x+\sin x}=4\cos x-\frac{1}{\cos x}$.

147. $4\operatorname{tg} 4x-4\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 4x$.

148. $\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 3x\operatorname{tg} 4x=\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 3x+\operatorname{tg} 4x$.

149. $\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}=\operatorname{ctg} x$.

150. $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos 2x\sin 3x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos 2x}$.

151. $\frac{1-\sin\left(\frac{3}{7}x+\frac{11}{14}\pi\right)}{1+\sin\left(\frac{3}{7}x+\frac{11}{14}\pi\right)}=\frac{1-\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

152. $\frac{2\cos x+2\sin x-1}{2\cos x-2\sin x-1}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{3}+2$.

153. $1+\cos^2 x+2\cos x\cos^2 5x=\sin^2 5x$.

154. $\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 3x\operatorname{ctg} 3x(\operatorname{ctg} 3x+1)$.

155. $2\cos 13x+3\cos 3x+3\cos 5x-8\cos x\cos^3 4x=0$.

156. $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{5\pi}{3}\right)=2\operatorname{ctg} 2x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6}$. **157.** $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}=\frac{2\operatorname{ctg} x+3}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

158. $3\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} 3x=3\operatorname{ctg} 2x+6\operatorname{ctg} 4x$.

159. $\sin^4 x+\sin^3 x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos^3 x+\cos^4 x=1$.

160. $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}$.

161. $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=\cos 2x$.

162. $\sin^8 x-\cos^8 x=\frac{1}{2}\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

163. $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x+\frac{3}{8}=0$.

164. $\sqrt{2}(\cos 8x+2\cos^2 2x)\sqrt{1+\cos 4x}+\cos 10x+\cos 6x+$
$+4\cos^3 2x=0$. **165.** $2\cos x+\sqrt{5}\sin x=\cos 5x+2\sqrt{2}\sin 5x$.

166. $\cos 3x-\cos 2x=\sin 3x$. **167.** $\left|\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\frac{1}{\cos^2 2x}-1$.

168. $|\cos x|=\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)$. **169.** $\sqrt{-\cos x}=\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$.

170. $\sqrt{\cos x}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$. **171.** $\sqrt{|\cos x|}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$.

172. $\sqrt{1+\sin x}+\cos x=0$. **173.** $\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}=\sqrt{2}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$.

174. $\operatorname{tg} x+\frac{1}{9}\operatorname{ctg} x=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}-1$.

175. $\cos x-2\sin 2x-\cos 3x=|1-2\sin x-\cos 2x|$.

176. $\sin x+\cos x=\sqrt{1+\operatorname{tg} x}$. **177.** $\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0$.

178. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=1+\cos x$.

179. $\sqrt{1-2\sin 4x}+\sqrt{6}\cos 2x=0$.

180. $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}+2\sin x=0$.

181. $\sqrt{\frac{1-4\cos^2 3x}{8\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}}=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

182. $\sqrt{\frac{5}{4}-\sin^2 x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\cos x+\frac{1}{2}$.

183. $2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}$.

184. $(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}+\sin x=2\cos x$.

185. $\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sqrt{\sin x+\cos x}$.

186. $\sqrt{\sin 3x+\cos x-\sin x}=\sqrt{\cos x-\sin 2x}$.

187. $\sqrt{\cos 3x+\sqrt{3}\sin 3x-3\cos^2 x+\cos x+\frac{13}{4}}=\sqrt{3}\sin x+\frac{1}{2}$.

188. $\sqrt{19\frac{1}{2}-5\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin x}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\cos x$.

189. $\sqrt{3}(2-\cos x)+4\sin 2x=\sin x$.

190. $\sqrt{3}(3-2\cos x)-2(3\sin 2x-\sin x)=0$.

191. $20\cos^2 x=5+\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

192. $2\sin 3x+\sin x+\sqrt{3}(\cos x-\sin 2x)=\cos 2x$.

193. $5\sin x+6\sin 2x+5\sin 3x+\sin 4x=0$.

194. $\cos x\sin 2x\cos 4x+\sin x\sin 2x\cos 4x=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

195. $2(\operatorname{tg} x-\sin x)+3(\operatorname{ctg} x-\cos x)+5=0$.

196. $1+\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 3x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x+2\cos 3x+$
$+\cos 2x.$

197. $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)-\sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{x}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)-$
$-2\sin\left(\frac{3x}{5}+\frac{\pi}{6}\right).$ **198.** $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 2x+\operatorname{ctg} 3x=\frac{2}{\sin 2x}.$

199. $\frac{\cos 2x-\cos 4x-4\sin 3x-2\sin x+4}{2\sin x-1}=0.$

200. $\frac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x}{\sin 2x-1}=1.$

201. $\frac{1-\sin x+\sqrt{3}\sin 2x}{2\sqrt{3}\cos x-3}=\frac{1}{3}+\sin x.$

202. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos x\cos 2x}=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos 2x\cos 3x}.$

203. $\frac{\sin 3x}{\sin x\sin 2x}-\frac{\sin 6x}{\sin 2x\sin 4x}+\frac{\sin 12x}{\sin 4x\sin 8x}=0.$

204. $\cos 2x+\cos\frac{3x}{4}=2.$ **205.** $2\cos\frac{x}{2}+3\cos 3x=5.$

206. $8\operatorname{tg} 8x+4\operatorname{tg} 4x+2\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} x=16+\operatorname{ctg} x.$

207. $2\sin 3x+\cos x\cos 2x=(\cos x+\cos 3x)(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} 2x).$

208. $4\cos x+1+4\cos 3x\cos x=\cos 4x.$

209. $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0.$

210. $\sin^3 x+\sin^3 2x+\sin^3 3x=3\sin x\sin 2x\sin 3x.$

211. $\sin^3 2x+\sin^3\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+\sin^3\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)=0.$

212. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)=0.$

213. $\cos^2 3x+\frac{1}{4}\cos^2 x=\cos 3x\cos^4 x.$

214. $1+\cos 2x\cos 3x=\frac{1}{2}\sin^2 3x.$

215. $\cos^2 x+\cos\frac{x}{2}\cos^2 x-\cos\frac{x}{2}-1=2\left(\sin\frac{x}{4}-\cos x\right)^2.$

216. $\sin x\left(\cos\frac{x}{4}-2\sin x\right)+\cos x\left(1+\sin\frac{x}{4}-2\cos x\right)=0.$

217. $\cos^2 x+\cos^2 2x-2\cos x\cos 2x\cos 4x=\frac{3}{4}.$

218. $(1+\cos x)(1+\cos 2x)(1+\cos 3x)=\frac{1}{2}.$

219. $\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}+\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}=3.$

220. $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{8}\cos 15x.$

221. $7\sin x+6\sin 3x+5\sin 5x+4\sin 7x=0.$

222. $3\sin x+4\sin 3x+2\sin 5x+\sin 7x=0.$

223. $|\sin 3x|^{\operatorname{tg} 5x}=1$. **224.** $|\sin x|^{\operatorname{tg} x}+|\cos x|^{\operatorname{tg} x}=1$.

225. $\cos^5\left(x+\frac{\pi}{7}\right)-\sin^3\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=1$.

226. $5\sin^5 x-3\cos^3 x=5$.

227. $\sin\left(\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)=\cos\left(\frac{4}{3}\pi\sin x\right)$.

228. $\sin(\sin x)=\cos\left(\frac{1}{\sin x}\right)$. **229.** $2\sin^2 x+\sin x^2=1$.

230. $\sin(2x^2+x)\cos x^2-\sin(x^2+x)\cos 2x^2=0$.

231. $\sin(3\sqrt{x}+2x)\cos(x-2\sqrt{x})-\sin 2(x+\sqrt{x})\cos(3\sqrt{x}-x)=0$.

232. $\frac{1}{2}\cos(x^2+x)+\sin\left(x^2-\frac{\pi}{6}\right)\cos x=0$.

233. $\sin\left(x^2-\frac{\pi}{3}\right)\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x^2-x)=0$.

234. $\operatorname{tg}\sqrt{x+16}=\operatorname{tg}\sqrt{x}$. **235.** $\sin\pi\sqrt{x}=\cos\pi\sqrt{2-x}$.

236. $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{x}=\operatorname{ctg} 3\pi x$.

237. Найдите все решения уравнения $2\cos 2x-4\cos x=1$, удовлетворяющие неравенству $\sin x\geqslant 0$.

238. Найдите все решения уравнения $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<-\frac{1}{2}$.

239. Найдите все решения уравнения $(1+\operatorname{tg}^2 x)\sin x-\operatorname{tg}^2 x+1=0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x<0$.

240. Найдите решения уравнения $\sin x\cos\frac{\pi}{7}-\cos x\sin\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$, удовлетворяющие условию $-\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$.

241. Найдите решения уравнения $(1+2\cos 2x)\sin x+(1-2\cos 2x)\cos x=0$, удовлетворяющие неравенствам $\pi<\left|2x-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\frac{7\pi}{3}$.

242. Найдите решения уравнения $2+\cos\frac{3}{2}x+\sqrt{3}\sin\frac{3}{2}x=4\sin^2\frac{x}{2}$, удовлетворяющие неравенству $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$.

243. Найдите решения уравнения

$$\cos\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{9}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{5}{8}\pi-\frac{3}{2}x\right),$$

удовлетворяющие неравенству $\sin\frac{3}{2}x<0$.

244. Среди корней уравнения $\frac{\cos 2\pi x}{1+\operatorname{tg}\pi x}=0$ найдите тот, который имеет наименьшее расстояние от числа $\sqrt{13}$ на числовой прямой.

245. Найдите наибольшее значение x из промежутка $\left[0, 3\frac{1}{3}\right]$, удовлетворяющее уравнению $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg} x-1$.

246. Найдите сумму корней уравнения $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{ctg} x-\sqrt{3}$, расположенных на отрезке $[1, 10]$.

247. Найдите решения уравнения $\operatorname{tg} \pi x=\operatorname{tg} 2\pi x^2$, удовлетворяющие условию $|x|<\frac{5}{4}$.

248. Найдите решения уравнения $|\sin(2x-1)|=\cos x$, удовлетворяющие условию $|x|\leqslant 2\pi$.

249. Найдите решения уравнения $\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos(2+x)}$, удовлетворяющие условию $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

250. Докажите, что числа $\cos^2\frac{\pi}{9}$, $\cos^2\frac{2\pi}{9}$, $\cos^2\frac{4\pi}{9}$ удовлетворяют уравнению $64x^3-96x^2+36x-1=0$.

251. Найдите число корней уравнения $\operatorname{tg} \pi\sqrt{x+90}=\operatorname{tg} \pi\sqrt{x}$.

252. Найдите все значения x, удовлетворяющие одновременно условиям: $\cos 13x=\cos x$, $\cos 2x+\sin 5x=1$, $|x|<3$.

253. Найдите общие корни уравнений $\cos \pi x+2\sin\frac{14\pi}{x}-\frac{1}{2}=0$, $\sin\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{14\pi}{x}-\sin\frac{14\pi}{x}+\frac{1}{2}=0$.

254. Найдите общие корни уравнений $\sin\frac{3\pi}{x}-\cos\frac{3\pi}{x}-2\cos 5\pi x=0$, $\sqrt{3}\sin 10\pi x-3\cos 10\pi x-\sin\frac{6\pi}{x}=0$.

255. Сколько решений в зависимости от α имеет уравнение $\operatorname{tg}(x+\alpha)\operatorname{tg}(x+2\alpha)\operatorname{tg}(x+3\alpha)=1$, $0\leqslant x<\pi$, $0\leqslant\alpha<\pi$?

256. При каких значениях α уравнение $8\cos x\cos\alpha\cos(x-\alpha)+1=0$ имеет решения?

257. Докажите, что если некоторое значение x удовлетворяет уравнениям

$$x^2\cos\alpha\cos\beta+x(\sin\alpha+\sin\beta)+1=0$$
$$\text{и } x^2\cos\beta\cos\gamma+x(\sin\beta+\sin\gamma)+1=0,$$

то это же значение x удовлетворяет также и уравнению

$$x^2\cos\gamma\cos\alpha+x(\sin\gamma+\sin\alpha)+1=0.$$

Решите уравнение (258—270):

258. $2\arcsin x\cdot\arccos x=3\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}$.

259. $\cos 2\arcsin x=x^2+2+6x\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$.

260. $2\arcsin x=\arccos 3x$. **261.** $\operatorname{arctg}(x-1)=3\operatorname{arctg}(x+1)$.

262. $\arcsin x\cdot\arccos x=-1$. **263.** $\cos 2\arccos x=\arcsin\cos x$.

264. $\arccos\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)=\arcsin\left(\frac{2}{\pi}\arcsin x\right)$.

265. $\arcsin(1+|\sin x|)=\arccos\left(1+\cos\frac{x}{10}\right)$.

266. $\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}=\frac{\pi}{12}$. **267.** $\arcsin x=2\operatorname{arctg} x$.

268. $\arcsin^2 x+\arccos^2 x=\frac{5}{4}\pi^2$.

269. $2\arcsin x+\arccos 2x=\frac{6}{7}\pi$.

270. $\operatorname{arctg}\frac{x\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\operatorname{arctg}\frac{x-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\alpha,\ 0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Решите систему уравнений (271—310):

271. $\begin{cases}\sqrt{2}\sin x+\cos y=1,\\ 2\sin x-3\cos y=\sqrt{2}.\end{cases}$ **272.** $\begin{cases}\sin x+\cos y=0,\\ \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

273. $\begin{cases}4y+\sqrt{3}\cos x=-\frac{1}{2},\\ 28y+4\sqrt{3}\cos x=1.\end{cases}$ **274.** $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\frac{1}{\cos y}=2\sqrt[3]{34},\\ \frac{1}{\cos y}\operatorname{tg} x=\sqrt[3]{34^2}-5.\end{cases}$

275. $\begin{cases}\sin^2 2x-(3-\sqrt{2})\operatorname{tg} 5y=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}-1),\\ \operatorname{tg}^2 5y+(3-\sqrt{2})\sin(-2x)=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}-1).\end{cases}$

276. $\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{1}{4},\\ \cos x\cos y=\frac{3}{4}.\end{cases}$ **277.** $\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{1}{4},\\ 3\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} y.\end{cases}$

278. $\begin{cases}\cos 2x=\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{4}\right),\\ \cos 2y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\end{cases}$ **279.** $\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2,\\ \cos x\cos y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

280. $\begin{cases}x\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=y\cos^2\left(y+\frac{\pi}{6}\right),\\ x\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=y\sin^2\left(y+\frac{\pi}{6}\right).\end{cases}$

281. $\begin{cases}\operatorname{tg} y-\operatorname{tg} x=1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y,\\ \cos 2y+\sqrt{3}\cos 2x=-1.\end{cases}$

282. $\begin{cases}\sin(2x+y)+\sin(2x-y)=\sqrt{2}\cos y,\\ \operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\cos y=\operatorname{tg}^2 y.\end{cases}$

283. $\begin{cases}6\cos x+4\cos y=5,\\ 3\sin x+2\sin y=0.\end{cases}$ **284.** $\begin{cases}4\operatorname{tg} 3x=3\operatorname{tg} 2y,\\ 2\sin x\cos(x-y)=\sin y.\end{cases}$

285. $\begin{cases}\operatorname{ctg} x+\sin 2y=\sin 2x,\\ 2\sin x\sin(x+y)=\cos y.\end{cases}$

286. $\begin{cases}4\sin y-6\sqrt{2}\cos x=5+4\cos^2 y,\\ \cos 2x=0.\end{cases}$

287. $\begin{cases} \sin x+\cos x=2+\sin y+\cos y, \\ 2\sin 2x+\sin 2y=0. \end{cases}$

288. $\begin{cases} \sin(2x+y)=2\sin y, \\ \sin(x+2y)=3\sin x. \end{cases}$

289. $\begin{cases} \cos^2 y+3\sin x\sin y=0, \\ 21\cos 2x-\cos 2y=10. \end{cases}$

290. $\begin{cases} \sin x-\dfrac{1}{\sin x}=\sin y, \\ \cos x-\dfrac{1}{\cos x}=\cos y. \end{cases}$

291. $\begin{cases} \operatorname{tg}(y+x)=4\sin x+2\cos x, \\ \operatorname{tg}(y-x)=4\sin x-2\cos x. \end{cases}$

292. $\begin{cases} \sin(x-y)=2\cos x\sin y, \\ \cos(2x+y)+\cos(x+y)\cos x=0. \end{cases}$

293. $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\sin(x+y)}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{\cos y}{\sin(x+y)}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

294. $\begin{cases} 4\sin(3x+2y)+\sin x=0, \\ 4\sin(2x+3y)+\sin y=0. \end{cases}$

295. $\begin{cases} a\cos(2x+y)=\cos y, \\ a\cos(x+2y)=\cos x, \quad a>1. \end{cases}$

296. $\begin{cases} \cos y=\sqrt{2}\cos(x+2y), \\ \sqrt{2}\sin x=\sin(2x+3y). \end{cases}$

297. $\begin{cases} 3\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}+6\sin x=2\sin(y-x), \\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{2}-2\sin x=6\sin(y+x). \end{cases}$

298. $\begin{cases} 3\cos(4x-2y)=\sqrt{2}\cos(2x-2y), \\ \sqrt{2}\sin(x+y)=3\sin(y-x). \end{cases}$

299. $\begin{cases} 5\sin x\sin y+\dfrac{5}{2}\cos x\cos y=2, \\ \cos x\sin y-2\sin x\cos y=\dfrac{6}{5}, \end{cases}$
$0\leqslant x\leqslant \pi,\ 0\leqslant y\leqslant \pi.$

300. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\cos 2y=\left(\sin y-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\sin 2x\right), \\ \operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=6\operatorname{tg}^2 y. \end{cases}$

301. $\begin{cases} \cos 2y+\dfrac{1}{2}=\left(\cos y-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+2\sin 2x\right), \\ \sin y\,(\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x)=3\operatorname{ctg} y. \end{cases}$

302. $\begin{cases} 2\cos 2x=(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin y+\sin 2x), \\ 8\cos 2x\,(\cos^8 x-\sin^8 x)+1=25\cos^2 y. \end{cases}$

303. $\begin{cases} \cos x\cos 2y-\sin y\cos 2x+2\cos x=1, \\ \cos 2x+3\cos 2y+8\sin y=8+4\sin x\sin y. \end{cases}$

304. $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z=2, \\ \sin x+\sin y+\sin z=-1, \\ x+y+z=\pi. \end{cases}$

305. $\begin{cases} 2\cos x=3\operatorname{tg} y, \\ 2\cos y=3\operatorname{tg} z, \\ 2\cos z=3\operatorname{tg} x. \end{cases}$

306. $\begin{cases} 8\cos(x-y)+4\cos(x+y)=3, \\ 8\cos(y-z)+4\cos(y+z)=3, \\ 2\cos(z-x)+10\cos(z+x)=-3. \end{cases}$

307. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=\dfrac{\sin z}{\cos x \cos y}+3, \\ \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z=\dfrac{\sin x}{\cos y \cos z}-5, \\ \operatorname{tg} z \operatorname{tg} x=\dfrac{\sin y}{\cos z \cos x}-3. \end{cases}$

308. $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin\alpha, \\ \cos x+\cos y=\cos\alpha. \end{cases}$

309. $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin\alpha, \\ \sin 3x+\sin 3y=\sin 3\alpha. \end{cases}$

310. $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin\alpha, \\ \sin 2x+\sin 2y=\sin 2\alpha. \end{cases}$

Решите неравенства, полученные из уравнений 50—150, заменой знака «$=$» на соответствующий знак неравенства по следующему правилу: для номеров 51, 55, 59, ..., т. е. для номеров вида $4k+3$, ставится знак «$>$»; для номеров 52, 56, 60, ..., т. е. для номеров вида $4k$, ставится знак «$\leqslant$»; для номеров 53, 57, 61, ..., т. е. для номеров вида $4k+1$, ставится знак «$\geqslant$»; для номеров 54, 58, 62, ..., т. е. для номеров вида $4k+2$, ставится знак «$<$».

§ 2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

14. Определение. Разные задачи

Равенство

$$a^{\log_a b}=b, \qquad (1)$$

где $a>0$, $a\neq 1$ (a — основание логарифма), $b>0$, определяет число $\log_a b$.

Зная одно лишь это определение, уже можно решать не очень сложные задачи. Например:

1. *Вычислить*: а) $\log_8 16$; б) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{\log_4 3}$.

Решение. а) Если $\log_8 16=x$, то по определению логарифма $8^x=16$, или $2^{3x}=2^4$; $x=\frac{4}{3}$.

б) Поскольку $\frac{\sqrt{2}}{4}=2^{-\frac{3}{2}}=(4^{\frac{1}{2}})^{-\frac{3}{2}}=4^{-\frac{3}{4}}$, то $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{\log_4 3}=$
$=\left(4^{-\frac{3}{4}}\right)^{\log_4 3}=(4^{\log_4 3})^{-\frac{3}{4}}=3^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{27}}$.

Каждая из функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) является обратной по отношению к другой. Напомним, что функция $y=\varphi(x)$ является обратной по отношению к функции $y=f(x)$, если областью определения функции $y=\varphi(x)$ является область значений функции $y=f(x)$ и для любых a и b, таких, что $b=f(a)$, справедливо равенство $a=\varphi(b)$. Для того чтобы функция $y=f(x)$ имела обратную (являлась обратимой), необходимо и достаточно, чтобы каждое свое значение она принимала ровно один раз. В частности, достаточно, чтобы $y=f(x)$ являлась строго монотонной функцией. Из этого следует, что график функции $y=\varphi(x)$ симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов. Ясно, что, во-первых, и само понятие обратной функции симметрично (т. е. функция $y=f(x)$ является обратной по отношению к функции $y=\varphi(x)$, если $y=\varphi(x)$ обратная к $y=f(x)$), во-вторых, не любая функция имеет обратную и, в-третьих, для пары взаимно обратных функций областью определения одной из них является область изменения другой и наоборот.

Формулируя свойства логарифма (часто словесно), мы обычно для краткости опускаем слова, указывающие на область применимости (например: «Логарифм произведения равен сумме логарифмов...»). К сожалению, подобная неаккуратность иногда переносится и на задачу, что приводит к печальным последствиям (в частности, к потере корней при решении уравнений).

Известные школьные свойства логарифма полезно пополнить еще одной формулой.

Прологарифмируем равенство (1) по основанию c ($c>0$, $c\neq 1$). По правилу логарифмирования степени будем иметь $\log_a b\cdot\log_c a=$ $=\log_c b$, откуда

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}. \qquad (2)$$

В частности, если $c=b$, то $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$.

Обратим внимание в связи с этим на одно забавное «мнемоническое» правило, используя которое можно ускорить процесс упрощения выражений, содержащих произведения и частные логарифмов. Если поставить в соответствие логарифму $\log_a b$ дробь $\frac{b}{a}$ и то же сделать для других логарифмов, то равенству $\log_a b\times$ $\times\log_c a=\log_c b$ можно поставить в соответствие равенство $\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$, которое означает обычное сокращение на a. Аналогично можно подойти и к равенству (2). (Заметим, что это сходство с дробями дальше не распространяется.)

Рассмотрим пример.

2. *Упростить выражение*:

$$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8.$$

Решение. На основании нашего правила после всех сокращений получим дробь $\frac{8}{2}$, которой соответствует $\log_2 8=3$.

Еще раз решите эту задачу, преобразуя каждый из заданных логарифмов по формуле (2), взяв $c=2$, иными словами, перейдя во всех логарифмах к одному основанию 2.

Вообще при решении любых задач, содержащих логарифмы по различным основаниям, следует запомнить одну рекомендацию, почти не имеющую исключений: необходимо перейти во всех логарифмах к одному основанию.

Сформулировав это «почти» общее правило, рассмотрим, однако, два примера, в которых осуществляется это «почти», т. е. переход к одному основанию в них ничего не дает.

3. *Сравнить*:

а) $\log_2 3$ и $\log_3 5$; б) $\log_{10} 11$ и $\log_{11} 12$.

Решение. а) Попытаемся подобрать такое рациональное число n, которое разделило бы данные числа, т. е. было бы больше одного из них, но меньше другого. Заметим, что оба логарифма больше 1, но меньше 2.

Попробуем сравнить их с $\frac{3}{2}$. Оказывается, $\log_2 3 > \frac{3}{2}$, так как $3 > 2^{\frac{3}{2}}$, $3^2 > 2^3$, а $\log_3 5 < \frac{3}{2}$, так как $5^2 < 3^3$. Таким образом, $\log_2 3 > \log_3 5$.

Предложенный метод сравнения можно назвать методом «вставки» (между двумя сравниваемыми «плохими» числами вставляется «хорошее» число) или методом «разделения» (находится число, разделяющее данные два числа). Иногда этот метод реализуют в иной форме: ищут такое натуральное число k, при умножении на которое сравниваемых чисел a и b получают такие числа ka и kb, что между ними находится хотя бы одно целое число. Этот метод имеет весьма широкую область применения.

Однако он с трудом реализуется, если сравниваемые числа очень близки друг к другу, как это, в частности, имеет место в пункте б). При решении этого примера срабатывает один любопытный прием. Вычтем из рассматриваемых чисел по 1. Тогда получим $\log_{10} 11 - 1 = \log_{10} \frac{11}{10} = \log_{10}\left(1+\frac{1}{10}\right) > \log_{11}\left(1+\frac{1}{10}\right) > \log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right) = \log_{11} 12 - 1$.

В первом неравенстве мы пользовались тем, что если $c > a > 1$, $b > 1$, то $\log_a b > \log_c b$ (т. е. тем, что при $b > 1$, $x > 1$ функция $y = \log_x b = \frac{1}{\log_b x}$ убывает), во втором — монотонностью функции $y = \log_a x$.

Подоплека этого приема запрятана достаточно глубоко. Дело в том, что оба сравниваемых числа очень близки к 1. Вычитая 1, мы получаем числа, близкие к нулю, более удобные для сравнения (так как возрастает относительная разность).

15. Показательные и логарифмические уравнения

Специфика решения уравнений рассматриваемого класса уравнений состоит в расширении методов и формул преобразований, в частности, добавляются две взаимно обратные операции — логарифмирование и потенцирование; в пополнении списка замен, целью которых, как правило, является сведение данного уравнения к алгебраическому; и, наконец, добавляются два элементарных уравнения:

$$a^x = b \ (x = \log_a b) \text{ и } \log_a x = b \ (x = a^b).$$

Рассмотрим несколько упражнений.

4. *Решить уравнение*: $\sqrt{8 \cdot 3^{x+2} - 23} = 2 - 3^{x+1}$.

Р е ш е н и е. Сделаем замену $y = 3^x$. Получим уравнение $\sqrt{72y - 23} = 2 - 3y$. После возведения в квадрат и упрощений приходим к квадратному уравнению $3y^2-28y+9=0$. Корни последнего $\frac{1}{3}$ и 9.

Второй корень является посторонним (если $y=9$, то $2-3y=$ $=2-27=-25<0$). Таким образом, $y=\frac{1}{3}$.

Возвращаясь к неизвестному x, получаем $3^x=3^{-1}$, $x=-1$.
Ответ. -1.

При решении этого уравнения имеет место достаточно типичная ситуация: уже после первого шага — замены неизвестного — мы получаем алгебраическое уравнение и вновь возвращаемся к показательной функции уже в самом конце и на уровне элементарного уравнения. По существу, это уравнение если и относится к категории показательных, то лишь по внешним, несущественным признакам.

5. *Найти корни уравнения*: $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{3}\right)^{3x-4}$.

Решение. Группируем отдельно степени с основанием 2 и с основанием 3. Получим $3^{\frac{1}{4}(x-2)}=2^{2(x-2)}$, откуда $\left(\frac{3^{\frac{1}{4}}}{2^2}\right)^{x-2}=1$, $x=2$.
Ответ. 2.

6. *Решить уравнение*: $\log_2(x^2-4x)^2=2\log_2(18-5x)$.

Решение. Грубой ошибкой, о которой мы уже предупреждали читателя, было бы преобразование левой части на основании равенства $\log_2 a^2=2\log_2 a$, верного лишь при $a>0$.

Потенцируя данное равенство, будем иметь уравнение $(x^2-4x)^2=(18-5x)^2$, среди решений которого надо отобрать те, для которых $18-5x>0$, т. е. $x<3{,}6$.

Полученное уравнение распадается на два: $x^2-4x=18-5x$ и $x^2-4x=-18+5x$.

Корни первого $\frac{-1-\sqrt{73}}{2}$ и $\frac{-1+\sqrt{73}}{2}$, корни второго 3 и 6. Подходят $\frac{-1-\sqrt{73}}{2}$ и 3. (Докажите, что $\frac{-1+\sqrt{73}}{2}>3{,}6$.)

Ответ. 3; $\frac{-1-\sqrt{73}}{2}$.

7. *Решить уравнение*: $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=4$.

Решение. Сделаем замену $y=(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x$. Поскольку $(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})=1$, то второе слагаемое в левой части уравнения равно $\frac{1}{y}$. Получаем $y+\frac{1}{y}=4$, откуда $y_1=2+\sqrt{3}$; $y_2=2-\sqrt{3}$.
Ответ. -2; 2.

8. *Решить уравнение:*

$$\log_{x+19}(2x^2+36x+1)=\log_4 8+\cos^2\frac{117\pi}{4}.$$

Р е ш е н и е. Правая часть уравнения равна 2. Имеем:

$$2x^2+36x+1=(x+19)^2;\ x^2-2x-360=0.$$

Корни этого уравнения -18 и 20.

Первый корень не удовлетворяет исходному уравнению, поскольку при $x=-18$ основание логарифма становится равным 1.

Ответ. 20.

9. *Решить уравнение:* $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}}=500.$

Р е ш е н и е. Прологарифмируем данное уравнение по основанию 5 (или 2). Вообще говоря, можно логарифмировать по любому основанию, но не совсем удачный выбор основания может привести к громоздким преобразованиям.

Имеем $x+3\,\frac{x-1}{x}\log_5 2=3+2\log_5 2,$

$x^2+x(\log_5 2-3)-3\log_5 2=0,$

$x_1=3,\ x_2=-\log_5 2.$

Ответ. $-\log_5 2;\ 3.$

10. *Решить уравнение:* $3\log_x 4+2\log_{4x} 4+3\log_{16x} 4=0.$

Р е ш е н и е. Перейдем во всех логарифмах к одному основанию 2 (так, например, $\log_{16x} 4=\frac{\log_2 4}{\log_2 16x}=\frac{2}{4+\log_2 x}$) и сделаем замену $y=\log_2 x$.

Получим $\frac{6}{y}+\frac{4}{2+y}+\frac{6}{4+y}=0.$

Корни этого уравнения -3 и -1.

Ответ. $\frac{1}{8};\ \frac{1}{2}.$

Аналогичное преобразование — переход к одному основанию — можно осуществлять и для функций показательных. Например:

11. *Решить уравнение:* $5^{\log_2 x}+2x^{\log_2 5}=15.$

Р е ш е н и е. Преобразуем $x^{\log_2 5}=(5^{\log_5 x})^{\log_2 5}=\left(5^{\frac{\log_2 x}{\log_2 5}}\right)^{\log_2 5}=5^{\log_2 x}.$ Уравнение имеет вид:

$$5^{\log_2 x}+2\cdot 5^{\log_2 x}=15,$$

$$5^{\log_2 x}=5,\ \log_2 x=1,\ x=2.$$

Ответ. 2.

При решении уравнений, содержащих логарифмические и тригонометрические функции, как правило, наиболее трудной задачей является отбор корней.

12. *Решить уравнение:*

$$\log_{\sin x}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)+\log_{\sin x}\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=\log_{\sin x} 0{,}03.$$

Решение. Из данного уравнения следует, что $\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0{,}03$. (Понятно, что на $\sin x$ и $\cos x$ наложены ограничения: $\sin x>\frac{1}{2}$, $\cos x>\frac{1}{2}$. Ясно также, что $\sin x\neq 1$.)

Откуда $\sin x\cos x-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+0{,}22=0$.

Сделаем замену $y=\sin x+\cos x$, тогда $y^2=1+2\sin x\cos x$ и $\sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$. Получаем относительно y уравнение

$$\frac{y^2-1}{2}-\frac{1}{2}y+0{,}22=0,\ y^2-y-0{,}56=0,\ y_1=1{,}4,\ y_2=-0{,}4.$$

Второй корень не подходит, так как должно выполняться неравенство $\sin x+\cos x>1$ (это следует из ограничений). Получаем уравнение $\sin x+\cos x=1{,}4$. Перейдем к тангенсам половинного угла: $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Будем иметь $\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}=1{,}4$, откуда $2{,}4z^2-2z+0{,}4=0$, $z_1=\frac{1}{2}$, $z_2=\frac{1}{3}$.

Теперь найдем $\sin x$ и $\cos x$. Если $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, то $\sin x=\frac{4}{5}$, $\cos x=\frac{3}{5}$; если же $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$, то, наоборот, $\sin x=\frac{3}{5}$, $\cos x=\frac{4}{5}$.

Ответ. $\arcsin\frac{4}{5}+2\pi k$; $\arcsin\frac{3}{5}+2\pi k$.

Мы не будем здесь рассматривать примеры систем уравнений, содержащих показательные и логарифмические функции, поскольку никакие новые идеи по сравнению с уже рассмотренными в нашем пособии не включаются в стандартную схему.

16. Показательные и логарифмические неравенства

Решение показательных и логарифмических неравенств основано на монотонности показательной и логарифмической функций. В общем случае если функция $y=f(x)$ монотонно возрастает, то из неравенства $f(a)>f(b)$ следует, что $a>b$. Подчеркнем: именно из первого следует второе, поскольку обратное утверждение «Если $a>b$, то $f(a)>f(b)$» может оказаться и неверным, так как a и b (вместе или порознь) могут не принадлежать области определения функции $y=f(x)$.

Если же $y=f(x)$ монотонно возрастает (или убывает) и определена при всех x, то неравенства $f(a)>f(b)$ и $a>b$ $(a<b)$ оказываются эквивалентными. Именно это имеет место для показательной функции.

Рассмотрим решения нескольких неравенств.

13. *Решить неравенство:*

$$7^{1-3x^2-5x}+7^{-3x^2-5x}<8\cdot 7^{6(x+1)}.$$

Решение. Имеем $7\cdot 7^{-3x^2-5x}+7^{-3x^2-5x}<8\cdot 7^{6(x+1)}$, $7^{-3x^2-5x}<7^{6x+6}$.

Функция $y=7^t$ монотонно возрастает, значит, $-3x^2-5x<$ $<6x+6$.

Ответ. $x<-3$; $-\frac{2}{3}<x$.

14. *Решить неравенство:* $\log_{0,5}(x^2+2x-8)\geqslant -4$.

Решение. Функция $y=\log_{0,5}t$ монотонно убывает, следовательно, потенцируя, меняем в неравенстве знак на противоположный. Получаем $x^2+2x-8\leqslant 0,5^{-4}$.

К этому неравенству надо добавить $x^2+2x-8>0$ (область определения).

Решая систему неравенств, получаем $-6\leqslant x<-4$, $2<x\leqslant 4$.

Ответ. $-6\leqslant x<-4$; $2<x\leqslant 4$.

Если в неравенстве фигурирует логарифмическая функция, содержащая неизвестное в основании, то обычно рассматриваются два случая: основание больше 1 и основание меньше 1 (но больше нуля).

15. *Решить неравенство:* $\log_{4x^2}(5x+6)>1$.

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $4x^2>1$. Тогда $5x+6>4x^2$ (при потенцировании сохраняем знак неравенства). Решая систему из двух неравенств, находим $-\frac{3}{4}<x<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x<2$.

2) $4x^2<1$. Тогда $5x+6<4x^2$ (знак неравенства меняется).

К этим двум неравенствам следует добавить еще два: $x^2>0$ (т. е. $x\neq 0$) и $5x+6>0$ (область определения). Заметим, что в первом случае нет необходимости в добавлении аналогичных неравенств. Полученная система неравенств несовместна.

Ответ. $-\frac{3}{4}<x<-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}<x<2$.

Обратите внимание, что в этом неравенстве правильный ответ можно получить, не рассматривая второй случай. Ясно, однако, что его отсутствие является грубой ошибкой.

При использовании для решения рассматриваемых неравенств метода интервалов полезно запомнить две следующие рекомендации:

Выражение a^b-a^c при $a>1$ имеет тот же знак, что $(b-c)$, и противоположный, если $0<a<1$. Оба варианта можно объединить в один: выражения a^b-a^c и $(a-1)(b-c)$ имеют один знак.

Аналогично $\log_a b$ и $(a-1)(b-1)$ также имеют один знак (докажите самостоятельно). Правда, формальная замена множителя $\log_a b$ выражением $(a-1)(b-1)$ приводит к расширению области определения, и об этом нельзя забывать.

16. *Решить неравенство:* $\left(\frac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}$.

Решение. Имеем $\left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2} - \left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{-3x^2+x} < 0$. Левую часть неравенства заменим на $\left(\frac{x^4+1}{4x^2}-1\right)(x-2-(-3x^2+x))$.

Получаем $(x^4-4x^2+1)(3x^2-2)<0$ (не забудем и про условие $x\neq 0$).

Последнее неравенство решается методом интервалов.

Ответ. $-\sqrt{2+\sqrt{3}}<x<-\sqrt{\frac{2}{3}}$; $-\sqrt{2-\sqrt{3}}<x<0$; $0<x<\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}<x<\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

17. *Решить неравенство:* $\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2}-2^{11x}} \geqslant 0$.

Решение. Заменяя каждый множитель на выражение того же знака, приходим к неравенству

$$\frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{15x^2+2-11x} \geqslant 0$$

при условии $x>\frac{1}{5}$, $x\neq\frac{1}{2}$, $x\neq\frac{1}{3}$. Разложив на множители знаменатель, получим неравенство

$$\frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{(3x-1)(5x-2)} \geqslant 0.$$

Ответ. $\frac{1}{5}<x\leqslant\frac{2}{7}$; $x>\frac{1}{2}$.

17. Задачи

1. Вычислите:

а) $27^{-\frac{1}{3}\log_3\frac{1}{2}-\log_{27}2}$; б) $5^{\log_{\sqrt{5}}4-\log_5 2+2\log_{25}3}$;

в) $49^{\log_7 2+\log_{\sqrt{7}}2-\frac{1}{2}\log_{49}64}$; г) $7^{\frac{\lg\lg 2}{\lg 7}}$;

д) $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+9^{\frac{1}{\log_8 3}}}$; е) $15\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt[5]{7}\cdot\frac{1}{49}\cdot 5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{49}}\right)$;

ж) $\lg(\sin^2 10°+\sin^2 80°)+\lg(\sin^2 20°+\sin^2 70°)+\lg(\sin^2 30°+\sin^2 60°)+\lg(\sin^2 40°+\sin^2 50°)$;

з) $\lg\operatorname{tg}1°\cdot\lg\operatorname{tg}2°\cdot\lg\operatorname{tg}3°\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}88°\cdot\lg\operatorname{tg}89°$;

и) $\lg\operatorname{tg}1°+\lg\operatorname{tg}2°+\lg\operatorname{tg}3°+\ldots+\lg\operatorname{tg}88°+\lg\operatorname{tg}89°$;

к) $\log_{15}20\log_{16}15\log_{17}16\log_{18}17\log_{19}18\log_{20}19$.

2. Определите знак числа:

а) $\log_{\sqrt{2}}(0{,}5\,(1-\log_7 3))$; б) $(1-0{,}875^{57})\log_{0{,}5}(1-\log_{59} 0{,}95)$;

в) $\dfrac{\log_3 2\,\log_{0{,}4} 4\,\lg\pi\,\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}}{(0{,}3^{-100}-0{,}3^{-99})\log_{0{,}57}0{,}75}$; г) $\dfrac{\log_{0{,}99}(0{,}7^{-1}(\log_2 5-1))}{0{,}99^{99}-0{,}99^{-101}}$.

3. Сравните два числа:

а) $\log_5 3$ и $\dfrac{2}{3}$; б) $\log_2 5$ и $2\dfrac{1}{3}$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} 10$ и $-2\dfrac{1}{5}$; г) $\sqrt{8}$ и $2^{2\log_2 5+\log_{0,5} 9}$;

д) $2^{\log_3 5}$ и $5^{\log_3 2}$; е) $\log_8 5$ и $\log_6 5$;

ж) $\log_2 5$ и $\log_5 32$; з) $\log_7 8$ и $\log_8 9$.

4. Найдите $\lg 56$, если $\lg 2=a$, $\log_2 7=b$.

5. Найдите $\log_{30} 8$, если $\log_{30} 3=a$, $\log_{30} 5=b$.

6. Найдите $\log_6 16$, если $\log_{12} 27=a$.

7. Найдите $\log_5 3{,}38$, если $\lg 2=a$, $\lg 13=b$.

8. Найдите $\log_{ab}\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$, если $\log_{ab} a=n$.

9. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{x^2-25}\,\log_{0{,}1}(42+x-x^2)$; б) $y=\log_{3+x}(x^2-1)$;

в) $y=\log_{x+5}\left(\dfrac{3x+2}{2x-1}\right)$; г) $y=\lg\left(1-\log_{\frac{1}{2}}(x+5)\right)$;

д) $y=\log_{x-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}\right)$; е) $y=\lg(4-x^2)\sqrt{\dfrac{1+\lg^2 x}{\lg x^2}-1}$.

10. Постройте график функции:

а) $y=2^{\frac{1}{x}}$; б) $y=0{,}5\log_2 x^2$;

в) $y=10^{\lg(1-x^2)}$; г) $y=9^{\log_3 x}$;

д) $y=\log_x 2$; е) $y=\log_2\sin x$;

ж) $y=x^{\frac{\log_2\log_2 x}{\log_2 x}}$; з) $y=\log_{\sin x}\cos x$;

и) $y=2^{|\log_{0{,}5} x|}$; к) $y=2^{\sqrt{\log_2 x}}-x^{\sqrt{\log_x 2}}$.

Решите уравнение (11—128):

11. $\left(2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}=4$. **12.** $(0{,}5)^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=\dfrac{1}{64}$.

13. $\sqrt{2}=4^{x^2-\sqrt{x^2-9}-20{,}75}$. **14.** $\sqrt{2^{x^2-2x-10}}=\sqrt{33+\sqrt{128}}-1$.

15. $\sqrt[x-1]{5^{x+3}}\cdot\sqrt[x^2-1]{125^{2(x-1)}}=\sqrt[x+1]{25^{x+4}}$. **16.** $25^{|1-2x|}=5^{4-6x}$.

17. $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x+2\sqrt{x}-1}=(2{,}25)^{x+\sqrt{x}-1}$. **18.** $2^{x^2+x-6}-2^{x^2+x-9}=56$.

19. $\sqrt{3^{x-54}}-7\cdot\sqrt{3^{x-58}}=162$.

20. $3^{x+1}-5^x+3^{x-1}-5^{x-1}=5^{x-2}-3^{x-2}$.

21. $(0,81)^{x-1}-(0,9)^{2x-3}+(0,01)^{x-1,5}-9\cdot(0,1)^{2x-2}=0$.

22. $3^{\sqrt{x}}-5^{\sqrt{x}}=5^{\sqrt{x}+1}-3^{\sqrt{x}+1}+5^{\sqrt{x}+2}-3^{\sqrt{x}+2}$.

23. $3\cdot5^{x-2}-2\cdot5^{4-x}-5=0$. **24.** $(0,1)^{x+1}+(0,01)^x=0,02$.

25. $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$.

26. $3^{2x^2}-2\cdot3^{x^2+x+6}+3^{2x+12}=0$. **27.** $2^{x+2}+8^x=5\cdot4^x$.

28. $9^{x+1}-3\cdot3^{x+3}-27\cdot3^{x-2}+27=0$.

29. $2^{2x+1}-5\cdot6^x+3^{2x+1}=0$.

30. $3^x+\sqrt{3^{x+2}\cdot7^x}=3\cdot7^x+\sqrt{21^x}$.

31. $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$. **32.** $8^x+18^x-2\cdot27^x=0$.

33. $3\cdot4^x+(3x-10)\cdot2^x+3-x=0$.

34. $2\sqrt{x}\cdot4^x+5\cdot2^{x+1}+2\sqrt{x}=2^{2x+2}+5\sqrt{x}\cdot2^x+4$.

35. $\sqrt{x}\,(9^{\sqrt{x^2-3}}-3^{\sqrt{x^2-3}})=3^{2\sqrt{x^2-3}+1}-3^{\sqrt{x^2-3}+1}+6\sqrt{x}-18$.

36. $(6-\sqrt{35})^x+(6+\sqrt{35})^x=142$.

37. $8\,(4^x+4^{-x})-54\,(2^x+2^{-x})+101=0$.

38. $2^{3x}-\frac{8}{2^{3x}}-6\left(2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=1$.

39. $|x-3|^{\frac{x^2-8x+15}{x-2}}=1$. **40.** $\left|\frac{1}{3}\cdot3^x-2\right|=9^{x-1}$.

41. $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}$.

42. $\frac{4}{25^{-x}+8+16\cdot25^x}-\frac{5^x}{1+4\cdot25^x}+\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{23}}{5}+0,01$.

43. $4^{\frac{1}{\cos^2 x}}-2^{\operatorname{tg}^2 x}-3=0$. **44.** $4^{\operatorname{tg}^2 x}+2^{\frac{1}{\cos^2 x}}=8$.

45. $4^{\sin x}-3\cdot2^{\sin x+\cos x}+2\cdot4^{\cos x}=0$.

46. $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$. **47.** $4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x}=3$.

48. $|\cos x|^{\sin^2 x-1,5\sin x+0,5}=1$.

49. $0,5\lg(x+3)-2\lg 2=1-\lg\sqrt{25x+375}$.

50. $2\lg^2 x+\lg x^2=2\sqrt{2}+\sqrt{2}\lg x^2$.

51. $2\lg\lg x=\lg(3-2\lg x)$. **52.** $\log_2\log_2(5x-4)=1+\log_2\log_2 x$.

53. $\lg(10x)\lg(0,1x)=\lg x^3-3$.

54. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)+\lg^2 x=14$.

55. $3\sqrt{\log_3 x}-\log_3(3x)=1$. **56.** $\sqrt{\log_2\left(\frac{1}{x}\right)+3}+\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0$.

57. $2\log_2\left(\frac{x-7}{x-1}\right)+\log_2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$. **58.** $\log_{5-x}(2x^2-5x+31)=2$.

59. $\log_{2x^2-2}(3x^2+x-4)=\log_8 16-\log_{27} 3$.

60. $\log_{x^2-4x+1}(x^3-3x^2-3x+1)=2$.

61. $\log_3(3^x-8)=2-x$.

62. $2x+1=2\log_2(9^x+3^{2x-1}-2^{x+3,5})$.

63. $x(1-\lg 5)=\lg(2^x+x-1)$.

64. $2(\lg 2-1)+\lg(5^{\sqrt{x}}+1)=\lg(5^{1-\sqrt{x}}+5)$.

65. $\log_3(3^x-1)\cdot\log_3(3^{x+1}-3)=6$.

66. $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6$.

67. $\log_6(2^{\sqrt{x}+1}-3)=\log_6\log_{\sqrt{3}}9^{\frac{1}{3}}-\frac{\sqrt{x}}{2}\log_6 4$.

68. $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3\cdot 5^{\lg x-1}-13\cdot 7^{\lg x-1}$.

69. $5^{3\lg x}=12{,}5x$.

70. $16^{\frac{x-1}{x}}\cdot 5^x=100$.

71. $(0{,}4)^{x^2-2}\cdot(0{,}5)^{x-3}=10$.

72. $6^{\frac{2x-1}{x}}\cdot(0{,}75)^{\frac{x}{x+1}}=\sqrt[6]{2\cdot 3^{13}}$.

73. $3^{x-3}=5^{x^2-7x+12}$.

74. $x^{\lg x}-1=10(1-x^{-\lg x})$.

75. $\dfrac{x^{2\lg^3 x}}{(\sqrt{x^3})^{\lg x}}=\sqrt{10}$.

76. $x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}$.

77. $x^{\log_2\frac{x}{98}}\cdot 14^{\log_2 7}=1$.

78. $10^{\sqrt{\lg x}}+x^{\sqrt{\log_x 10}}=200$.

79. $2^{\sqrt{\log_2 x}}-2=2-x^{\sqrt{\log_x 2}}$.

80. $25^{\lg x}=5+4x^{\lg 5}$.

81. $x^{\log_2 9}=x^2\cdot 3^{\log_2 x}-x^{\log_2 3}$.

82. $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x}=12$.

83. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\log_3(x^2-1)}=\sqrt{2(x-1)}$.

84. $\log_4 x+\log_{x^2}2=1$.

85. $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_4 2$.

86. $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x)+\log_2\left(\frac{x^2}{8}\right)+7=0$.

87. $\dfrac{\log_2 x}{\log_4(2x)}=\dfrac{\log_8(4x)}{\log_{16}(8x)}$.

88. $\log_{3x}x=\log_{9x}x$.

89. $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x=-1$.

90. $2\log_3\left(\frac{x^2}{27}\right)-\dfrac{\log_3\left(\frac{1}{x}\right)}{\log_5\sqrt{x}}=2$.

91. $3x\log_3 x+2=\log_{27}x^3+6x$.

92. $(\log_4(2x+9)+1)\cdot\log_{(x+2)}2=1$.

93. $\log_{1-2x^2}x=\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4\log_2(1-2x^2)}$.

94. $\log_{2-2x^2}(2-x^2-x^4)=2-\dfrac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(2-2x^2)}$.

95. $\log_2 x\cdot\log_2(x-3)+1=\log_2(x^2-3x)$.

96. $\lg^2(x+1)=\lg(x+1)\cdot\lg(x-1)+2\lg^2(x-1)$.

97. $x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-x\log_{\frac{1}{6}}(5x^2-2x-3)=x^2+2x$.

98. $x^2\log_2\left(\frac{3+x}{10}\right)-x^2\log_{\frac{1}{2}}(2+3x)=x^2-4+2\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{3x^2+11x+6}{10}\right)$.

99. $\log_3 \log_{\sqrt{2}} x + 2 \log_{\frac{1}{9}} \log_2\left(2x - \frac{5}{9}\right) = 0.$

100. $2 \log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} (2+x) + \log_2 \log_{\frac{1}{3}} \left(2x + \frac{31}{9}\right) = 0.$

101. $\frac{1}{3} \log_2 (\sqrt{21x - x^2} - \sqrt{26} - 2) - \log_8\left(\sqrt{2x+34} - \frac{22}{\sqrt{26}-2}\right) = 0.$

102. $\log_2 (7 - 4x - \log_2 10) + \log_{0,5} (9\sqrt{3-2x} - 5 + \log_{0,5} 20) = 0.$

103. $\log_3 2 + \log_3 \log_3 (4 - x) = \log_3 \log_3 (19 - 6x).$

104. $\log_3 (\sqrt{x} + |\sqrt{x} - 1|) = \log_9 (4\sqrt{x} - 3 + 4|\sqrt{x} - 1|).$

105. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5.$ **106.** $3 \log_2 x^2 - \log_2^2 (-x) = 5.$

107. $\sqrt{2 \log_8 (-x)} - \log_8 \sqrt{x^2} = 0.$

108. $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \log_{\frac{1}{2}} (x - 1).$

109. $\log_{3x+7} (9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3} (6x^2 + 23x + 21) = 4.$

110. $\log_{2x+1} (5 + 8x - 4x^2) + \log_{5-2x} (1 + 4x + 4x^2) = 4.$

111. $\log_{1-2x} (6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x} (4x^2 - 4x + 1) = 2.$

112. $\log_{x+1} (1 - 3x) = \log_{\sqrt{1-3x}} (1 - 2x - 3x^2) - 1.$

113. $2 - 6^{\frac{1}{2} + \log_6 \sin x} = 2^{\frac{1}{2} + \log_2 \cos x}.$

114. $3 \log_2^2 \sin x + \log_2 (1 - \cos 2x) = 2.$

115. $2 \log_3 \operatorname{ctg} x = \log_2 \cos x.$

116. $\log_2 \operatorname{tg} x + \log_4\left(\frac{\cos x}{2\cos x - \sin x}\right) = 0.$

117. $\log_{\sqrt{2}\sin x} (1 + \cos x) = 2.$ **118.** $\frac{2}{\lg (0,5 + \cos^2 x)} = \log_{\sin 2x} 10.$

119. $\log_{\sin 3x} (\cos x - \cos 2x) = 1.$

120. $\log_{\sin x} 2 + \log_{\cos x} 2 + \log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\cos x} 2 = 0.$

121. $(\log_{\operatorname{tg} x} \cos x + 2) \log_{\operatorname{tg} x} \cos x = 2 - \log_{\operatorname{ctg} x} \cos x.$

122. $9 \log_{\sin 2x} (4\cos^2 x) + 8 \log_{2\cos x} \sin x = 16.$

123. $\log_{\cos x}\left(\frac{\sin 2x}{\sqrt{2}} + \cos x - \sin^2 x - \sqrt{2}\sin x\right) = 2.$

124. $\log_{\sin (5-x)} (15x + 2 - 16\sqrt{3x-2}) = 2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}.$

125. $\log_{\sin (2+x)} (47 - 15x - 16\sqrt{7-3x}) = \log_3 \operatorname{tg}^2 \frac{13\pi}{4}.$

126. $\log_{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} (2(2x+1) - 5\sqrt{2x-1}) = \cos^2 \frac{17\pi}{6} + \log_{16} \frac{1}{8}.$

127. $\sqrt{4-x} \cdot 4^{\log_2 x} + \log_3 (x - 2) = 9$, x — целое число.

128. $\sqrt{7-2x} \cdot 8^{\log_4 x} + \log_3\left(2 - \frac{x}{2}\right) = 2\sqrt{8-x}$; x — целое число.

Решите систему уравнений (129—153):

129. $\begin{cases} y^2=4^x+8, \\ 2^{x+1}+y+1=0. \end{cases}$

130. $\begin{cases} 3^x\cdot 5^y=75, \\ 3^y\cdot 5^x=45. \end{cases}$

131. $\begin{cases} 2^x-7^{y+1}=1, \\ 2^x\cdot 7^y=8. \end{cases}$

132. $\begin{cases} 7\cdot 2^x+6y=2, \\ 3\cdot 2^{x+1}-5y=93. \end{cases}$

133. $\begin{cases} (x-y)\cdot(0,5)^{y-x}=5\cdot 2^{x-y}, \\ (x-y)^{\frac{x+y}{7}}=125. \end{cases}$

134. $\begin{cases} 4^x+2^y=12, \\ \sqrt{3x-2y}=\sqrt{5+x-3y}. \end{cases}$

135. $\begin{cases} x+2^x=y+2^y, \\ x^2+xy+y^2=12. \end{cases}$

136. $\begin{cases} \log_{xy}(x-y)=1, \\ \log_{xy}(x+y)=0. \end{cases}$

137. $\begin{cases} (4y^2-y+6)\cdot 2^x=20y, \\ x+\log_2 y=2. \end{cases}$

138. $\begin{cases} \dfrac{\lg x+\lg y}{\lg(x+y)}=1, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

139. $\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{4}, \\ \log_x y-\log_y x=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

140. $\begin{cases} \sqrt{2^{x-y}}+\sqrt{2^{y-x}}=2,5, \\ \lg(2x-y)-\lg(2x+y)=\lg 0,6. \end{cases}$

141. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(xy)+y+2=0, \\ 17+3^{2+y}=\dfrac{18}{xy}. \end{cases}$

142. $\begin{cases} \log_2\left(\dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2}\right)=2, \\ \log_8 x\cdot\log_2(y+1)^2=\dfrac{4}{3}. \end{cases}$

143. $\begin{cases} x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27, \\ \log_3 y-\log_3 x=1. \end{cases}$

144. $\begin{cases} \log_2 x=\log_4 y+\log_4(4- \\ \log_3(x+y)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{y}{x}\right). \end{cases}$

145. $\begin{cases} \lg^2 x=\lg^2 y+\lg^2(xy), \\ \lg^2(x-y)+\lg x\lg y=0. \end{cases}$

146. $\begin{cases} 2^{x-y}-2\cdot 6^{x-y}-6^{-2y}=0, \\ 2^{-x-y}-3^{x+y}+2\cdot 9^x=3^{x+y}-9^x. \end{cases}$

147. $\begin{cases} \log_2(65-2^{2+y})=4-y, \\ \log_2\left(\dfrac{2x+y}{y-2x+6}\right)=\log_2(x-1)-\log_2(2-x). \end{cases}$

148. $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)-\log_2 x=\log_2(3y+x)-1, \\ \log_2\left(\dfrac{xy+1}{2y^2+y-x+2}\right)=\log_2\left(\dfrac{x}{y}\right)-1. \end{cases}$

149. $\begin{cases} \log_5 x+3^{\log_3 y}=7, \\ x^y=5^{12}. \end{cases}$

150. $\begin{cases} y\cdot x^{\log_y x}=x^{2,5}, \\ \log_4 y\cdot\log_y(y-3x)=1. \end{cases}$

151. $\begin{cases} \log_{12} x\cdot\left(\dfrac{1}{\log_x 2}+\log_2 y\right)=\log_2 x, \\ \log_2 x\cdot\log_3(x+y)=3\log_3 x. \end{cases}$

152. $\begin{cases} 2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3}=3^{-y-4}, \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2\leqslant 8. \end{cases}$

153. $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2, \\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2, \\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2. \end{cases}$

Решите неравенство (154—224):

154. $x^2 3^x-3^{x+1}\leqslant 0.$ **155.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}<3^{-x}.$

156. $4^{\sqrt{9-x^2}+1}+2<9\cdot 2^{\sqrt{9-x^2}}.$ **157.** $7^{x-\frac{1}{8}x^2}<7^{1-x}\cdot(\sqrt[8]{7})^{x^2}+6.$

158. $2^{2x+4}+2^{2x+1}-2^{2x+3}>2^{x+2}+0{,}5^{1-x}-2^{x+1}.$

159. $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2}<3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2^x.$

160. $\frac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x-11\cdot 3^{x-1}-5}\geqslant 5.$ **161.** $\frac{2\cdot 3^{x+3}-5^{x+3}}{5\cdot 3^x-3\cdot 5^x}<1.$

162. $|3^x-2|\leqslant 1.$ **163.** $2^{|x+2|}>16.$

164. $5^{-|x+2|}<0{,}2.$ **165.** $3^{|x+2|}+3^{|x-1|}\geqslant 28.$

166. $9\cdot 2^x\sqrt{3+x}+9x\cdot 2^x+3\geqslant 27\cdot 2^x+\sqrt{3+x}+x.$

167. $\sqrt{3-9^{\sqrt{2-x}}+2\cdot 3^{\sqrt{2-x}}}+2\cdot 3^{\sqrt{2-x}}>4.$

168. $(\sqrt{5}+2)^{x-1}\geqslant(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}.$ **169.** $\log_5(x^2-4x+4)\leqslant 2.$

170. $\log_3\sqrt{x^2+x-2}<1$: **171.** $\log_{(\sqrt{10}-\sqrt{6})}(3x^2+5x+1)>0.$

172. $\log_{\sin\frac{\pi}{3}}(x^2-3x+2)\geqslant 2.$ **173.** $\sqrt{\log_2\left(\frac{3x-1}{2-x}\right)}<1.$

174. $5^{\log_3\frac{x-2}{x}}<1.$ **175.** $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)}\leqslant 2{,}5.$

176. $\left(\frac{x-2}{3}\right)^{\log_{\frac{x-2}{3}}(17-x)}>2.$ **177.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)}>1.$

178. $\frac{1}{\lg x}+\frac{1}{1-\lg x}>1.$ **179.** $(0{,}4)^{\log_3\left(\frac{3}{x}\right)\log_3(3x)}>(6{,}25)^{\log_3 x^2+2}.$

180. $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1.$

181. $(3^{x+2}+3^{-x})^{3\lg x-\lg(2x^2+3x)}<1.$

182. $\log_2^2(2-x)-8\log_{0,25}(2-x)\geqslant 5.$

183. $\log_2^2(x-x^2+2)+\log_{0,5}(x-x^2+2)^3+2\leqslant 0.$

184. $\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)}+1>\log_3(3x^2-4x+2).$

185. $\sqrt{\log_4\left(\frac{2x^2-3x+3}{2}\right)}+1>\log_2\left(\frac{2x^2-3x+3}{2}\right).$

186. $\log_{3-2x}\frac{1}{3}\geqslant 1.$ **187.** $\log_{x-2}5\leqslant 1.$

188. $2\log_5\sqrt{x}-2\geqslant\log_x\left(\frac{1}{5}\right)$. **189.** $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2(16x)\geqslant 1$.

190. $\log_2\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

191. $\log_2\left|\frac{x-1}{x+2}\right|<0$. **192.** $\log_2(|x-2|-1)<1$.

193. $\log_{0,5}(3+2x-|x+1|)>-1$. **194.** $\log_{\frac{1}{2}}\left|\frac{3-2x}{1-x}\right|>-1$.

195. $\log_3(3^x-\log_{\frac{1}{2}}(2x-|x+1|))>x$. **196.** $\log_{3x+2}x<1$.

197. $\log_{x^2-6x+8}(x-4)>0$. **198.** $\log_{x\sqrt[3]{3}}(3x^3+2x^2-6)>3$.

199. $\log_{x+1}(x^3+3x^2+2x)<2$. **200.** $\log_{x^2}(x^2+x-1)<0$.

201. $\log_x(10x+3)\log_{10x}(3x+10)\geqslant 0$.

202. $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0$.

203. $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right)>0$.

204. $\log_{2x}\left(6x+\frac{1}{7}\right)\cdot\log_{5x}\left(3x+\frac{4}{7}\right)\leqslant 0$.

205. $\log_{(x+2)^2}(x(x+1)(x+3)(x+4))>1$.

206. $\log_{x+2}(x(x+1)(x+3)(x+4))>2$.

207. $\log_{x-3}(x^2-4x)^2\leqslant 4$. **208.** $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2\geqslant 4$.

209. $\log_{\frac{x+2}{x^2+2}}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)\leqslant 2$. **210.** $\dfrac{\log_{x^2+3}(x+1)-\log_{x^2+3}(x^2+1)}{\log_{x^2+3}(x+2)-\log_{x^2+3}(x^2+2)}\leqslant 2$.

211. $\log_{x^2-8x+16}(x^2-16)+\log_{x^2+8x+16}(x^2-16)<\frac{9}{4}$.

212. $\dfrac{1}{\log_{x^2-16}(x^2-8x+16)}+\dfrac{1}{\log_{x^2-16}(x^2+8x+16)}<\dfrac{9}{4}$.

213. $\dfrac{6}{2x+1}>\dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}$. **214.** $\dfrac{2+\log_3 x}{x-1}<\dfrac{6}{2x-1}$.

215. $(x+1)\log_8(x^2+2x-2)<0$.

216. $(x^2-5x+3)\lg\left(1-\frac{x}{3}\right)\geqslant\lg\left(\frac{3}{3-x}\right)$.

217. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$. **218.** $\log_{2x-1}2\leqslant\log_{2x+1}4$.

219. $\log_5(x^2-9x+20)\cdot\log_{5-x}25\geqslant\dfrac{\log_5 10-1}{\log_{25}(5-x)}$.

220. $\dfrac{(|x|-1)(2^x-2)}{\sqrt{3-x}+2x}\leqslant 0$. **221.** $\dfrac{(2^x-2)(|x+1|-2x)}{(x^2-3x+2)(\sqrt{x^2+3}-2x)}\leqslant 0$.

222. $\dfrac{(|2x+1|-x-2)(\log_{\frac{1}{3}}(4+x)+1)}{2^{x^2+1}-2^{|x|}}\geqslant 0$. **223.** $\dfrac{2x^2-7x+3}{\log_2|x-1|}\geqslant 0$.

224. $x^2\log_{0,5}(2x-3)-2\log_{0,5}(x+3)>x^2\log_{0,5}(x+3)-$
$-2\log_{0,5}(2x-3)$.

§ 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

«Математический анализ», а точнее, «Основы математического анализа» — единственный раздел изучаемой в школе математики, не относящийся к элементарной математике. Основным объектом изучения здесь является числовая функция. Несмотря на краткость, школьный курс «Основ математического анализа» дает возможность выпускнику средней школы не только получить представление о математическом анализе как о мощном прикладном аппарате современной математики, но и научиться сознательно им пользоваться при решении целого ряда задач, не поддающихся элементарным методам.

Не стремясь к расширению или углублению школьной теоретической базы, мы рассмотрим некоторые виды задач, встречающиеся в школьной или конкурсной практике, при решении которых используются идеи математического анализа и его аппарат.

18. Функции и графики

Основной принцип математического анализа, его идеология состоит в кинематическом подходе к функции. Это означает, что акцент делается на изучение изменения функции в зависимости от изменения аргумента, ее развития во времени (аргумент — время). Кинематический подход, в частности, выражается также в том, что каждое значение аргумента рассматривается вместе с некоторой его окрестностью и изучается поведение функции в этой окрестности (локальное поведение функции). Можно сказать, что при построении графиков функций наша задача — исходя из локальных характеристик, получить изображение в целом. При этом сам аппарат математического анализа нередко играет вспомогательную количественно-уточняющую роль, в то время как качественная картинка может быть получена и без него. Приведем пример.

1. *Построить график функции* $y=x^3-x^2$.

Картинка, изображенная на рисунке 5, легко получается из соображений здравого смысла: y положителен лишь при $x>1$;

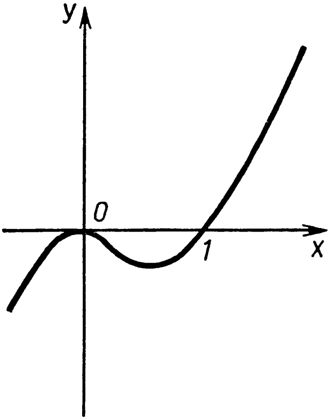


Рис. 5

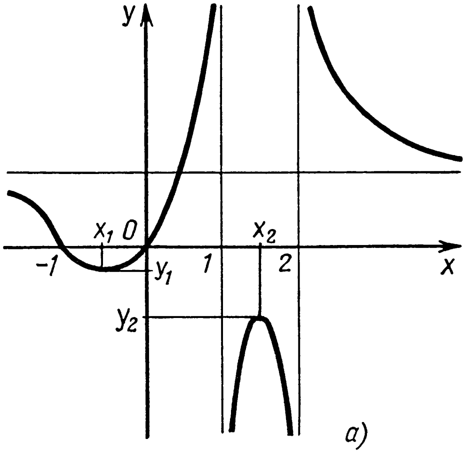


Рис. 6

обращается в 0 при $x=0$, $x=1$; неограниченно возрастает по мере возрастания аргумента и убывает при его убывании; график не имеет «углов» и т. д. Аппарат математического анализа дает возможность эти свойства обосновать, а также определить координаты (x_0, y_0) локального минимума $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)$.

Нам кажется очень важным научиться строить качественные картинки, эскизы графиков до применения аппарата исследования, аппарата математического анализа. Очень часто, однако, приходится сталкиваться с обратной ситуацией, когда исследование функции в задаче «построить график» превращается в самоцель. Заполняется анкета из двух десятков пунктов, половина которых по отношению к рассматриваемой функции попросту бессмысленна (например, периодичность для многочлена), а в итоге не всегда можно результаты проведенного исследования объединить на графике. Необходимо развивать графическую интуицию, умение бегло графически интерпретировать различные математические формулы.

2. *Построить график функций:*

а) $y=\dfrac{x^2+x}{(x-1)(x-2)}$; б) $y=(x^2-2x)\,e^x$; в) $y=2\sqrt{x^2+x+1}-x$.

Решение. а) На рисунке 6,*а* изображен эскиз графика из соображений здравого смысла, правда, речь идет о здравом смысле опытного человека. Поясним кратко, как возникла эта картинка. Прежде всего y меняет знак при переходе x через значения -1, 0, 1 и 2 (если $x>2$, $y>0$), при этом y обращается в нуль в точках $x=-1$ и $x=0$, в то время как 1 и 2 — нули знаменателя, эти точки не входят в область определения функции. При приближении x к 1 или 2 величина $|y|$ неограниченно возрастает, а знак y определяется тем, с какой стороны x приближается к 1 (или 2). Прямые $x=1$ и $x=2$ являются для нашей функции вертикальными асимптотами. Далее, при возрастании x (движение вправо по оси x) или его убывании (движение влево) y приближается к 1. (Это следует из того, что старший член числителя и знаменателя есть x^2. Или преобразуем дробь к виду

$$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)}.$$

Если $|x|$ достаточно велик, $\frac{1}{x}$ и $\frac{2}{x}$ малы.) Теперь картинка, изображенная на рисунке 6,*а*, получается практически автоматически. Двигаясь слева направо, следуя высказанным выше соображениям, мы просто вынуждены изобразить нечто похожее. Использование аппарата математического анализа дает нам возможность точно определить координаты точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), а также обосновать качественную правильность этой картинки.

$\left(y'=\frac{-4x^2+4x+1}{(x-1)^2(x-2)^2},\ x_1=\frac{1-\sqrt{3}}{2},\ y_1=-7+4\sqrt{3};\ x_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2},\right.$
$\left.y_2=-7-4\sqrt{3}\right)$.

б) Рисунок 6, *б* также возникает из аналогичных простых соображений. Необходимо обратить внимание на поведение функции при уменьшении аргумента — движении влево по отрицательной полуоси. График функции при движении влево неограниченно приближается к оси x (отрицательная полуось является горизонтальной асимптотой). Это утверждение является следствием следующего общего утверждения: при любых n и $a>1$ функция $\frac{x^n}{a^x}$ $(x>0)$ с ростом x, начиная с некоторого x_0, является монотонно убывающей функцией, стремящейся к 0. Запомните: показательная функция растет быстрее степенной, а степенная — быстрее логарифмической.

Докажем это утверждение. Возьмем сначала $n=1$, $a=e$. Рассмотрим $f(x)=x-e^x$. При $0\leqslant x\leqslant 1$ $f(x)<0$, так как $e^x\geqslant 1$. Далее, $f(x+1)-f(x)=1-e^{x+1}+e^x=1-e^x(e-1)<0$ при всех $x>0$. Следовательно, $x-e^x<0$ для любого x, или иначе $\frac{x}{e^x}<1$.

Далее, $\frac{x}{e^x}=2\cdot\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\cdot\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}}<\frac{2}{e^{\frac{x}{2}}}$ (учитываем, что $\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}<1$, $x>0$). Из последнего неравенства следует справедливость нашего утверждения: при $n=1$ $a=e$.

Рассмотрим теперь выражение $\frac{x^n}{a^x}$ в общем виде. Сделаем замену $x=ny\log_a e$. Получим $\frac{x^n}{a^x}=\frac{(ny\log_a e)^n}{a^{ny\log_a e}}=(n\log_a e)^n\cdot\left(\frac{y}{e^y}\right)^n$, т. е. общий случай мы свели к уже рассмотренному частному.

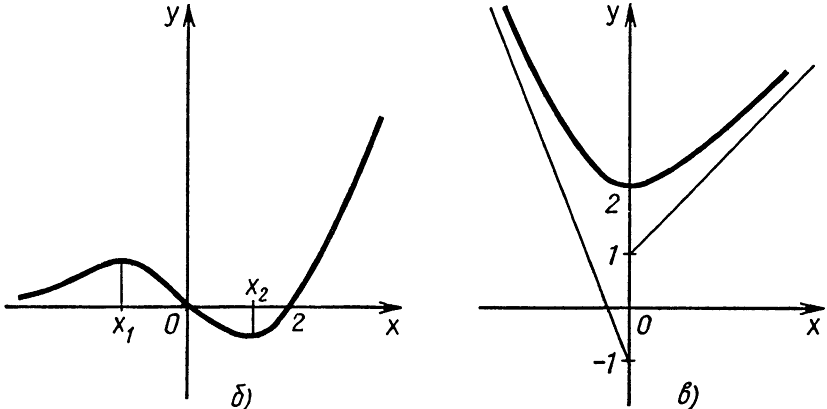


Рис. 6

Возвращаясь к нашему графику, укажем точки экстремумов ($x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2}$).

в) Несколько сложнее обстоит дело с графиком этой функции. Оказывается, эта функция имеет наклонные асимптоты. Прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой для функции $y=f(x)$, если с возрастанием x (убыванием) график функции $y=f(x)$ неограниченно приближается к прямой линии $y=kx+b$.

Найдем асимптоты функции $y=2\sqrt{x^2+x+1}-x$. Пусть $x>0$. Понятно, что если функция имеет наклонную асимптоту, то $\frac{y}{x}$ с ростом x стремится к угловому коэффициенту этой асимптоты. В нашем случае $\frac{y}{x}=2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1$, и с возрастанием x, $x>0$, $\frac{y}{x}$ стремится к 1. Определив $k=1$, будем искать b — свободный член уравнения асимптоты. Разность $y-kx$ стремится к b. Тогда

$$y-kx=(2\sqrt{x^2+x+1}-x)-x=2(\sqrt{x^2+x+1}-x)=$$

$$=\frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}.$$

Получившаяся дробь, очевидно, стремится к 1, т. е. $b=1$. Уравнение асимптоты будет $y=x+1$. Для отрицательных значений аргумента $y=-3x-1$ $\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right.$ для отрицательных $\left.x\right)$. Поскольку $y'=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}-1$, то $y'=0$ при $x=0$. Получаем график (рис. 6, *в*).

19. Производная и касательная

В школьной практике мы встречаемся в основном с «хорошими» функциями, т. е. с такими функциями, графики которых имеют касательные в каждой точке, за исключением, быть может, конечного числа точек. (В математике линия, имеющая в каждой точке касательную, называется гладкой.) Пусть $y=kx+b$ есть уравнение касательной для функции $y=f(x)$ в точке (x_0, y_0). Тогда, как мы знаем, $k=f'(x_0)=y'_0$, т. е. производная, есть тангенс угла наклона (угловой коэффициент) касательной. $y=y'_0(x-x_0)+y_0$ — уравнение касательной. Положительность производной означает возрастание функции, отрицательность — убывание; смена знака происходит в точках экстремума, при этом, если знак меняется с «$+$» на «$-$» (возрастание сменилось убыванием), то рассматриваемая точка есть точка максимума, в противоположном случае (с «$-$» на «$+$») — точка минимума.

Обычно по отношению к касательной дуга рассматриваемой кривой в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) располагается одним из трех способов, указанных на рисунке 7. (В принципе возможны и более сложные ситуации, однако они в школьной и конкурсной практике не встречаются.) В первом случае дуга расположена под касательной, функция выпукла вверх; во втором — дуга над касательной, функция выпукла вниз (или вóгнута); в третьем происходит переход (перегиб) дуги с одной стороны касательной на другую, $M(x_0, y_0)$ — точка перегиба.

В качестве критерия выпуклости и вогнутости можно использовать вторую производную функции (производную от производной). Так, если вторая производная положительна, то первая возрастает, т. е. возрастает угол наклона касательной (рис. 8, *а*), функция выпукла вниз (вогнута); если вторая производная отрицательна, функция выпукла вверх (рис. 8, *б*). Точки перегиба характеризуются изменением знака второй производной.

З а д а н и е. Проведите исследование графиков функций 2, *а, б, в* на предмет выпуклости, вогнутости.

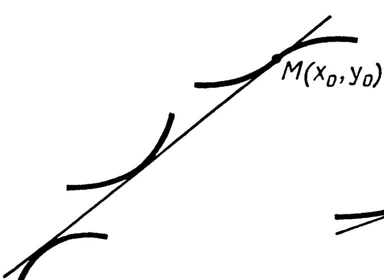


Рис. 7

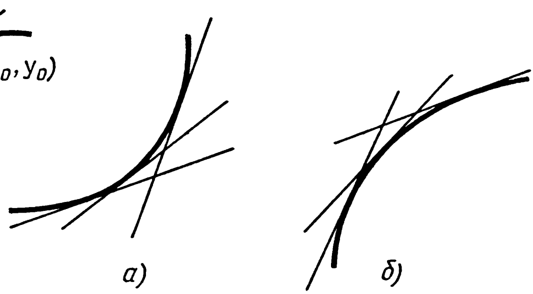


Рис. 8

Рассмотрим несколько задач по теме «Производная и касательная».

3. *Найти уравнения общих касательных к графикам функций $y=x^2$ и $y=x^3$.*

Решение. Возьмем на второй кривой точку (t, t^3). Уравнение касательной к кривой в этой точке будет $y=t^3+3t^2(x-t)=3t^2x-2t^3$. Заметим, что условие касания параболы $y=x^2$ и прямой $y=kx+b$ есть равенство нулю дискриминанта квадратного уравнения $x^2-kx-b=0$ (X, § 5). Получаем для t уравнение $9t^4-8t^3=0$, откуда $t_1=0$, $t_2=\frac{8}{9}$.

Ответ. Уравнения общих касательных имеют вид $y=0$ и $y=\frac{64}{27}x-\frac{1024}{729}$.

4. *Найти уравнение касательной к графику функции $y=x^3-3x^2$, имеющей единственную общую точку с графиком этой функции.*

Решение. Пусть искомая касательная касается заданной функции в точке с абсциссой t, т. е. ее уравнение имеет вид:

$$y=t^3-3t^2+(3t^2-6t)(x-t)=$$
$$=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2.$$

Эта прямая пересекается с графиком функции $y=x^3-3x^2$ в единственной точке, абсцисса которой равна t (по условию). Значит, уравнение $x^3-3x^2=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2$ имеет единственное решение $x=t$. Перенесем все в левую часть и разложим на множители, будем иметь:

$$(x-t)^2(x+2t-3)=0.$$

Таким образом,

$$t=-2t+3,\ t=1.$$

Ответ. Уравнение искомой касательной имеет вид $y=-3x+1$.

Замечание. Искомая касательная есть не что иное, как касательная, проходящая через точку перегиба. С точки зрения наглядно-графических представлений подобный результат достаточно очевиден.

5. *На графике функции $y=\sin x$ взяты точки A и B с абсциссами $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{2}$. Пусть M — некоторая точка дуги AB. Чему равно наибольшее значение площади треугольника AMB?*

Решение. Возьмем на дуге AB точку M_0, такую, что касательная к функции $y=\sin x$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ параллельна прямой AB (рис. 9). Легко видеть, что площадь треугольника AM_0B является наибольшей.

Таким образом, угловой коэффициент касательной равен

$$\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{2\pi}.$$

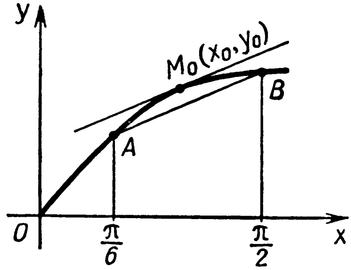


Рис. 9

Теперь находим:

$$y_0'=\cos x_0=\frac{3}{2\pi},$$

$$x_0=\arccos\frac{3}{2\pi},\ y_0=\sin x_0=\sqrt{1-\frac{9}{4\pi^2}}.$$

Уравнение касательной в точке M_0 будет:

$$y=\frac{3}{2\pi}x+\sqrt{1-\frac{9}{4\pi^2}}-\frac{3}{2\pi}\arccos\frac{3}{2\pi}.$$

Уравнение AB имеет вид $y=\frac{3}{2\pi}x+\frac{1}{4}$.

Высота в треугольнике ABM_0, опущенная на AB, равна

$$\frac{\sqrt{1-\frac{9}{4\pi^2}}-\frac{3}{2\pi}\arccos\frac{3}{2\pi}-\frac{1}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{4\pi^2}}}.$$

(Расстояние между двумя параллельными прямыми $y=kx+b_1$ и $y=kx+b_2$ можно определять по формуле $d=\frac{|b_2-b_1|}{\sqrt{1+k^2}}$.)

Искомая площадь будет равна

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^2}{9}+\frac{1}{4}}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{9}{4\pi^2}}-\frac{3}{2\pi}\arccos\frac{3}{2\pi}-\frac{1}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{4\pi^2}}}=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{1-\frac{9}{4\pi^2}}-\frac{3}{2\pi}\arccos\frac{3}{2\pi}-\frac{1}{4}\right).$$

20. Задачи на максимум и минимум

Одной из важнейших областей приложения понятия производной (и всего раздела математического анализа, называемого дифференциальным исчислением) являются экстремальные задачи.

Общая схема решения экстремальной задачи методами математического анализа достаточно известна. Напомним все же ее. Выбирается параметр (переменная) x, через который удобно выражается исследуемая величина y. Находится функция, выражающая y через x, т. е. $y=f(x)$, и область изменения параметра (переменной) x. (В более простых случаях функция $y=f(x)$ и область изменения x задаются.) В большинстве случаев мы имеем задачу: найти наибольшее (наименьшее) значение функции $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (или на заданном луче, или на всей прямой), где функция $f(x)$ определена и имеет производную в любой внутренней точке этого отрезка. Далее находим точки на рассматриваемом отрезке, в которых производная обращается в нуль (критические точки). Исследуем их на максимум-минимум. После чего находим нужное — наибольшее или наименьшее — значение, которое достигается или в одной из критических точек, или на границе области изменения x.

Рассмотрим несколько примеров.

6. *Отрезок с концами на сторонах прямого угла содержит внутри себя точку, удаленную на расстояния 1 и 8 от сторон этого угла. Найти наименьшую длину таких отрезков.*

Решение. Пусть (рис. 10) $OA=x$, $OB=y$. Связь между x и y можно получить, исходя из подобия соответствующих треугольников, а можно из равенства $S_{OBA}=S_{OMA}+S_{OMB}$, $xy=8x+y$, откуда $y=\frac{8x}{x-1}$, $AB^2=x^2+y^2=x^2+\frac{64x^2}{(x-1)^2}$.

Нам надо найти наименьшее значение функции $x^2+\frac{64x^2}{(x-1)^2}$ при $x>1$. Находим производную и приравниваем ее нулю. Получаем:

$$2x+\frac{128x(x-1)^2-128x^2(x-1)}{(x-1)^4}=0, \quad \text{или} \quad (x-1)^3=64,\ x=5.$$

Понятно, что найденное значение x соответствует именно наименьшему значению исследуемой функции (проследите смену знаков производной).

Ответ. $5\sqrt{5}$.

7. *Из круга радиусом R вырезан сектор и из сектора склеен конус (боковая поверхность конуса). Каков наибольший объем получившейся конической воронки?*

Решение. Пусть φ — центральный угол сектора, ρ — радиус основания конуса. Из равенства $R\varphi=2\pi\rho$ (длина окружности основания равна дуге сектора) находим $\rho=\frac{R\varphi}{2\pi}$. Образующая конуса R, значит, его высота равна $R\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}}$, а объем

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{R^3\varphi^2}{4\pi^2}\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}}.$$

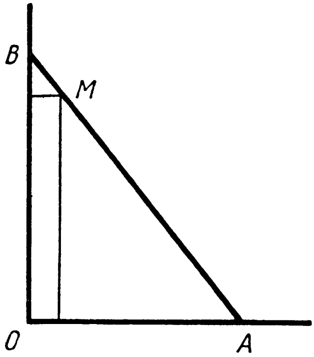


Рис. 10

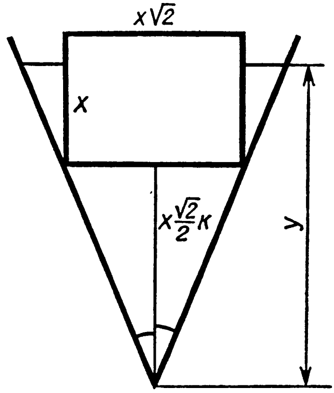


Рис. 11

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции (от φ): $y=\varphi^2\sqrt{1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}}$, а лучше $y^2=\varphi^4-\frac{\varphi^6}{4\pi^2}$.

Беря производную по φ и приравнивая ее нулю, будем иметь:

$$4\varphi^3-\frac{6\varphi^5}{4\pi^2}=0,\ \varphi^2=\frac{8}{3}\pi^2,\ \varphi=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{и т. д.}$$

Ответ. Наибольший объем равен $\frac{2\pi R}{9\sqrt{3}}$.

8. *Сосуд, имеющий форму конуса, у которого угол при вершине осевого сечения α, наполовину наполнен водой (уровень воды перпендикулярен оси конуса). В сосуд опущен металлический куб (одна грань куба перпендикулярна оси конуса). В какое наибольшее число раз может увеличиться уровень воды в сосуде?*

Решение. Пусть $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=k$, высота части, заполненной водой, равна h, x — ребро куба, y — высота уровня после опускания куба. Рассмотрим сечение конуса и куба плоскостью, проходящей через ось конуса и две вершины куба, расположенные на боковой поверхности конуса (рис. 11). Высота «маленького» конуса, лежащего под нижней гранью куба, равна $x\frac{\sqrt{2}}{2}k$.

Пусть $x\frac{\sqrt{2}}{2}k\leqslant y\leqslant x\frac{\sqrt{2}}{2}k+x$. Объем конуса высотой y $\left(\text{он равен } \frac{\pi y^3}{3k^2}\right)$ составляется из объема имевшейся воды $\left(\frac{\pi h^3}{3k^2}\right)$ и объема части куба $\left(x^2\left(y-x\frac{\sqrt{2}}{2}k\right)\right)$.

Получаем уравнение

$$\pi\frac{h^3}{3k^2}+x^2\left(y-x\frac{\sqrt{2}}{2}k\right)=\frac{\pi y^3}{3k^2},\quad \frac{\pi y^3}{3k^2}+x^3\frac{\sqrt{2}}{2}k-x^2y=\frac{\pi h^3}{3k^2}.$$

Не будем выражать y через x (тем более что непонятно, как это сделать). Однако, рассматривая y как функцию от x, возьмем производную от обеих частей получившегося равенства:

$$\frac{\pi y^2}{k^2}\cdot y'+\frac{3}{2}x^2\sqrt{2}k-2xy-x^2y'=0.$$

Но в точке максимума $y'=0$. (Докажите, что коэффициент при y' не равен нулю.) Значит, если y максимален, то $y=\frac{3}{4}x\sqrt{2}k$. Неравенство $y\leqslant x\frac{\sqrt{2}}{2}k+x$ переходит в неравенство $k\leqslant 2\sqrt{2}$.

Пусть $k\leqslant 2\sqrt{2}$. В этом случае $x=\frac{2\sqrt{2}}{3}yk$.

Заменяя x на y в полученном соотношении, найдем:

$$y=\sqrt[3]{\frac{\pi}{\pi-\frac{8}{9}}}\,h,$$

т. е. в этом случае уровень максимально повысится в $\sqrt[3]{\frac{\pi}{\pi-\frac{8}{9}}}$ раз.

Пусть $k>2\sqrt{2}$. В этом случае верхняя грань искомого куба должна находиться на уровне воды, т. е.

$$y=x\frac{\sqrt{2}}{2}k+x \quad\text{и}\quad \frac{\pi h^3}{3k^2}+x^3=\frac{\pi y^3}{3k^2}.$$

Из этих соотношений $y=\sqrt[3]{\frac{\pi}{\pi-\frac{6k^2\sqrt{2}}{(k+\sqrt{2})^3}}}$.

Ответ. Если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\leqslant 2\sqrt{2}$, то максимально уровень воды возрастет в $\sqrt[3]{\frac{\pi}{\pi-\frac{8}{9}}}$ раз. Если $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=k>2\sqrt{2}$, то в $\sqrt[3]{\frac{\pi}{\pi-\frac{6k^2\sqrt{2}}{(k+\sqrt{2})^3}}}$ раз. (Проверьте, что во всех случаях вода не польется через край.)

9. *Два корабля движутся по двум перпендикулярным прямым, пересекающимся в точке O, по направлению к O. В какой-то момент времени оба находятся в 65 км от O, скорость первого* *равна 15 км/ч, второго — 20 км/ч. От первого корабля отходит моторная лодка, движущаяся со скоростью 25 км/ч.*

а) *За какое наименьшее время катер может доплыть от первого корабля до второго?*

б) *За какое наименьшее время катер может доплыть от первого корабля до второго и вернуться обратно на первый корабль?*

Решение. а) Пусть катер отправляется через x часов от момента, когда оба корабля находились в 65 км от O и были в пути T часов, т. е. в момент отправления катера первый корабль находится на расстоянии $65-15x$ от O, в момент прибытия катера второй корабль находится на расстоянии $65-20(x+T)$ от O, а путь катера $25T$ км; имеем уравнение

$$(65-15x)^2+(65-20(x+T))^2=(25T)^2,$$

или после упрощения:

$$25x^2+32Tx-9T^2-182x-104T+338=0. \qquad (1)$$

Далее можно поступить так же, как при решении предыдущей задачи. Возьмем производную по x (продифференцируем) от обеих частей уравнения (1), считая $T=T(x)$, и положим $T'=0$ (ищем наибольшее значение). Получим $25x+16T=91$. Решив полученную систему, найдем $x=3$, $T=1$. Найденное значение $T=1$ не может быть ничем иным, как наименьшим значением T, поскольку такое наименьшее T существует, а при $x=0$ соответствующее $T>1$.

Так можно решить задачу при помощи производной. Однако можно обойтись и без методов анализа. Соотношение (1) можно рассматривать как квадратное относительно x. Его дискриминант (зависящий от T) должен быть неотрицательным. Получаем для T неравенство $481T^2-312T-169\geqslant 0$, откуда $T\geqslant 1$. Квадратный трехчлен поможет нам и в решении пункта б).

Пусть катер отправляется в момент x_1, прибывает на второй корабль в момент y и возвращается в момент x_2. Время катера x_2-x_1. Получаем два соотношения:

$$(65-15x_1)^2+(65-20y)^2=25^2(y-x_1)^2,$$
$$(65-15x_2)^2+(65-20y)^2=25^2(y-x_2)^2.$$

Таким образом, x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения

$$(13-3x)^2+(13-4y)^2=25(y-x)^2,$$
$$16x^2-2(25y-39)x+9y^2+104y-338=0.$$

Поскольку $x_2-x_1=\frac{\sqrt{D}}{16}$, $D=4((25y-39)^2-16(9y^2+104y-$ $-338))=4(481y^2-3614y+6929)=52(37y^2-278y+533)$, то наименьшее значение будет при $y=\frac{139}{37}$, $D=52\cdot 400$.

Ответ. а) За 1 ч; б) за $\frac{5}{4}\sqrt{52}$ ч.

Последняя задача напоминает нам о том, что, даже владея таким мощным аппаратом, как математический анализ, не следует забывать о методах элементарных, о том, что эти элементарные методы вовсе не исчерпали свои возможности.

21. Использование производной при решении различных задач

Экстремальные задачи далеко не единственные, где можно использовать производную. Приведем еще несколько примеров. Производная может быть с успехом использована при доказательстве различных неравенств. Так, для того чтобы доказать неравенство $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$, достаточно доказать, что $f(0) \geqslant 0$ и $f'(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$. А для того чтобы доказать неравенство $f'(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$, можно воспользоваться второй производной ($f'(0) \geqslant 0$ и $f''(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$) и т. д.

Например:

10. *Доказать, что при* $x \geqslant 0$ *имеет место неравенство* $\sin x \geqslant \geqslant x - \frac{x^3}{6}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. Имеем $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = -\sin x + x$. Но $\sin x \leqslant x$ при $x \geqslant 0$ (известное неравенство), значит, $f''(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$. Теперь возвращаемся к $f(x)$: $f'(x) \geqslant 0$, а затем и $f(x) \geqslant 0$. Можно было бы не останавливаться на $f''(x)$, а пойти дальше: $f''(0) = 0$, $f'''(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$. Последнее неравенство совсем очевидно.

С помощью удачно подобранной функции можно доказать числовые неравенства. Например:

11. *Что больше:* e^π *или* π^e?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Эта функция определена при $x > 0$ и имеет наибольшее значение при $x = e$. (Докажите!) Значит, $f(\pi) < f(e)$ или $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$, откуда $e^\pi > \pi^e$.

Можно рассмотреть другую функцию: $\varphi(x) = x - e \ln x$, $\varphi(e) = = 0$, $\varphi'(x) = 1 - \frac{e}{x} \geqslant 0$ при $x \geqslant e$. Значит, $\varphi(x)$ возрастает и $\varphi(\pi) > > 0$, $\pi - e \ln \pi > 0$, $e^\pi > \pi^e$.

С помощью производной можно производить также оценку числа корней того или иного уравнения. Один из возможных приемов основывается на следующей теореме: *если функция имеет в каждой точке отрезка производную, то между любыми двумя корнями этой функции, расположенными на отрезке, имеется хотя бы один корень ее производной.* Мы не будем давать доказательство теоремы. Строгое доказательство опирается на различные свойства дифференцируемых (имеющих производную) функций, большинство из которых в школьном курсе не доказывается. С графической точки зрения эта теорема достаточно очевидна. Рассмотрим пример.

12. *Доказать, что уравнение* $e^x = ax^2 + bx + c$ *может иметь не более трех различных решений.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - ax^2 - bx - c$. Предположим, что эта функция имеет четыре различных корня. Поскольку $f(x)$ имеет производную всюду, то $f'(x)$ должна иметь не менее трех различных корней (по одному между любыми двумя корнями $f(x)$), т. е. $f'(x) = e^x - 2ax - b$ обращается в нуль не менее трех раз. Тогда $f''(x) = e^x - 2a$ имеет не менее двух нулей, а $f'''(x) = e^x$ имеет по крайней мере один нуль. Противоречие.

Очень мощное средство для доказательства различных числовых и функциональных неравенств дает нам понятие выпуклости функции. Еще раз напомним: если функция выпукла (вверх) на некотором интервале, то ее график на этом интервале расположен ниже касательной к нему в любой его точке, а хорда, соединяющая любые две точки графика, расположена ниже соответствующей дуги (рис. 12).

Переведем сказанное на язык формул.

Пусть $y = f(x)$ выпукла вверх в некоторой окрестности точки a. Тогда в этой окрестности имеет место неравенство

$$f(x) \leqslant f(a) + f'(a)(x-a). \qquad (1)$$

Далее, рассмотрим два значения аргумента a и b, такие, что на отрезке $[a; b]$ функция выпукла (вверх). Пусть $a \leqslant x \leqslant b$. Рассмотрим трапецию AA_1B_1B (рис. 13): $AA_1 = f(a)$, $BB_1 = f(b)$.

Найдем MM_1:

$$MM_1 = MK + KM_1 = f(a) + \frac{A_1K}{A_1L} \cdot B_1L =$$

$$= f(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a)) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

Следовательно,

$$MM_2 = f(x) \geqslant MM_1 = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b). \qquad (2)$$

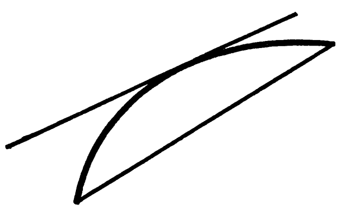


Рис. 12

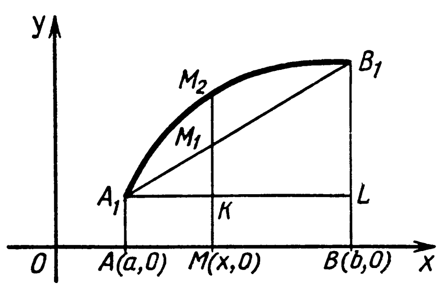


Рис. 13

Последнее неравенство иногда записывают в иной форме. А именно обозначим $x_1=a$, $x_2=b$,

$\frac{b-x}{b-a}=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}=\alpha_1$, $\frac{x-a}{b-a}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\alpha_2$, где $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$.

Тогда

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2=x,$$

и получаем неравенство

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)\geqslant\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2) \qquad (2')$$

где $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$. Это неравенство является характеристическим для выпуклой (вверх) функции. Для функции вогнутой (выпуклой вниз) во всех неравенствах (1, 2, 2′) знаки $\leqslant$, $\geqslant$ заменяются на $\geqslant$, $\leqslant$. Неравенство (2′) может быть обобщено. Если функция выпукла (вверх), то для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ($\alpha_i\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$) справедливо неравенство

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n)\geqslant\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\ldots+\alpha_n f(x_n). \qquad (3)$$

Доказать неравенство (3) можно методом индукции. При $n=2$ неравенство верно (2′). Пусть оно верно для n. Рассмотрим $n+1$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ ($\alpha_i\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}=1$).

Введем $x_n'=\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}x_n+\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}x_{n+1}$.

Тогда $\alpha_n x_n+\alpha_{n+1}x_{n+1}=(\alpha_n+\alpha_{n+1})x_n'=\alpha_n' x_n'$.

Поскольку $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n'=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}=1$, то справедливо неравенство (по предположению индукции)

$$f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n x_n+\alpha_{n+1}x_{n+1})=$$
$$=f(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_n' x_n')\geqslant\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\ldots+\alpha_n' f(x_n')=$$
$$=\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\ldots$$
$$\ldots+(\alpha_n+\alpha_{n+1})f\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}x_n+\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}x_{n+1}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\ldots+\alpha_n f(x_n)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1}).$$

(В последнем переходе мы воспользовались неравенством (2′), в котором вместо x_1 и x_2 взяты x_n и x_{n+1}, а вместо α_1 и α_2 взяты $\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}$ и $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n+\alpha_{n+1}}$.)

Утверждение доказано.

Теперь несколько примеров.

13. *Доказать, что* $0{,}56<\sin 35^\circ<0{,}58$.

Решение. Для доказательства того, что $\sin 35^\circ>0{,}56$, воспользуемся неравенством (1) для функции $f(x)=\sin x$, взяв

$a=\frac{\pi}{6}$, $x-a=\frac{\pi}{36}$, оценив затем π и $\sqrt{3}$ ($\pi<3{,}2$; $\sqrt{3}<1{,}75$).

Для правой части воспользуемся неравенством (2), где $a=\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{4}$, $\frac{b-x}{b-a}=\frac{2}{3}$, $\frac{x-a}{b-a}=\frac{1}{3}$.

Применяя общее неравенство (3) к конкретным функциям, выпуклость или вогнутость которых можно обосновать с помощью второй производной, получают интересные конкретные неравенства.

14. *Доказать, что для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ справедливо неравенство*

$A \geqslant G$, *где* $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=A$ — *среднее арифметическое чисел* x_1, $x_2, \ldots, x_n$; $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=G$ — *их среднее геометрическое.*

Р е ш е н и е. Пусть $f(x)=\ln x$, эта функция выпукла (вверх). Возьмем $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\frac{1}{n}$.

Будем иметь:

$$\ln\left(\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\right)\geqslant\frac{1}{n}\ln x_1+\frac{1}{n}\ln x_2+\ldots+\frac{1}{n}\ln x_n,$$

откуда

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Понятно, что равенство имеет место, если $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Этот небольшой обзор отнюдь не исчерпывает прикладные возможности таких понятий, как «производная», «выпуклость». По этому поводу можно написать (и написаны) целые тома. Мы же затронули, причем на уровне иллюстраций, лишь малую толику.

22. Задачи

1. По графику функции $y=f(x)$ постройте график функции: а) $y=f(-x)$; б) $y=f(2x)$; в) $y=f\left(\frac{x}{2}+1\right)$; г) $y=2f\left(\frac{x}{2}-1\right)+1$; д) $y=|f(|x|)|$.

В задачах 2—40 на плоскости (x, y) постройте множество точек, таких, что:

2. $y=|3x-2|+2-3x$. **3.** $y=|x-3|+|2x-1|$.

4. $y=|\,|x+2|-|x-2|\,|$. **5.** $\min(x, y)=1$.

6. $\max(|x|, |y|)=1$. **7.** $\max(x, y)=\min(|x|, |y|)$.

8. $|x|+|y|=1$. **9.** $|x+y|=|y|+y$.

10. $y=|x+1|-2|x-2|+|x+2|-x$.

11. $\max(|x|, y+1)=\min(x^2; 2x+y)$. **12.** $y=\min\limits_{1\leqslant a\leqslant 2}\left(ax^2+\frac{1}{a}\right)$.

13. $y=x^4+2x^3-3$. **14.** $y=x^3-3x^2+3x-5$. **15.** $x^2+y^2=4$.

16. $x^2-2x+y^2-4y-4=0$. **17.** $y^2-|y-x|+y(1-2x)+x=0$.

18. $x|x|+y|y|=x-y$. **19.** $x-1=\sqrt{3+2x-y^2}$. **20.** $y=\frac{x+2}{x-1}$.

21. $y=\frac{x^2-1}{x}$. **22.** $y=\frac{x^2-x-2}{|x+1|}$. **23.** $y=\frac{x^2-x-6}{x^2-3x+2}$.

24. $y=\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$. **25.** $y=\frac{x^3-3x+2}{x^2-3x+2}$. **26.** $y=\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

27. $y=\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+2}$. **28.** $y=\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+2}$.

29. $y=\sqrt{3-x^2-2x}$. **30.** $y=\frac{\sqrt{x(x-1)^2}}{x-1}$. **31.** $y=\frac{x}{e^x}$.

32. $y=2^{x^2-x-2}$. **33.** $y=\frac{x}{\ln x}$. **34.** $y=x^2e^{-x}$. **35.** $y=\frac{\ln x}{x^2}$.

36. $y=\frac{\sin x}{x}$. **37.** $y=x\cdot\sin x$. **38.** $y=\log_2|\sin x|$.

39. $y=\sqrt[1000]{\lg_{1000}\cos^{1000}x}$. **40.** $y=\log_2\frac{1}{\frac{1}{2}+\cos x}$.

41. По эскизу графика $y=ax^3+bx^2+cx+d$ (рис. 14) определите знаки a, b, c, d.

42. Сколько корней имеет уравнение:

а) $\cos x=\lg x$; б) $\sin x=\frac{x}{100}$?

43. Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств:

а) $\begin{cases} y\leqslant 6-2|x|, \\ y\geqslant 2+2|x|; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y\leqslant 5-2|x|, \\ y\geqslant 2-\frac{1}{2}|x|. \end{cases}$

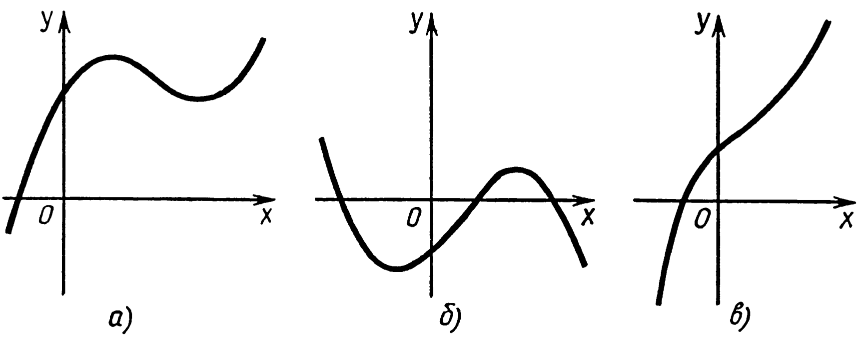


Рис. 14

44. Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости условием:
а) $2|x|+|y+2x+1|\leqslant 5$; б) $|x+1|+|2y-x-1|\leqslant 6$;
в) $|2y+x+1|+|x+1|\leqslant 4$.

45. Вычислите производную: а) $y=(x+1)^{100}$;
б) $y=(x+\sqrt[3]{x})\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$; в) $y=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$; г) $y=x^2+2^x$;
д) $y=\cos x^3$; е) $y=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; ж) $y=x^{\log_2 x}$; з) $y=\sin^2\cos^3 x$;
и) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x\sqrt{\cos x}}$; к) $y=\sqrt{\log_2\frac{1}{2}\cos x}$.

46. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:
а) $y=x^3+3x^2-72x+90$ на отрезке $[-5; 5]$;
б) $y=x^3-3x^2-105x+25$ на отрезке $[-6; 6]$.

47. Найдите промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции: а) $y=\frac{x}{\ln x}$; б) $y=\frac{x}{\ln^2 x}$;
в) $y=xe^{-3x}$.

48. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции:
а) $y=5+8\cos\left(2x+\frac{\pi}{7}\right)$ равна $8\sqrt{3}$;
б) $y=1+4\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$ равна $10\sqrt{3}$;
в) $y=5-8\cos\left(3x+\frac{\pi}{11}\right)$ равна 12.

49. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции:
а) $y=4x-\sin 2x+4\sqrt{2}\cos x$; б) $5x+\sin 2x-4\sqrt{3}\sin x$ — равна нулю.

50. Найдите наименьшее значение функции $y=-\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ на отрезке $[0; \pi]$.

51. Найдите точки экстремума функции $y=x^3+6x^2-3x+3$ на интервале $\left(-5; \frac{1}{5}\right)$.

52. Найдите точки экстремума функции $y=-x^3-3x^2+18x-$ -2 на интервале $\left(-4; \frac{8}{5}\right)$.

53. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=|x^2+2x-3|+\frac{3}{2}\ln x$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

54. Найдите точки минимума функции $y=x^3-2x|x-2|$, заданной на отрезке $[0; 3]$, и ее наибольшее значение на этом отрезке.

55. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=x+\sqrt{(x^2+6x+9)(x^2+2x+1)}$ на отрезке $\left[-4;\ -\frac{5}{4}\right]$.

56. Найдите наименьшее значение функции $y=x\ln x-x\ln 5$ на отрезке $[1;\ 5]$.

57. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $y=\sin x-\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$ равна нулю.

58. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=|x^3+6x^2+9x+1|$ на отрезке $[-3;\ 1]$.

59. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=-|x^3-6x^2+9x-3|$ на отрезке $[-1;\ 4]$.

60. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=-|2x^3+15x^2+36x-30|$ на отрезке $[-3;\ 2]$.

61. Найдите наименьшее из значений, принимаемых функцией $y=x+\frac{4}{(x-2)^2}$ на отрезке $[0;\ 5]$, $x\neq 2$.

62. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y=x+\frac{1}{(x-1)}$.

63. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $y=3x^3\ln x-36x\ln x-7x^3+108x$ равна нулю.

64. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $y=3x^3\ln x-81x\ln x-10x^3+324x$ равна нулю.

65. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=e^x\sin x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{5}{6}\pi\right]$.

66. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=e^{-x}\cos 2x$ на отрезке $[0;\ \pi]$.

67. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=2x^3-3x^2-36x+10$ на отрезке $[-5;\ 4]$.

68. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-9x^2+15x+1$ на отрезке $[-2;\ 6]$.

69. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sin^2 x+\cos x-\frac{1}{2}$.

70. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=24x-\cos 12x-3\sin 8x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}\right]$.

71. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=18x-\sin 9x+3\sin 6x$ на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{18};\ \frac{\pi}{18}\right]$.

72. Найдите наибольшее значение функции $y=5\cos x-\cos 5x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$.

73. Найдите наибольшее значение функции $y=2\sin x+\sin 2x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{5\pi}{4}\right]$.

74. Найдите все значения x, для каждого из которых функция $y=6\cos^2 x+6\sin x-2$ принимает наибольшее значение.

75. Найдите все значения x, для каждого из которых функция $y=4\cos^2 x+3\sqrt{3}\sin x+7\sin^2 x$ принимает наименьшее значение.

76. Найдите все значения x, для каждого из которых функция $y=3\sin^2 x-2\cos x+\cos^2 x-4$ принимает наибольшее значение.

77. Найдите все значения x, для каждого из которых функция $y=3-2\sin^2 2x-2\cos 2x$ принимает наименьшее значение.

78. Исследуйте на экстремум функцию $y=\sqrt{2x^2-x+2}$.

79. Исследуйте на экстремум функцию $y=(2x-1)e^{3x}$.

80. Найдите все числа A, при каждом из которых уравнение $5\sin x+2\cos x=A$ имеет решение.

81. Найдите все числа A, при каждом из которых уравнение $7\sin x+3\cos x=A$ имеет решение.

82. Найдите все значения x, при каждом из которых производная функции $y=3-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$ равна $2\sqrt{2}$.

83. Найдите точки минимума функции $y=\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}-\frac{x-3}{2}$.

84. Найдите точки максимума функции $y=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{5-x}{2}$.

85. Докажите, что для функции $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x$ справедливо неравенство $\max f(x)<0{,}77$.

86. Докажите, что для функции $f(x)=\cos x\cdot\sin 2x$ справедливо неравенство $\min f(x)>-\frac{7}{9}$.

87. Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{x}{2}+\sin^2 x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

88. К параболе $y=4-x^2$ в точке на ней с абсциссой $x_0=1$ проведена касательная. Найдите точку пересечения этой касательной с осью y.

89. К параболе $y=4x-x^2$ в точке на ней с абсциссой $x_0=3$ проведена касательная. Найдите точку пересечения этой касательной с осью x.

90. Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y=\cos x$: первая в точке на графике с абсциссой $x=\frac{\pi}{6}$, а вторая в точке с абсциссой $x=\frac{7\pi}{6}$.

91. Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y=\frac{3x+1}{2x-1}$: первая в точке на графике с абсциссой $x=-1$, а вторая в точке с абсциссой $x=3$.

92. Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y=\sin 3x$: первая в точке на графике с абсциссой $x=\frac{\pi}{18}$, вторая в точке с абсциссой $x=\frac{5\pi}{18}$.

93. Найдите уравнение касательной к функции $y=\sqrt{4-2x-x^2}$, проходящей через точку (3; 0).

94. Найдите координаты точки пересечения двух касательных, проведенных к графику функции $y=\frac{x^2+1}{x-3}$: первая в точке на графике с абсциссой $x=4$, а вторая в точке с абсциссой $x=-2$.

95. Найдите уравнения всех тех касательных к графику функции $y=\frac{x^2+1}{x}$, каждая из которых вместе с осями координат ограничивает треугольник площадью 2.

96. Найдите уравнение всех тех касательных к графику функции $y=\sqrt{1-2x^2}$, каждая из которых вместе с осями координат ограничивает треугольник площадью $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

97. Найдите уравнение такой касательной к графику $y=x^3+2x$, для которой существует параллельная касательная к графику $y=\sin 2x$.

98. Найдите уравнения двух параллельных касательных соответственно к графикам $y=\sin 2x-3x^3$ и $y=\frac{x^3}{3}+2x^2+6x$.

99. Найдите все значения x, при каждом из которых касательные к графикам функций $y=3\cos 5x$ и $y=5\cos 3x+2$ в точках с абсциссой x параллельны.

100. Найдите все значения x, при каждом из которых касательная к графику функции $y=\cos 7x+7\cos x$ в точке с абсциссой x параллельна касательной к этому же графику в точке с абсциссой $\frac{\pi}{6}$.

101. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (1; 3), касающейся графика функции $y=8\sqrt{x}-7$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y=x^2+4x-1$.

102. На графике функции $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2-22x-28$ найдите все точки, касательная в каждой из которых к этому графику пересекает положительные полуоси, отсекая от них равные отрезки.

103. К графику функции $y=6x+x^2$ проведены две касательные. Первая касательная проведена в точке на графике с абсциссой $x_0=-2$, вторая — в точке минимума данной функции. Найдите площадь треугольника, образованного осью ординат и этими двумя касательными.

104. К графику функции $y=-8x-x^2$ проведены две касательные в точках на графике с абсциссами $x_0=-6$ и $x_1=1$. Найдите площадь треугольника, образованного осью ординат и этими касательными.

105. К графику функции $y=3x-x^2$ проведены две касательные. Первая касательная проведена в точке на графике с абсциссой $x_0=2$, вторая — в точке максимума данной функции. Найдите площадь треугольника, образованного осью ординат и этими касательными.

106. Найдите координаты точек пересечения с осью x тех касательных к графику функции $y=\frac{x+1}{x-3}$, которые образуют угол $\frac{3\pi}{4}$ с осью x.

107. Постройте на координатной плоскости множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют условию $y=4-\left|y-\frac{6}{x}\right|-2\left|\frac{3}{x}-1\right|$, и среди точек этого множества найдите те, у которых координата y принимает наибольшее значение.

108. Постройте на координатной плоскости множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют условию $y=2\left|1+\frac{1}{x}\right|+\frac{2}{x}-|y+4|$, и среди точек этого множества найдите все такие, в каждой из которых координата y принимает наименьшее значение.

109. Найдите уравнение двух параллельных прямых, касающихся функции $y=\frac{1}{x}$ и находящихся друг от друга на расстоянии 1.

110. Найдите уравнение прямой, касающейся графика функции $y=x^4-4x^3$ в двух различных точках.

111. Найдите наименьшее из расстояний от точки M с координатами $(0;\ -2)$ до точек $(x;\ y)$, таких, что $y=\frac{16}{\sqrt{3}x^3}-2$, $x>0$.

112. Найдите координаты точки, лежащей на графике функции $y=1+\cos x$ при $0\leqslant x\leqslant\pi$ и наименее удаленной от прямой $x\sqrt{3}+2y+4=0$.

113. Найдите координаты точки, принадлежащей графику функции $y=1-\sin x$ при $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ и наименее удаленной от прямой $x-\sqrt{2}y-5=0$.

114. Найдите наименьшее расстояние между точками M и N, если M и N лежат соответственно на кривых:
а) $y=x^2+1$ и $y=\sqrt{x-1}$; б) $y=2^x$ и $y=\log_2 x$.

115. Найдите такое значение x из промежутка $-1\leqslant x\leqslant 2$, что точка с абсциссой x и ординатой $y=\sqrt{4-2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3}$ удалена на наименьшее расстояние от начала координат.

116. На координатной плоскости рассматриваются всевозможные треугольники ABC, у каждого из которых $\widehat{ACB}=90°$, вершина A имеет координаты $(-4; 0)$, вершина C лежит на отрезке $[0; 4]$ оси x, а вершина B лежит на параболе $y=4x-x^2$. Какие координаты должна иметь вершина B, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

117. На координатной плоскости рассматриваются всевозможные треугольники ABC, у каждого из которых $\widehat{ACB}=90°$, вершина A имеет координаты $(1; 0)$, вершина C лежит на отрезке $[0; 1]$ оси x, а вершина B лежит на параболе $y=x-x^2$. Какие координаты должна иметь вершина B, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

118. В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в первый сосуд налито 5 кг, а во второй — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. Известно, что $pq=9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

119. Мотоциклист выезжает из пункта A и движется с постоянным ускорением 12 км/ч^2 (начальная скорость равна нулю). Достигнув скорости v км/ч, он едет с этой скоростью 25 км, а затем переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на 24 км/ч, и движется так до полной остановки. Затем он сразу поворачиват обратно и едет до пункта A с постоянной скоростью v км/ч. При какой скорости v мотоциклист быстрее всего проделает обратный путь от остановки до пункта A?

120. Найдите площадь наибольшего прямоугольника, две вершины которого находятся на отрезке $[0; 3]$ оси абсцисс, а две оставшиеся — на графике $y=3x-x^2$.

121. В равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными 1, и основанием a вписан прямоугольник наибольшей площади. Чему равна его площадь в зависимости от a? При каком a площадь наибольшего прямоугольника будет наибольшей?

122. Рассматриваются квадраты, вписанные в различные равнобедренные треугольники с боковыми сторонами, равными 1. (Одна сторона квадрата лежит на основании.) Найдите сторону наибольшего квадрата.

123. Рассматриваются всевозможные трапеции, вписанные в окружность радиуса R, такие, что центр окружности лежит внутри трапеции, а одно из оснований равно $R\sqrt{3}$. Найдите боковую сторону той из этих трапеций, которая имеет наибольшую площадь.

124. Рассматриваются всевозможные трапеции, обе боковые стороны и меньшее основание которых равны d. Найдите большее основание той трапеции, которая имеет наибольшую площадь.

125. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6 см. Найдите среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислите этот объем.

126. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объем каждого из которых равен 4 см^3, а основания являются квадратами. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и вычислите этот периметр.

127. Найдите наибольший объем прямоугольного параллелепипеда, вписанного в правильную треугольную пирамиду объемом V. Основание параллелепипеда принадлежит основанию пирамиды.

128. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, длины сторон AB и AC равны $\sqrt{11}$, ребро SA перпендикулярно ребрам AB и AC, угол BAC вдвое больше угла BSC. Ребро SB наклонено к плоскости основания под углом, тангенс которого равен $\sqrt{\frac{11}{5}}$. Среди всех прямых круговых цилиндров с образующей, параллельной SA, и находящихся внутри пирамиды рассматривается цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности. Найдите его объем.

129. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, длины сторон AB и AC равны $\frac{\sqrt{2}}{3}$, ребро SA перпендикулярно ребрам AB и BC, угол BSC вдвое меньше угла BAC. Плоскость боковой грани SBC наклонена к плоскости основания под углом, тангенс которого равен $\sqrt{8}$. Внутри пирамиды находится прямой круговой цилиндр, образующая которого параллельна биссектрисе AM основания пирамиды. Какова наибольшая возможная площадь боковой поверхности такого цилиндра?

130. В треугольной пирамиде проведено сечение плоскостью, параллельной одной из граней и касающейся вписанного в пирамиду шара. Чему может равняться наибольшее возможное значение площади таких сечений, если площадь полной поверхности равна S?

131. В правильной четырехугольной пирамиде расположены два одинаковых шара радиуса r, центры которых находятся на оси симметрии пирамиды. Один из шаров касается всех боковых граней пирамиды, а другой — основания пирамиды и первого шара. Найдите высоту пирамиды, при которой объем пирамиды наименьший.

132. Найдите высоту и радиус основания прямого кругового цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиусом R.

133. Найдите наименьший объем конуса, описанного около единичного шара.

134. Ось цилиндра расположена на диагонали единичного куба. Основания цилиндра касаются граней куба (каждое касается трех граней). Найдите наибольшее возможное значение объема цилиндра.

135. Внутри конуса расположены два шара, центры которых находятся на его высоте. Радиус первого равен 1, а второго — a.

Первый шар касается боковой поверхности конуса, второй касается первого и основания конуса. Найдите высоту конуса, при которой объем конуса будет наименьшим.

136. В основании треугольной пирамиды $NKLM$ лежит правильный треугольник KLM. Высота пирамиды, опущенная из вершины N, проходит через середину ребра LM. Известно, что $|KL|=a$, $|LN|=b$. Пирамиду пересекает плоскость β, параллельная ребрам KN и LM. На каком расстоянии от вершины N должна находиться плоскость β, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

137. Внутри угла величиной α расположена точка M, сумма расстояний от которой до сторон угла равна a. Через M проводится прямая, перпендикулярная биссектрисе угла. При каком значении α радиус окружности, описанной около получившегося треугольника, будет наибольшим? Найдите этот радиус.

138. Рассмотрим пять тел: правильную треугольную пирамиду, правильную четырехугольную пирамиду, прямоугольный параллелепипед, конус, цилиндр. Все пять тел имеют равные полные поверхности, причем каждое из них имеет наибольший возможный объем. Расположите эти тела в порядке возрастания объемов.

139. На горизонтальной плоскости стоит чаша, имеющая форму полусферы, с гладкой внутренней поверхностью. Имеется стержень, отношение длины которого к диаметру полусферы равно k. В начальном положении стержень соприкасается с внутренней поверхностью чаши в двух точках (одна из них может лежать на границе полусферы), плоскость, проходящая через стержень и центр полусферы, перпендикулярна горизонтальной плоскости, угол, образуемый стержнем с горизонтальной плоскостью, в начальный момент равен α. Найдите угол между стержнем и горизонтальной плоскостью в положении равновесия, которое он займет под воздействием силы тяжести.

140. Имеется сосуд четырехгранной формы, представляющий собой перевернутую правильную четырехугольную пирамиду без основания. Сторона основания равна 1, высота равна h. Сосуд наполнен водой, поверхность воды перпендикулярна высоте, высота водного столба равна a. В сосуд погружается металлический куб, одна грань которого параллельна уровню воды. Определите все значения a, при которых можно взять куб такого размера, что при его погружении часть воды прольется из сосуда.

141. Два корабля движутся по параллельным прямым, находящимся на расстоянии 4 км друг от друга. В какой-то момент времени отрезок, их соединяющий, перпендикулярен их курсам. Скорость первого равна 16 км/ч, скорость второго — 20 км/ч. С первого корабля отправляется посыльный катер, скорость которого 28 км/ч. Катер доплывает до второго корабля и тут же возвращается обратно. Какое наименьшее время может продолжаться поездка катера, если: а) корабли идут в одном направлении; б) корабли идут в противоположных направлениях?

142. Плоскость делит пространство на два полупространства. Скорость движения частицы в одном полупространстве равна v, а в другом w. Рассмотрим две фиксированные точки A и B, расположенные в разных полупространствах, M — некоторая точка разделяющей плоскости. Докажите, что время, затрачиваемое на путь AMB, будет наименьшим в том случае, если отношение косинусов углов, образуемых AM и MB с плоскостью, равно отношению скоростей v/w. (Закон преломления света.)

143. Найдите уравнение прямой, касающейся графиков двух функций $y=\sqrt{4x-x^2}$ и $y=1+\sqrt{-5-6x-x^2}$.

144. Координаты $(x;\, y)$ точки M удовлетворяют уравнению $y-x=\sqrt{x+y-2xy}$, а координаты точки N — уравнению $x^2+y^2+4x+2y+3=0$. Найдите наибольшее и наименьшее значения MN.

145и*. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $y=5x-x^2+14$.

146и. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2x+2$ и $y=x^2+4x+5$, $y=1$.

147и. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+2x+2$, $y=-x^2-4x-1$, $y=3$.

148и. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=3x^2-4x+2$, $y=20-x$.

149и. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-2x^2+3x+6$, $y=x+2$.

150и. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и параболой $y=-2(x-1)^2+8$.

151и. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и параболой $y=-2(x-3)^2+2$.

152и. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $x-3y+2=0$.

153и. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $x=0$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=\frac{\pi}{2}$.

154. Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\frac{x}{2x-1}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

155. Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\sqrt{2x^2-4}$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

156. Критическими точками многочлена $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ являются $x_1=1$, $x_2=3$. Найти $P(3)$, если $P(1)=4$.

157. Тело, выйдя из некоторой точки A, движется по прямой. При этом, если в момент t тело находится в точке B, то $AB=3t^4-17t^3+7t^2+10t$. Определить момент времени, когда

* При решении задач, отмеченных буквой «и», необходимо владение понятием интеграла.

мгновенная скорость тела равна его средней скорости за предыдущую единицу времени.

158. Найдите геометрическое место таких точек M, из которых можно провести к параболе $y=x^2$ две перпендикулярные касательные.

159. На графике функции $y=\sin x$ взяты три точки A, B и M, абсциссы которых соответственно равны a, $b\left(0<a<\frac{\pi}{2},\ 0<b<\frac{\pi}{2}\right)$ и $x=\frac{a+b}{2}$. Значение ординаты точки M приближенно заменяется сначала на соответствующую ординату, расположенную на касательной, проходящей через точку A, а затем на касательной через точку B. Какое приближение даст лучший результат?

160. Параметры a и b выбраны так, что система уравнений

$$\begin{cases} y=x^2+a, \\ x=y^2+b \end{cases}$$

имеет единственное решение (x_0, y_0). Найдите линию, описываемую точкой $M(x_0, y_0)$.

161. Представьте в виде суммы константы b и слагаемых вида $k|x-a|$ функцию: $y=|||x-1|-2|-3|$.

162. Докажите неравенство: а) $e^3>3^e$; б) $e^{6-e}<27$; в) $0{,}75<\cos 40°<0{,}78$; г) $1{,}4<\operatorname{tg} 55°<1{,}5$; д) $\sin\sqrt{2}>\sqrt{\sin 2}$.

163. Докажите неравенство:

а) $1-\frac{x^2}{2}\leqslant\cos x\leqslant 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ (при всех x);

б) $\sqrt{1+x}\geqslant 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ $(x\geqslant -1)$;

в) $\operatorname{tg} x\geqslant x+\frac{x^3}{3}$ $\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$;

г) $2x\ln x\leqslant x^2-1$ $(x\geqslant 1)$;

д) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\geqslant\cos x$ $\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$;

е) $\frac{1}{\sin^2 x}\leqslant\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}$ $\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$;

ж) $e^x\geqslant 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$ (при всех x).

164. Докажите неравенство:

а) $\frac{n^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}\leqslant\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)$ $(x_i>0)$;

б) $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^k\leqslant n^{k-1}(x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k)$ $(x_i\geqslant 0)$.

165. Определите число решений уравнения $\log_a x=a^x$ в зависимости от a.

166. На графике функции $y=x^2$ взята точка M. Через M проведена прямая, перпендикулярная касательной к данной функции в точке M. Проведенная прямая отсекает от данной параболы сегмент. Найдите наименьшее значение площади этого сегмента.

§ 4. НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Наш обзор состоит из двух частей. В первой части мы рассматриваем нестандартные методы решения стандартных по постановке задач — уравнений и неравенств. Вторая часть посвящена задачам с параметрами.

23. Уравнения и неравенства

Использование монотонности функций при решении уравнений и неравенств. Одну из наиболее часто встречающихся идей хорошо иллюстрирует решение следующего простого неравенства:

1. *Решить неравенство:* $\sqrt{3+x} \geqslant 3-x$ (X, § 3).

Решение. Подобные неравенства мы уже решали. Есть два стандартных пути: возведение в квадрат (при условии $3-x>0$; если же $3-x \leqslant 0$, неравенство выполняется) и замена неизвестного ($y=\sqrt{3+x}$).

Рассмотрим еще один способ — нестандартный. Функция, расположенная в левой части, монотонно возрастает, в правой части убывает. Из очевидных графических соображений следует, что уравнение $\sqrt{3+x}=3-x$ имеет не более одного решения, причем если x_0 — решение этого уравнения, то при $-3 \leqslant x < x_0$ будет $\sqrt{3+x}<3-x$, а решением данного неравенства будет $x \geqslant x_0$. Значение x_0 легко подбирается: $x_0=1$. Таким образом, имеем *ответ:* $x \geqslant 1$.

2. *Решить уравнение* $3^x+4^x=7^x$.

Решение. Данное уравнение имеет очевидное решение $x=1$. Докажем, что других решений нет. Поделим обе части на 7^x, получим $\left(\frac{3}{7}\right)^x+\left(\frac{4}{7}\right)^x=1$. Левая часть представляет собой монотонно убывающую функцию. Следовательно, каждое свое значение она принимает один раз, т. е. данное уравнение имеет единственное решение.

Ответ. $x=1$.

Итак, основная идея, на которой основывались решения этих двух примеров, весьма проста: если $f(x)$ монотонно возрастает, а $\varphi(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x)=\varphi(x)$ имеет не более одного решения, причем если $x=x_0$ — решение этого уравнения, то при $x>x_0$ (x входит в область определения обеих функций $f(x)$ и $\varphi(x)$) будет $f(x)>\varphi(x)$, а при $x<x_0$ будет $f(x)<\varphi(x)$.

Стоит обратить внимание на одну модификацию этой идеи, а именно: если $f(x)$ — монотонная функция, то из равенства $f(x)=f(y)$ следует, что $x=y$.

3. *Решить уравнение:* $\log_{6-x}\log_2 x=\log_{7-x}\log_2(2x)$.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\frac{\lg\log_2 x}{\lg(6-x)}=\frac{\lg(\log_2 x+1)}{\lg(7-x)},\quad \frac{\lg(7-x)}{\lg(6-x)}=\frac{\lg(\log_2 x+1)}{\lg\log_2 x},$$

$$\log_{6-x}(7-x)=\log_{\log_2 x}(\log_2 x+1).$$

Рассмотрим функцию $f(t)=\log_t(t+1)$.

Докажем, что при $t>1$ эта функция монотонно убывает. Это можно сделать, например, стандартным образом: найти производную $f'(t)\left(f(t)=\frac{\ln(t+1)}{\ln t},\ f'(t)=\frac{t\ln t-(t+1)\ln(t+1)}{t(t+1)\ln^2 t}\right)$ и доказать, что при $t>1$ $f'(t)<0$. Покажем другой способ: $f(t)-1=\log_t(t+1)-1=\log_t\left(1+\frac{1}{t}\right)$.

Получившаяся функция, очевидно, является убывающей (основание растет, под знаком логарифма функция убывает).

Наше уравнение имеет вид: $f(6-x)=f(\log_2 x)$, значит, $\log_2 x=6-x$. Слева функция возрастающая, справа убывающая, следовательно, решение единственно, оно легко находится подбором: $x=4$.

Уравнения вида $f(f(x))=x$. При решении уравнений указанного в заглавии вида полезна бывает теорема:

Если $y=f(x)$ — монотонно возрастающая функция, то уравнения

$$f(x)=x \qquad \textbf{(А)}$$

и

$$f(f(x))=x \qquad \textbf{(Б)}$$

эквивалентны.

Доказательство. То, что уравнение (Б) является следствием уравнения (А), очевидно: любой корень (А) удовлетворяет (Б). (Если $f(x_0)=x_0$, то $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$.) Докажем, что любой корень уравнения (Б) удовлетворяет уравнению (А). Пусть x_0 такое, что $f(f(x_0))=x_0$. Предположим, что $f(x_0)\neq x_0$ и для определенности $f(x_0)>x_0$. Тогда $f(f(x_0))>f(x_0)>x_0$, что противоречит предположению ($f(f(x_0))=x_0$). Теорема доказана.

Вопрос. Верна ли сформулированная теорема для монотонно убывающей функции?

Замечание. Если $y=f(x)$ монотонно возрастает, то при любом k уравнения $\underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(x)\ldots)=x$ и $f(x)=x$ эквивалентны.

Приведем несколько примеров использования этой теоремы.

4. *Решить уравнение:* $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1$.

Решение. Перепишем уравнение: $1+\sqrt{1+\sqrt{x}}=x$. Рассмотрим функцию $f(x)=1+\sqrt{x}$. Эта функция монотонно возрастает. Имеем уравнение $f(f(x))=x$. В соответствии с теоремой заменяем его на эквивалентное уравнение $f(x)=x$ или $1+\sqrt{x}=x$, $x-\sqrt{x}-1=0$, $\sqrt{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

5. *Решить уравнение:* $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$:

Решение. Преобразуем уравнение: $\frac{1+\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3}{2}=x$.

Данное уравнение имеет вид: $f(f(x))=x$, где $f(x)=\frac{1+x^3}{2}$.

Согласно теореме имеем эквивалентное уравнение: $\frac{x^3+1}{2}=x$, $x^3-2x+1=0$, $(x-1)(x^2+x-1)=0$.

Ответ. 1, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

6. *Решить систему уравнений:* $\begin{cases} x^3+2x^2+2x=y, \\ y^3+2y^2+2y=z, \\ z^3+2z^2+2z=x. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим функцию $f(t)=t^3+2t^2+2t$. Поскольку $f'(t)=3t^2+4t+2>0$ при всех t, то $f(t)$ возрастает.

Система имеет вид $y=f(x)$, $z=f(y)$, $x=f(z)$, т. е. $x=f(f(f(x)))$.

Согласно теореме x удовлетворяет уравнению $f(x)=x$ или $x^3+2x^2+2x=x$, $x(x^2+2x+1)=0$, $x(x+1)^2=0$.

Ответ. $(0, 0, 0)$, $(-1, -1, -1)$.

Использование экстремальных свойств рассматриваемых функций. Оценки. Основные идеи этого пункта достаточно хорошо видны из примеров:

7. *Решить уравнение:* $2\cos x=2^x+2^{-x}$.

Решение. Левая часть данного уравнения не превосходит 2, а правая — не меньше 2 (докажите, что $2^x+2^{-x}\geqslant 2$). Следовательно, равенство может иметь место лишь при условии, что левая и правая части равны 2, т. е. $x=0$.

Замечание. Данная ситуация, когда наименьшее значение функции, расположенной в одной части уравнения, равно наибольшему значению функции, расположенной в другой части, может быть обобщена. Более общий случай — уравнения вида $f(x)=\varphi(x)$, для которых $f(x)\leqslant\varphi(x)$ при всех допустимых x (формально мы можем переписать это уравнение в виде $f(x)-\varphi(x)=0$, в результате приходим к уже рассмотренной ситуации, поскольку наибольшее значение правой части равно нулю).

8. *Решить уравнение:* $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{1+x^2}$.

Решение. Воспользуемся неравенством

$$a_1a_2+b_1b_2\leqslant\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}.$$

Геометрическая интерпретация этого неравенства: скалярное произведение двух векторов не превосходит произведения их длин. Оно является частным случаем ($n=2$) общего неравенства Коши — Буняковского, доказанного нами (X, § 5). Равенство имеет место в случае коллинеарности векторов (a_1, b_1); (a_2, b_2).

Имеем $x\sqrt{1+x}+1\cdot\sqrt{3-x}\leqslant\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{(1+x)+(3-x)}=$ $=2\sqrt{1+x^2}$.

Значит, векторы $(x, 1)$ и $(\sqrt{1+x}, \sqrt{3-x})$ коллинеарны, т. е. $\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{3-x}}$, $x\sqrt{3-x}=\sqrt{x+1}$, $x^3-3x+x+1=0$, $(x-1)(x^2-2x-1)=0$, $x_1=1$, $x_2=1+\sqrt{2}$, $x_3=1-\sqrt{2}$. Последний корень посторонний.

Ответ. 1, $1+\sqrt{2}$.

9. *Решить уравнение:* $\lg(\cos x-0{,}5)+\lg(\sin x-0{,}3)+1=0$.

Докажем, что данное уравнение не имеет решений. Перейдем к следствию (потенцируем): $(\cos x-0{,}5)(\sin x-0{,}3)=\frac{1}{10}$.

Оценим левую часть на основании неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим $\left(ab\leqslant\frac{1}{4}(a+b)^2\right)$:

$$(\cos x-0{,}5)(\sin x-0{,}3)\leqslant\left(\frac{\cos x+\sin x-0{,}8}{2}\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{\sqrt{2}-0{,}8}{2}\right)^2<\left(\frac{1{,}42-0{,}8}{2}\right)^2=(0{,}31)^2<0{,}1,$$

т. е. левая часть меньше правой. Уравнение не имеет решений. Еще несколько нестандартных примеров решения уравнений и систем уравнений.

А. Нестандартная замена

10. *Решить уравнение:* $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$.

Решение. Нетрудно доказать, что $|x|<1$, поскольку при $|x|\geqslant 1$

$$2x^2-1\geqslant 1 \text{ и } 8x^4-8x^2+1\geqslant 1.$$

Сделаем замену: $x=\cos t$, $0<t<\pi$.

Поскольку

$$2x^2-1=2\cos^2 t-1=\cos 2t,\ 8x^4-8x^2+1=$$
$$=2(2x^2-1)^2-1=2\cos^2 2t-1=\cos 4t,$$

то уравнение примет вид $8\cos t\cos 2t\cos 4t=1$. Умножим обе части на $\sin t$.

После преобразований будем иметь

$$\sin 8t-\sin t=0,\ 2\cos\frac{9}{2}t\sin\frac{7}{2}t=0,$$

откуда, учитывая, что $0<t<\pi$, найдем $t=\frac{2}{7}\pi k$, $k=1, 2, 3$, или $t=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{9}\pi k$, $k=0, 1, 2, 3$.

Возвращаясь к x, получаем ответ.

Ответ. $\cos\frac{2}{7}\pi$, $\cos\frac{4}{7}\pi$, $\cos\frac{6}{7}\pi$, $\cos\frac{\pi}{9}$, $\frac{1}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{9}$, $\cos\frac{7\pi}{9}$.

Замечание. Данное уравнение давалось на конкурсном экзамене. Правда, задание было несколько иным: определить число положительных корней этого уравнения. Следует отметить, что такое задание является более «честным», поскольку подобный тригонометрический ответ в известной степени противоречит «традициям» алгебраических уравнений.

Б. Геометрическая интерпретация

Уравнение 8 из предыдущего пункта можно рассматривать и как иллюстрацию на тему «Геометрическая интерпретация». Приведем еще один пример на эту тему.

11. *Найти значения x и y, удовлетворяющие уравнению:*
$$\sqrt{9+x^2-3\sqrt{3}x}+\sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}+\sqrt{16+y^2-4\sqrt{3}y}=5.$$

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=3$, $BC=4$ (рис. 15). Разделим прямой угол на три равные части и отложим на получившихся лучах отрезки $CM=x$, $CN=y$ (если x или y отрицательны, то они откладываются в противоположную сторону).

По теореме косинусов слагаемые, расположенные в левой части, соответственно равны AM, MN и NB.

Имеем $AM+MN+NB=AB$.

Значит, точки M и N находятся на гипотенузе AB, причем $x=CM$ — биссектриса в треугольнике ACN, а $y=CN$ — биссектриса в треугольнике BCM. На основании формулы задачи (X, 27, § 7) имеем $x=\frac{3y\sqrt{3}}{3+y}$, $y=\frac{4x\sqrt{3}}{4+x}$.

Из этой системы найдем
$$x=\frac{24}{3+4\sqrt{3}},\quad y=\frac{24}{4+3\sqrt{3}}.$$

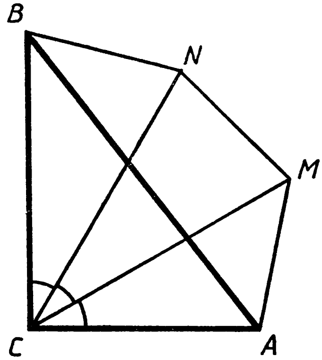


Рис. 15

В. Доказательство при решении систем уравнений

12. *Решить систему уравнений:*
$$\begin{cases}(x_1+x_2+x_3)^3=3x_4,\\(x_2+x_3+x_4)^3=3x_5,\\(x_3+x_4+x_5)^3=3x_1,\\(x_4+x_5+x_1)^3=3x_2,\\(x_5+x_1+x_2)^3=3x_3.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Докажем, что $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5$.

Пусть для определенности $x_5>x_4$, тогда из первых двух уравнений получим $(x_2+x_3+x_4)^3>(x_1+x_2+x_3)^3$, откуда $x_4>x_1$ и тем более $x_5>x_1$. Из второго и третьего уравнений имеем $x_2>x_5$ и тем более $x_2>x_1$. Далее из третьего и четвертого получаем $x_1>x_3$ и тем более $x_2>x_3$. Из последней пары находим $x_4>x_2$. Получилось противоречие ($x_4>x_2$ и $x_2>x_5$, т. е. $x_4>x_5$, а предположили, что $x_5>x_4$).

Значит, $x_4=x_5$, отсюда $x_4=x_1$ и т. д., все неизвестные равны между собой.

Ответ. $(0, 0, 0, 0, 0)$; $\left(\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}\right)$.

Нестандартные по формулировке задачи, связанные с уравнениями или неравенствами. К данной категории, в частности, относятся задачи, в которых требуется определить число корней заданного уравнения, доказать существование корня на определенном промежутке, решить уравнение или неравенство на заданном множестве. С подобного рода заданиями мы уже встречались (см., например, X, § 6 и § 3 данного пособия). Рассмотрим еще несколько примеров.

13. *Доказать, что уравнение* $x^4+x^3+x-2=0$ имеет одно положительное и одно отрицательное решение.

Р е ш е н и е. Единственность положительного решения достаточно очевидна. Это следует из того, что $f'(x)=4x^3+3x^2+1>0$ при $x\geqslant 0$, где $f(x)$ — левая часть заданного уравнения, т. е. $f(x)$ при $x\geqslant 0$ монотонно возрастает, а $f(0)=-2$.

Докажем единственность отрицательного корня. Путей здесь много. Можно поступить следующим образом. Рассмотрим функции $\varphi(x)=f(-x)=x^4-x^3-x-2$, $\varphi(0)=-2$, $\varphi'(x)=4x^3-3x^2-1$.

Докажем, что если $\varphi(x)\geqslant 0$, $x>0$, то $\varphi'(x)>0$. (Из этого будет следовать наше утверждение, поскольку в данном случае $\varphi(x)$ возрастает везде, где $\varphi(x)\geqslant 0$. Но $\varphi(0)<0$, а при больших x будет $\varphi(x)>0$.)

Имеем $4\varphi(x)=4x^4-4x^3-4x-8=x(4x^3-3x^2-1)-$
$-(x^3+x+8)=x\varphi'(x)-(x^3+x+8)$.

Значит, $\varphi'(x)=\dfrac{4\varphi(x)+x^3+x+8}{x}>0$ при $\varphi(x)\geqslant 0$ ($x>0$, $x^3+x+8>0$).

Утверждение доказано.

14. *Найти все целые значения* x, *удовлетворяющие неравенству*

$$3^{\frac{5}{2}\log_3(12-3x)}-3^{\log_4 x}>83.$$

Р е ш е н и е. Область определения левой части неравенства $0<x<4$. Значит, нам достаточно рассмотреть три значения x: 1, 2, 3.

Если $x=1$, то левая часть равна $3^{\frac{5}{2}\log_3 9}-1=3^5-1>83$.

Если $x=2$, то $3^{\frac{5}{2}\log_3 6}-\sqrt{3}=(\sqrt{6})^5-\sqrt{3}=36\sqrt{6}-\sqrt{3}>36\cdot 2{,}4-2>83$.

Если $x=3$, то $3^{\frac{5}{2}}-3^{\log_4 3}<3^3<83$.

Ответ. 1; 2.

15. *Найти все целые x, удовлетворяющие неравенству*

$$x-\frac{1}{2}<2\log_5(x+2).$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x-\frac{1}{2}-2\log_5(x+2)$.

Докажем, что, начиная с некоторого x, $f(x)$ возрастает. Это можно было сделать обычным путем, оценивая производную. Мы сделаем иначе. Нам достаточно доказать возрастание функции для целых x, т. е. что $f(x+1)-f(x)>0$.

Имеем $f(x+1)-f(x)=1-2\log_5(x+3)+2\log_5(x+2)=$ $=1-2\log_5\left(1+\frac{1}{x+2}\right)>0$, $\log_5\left(1+\frac{1}{x+2}\right)<\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{x+2}<\sqrt{5}$.

Последнее неравенство выполняется при $x\geqslant -1$, т. е. для всех допустимых целых x.

Нам осталось найти наибольшее целое, для которого $f(x)<0$ (или наименьшее, для которого $f(x)\geqslant 0$).

Докажем, что $f(2)<0$, $\frac{3}{2}-2\log_5 4<0$, $\log_5 4>\frac{3}{4}$, $4>5^{\frac{3}{4}}$, $4^4>5^3$. Далее, $f(3)=\frac{1}{2}>0$.

Ответ. -1, 0, 1, 2.

16. *Найти целые корни уравнения:*

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}(3x-\sqrt{9x^2+160x+800})\right)=1.$$

Решение. Имеем $\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)=2\pi k$, $\sqrt{9x^2+160x+800}=3x-16k$, откуда $160x+800=256k^2-96kx$, $x=\frac{256k^2-800}{160+96k}=\frac{8k^2-25}{3k+5}=\frac{8}{3}k-\frac{40}{9}-\frac{25}{9(3k+5)}$. Значит, $9x=24k-$ $-40-\frac{25}{3k+5}$.

Поскольку x — целое, то $\frac{25}{3k+5}$ — целое, т. е. 25 делится на $3k+5$, $3k+5$ может равняться ± 1, ± 5, ± 25.

Перебирая все возможности, найдем для k значения -2, 0, -10.

Далее при $k=-2$ имеем $x=-7$, при $k=0$ $x=-5$ (лишний корень), при $k=-10$ $x=-31$.

Ответ. -7, -31.

24. Задачи с параметром

В этой части будем рассматривать уравнения и неравенства с параметрами и вообще различные алгебраические задачи, содержащие параметры. В подобного рода задачах (мы с ними уже познакомились в X, § 5) встречаются два вида символов: неизвестные или переменные (обычно обозначаются буквами x, y, z, ...) и параметры (a, b, c, ...). Конечно, разница между ними весьма условна, в известной степени можно сказать, что параметр — это переменная, значение которой считается фиксированным, и каждое значение параметра определяет относительно заданного неизвестного соответствующее уравнение (неравенство, систему). Иными словами, уравнение с параметром является фактически семейством уравнений, рассматриваемых при фиксированном значении параметра.

Введение параметра способствовало появлению качественно новых типов задач, вдохнуло, если так можно выразиться, новую жизнь в такие традиционные виды задач, как решение уравнений и неравенств.

Использование монотонности и экстремальных свойств функций. С идеями, указанными в заглавии, мы уже встречались (X, § 5). Рассмотрим еще две задачи.

17. *Найти все значения параметра a, при которых существует единственное значение x, при котором выполняется неравенство*

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+1\right)\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3\geqslant 0.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x^2+ax+5}=y$ ($y\geqslant 0$) и перейдем к основанию 5. Получим:

$$\frac{-\log_5(y+1)\log_5(y^2+1)+\log_5 3}{\log_5 a}\geqslant 0.$$

Функция от y, расположенная в числителе, монотонно убывает. Нетрудно подобрать значение y, при котором она обращается в нуль: $y=2$.

Если $0<a<1$, то решением неравенства относительно y будет $y\geqslant 2$, а следовательно, исходное неравенство не может иметь единственного решения. (Неравенство $\sqrt{x^2+ax+5}\geqslant 2$ при любом a имеет бесконечно много решений.)

Значит, $a>1$ и решением относительно y будет $0\leqslant y\leqslant 2$. Возвращаясь к x, будем иметь $0\leqslant x^2+ax+5\leqslant 4$. Для того чтобы существовало единственное значение x, удовлетворяющее последним неравенствам, необходимо и достаточно, чтобы наименьшее значение квадратного трехчлена x^2+ax+5 равнялось бы 4, т. е. $5-\frac{a^2}{4}=4$.

Ответ. $a=2$.

18. *Найти все значения параметра a, при которых существует единственная пара (x, y), удовлетворяющая уравнению*

$$2^{\frac{1}{2}a+1}x^2-x^4=y^2-2\sqrt{a}y+6.$$

Решение. Заметим, что функция (от x), расположенная в левой части уравнения, ограничена сверху, наибольшее значение равно 2^a, в то время как справа расположена функция (от y), наименьшее значение которой равно $6-a$.

Понятно теперь, что для существования единственной пары $(x; y)$, удовлетворяющей данному уравнению, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $2^a=6-a$, откуда $a=2$ (слева функция возрастает, справа убывает).

Ответ. $a=2$.

Симметрия. Рассмотрим две задачи.

19. *Найти все значения a и b, при которых система*

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right| =a, \\ x^2+y^2=b \end{cases}$$

имеет только одно решение (x, y), x>0.

Решение. Заметим, что если пара (x_0, y_0) удовлетворяет системе, то и пара $(x_0 - y_0)$ также ей удовлетворяет. Для второго уравнения это утверждение очевидно, для первого следует из равенств

$$\left|\frac{x_0^{-y_0}-1}{x_0^{-y_0}+1}\right| = \left|\frac{1-x_0^{y_0}}{x_0^{y_0}}\cdot\frac{x_0^{y_0}}{1+x_0^{y_0}}\right| = \left|\frac{x_0^{y_0}-1}{x_0^{y_0}+1}\right|.$$

Значит, если система имеет единственное решение, то $y_0=0$ и $a=0$.

Получаем систему

$$\begin{cases} x^y=1, \\ x^2+y^2=b. \end{cases}$$

Понятно, что $b>0$. Из первого уравнения имеем или $y=0$, или $x=1$. В первом случае ($y=0$) из второго уравнения найдем $x=\sqrt{b}$, имеем решение $(\sqrt{b}, 0)$.

Второй случай ($x=1$): из второго уравнения $y^2=b-1$.

Если $b>1$, имеем еще два решения: $x=1$, $y=\pm\sqrt{b-1}$.

Если $b<1$, то больше решений нет, при $b=1$ получаем ту же пару: $x=1$, $y=0$.

Ответ. $a=0$, $0<b\leqslant 1$.

20. *При каких значениях параметра a система*

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2-3=y, \\ y^2-(2a+1)y+a^2-3=x \end{cases}$$

имеет единственное решение (x, y)?

Р е ш е н и е. Заметим, что если эта система имеет решение $x=m$, $y=n$, то она имеет решение $x=n$, $y=m$. Следовательно, должно иметь место равенство $m=n$ или $x=y$.

Приходим к уравнению

$$x^2-(2a+1)x+a^2-3=x, \ x^2-2(a+1)x+a^2-3=0,$$

которое должно иметь единственное решение.

Таким образом, $\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a^2-3)=2a+4=0$, $a=-2$.

Пусть теперь $a=-2$, имеем систему

$$\begin{cases} x^2+3x+1=y, \\ y^2+3y+1=x. \end{cases}$$

Вычитая почленно второе уравнение из первого, получаем: $(x-y)(x+y+4)=0$.

Возникают два случая:

1) $x=y=-1$; 2) $x+y+4=0$, $y=-x-4$.

Заменяя y в первом уравнении, получаем $x^2+4x+5=0$. Это уравнение не имеет решений.

Ответ. $a=-2$.

В обоих рассмотренных примерах требовалось определить значения параметра, при которых система уравнений имеет единственное решение. Используя особенности системы (четность по одному из переменных, переход друг в друга при перестановке неизвестных, а также иные виды симметрий), по одному решению мы конструируем другое, затем приравниваем их друг другу, в результате получаем тот вид, который должно иметь решение системы, если оно единственно.

Решение относительно параметра. С этим приемом мы уже знакомились (X, § 5). Суть его в том, что заданное уравнение или неравенство мы решаем относительно параметра. Например:

21. *Найти все значения p, при каждом из которых множество решений неравенства $(p-x^2)(p+x-2)<0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2\leqslant 1$.*

Р е ш е н и е. Нам надо найти все p, такие, что при всех $x^2\leqslant 1$ имеет место неравенство $(p-x^2)(p+x-2)\geqslant 0$. Решение последнего неравенства при данном x относительно p состоит из двух лучей, исключается внутренняя часть отрезка с концами x^2 и $-x+2$ (какой из них левый, а какой правый — неважно). Но если x меняется от -1 до 1, то x^2 меняется от 0 до 1, а $(-x+2)$ меняется от 1 до 3. Теперь понятно, что p не может принимать значения от 0 до 3, а при всех $p\leqslant 0$ или $p\geqslant 3$ заданное условие выполняется. (Пусть $p=p_0$ и $0<p_0<3$. Если $0<p_0<1$, то возьмем $x=x_0=\sqrt{\frac{p_0}{2}}$. При этих p_0 и x_0 будет $(p_0-x_0^2)(p_0+x_0-2)<0$.)

Ответ. $p\leqslant 0$, $p\geqslant 3$.

22. *При произвольных a, b и c решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{z}+xz=c, \\ \dfrac{b}{y}-\dfrac{c}{x}+xy=a, \\ \dfrac{c}{z}-\dfrac{a}{y}+yz=b. \end{cases}$$

Решение. Данная система является линейной относительно параметров a, b и c. Решим ее относительно этих параметров.

Сначала освободимся во втором и третьем уравнениях от знаменателей и заменим в них c, выраженным из первого уравнения. Получим (после упрощений):

$$\begin{cases} -a(1+x^2)yz+b(xz+y)x=x^2z^2y-x^3y^2z, \\ a(y-xz)z-b(1+z^2)xy=-x^2z^2y-xy^2z^3. \end{cases}$$

Освободимся от b (умножая почленно уравнения соответственно на $(1+z^2)y$ и $(xz+y)$ и складывая), получим: $a(-(1+x^2)(1+z^2)y^2z+(y-xz)(y+xz)z)=xyz((xz-x^2y)\times$ $\times(1+z^2)y-(xz+yz^2)(xz+y))$, или $a(-x^2y^2z^3-x^2y^2z-y^2z^3-$ $-y^2z+y^2z-x^2z^3)=xyz(xyz+xyz^3-x^2y^2-x^2z^2y^2-x^2z^2-xyz-$ $-xyz^3-y^2z^2)$, т. е. $az(x^2y^2z^2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)=xyz(x^2y^2z^2+$ $+x^2z^2+x^2y^2+y^2z^2)$.

Следовательно, $a=xy$. Далее найдем $b=yz$, $c=xz$.

Имеем систему

$$\begin{cases} a=xy, \\ b=yz, \\ c=xz. \end{cases}$$

Перемножая почленно эти уравнения, найдем $abc=x^2y^2z^2$. Значит, $abc>0$ и $xyz=\pm\sqrt{abc}$.

Ответ. $\left(\dfrac{\pm\sqrt{abc}}{b}, \dfrac{\pm\sqrt{abc}}{a}, \dfrac{\pm\sqrt{abc}}{c}\right)$.

Графические интерпретации. Те или иные графические интерпретации, на наш взгляд, одно из самых эффектных и эффективных средств решения различных задач с параметрами. Мы неоднократно пользовались этим приемом в главе «Квадратный трехчлен» (X, § 5) (см. также задачи 179, 180, 183, 184 из § 3 этого пособия).

Стоит выделить две разновидности рассматриваемого приема:

1) Изображение на плоскости $(x; a)$, где x — неизвестное, a — параметр.

2) На плоскости $(x; y)$ рассматривается семейство кривых, зависящих от параметра a.

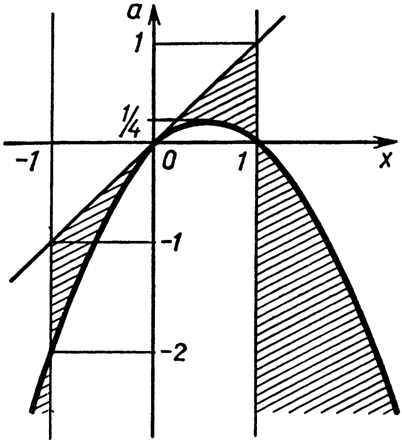


Рис. 16

Первый способ обычно применяется в задачах, в которых фигурируют лишь неизвестная x и параметр a, или сводящихся к таким.

Второй часто оказывается удобен в задачах с двумя неизвестными x и y и одним параметром a.

Перейдем к примерам.

23. *При любом значении параметра a решить неравенство*

$$\log_{x^2}(x-a)>2.$$

Решение. Рассмотрим плоскость $(x;\, a)$ и изобразим на ней множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству (рис. 16). Сначала изобразим область, для точек которой имеет смысл $\log_{x^2}(x-a)$. Это будет полуплоскость $x-a>0$ (правее и ниже прямой $x-a=0$), из которой удалены части прямых $x=0$, $x=-1$, $x=1$. Вне полосы, ограниченной прямыми $x=-1$ и $x=1$, будет $x^2>1$, и, следовательно, после потенцирования неравенства получим $x-a>x^2$, $a<x-x^2$.

Последнему неравенству соответствует область под параболой $a=x-x^2$ (напомним, при этом $|x|>1$).

Внутри полосы ($|x|<1$) будет $a>x-x^2$. На рисунке 16 область $(a;\, x)$, для точек которой $\log_{x^2}(x-a)>2$, заштрихована. (Заметим, что парабола $a=x-x^2$ касается прямой $a=x$.) Теперь ось a точками $1, \frac{1}{4}, 0, -1, -2$ разбита на шесть участков, на каждом из которых легко выписывается решение нашего неравенства. Для этого берем a на соответствующем участке, проводим горизонтальную прямую, находим значения x, соответствующие концам отрезков этой прямой, попавших в заштрихованную зону.

Например, если $-2\leqslant a<-1$, то получаем два отрезка, концы первого: $x=-1$ и $x=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a}$ (меньший корень уравнения $x^2-x+a=0$), второго: $x=1$ и $x=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a}$.

Ответ. Если $a\geqslant 1$, $a=0$, решений нет;

если $\frac{1}{4}<a<1$, то $a<x<1$;

если $0<a\leqslant\frac{1}{4}$, то $a<x<\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a}$ и $\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a}<x<1$;

если $-1\leqslant a<0$, то $a<x<\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a}$

и $1<x<\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a}$;

если $-2<a<-1$, то $-1<x<\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a}$

и $1<x<\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a}$;

если $a=-2$, то $1<x<2$;

если $a<-2$, то $\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a}<x<-1$

и $1<x<\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a}$.

24. *Найти все значения a, при каждом из которых система*

$$\begin{cases} 1-\sqrt{|x-1|}=\sqrt{7|y|}, \\ 49y^2+x^2+4a=2x-1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение. Перейдем к новым неизвестным $u=x-1$, $v=7y$.

Получим систему
$$\begin{cases} \sqrt{|u|}+\sqrt{|v|}=1, \\ u^2+v^2=-4a. \end{cases}$$

Понятно, что и новая система должна иметь четыре решения. Рассмотрим плоскость $(u; v)$. Второму уравнению соответствует на этой плоскости окружность с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{-4a}$. Первому уравнению — некоторая кривая, симметричная относительно осей координат (u и v входят в виде $|u|$ и $|v|$) и биссектрис между осями координат (u и v входят симметрично). (График этой функции схематично изображен на рисунке 17.)

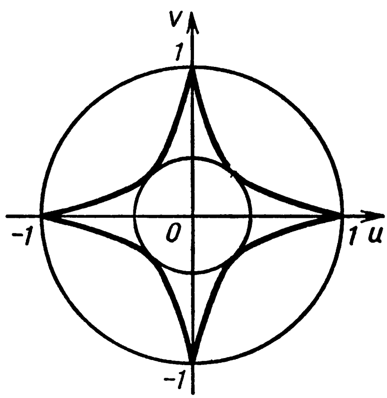


Рис. 17

Поскольку окружность u^2+ $+v^2=r^2$ также симметрична относительно этих же четырех прямых, то можно сделать вывод, что если данная система имеет ровно четыре решения, то точки, соответствующие этим решениям, должны располагаться или на осях (по две на каждой), или на биссектрисах (вновь по две на каждой). В противном случае если точка, соответствующая решению, расположена иначе, то, отражая ее относительно всех четырех осей симметрий, мы получим восемь (вместе с данной точкой) решений.

Таким образом, окружность, соответствующая второму уравнению, должна проходить или через точку $(1, 0)$, или через точку $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, т. е. ее радиус или 1, или $\frac{\sqrt{2}}{4}$, откуда $a=-\frac{1}{4}$ или $a=-\frac{1}{32}$.

Для полноты решения необходимо еще обосновать, что при каждом из найденных a имеется, в самом деле, ровно четыре известных нам решения, чтобы снять обвинения (справедливые) в том, что мы апеллируем к рисунку, ссылаемся на рисунок с изображением графика функции ($\sqrt{|u|}+\sqrt{|v|}=1$), о которой мы ничего не знаем (пока), кроме наличия у нее четырех осей симметрии. Самое простое, перейдя к переменным $z=\sqrt{|u|}$, $t=\sqrt{|v|}$, решить две системы:

$$\begin{cases} z+t=1, \\ z^4+t^4=\frac{1}{8} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z+t=1, \\ z^4+t^4=1. \end{cases}$$

Ответ. $a=-\frac{1}{4}$, $a=-\frac{1}{32}$.

Замечание. Стоит обратить внимание на характерную ситуацию, часто возникающую при использовании тех или иных графических интерпретаций. Несмотря на то что они полезны всегда (вероятно, впервые мы отваживаемся на всеобщую рекомендацию), с их помощью ответ может быть получен наглядно и быстро, нередки случаи, когда одних графических рассмотрений оказывается недостаточно и для полного обоснования требуются еще те или иные аналитические методы.

От общего к частному и обратно. Прием, о котором мы хотим здесь рассказать, часто бывает полезен при решении задач, где некоторое утверждение должно выполняться при любом значении параметра или переменной. Проиллюстрируем его на следующем простом примере:

25. *Найти все значения x, при которых равенство*

$$2\log_{2+a^2}(4-\sqrt{7+2x})=\log_{2+a^2x^2}(4-3x)$$

выполняется при любом значении параметра a.

Решение. Возьмем $a=0$. Получаем уравнение

$$2\log_2(4-\sqrt{7+2x})=\log_2(4-3x).$$

Потенцируя, получаем уравнение $(4-\sqrt{7+2x})^2=4-3x$, $23+$ $+2x-8\sqrt{7+2x}=4-3x$, $19+5x=8\sqrt{7+2x}$.

Еще раз возводим в квадрат. Получили квадратное уравнение

$$25x^2+62x-87=0.$$

Его корни (теорема Виета): $x=1$ и $x=-\frac{87}{25}$.

Таким образом, искомые значения x находятся среди двух найденных. Проверим их.

Если $x=1$, то будем иметь $2\log_{2+a^2} 1=\log_{2+a^2} 1$, $0=0$, т. е. $x=1$ удовлетворяет уравнению при любом a.

Если $x=-\frac{87}{25}$, то имеем $2\log_{2+a^2}\frac{19}{5}=\log_{2+a^2\left(\frac{87}{25}\right)^2}\frac{361}{25}$

$\log_{2+a^2}\frac{19}{5}=\log_{2+a^2\left(\frac{87}{25}\right)^2}\frac{19}{5}$.

Очевидно, если $a\neq 0$, левая часть не равна правой.

Ответ. $x=1$.

26. *Найти значения параметра a, при которых неравенство*

$$2x+2|x-a|+|x-1|>3$$

выполняется при всех значениях x.

Р е ш е н и е. Графиком функции, расположенной в левой части данного неравенства, является ломаная линия с вершинами в точках с абсциссами $x=a$ и $x=1$.

Если в каждой из этих точек значения функции больше 3, то и всюду функция больше 3 (минимум или при $x=1$, или при $x=a$).

Следовательно, нам надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2a+|a-1|>3, \\ 2|1-a|>1. \end{cases}$$

Ответ. $a>\frac{3}{2}$.

Задачи с логическим содержанием. Вообще логическая составляющая в полной мере присутствует практически в любой задаче с параметрами. Вероятно, любую из ранее рассматриваемых задач можно с полным правом отнести к данному разделу, поэтому те несколько примеров, которые рассматриваются здесь, попали сюда лишь потому, что не могли служить иллюстрацией какого-либо характерного приема или метода. Основная сложность в них — разобраться в логической структуре условия.

27. *Найти все неотрицательные x, для которых из неравенств* $abx\geqslant 4a+7b+x$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ *следует, что* $ab\geqslant 5$.

Р е ш е н и е. Перепишем первое неравенство:

$$a(bx-4)\geqslant 7b+x.$$

Из условий следует, что $bx-4>0$. Значит, $a\geqslant\frac{7b+x}{bx-4}$.

Для того чтобы из условий следовало неравенство $ab\geqslant 5$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\frac{7b+x}{bx-4}\cdot b\geqslant 5$ при $bx-4>0$. (Неравенство $ab\geqslant 5$ должно выполняться при всех допустимых a и b, а значит, при $a=\frac{7b+x}{bx-4}$.) Откуда $7b^2-4bx+20\geqslant 0$ при $b>\frac{4}{x}$.

Рассмотрим квадратный относительно b трехчлен $7b^2-4bx+$ $+20$. Этот трехчлен мы рассматриваем при $b>\frac{4}{x}$. При этих b он должен быть неотрицательным. Его вершина при $b_0=\frac{2x}{7}$.

Рассмотрим два случая:

1) $\frac{2x}{7}\leqslant\frac{4}{x}$ или $0<x\leqslant\sqrt{14}$. В этом случае на участке $b>\frac{4}{x}$ квадратный трехчлен $7b^2-4bx+20$ возрастает. При $b=\frac{4}{x}$ он положителен. Значит, он положителен при всех $b\geqslant\frac{4}{x}$.

2) $\frac{2x}{7}>\frac{4}{x}$. Наименьшее значение квадратного трехчлена для $b>\frac{4}{x}$ достигается при $b=\frac{2x}{7}$. Оно равно $20-\frac{4x^2}{7}$. Значит, $\frac{4x^2}{7}\leqslant 20$, $\sqrt{14}<x\leqslant\sqrt{35}$. Объединяя оба случая, получаем *ответ*: $0<x\leqslant\sqrt{35}$.

28. *Найти все a, удовлетворяющие условию* $-1<a<1$, *для которых выражение* $1+2\sqrt{x^2-2axy+y^2-6y+10}$ *принимает наименьшее значение только для одной пары* $(x;\ y)$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение:

$$(x-ay)^2+(1-a^2)\,y^2-6y+10=$$
$$=(x-ay)^2+(1-a^2)\left(y^2-\frac{6}{1-a^2}\,y+\frac{10}{1-a}\right)=$$
$$=(x-ay)^2+(1-a^2)\left(y-\frac{3}{1-a^2}\right)^2+10-\frac{9}{1-a^2}.$$

Теперь нетрудно доказать, что должно выполняться условие $10-\frac{9}{1-a^2}\geqslant 0$. Докажем это.

Для этого достаточно доказать, что если $-b=10-\frac{9}{1-a^2}<0$, то подкоренное выражение обращается в нуль (что дает наименьшее значение) более чем для одной пары $(x,\ y)$. Возьмем произвольно $b_1>0$ и $b_2>0$ так, что $b_1+b_2=b$.

Рассмотрим систему уравнений:

$$(1-a^2)\left(y-\frac{3}{1-a^2}\right)^2=b_1,\quad (x-ay)^2=b_2.$$

Эта система легко решается. Ее решение дает нам пару $(x,\ y)$, для которой подкоренное выражение равно нулю.

Ввиду произвольности выбора b_1 и b_2 получаем бесконечное число пар $(x,\ y)$, для которых заданное в условии выражение принимает наименьшее значение.

Ответ. $-\frac{1}{\sqrt{10}}\leqslant a\leqslant\frac{1}{\sqrt{10}}$.

29. *Найти все значения параметра $\alpha \neq 0$, при каждом из которых минимально количество пар (m, n) целых чисел m и n, удовлетворяющих условию $|n| \leqslant \frac{\alpha^2 - m^2}{\alpha^3}$.*

Решение. Нетрудно понять, что должно быть $\alpha > 0$, так как в противном случае неравенство имеет бесконечно много целых решений ($n = 0$, $|m| > |\alpha|$). Полезно также рассмотреть графическую интерпретацию на плоскости (m, n).

Множество точек, удовлетворяющих данному неравенству (без учета целочисленности), представляет собой фигуру, ограниченную дугами двух парабол $\left(n = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^3} m^2 \text{ и } n = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} m^2\right)$.

Точка (0, 0) всегда удовлетворяет неравенству. Существуют ли такие α, что других целых точек в рассматриваемой области нет?

Для этого должно быть $\frac{1}{\alpha} < 1$ (нет точек на оси n) и $\alpha < 1$ (нет точек на оси m). Эти два неравенства несовместимы.

Поскольку число целых решений нечетно (почему?), следующим значением для минимально возможного числа пар (m, n) будет 3. Число пар может быть равно 3, если соответствующие точки лежат на одной из осей. Есть две возможности: искомое множество состоит из пар $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ или $(0, -1)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$. В первом случае должно быть $1 < \alpha < 2$ (точка $(1, 0)$ удовлетворяет неравенству, а точка $(2, 0)$ не удовлетворяет) и во втором соответственно $1 < \frac{1}{\alpha} < 2$.

Ответ. $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ и $1 < \alpha < 2$.

Опять квадратный трехчлен. Техника «работы» с квадратным трехчленом, основные идеи, связанные с квадратным трехчленом, играют важнейшую роль при решении всевозможных нестандартных задач, задач с параметром. Приведем три примера.

30. *Найти все значения a, при которых система*

$$\begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 13y + 3 = 0, \\ 13x^2 + 6xy + 10y^2 + 16x + 2y - 4ax - 6ay + a^2 - 2a + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Попытаемся сначала упростить заданную систему. Нетрудно в первом уравнении увидеть полный квадрат $(3x - y)^2$. При почленном вычитании из второго уравнения первого появляется еще один полный квадрат $(2x + 3y)^2$.

Перейдем к другой системе (в которой вместо второго уравнения возьмем полученное уравнение) и к новым неизвестным: $u = 3x - y$, $v = 2x + 3y \cdot \left(x = \frac{3u + v}{11},\ y = \frac{3v - 2u}{11}\right)$.

Будем иметь:

$$\begin{cases} u^2+6\frac{3u+v}{11}-13\frac{3v-2u}{11}+3=0, \\ v^2+5v-2av+a^2-2a=0 \end{cases}$$

или $\begin{cases} u^2+4u-3v+3=0, \\ v^2+(5-2a)\,v+a^2-2a=0. \end{cases}$

Вопрос тот же: при каких a эта система имеет хотя бы одно решение?

Из первого уравнения $v=\frac{1}{3}(u^2+4u+3)$. Наименьшее значение трехчлена u^2+4u+3 равно -1, значит, $v\geqslant-\frac{1}{3}$.

Осталось выяснить, при каких a уравнение $v^2+(5-2a)\,v+$ $+a^2-2a=0$ имеет хотя бы одно решение $v\geqslant-\frac{1}{3}$.

Выясним сначала, может ли это уравнение иметь два корня и для обоих $v\geqslant-\frac{1}{3}$.

Для этого необходимо (но не достаточно), чтобы $\frac{2a-5}{2}\geqslant-\frac{1}{3}$ $\left(\text{вершина параболы левее прямой } v=-\frac{1}{3}\right)$ и $D\geqslant0$.

Из первого неравенства $a\geqslant\frac{13}{6}$, из второго $a\leqslant\frac{25}{12}$. Эти неравенства несовместны. Значит, один корень меньше $-\frac{1}{3}$, а другой больше, т. е. при $v=-\frac{1}{3}$ квадратный трехчлен неположителен.

$$\frac{1}{9}-(5-2a)\,\frac{1}{3}+a^2-2a\leqslant0,$$

$$9a^2-12a-14\leqslant0.$$

Ответ. $\frac{2}{3}-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}+\sqrt{2}$.

31. *Для каждого значения а, удовлетворяющего неравенствам* $0<a<1$, *найти наименьшее значение выражения* $\frac{1}{2}(x^2+y^2)-$ $-a\,(x-y)$ *при условии* $\sin\pi xy=0$.

Решение. По условию $xy=k$, где $k=0,\ \pm1,\ \dots$.

Пусть $x-y=z$. Система $x-y=z$, $xy=k$ имеет решение при условии $z^2+4k\geqslant0$ (проверьте). Данное выражение преобразуем к виду

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)-a\,(x-y)=\frac{1}{2}(z^2+2k)-az=$$

$$=\frac{1}{2}z^2-az+k=\frac{1}{2}(z-a)^2+k-\frac{a^2}{2}.$$

Мы пришли к следующей задаче: «Найти наименьшее значение выражения $\frac{1}{2}(z-a)^2+k-\frac{a^2}{2}$ при условии, что $z^2+4k\geqslant 0$, где k — целое число, $0<a<1$ (наименьшее по z и k)».

Рассмотрим два случая:

1) $k\geqslant 0$. В этом случае z — любое. Значит, наименьшее значение будет при $z=a$, $k=0$, оно равно $-\frac{a^2}{2}$.

2) $k<0$. Поскольку в этом случае $|z|\geqslant 2\sqrt{-k}$, то наименьшее значение будет при z, наиболее близком к a, т. е. при $z=2\sqrt{-k}$. Оно равняется $-k-2a\sqrt{-k}$.

Последнее же выражение при $k=-1, -2, \ldots$ будет наименьшим, если $k=-1$, и равняется в этом случае $1-2a$.

Осталось выяснить, при каких a наименьшим будет $-\frac{a^2}{2}$, а при каких $(1-2a)$. Для этого достаточно решить неравенство $-\frac{a^2}{2}\leqslant 1-2a$.

Ответ. Если $0\leqslant a\leqslant 2-\sqrt{2}$, то наименьшее значение равно $-\frac{a^2}{2}$;

если $2-\sqrt{2}<a\leqslant 1$, то наименьшее значение равно $(1-2a)$.

32. *Найти все значения параметра a, при которых каждое из уравнений*

$$(1-a)\cos 5x+\sin x=a,$$

$$(a^2-a)\cos\frac{x}{5}+(a^2-1)\sin\frac{x}{10}\sin 3x+\sin x=1$$

имеет решение и любой корень первого является корнем второго и наоборот.

Р е ш е н и е. Пусть x_0 — корень первого. Тогда $x_0+2\pi k$ при любом целом k также является корнем первого уравнения.

Обозначим $\sin\frac{x}{10}=t$, $\sin(3(x_0+2\pi k))=m$, $\sin(x_0+2\pi k)=n$.

Второе уравнение будет иметь вид:

$$2(a-a^2)t^2+(a^2-1)mt+n-1+a^2-a=0.$$

Если $x=x_0+2\pi k$, то $t=\sin\frac{x_0+2\pi k}{10}$ принимает не менее трех различных значений. (На самом деле различных значений не менее пяти. Это можно увидеть на круге, поскольку точки $\frac{x_0+2\pi k}{10}$ образуют правильный десятиугольник, а равные синусы имеют точки, симметричные относительно вертикальной оси.) Но если квадратный трехчлен имеет более двух корней, то он тождественно равен нулю.

Значит, $a^2-a=0$ и $a=0$ или $a=1$.

Рассмотрим эти случаи.

1) $a=0$. Получаем уравнения

$$\begin{cases} \cos 5x+\sin x=0, \\ -\sin\frac{x}{10}\sin 3x+\sin x=1. \end{cases}$$

Первое уравнение имеет корень $x=\frac{\pi}{4}$, не удовлетворяющий второму уравнению.

2) $a=1$. Получаем одинаковые уравнения $\sin x=1$.

Ответ. $a=1$.

На этом мы заканчиваем небольшой обзор нестандартных задач. Многие виды задач, идеи решений остались «за кадром». Это и понятно. Ведь задачи нестандартные, само название предопределяет невозможность рассмотреть их совокупность достаточно полно, тем более что развитие элементарной математики, математики конкурсного экзамена продолжается и каждый год добавляет что-то новенькое и оригинальное в ее копилку.

25. Задачи

1. Найдите все решения неравенства:

а) $\cos\frac{3}{2}-4x-x^2\geqslant 0$, лежащие в интервале $-4\frac{1}{5}<x<0$;

б) $x^2+2x+\cos 5<0$, лежащие в промежутке $-2\leqslant x\leqslant -\frac{1}{3}$.

2. Найдите все значения x, для которых величина y, определяемая равенством (1), удовлетворяет уравнению (2):

а) $y=\frac{\pi}{3}(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$, (1)

$\log_4(\operatorname{tg} 2y-3\operatorname{ctg} y)=1+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(\operatorname{ctg} y-\operatorname{tg} y)$; (2)

б) $y=\frac{4\pi}{3}\sin x\cos x$, (1)

$\log_4(\operatorname{ctg} 2y+\operatorname{tg} y)=1+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(9\operatorname{ctg} y-\operatorname{tg} y)$. (2)

3. Найдите все целые числа n, удовлетворяющие неравенству:

а) $\log_{2\cos\frac{2\pi}{7}-n+8}\left(\frac{\sqrt{n+5}-1}{\sqrt{10-n}}\right)\geqslant 0$;

б) $\log_{4\sin\frac{\pi}{5}-n+10}\left(\frac{\sqrt{15-n}}{1+\sqrt{n+12}}\right)\leqslant 0$.

4. Найдите все пары целых чисел $(x,\ y)$, удовлетворяющие системе:

а) $\begin{cases} 2x^2+2y^2-12x+20y+65<0, \\ 4x+2y>3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167<0, \\ x+2y<\frac{15}{2}. \end{cases}$

5. Найдите все значения x, для каждого из которых выражение имеет смысл и не обращается в нуль:

а) $\sqrt{3x^4-2-x^8}\cdot\sin(\pi(2x+16x^2))$;

б) $\sqrt{3x^4-2-x^8}\cdot\sin(\pi(2x-13x^2))$.

6. Найдите все решения уравнения:

а) $3\sin^3 x-3\cos^2 x+7\sin x-\cos 2x+1=0$, которые являются также решениями уравнения $\cos^2 x+3\cos x\sin 2x-8\sin x=0$;

б) $9\sin^2 x-5\sin x\sin 2x+17\cos x-11=0$, которые являются также решениями уравнения $5\cos^3 x-3\sin^2 x+8\cos x-1=0$.

В задачах (7—39) требуется решить уравнение, или неравенство, или систему уравнений, или смешанную систему уравнений и неравенств:

7. а) $\dfrac{\log_7(x^2-4x-11)^2-\log_{18}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\geqslant 0$;

б) $\dfrac{\log_2(x^2-2x-7)^2-\log_3(x^2-2x-7)^8}{3x^2-13x+4}\leqslant 0$.

8. а) $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+$ $+3\sqrt{x+2}$;

б) $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}$.

9. $|5-6x|-4\sin\frac{\pi x}{3}-4\sin\frac{2\pi x}{3}+\dfrac{8\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{3}}=0$.

10. а) $(4x-x^2-3)\log_2(\cos^2\pi x+1)\geqslant 1$;

б) $2^{-|x-2|}\log_2(4x-x^2-2)\geqslant 1$.

11. $x(8\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\leqslant 11\sqrt{1+x}-16\sqrt{1-x}$.

12. $x^3+x+2\sqrt{2x^3+x+1}\geqslant 6$.

13. $\log_2^2 x\leqslant 13-12|x-1|$.

14. а) $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$;

б) $\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}(x^2-4x-2)=\log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}(x^2-4x-3)$.

15. а) $\sqrt[3]{x}+1=2(2x-1)^3$; б) $\ln(1+\ln x)=x-1$.

16. а) $\sin 3x-2\sin 18x\sin x=3\sqrt{2}-\cos 3x+2\cos x$;

б) $2\sqrt{3}\sin 5x-\sqrt{3}\sin x=\cos 24x\cos x+2\cos 5x-6$.

17. $\left(1-\frac{1}{8}\cos^2 x\right)^8=\sin^2 x$.

18. а) $2^x=3x-1$; б) $x^{100}=333\lg x+6{,}67$.

19. а) $\sqrt[3]{x^3-7}+x-\frac{4}{x}>1$; б) $3\cdot 2^{x+2}+x-\dfrac{16}{\sqrt[3]{x^3+7}}\leqslant 17$.

20. $(x-y)^2+(y-2\sqrt{x}+2)^2=\frac{1}{2}$.

21. $\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}$.

22. $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y=3+\sin^2(x+y)$.

23. а) $\frac{3+2\cos(x-y)}{2}=\sqrt{3+2x-x^2}\cos^2\frac{x-y}{2}+\frac{\sin^2(x-y)}{2}$;

б) $4\left(3\sqrt{4x-x^2}\sin^2\frac{x+y}{2}+2\cos(x+y)\right)=13+4\cos^2(x+y)$.

24. а) $\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0$; б) $-x-y^2-\sqrt{x-y^2-1}\geqslant$ $\geqslant -1$.

25. а) $\begin{cases}2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3}=3^{-y-4},\\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2\leqslant 8;\end{cases}$

б) $\begin{cases}4^{|x^2-8x+12|-\log_4 7}=7^{2y-1},\\ |y+3|-3|y|-2(y+1)^2\geqslant 1.\end{cases}$

26. $\begin{cases}2x^2-xy+10=0,\\ x^2+y^2\leqslant 90,\end{cases}$ x — целое число.

27. а) $\begin{cases}\left|y+\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{13}{6}+x-y\right|=\frac{13}{6}+x+\frac{1}{x},\\ x^2+y^2=\frac{97}{36};\end{cases}$

б) $\begin{cases}\left|x+\frac{1}{y}\right|+\left|\frac{10}{3}-x+y\right|=\frac{10}{3}+y+\frac{1}{y},\\ x^2+y^2=\frac{82}{9}.\end{cases}$

28. а) $\begin{cases}8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0,\\ x+y=z;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(2\sin x\cos y+(\sqrt{3}-1)\sin z)\sin(x+y)+\frac{3}{4}=0,\\ z=x-y.\end{cases}$

29. а) $\begin{cases}(\sqrt{3}+1)(1+\cos(xy)\sin(xy))=(\sqrt{3}+1)\sin^2(xy)+\cos(2xy),\\ x^2y^2-y^2+1=0,\\ \frac{1}{x^2}+y^2\leqslant 6;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\cos^2(xy)-3\sin(xy)\cos(xy)=\\ \quad =2\cos y\cos(2xy-y)-2\cos^2(xy-y),\\ x^3-xy+1=0,\\ x^6+2xy\leqslant 5.\end{cases}$

30. а) $\sqrt{2-|y|}\cdot(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33})=$
$=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5\pi^2}{4}$;

б) $\sqrt{x^2-4}\cdot(3\sin^2 x+10\sin x\cos x+11\cos^2 x-2\sqrt[3]{301})=$
$=5\pi^2-4(\arcsin y)^2-4(\arccos y)^2$.

31. а) $\sqrt{\frac{3}{2}x^2-2y^2+2z^2+10z+6y+\frac{\sqrt{3}}{2}x-17}+$
$+\sqrt{3x^2-2\sqrt{3}(\cos\pi y+\cos\pi z)x+4}=0$;

б) $\sqrt{15x^2+2y^2-2z^2-3\sqrt{5}x-2y+10z-4}+$
$+\sqrt{5x^2-2\sqrt{5}x\cos\pi y\cos\pi z+1}=0$.

32. а) $\begin{cases} y\sin x=\log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\ (6y^2+2y)(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x})=25y^2+6y+1,\ |y|\leqslant 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (3-y^2)\cos^2 x=\log_3\left|\dfrac{8+y}{y(1-\sin^3 x)}\right|, \\ (y^2+8y)(3^{2+2\sin^4 x}+3^{2\cos^4 x+\sin^2 2x-4})=2y^2+16y+64, \\ 1\leqslant y\leqslant 10. \end{cases}$

33. а) $\begin{cases} y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2}, \\ 4xy^3+y^3+\frac{1}{2}\geqslant 2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4y^2-2x^2=\sqrt{2(x+2y)^2-(x+2y)^4}, \\ x^4+2\leqslant 4y(x^2-1). \end{cases}$

34. а) $\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x,\ z\geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (2-x)(3x-2z)=3-z, \\ y^3+3y^2=x^2-3x+2, \\ z^2+y^2=6z,\ z\leqslant 3. \end{cases}$

35. а) $\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27=0, \\ z^3-9y^2+27y-27=0, \\ x^3-9z^2+27z-27=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2y^3+2x^2+3x+3=0, \\ 2z^3+2y^2+3y+3=0, \\ 2x^3+2z^2+3z+3=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y^3-3x+2=0, \\ z^3-3y+2=0, \\ x^3-3z+2=0. \end{cases}$

36. $8x^3-6x-1=0$.

37. $(\cos x+\sin x)(2-\sin 2x)+0{,}1=0$.

38. $\begin{cases} \sqrt{y^2-7+\sqrt{x+y^2-7}}=x, \\ \sqrt{x^2+2+\sqrt{y+x^2+2}}=y. \end{cases}$

39. $\begin{cases} x\sqrt{y^2-1}-y\sqrt{x^2+1}=-1\frac{9}{20}, \\ \sqrt{x^2+1}\sqrt{y^2-1}-xy=1\frac{1}{20}. \end{cases}$

40. Докажите, что функция:

а) $y(x)=\sin^2 x+12\sin x\cos x+3\cos^2 x-2\sqrt[3]{66}$ может принимать неотрицательные значения;

б) $y(x)=\sin^2 x-14\sin x\cos x-5\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}$ принимает только положительные значения.

41. Найдите все тройки целых чисел (x, y, z), для каждой из которых выполняется условие:

а) $3(x-3)^2+6y^2+2z^2+3y^2z^2=33$;

б) $5x^2+y^2+3z^2-2yz=30$.

42. Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение $8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1$?

43. Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg}(\pi\sqrt{20790+x})=\operatorname{tg}(\pi\sqrt{x})$? Найдите наибольший корень этого уравнения.

44. а) Найдите все значения x и y, такие, что числа $2\sin y$, $\operatorname{ctg}(y-x)$, $2\cos y\cdot\operatorname{ctg} x$, $(-1+\sin y)\cdot\operatorname{ctg} x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

б) Найдите все значения x и y, такие, что числа $\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$, $2\cos(x+y)$, $4\sin 2x$, $16\sin(x-y)$ являются последовательными членами геометрической прогрессии.

45. Докажите, что все решения неравенства

$$\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x^2-1}>2$$

удовлетворяют неравенству $x+2\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x^4-2x^2+1}>1+2\sqrt[3]{x^2-1}$.

46. На координатной плоскости переменных x и a постройте графики уравнений $f(x; a)=0$ и $\varphi(x; a)=0$, где $f(x; a)=2^{-|x|}-a$, $\varphi(x; a)=8a-x$. Исходя из графиков, докажите, что координаты любой точки $M(x; a)$ удовлетворяют одной и только одной из следующих систем неравенств:

а) $\begin{cases} f(x; a)\leqslant 0, \\ \varphi(x; a)\leqslant 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} f(x; |a|)>0, \\ \varphi(x; a)\leqslant 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} f(x; -a)\leqslant 0, \\ \varphi(x; a)>0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} f(x; a)\leqslant 0, \\ \varphi(x; a)>0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} f(x; |a|)>0, \\ \varphi(x; a)>0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} f(x; -a)\leqslant 0, \\ \varphi(x; a)\leqslant 0, \end{cases}$

и для каждой из систем а) — е) и неравенства

ж) $f(x; |a|)\geqslant 0$ найдите:

1) значения a, при которых решением является любое x;

2) значения x, при которых решением является любое a;

3) значения a, при которых существует хотя бы одно решение относительно x;

4) значения x, при которых существует хотя бы одно решение относительно a;

5) значения a, при которых существует хотя бы одно значение x, не являющееся решением;

6) значения a, при которых нет решений относительно x;

7) значения x, при которых нет решений относительно a;

8) значения a, такие, что данная система (неравенство) следует из двойного неравенства $-2<x<1$;

9) значения a, при которых из системы (неравенства) следует $-2<x<1$;

10) значения a, при которых любое x, удовлетворяющее условиям $-2<x<1$, не является решением данной системы (неравенства);

11) значения a, при которых существует хотя бы одно x из промежутка $-2<x<1$, не являющееся решением данной системы (неравенства).

47. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых решение уравнения:

а) $10x-15a=13-5ax+2a$ больше 2;

б) $6-3a+4ax=4a+12x$ меньше 1.

48. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых x и y, удовлетворяющие системе уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=a, \\ 2x-y=3, \end{cases}$ удовлетворяют также неравенству $x>y$;

б) $\begin{cases} 2x+y=a+2, \\ x-y=a, \end{cases}$ удовлетворяют также неравенству $x+y<0$.

49. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2-x^2})=1$ имеет ровно восемь решений.

50. Найдите все значения a, при которых неравенство (1) выполняется для всех x, удовлетворяющих двойному неравенству (2):

а) $\frac{x-2a-1}{x-a}<0$ (1), $1\leqslant x\leqslant 2$ (2);

б) $\frac{4x-a}{x-2a}<0$ (1), $2\leqslant x\leqslant 4$ (2).

При каждом значении параметра a решите уравнение или неравенство или систему уравнений (51—66):

51. а) $4^x-2a(a+1)2^{x-1}+a^3=0$;

б) $25^x+a^2(a-1)5^x-a^5=0$.

52. $\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}}>\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}$.

53. а) $a^2-9^{x+1}-8\cdot 3^x\cdot a>0$;

б) $a^2-2\cdot 4^{x+1}-a\cdot 2^{x+1}>0$.

54. $\log_{\frac{a^2+x^2}{2}} x\geqslant 1$. **55.** $\log_{3ax}(4a^2-x^2)<1$.

56. $\log_{a^2-x^2}((ax)^2-1)=1$.

57. $\log_a(ax)\log_x(ax)=\log_{a^2}\frac{1}{a}$.

58. а) $4 \cos x \sin a + 2 \sin x \cos a - 3 \cos a = 2\sqrt{7}$;

б) $3 \cos x \sin a - \sin x \cos a - 4 \cos a = 3\sqrt{3}$.

59. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 2a^2, \\ \sin x \cos y = a^2(a^2 - 4). \end{cases}$

60. $\begin{cases} \cos x \cos y = 1 - a^2, \\ \sin x \sin y = 1 - 2a. \end{cases}$

61. а) $\sqrt{a^2 - x^2} > x + 1$; б) $\sqrt{1 - x^2} < x + a$.

62. а) $(1 + (a+2)^2) \log_3 (2x - x^2) + (1 + (3a-1)^2) \log_{11}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 =$

$= \log_3 (2x - x^2) + \log_{11}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$;

б) $(1 + (3a+4)^2) \log_2 (-2x - x^2) + (1 + (a-2)^2) \log_7\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) =$

$= \log_7\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + \log_2 (-2x - x^2)$.

63. а) $\log_{100} x^2 = \log_{\sqrt{x}} 10\left(\lg 10a - \left|\lg \frac{x}{a}\right|\right)$;

б) $\log_a x + \log_{\sqrt{x}} a \, |a + \log_a x| = a \log_x a$.

64. а) $a^5 + x = \sqrt[5]{a - x}$; б) $\dfrac{1}{1 + \sqrt{x - \dfrac{1}{1 + \sqrt{x - a}}}} = a$.

65. а) $x(2x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2} = a$;

б) $x(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} = a$;

в) $x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1} = a$.

66. $x^{x^a} = a$.

67. Найдите все значения параметра α, при каждом из которых уравнение:

а) $x^2 + \dfrac{6x}{\sqrt{\sin \alpha}} + \dfrac{9\sqrt{3}}{\cos \alpha} + 36 = 0$;

б) $x^2 + \dfrac{2x}{\sqrt{\sin \alpha}} + \dfrac{1}{\cos \alpha} + 2\sqrt{2} = 0$

имеет единственное решение.

68. Найдите все целые значения параметра k, при каждом из которых уравнение:

а) $5 - 4 \sin^2 x - 8 \cos^2 \frac{x}{2} = 3k$;

б) $2 - 2 \cos 2x = 3k + 4 \sin x$ имеет решение.

Найдите все эти решения.

69. Найдите все значения параметра a:

а) из промежутка $[1; +\infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения $x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$ принимает наибольшее значение;

б) из промежутка $(-\infty; -4]$, при каждом из которых меньший из корней уравнения $x^2+ax-3x-2a-2=0$ принимает наименьшее значение.

70. Для каждого значения параметра a определите число решений уравнения:

а) $\sqrt{2|x|-x^2}=a$; б) $|x^2-2x-3|=a$.

71. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет три различных корня; найдите эти корни:

а) $x-a=2\;|2|x|-a^2|$; в) $x-\frac{a}{3}=9\;|9|x|-a^2|$;

б) $x-\frac{a}{2}=4\;|4|x|-a^2|$; г) $x-\frac{a}{2}=2\;|2|x|-a^2|$.

72. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно значение x, удовлетворяющее условиям:

а) $\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0, \\ x^2+a^2=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+(2-3a)x+2a^2-2a<0, \\ ax=1. \end{cases}$

73. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет только один корень:

а) $|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$;

б) $|(a+1)x-2|=(1+a)x^2-2ax+2$.

74. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство:

а) $25y^2+\frac{1}{100}\geqslant x-axy+y-25x^2$;

б) $16x^2+axy-y\geqslant x-16y^2-\frac{1}{64}$

выполняется для любых пар чисел (x, y), таких, что $|x|=|y|$.

75. Докажите, что при всех a и b имеет место неравенство, и определите, при каких a и b достигается равенство:

а) $\frac{5^{a+1}}{5^{2a}+25}\leqslant 13-5b+\frac{1}{2}b^2$;

б) $\frac{6^a}{(36)^{a+1}+1}\leqslant\frac{5}{6}-b+\frac{1}{3}b^2$.

76. Найдите все целые значения n, при каждом из которых система уравнений:

а) $\begin{cases} 6x^2+24y(x+y)+2(3n-2)x+4(3n-2)y+3=0, \\ 4(x^2+y^2)+(4n+2)y+2n^2=8xy+(4n+2)x+\frac{5}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x(x+2y-4)+4n^2=8+4y-y^2, \\ y^2-2y+2=4x(y-x+1)+2(n^2+n) \end{cases}$ имеет решения. При найденных значениях n решите эту систему.

77. На координатной плоскости изобразите множество пар чисел $(b; c)$, для которых сумма корней уравнения $2^x + \log_2 b + c \cdot 2^{-x} = 0$ равна -2.

78. Найдите все значения параметра a, при которых каждое решение неравенства (1) является решением неравенства (2):

а) $\log_2 x^2 \leqslant \log_2 (x+2)$ (1), $49x^2 - 4a^4 \leqslant 0$ (2);

б) $2^{\frac{1}{2(x-1)^2}} \geqslant 4^{\frac{1}{(3-x)^2}}$ (1), $16a^4x^2 - 9 \leqslant 0$ (2).

79. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство:

а) $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a \cos x > 2$;

б) $\cos^2 x + 2a \sin x - 2a < a^2 - 4$

выполняется для любого значения x.

80. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство выполняется для любых значений x:

а) $|3 \sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a| \leqslant 3$;

б) $|\sin^2 x - 2(a-1) \sin x \cos x + 3 \cos^2 x - a + 1| \leqslant 3$.

81. Найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению при любом действительном a:

а) $\log_{x+a^2+1} (a^2x + 2) = 2 \log_{7+2x} (5 - \sqrt{6-2x})$;

б) $2 \log_{3a^2+2} (7 - \sqrt{34+x}) = \log_{2a^2+3} (3-x)$.

82. При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение:

а) $\log_{(a-4)(10-a)} (-x^2 + 4x - 3) =$
$= \log_{(a-4)(10-a)} ((x - 0{,}25a - 1)(x - 0{,}5a - 2))$;

б) $\log_{(a-4)(9-a)} \left(\left(x - \frac{a}{4} - 2\right)\left(x - \frac{a}{8} - 3\right)\right) =$
$= \log_{(a-4)(9-a)} (-x^2 + 6x - 8)$?

83. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$4^{-|x-a|} \log_{\sqrt{3}} (x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \log_{\frac{1}{3}} (2|x-a| + 2) = 0$$

имеет три решения.

84. Найдите все значения параметра α, при которых квадратичная функция $(\cos \alpha) x^2 + (2 \sin \alpha) x + \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2}$ является квадратом линейной функции.

85. Найдите значения параметра α, при которых квадратный трехчлен $(\cos \alpha) x^2 + (2 \sin^5 \alpha - \sin 2\alpha \cos \alpha) x + \frac{1}{\sin 2\alpha}$ имеет два одинаковых по абсолютной величине корня разных знаков.

86. При каких значениях α многочлен y от x является квадратом квадратного трехчлена относительно x:

а) $y=x^4+2^{\cos\alpha}x^2+(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)x+2^{\cos\alpha}-1$;

б) $y=x^4+2^{\operatorname{tg}\alpha}x^2+(\cos\alpha+\cos 2\alpha)x+2^{\operatorname{tg}\alpha-2}$?

87. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=8, \\ 2x^2+4xy+5y^2=a^4-4a^3+4a^2-12+\sqrt{105} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

88. Найдите все натуральные значения b, при каждом из которых выражение $\frac{1}{x+y+3}$ имеет смысл для всех пар чисел (x, y), где $x<0$ и $y<0$, для которых выражение $\lg(xy-b)$ также имеет смысл.

89. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{|y+3|}=1-\sqrt{5|x|}, \\ 16a-9-6y=25x^2+y^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

90. При каких действительных значениях a система $\begin{cases} 2|x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$ имеет восемь различных решений?

91. Найдите все значения q, при каждом из которых множество решений неравенства $(q-x^2)(q+2x-8)<0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2<4$.

92. При каких значениях t неравенство $\log_{\frac{t+1}{t+2}}(x^2+3)>1$ выполняется при всех x?

93. Найдите все значения $x>1$, которые для всех b, таких, что $0<b\leqslant 2$, являются решением неравенства

$$\log_{\frac{x^2+x}{b}}(x+2b-1)<1.$$

94. При каких a уравнение $4^x+2=a2^x\sin\pi x$ имеет ровно одно решение?

95. Определите все значения параметров a и b, при которых всякое решение уравнения $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=a$ удовлетворяет уравнению $\frac{x}{y}=b$.

96. Определите значение параметров a и b, для которых любая пара x и y $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, удовлетворяющая уравнению $x+y=a$, удовлетворяет уравнению $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=b$.

97. Найдите все неотрицательные числа x, при каждом из которых из неравенств $abx\geqslant 2a+9b+x$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ следует неравенство $ab\geqslant 4$.

98. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно общее решение у неравенств $x^2+4ax+3a^2>1+2a$ и $x^2+2ax\leqslant 3a^2-8a+4$.

99. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых любое решение неравенства $x^2+3a^2-1\geqslant 2a(2x+1)$ является решением неравенства $x^2+(2x-1)a+a^2>0$.

100. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство:

а) $(a^3+(1-\sqrt{2})a^2-(3+\sqrt{2})a+3\sqrt{2})x^2+2(a^2-2)x+a>$ $>-\sqrt{2}$;

б) $(a^3+(1-\sqrt{3})a^2-(4+\sqrt{3})a+4\sqrt{3})x^2+2(a^2-3)x+a>$ $>-\sqrt{3}$ выполняется для любого $x>0$.

101. При каких значениях параметра a множество решений системы неравенств $\begin{cases} x^2+(a+4)x+4a\leqslant y, \\ 3x+y-(2a+4)\leqslant 0 \end{cases}$ содержит отрезок $[-2;\ -1]$ оси x?

102. Найдите все числа a, при которых имеет единственное решение система:

а) $\begin{cases} \operatorname{ctg}\pi\left(x+\frac{1}{4}\right)=1, \\ (4x-16a+23)(-2a-33-6x)>0,\ a<0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin\pi x=0, \\ (2x+14a^2-7)(4x-4a^2-15)\leqslant 0. \end{cases}$

103. Найдите все значения параметра a, при которых система имеет четное число решений:

$$\begin{cases} \sin(a-y)+2\sin x=0, \\ 2\log_{16}(a-y)+4\log_{\frac{1}{4}} y=\log_2\left(\frac{\sqrt{3}}{y^2}\right)+3\log_{64} x. \end{cases}$$

104. Найдите все значения параметра a, при которых система имеет нечетное число решений:

$$\begin{cases} \cos(y-a)-2\cos x=0, \\ \log_2(ay-a^2)=2\log_4(-x)+\log_2(3y). \end{cases}$$

105. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых минимально количество пар:

а) (n, m) целых чисел n и m, удовлетворяющих условию $a^3|n|\leqslant\sqrt{2}(a^2-m^2)$;

б) (m, n) целых чисел m и n, удовлетворяющих условию $a^3m^2+|n|\leqslant a^2$.

106. Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственная пара чисел (x, y), удовлетворяющая уравнению $-15x^2+11xy-2y^2=7$ и двум неравенствам $x<y$, $2a^2x+3ay<0$.

107. Для каждого значения a, удовлетворяющего неравенствам $0<a<2$, найдите наименьшее значение выражения $x^2+y^2-2a(x+y)$ при условии $\cos\left(\frac{\pi}{2}xy\right)=1$.

108. Для каждого значения a, удовлетворяющего неравенствам $0<a<1$, найдите наименьшее значение выражения $\frac{1}{2}(x^2+y^2)-a(x-y)$ при условии $\sin \pi xy=0$.

109. Прямая касается параболы $y=-x^2+2x+2$ в точке A и пересекает ось x в точке B, ось y в точке C. Известно, что точка A лежит в I четверти координатной плоскости и $2|AB|=|AC|$. Найдите уравнение касательной.

110. При каких значениях a кривая $y=3x^3-a^2x$ имеет ровно две общие точки с прямой $y=(2a+1)x-2(a+1)$?

111. Постройте на координатной плоскости множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют условию:

а) $y=4-\left|y-\frac{6}{x}\right|-2\left|\frac{3}{x}-1\right|$,

и среди точек этого множества найдите все такие, в каждой из которых координата y принимает наибольшее значение;

б) $y=2\left|1+\frac{1}{x}\right|+\frac{2}{x}-|y+4|$,

и среди точек этого множества найдите все точки, в каждой из которых координата y принимает наименьшее значение.

112. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением:

а) $\left|y-\frac{1}{2}x^2\right|+\left|y+\frac{1}{2}x^2\right|\leqslant 2+x$; б) $|y-2x^2|+|y+2x^2|\leqslant$ $\leqslant 4(x+2)$.

113. Среди тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} y-2x\geqslant 0, \\ -x^2+2ax-a^2+a+1-y\geqslant 0, \end{cases}$ найдите точку с наименьшей ординатой. При каких значениях a эта наименьшая ордината принимает наибольшее значение?

114. Определите значение a так, чтобы сумма квадратов всех решений уравнения $\log_a|x-2a|+\log_a x=2$ равнялась 4.

115. На координатной плоскости проведена прямая, координаты всех точек которой принадлежат множеству пар (x, y), являющихся решением неравенства

$$\log_4 \frac{4^x}{|x+y|}\cdot \log_{|x+y|}\frac{|x+y|^x}{4}\cdot(2x^2-10\cdot 2^{x+y}\cdot x+2xy+y^2-3)\geqslant 0.$$

Найдите уравнение этой прямой.

116. На координатной плоскости (x, y) изобразите все точки, координаты которых (x, y) таковы, что выражение

$$\left(2\cos t+\frac{1}{2}\cos x\cos y\right)\cos x\cos y+1+\cos x-\cos y+\cos 2t$$

положительно при всяком значении t.

117. На координатной плоскости изобразите все точки с координатами (x, y), для которых существует хотя бы одно значение t, при котором значение выражения

$$\sin^2 t\cos^2 x+\cos^2 t\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x\cdot\sin 2t+2(\cos 2x+\cos y)$$

отрицательно.

118. Среди всех решений x, y, a, b системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=3,\\ a^2+b^2=25,\\ xb+ya\geqslant 5\sqrt{3}\end{cases}$$

найдите такие, при которых выражение $x+a$ принимает наибольшее значение.

119. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 4x^2-12xy+9y^2+2x-6y=0,\\ 5x^2-16xy+13y^2-6x+10y+2ax-4ay+a^2-2a-5=0\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

120. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений:

а) $$\begin{cases} \left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}-5\right|-\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}-7\right|+\\ \qquad+\left|24\sqrt{\cos\frac{\pi y}{2}}+13\right|=11-\sqrt{\sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}},\\ 2(x^2+(y-a)^2)-1=2\sqrt{x^2+(y-a)^2-\frac{3}{4}};\end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \left|6\sqrt{\cos\frac{\pi y}{4}}-5\right|-\left|1-6\sqrt{\cos\frac{\pi y}{4}}\right|+\\ \qquad+\left|12\sqrt{\cos\frac{\pi y}{4}}+1\right|=5-\left(\sin\frac{\pi(y-2x)}{12}\right)^2,\\ 10-9(x^2+(y-a)^2)=3\sqrt{x^2+(y-a)^2-\frac{8}{9}}.\end{cases}$$

121. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a+(b^2+1)^y=2,\\ a+bxy+x^2y=1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом b.

122. Найдите все значения a, при которых система:

а) $\begin{cases} (|x|+1)a=y+\cos x,\\ \sin^4 x+y^2=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^{|x|}+|x|=y+x^2+a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

имеет только одно решение.

123. Найдите все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} xyz+z=a,\\ xyz^2+z=b,\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

124. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases}(2a+1)x+2y\geqslant 4a+1,\\ 4x+(3a-4)y\leqslant 3,\\ (2a-3)x+5y\leqslant 4a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

125. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых оба неравенства выполняются при любых x и y:

а) $\begin{cases}2(a-1)^2\sin(x-y)+2a(a-1)^2>(a-1)\cos 2(x-y)+7(a-1),\\ (a^2+1)y^2+a^2x^2+1>2a^2xy+a;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2a(a+1)\sin(x+y)-4(a+1)\cos^2(x+y)+(a+1)^3>13(a+1),\\ x^2+(a^2+1)y^2>2xy+a+1.\end{cases}$

126. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений имеет хотя бы одно решение. При каждом таком значении a найдите все решения:

а) $\begin{cases}2\cos x+a\sin y=1,\\ \log_z \sin y=(\log_z a)\log_a(2-3\cos x),\\ \log_a z+\log_a\left(\dfrac{1}{2a}-1\right)=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}a\cos y+\sin x+1=0,\\ \log_z(-1-4\sin x)=(\log_z a)\log_a(1+2\cos y),\\ \log_a z+\log_a\left(\dfrac{4-a}{a}\right)=0.\end{cases}$

127. Найдите все значения параметра α из интервала $(2; 5)$, при каждом из которых существует хотя бы одно число x из отрезка $[2; 3]$, удовлетворяющее уравнению

$$\log_2(3-|\sin\alpha x|)=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right).$$

128. Найдите все значения параметра α из интервала $(5; 16)$, при каждом из которых существует хотя бы одно число x из отрезка $[1; 2]$, удовлетворяющее уравнению

$$1+\cos^2\left(\frac{\alpha x}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos\pi x-\sin\pi x|}.$$

129. Найдите все значения параметра α $\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=3x^4+4x^3(\cos\alpha-\sin\alpha)-3x^2\sin 2\alpha$ на отрезке $-\sin\alpha\leqslant x\leqslant\cos\alpha$ принимает наименьшее значение.

130. Найдите все значения параметра α $\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x)=x^4-2x^2\sin^2\alpha-2(1+\cos\alpha)^3$ на отрезке $-(1+\cos\alpha)\leqslant x\leqslant 1+\cos\alpha$ принимает наименьшее значение.

131. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения $3(x^2+a^2)=1-(9a^2-2)x$ не превосходит числа решений уравнения

$$x+(3a-2)^2\,3^x=(8^a-4)\log_3\left(3^a-\frac{1}{2}\right)-3x^3.$$

132. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения

$$2x^3+6x=(3^{6a}-9)\sqrt{2^{8a}-\frac{1}{6}}-(3a-1)^2\,12^x$$

не меньше числа решений уравнения $3(5x^2-a^4)-2x=2a^2(6x-1)$.

133. При каждом значении аргумента x среди значений трех функций, каждая из которых является либо линейной функцией, либо квадратным трехчленом, выбирается наибольшее, которое оказывается равным $M(x)=|x^2-2|x||+x^2+2|x|$. Найдите при каждом значении аргумента x наименьшее из значений этих трех функций.

134. Найдите все такие действительные значения параметра a, при которых множество значений x, удовлетворяющих неравенству

$$x^2(x-1)-a|x|(x+2)\leqslant 0,$$

является промежутком числовой оси, конечным или бесконечным, т. е. если неравенство выполняется при $x=x_1$ и $x=x_2$, то оно выполняется и при $x_1\leqslant x\leqslant x_2$.

135. Известно, что график функции $y=f(x)+2g(x)$ представляет собой прямую AB, проходящую через точки $A(-1;3)$ и $B(1;2)$, а график функции $y=3f(x)-g(x)$ является прямой, симметричной AB относительно оси ординат. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$ и постройте их графики.

136. Известно, что система трех линейных неравенств относительно неизвестных x и y равносильна неравенству $2|x-1|+|2+x|-y\leqslant 0$. В каждом из трех неравенств поменяли знак на противоположный. Найдите множество решений новой системы.

137. На координатной плоскости xy кривая (дуга окружности) l задана графиком функции $y=\sqrt{10-x^2}$ на интервале $x\in(-3;1)$. Изобразите множество точек A, для которых кривая l и кривая, симметричная ей относительно точки A, имеют хотя бы одну общую касательную.

138. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют при всех $a\in[-1;2]$ неравенству $y(y+2a)+a^2(x^2+1)\leqslant 4+2ax(y+a)$.

139. Через точку $(3;0)$ координатной плоскости проведены четыре прямые, на этих прямых взято восемь различных точек, произведения абсциссы и ординаты каждой из которых одинаковы и отличны от нуля. Найдите сумму абсцисс этих точек.

140. Графики функций $y=\frac{1}{2x}$ и $y=\frac{17}{3}-2x$, рассматриваемые в I четверти координатной плоскости ($x>0$, $y>0$), пересекаются в точках A и B. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника перпендикулярна оси x, две его вершины лежат на первом графике, а третья — на отрезке AB. Найдите длины сторон треугольника.

141. На координатной плоскости расположен квадрат $ABCD$. Вершины A и B квадрата лежат на графике функции $y=x^2$, а вершины C и D — на графике функции $y=x-4$. Определите длину стороны квадрата.

142. Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств:

а) $\begin{cases} \sqrt{3x^2+3y^2-3} \geqslant 2y+1, \\ y+4 \geqslant 2\sqrt{3}\,|x|; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sqrt{x^4-x^2-y^4+y^2}+x^2 \geqslant y^2, \\ x^2 \leqslant 1. \end{cases}$

143. На координатной плоскости даны две параболы $y=8-3x-2x^2$ и $y=2+9x-2x^2$. Найдите:

1) значения a и b, при которых прямая $y=ax+b$ касается обеих парабол;

2) координаты точек касания.

144. На координатной плоскости даны две прямые $y=-x$ и $y=5x-6$. Найдите:

1) значения a и b, при которых обе данные прямые касаются параболы $y=x^2+ax+b$;

2) координаты точек касания.

145. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений: 1) не имеет решений; 2) имеет конечное множество решений; 3) имеет бесконечное множество решений.

В случаях 2, 3 найдите все решения.

а) $\begin{cases} y\sqrt{1-x^2}-x^2=2a-1, \\ y^2+y\sqrt{1-x^2}=2a-a^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2^x(y+1)(1-y\cdot 2^x)=a^3, \\ (1+2^x)(1-y\cdot 2^x)=a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-x\sqrt{1-y^4}=a^3, \\ x\sqrt{1-y^4}+y^4=a+1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} (1+x\cdot 3^y)(x-1)\cdot 3^y=a^3, \\ (1+x\cdot 3^y)(3^y+1)=-4a. \end{cases}$

146. Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств:

а) $\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 10, \\ 3x^2-4x-32 \leqslant 0, \\ (3x-2y)(3y-x+10) \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 \leqslant 5, \\ x^2+y^2 \geqslant 5, \\ (x+2y+5)(2-y) \geqslant 0. \end{cases}$

147. Вершины B, C, D параллелограмма $ABCD$ имеют соответственно координаты $(-3;\ 2)$, $(2;\ 3)$, $(3;\ -4)$ (BD — диагональ). Найдите:

1) все значения параметра a, для которых координаты вершины A являются решением системы неравенств $\begin{cases} 2x-y-2a \leqslant 0, \\ 2x+6y+5a \leqslant 0; \end{cases}$

2) все значения a, для которых координаты хотя бы одной точки отрезка BD являются решением этой системы.

148. Вершины A, B, C треугольника имеют соответственно координаты $(-2;\ -1)$, $(0;\ 9)$, $(8;\ 1)$. Найдите:

1) все значения a, для которых координаты точки пересечения медиан треугольника ABC являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2x-y+a\leqslant 0, \\ 6x+3y+5a\geqslant 0; \end{cases}$$

2) все значения, для которых координаты хотя бы одной точки отрезка BC являются решением этой системы.

149. На координатной плоскости рассматривается множество M всех точек, координаты $(a,\ b)$ которых удовлетворяют условиям $0<a<3$, $0<b<22$ и таковы, что уравнение $(b-11a)x^4+$ $+(b-4a)x^2+a-b=0$ имеет четыре различных корня. Найдите площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество M.

150. На координатной плоскости рассматривается множество N всех точек, координаты $(a,\ b)$ которых удовлетворяют условиям $a<b$, $|a|<3$, $|b|<3$ и таковы, что уравнение $(a^3-b^3)x^4+$ $+(3a+b)x^2+\frac{1}{a-b}=0$ не имеет корней. Найдите площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество N.

151. Множество M состоит из точек $(a,\ b)$ координатной плоскости, для которых уравнение

$$(2a+21b+63)x^4+(3b-4a+9)x^2+|b^2-4|+b^2-4=0$$

имеет ровно одно решение. Докажите, что в многоугольник, которым является множество M, можно вписать окружность, и найдите координаты центра этой окружности.

152. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение:

а) $\left(a-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}\right)\sqrt{8-ax}=0$ имеет на отрезке $[-2;\ 3]$ нечетное число различных корней;

б) $\left(a-3x^2+\cos\frac{9\pi x}{2}\right)\sqrt{3-ax}=0$ имеет на отрезке $[-1;\ 5]$ нечетное число различных корней.

153. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left((2x+a)\sqrt{22a-4a^2-24}-2(x^2+x)\lg a\right)\lg\left(\frac{36a-9a^2}{35}\right)=0$

имеет по крайней мере два корня, один из которых неотрицателен, а другой не превосходит -1.

154. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left((4x-a)\sqrt{11a-a^2-18}+(x^2-x)\lg(3a-1)\right)\lg\left(\frac{36a-4a^2}{65}\right)=0$ имеет по крайней мере два корня, один из которых неположителен, а другой больше либо равен 1.

155. Из трех значений a: $-1{,}2$; $-0{,}67$; $-0{,}66$ — найдите те значения, при которых уравнение

$$(2^{a+4}+15(x+a))\left(1+2\cos\left(\pi\left(a+\frac{x}{2}\right)\right)\right)=0$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0\leqslant x\leqslant 1$.

156. Найдите все пары значений a и b, для которых система

$$\begin{cases} x^2-y^2+a(x+y)=x-y+a, \\ x^2+y^2+bxy-1=0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x; y)$.

157. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого значения b система:

а) $\begin{cases} bx-y-az^2=0, \\ (b-6)x+2by-4z=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-by+az^2=0, \\ 2bx+(b-6)y-8z=8 \end{cases}$

имеет по крайней мере одно решение (x, y, z).

158. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} \sin x\cdot\sin y=\frac{1}{z^2}, \\ \cos x\cdot\cos y=-\frac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}, \\ \sin(x-y)=\frac{2(x+y)}{(a-\pi)z}, \end{cases}$$

где $z>0$, $0<y<\frac{\pi}{2}$, имеет ровно одно решение.

159. Докажите, что

$$\frac{\log_3 4}{\log_3 5}\cdot\frac{\log_3 6}{\log_3 7}\cdot\ldots\cdot\frac{\log_3 80}{\log_3 81}>\frac{1}{2}.$$

160. Сколько цифр в числе 5^{300}?

161. Докажите, что для любых a и b найдется такое значение x $(0\leqslant x\leqslant\pi)$, что $|\sin x-ax-b|\geqslant\frac{1}{2}$.

162. Докажите, что при любых a и b $(b\neq 0)$ система

$$\begin{cases} x^2-y^2+ax-by=0, \\ 2xy+bx+ay+1=0 \end{cases}$$

имеет два различных решения: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Найдите значение выражения $x_1x_2-y_1y_2$.

163. Найдите координаты всевозможных рациональных точек (т. е. точек, обе координаты которых рациональны), расположенных на линии $2x^2+y^2=1$.

§ 5. ПЛАНИМЕТРИЯ

26. Геометрические места точек

Геометрическое место точек — это совокупность (множество) точек, каждая из которых обладает определенным геометрическим свойством по отношению к заданной геометрической фигуре.

Мы хорошо знакомы с такими геометрическими местами точек, как биссектриса угла (фигура — угол, характерное свойство точек — равноудаленность от сторон угла), серединный перпендикуляр к отрезку. Рассмотрим еще несколько геометрических мест, часто встречающихся при решении различных задач.

1. *Построить геометрическое место точек M, из которых данный отрезок AB виден под заданным углом α ($\angle AMB=\alpha$).*

Это геометрическое место состоит из двух равных дуг окружностей, симметричных относительно прямой AB (рис. 18). Для его построения достаточно построить одну точку M_0, для которой $\angle AM_0B=\alpha$, затем построить описанную около $\triangle AM_0B$ окружность, от которой оставить дугу AB, содержащую точку M_0, а затем построить дугу, ей симметричную.

2. *Доказать, что геометрическим местом точек M, таких, что AM^2-MB^2 есть величина постоянная, где A и B — фиксированные точки, является прямая, перпендикулярная AB.*

Доказательство. Пусть D — проекция M на AB (рис. 19). По теореме Пифагора $AM^2-AD^2=MD^2=MB^2-BD^2$. Следовательно, $AM^2-MB^2=AD^2-DB^2$, т. е. все точки M, принадлежащие рассматриваемому геометрическому месту, проекти-

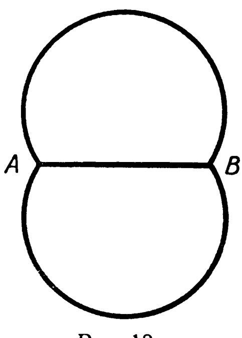


Рис. 18

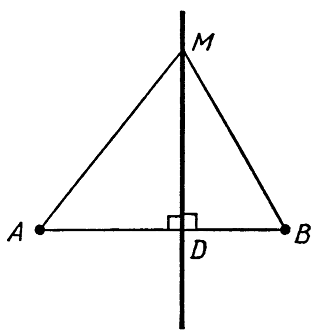


Рис. 19

руются в одну и ту же точку D на прямой AB. Легко видеть, что все точки прямой, проходящей через D и перпендикулярной AB, входят в наше геометрическое место.

Замечание. На основании только что доказанного утверждения можно сформулировать весьма полезное условие перпендикулярности двух прямых (действующее не только на плоскости, но и в пространстве). Для того чтобы прямые AB и CD были перпендикулярны, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$AC^2-BC^2=AD^2-BD^2 \text{ (или } AC^2+BD^2=BC^2+AD^2\text{)}.$$

3. *Доказать, что геометрическим местом точек M, таких, что $\frac{AM}{MB}$ есть величина постоянная (A и B — фиксированные точки), является окружность с центром на прямой AB.* (Эта окружность называется окружностью Аполлония.)

Доказательство. Пусть M — одна из точек нашего множества. В треугольнике AMB проведем биссектрисы внутреннего и внешнего угла при вершине M: ME и MF (рис. 20). Тогда $\angle EMF=90°$. Точки E и F постоянны для всех точек нашего множества, поскольку $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{BF}=\frac{AM}{MB}$ (X, § 7, № 19). Следовательно, точки нашего геометрического места принадлежат окружности, построенной на EF как на диаметре.

Наше доказательство будет неполным, если мы не обоснуем, что любая точка окружности с диаметром EF обладает нужным нам свойством.

Пусть $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{BF}=\lambda$ ($\lambda>1$). Возьмем произвольную точку M на окружности с диаметром EF. Предположим, что $\frac{AM}{MB}\neq\lambda$. Пусть для определенности $\frac{AM}{MB}>\lambda$. Тогда биссектриса угла AMB должна пересечь отрезок EB, биссектриса угла, смежного с AMB, пересечет отрезок BF, т. е. угол между этими биссектрисами будет острым. Противоречие.

Следует запомнить, что любая задача на определение геометрического места точек состоит из двух частей: прямого утверждения (все точки, имеющие заданное свойство, принадлежат некоторой линии или области на плоскости) и обратного утверждения (любая точка найденной линии, области имеет заданное свойство). В некоторых случаях обратное утверждение достаточно очевидно, а его доказательство сводится к псевдологической схоластике, не имеющей отношения к геометрии. Поэтому без большого ущерба его можно опустить, как это имело место при доказательстве утверждения 2. В других случаях эта «очевидность» нуждается в обосновании, которое не всегда является тривиальным, как в теореме 3. При этом обычный метод доказательства обратного утверждения — рассуждение от противного.

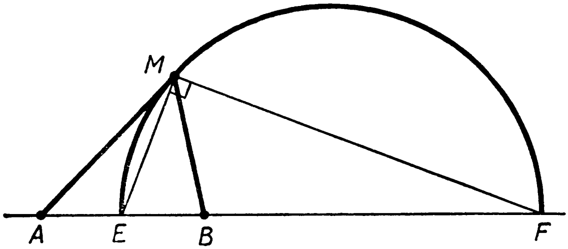


Рис. 20

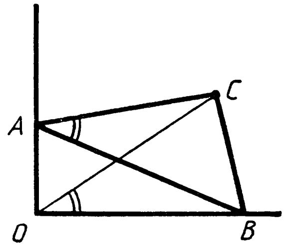


Рис. 21

В умении различать эти ситуации, кстати, и проявляется и геометрическая и логическая культура. Кроме того, не всегда линия, выявленная в первой части (прямое рассуждение), целиком входит в геометрическое место точек. Например:

4. *Какую линию описывает вершина C прямоугольного треугольника ABC, вершины острых углов которого (A и B) движутся по сторонам прямого угла?*

Решение. Пусть O — вершина прямого угла (рис. 21). Точки O, A, B и C лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle COB = \angle CAB$, т. е. вершина C перемещается по прямой линии, вернее, по лучу, выходящему из O. Ясно, однако, что не все точки этого луча принадлежат искомому геометрическому месту. Оно состоит из точек отрезка C_1C_2, где $OC_1 = CB$ (CB — наименьший катет), $OC_2 = AB$ ($OC \leqslant AB$, AB — диаметр окружности). Точку C_1 мы получаем, когда B совпадает с O, точку C_2 — когда $OACB$ — прямоугольник.

Замечание. Очень удобен и естествен при решении задач на определение геометрических мест точек метод координат. В частности, очень легко с его помощью доказываются теоремы 2 и 3. Более того, результат этих теорем легко обобщается. А именно:

5. *Доказать следующее утверждение: пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные точки плоскости, $k_1, k_2, \ldots, k_n, m$ — заданные константы M — множество точек, для которых*

$$k_1A_1M^2 + k_2A_2M^2 + \ldots + k_nA_nM^2 = m.$$

Это множество представляет собой:

а) *окружность, точку или пустое множество, если*

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n \neq 0;$$

б) *прямую, всю плоскость или пустое множество, если*

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 0.$$

(При $n=2$, $k_2 = -k_1$ получаем утверждение 2. При $n=2$, $m=0$, $k_1 + k_2 \neq 0$, $k_1k_2 < 0$ получаем утверждение 3.)

Доказательство теоремы 5 легко осуществить методом координат. Пусть в прямоугольной системе точка A_i имеет координаты (x_i, y_i), а M — (x, y). Поскольку $A_iM^2 = (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2$, то выражение, данное в условии, можно преобразовать к виду

$$k(x^2+y^2)-2ax-2by+c=0,$$

где $k=k_1+k_2+...+k_n$, $a=k_1x_1+k_2x_2+...+k_nx_n$, $b=k_1y_1+$ $+k_2y_2+...+k_ny_n$, $c=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2+y_1^2+y_2^2+...+y_n^2-m$.

Проделав все выкладки в обратном порядке, убедимся, что любая точка M, координаты которой удовлетворяют полученному уравнению, принадлежит нашему геометрическому месту точек. Теперь понятна справедливость нашего утверждения. (Выражение $k(x^2+y^2)-2ax-2by+c=0$, выделяя полный квадрат по x и y, преобразуем к виду $\left(x-\frac{a}{k}\right)^2+\left(y-\frac{b}{k}\right)^2+d=0$, где $d=\frac{c}{k}-$ $-\frac{a^2+b^2}{k^2}$. Последнее, если $d<0$, есть уравнение окружности с центром $O\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right)$ и радиусом $R=\sqrt{-d}$.)

Замечание. Рассмотренный метод ввиду своей чрезмерной формальности, не «привязывает» геометрически полученную линию (прямую или окружность) к заданным точкам. Чтобы ответить на различные вопросы, связанные с расположением этой линии относительно заданной конфигурации, требуются дополнительные, не всегда простые (особенно при $n\geqslant 3$) исследования.

В дополнение к теоремам 2 и 3 полезно запомнить, что геометрическим местом точек M, таких, что AM^2+BM^2 есть константа, является окружность с центром в середине AB. (Докажите.)

27. Задачи на построение

Задачи на построение, возможно, древнейшие геометрические (и даже математические) задачи. Сегодня этот тип задач выглядит несколько архаично, надуманно, поскольку многие методы, используемые при решении геометрических задач на построение, носят характер своеобразных геометрических изысков, обслуживающих лишь эту категорию задач, а сами правила построения ограничены массой всевозможных условностей.

Одна из условностей — все построения должны осуществляться при помощи двух чертежных инструментов: линейки и циркуля. При помощи линейки мы можем через две точки провести прямую (и все), при помощи циркуля построить окружность с заданным центром и радиусом (радиус задается отрезком, вернее, двумя точками — концами отрезка).

Построение отрезка по формуле. Алгебраический метод решения задач на построение

Пусть a, b, c — заданные отрезки. Известные школьные теоремы (теорема Пифагора, теорема Фалеса) дают возможность построения отрезков, задаваемых формулами

$$x=\sqrt{a^2\pm b^2},\ x=\sqrt{ab},\ x=\frac{ab}{c}$$

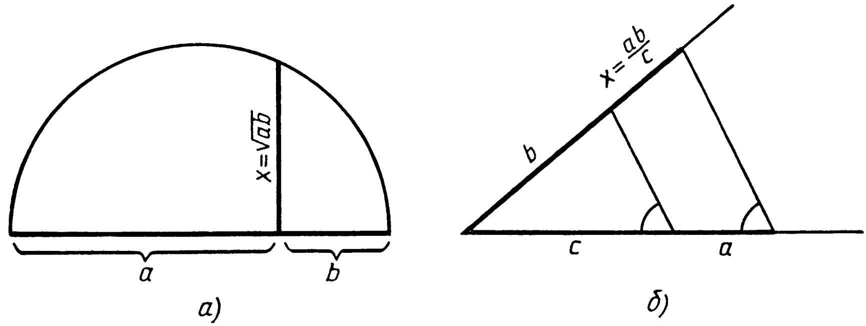


Рис. 22

(рис. 22 иллюстрирует два последних построения). Кроме того, мы, конечно, можем строить суммы и разности данных отрезков. Заметим также, что можно не выделять отдельно формулу $x=\sqrt{ab}$, поскольку $\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}$, т. е. искомый отрезок есть второй катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $\frac{a+b}{2}$ и катетом $\frac{|a-b|}{2}$.

Если неизвестный отрезок x связан некоторой формулой с известными отрезками (при этом рассматриваются лишь «правильные по размерности» формулы, иначе говоря, запрещаются выражения вида $a+bc$, формулы $x=a^2$, $x=\sqrt{a}$ и т. п.), то или построение этого отрезка x сводится к одному или нескольким последовательным вышеперечисленным построениям, или построение отрезка x при помощи циркуля и линейки невозможно. Так, например, нельзя построить отрезок $x=\sqrt[3]{a^3+b^3}$.

6. *Пусть a, b, c, ... — данные отрезки. Построить отрезок x по формулам:*

а) $x=\frac{abc}{de}$; б) $x=\sqrt[4]{a^4+b^4}$; в) $\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}+\ldots+\sqrt[4]{e}$.

Решение. а) Строим сначала $y=\frac{bc}{e}$, а затем $x=\frac{ay}{d}$.

б) Построим $y=\frac{b^2}{a}$, затем $z=\sqrt{a^2+y^2}$. Потом построим x, поскольку $x=\sqrt[4]{a^2\left(a^2+\frac{b^4}{a^2}\right)}=\sqrt[4]{a^2(a^2+y^2)}=\sqrt[4]{a^2z^2}=\sqrt{az}$.

в) Пусть m — произвольный отрезок. Данное равенство эквивалентно равенству $\sqrt[4]{xm^3}=\sqrt[4]{am^3}+\sqrt[4]{bm^3}+\ldots+\sqrt[4]{em^3}$. Построим отрезки $y=\sqrt[4]{am^3}$, $z=\sqrt[4]{bm^3}$, ..., $u=\sqrt[4]{em^3}$. Это можно сделать, поскольку $y=\sqrt{m\sqrt{am}}$. Строим $t=\sqrt{am}$, а затем $y=\sqrt{mt}$. Далее построим сумму $w=y+z+\ldots+u$. Окончательно получаем $x=\frac{w^4}{m^3}$, где w и m — известные отрезки. Теперь последовательно строим $s=\frac{w^2}{m}$, а затем $x=\frac{s^2}{m}$.

Алгебраический метод решения задач на построение заключается в том, что в искомой конфигурации выделяется ключевой элемент — отрезок (отрезки), угол, отношение отрезков и т. д. Затем этот ключевой элемент выражается через известные, в результате чего построение сводится к построению по формуле. Приведем два примера.

7. *Построить треугольник по стороне a, опущенной на нее высоте h и сумме двух других сторон s.*

Решение. Пусть в треугольнике ABC высота AD делит BC на отрезки $\frac{a}{2}+x$ и $\frac{a}{2}-x$. Получаем уравнение

$$\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2}+\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}=s.$$

Уединяем корень и возводим обе части в квадрат:

$$2s\sqrt{h^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}=s^2-2ax.$$

Еще раз возводим в квадрат, находим $x=\frac{s\sqrt{s^2-a^2-4h^2}}{2\sqrt{s^2-a^2}}$. Теперь понятна последовательность построений: строим $y=\sqrt{s^2-a^2}$, затем $z=\sqrt{y^2-4h^2}$, окончательно $x=\frac{sz}{2y}$.

8. *В данный сектор вписать прямоугольник с заданной диагональю.*

Решение. Возможны два случая, изображенные на рисунке 23. Начнем с первого. Пусть в прямоугольнике $ABCD$ $AB=x$, $AD=y$, d — диагональ, R — радиус сектора. Обозначим $\operatorname{ctg}\alpha=k$, k известно и может быть задано отношением отрезков. Тогда $AO=kx$, $OD=kx+y$, и по теореме Пифагора для треугольника ODC получим $(kx+y)^2+x^2=R^2$. Второе уравнение: $x^2+y^2=d^2$. Имеем систему $\begin{cases}(k^2+1)\,x^2+2kxy+y^2=R^2,\\ x^2+y^2=d^2.\end{cases}$

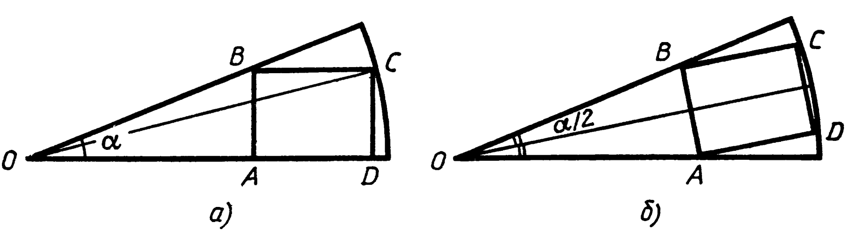


Рис. 23

С подобными системами мы уже встречались (X, § 2). Умножая уравнения соответственно на d^2 и R^2 и вычитая, получаем однородное уравнение

$$((k^2+1)\,d^2-R^2)\,x^2+2kd^2xy+(d^2-R^2)\,y^2=0.$$

Из этого уравнения найдем $\frac{x}{y}$, затем из системы определим x и y.

Во втором случае вместо первого уравнения будет

$$\frac{1}{4}(m^2+1)\,x^2+mxy+y^2=R^2,\text{ где } m=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Мы не будем здесь полностью решать задачу, а также заниматься исследованием числа решений в зависимости от параметров α, R и d (оно меняется от 0 до 4). Например, если $\alpha=60°$, $R=1$, $d=\sqrt{\frac{2}{3}}$, число различных прямоугольников равно 4. Можно сказать, что сам процесс построения в каждом конкретном случае даст ответ на этот вопрос.

Алгебраический метод решения задач на построение привлекателен своей алгоритмичностью и универсальностью. Формально любая разрешимая задача на построение может быть решена алгебраическим методом, при этом сам процесс решения по своей сути не отличается от решения обычной задачи на вычисление. Более того, необходимость самостоятельно определить вычисляемый элемент, а в конце составить схему построения этого элемента раздвигает рамки задачи.

Несмотря на то что эстетически геометрические методы выглядят гораздо привлекательнее алгебраических, а поиск чисто геометрического решения иногда становится самоцелью, мы все же считаем, что простое и естественное вычислительное решение предпочтительнее хитроумного и надуманного геометрического.

Метод геометрических мест точек

По своей универсальности метод геометрических мест, пожалуй, не уступает алгебраическому. Более того, практически в решении любой задачи на построение в той или иной мере присутствуют элементы метода геометрических мест.

Основная идея метода — точка есть пересечение двух линий (геометрических мест). Конечно, такое разъяснение выглядит несколько наивно, но оно достаточно точно отражает суть метода. Простейшая иллюстрация — построение треугольника по трем сторонам. Искомая вершина треугольника определяется как точка пересечения двух окружностей. (Вспомните также, как доказывается существование и находится центр описанной окружности, центр вписанной окружности.) Другой известный пример:

9. *Через данную точку A, расположенную вне данной окружности, провести прямую, касающуюся окружности.*

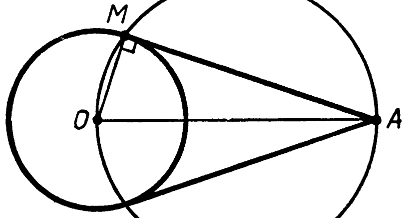


Рис. 24

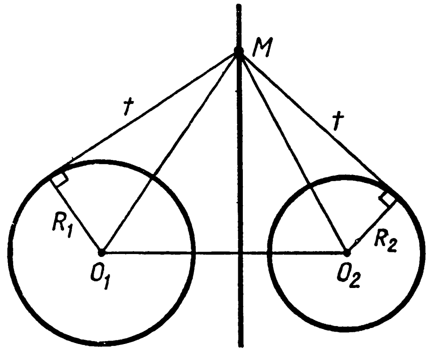


Рис. 25

Р е ш е н и е. Пусть O — центр окружности, M — точка касания. Поскольку $\angle OMA = 90°$, то M принадлежит геометрическому месту точек, из которых данный отрезок OA виден под углом 90°, т. е. M лежит на окружности с диаметром OA (рис. 24).

10. *Даны три окружности. Построить точку, касательные из которой ко всем трем окружностям равны между собой.*

Р е ш е н и е. Рассмотрим две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2. Найдем геометрическое место точек M, таких, что касательные из M к окружности с центрами O_1 и O_2 равны.

Пусть длины касательных будут t. Тогда $MO_1^2 = R_1^2 + t^2$, $MO_2^2 = R_2^2 + t^2$. Следовательно, $MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$. Теперь на основании теоремы 2 можем утверждать, что искомое геометрическое место точек расположено на прямой, перпендикулярной отрезку O_1O_2 (рис. 25).

Если эти окружности не пересекаются, то подходят все точки этой прямой. (Докажите.)

Если окружности пересекаются, то найденная прямая проходит через точки пересечения, а геометрическое место точек состоит из двух лучей этой прямой, исключается общая хорда. (Прямая, состоящая из точек M, для которых $MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$, называется радикальной осью двух окружностей.)

Теперь понятно решение задачи 10. Надо построить радикальные оси окружностей первой и второй, первой и третьей. Точка пересечения этих прямых (если она существует и расположена вне окружностей) и есть искомая точка. (Докажите. Сравните данное построение с построением центра описанной окружности около треугольника и с построением центра вписанной окружности.)

Метод подобия

Рассмотрим три задачи, иллюстрирующие основные модификации метода подобия.

11. *Построить треугольник по двум углам и сумме радиусов вписанной и описанной окружностей.*

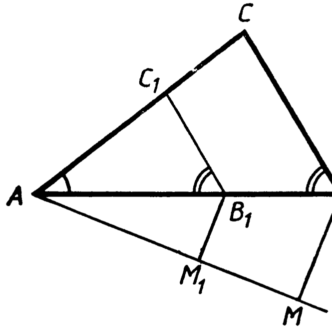


Рис. 26

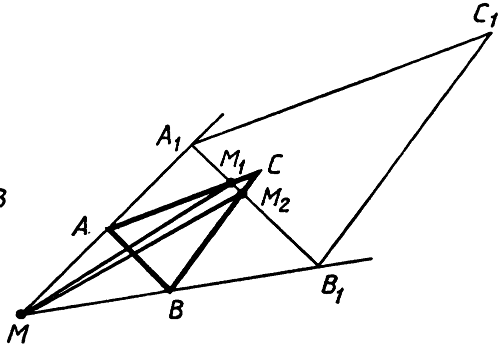


Рис. 27

Решение. Ключевым условием, определяющим метод решения, является задание двух углов. Построим произвольный треугольник, два угла которого имеют заданную величину (рис. 26, треугольник AB_1C_1). Этот треугольник подобен искомому. Находим в нем нужный линейный элемент l_1 (в нашем случае $l_1 = r_1 + R_1$ — сумма радиусов вписанной и описанной окружностей). Проводим через A произвольный луч, откладываем на этом луче отрезки $AM_1 = l_1$ и $AM = l$ (l — данный отрезок, в нашем случае $l = r + R$), соединяем M_1 с B_1, проводим через M прямую, параллельную M_1B_1, находим точку B, а затем точку C ($BC \parallel B_1C_1$). Треугольник ABC искомый.

12. *Дан треугольник ABC и точка M вне его. Провести через M прямую так, чтобы отрезок внутри треугольника равнялся отрезку от точки M до пересечения с границей треугольника.*

Решение. Построим треугольник $A_1B_1C_1$, гомотетичный треугольнику ABC с коэффициентом 2 относительно точки M (рис. 27), т. е. на лучах MA, MB и MC построим точки A_1, B_1 и C_1 так, что $MA_1 = 2MA$, $MB_1 = 2MB$, $MC_1 = 2MC$. Найдем точки пересечения границ треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (точки M_1 и M_2 на рис. 27). Прямые MM_1 и MM_2 являются искомыми.

Замечание. Вместо треугольника можно взять любую фигуру, граница которой состоит из отрезков прямых и дуг окружностей.

13. *В данный сектор вписать квадрат.*

Решение. Возможны два случая расположения вершин квадрата на границе сектора (см. задачу 8). Решим задачу для одного случая. Возьмем на одном радиусе границы сектора точку K, проведем перпендикуляр KL к другому радиусу и достроим до квадрата $KLMN$ (рис. 28). Проведем луч ON и найдем N_1 — точку пересечения этого луча с дугой сектора.

N_1 — вершина искомого квадрата ($K_1L_1M_1N_1$).

Самостоятельно рассмотрите второй вариант: две вершины квадрата расположены на дуге сектора.

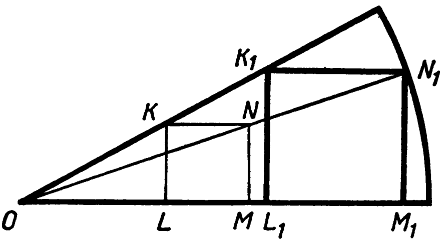


Рис. 28

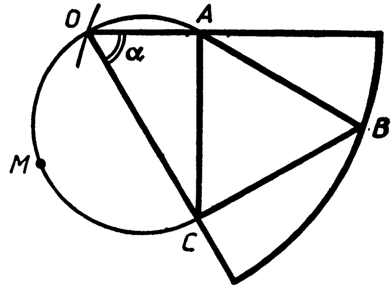


Рис. 29

Метод обратности

Суть этого метода (приема) хорошо иллюстрирует следующая задача:

14. *В данный сектор вписать правильный треугольник, сторона которого задана.*

Р е ш е н и е. Вместо того чтобы в данный сектор вписывать треугольник, равный данному, поступим наоборот — около данного треугольника опишем сектор, равный заданному. Построение достаточно очевидно. Рассмотрим правильный треугольник ABC с заданной стороной (рис. 29). Построим на стороне AC во внешнюю сторону по отношению к треугольнику дугу окружности, такую, что углы, соответствующие этой дуге, равнялись бы углу данного сектора ($\angle AMC = \alpha$, где M — точка на дуге). Затем построим окружность с центром в точке B и радиусом, равным радиусу данного сектора. Пусть O — одна из точек пересечения построенных дуги и окружности. Взяв O в качестве центра сектора, описанного около треугольника ABC, легко построим этот сектор.

Замечание. Как видим, построение описанного сектора осуществлялось при помощи метода геометрических мест (см. п. 26).

Метод симметрии и спрямления

Классическим примером, иллюстрирующим метод симметрии, является следующая задача:

15. *Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на l точку M, такую, что сумма $AM+MB$ принимает наименьшее значение.*

Р е ш е н и е. Пусть B_1 — точка, симметричная B относительно l, M — точка пересечения AB_1 с l (рис. 30). Докажем, что M — искомая точка. Возьмем точку M_1, отличную от M. Имеем:

$$AM_1 + M_1B = AM_1 + M_1B_1 > AB_1 = AM + MB_1 = AM + MB.$$

Следует запомнить такую рекомендацию: если в условии задачи дана сумма или разность отрезков, то в процессе анализа, поиска решения необходимо составить на чертеже из этих отрезков сумму или разность.

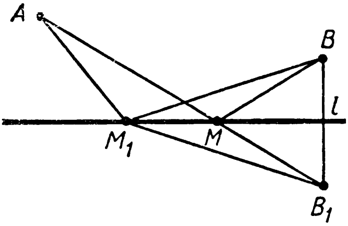


Рис. 30

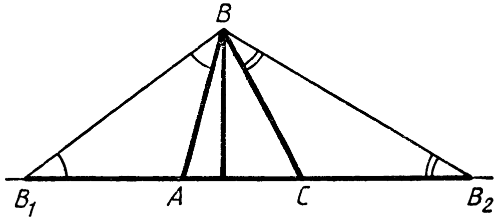


Рис. 31

16. *Построить треугольник по углу α, выходящей из этого угла высоте h и периметру $2p$.*

Решение. Пусть ABC — искомый треугольник (рис. 31). Задан угол B. Отложим на прямой AC отрезки $AB_1 = AB$, $CB_2 = CB$ таким образом, чтобы B_1B_2 равнялся периметру этого треугольника. $\angle B_1BA = \angle BB_1A = \frac{1}{2}\angle BAC$, $\angle CBB_2 = \frac{1}{2}\angle BCA$.

Значит, $\angle B_1BB_2 = \frac{1}{2}(\angle BCA + \angle BAC) + \angle ABC =$

$= \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) + \angle ABC = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Теперь понятно построение: строим отрезок $B_1B_2 = 2p$. Точка B определяется двумя геометрическими местами: расстояние от B до B_1B_2 равно h; $\angle B_1BB_2 = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Построив треугольник B_1BB_2, найдем точки A и C как пересечение срединных перпендикуляров соответственно к B_1B и B_2B с прямой B_1B_2.

Параллельный перенос

17. *Даны две окружности и прямая l. Провести прямую, параллельную l, высекающую на данных окружностях равные хорды.*

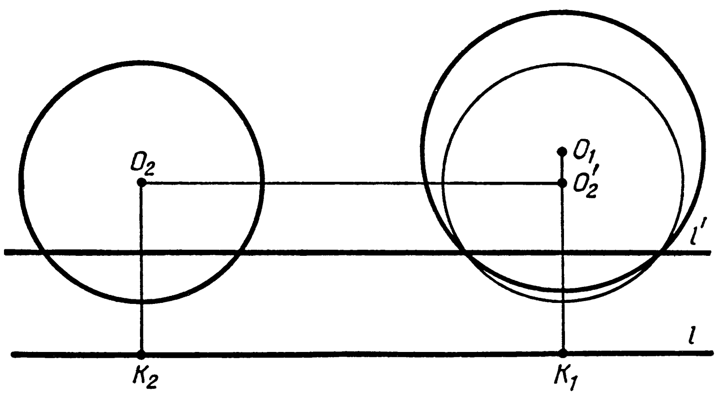


Рис. 32

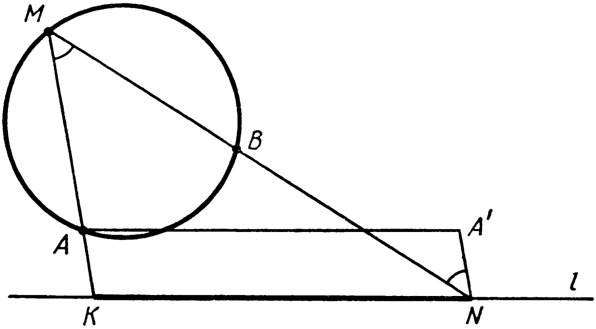


Рис. 33

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, а прямая l', параллельная l, высекает на них равные хорды (рис. 32). K_1 и K_2 — проекции O_1 и O_2 на l. Сделаем параллельный перенос второй окружности на вектор $\overrightarrow{K_2K_1}$. Ее центр перейдет в точку O_2', расположенную на прямой O_1K_1, а высекаемые хорды на прямой l' совпадут.

Из этого следует построение. Находим точку O_2' (она является точкой пересечения прямой O_1K_1 и прямой, проходящей через O_2 параллельно l); строим окружность с центром O_2', равную окружности с центром O_2; через точки пересечения окружностей O_1 и O_2' проводим прямую. Эта прямая и является искомой.

18. *Дана окружность и прямая l. На окружности даны две точки A и B. Найти на окружности такую точку M, чтобы прямые MA и MB пересекали l в точках K и N таким образом, что $KN=a$, где a — заданный отрезок.*

Решение. Построим точку A' (рис. 33) так, что $NKAA'$ — параллелограмм (A' получается из A при помощи известного параллельного переноса). Поскольку $\angle BNA' = \angle BMA$, а последний известен, то точка N находится как пересечение l с соответствующим геометрическим местом точек. Следует также рассмотреть случай расположения точки M на другой дуге AB.

Поворот

Типичной задачей, иллюстрирующей метод поворота (вращения), является следующая:

19. *Дана точка A, прямая l и окружность ω. Найти на прямой l и окружности ω по точке B и C, такие, чтобы треугольник ABC был правильным.*

Решение. Рассмотрим вращение вокруг точки A на $60°$. При соответствующем выборе направления это вращение переводит точку B в точку C (рис. 34). Построения сводятся к построению прямой l', получающейся из прямой l поворотом на $60°$ вокруг точки A. Точка пересечения l' и ω определит вершину C.

Понятно, что число решений задачи может меняться от 0 до 4. (Два направления для вращения и в каждом случае получающая-

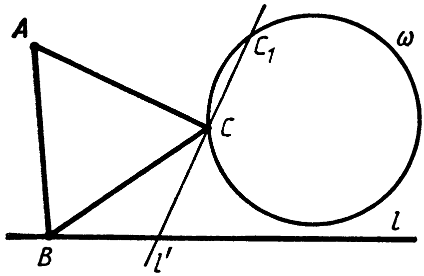


Рис. 34

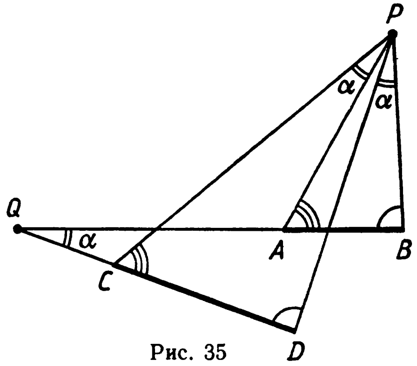


Рис. 35

ся прямая может иметь 0, 1 или 2 точки пересечения с окружностью ω. На рисунке 34 решений 2. При другом направлении вращения прямая не пересечет окружность.)

Нередки случаи, когда для определения центра поворота необходимо сделать дополнительные построения. Кроме того, преобразование вращения может сопровождаться также гомотетией (поворотная гомотетия). Справедливо утверждение:

Для любых двух отрезков AB и CD существует такая точка P, что поворот на соответствующий угол α вокруг P и последующая гомотетия с центром в P и коэффициентом $k=\frac{CD}{AB}$ переводят A в C, B в D.

В частных случаях это преобразование может представлять собой один поворот, одну гомотетию и вырождаться в параллельный перенос.

Доказательство. Обозначим через Q точку пересечения прямых AB и CD (рис. 35). Опишем около треугольников ACQ и BDQ окружности. Обозначим через P вторую точку пересечения этих окружностей. Треугольники PAB и PCD подобны. (Одинаково отмеченные на рисунке углы равны по свойству вписанных углов.) Поворот на угол $\alpha=\angle AQC$ по часовой стрелке и последующая гомотетия переводят AB в CD. (Рассмотрите самостоятельно другие случаи взаимного расположения отрезков AB и CD. Как найти точку P, если A совпадает с Q?)

Рассмотрим следующую задачу:

20. *Даны две окружности. На одной отмечена точка A, а на другой — точка B. Найти на этих окружностях точки M и N так, что центральные углы, соответствующие дугам AM и BN, равны (дуги измеряются в одном направлении), а длина MN равна заданной величине.*

Решение. Найдем точку P, являющуюся центром поворотной гомотетии (рис. 36), переводящей O_1A в O_2B (O_1 и O_2 — центры окружностей). Это преобразование очевидным образом переводит M в N. Треугольник MPN подобен треугольнику O_1PO_2, MN известно. Можем построить треугольник, равный треугольнику MPN, а затем найти положение точек M и N.

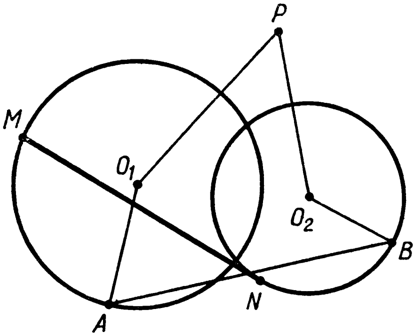


Рис. 36

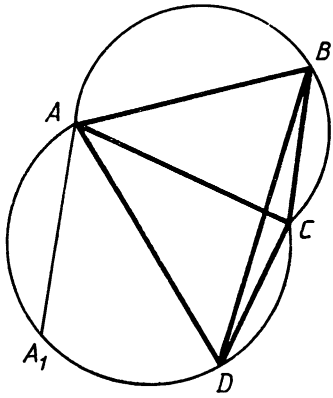


Рис. 37

К задаче 20 сводится решение следующей задачи:

21. *Построить четырехугольник по диагоналям и углам.*

Решение. Пусть отрезок AC равен одной из диагоналей. Построим дуги, соответствующие заданным углам B и D (рис. 37). На этих дугах нам надо найти точки B и D так, чтобы расстояние BD равнялось длине второй диагонали, а $\angle BAD$ был равен заданной величине. Найдем точку A_1 на дуге CDA так, что $\angle CAA_1 = \angle BAD$ (точку A_1 можно найти). Тогда $\angle DAA_1 = \angle BAC$ и задача сводится к предыдущей. Точки C и A_1 заданы на окружностях.

Еще несколько задач

В предыдущих параграфах мы проиллюстрировали основные методы решения задач на построение. При этом мы совсем не стремились ни к созданию какой-либо теории, ни к большой полноте этого обзора. Рассмотрим еще три задачи, методы решения которых трудно классифицировать. Можно сказать, что в них используется метод вспомогательной фигуры (а именно окружности). Можно также сказать, что методы решения этих задач основываются на вспомогательных теоремах.

22. *Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.*

Решение. Проведем через данные точки A и B произвольную окружность, пересекающую данную в точках C и D (рис. 38). Обозначим через M точку пересечения прямых AB и CD. Проведем через M касательные к данной окружности MK и ML. Оказывается, что окружность, проходящая через точки A, B и K (а также через A, B и L), касается данной.

В самом деле, если окружность, описанная около ABK, пересекает данную окружность, то она пересекает также и прямую MK в точке K_1, отличной от K. Но $MK^2 = MC \cdot MD = MB \cdot MA = MK \cdot MK_1$. Противоречие.

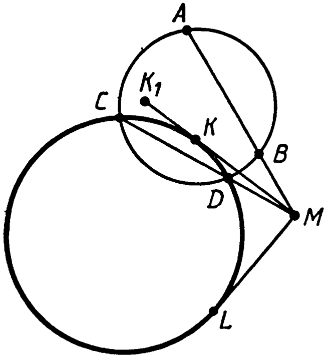


Рис. 38

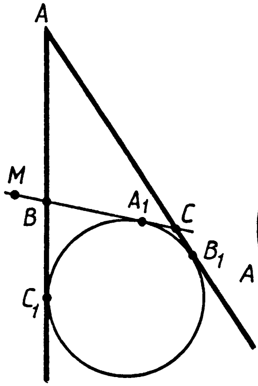


Рис. 39

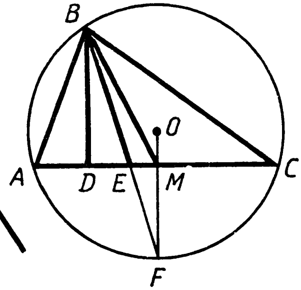


Рис. 40

23. *Дан угол с вершиной A и точка M. Провести через M прямую, пересекающую стороны угла в точках B и C, так, чтобы периметр треугольника ABC равнялся данной величине.*

Р е ш е н и е. Рассмотрим окружность, касающуюся отрезка BC и продолжений AB и AC (вневписанная окружность треугольника ABC, рис. 39, A_1, B_1,C_1 — точки касания).

Имеем:

$$AB_1=AC_1=\frac{1}{2}(AB_1+AC_1)=\frac{1}{2}(AC+CB_1+AB+BC_1)=$$

$$=\frac{1}{2}(AC+CA_1+AB+BA_1)=\frac{1}{2}(AC+CB+BA)=p,$$

где p — полупериметр треугольника ABC.

Теперь понятно построение искомого треугольника: находим точки B_1 и C_1, строим окружность, проводим к ней касательную.

24. *Построить треугольник по высоте, медиане и биссектрисе, выходящим из одной вершины.*

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник ABC. Проведем из вершины B высоту BD, медиану BM и биссектрису BE (рис. 40). Продолжим BE до пересечения с описанной около ABC окружностью в точке F. F — середина дуги AC, FM перпендикулярна AC и проходит через O — центр описанной окружности.

Получаем следующее построение. Проводим прямую. В произвольной точке D восставляем перпендикуляр, на котором откладываем отрезок BD, равный высоте. Находим точки E и M. BE равен длине биссектрисы, BM — длине медианы.

E лежит между D и M. (Почему?) Восставляем к исходной прямой перпендикуляр в точке M и находим его пересечение с прямой BE — точку F. Точка O — центр описанной окружности — находится на пересечении MF и серединного перпендикуляра к BF. После чего находим точки A и C.

Построения одной линейкой

Обычно рассматриваются построения одной линейкой при условии, что на плоскости имеется изображение какой-либо фигуры: два параллельных отрезка, параллелограмм, квадрат, окружность. (Здесь стоит заметить, что если на плоскости задана окружность с центром, то все построения, осуществляемые циркулем и линейкой, могут быть сделаны одной линейкой.)

25. *На плоскости задана пара параллельных прямых. При помощи одной линейки через данную точку провести прямую, параллельную данным.*

Решение. Построение основывается на следующем утверждении: прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, делит каждое из оснований трапеции пополам (X, § 7, № 7 вводной части).

Последовательность проведения прямых указана на рисунке 41. (Первая и вторая прямые проводятся произвольно через заданную точку A, l и m — данные параллельные прямые.) То, что прямая AB параллельна прямым l и m, следует из упомянутого утверждения: отношение расстояний от A до l и m равно отношению оснований изображенной трапеции, таким же будет и отношение расстояний от B до l и m.

26. *На плоскости дана прямая l и изображение полуокружности с концами на l. Построить какую-либо прямую, перпендикулярную l, при помощи одной линейки.*

Решение. Последовательность проведения прямых показана на рисунке 42. Прямые *1* и *2* проводятся через концы диаметра так, чтобы они пересекали полуокружность. Прямые *3* и *4* являются высотами в треугольнике, образованном прямыми l, *1* и *2*. Поскольку высоты треугольника пересекаются в одной точке, то прямая *5* перпендикулярна l. Используя построение задачи 25, мы можем через любую точку A плоскости построить прямую перпендикулярную l. (A может быть, на окружности, на прямой l.) Для этого, если сразу не проходит наше построение,

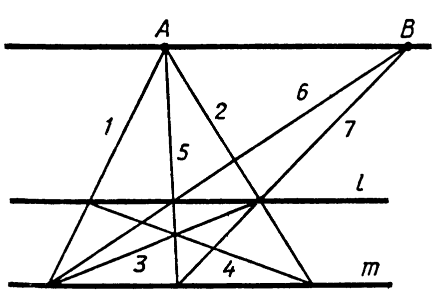


Рис. 41

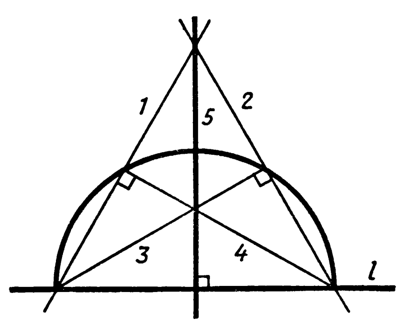


Рис. 42

достаточно сначала построить пару любых прямых, перпендикулярных l, а затем через точку A провести прямую, им параллельную.

Построения одним циркулем

В теории геометрических построений доказывается, что все построения, осуществляемые циркулем и линейкой, могут быть проделаны одним циркулем. Мы не будем излагать эту теорию, ограничимся двумя примерами.

27. *При помощи одного циркуля данный отрезок (указаны две точки — концы отрезка) разделить на n равных частей.*

Решение. Нетрудно при помощи одного циркуля увеличить данный отрезок в n раз. На рисунке 43, *а* показано, как удвоить отрезок AB ($AB = BC$). Продолжая этот процесс, будем последовательно на прямой AB находить точки D, E, ... так, что $AB = BC = CD = DE$ ..., пока не сделаем нужное число шагов.

Пусть M — точка на прямой AB, такая, что $AM = nAB$ (рис. 43, *б*). Теперь с центром в M и радиусом AM проводим окружность и находим точки K и L. Далее строим точку P — точку пересечения окружностей с центрами K и L и радиусом AB. Имеем $AP = \frac{1}{n} AB$.

Докажем это. Треугольники AKP и AMK равнобедренные и подобные (рис. 43, *в*). Следовательно,

$$\frac{AP}{AK} = \frac{AK}{AM} = \frac{1}{n}, \quad AP = \frac{1}{n} AK = \frac{1}{n} AB.$$

28. *С помощью одного циркуля построить середину заданной дуги окружности с заданным центром.*

Решение. Пусть A и B — концы дуги, O — ее центр (рис. 44). Укажем сначала построение, а затем его обоснуем. Находим точки C и D так, что $ABOC$ и $ABDO$ — параллелограммы. E — точка пересечения равных окружностей с центрами C и D и радиусом $CB = AD$. Окружность с радиусом OE и центром в точке C (или D) пересекает дугу AB в ее середине F.

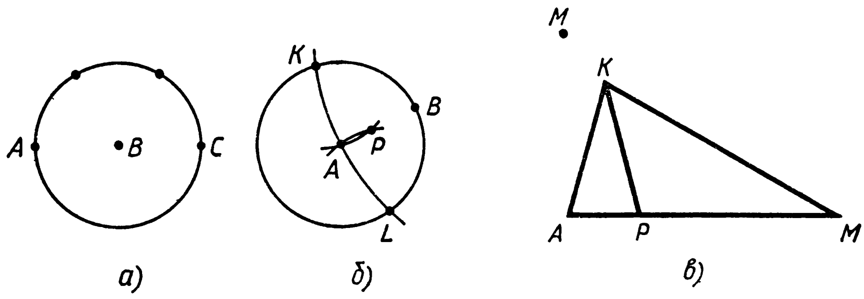


Рис. 43

Докажем это. Пусть радиус окружности равен R, $AB=a$. В параллелограмме $ABOC$ знаем стороны и диагональ AO. Находим вторую диагональ CB:

$$CB^2=2AB^2+2BO^2-AO^2=2a^2+R^2.$$

Из прямоугольного треугольника COE находим:

$$OE^2=CE^2-CO^2=CB^2-CO^2= \\ =a^2+R^2.$$

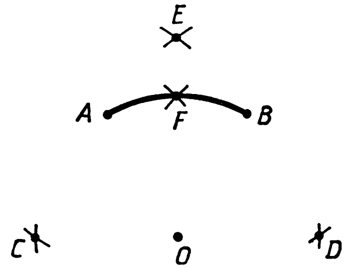


Рис. 44

Оказывается, $OE=CF$, что и требовалось доказать.

28. Задачи на разрезание

Мы выделили задачи на разрезание в отдельную группу по следующим соображениям. Дело в том, что наряду с задачами, которые вполне можно отнести к классическим задачам на построение, поскольку основная проблема в них — построить с помощью циркуля и линейки необходимую линию разреза, сюда относятся также задачи, где нужно доказать возможность или невозможность требуемого разрезания. Впрочем, и задачи на построение в этом случае очень часто оказываются весьма специфичными, как, например, следующая классическая:

29. *Разрезать два данных квадрата на части, из которых можно сложить новый квадрат.*

Решение понятно из рисунка 45. Исходные квадраты ограничены сплошной линией, суммарный — штриховой. Нумерация показывает, как перекладываются отдельные части.

В следующей задаче проблема не в построении.

30. *Можно ли фигуру, изображенную на рисунке 46, разрезать на n равных частей?* (OmA и OnB — полуокружности равного радиуса, ApB — дуга окружности с центром O.)

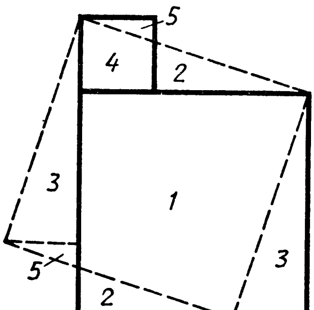


Рис. 45

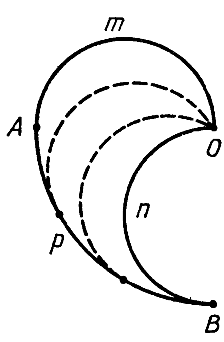


Рис. 46

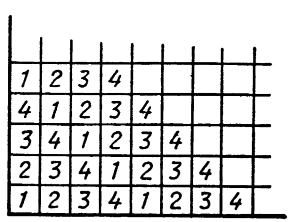


Рис. 47

Ответ. Можно. Для этого разделим дугу ApB на n равных частей. Соединим O с точками деления и на каждом из этих отрезков построим полуокружность в нужную сторону (сектор AOB разрезан на n секторов, а затем каждый «искривлен»). На рисунке 46 показано деление на три части. Понятно, что не для любого n нужное построение можно осуществить при помощи циркуля и линейки.

В олимпиадной практике часто встречаются задачи, в которых требуется выяснить, возможно ли разрезать некоторую фигуру, составленную из единичных квадратов (прямоугольник $m\times n$), на фигуры заданного вида, также составленные из единичных квадратов (обычно из 3—4). Одним из стандартных методов доказательства невозможности разрезания является метод «раскраски», сущность которого мы покажем на примере следующей задачи:

31. *Доказать, что квадрат со стороной $4k+2$ нельзя разрезать на прямоугольники 1×4.*

Решение. Раскрасим данный квадрат в четыре цвета так, как показано на рисунке 47. При разрезании квадрата на прямоугольники вида 1×4 в каждый прямоугольник попадут по одному разу клетки четырех цветов. Это означает, что если бы разрезание было возможно, то клеток каждого цвета было бы поровну, а именно каждый цвет встречался бы $\frac{1}{4}(4k+2)^2=(2k+1)^2$ раз. Но $(2k+1)^2$ — число нечетное, в то время как клеток с цветом 2, как легко видеть, четное число. (На всех диагоналях, в том числе главной, на которой стоит 2, четное число клеток.)

29. Геометрические неравенства

Раздел «Геометрические неравенства» начинается с неравенства треугольника. Решение очень многих задач основывается на этом главном неравенстве геометрии. Например:

32. *Пусть s — сумма медиан треугольника, $2p$ — его периметр. Доказать, что $\frac{3}{2}p<s<2p$.*

Решение. Пусть $BD=m_b$ — медиана к стороне AC треугольника ABC, стороны треугольника $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, F — середина BC (рис. 48). Из неравенства треугольника для BFD следует, что $m_b<BF+FD=\frac{1}{2}(a+c)$. Записав аналогичные неравенства для медиан m_a и m_c и сложив их, докажем неравенство $s<2p$.

Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Применив неравенство треугольника к треугольникам ABM, BCM, CAM, получим $\frac{2}{3}(m_a+m_b)>c$, $\frac{2}{3}(m_b+m_c)>a$, $\frac{2}{3}(m_c+m_a)>b$.

Сумма этих неравенств дает нам $s>\frac{3}{2}p$.

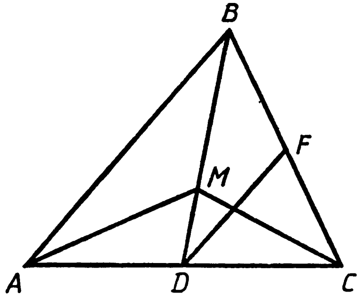


Рис. 48

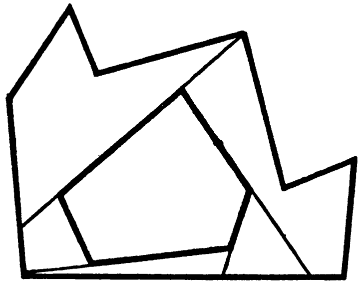


Рис. 49

Если произвольный многоугольник разрезать на части (две или более) при помощи одного прямолинейного разреза, то периметр каждой из получившихся частей будет меньше периметра исходного, поскольку длина отрезка меньше длины любой ломаной с теми же концами (рис. 49). При помощи таких разрезов мы можем из данного многоугольника вырезать любой выпуклый многоугольник, расположенный внутри данного. Таким образом, справедлива теорема: *периметр выпуклого многоугольника меньше периметра любого другого многоугольника, внутри которого он содержится.*

33. *Доказать, что $R \geqslant 2r$, где R и r соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей произвольного треугольника.*

Решение. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC (рис. 50). Радиус окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, равен $\frac{R}{2}$. Теперь ясно, что $\frac{R}{2} \geqslant r$, поскольку окружность, описанная около $A_1B_1C_1$, вообще говоря, «вылезает» за границу треугольника ABC. Формально можно поступить сле-

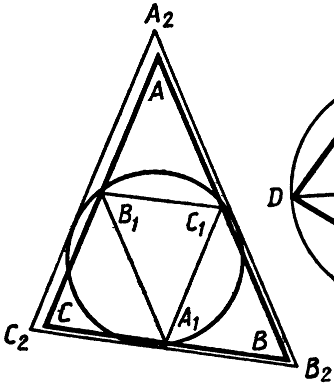


Рис. 50

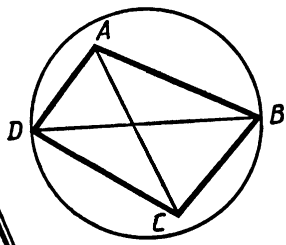


Рис. 51

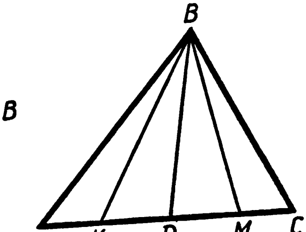


Рис. 52

дующим образом: проведем касательные к этой окружности, параллельные сторонам треугольника ABC; получим треугольник $A_2B_2C_2$, подобный треугольнику ABC, содержащий ABC внутри себя, с радиусом вписанной окружности, равным $\frac{R}{2}$.

34. *Доказать, что если у четырехугольника $ABCD$ углы A и C тупые, то $AC<BD$.*

Решение. Построим на BD как на диаметре окружность (рис. 51). Поскольку углы A и C тупые, то A и C находятся внутри окружности, т. е. $AC<BD$.

35. *В треугольнике ABC на стороне AC взяты точки K и M так, что $AK=MC$* (рис. 52). *Доказать, что если $AB>BC$, то $\angle ABK<$ $<\angle MBC$.*

Решение. Можно считать, что $AK=MC\leqslant\frac{1}{2}AC$. В противном случае мы можем, исключив из углов общую часть $\angle MBK$, поменять ролями K и M. Проведем медиану BD. Из того, что $AB>BC$, следует, что $\angle BDA$ тупой, проекция B на AC лежит на луче DC. Значит, проекция KB больше проекции BM и $KB>BM$. Но треугольники ABK и CBM равновелики, т. е. $AB\cdot BK\cdot\sin\angle ABK = CB\cdot BM\cdot\sin\angle CBM$, следовательно, $\sin\angle MBC>\sin\angle KBA$. Но $\angle ABK$ не может быть тупым. Значит, $\angle MBC>\angle ABK$.

36. *Пусть a, b, c, d — длины сторон четырехугольника, заданные в порядке обхода, S — его площадь. Доказать, что $S\leqslant\frac{1}{2}(ac+bd)$.*

Решение. Если a, c и b, d были бы соседними сторонами четырехугольника, то наше неравенство было бы очевидным (площадь треугольника не превосходит полупроизведения его двух сторон). Ну, так сделаем их соседними! Преобразуем четырехугольник $ABCD$ в четырехугольник ABC_1D (рис. 53), в котором треугольник BC_1D равен треугольнику BCD. Четырехугольник ABC_1D равновелик четырехугольнику $ABCD$. Проведем в нем диагональ AC_1, получим два треугольника, у которых по две стороны соответственно равны a, c и b, d.

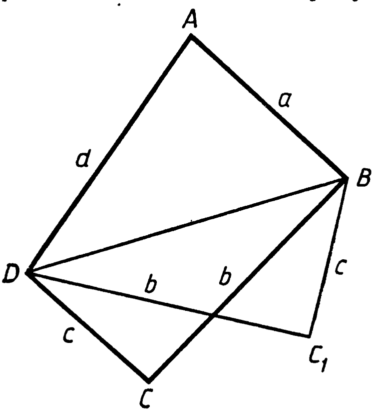


Рис. 53

Несмотря на то что мы рассмотрели небольшое число задач на геометрические неравенства, уже сейчас можно сделать вывод о том, сколь разнообразны геометрические приемы, используемые при доказательстве подобных неравенств, сколь сложны задачи классификации методов доказательства. Обращаем внимание на задачу 35. В ней соседствуют чисто геометрические мотивы с аналитической техникой. Подчеркнем: подобный синтез очень часто оказывается весьма плодотворным.

Вот еще один пример.

37. *Доказать, что если a, b и c — стороны остроугольного треугольника, R — радиус описанной около него окружности, то:*

а) $a^2+b^2+c^2>8R^2$;

б) $a+b+c>4R$.

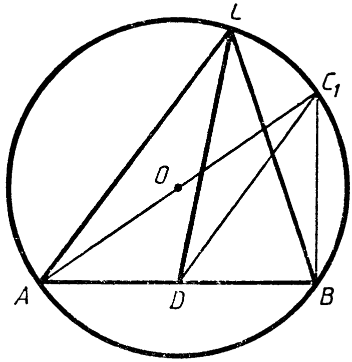


Рис. 54

Решение. а) Пусть $m_c=CD$ — медиана треугольника ABC (рис. 54). По формуле длины медианы $m_c^2=$ $=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$, следовательно, $a^2+b^2+c^2=2m_c^2+\frac{3}{2}c^2$.

Поскольку треугольник ABC остроугольный, то O внутри треугольника. Рассмотрим прямоугольный треугольник AC_1B. Имеем $C_1D<CD$, поскольку $\angle COD>\angle C_1OD$. Следовательно,

$$a^2+b^2+c^2=2m_c^2+\frac{3}{2}c^2>2C_1D^2+\frac{3}{2}c^2=AC_1^2+C_1B^2+BA^2=8R^2.$$

б) Поскольку a, b и c меньше $2R$, то $2R(a+b+c)>$ $>a^2+b^2+c^2>8R^2$, значит, $a+b+c>4R$.

И в заключение нашего небольшого обзора одно геометрическое неравенство, доказываемое чисто аналитическими методами.

38. *Доказать неравенство* $a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+$ $+(b-c)^2+(c-a)^2$, *где a, b, c, S — стороны и площадь треугольника.*

Прежде чем приступить к решению, обратим внимание на одно следствие из нашего неравенства: $a^2+b^2+c^2\geqslant 4S\sqrt{3}$. Последнее неравенство широко известно. Один из наиболее удобных способов его доказательства — это доказать сначала более сильное неравенство 38. Подобные парадоксы, когда более сильное утверждение доказывается проще, чем ослабленное, не так уж редки в математике.

Решение. В данном неравенстве оставим справа лишь первое слагаемое, все остальное сгруппируем слева попарно в разности квадратов, разложим в парах на множители и введем новые переменные: $x=a+b-c$, $y=a-b+c$, $z=-a+b+c$.

Тогда $(a^2-(b-c)^2)+(b^2-(c-a)^2)+(c^2-(a-b)^2)=$ $=xy+xz+yz$.

Поскольку $p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(x+y+z)$, $p-a=\frac{1}{2}z$, $p-b=$ $=\frac{1}{2}y$, $p-c=\frac{1}{2}x$, то из формулы Герона получаем $S=$ $=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)\,xyz}$.

Наше неравенство в переменных x, y, z имеет вид:

$$xy+yz+zx \geqslant \sqrt{3(x+y+z)xyz}.$$

Разделим обе части на xyz и перейдем к новым переменным $u=\frac{1}{x}$, $v=\frac{1}{y}$, $w=\frac{1}{z}$.

Будем иметь $u+v+w \geqslant \sqrt{3(uv+vw+wu)}$.

Возводя последнее неравенство в квадрат, после упрощений приходим к известному неравенству

$$u^2+v^2+w^2 \geqslant uv+vw+wu.$$

Замечание. Переход от сторон треугольника a, b, c к переменным x, y, z по формулам $x=a+b-c$, $y=a-b+c$, $z=-a+b+c$ нередко бывает полезным. Очень важно то обстоятельство, что если на переменные a, b, c, кроме положительности, наложены ограничения в виде неравенств треугольника, то новые переменные положительны и только.

30. Геометрические задачи на максимум-минимум

В этом разделе мы рассмотрим несколько чисто геометрических приемов решения экстремальных геометрических задач. С одним таким приемом — симметрией — мы уже встречались (см. задачу 15). Этот прием очень часто оказывается действенным при нахождении кратчайших ломаных с вершинами на заданных прямых (и не только прямых).

39. ***Доказать, что среди всех треугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник, наименьший периметр имеет треугольник с вершинами в основаниях высот данного.***

Решение. Возьмем произвольную точку D на стороне остроугольного треугольника ABC (рис. 55). Найдем на AB и AC точки F и E так, чтобы при заданном D периметр DEF был наименьшим. Пусть D_1 и D_2 — точки, симметричные D относительно сторон AC и AB. В качестве вершин E и F следует взять точки пересечения отрезка D_1D_2 со сторонами AC и AB. В самом деле, периметр треугольника DEF равен длине отрезка D_1D_2, а периметр любого другого треугольника DE_1F_1 равен длине ломаной $D_1E_1F_1D_2 > D_1D_2$. Осталось определить положение точки D, при котором D_1D_2 будет наименьшим. Рассмотрим треугольник D_1AD_2. Угол при вершине A фиксирован (он равен $2\angle BAC$), $D_1A= =D_2A=DA$. Значит, D_1D_2 будет наименьшим, если наименьшим является отрезок AD, т. е. AD — высота треугольника ABC. Поскольку мы доказали существование и единственность минимального (по периметру) треугольника DEF, то, повторяя рассуждения относительно других сторон треугольника ABC, придем к выводу, что E и F также должны быть основаниями соответствующих высот треугольника ABC.

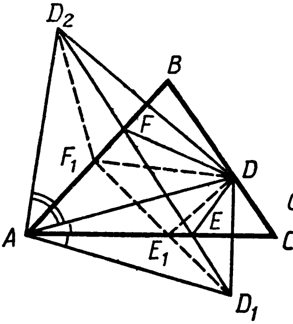


Рис. 55

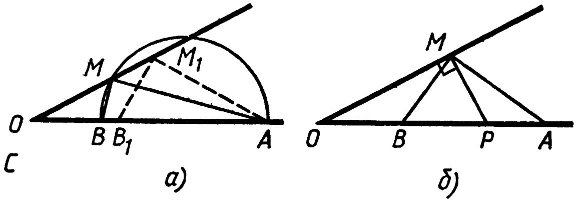


Рис. 56

Другой полезный прием иллюстрирует следующая задача:

40. *Дан угол величиной* α ($\alpha < 90°$), *O — вершина угла. На одной из сторон угла взята точка A,* $OA = a$. *Точка B расположена на той же стороне, а M — на противоположной стороне так, что* $\angle AMB = 90°$. *Найти наименьшее значение длины отрезка AB.*

Решение. Пусть M и B — какие-то две точки на сторонах угла, для которых $\angle AMB = 90°$ (рис. 56, *а*). Опишем около треугольника AMB окружность. Если эта окружность пересекает сторону угла, на которой расположена точка M, то длину отрезка AB можно уменьшить. В самом деле, пусть M_1 — любая точка на высекаемой хорде, $\angle AM_1B > 90°$. Следовательно, на AB существует точка B_1, для которой $\angle AM_1B_1 = 90°$. Итак, мы доказали, что если минимальный отрезок AB существует, то окружность, описанная около треугольника AMB, касается стороны угла. Можно поступить несколько аккуратнее, рассмотрев M и B, такие, что описанная окружность касается стороны угла, доказать, что получившийся отрезок AB имеет наименьшую длину. Понятно, что B следует взять на отрезке OA (рис. 56, *б*). Для любой точки M_1, отличной от M, будет $\angle AMB < 90°$, а значит, соответствующая точка B_1 займет положение, для которого $AB_1 > AB$.

Осталось найти отрезок AB, соответствующий этому положению точки M. Пусть P — середина AB, $AB = 2x$, $OP = a - x$, $MP = x$, $\sin\alpha = \dfrac{x}{a-x}$, $x = \dfrac{a\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$. Наименьшее значение длины отрезка AB равно $\dfrac{2a\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

Однако не всегда оказывается возможным дать прямое рассуждение, доказывающее, что найденное расположение реализует искомый экстремум. Напомним, что при нахождении наибольших и наименьших значений средствами математического анализа мы опираемся на утверждение о существовании этого наибольшего или наименьшего значения. Это утверждение может быть сформулировано в общем виде. Правда, ссылки на это общее утверждение не совсем законны, поскольку доказательство общего факта в школьном курсе отсутствует. С другой стороны, в каждом конкретном случае существование наибольшего или наименьшего значения достаточно очевидно из соображений здравого смысла. Аналогично этому геометрические соображения, показывающие, для каких расположений наибольшее или наименьшее значение не достигается, пополненные теоремой существования, дают нам условия, определяющие это экстремальное положение.

41. *Точки A, B и C расположены по одной на трех концентрических окружностях с радиусами* 1, $3\sqrt{2}$ *и* 5. *Чему равно наибольшее значение площади треугольника ABC?*

Р е ш е н и е. Докажем, что для искомого треугольника выполняется следующее свойство: прямая, проходящая через любую его вершину параллельно противоположной стороне, должна касаться соответствующей окружности. В самом деле, пусть прямая, проведенная через C параллельно AB, пересекает окружность (рис. 57, *а*). Тогда, перемещая C по одной из получившихся дуг в положение C_1, получим треугольник ABC_1, площадь которого больше площади треугольника ABC. Итак, мы доказали (при условии существования), что точка O — общий центр окружностей — для искомого треугольника является точкой пересечения высот (рис. 57, *б*).

Пусть $AO=1$, $BO=3\sqrt{2}$, $CO=5$. По теореме синусов для треугольника AOB имеем $\frac{\cos B}{\cos A}=3\sqrt{2}$, для треугольника AOC имеем $\frac{\cos C}{\cos A}=5$.

Пусть $\cos A=x$, тогда $\cos B=3\sqrt{2}x$, $\cos C=5x$. Из равенства $A+C=180°-B$ имеем $\cos(A+C)=-\cos B$, откуда $x\cdot 5x-\sqrt{(1-x^2)(1-25x^2)}=-3\sqrt{2}x$, $30\sqrt{2}x^3+44x^2-1=0$. Один корень этого уравнения $x=\frac{\sqrt{2}}{10}$. Больше действительных корней нет:

$$30\sqrt{2}x^3+44x^2-1=(10x-\sqrt{2})\left(3\sqrt{2}x^2+5x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

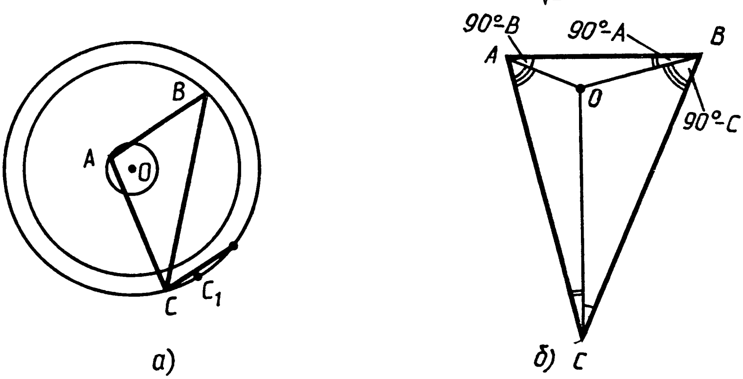


Рис. 57

Итак, $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $\cos B = \frac{3}{5}$,

$\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin A = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\sin B = \frac{4}{5}$,

$\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = 14$.

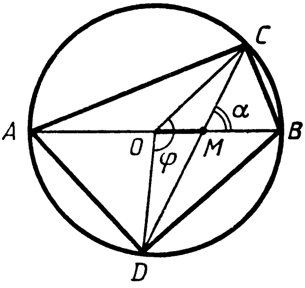


Рис. 58

Последняя задача иллюстрирует одно интересное явление: условия, определяющие экстремальную точку, существенно меняются при изменении параметров, заданных в условии задачи.

42. *В окружности радиусом R проведен диаметр AB. На диаметре задана точка M на расстоянии a от центра. Через M проведена хорда CD так, что площадь четырехугольника $ACBD$ достигает наибольшего значения. Чему равна площадь четырехугольника $ACBD$?*

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольник COD (рис. 58). Если α — угол между AB и CD, то $S_{ACBD} = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin \alpha$, $S_{COD} = \frac{1}{2} OM \cdot CD \cdot \sin \alpha$.

Следовательно, $\frac{S_{COD}}{S_{ACBD}} = \frac{OM}{AB} = \frac{a}{2R}$.

Значит, площадь четырехугольника $ACBD$ будет наибольшей, если наибольшей будет площадь треугольника COD. Но $S_{COD} = \frac{1}{2} R^2 \sin \varphi$ ($\varphi = \angle COD$). Значит, наибольшим должен быть $\sin \varphi$. Но $\varphi_0 \leqslant \varphi < 180°$, где φ_0 — угол, соответствующий $\alpha = 90° \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} = \frac{a}{R} \right)$. Если $\varphi_0 \leqslant 90°$, то наибольшей площадь COD будет при $\varphi = 90°$. Если $\varphi_0 > 90°$, то наибольшей она будет при $\varphi = \varphi_0$. (Доведите решение до конца самостоятельно.)

Ответ. Если $a > R\frac{\sqrt{2}}{2}$, то площадь $ACBD$ равна $\frac{R^3}{a}$; если $a < R\frac{\sqrt{2}}{2}$, то она равна $2R\sqrt{R^2 - a^2}$.

31. Задачи

Геометрические места точек

1. Дан квадрат. Найдите геометрическое место точек M, таких, что расстояние от M до центра квадрата не превосходит расстояния от M до любой вершины квадрата.

2. Найдите геометрическое место точек, из которых данный квадрат виден под углом 60°.

3. Дана окружность и точка A. Найдите геометрическое место середин всевозможных хорд, таких, что прямая, которой эта хорда принадлежит, проходит через точку A.

4. Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите геометрическое место центров всевозможных окружностей, проходящих через A и B и пересекающих прямую l.

5. Найдите геометрическое место точек M, таких, что $AM^2+BM^2=CM^2$, где A, B, C — данные точки плоскости.

6. $ABCD$ — трапеция. Найдите геометрическое место точек M, таких, что $AM^2+CM^2=BM^2+DM^2$.

7. На окружности фиксированы точки A и B, а точка C перемещается по окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения: а) медиан; б) высот; в) биссектрис треугольников ABC.

8. Найдите геометрическое место середин всевозможных отрезков с концами на противоположных сторонах данного четырехугольника.

9. Через точку M, расположенную внутри параллелограмма, проведены две прямые, параллельные его сторонам. Найдите геометрическое место точек M, если: а) два параллелограмма из четырех получившихся, не имеющие общей стороны, равновелики; б) сумма площадей двух параллелограммов равна сумме площадей двух других.

10. Найдите геометрическое место точек, для которых: а) сумма; б) разность расстояний до двух заданных прямых равна заданной величине.

11. Около данной окружности описан треугольник ABC, у которого $\angle A \geqslant \angle B \geqslant \angle C$. Найдите геометрическое место вершин A, B и C.

12. Найдите геометрическое место таких точек M внутри данного треугольника, которые являются серединами не менее чем двух различных отрезков с концами на сторонах этого треугольника.

13. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек C, таких, что в треугольнике ABC медиана AM равна высоте BN.

14. Дана окружность и точка A. Произвольная окружность, проходящая через A, пересекается с данной в точках B и C. Касательная к этой окружности в точке A пересекается с прямой BC в точке M. Найдите геометрическое место точек M.

15. Через точку пересечения двух окружностей проведена прямая, вторично пересекающая окружности в двух точках A и B. Найдите геометрическое место середин отрезков AB.

16. Дана точка A и прямая l, B — произвольная точка l. Найдите геометрическое место точек M, таких, что ABM — правильный треугольник.

17. Дан правильный треугольник ABC. На продолжении его сторон AB и AC за точки B и C взяты точки D и E так, что $BD \cdot CE=BC^2$. Найдите геометрическое место точек пересечения прямых DC и BE.

18. Даны три точки A, B и C на прямой, D — произвольная точка плоскости, не лежащая на этой прямой. Проведем через C прямые, параллельные AD и BD, до пересечения с прямыми BD и AD в точках P и Q. Найдите геометрическое место оснований M перпендикуляров, опущенных из C на PQ, а также найдите все точки D, для которых M — фиксированная точка.

19. На стороне AC треугольника ABC взята точка K, а на медиане BD — точка P так, что площадь треугольника APK равна площади треугольника BPC. Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AP и BK.

20. В окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AC и BD. Пусть P — произвольная точка окружности, PA пересекает BD в точке E. Прямая, проходящая через E параллельно AC, пересекается с прямой PB в точке M. Найдите геометрическое место точек M.

21. Дан угол, вершина которого в точке A, и точка B. Произвольная окружность, проходящая через A и B, пересекает стороны угла в точках C и D (отличных от A). Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников ACD.

22. Одна вершина прямоугольника находится в данной точке, две другие, не принадлежащие одной стороне,— на двух заданных взаимно перпендикулярных прямых. Найдите геометрическое место четвертых вершин таких прямоугольников.

23. Пусть A — одна из двух точек пересечения двух данных окружностей; через другую точку пересечения проведена произвольная прямая, пересекающая одну окружность в точке B, а другую — в точке C, отличных от общих точек этих окружностей. Найдите геометрическое место: а) центров окружностей, описанных около ABC; б) центров тяжестей треугольников ABC; в) точек пересечения высот треугольников ABC.

24. Пусть B и C — две фиксированные точки данной окружности, A — переменная точка этой же окружности. Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из середины AB на AC.

25. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей прямоугольников, стороны которых (или их продолжения) проходят через четыре данные точки плоскости.

26. Через точку, лежащую на равном расстоянии от двух данных параллельных прямых, проведена прямая, пересекающая эти прямые в точках M и N. Найдите геометрическое место вершин P равносторонних треугольников MNP.

27. Точки A, B и C расположены на одной прямой (B — между A и C). Найдите геометрическое место точек, таких, что $\operatorname{ctg} \angle AMB + \operatorname{ctg} \angle BMC = k$ ($k = \text{const}$).

28. Даны две точки A и Q. Найдите геометрическое место точек B, таких, что существует остроугольный треугольник ABC, для которого Q — точка пересечения медиан.

29. Дан угол и окружность с центром в точке O, вписанная в этот угол. Произвольная прямая касается окружности и пересекает стороны угла в точках M и N. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников MON.

30. Даны две окружности, на них взяты по одной точке A и B, равноудаленные от середины отрезка, соединяющего их центры. Найдите геометрическое место середин отрезков AB.

31. Дан отрезок AB. Возьмем на AB произвольную точку M и рассмотрим два квадрата $AMCD$ и $MBEF$, расположенные по одну сторону от AB. Опишем около этих квадратов окружности и обозначим через N их точку пересечения, отличную от M. Докажите, что: а) AF и BC пересекаются в N; б) MN проходит через фиксированную точку плоскости. Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих центры квадратов.

32. Дана окружность и точка A. Пусть M — произвольная точка окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AM и касательной к окружности, проходящей через M.

33. Две окружности касаются друг друга в точке A. Одна прямая, проходящая через A, пересекает вторично эти окружности в точках B и C, другая — в точках B_1 и C_1 (B и B_1 — на одной окружности). Найдите геометрическое место точек пересечения окружностей, описанных около треугольников AB_1C и ABC_1.

34. Найдите геометрическое место вершин прямых углов всевозможных равнобедренных прямоугольных треугольников, концы гипотенуз которых лежат на двух заданных окружностях.

Задачи на построение

35. Постройте отрезок x по формулам (a, b, c, ... — данные отрезки): а) $x=\sqrt{2a^2+3b^2}$; б) $x=\frac{a^2+b^2}{c}$; в) $x=\frac{abc}{de}$; г) $x=\sqrt[4]{abcd}$; д) $x=\sqrt{ab+cd}$; е) $\sqrt{x}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$; ж) $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$.

36. Данный отрезок разделите на две части, относящиеся как $\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

37. Дан отрезок единичной длины. Постройте отрезки длиной $\sqrt{n}$, где n — натуральное число.

В следующих задачах (38—55) постройте треугольник по заданным величинам (a, b, c — стороны, A, B, C — углы, m_a, m_b, m_c — медианы, h_a, h_b, h_c — высоты, l_a, l_b, l_c — биссектрисы, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, $2p$ — периметр):

38. a, A, h_a.

39. a, m_b, m_c.

40. a, A, r.

41. A, B, h_a+h_b.

42. a, h_a, $b:c$.

43. m_a, m_b, m_c.

44. h_a, h_b, h_c.	**45.** h_a, h_b, m_c.	**46.** h_a, m_b, m_c.
47. h_a, m_a, h_c.	**48.** a, h_a, l_a.	**49.** a, B, $b-c$.
50. a, $B-C$, $b-c$.	**51.** a, B, $b-h_a$.	**52.** A, $2p$, b.
53. h_a, h_b, l_c.	**54.** A, m_b, $b+c$.	**55.** A, $b+c$, $a+c$.

56. Постройте точку M внутри треугольника ABC, такую, что расстояния от M до сторон AB, BC и CA относятся как $1:2:3$.

57. Постройте точку M, расстояния от которой до данных точек A, B и C относятся как $1:2:3$.

58. Пусть A_1 и C_1 — середины сторон BC и BA треугольника ABC. Найдите точку M, такую, что треугольники MAC, MBC_1 и MBA_1 равновелики.

59. Постройте треугольник, если даны три точки, в которых продолжения бессектрисы, медианы и высоты, выходящие из одной вершины, пересекают описанную около треугольника окружность.

60. Через данную точку M провести прямую l так, чтобы сумма расстояний до l от двух данных точек A и B равнялась бы данному отрезку.

61. A, B, C и D — четыре точки, расположенные на одной прямой, следующие в указанном порядке. Постройте все точки плоскости, из которых отрезки AB, BC и CD видны под равными углами.

62. Даны две прямые l и p и точка M. Проведите через M прямую, пересекающую l и p в точках A и B соответственно так, что $AM=2BM$.

63. Даны три луча с общим началом и точка M. Проведите через M прямую, пересекающую лучи в точках A, B и C так, что $AM=BC$.

64. Дана прямая l и две точки A и B. Найдите на прямой l точку M, такую, что угол между AM и l в два раза больше угла между BM и l.

65. Постройте квадрат, если заданы четыре точки, расположенные на его сторонах или продолжениях сторон.

66. В данный треугольник впишите квадрат, одна сторона которого лежит на заданной стороне треугольника.

67. Постройте общие касательные к двум данным окружностям.

68. На сторонах AB и BC треугольника ABC найдите точки K и M так, чтобы $AK=KM=MC$.

69. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник, вершина прямого угла которого расположена в заданной точке, а две другие вершины находятся на заданных окружностях.

70. Дан угол и две точки A и B внутри его. Постройте равнобедренный треугольник KLM, основание которого KM лежит на одной стороне угла, вершина L — на другой стороне, а боковые стороны KL и LM проходят через A и B.

71. На окружности даны две точки A и B. Постройте на окружности точку M, такую, что $AM-BM=a$, где a — заданный отрезок.

72. Через одну из точек пересечения двух окружностей провести прямую так, чтобы отрезок AB, где A и B — точки пересечения этой прямой и окружностей, отличные от общей точки, имел заданную длину.

73. В данный треугольник вписать правильный треугольник со стороной заданной длины.

74. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

75. В данный круговой сектор впишите треугольник, равный заданному.

76. Найдите точку M, такую, что длины касательных, проведенных из M к двум данным окружностям, равняются заданным отрезкам.

77. Даны две окружности α и β и прямая l. Проведите прямую p, параллельную l, так, чтобы сумма хорд, высекаемых на α и β, равнялась бы заданному отрезку.

78. Даны две окружности и на них по точке. Постройте две равные окружности, касающиеся между собой и данных окружностей в указанных точках.

79. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данной прямой и данной окружности.

80. Дана прямая l, на которой отмечены три точки A, B и C, причем $AB=BC$. При помощи одной линейки проведите через заданную точку D прямую, параллельную l.

81. При помощи одной линейки заданный отрезок разделите на три равные части, если указана середина отрезка.

82. На плоскости изображены две пересекающиеся окружности. При помощи одной линейки постройте центр каждой из них.

83. Постройте биссектрису угла, вершина которого находится за пределами листа бумаги.

84. В листе бумаги вырезано круглое отверстие. Через заданную точку проведите прямую, касающуюся окружности, ограничивающей это отверстие.

85. При помощи линейки, на которой сделаны две отметки (с помощью этой линейки на прямой можно отложить отрезок, длина которого равна расстоянию между отметками), постройте прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную заданной прямой.

86. При помощи одного циркуля постройте точки пересечения окружности с заданным центром и радиусом и прямой, проходящей через заданные точки A и B.

87. Докажите, что существуют прямоугольники, которые нельзя превратить в квадрат, разрезав их менее чем на 100 частей.

88. Докажите, что прямоугольник, у которого отношение большей стороны к меньшей не превосходит 2, можно превратить в квадрат, разрезав его не более чем на 3 куска.

89. Данный треугольник, не являющийся правильным, разрежьте на три части таким образом, чтобы одна часть являлась треугольником, подобным данному, а из двух оставшихся можно было бы сложить треугольник, подобный данному.

90. Данный прямоугольный треугольник разрежьте на остроугольные треугольники.

Геометрические неравенства, задачи на максимум и минимум

91. Площадь треугольника равна 1. Докажите, что средняя по длине его сторона не меньше $\sqrt{2}$.

92. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $AB > AD$, $CB > CD$.

93. Докажите, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ имеет место неравенство $AB \geqslant AC$, то $BD > DC$.

94. В треугольнике ABC проведены BM — высота, BN — биссектриса, BK — медиана. Докажите, что N лежит между M и K.

95. Чему равно наибольшее значение MN, где M — точка на границе прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, а N — точка вписанной в этот треугольник окружности.

96. Дан угол величиной 60° с вершиной O. На одной из его сторон взяты две точки A и B, $OA=5$, $OB=2$. Пусть M — точка на другой стороне угла, N — точка, такая, что $\angle ANB=60°$. Чему равно наименьшее значение длины MN?

97. Из точки M, лежащей на стороне AB остроугольного треугольника ABC, опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны AC и BC. При каком положении точки M длина отрезка PQ будет наименьшей?

Докажите справедливость для произвольного треугольника следующих неравенств (98—106):

98. $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}c^2$.

99. $a^2+b^2+c^2 < 2(ab+bc+ca)$.

100. $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leqslant abc$.

101. $S \leqslant \frac{1}{4}(a^2+b^2)$.

102. $S < \frac{1}{6}(ab+bc+ca)$.

103. $m_a^2+m_b^2 > \frac{9}{8}c^2$.

104. $\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b} < \frac{1}{r}$.

105. $h_a+h_b+h_c \geqslant 9r$.

106. $p \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{6Rr}$.

107. На одной из сторон прямого угла с вершиной O заданы точки A и B, $OA=a$, $OB=b$ $(b>a)$. Чему равно наибольшее значение угла AMB, где M — точка на другой стороне угла?

108. A, B и C — данные точки плоскости. Для какой точки M сумма $3AM+2BM+CM$ будет наименьшей?

109. Найдите площадь наибольшего правильного треугольника, описанного около прямоугольного треугольника с катетами 1 и $\sqrt{3}$.

110. Две деревни A и B расположены по разные стороны от реки, берега которой — параллельные прямые линии. Определите, где следует строить мост (мост перпендикулярен берегам реки), чтобы путь из A в B был кратчайшим.

111. Докажите, что если для некоторой точки M выполняется равенство $AM^2+BM^2+CM^2+DM^2=2S$, где S — площадь четырехугольника $ABCD$, то $ABCD$ — квадрат, M — его центр.

112. Внутри угла с вершиной A расположена окружность. Через точку M этой окружности проведена прямая, касающаяся окружности, пересекающая стороны угла в точках B и C, причем окружность принадлежит треугольнику ABC. Докажите, что если $BM=MC$, то площадь треугольника ABC будет наименьшей.

113. Дан угол величиной α с вершиной A. Центр O окружности радиусом R, касающейся одной стороны угла, расположен на другой стороне. Касательная к окружности пересекает стороны угла в точках B и C (O — на отрезке AC). Чему равно наименьшее значение площади ABC?

114. Дано: MN — диаметр окружности, $MN=1$, A и B — точки окружности, расположенные по одну сторону от MN, C — на другой полуокружности, A — середина полуокружности, $MB=\frac{3}{5}$, длина отрезка, образованного при пересечении диаметра MN с хордами AC и BC, равна a. Чему равно наибольшее значение a?

115. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, описанный около окружности диаметра 1. Внутри $ABCD$ существует такая точка M, что $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=2$. Найдите площадь $ABCD$.

116. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности радиусом r. Точка касания окружности со стороной AB делит эту сторону на отрезки a и b, а точка касания окружности со стороной AD делит ее на отрезки a и c. В каких пределах может меняться r?

117. Докажите, что если треугольник, составленный из медиан данного треугольника, является тупоугольным, то меньший угол исходного треугольника меньше $45°$.

118. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Докажите, что хотя бы один из четырех углов BAC, DBC, ACD, BDA не превосходит $\frac{\pi}{4}$.

119. Докажите, что медиана к большей стороне треугольника образует со сторонами, ее заключающими, углы, величина каждого из которых не меньше половины наименьшего угла треугольника.

120. Докажите, что если в треугольнике ABC угол B тупой и $AB=\frac{1}{2}AC$, то $\angle C>\frac{1}{2}\angle A$.

121. В треугольнике из вершины A выходят медиана, биссектриса и высота. Какой угол больше: между медианой и биссектрисой или между биссектрисой и высотой, если угол A дан?

122. Докажите, что если медианы, проведенные из вершин B и C треугольника ABC, перпендикулярны, то $\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C \geqslant \frac{2}{3}$.

123. Дан треугольник ABC, $AB<BC$. Докажите, что для произвольной точки M на медиане, проведенной из вершины B, $\angle BAM > \angle BCM$.

124. Из внешней точки A к окружности проведены две касательные AB и AC и середины их D и E соединены прямой DE. Докажите, что эта прямая не пересекает окружность.

125. Докажите, что если длины биссектрис треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

126. Докажите, что если длины сторон треугольника связаны неравенством $a^2+b^2>5c^2$, то c — наименьшая сторона.

127. Треугольники ABC и AMC расположены так, что MC пересекает AB в точке O, причем $AM+MC=AB+BC$. Докажите, что если $AB=BC$, то $OB>OM$.

128. В треугольнике ABC точка M лежит на стороне BC. Докажите, что $(AM-AC)\,BC \leqslant (AB-AC)\,MC$.

129. Пусть a, b, c — стороны треугольника ABC, M — произвольная точка плоскости. Найдите минимальное значение выражения $MA^2+MB^2+MC^2$.

130. Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 2 км. Деревни соединены дорогами таким образом, что из каждой можно пройти в любую другую. Может ли общая длина дорог быть меньше 5,5 км?

131. Точка A расположена между двумя параллельными прямыми на расстоянии a и b от них. Эта точка служит вершиной угла, равного α, всевозможных треугольников, две другие вершины которых лежат по одной на данных прямых. Найдите наименьшее значение площади таких треугольников.

132. Найдите радиус наибольшего круга, который можно покрыть тремя кругами радиусом R. Решите задачу в общем случае, когда радиусы равны R_1, R_2, R_3.

133. Можно ли покрыть тремя единичными квадратами квадрат со стороной $\frac{5}{4}$?

134. Пусть a, b, c, S — соответственно стороны и площадь некоторого треугольника, α, β, γ — углы другого треугольника. Докажите, что $a^2 \operatorname{ctg} \alpha+b^2 \operatorname{ctg} \beta+c^2 \operatorname{ctg} \gamma \geqslant 4S$, причем равенство имеет место лишь в случае, когда оба треугольника подобны.

135. ABC — равнобедренный треугольник ($AB=BC$). На сторонах AB, BC и CA взяты соответственно точки K, N и M, отличные от вершин треугольника, такие, что $AK:KB=BN:NC=CM:MA$. В каких пределах может меняться периметр треугольника ABC, если $KN=MN=1$?

136. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AN на биссектрисы внешних углов треугольника (B и C). Докажите, что отрезок MN равен полупериметру треугольника ABC.

137. В треугольнике ABC проведена высота BD, AN — перпендикуляр к AB, CM — перпендикуляр к BC, причем $AN=DC$, $CM=AD$. Докажите, что M и N равноудалены от вершины B.

138. Докажите, что для любого прямоугольного треугольника радиус окружности, касающейся его катетов и описанной окружности (изнутри), равен диаметру вписанной окружности.

139. Докажите, что если одна сторона треугольника лежит на фиксированной прямой плоскости, а точка пересечения высот совпадает с фиксированной точкой, то окружность, описанная около этого треугольника, также проходит через фиксированную точку.

140. Докажите, что проекции основания высоты треугольника на стороны, ее заключающие, и на две другие высоты лежат на одной прямой.

141. Три равные окружности проходят через точку H. Докажите, что H является точкой пересечения высот треугольника, вершины которого совпадают с тремя другими точками попарного пересечения окружностей.

142. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) D — середина AC, E — проекция D на BC, F — середина DE. Докажите, что прямые BF и AE перпендикулярны.

143. В треугольнике ABC проведена биссектриса внутреннего угла AD. Постройте касательную l к описанному кругу в точке A. Докажите, что прямая, проведенная через D параллельно l, касается вписанной окружности треугольника ABC.

144. В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N так, что $MN=AM+BN$. Докажите, что все такие прямые касаются одной и той же окружности.

145. Докажите, что точки, симметричные центру описанного около треугольника круга относительно середин его медиан, лежат на высотах треугольника.

146. Две окружности проходят через вершину угла и точку, лежащую на биссектрисе. Докажите, что отрезки сторон угла, заключенные между окружностями, равны.

147. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены три параллельные прямые l_1, l_2 и l_3. Докажите, что прямые, симметричные l_1, l_2 и l_3 соответственно относительно биссектрис углов A, B и C, пересекаются в одной точке, расположенной на окружности, описанной около треугольника ABC.

148. Докажите, что если M — точка внутри треугольника ABC и прямые AM, BM и CM проходят соответственно через центры окружностей, описанных около треугольников BMC, CMA и

AMB, то M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

149. Докажите, что в треугольнике ABC биссектриса угла A, средняя линия, параллельная AC, и прямая, соединяющая точки касания вписанной окружности со сторонами CB и CA, пересекаются в одной точке.

150. На каждой стороне треугольника взято по две точки таким образом, что все шесть отрезков, соединяющих каждую точку с противоположной вершиной, равны между собой. Докажите, что середины этих шести отрезков лежат на одной окружности.

151. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, AB — диаметр. Докажите, что проекции сторон AD и BC на прямую CD равны.

152. На прямой расположены последовательно точки A, B, C и D так, что $BC=2AB$, $CD=AC$. Одна окружность проходит через точки A и C, а другая — через точки B и D. Докажите, что общая хорда этих окружностей делит отрезок AC пополам.

153. Пусть B — точка отрезка AC. Фигура, ограниченная дугами трех полуокружностей с диаметрами AB, BC и CA, расположенными по одну сторону от прямой AC, носит название «сапожный нож» или «арбелос Архимеда». Докажите, что радиусы двух окружностей, каждая из которых касается двух полуокружностей и прямой, перпендикулярной AC и проходящей через B, равны между собой (задача Архимеда).

154. Даны две непересекающиеся окружности. Докажите, что четыре точки касания общих внешних касательных к этим окружностям лежат на одной окружности; точно так же четыре точки касания общих внутренних касательных лежат на одной окружности и четыре точки пересечения общих внутренних касательных с общими внешними касательными лежат на третьей окружности; при этом все три окружности концентрические.

155. Даны две непересекающиеся окружности. Третья окружность касается обеих данных внешним образом и имеет центр на прямой, проходящей через центры данных. Докажите, что третья окружность пересекает общие внутренние касательные к данным окружностям в четырех точках, образующих четырехугольник, две стороны которого параллельны общим внешним касательным к данным окружностям.

156. Высота прямоугольного треугольника ABC, опущенная на гипотенузу AB, равна h, D — основание высоты, M и N — середины отрезков AD и DB. Найдите расстояние от вершины C до точки пересечения высот треугольника CMN.

157. $ABCD$ — равнобочная трапеция с основаниями AD и BC, $AB=CD=a$, $AC=BD=b$, $BC=c$, M — произвольная точка дуги BC окружности, описанной около $ABCD$. Найдите отношение $\frac{BM+MC}{AM+MD}$.

158. Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 1, основание равно a. Около треугольника описана окружность. Найдите хорду, пересекающую боковые стороны треугольника, делящуюся точками пересечения на три равных отрезка.

159. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, M — середина AB, N — середина CD. Известно, что площади треугольников ABN и CDM равны, а площадь их общей части в k раз меньше площади каждого из них. Найдите отношение сторон BC и AD.

160. $ABCD$ — равнобочная трапеция ($AD \| BC$), в которой острый угол при большем основании равен 60°, а диагональ равна $\sqrt{3}$. Точка M удалена от вершин A и D соответственно на расстояния 1 и 3. Найдите MC.

161. Биссектриса каждого угла треугольника пересекает противоположную сторону в точке, равноудаленной от середин двух других сторон треугольника. Следует ли из этого, что треугольник правильный?

162. В треугольнике даны две стороны a и b ($a > b$). Найдите третью сторону, если известно, что $a + h_a \leqslant b + h_b$, где h_a и h_b — высоты, опущенные на эти стороны (h_a — высота к стороне a).

163. На стороне AB треугольника ABC взята точка M так, что прямая, соединяющая центр описанной около ABC окружности с точкой пересечения медиан треугольника BCM, перпендикулярна CM. Найдите отношение $\frac{BM}{BA}$, если $\frac{BC}{BA} = k$.

164. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$, в котором $AB = BC$, K — точка пересечения диагоналей. Найдите AB, если $BK = b$, $KD = d$.

165. Сторона квадрата равна a, произведения расстояний от противоположных вершин до прямой l равны между собой. Найдите расстояние от центра квадрата до прямой l, если известно, что ни одна из сторон квадрата не параллельна l.

166. В треугольнике ABC одна из сторон в два раза больше другой, кроме того, $\angle B = 2\angle C$. Найдите углы треугольника.

167. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая, проходящая через вершину C, пересекает прямые AB и AD в точках K и L. Площади треугольников KBC и CDL равны p и q. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

168. Основания трапеции равны a и b, угол между диагоналями равен 90°, а угол между непараллельными сторонами трапеции равен 45°. Найдите высоту трапеции.

169. В треугольнике ABC угол B равен 30°, $AC = 1$. Прямая, проходящая через B и перпендикулярная BC, пересекает прямую AC в точке D, такой, что $BD = 1$. Найдите DC.

170. Разносторонний треугольник ABC двумя прямыми, перпендикулярными AC, разделен на три равные по площади части. Известно, что отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, равны между собой и равны стороне AC. Найдите углы треугольника.

171. В треугольнике ABC известно: $AB=12$, $BC=13$, $CA=15$. На стороне AC взята точка M так, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM и BCM, равны. Найдите отношение $\frac{AM}{MC}$.

172. Дан прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=2a$, $BC=a\sqrt{2}$. На стороне AB как на диаметре во внешнюю сторону построен полукруг. Пусть M — произвольная точка на полуокружности, прямая MD пересекает AB в точке N, а прямая MC — в точке L. Найдите AL^2+BN^2 (задача Ферма).

173. Две окружности радиусами R и r $(R>r)$ имеют внешнее касание в точке A. Через точку B, взятую на большей окружности, проведена прямая линия, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найдите BC, если $AB=a$.

174. В параллелограмме $ABCD$ находятся три попарно касающиеся окружности, причем одна из них касается также сторон AB и BC, другая — AB и AD, а третья — BC и AD. Найдите радиус третьей окружности, если расстояние между точками касания на стороне AB равно a.

175. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки AN и BM пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника CMN, если площади треугольников OMA, OAB и OBN соответственно равны S_1, S_2, S_3.

176. Окружность, вписанная в треугольник ABC, делит медиану BM на три равные части. Найдите отношение $BC:CA:AB$.

177. Сторона BC треугольника ABC равна a, радиус вписанного круга r. Найдите площадь треугольника, если вписанный круг касается окружности, построенной на BC как на диаметре.

178. Дан правильный треугольник ABC со стороной a, BD — его высота. На BD построен второй правильный треугольник BDC_1 и на высоте BD_1 этого треугольника — третий правильный треугольник BD_1C_2. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CC_1C_2. Докажите, что ее центр находится на стороне треугольника ABC (C_2 находится вне треугольника ABC).

179. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна h. Докажите, что вершины острых углов треугольника и проекции основания высоты на катеты лежат на одной окружности. Определите длину хорды, высекаемой на прямой, содержащей высоту, этой окружностью, и отрезки хорды, на которые она делится гипотенузой.

180. Окружность радиусом R касается прямой l в точке A, AB — диаметр этой окружности, BC — произвольная хорда. Пусть D — основание перпендикуляра, опущенного из C на AB. Точка E лежит на продолжении CD за точку D, причем $ED=BC$. Касательные к окружности, проходящие через E, пересекают прямую l в точках K и N. Найдите KN.

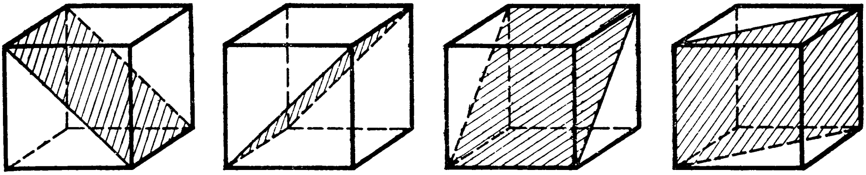
§ 6. СТЕРЕОМЕТРИЯ

При решении стереометрических задач требования к качеству чертежа, его наглядности значительно возрастают. Мы не научимся решать сколько-нибудь содержательные стереометрические задачи, если не освоим принципы и технику построения пространственного чертежа. Сюда входит: выбор оптимального положения изображаемого тела (в частности, выбор ориентации — верх и низ, право и лево), выбор ракурса и проекции, умение минимизировать количество изображенных линий (напомним, что видимые и невидимые линии должны изображаться различным образом), умение строить сечения и проекции на плоскость, умение выделить на пространственном чертеже и соответственно изобразить плоскую конфигурацию, дающую ключ к решению задачи, умение перевести условие задачи на графический язык.

Пространственные тела можно разделить на две группы: удобные для пространственного изображения и неудобные. К первой группе мы отнесем следующие многогранники: параллелепипед (и прежде всего прямоугольный), треугольную призму, треугольную пирамиду (или тетраэдр) и четырехугольную пирамиду. Все остальные — неудобные. Конечно, такое разделение носит условный характер. В частности, цилиндр и конус достаточно хорошо и наглядно «смотрятся» на проекционном чертеже. Тем не менее практика показывает, что в большинстве задач, в условии которых не фигурируют «удобные» многогранники, можно или вычленить в рассматриваемом теле один из вышеперечисленных «удобных» многогранников, или каким-то способом «привязать» заданную конфигурацию к одному из них.

Следует упомянуть также о возможности в некоторых случаях вообще не строить пространственное изображение, а обойтись одним или несколькими плоскими чертежами, представляющими собой какие-либо сечения или проекции заданного тела, заданной конфигурации.

Важную роль играет выбор правильного ракурса. В качестве небольшой иллюстрации приведем рисунок 59, *а, б, в, г,* на котором изображен куб и его сечение, проходящее через два противоположных параллельных ребра. Понятно, что рисунок 59, *б* совсем плох; 59, *а* получше, но в нем один небольшой недостаток —



а) б) в) г)

Рис. 59

диагональ задней грани куба «почти» проходит (в проекции) через вершину куба; наиболее удачными для изображения рассматриваемой ситуации представляются рисунки 59, *в, г.* (Рассмотрите другие возможности изображения этого сечения.)

В данном пособии мы рассматриваем некоторые виды стереометрических задач и методы их решения. При этом в разделах, относящихся к методам решения, большей частью мы ограничиваемся объявлением метода и одной-двумя задачами, иллюстрирующими «работу» этого метода.

Ведущие принципы решения геометрических задач, объявленные в пособии для X класса, остаются прежними. Напомним их.

Основным средством решения является аналитический метод. В нем мы выделяем две разновидности: метод поэтапного решения и составление уравнений. Аналитический метод имеет различные формы реализации: выделение стандартных фигур и конфигураций (прямоугольный треугольник, правильная треугольная пирамида, треугольник и в нем биссектриса, окружность и две хорды и т. д.) и применение к ним соответствующих теорем и формул, метод координат, векторный метод и др. К этому основному магистральному пути добавляются различные геометрические методы и приемы. Важнейшую роль играют опорные задачи, набор которых представляет собой своеобразный арсенал используемого оружия: теорем, формул, стандартных ситуаций, стандартных схем реализации того или иного метода.

32. Многогранники

Выделим два основных типа задач в связи с многогранниками. Первый тип: задачи на вычисление элементов — длин, площадей, объемов, линейных и двугранных углов — указанных многогранников. Второй тип: задачи на сечения. Начнем с задач первого типа.

Перечислим основные элементы правильных призм и пирамид. Линейные: сторона основания, боковое ребро, апофема боковой грани (для пирамид), радиусы окружностей, вписанных или описанных по отношению к основанию, радиус описанного около многогранника шара, радиус вписанного шара (для призм этот шар не всегда существует) и т. д. Площади: основания (или оснований), боковой поверхности, полной поверхности. Объем многогранника. Угловые: линейные углы при вершине, двугранные при основании или между боковыми гранями. Правильная призма или пирамида задается величинами двух независимых элементов. (В частности, эти два элемента не могут быть углами.) Таким образом, возникает достаточно обширная серия простейших задач: по двум данным величинам найти третью. Например:

1. *Найти объем правильной треугольной призмы, полная поверхность которой равна* $8\sqrt{3}$, *а боковое ребро равно* $\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е. Если a — сторона основания призмы, то площадь одного основания будет $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а полная поверхность $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+$ $+3a\sqrt{3}$. Получаем для a уравнение $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+3a\sqrt{3}=8\sqrt{3}$, из которого найдем $a=2$. Объем призмы равен 3.

2. *Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна* a, *а двугранный угол между соседними боковыми гранями равен* α.

Р е ш е н и е. На рисунке 60 изображена правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Построим линейный угол двугранного угла между соседними боковыми гранями. Для этого опустим из вершин B и D перпендикуляры на ребро SC. Поскольку пирамида правильная, то основания этих перпендикуляров совпадут (точка K). Угол DKB является линейным углом между плоскостями SDC и SBC, $\angle DKB=\alpha$.

Теперь составим план решения. Последовательно находим DB, OK (из равнобедренного треугольника DKB), $\sin\varphi=\frac{OK}{OC}$, $\operatorname{tg}\varphi=$ $=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$, $h=SO=OC\cdot\operatorname{tg}\varphi$ (из прямоугольного треугольника SOC) и, наконец, находим объем пирамиды.

Теперь реализуем этот план: $DB=a\sqrt{2}$, $OK=OB\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=$

$$=\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},\ \sin\varphi=\frac{OK}{OC}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\sin\alpha}{2\sqrt{-\cos\alpha}},\ h=\frac{a\sqrt{2}\sin\alpha}{4\sqrt{-\cos\alpha}}.$$

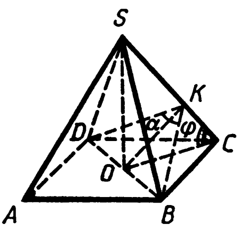


Рис. 60

Ответ. $\frac{a^3\sqrt{2}\sin\alpha}{12\sqrt{-\cos\alpha}}$ (обращаем внимание: должно быть $\alpha>90°$).

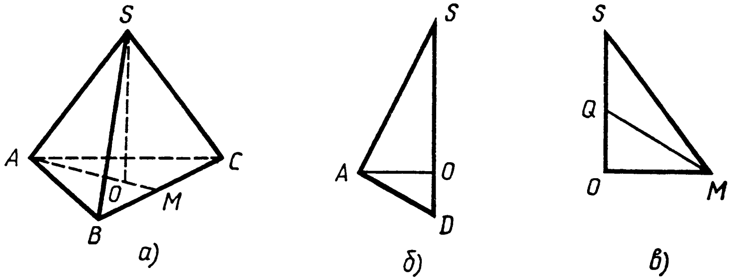


Рис. 61

3. *Найти радиус вписанного и радиус описанного шара для треугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h.*

Решение. Пусть O — центр основания ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$, M — середина BC (рис. 61, *а*), AM — высота в треугольнике ABC, $AO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Очевидно, что центры обоих шаров находятся на прямой SO. Найдем сначала радиус описанного шара. Для этого продолжим SO до пересечения с описанным шаром в точке D (рис. 61, *б*). Очевидно, SD — диаметр этого шара, $\angle SAD=90°$. В прямоугольном треугольнике SAD известны высота AO, опущенная на гипотенузу, и отрезок гипотенузы SO. Отсюда найдем $OD=\frac{AO^2}{SO}=\frac{a^2}{3h}$ (см. X, 6, § 7). Таким образом, если R — радиус описанного шара, то

$$2R=SD=SO+OD=h+\frac{a^2}{3h}=\frac{3h^2+a^2}{3h}.$$

Для нахождения r — радиуса вписанного шара рассмотрим треугольник SOM (рис. 61, *в*). Если Q — центр вписанного шара, то QM — биссектриса угла SMO и $QO=r$. В прямоугольном треугольнике SMO известны катеты $SO=h$ и $OM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Находим гипотенузу $SM=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$. По теореме о биссектрисе внутреннего угла (X, 19, § 7) имеем:

$$\frac{OQ}{SQ}=\frac{OM}{SM}, \quad \frac{r}{h-r}=\frac{a\sqrt{3}}{6\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}},$$

откуда $r=\frac{ah}{a+\sqrt{12h^2+a^2}}$.

Ответ. Радиус описанного шара равен $\frac{3h^2+a^2}{6h}$, радиус вписанного шара равен $\frac{ah}{a+\sqrt{12h^2+a^2}}$.

Уже на этих примерах, особенно на последнем, мы видим, что решение стереометрических задач очень часто (практически всегда) сводится к решению одной или нескольких планиметрических задач.

Следующий тип задач — задачи на сечение. В основе этих задач лежит умение построить сечение многогранника плоскостью и определить вид этого сечения. Здесь мы рассмотрим лишь задачи, в которых сечение задано или тремя точками, или точкой и прямой, или двумя пересекающимися (параллельными) прямыми, или двумя точками и прямой, параллельной плоскости сечения, или точкой и параллельной плоскостью. В принципе возможны и нередко встречаются задачи, в которых сечение задано иным, более «хитрым» способом.

4. *Построить сечение куба плоскостью, проходящее через середины двух смежных ребер куба и наиболее удаленную от соединяющей их прямой вершину куба. Найти площадь этого сечения, если ребро куба равно 1.*

Решение. Основная схема, которой обычно следует придерживаться при построении сечения, состоит в последовательном построении прямых, по которым плоскость сечения пересекается с плоскостями граней данного многогранника или же с какими-то вспомогательными плоскостями.

Пусть K и L — середины ребер D_1C_1 и C_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 62). Наиболее удаленной от прямой KL вершиной является, очевидно, вершина A. Плоскость сечения пересекается с плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ по прямой KL. Продолжим KL до пересечения с прямыми A_1D_1 и A_1B_1 в точках E и F. (В этом продолжении все дело. Прием этот стандартный. Запомните его.) Точка E принадлежит плоскости ADD_1A_1. В этой же плоскости расположена еще одна точка сечения — точка A. Следовательно, плоскость сечения пересекается с плоскостью ADD_1A_1 по прямой AE. Обозначим через N точку пересечения этой прямой с ребром DD_1. Вновь имеем в плоскости грани, на сей раз грани DCC_1D_1, две точки, принадлежащие сечению,— K и N. Строим отрезок KN, являющийся стороной многоугольника сечения. Аналогично находится точка M.

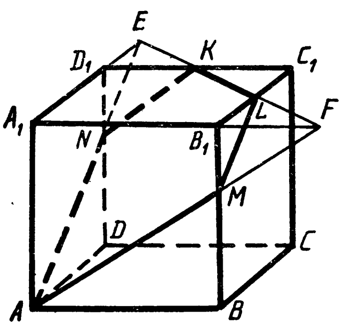


Рис. 62

Окончательно получаем, что сечением является пятиугольник $KLMAN$. Найдем его площадь. Эту площадь можно представить в виде разности площадей: из площади треугольника AEF вычитаются площади двух, очевидно равных, треугольников NKE и MLF. Более того, два последних треугольника подобны треугольнику AEF с коэффициентом $\frac{1}{3}\left(\frac{EK}{EF}=\frac{LF}{EF}=\frac{1}{3}\right)$. Значит, их площади в девять раз меньше площади треугольника AEF, а площадь искомого пятиугольника составляет $\frac{7}{9}$ площади треугольника AEF.

Осталось найти площадь треугольника AEF. Последовательно найдем: $D_1E=D_1K=B_1L=B_1F=\frac{1}{2}$, $A_1E=A_1F=\frac{3}{2}$, $EF=$ $=\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $AE=AF=\sqrt{1+\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Таким образом, AEF — равнобедренный треугольник с основанием $EF=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ и боковыми сторонами $AE=AF=\frac{1}{2}\sqrt{13}$. Его площадь равна $\frac{3}{8}\sqrt{17}$.

Ответ. Площадь сечения равна $\frac{7}{24}\sqrt{17}$.

(Чтобы не удлинять решение, мы опустили многие элементы полного обоснования. Например, почему треугольники ENK и EAF подобны.)

33. Круглые тела. Цилиндр, конус, шар

По сравнению с многогранниками круглые тела труднее поддаются изображению. Особенно это относится к шару. В самом деле, изображением шара (в ортогональной проекции) будет круг, «увидеть» в котором пространственное тело при отсутствии каких-то пространственных связей нелегко. Поэтому шар, а тем более шары при решении стереометрических задач обычно не изображают. Скажем даже, что мы не знаем ни одной задачи, в которой фигурируют два или более шаров и в которой хороший чертеж, служащий подспорьем в решении, а не затрудняющий решение, требовал бы изображения этих шаров. С другой стороны, многие задачи на перечисленные в заглавии круглые тела очевидным образом и сразу сводятся к планиметрическим задачам. Так, например, определение радиуса шара, вписанного в заданный конус или описанного около него, сводится к определению радиуса окружности, соответственно вписанной в равнобедренный треугольник или описанной около этого треугольника.

Напомним основные понятия и параметры, связанные с цилиндром. Основные понятия: основание, радиус основания, ось, высота, образующая, осевое сечение, боковая и полная поверхности. Соответственно параметры: радиус основания, площадь основания, высота (равна образующей), площадь осевого сечения, площади боковой и полной поверхностей, площадь осевого сечения, объем цилиндра. Любые два из перечисленных параметров, кроме пар: радиус основания и площадь основания, площадь осевого сечения и площадь боковой поверхности, задают цилиндр.

Для конуса добавляются: угол наклона образующей конуса к плоскости основания и угол при вершине осевого сечения, т. е.

угол между двумя диаметрально противоположными образующими. Поскольку два указанных угла являются углами равнобедренного треугольника, получающегося в осевом сечении конуса, между ними имеет место очевидная связь. (Какая?) Как и цилиндр, конус задается двумя независимыми параметрами.

5. *Цилиндр и конус имеют равные основания, равные площади полной поверхности и равные объемы. Найти отношение их боковых поверхностей.*

Решение. Обозначим радиус основания и высоту цилиндра через r и h. По условию радиус основания и высота конуса r и $3h$. (То, что высота конуса в три раза больше высоты цилиндра, следует из равенства площадей оснований и объемов конуса и цилиндра.) Если l — образующая конуса, то $l^2=r^2+9h^2$. Боковая и полная поверхности цилиндра:

$$S_{\text{бок. ц}}=2\pi rh,\ S_{\text{пол. ц.}}=2\pi r^2+2\pi rh;$$

конуса:

$$S_{\text{бок к.}}=\pi rl,\ S_{\text{пол. к.}}=\pi r^2+\pi rl.$$

По условию $S_{\text{пол. ц.}}=S_{\text{пол. к.}}$, откуда $r+2h=l$. Подставим вместо l выражение $r+2h$ в соотношение $l^2=r^2+9h^2$. После возведения в квадрат и упрощений получим $h=\frac{4}{5}r$. Далее находим $l=\frac{13}{5}r$, $S_{\text{бок. ц}}=\frac{8}{5}\pi r^2$, $S_{\text{бок. к.}}=\frac{13}{5}\pi r^2$.

Ответ. Отношение равно $\frac{8}{13}$.

6. *Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Через вершину конуса проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол β. Найти площадь получившегося сечения, если площадь осевого сечения равна S.*

Решение. На рисунке 63, *а, б, в* изображены: общий вид конуса с проведенным сечением SBC, осевое сечение и основание конуса. D — середина хорды BC. По условию $\angle SDO=\beta$.

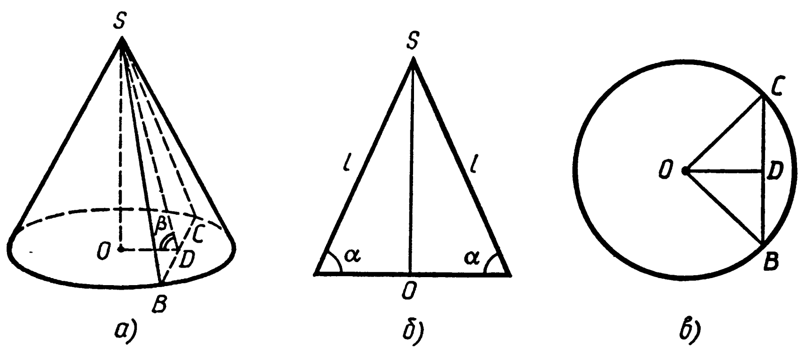


Рис. 63

Пусть l — образующая конуса. Тогда площадь осевого сечения равна $\frac{1}{2}l^2\sin(180°-2\alpha)=\frac{1}{2}l^2\sin 2\alpha$.

По условию $\frac{1}{2}l^2\sin 2\alpha=S$, $l^2=\frac{2S}{\sin 2\alpha}$.

Далее, $SO=l\sin\alpha$, $OC=OB=l\cos\alpha$,

$$OD=SO\operatorname{ctg}\beta=l\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta,\ SD=\frac{SO}{\sin\beta}=\frac{l\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$S_{\text{сеч.}}=\frac{1}{2}BC\cdot SD=BD\cdot SD=SD\cdot\sqrt{OB^2-OD^2}=$$

$$=\frac{l^2\sin\alpha}{\sin\beta}\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta}=\frac{2S\sin\alpha}{\sin 2\alpha\sin\beta}\times$$

$$\times\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta}=\frac{S}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta}.$$

Полученное выражение можно преобразовать к виду

$$\frac{S}{\cos\alpha\cdot\sin^2\beta}\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}.$$

7. *Через ось конуса проведены две перпендикулярные между собой плоскости. Найти радиус шара, вписанного в одну из четырех образовавшихся частей, если радиус основания конуса равен r, а угол наклона образующих к плоскости основания равен α.*

Решение. Если x — радиус искомого шара, то расстояние от его центра до центра основания конуса равно $x\sqrt{3}$. В самом деле, пусть проведенные плоскости и плоскость основания конуса являются координатными плоскостями (осями являются линии пересечения этих плоскостей). При соответствующем выборе направления осей центр шара Q будет иметь координаты (x, x, x), значит, $OQ=x\sqrt{3}$. Проведем сечение через центр шара и ось конуса (рис. 64, *а, б*).

На рисунке 64, *б* изображен треугольник SOA, представляющий собой «половину» этого сечения. D — точка касания шара с плоскостью основания, $\angle QAD=\frac{\alpha}{2}$, $DA=x\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $OD=x\sqrt{2}$.

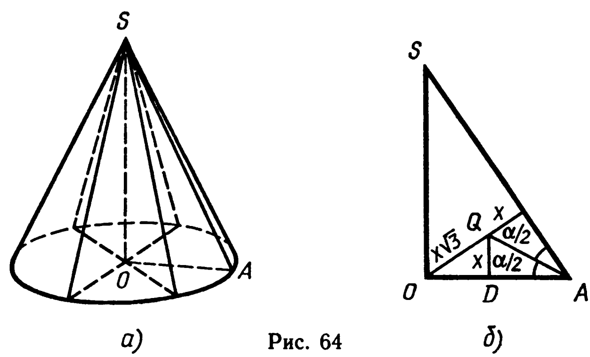


Рис. 64

Поскольку $OD+DA=r$, то $x\left(\sqrt{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)=r$.

Ответ. $\dfrac{r}{\sqrt{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.

34. Прямые и плоскости в пространстве

В задачах на взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве при построении чертежа очень важно суметь «привязать» заданную конфигурацию к какому-либо многограннику. Запомните: прямые не должны просто «висеть» в пространстве. Удачная интерпретация — половина успеха, а то и более. Например:

8. *Дан двугранный угол величиной α. В плоскости одной из его граней проведена прямая, перпендикулярная ребру этого двугранного угла, а в плоскости другой его грани — прямая, образующая угол β с ребром. Найти угол между этими прямыми.*

Решение. Можно считать, что обе прямые проходят через одну точку на ребре двугранного угла. Рассмотрим прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 65). Пусть AA_1B_1B и AA_1C_1C образуют грани данного двугранного угла, A_1C_1 — первая из указанных в условии прямых, A_1B — вторая, $\angle BAC=\alpha$, $\angle AA_1B=\beta$. Мы еще располагаем определенной свободой и можем выбрать вид треугольников, лежащих в основании призмы,— равнобедренные или прямоугольные.

Пусть $\angle BCA=\angle B_1C_1A_1=90°$. Тогда $\angle BC_1A_1=90°$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Обозначим $A_1C_1=a$, тогда $AB=A_1B_1=\frac{a}{\cos\alpha}$, $A_1B=\frac{AB}{\sin\beta}=$
$=\frac{a}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$.

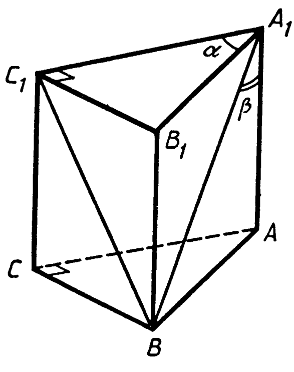


Рис. 65

Таким образом, $\cos\angle BA_1C_1=\frac{A_1C_1}{A_1B}=$
$=\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

Ответ. $\arccos(\cos\alpha\cdot\sin\beta)$.

9. *В пространстве заданы три прямые и плоскость. Известно, что все углы между двумя прямыми и между одной прямой и плоскостью равны между собой. Найти эти углы.*

Решение. Будем считать, что все прямые проходят через одну точку. Тогда нужную интерпретацию мы получим, рассмотрев треугольную пирамиду, у которой боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом φ, а каждый из плоских углов при вершине равен φ или $\pi-\varphi$. Соответственно возникают четыре случая: все плоские углы при вершине равны φ; два угла равны φ, а один равен $\pi-\varphi$ и т. д.

Начнем со второго случая. Пусть в треугольной пирамиде $ABCD$ ребра DA, DB и DC образуют угол φ с плоскостью ABC, $\angle ADB = \angle BDC = \varphi$, $\angle ADC = \pi - \varphi$. Проведем высоту DO (рис. 66, *а*). Все боковые ребра DA, DB и DC равны между собой. Пусть они равны 1. Тогда $AB = BC = 2\sin\frac{\varphi}{2}$, $AC = 2\cos\frac{\varphi}{2}$. O — центр описанной около ABC окружности, радиус этой окружности равен $\cos\varphi$. Получили треугольник со сторонами $2\sin\frac{\varphi}{2}$, $2\sin\frac{\varphi}{2}$, $2\cos\frac{\varphi}{2}$ и радиусом описанной окружности, равным $\cos\varphi$.

Проведем в равнобедренном треугольнике ABC (рис. 66, *б*) высоту $BE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}}$.

По теореме синусов $\left(R = \frac{a}{2\sin A}\right)$ имеем:

$$\cos\varphi = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{BC \cdot AB}{2BE} = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Получаем уравнение для φ:

$$\cos\varphi \cdot \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2} - \cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Пусть $\cos\varphi = y$. Имеем уравнение $y\sqrt{2 - 2y - \frac{1+y}{2}} = 1 - y$, откуда $5y^3 - y^2 - 4y + 2 = 0$.

Получившееся уравнение не имеет положительных корней. Это можно, например, доказать, представив левую часть в виде суммы

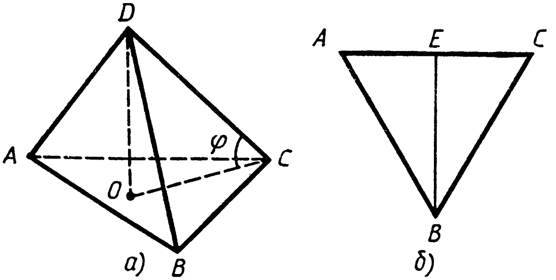


Рис. 66

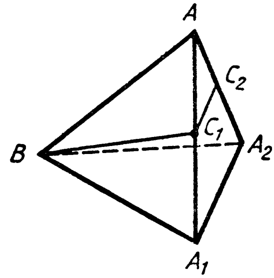


Рис. 67

$$y\left(5y^2-4y+\frac{4}{5}\right)+\left(3y^2-\frac{24}{5}y+2\right).$$

Первый из квадратных трехчленов, заключенных в скобки, неотрицателен, а второй положителен.

К такому же уравнению мы придем, рассматривая вариант, когда два плоских угла при вершине равны $\pi-\varphi$, а один равен φ.

Если все плоские углы при вершине φ, то рассматриваемая пирамида является правильной. Уравнение для φ имеет вид $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi=\sin\frac{\varphi}{2}$. Из этого уравнения можно найти, что $\cos\varphi=$ $=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$. (Можно решать как квадратное относительно $\sin\frac{\varphi}{2}$, а можно возвести в квадрат и решать относительно $\cos\varphi$.)

Последний случай (все плоские углы при вершине $\pi-\varphi$) оказывается невозможным, полученное уравнение не имеет решений, для которых $\cos\varphi>0$.

Ответ. $\arccos\frac{\sqrt{7}-1}{3}$.

Замечание. В данной задаче все варианты, кроме простейшего, оказываются невозможными. Тем не менее их наличие придает задаче значительную глубину, а любители проверять себя ответом получают очередное предупреждение.

В двух рассмотренных примерах интерпретация условия, привязывание плоскостей и прямых к «удобному» многограннику затруднений не вызывали.

Рассмотрим задачу, в которой найти удачную интерпретацию не так просто.

10. *На плоское зеркало под углом α падает луч света. Зеркало поворачивается на угол β вокруг проекции луча на зеркало. На какой угол отклонится отраженный луч?*

Решение. Обозначим через A какую-то точку на падающем луче, B — точка падения луча на зеркало, C_1 — проекция A на зеркало, находящееся в исходном положении, A_1 и A_2 — точки, симметричные A относительно зеркала, исходного и повернутого соответственно, C_2 — середина AA_2 (рис. 67).

Поскольку отраженные лучи представляют собой соответственно продолжения A_1B и A_2B, то искомый угол равен углу A_1BA_2. AC_1 и AC_2 перпендикулярны данному зеркалу и повернутому. Значит, $\angle C_1AC_2=\angle A_1AA_2=\beta$. По условию $\angle ABC_1=\alpha$. Если $AB=$ $=A_1B=A_2B=a$, то $AC_1=a\sin\alpha$, $C_1C_2=AC_1\cdot\sin\beta=a\sin\alpha\times$ $\times\sin\beta$ ($\angle AC_2C_1=90°$, так как C_1C_2 принадлежит повернутому зеркалу, а C_2 — проекция A на него). Значит, $A_1A_2=2\,C_1\,C_2=$ $=2a\sin\alpha\sin\beta$. Теперь в равнобедренном треугольнике A_1BA_2 мы знаем все стороны и легко найдем угол A_1BA_2.

Ответ. $2\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$.

35. Проектирование. Нахождение расстояния и угла между скрещивающимися прямыми

Проектирование и проведение сечений — два наиболее распространенных приема, при помощи которых пространственная задача сводится к одной или нескольким планиметрическим задачам.

Вспомогательными сечениями мы уже неоднократно пользовались в предыдущих параграфах. Типичными здесь являются задачи на нахождение радиусов вписанных и описанных шаров для правильных пирамид, конусов и т. д.

Большей частью метод сечений играет роль вспомогательного графического приема, облегчающего решение или поиск решения задачи. Рассмотрим метод проектирования, а точнее, один класс задач, где этот прием может быть эффективно использован.

Как известно, при проектировании сохраняется отношение отрезков, расположенных на одной прямой или параллельных. Именно это свойство проектирования обычно и используется.

Как полноценный метод проектирование (ортогональное) выступает при решении задач, в которых требуется определить расстояние и угол между скрещивающимися прямыми. В основе лежит следующее утверждение:

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от точки, являющейся проекцией одной из данных прямых на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на эту же плоскость.

Другими словами, если l_1 и l_2 — две скрещивающиеся прямые (рис. 68), L — плоскость, перпендикулярная одной из них, например l_1, точка A — проекция прямой l_1 на плоскость L, прямая l_2' — проекция прямой l_2 на плоскость L, то расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию от точки A до прямой l_2'. При этом общий перпендикуляр между прямыми l_1 и l_2 проектируется в перпендикуляр, проведенный из точки A на прямую l_2'.

Высказанное утверждение достаточно очевидно. Чтобы убедиться в его справедливости, можно, например, провести через прямую l_2 плоскость π, параллельную прямой l_1. Тогда прямая l_2' есть линия пересечения плоскостей L и π.

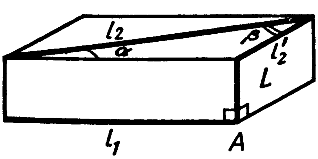


Рис. 68

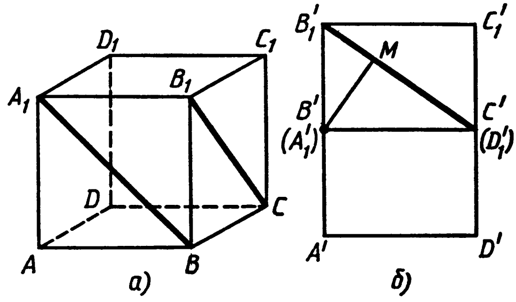


Рис. 69

Предложенная конструкция позволяет находить и угол между скрещивающимися прямыми: если α — угол между прямыми l_1 и l_2, а β — угол между прямой l_2 и плоскостью L (рис. 68, $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\beta \leqslant \frac{\pi}{2}$), то $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$.

Таким образом, взяв на прямой l отрезок длиной d и найдя d' — длину его проекции на плоскость L, получим $\sin \alpha = \frac{d'}{d}$.

Решим две задачи.

11. *Найти расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба с ребром 1.*

Решение. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Будем искать расстояние между прямыми A_1B и B_1C (рис. 69, *а*). Спроектируем куб на плоскость, проходящую через точку B и перпендикулярную диагонали A_1B (рис. 69, *б*, проекции вершин куба на этом рисунке обозначены так же, как и его соответствующие вершины, но с добавлением «штриха»). Задача сводится к нахождению расстояния от точки B' до прямой $B_1'C'$. Поскольку плоскость AB_1C_1D перпендикулярна прямой A_1B, то прямоугольник $A'B_1'C_1'D'$ равен прямоугольнику AB_1C_1D. Но B' — середина отрезка $A'B_1'$, следовательно, в прямоугольном треугольнике $B'B_1'C'$ катеты $B'B_1'$ и $B'C'$ равны соответственно $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и 1, $B_1'C' = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Если $B'M$ — высота, проведенная к гипотенузе $B_1'C'$, то $B'M = \frac{B'B_1' \cdot B'C'}{B_1'C'} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Замечание. Если мы проведем общий перпендикуляр между прямыми A_1B и B_1C, то он спроектируется в $B'M$. Поскольку при проектировании отношение отрезков, расположенных на одной прямой, сохраняется, то общий перпендикуляр между прямыми A_1B и B_1C делит отрезок B_1C в отношении $\frac{B_1'M}{MC'}$.

Последнее отношение легко вычисляется, оно равно $\frac{1}{2}$. В таком же отношении делится общим перпендикуляром и диагональ BA_1.

12. *В основании пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая — через точку C и середину ребра AB.*

Решение. На рисунке 70, *а* изображена данная пирамида, D и E соответственно середины ребер AB и BC. Спроектируем пирамиду на плоскость, перпендикулярную CD (рис. 70, *б*): можно считать, что она содержит ребро AB. При этом CD спроектируется в точку D', точка E — в E' — середину отрезка $B'D'$. Очевидно, $B'D' = \frac{1}{2}B'A' = \frac{1}{2}BA = 2\sqrt{2}$, $S'D' \perp A'B'$ и $S'D' = SC = 2$.

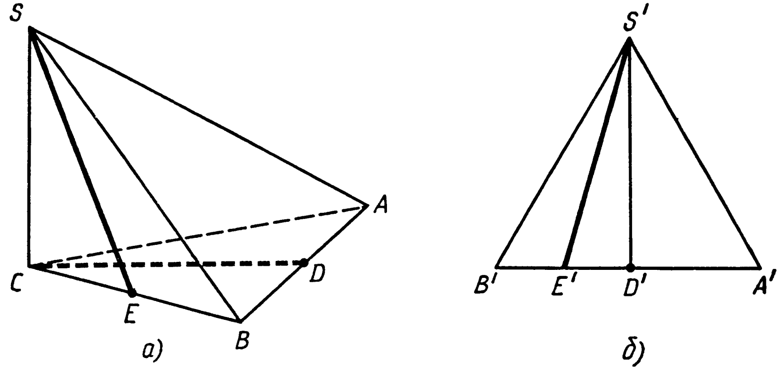


Рис. 70

Искомое расстояние равно расстоянию от точки D' до прямой SE', т. е. равно высоте в прямоугольном треугольнике $S'D'E'$, проведенной к гипотенузе $S'E'$.

Имеем $E'D'=\sqrt{2}$, $S'E'=\sqrt{(S'D')^2+(E'D')^2}=\sqrt{6}$.

Итак, искомое расстояние равно $\frac{S'D'\cdot E'D'}{S'E'}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Поскольку $SE=\sqrt{SC^2+CE^2}=\sqrt{12}$, то можем найти α — искомый угол между прямыми SE и CD:

$$\sin\alpha=\frac{S'E'}{SE}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

36. Развертка

К двум упомянутым ранее приемам, при помощи которых стереометрические задачи сводятся к плоским (проектирование, проведение сечений), можно добавить еще один — развертку. Вот один из известных примеров:

13. *Доказать, что если у тетраэдра суммы плоских углов при трех вершинах равны 180°, то все его грани — равные треугольники.*

Решение. Понятно, что и у четвертой вершины сумма плоских углов равна 180°. Обозначим данный тетраэдр $ABCD$ и сделаем развертку этого тетраэдра, разрезав его поверхность по ребрам DA, DB, DC (рис. 71). Поскольку суммы плоских углов при вершинах A, B и C равны 180°, то при развертке получим треугольник $D_1D_2D_3$, в котором A, B и C — середины сторон. Следовательно, на самом деле все грани тетраэдра $ABCD$ равны между собой.

Метод развертки очень удобен при решении задач, в которых требуется найти кратчайший путь между двумя точками по поверхности многогранника, цилиндра или конуса. Например:

14. *Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB=AA_1=12$, $AD=30$. Точка M расположена в грани*

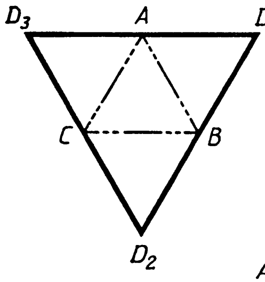


Рис. 71

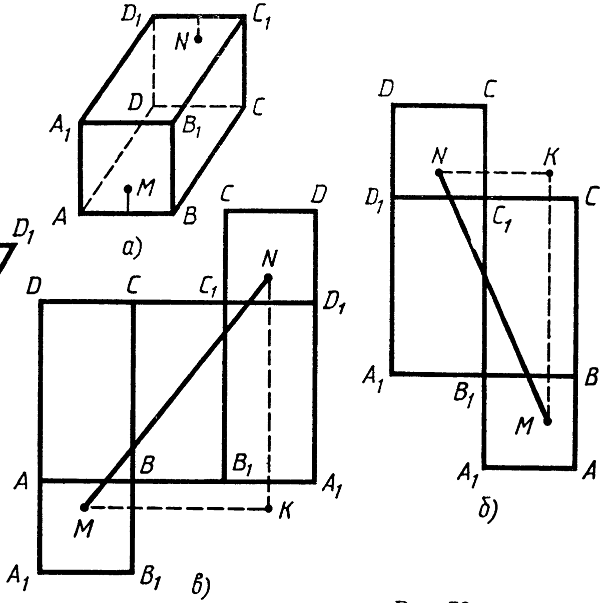


Рис. 72

ABB_1A_1 на расстоянии 1 от середины AB и на равных расстояниях от A и B. Точка N принадлежит грани DCC_1D_1 и расположена симметрично точке M относительно центра параллелепипеда. Найти длину кратчайшего пути по поверхности параллелепипеда между точками M и N.

Решение. Рассмотрим следующие варианты:

1) Путь пересекает A_1B_1 и D_1C_1 (рис. 72, *а*). Длина кратчайшего пути в этом случае находится легко. Она равна $11+30+1=42$.

2) Путь последовательно пересекает ребра BB_1, B_1C_1, C_1D_1. Сделаем развертку. Для упрощения будем обозначать точки на развертке так же, как и на параллелепипеде (рис. 72, *б*).

По теореме Пифагора $MN=\sqrt{MK^2+NK^2}=\sqrt{37^2+17^2}=\sqrt{1658}$.

3) Путь пересекает последовательно ребра AB, BC, B_1C_1, C_1D_1. Сделаем развертку (рис. 72, *в*). Длина кратчайшего пути в этом случае будет равной $MN=\sqrt{MK^2+NK^2}=\sqrt{24^2+32^2}=40$.

Удивительно, но именно этот парадоксальный путь и оказывается кратчайшим. Его длина 40. Других вариантов (кроме, очевидно, плохих) не осталось.

37. Достраивание тетраэдра

Суть метода в том, что рассматриваемый тетраэдр достраивается до параллелепипеда, призмы. Чаще всего используется следующий способ. Через каждое ребро тетраэдра проведем плоскость, параллельную противоположному. Получим три пары параллельных плоскостей, образующих параллелепипед. Ребра исходного тетраэдра являются диагоналями граней получившегося параллелепипеда (рис. 73). При построении чертежа лучше начинать с изображения параллелепипеда. Ограничимся одним типичным примером.

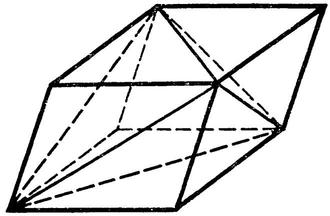


Рис. 73

15. *Противоположные ребра тетраэдра попарно равны. В основании лежит треугольник со сторонами a, b и c. Найти объем тетраэдра.*

Р е ш е н и е. Достроим тетраэдр описанным выше способом до параллелепипеда (рис. 73). В получившемся параллелепипеде диагонали противоположных граней равны. Следовательно, все грани — прямоугольники, а получившийся параллелепипед прямоугольный. Объем данного тетраэдра составляет $\frac{1}{3}$ объема параллелепипеда (от параллелепипеда отрезаются 4 треугольные пирамиды, объем каждой пирамиды равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда). Обозначим ребра параллелепипеда через x, y и z. Получаем систему уравнений: $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=b^2$, $z^2+x^2=c^2$. Сложив эти уравнения, получим $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$. Таким образом, $x^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2)$, $y^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$, $z^2=\frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2)$. Теперь находим объем параллелепипеда, а затем и тетраэдра.

Ответ. $\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}$.

38. Касание круглых тел

Из всех пространственных тел наиболее неудобен для изображения (имеется в виду пространственное изображение) шар. Как правило, шар (а тем более несколько шаров) не изображается: указывается его центр (центры), фигурирующие в условии радиусы и т. д. (Помните? «Скелетный чертеж», X, § 7.)

Рассмотрим следующую задачу:

16. *В пространстве расположены четыре шара одного радиуса и четыре шара другого радиуса. Каждый шар касается трех шаров такого же радиуса и трех — другого. Найти отношение радиуса меньшего шара к радиусу большего шара.*

Р е ш е н и е. Центры четырех шаров одинакового радиуса являются вершинами правильного тетраэдра, ребро которого равно диаметру одного шара. Пусть центры шаров радиуса R расположены в вершинах правильного тетраэдра $ABCD$ (рис. 74, a).

Ребро тетраэдра равно $2R$. Центр каждого из четырех шаров радиуса r $(r<R)$ равноудален от трех вершин этого тетраэдра, а значит, все эти центры расположены на высотах данного тетраэдра (или на их продолжениях). Проведем две высоты AA_1 и BB_1 и рассмотрим треугольник ABK, получающийся в сечении тетраэдра плоскостью, проходящей через эти две высоты (рис. 74, *б*). Центры двух шаров радиуса r лежат на прямых AA_1 и BB_1. Возможны два случая. Оба центра расположены на отрезках AO и BO или оба — вне этих отрезков.

Начнем со второго (правильного) случая. Обозначим через M и N центры двух шаров радиуса r. Тогда $ABMN$ — равнобочная трапеция, ее боковые стороны $AN=BM=R+r$, основания $AB=$ $=2R$, $MN=2r$. Если $\angle ABB_1=\varphi$, то $\sin\varphi=\frac{AB_1}{AB}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. $\Big(B_1$ — центр правильного треугольника ADC, $AB_1=\frac{2R}{\sqrt{3}}.\Big)$ Опустим из M перпендикуляр MP на AB. Проведем через O прямую перпендикулярно основаниям трапеции. Понятно, что высота трапеции — PM — равна сумме высот равнобедренных треугольников AOB и и MON, т. е. $PM=(R+r)\operatorname{tg}\varphi=(R+r)\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Следовательно, $PB=PM=(R+r)\frac{1}{\sqrt{2}}$. (Оказывается, PBM — равнобедренный прямоугольный треугольник.) С другой стороны, $PB=R-r$. Таким образом, $(R+r)\frac{1}{\sqrt{2}}=R-r$, $\frac{r}{R}=3-2\sqrt{2}$. (Докажите самостоятельно, что центры меньших шаров не могут располагаться на отрезках AO и BO.)

Ответ. $3-2\sqrt{2}$.

Похоже решаются задачи, в которых шары касаются цилиндров и конусов. Например:

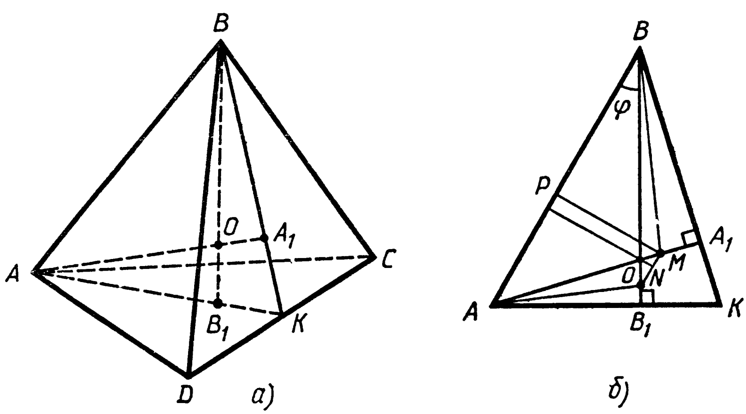


Рис. 74

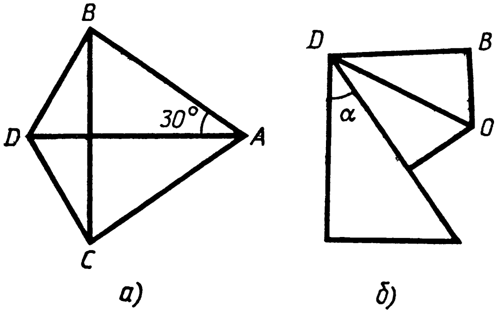


Рис. 75

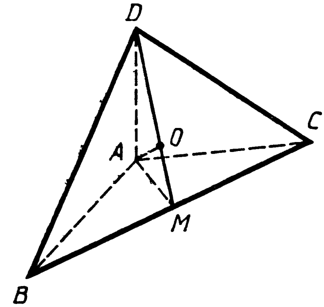


Рис. 76

17. *Конус и цилиндр имеют равные основания и равные высоты. Их основания принадлежат одной плоскости и касаются друг друга. Два равных шара, радиус каждого равен радиусу основания конуса (и цилиндра), касаются между собой, боковых поверхностей конуса и цилиндра и плоскости, содержащей другое основание цилиндра и вершину конуса. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.*

Решение. Спроектируем центры шаров и оси конуса и цилиндра на плоскость, проходящую через верхнее основание цилиндра. На рисунке 75, *а* точки A и D соответственно проекции (или концы) осей цилиндра и конуса, B и C — точки касания с рассматриваемой плоскостью шаров. Из условий (основания конуса и цилиндра касаются, шары касаются между собой и боковой поверхности цилиндра) следует, что $AB=BC=CA=DA=$ $=2r$, где r — радиус каждого из шаров (а также оснований цилиндра и конуса). Теперь найдем $DC=DB=4r\sin 15°=$ $=4r\sin(45°-30°)=r(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

Рассмотрим плоскость, проходящую через ось конуса и точку B (рис. 75, *б*). Пусть O — центр шара, поверхность которого содержит точку B, а α — половина угла при вершине осевого сечения конуса. Из условия касания шаров с боковой поверхностью конуса следует, что $\angle BDO=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, т. е.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{OB}{BD}=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\text{ откуда } \frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}=$$
$$=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ. $\pi-4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Отдельно следует выделить задачи, в которых речь идет о касающихся конусах.

39. Каркас для конуса

Проиллюстрируем один специфический прием, нередко оказывающийся эффективным при решении задач, в условии которых фигурируют касающиеся между собой конусы.

18. *Три равных конуса имеют общую вершину, касаются одной плоскости и попарно касаются между собой. Найти угол в осевом сечении одного из этих конусов.*

Решение. Начнем издалека. Рассмотрим вспомогательную треугольную пирамиду $ABCD$, в основании которой лежит равнобедренный треугольник ABC с углом при вершине $A=120°$, а ребро DA перпендикулярно плоскости ABC. Пусть, кроме того, проекция вершины A на грань BDC совпадает с центром O окружности, вписанной в треугольник BDC (рис. 76). Это значит, что в эту пирамиду можно вписать конус с вершиной в точке A и основанием, вписанным в BDC. (Построенная пирамида — каркас для этого конуса.) Понятно, что если мы поставим на плоскость ABC три такие пирамиды так, чтобы они имели общее ребро DA и попарно совпадающие грани (эти пирамиды получаются из $ABCD$ поворотами в разные стороны около DA на угол $120°$), то вписанные в них конусы будут равными, попарно касающимися друг друга и касающимися одной плоскости, одним словом, эти конусы удовлетворяют условию задачи. Если M — середина BC, то $\angle OAM=\alpha$ и равен половине искомого угла.

Пусть $AM=l$, $OM=r$. Из прямоугольного треугольника DAM, в котором AO — высота на гипотенузу, найдем $DM=\frac{l^2}{r}$.

Далее, $BM=AM\cdot\operatorname{tg}\angle MAB=l\operatorname{tg}60°=l\sqrt{3}$.

BO — биссектриса угла DBM. Если $\angle OBM=\varphi$, то

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{OM}{BM}=\frac{r}{l\sqrt{3}},\ \operatorname{tg}2\varphi=\frac{DM}{BM}=\frac{l}{r\sqrt{3}}.$$

Но $\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$. Получим соотношение $\frac{l}{r\sqrt{3}}=\frac{2rl\sqrt{3}}{3l^2-r^2}$, из которого находим $\sin\alpha=\frac{r}{l}=\sqrt{\frac{3}{7}}$, откуда $\cos 2\alpha=\frac{1}{7}$.

Ответ. $\arccos\frac{1}{7}$.

40. Пересечение тел

Задачи о пересечении пространственных тел требуют хорошо развитого пространственного воображения. Большей частью, самое главное — «увидеть», что представляет собой заданное в условии пересечение, хорошо и наглядно его изобразить. Однако иногда чисто формальные рассуждения могут помочь нашему часто хромающему пространственному воображению. Например:

19. *Дана правильная треугольная пирамида объемом V. O — середина ее высоты, опущенной на основание. Найти объем общей* *части данной пирамиды и пирамиды, симметричной данной относительно точки О.*

Р е ш е н и е. Не так просто «увидеть», какой многогранник получается при пересечении указанных пирамид. Попробуем порассуждать. Получающийся многогранник имеет шесть граней (три боковые грани первой пирамиды и три — второй). Все грани попарно параллельны. (Они симметричны относительно O.) Следовательно, искомая общая часть представляет собой параллелепипед. Как говорится, другого не дано.

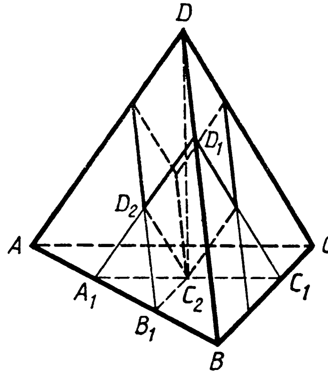


Рис. 77

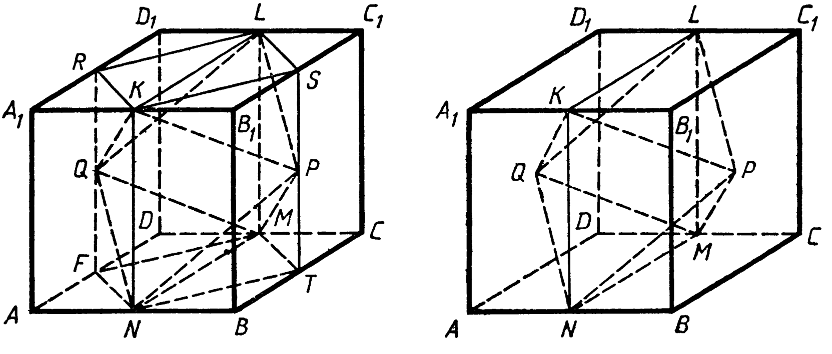
На рисунке 77 изображена исходная пирамида и общая часть двух пирамид. Для вычисления объема общей части поступим следующим образом. Объем параллелепипеда можно представить как объем исходной пирамиды (V) минус объемы трех пирамид, равных пирамиде $A_1BC_1D_1$ $\left(\text{эти пирамиды подобны исходной с коэффициентом } \frac{2}{3}\text{, т. е. объем каждой равен } \frac{8}{27}V\right)$, плюс объемы трех пирамид, равных пирамиде $A_1B_1C_2D_2$, поскольку объем каждой из них мы вычли дважды $\left(\text{объем каждой из них равен } \frac{1}{27}V\right)$.

Ответ. $\frac{2}{9}V$.

20. *Дан куб с ребром 1. Найти объем общей части трех четырехугольных призм, таких, что вершины каждой призмы расположены в серединах сторон двух противоположных граней куба.*

Р е ш е н и е. Обозначим данный куб через $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Начнем с какой-либо призмы и будем последовательно отсекать от нее лишнее. Начнем с призмы, основания которой принадлежат граням $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Добавим призму с основаниями в гранях ABB_1A_1 и DCC_1D_1. Вторая призма отсечет от первой призмы «уголки» при вершинах F, R, S, T, при этом общей частью будет многогранник $KLMNPQ$ (рис. 78, *а*). Этот многогранник называется октаэдром. Его можно рассматривать как объединение двух равных четырехугольных пирамид с общим основанием. Причем это можно делать различными способами: как объединение пирамид $KLMNP$ и $KLMNQ$ или объединение пирамид $QLPNK$ и $QLPNM$ и т. д. Если V — объем многогранника $KLMNPQ$, то $V=\frac{1}{3}$, а объемы четырехугольных пирамид, из которых он составляется, соответственно равны $\frac{1}{2}V=\frac{1}{6}$.

Перенесем полученный результат на рисунок 78, *б* и добавим третью призму с основаниями в гранях ADD_1A_1 и BCC_1B_1. Боко-



а) Рис. 78 б)

вые грани третьей пирамиды перпендикулярны плоскости $KLMN$ и проходят через середины этого квадрата. Каждая из этих боковых граней в свою очередь отсекает от многогранника $KLMNPQ$ «уголки» при вершинах K, L, M, N. Каждый из отсекаемых многогранников является четырехугольной пирамидой. Найдем объем одной из этих пирамид. Например, при вершине K. Рассмотрим пирамиду $QLPNK$. Ее объем, как мы знаем, равен $\frac{1}{6}$. Соответствующая боковая грань третьей призмы параллельна плоскости $QLPN$ — основанию этой пирамиды и проходит через середины ее боковых ребер. Следовательно, объем отсекаемой пирамиды равен $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}$. Всего отсекаются четыре такие пирамиды. Их суммарный объем $\frac{1}{12}$. Объем общей части $\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$.

Ответ. $\frac{1}{4}$.

41. Метод координат

Многие задачи про куб или прямоугольный параллелепипед удобно решать при помощи метода координат, поскольку к этим многогранникам очень естественно привязать прямоугольную систему координат. Например:

21. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найти радиус сферы, проходящей через вершину A, середины ребер DC и BB_1 и центр грани $A_1B_1C_1D_1$.*

Решение. Введем систему координат с началом в вершине A, выбрав оси так, чтобы вершины B, D и A_1 имели соответственно координаты $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ (рис. 79). Координаты середин ребер DC и BB соответственно $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$, центра грани $A_1B_1C_1D_1$ — $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Напомним, что уравнение сферы с центром (x_0, y_0, z_0) и радиусом r имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$. Последнее уравнение можно преобразовать к виду $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+$ $+d=0$. Обратно, выделяя полные квадраты по x, y, z, можно последнее уравнение привести к виду $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+$ $+(z-z_0)^2=k$.

Поскольку сфера содержит начало координат, то $d=0$. Для a, b и c легко получить систему уравнений $\frac{5}{4}+\frac{1}{2}a+b=0$, $\frac{5}{4}+a+\frac{1}{2}c=0$, $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+c=0$. Решив эту систему, найдем $a=-\frac{13}{14}$, $b=-\frac{11}{14}$, $c=-\frac{9}{14}$.

Таким образом, уравнение сферы примет вид:

$$x^2+y^2+z^2-\frac{13}{14}x-\frac{11}{14}y-\frac{9}{14}z=0,$$

или

$$\left(x-\frac{13}{28}\right)^2+\left(y-\frac{11}{28}\right)^2+\left(z-\frac{9}{28}\right)^2=\frac{371}{28^2}.$$

Искомый радиус равен $\frac{\sqrt{371}}{28}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{371}}{28}$.

42. Векторный метод

Выделим две разновидности применения векторного метода.

1. Использование единственности разложения любого вектора в пространстве по трем некомпланарным векторам. Решение задач на отношения отрезков, площадей, объемов (так называемые аффинные задачи).

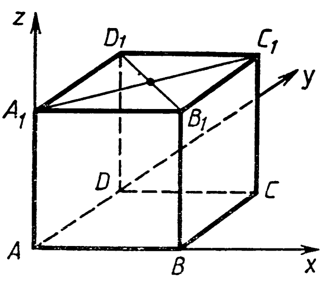


Рис. 79

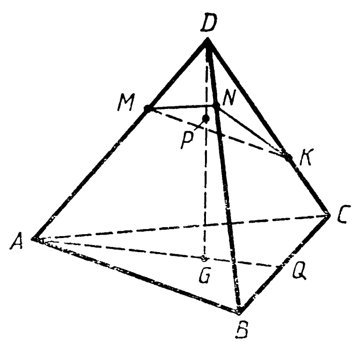


Рис. 80

22. *На ребрах DA, DB и DC треугольной пирамиды $ABCD$ взяты точки M, N и K так, что $DM=\frac{1}{3}DA$, $DN=\frac{1}{4}DB$, $DK=\frac{3}{5}DC$. Пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC. В каком отношении плоскость MNK делит отрезок DG?*

Решение. Пусть $\vec{DA}=\vec{a}$, $\vec{DB}=\vec{b}$, $\vec{DC}=\vec{c}$ (рис. 80). Плоскость MNK пересекает DG в точке P, $\vec{DP}=\lambda\vec{DG}$.

Выразим $\vec{DG}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Если Q — середина BC, то $\vec{AQ}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$. Значит, $\vec{AG}=\frac{2}{3}\vec{AQ}=\frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{AC})$.

Находим $\vec{DG}=\vec{DA}+\vec{AG}=\vec{a}+\frac{1}{3}((\vec{b}-\vec{a})+\vec{c}-\vec{a}))=$

$=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

Значит, $\vec{DP}=\frac{\lambda}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. Поскольку точка P принадлежит плоскости MNK, то $\vec{MP}$ можно разложить по векторам $\vec{MN}$ и $\vec{MK}$, $\vec{MP}=x\vec{MN}+y\vec{MK}$.

Следовательно,

$$\vec{DP}=\vec{DM}+\vec{MP}=\frac{1}{3}\vec{a}+x(\vec{DN}-\vec{DM})+y(\vec{DK}-\vec{DM})=$$
$$=\frac{1}{3}\vec{a}+x\left(\frac{1}{4}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)+y\left(\frac{3}{5}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}(1-x-y)\vec{a}+\frac{1}{4}x\vec{b}+\frac{3}{5}y\vec{c}.$$

Приравняем друг другу два полученных представления $\vec{DP}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\frac{\lambda}{3}\vec{a}+\frac{\lambda}{3}\vec{b}+\frac{\lambda}{3}\vec{c}=\frac{1}{3}(1-x-y)\vec{a}+\frac{1}{4}x\vec{b}+\frac{3}{5}y\vec{c}.$$

Ввиду единственности разложения любого вектора по трем некомпланарным векторам будем иметь систему $\lambda=(1-x-y)$, $\frac{\lambda}{3}=\frac{x}{4}$, $\frac{\lambda}{3}=\frac{3}{5}y$, откуда $\lambda=\frac{9}{26}$.

Искомое отношение равно $\frac{9}{17}$.

Ответ. $\frac{9}{17}$.

2. Использование свойств скалярного произведения (метрические задачи).

23. *Доказать, что сумма косинусов двугранных углов произвольного тетраэдра не превосходит 2.*

Решение. Возьмем любую точку O внутри тетраэдра, опустим из нее перпендикуляры на его грани и отложим на этих четырех лучах единичные векторы l_1, l_2, l_3, l_4. Углы между этими векторами дополняют до 180° соответствующие двугранные углы тетраэдра, т. е. их скалярные произведения противоположны косинусам этих двугранных углов.

Следовательно, $0 \leqslant (l_1 + l_2 + l_3 + l_4)^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + 2(l_1 \cdot l_2 + \ldots + l_3 \cdot l_4) = 4 - 2Q$, где Q — сумма косинусов двугранных углов тетраэдра. Откуда $Q \leqslant 2$.

43. Задачи на максимум и минимум

Как и в планиметрии, следует выделить два подхода к решению стереометрических задач на нахождение максимумов и минимумов — геометрический и аналитический.

Геометрические и другие элементарные методы в последнее время все более и более вытесняются методами анализа. Многие полагают, что поскольку математический анализ вооружил нас мощными средствами дифференциального исчисления, позволяющими стандартно и алгоритмично решать задачи на нахождение экстремумов, то нет никакой необходимости в изучении геометрических и прочих специфических методов, требующих зачастую большой изощренности и изворотливости. Необходимо отметить, что мнение, будто математический анализ отменяет и закрывает все прочие приемы нахождения экстремумов, не совсем верно. Можно привести много примеров, когда элементарные методы приводят к цели быстрее и проще, чем методы дифференциального исчисления. С подобного рода задачами мы уже встречались в этом обзоре (да и в предыдущих главах). Это задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми, кратчайшего пути по поверхности многогранника. Приведем еще примеры.

24. *Найти наибольшую площадь проекции единичного куба на плоскость.*

Решение. В общем случае проекцией куба является шестиугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Мы не будем выяснять, любой ли шестиугольник такого рода (с точностью до подобия) может являться проекцией куба.

На рисунке 81 изображена проекция куба и его граней. Площадь получившегося шестиугольника $AA_1B_1C_1CD$ в два раза больше площади треугольника A_1C_1D. Но треугольник A_1C_1D является проекцией правильного треугольника со стороной $\sqrt{2}$. При проектировании его площадь может лишь уменьшиться. В лучшем (максимальном) случае его площадь не изменится. Это имеет место, если плоскость проекции параллельна плоскости рассматриваемого правильного треугольника. Таким образом, максимальная площадь проекции куба равна $2\frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

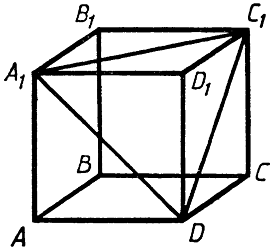
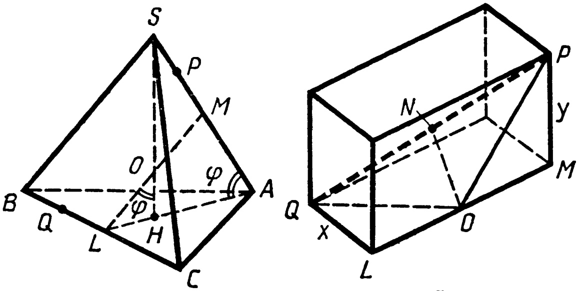


Рис. 81



а) Рис. 82 б)

25. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найти наименьшее расстояние от точки M, расположенной на окружности, вписанной в ABCD, до точки N, расположенной на окружности, описанной около треугольника A_1BD.*

Решение. Рассмотрим две сферы с центром в точке O — центре куба. Первая касается всех ребер куба. Ее радиус равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Вторая сфера описана около куба. Ее радиус равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Обе данные окружности принадлежат этим сферам. Следовательно, расстояние между M и N не может быть меньше разности радиусов этих сфер, т. е. меньше чем $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$. Осталось доказать, что это расстояние достигается и для окружностей. Для этого спроектируем из O меньшую окружность на большую сферу. Получим на большой сфере окружность, которая пересекается с окружностью, проходящей через A_1, B и D.

В заключение рассмотрим задачу, для решения которой применяются аналитические, но элементарные методы (задачи, требующие использования методов дифференциального исчисления, рассматриваются в § 3).

26. *В правильной треугольной пирамиде SABC (S — вершина) длина ребра основания равна 6, а длина высоты пирамиды SH равна $\sqrt{15}$. Через точку B перпендикулярно к прямой AS проходит плоскость, которая пересекает отрезок SH в точке O. Точки P и Q расположены на прямых AS и CB соответственно так, что прямая PQ касается сферы радиуса $\sqrt{\frac{2}{5}}$ с центром в точке O. Найти наименьшую длину отрезка PQ.*

Решение. В правильной пирамиде $SABC$ прямые SA и BC перпендикулярны. LM — общий перпендикуляр к SA и BC, расположен в плоскости SAH (рис. 82, a), при этом точка L — середина BC. Очевидно, что LM пересекает SH в той же точке O, что и плоскость, проходящая через B перпендикулярно SA. Эта плоскость есть BCM.

В треугольнике SLA имеем:

$$LA=3\sqrt{3},\ HA=2\sqrt{3},\ LH=\sqrt{3},\ SH=\sqrt{15}.$$

Если $\angle SAH=\varphi$, то $\operatorname{tg}\varphi=\frac{SH}{AH}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Тогда $LM=LA\cdot\sin\varphi=\frac{3\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\sqrt{15}$,

$$LO=\frac{LH}{\sin\varphi}=\frac{3}{5}\sqrt{15}.$$

Пусть $QL=x$, $PM=y$. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед с ребрами QL, LM и MP (рис. 82, *б*).

В треугольнике QOP имеем $QO=\sqrt{x^2+\frac{27}{5}}$, $OP=\sqrt{y^2+\frac{12}{5}}$, $QP=\sqrt{x^2+y^2+15}$.

Высота ON, проведенная из O на QP, равна $\sqrt{\frac{2}{5}}$ (по условию QP касается сферы радиуса $\sqrt{\frac{2}{5}}$ с центром O).

Имеем $QN=\sqrt{QO^2-ON^2}=\sqrt{x^2+5}$, $NP=\sqrt{y^2+2}$.

Поскольку $QN+NP=QP$, то $\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2+2}=\sqrt{x^2+y^2+15}$.

После преобразований получим $x^2y^2+5y^2+2x^2=6$.

При этом условии надо определить минимум $l=\sqrt{x^2+y^2+15}$.

Имеем $y^2=l^2-x^2-15$, поэтому

$$x^2(l^2-x^2-15)+5(l^2-x^2-15)+2x^2-6=0,$$

или

$$x^4+(18-l^2)x^2+81-5l^2=0.$$

Получившееся уравнение имеет решение при $l^2\geqslant\frac{81}{5}$, поскольку при $l^2<\frac{81}{5}$ все слагаемые левой части неотрицательны, а последнее положительно. При $l^2=\frac{81}{5}$ находим $x=0$, $y=\sqrt{\frac{6}{5}}$, значит, $l=\frac{9}{\sqrt{5}}$ и есть искомое наименьшее значение PQ.

* * *

Как и в планиметрии, раздел «Задачи» мы начинаем со списка опорных задач. Из числа задач, рассмотренных нами во вводной части этого параграфа, к числу опорных следует отнести следующие: 2, 3, 4, 7, 8, 11, 13, 15, 18, 21, 22.

44. Задачи

Опорные задачи (1—20)

1. Дан правильный тетраэдр с ребром a (треугольная пирамида, все ребра которой равны a). Найдите его полную поверхность, объем, расстояние между противоположными ребрами, радиус описанного шара, радиус вписанного шара.

2. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра попарно перпендикулярны.

3. Докажите, что если боковые ребра пирамиды равны между собой, то в основании пирамиды лежит многоугольник, около которого можно описать окружность, и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

4. Докажите, что если все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой, то в основании пирамиды лежит многоугольник, в который можно вписать окружность, и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности. Как следует изменить утверждение, если вместо слов «все двугранные углы...» будет «углы наклона боковых граней к плоскости основания»?

5. Докажите, что площадь проекции многоугольника, расположенного в плоскости α, на плоскость β равна $S \cos \varphi$, где S — площадь многоугольника, φ — угол между плоскостями α и β.

6. Даны три прямые, проходящие через одну точку A. Пусть B_1 и B_2 — две точки на одной прямой, C_1 и C_2 — на другой, D_1 и D_2 — на третьей. Докажите, что

$$\frac{V_{AB_1C_1D_1}}{V_{AB_2C_2D_2}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1}{AB_2 \cdot AC_2 \cdot AD_2}.$$

7. Пусть α, β и γ — углы, образованные произвольной прямой с тремя попарно перпендикулярными прямыми. Докажите, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

8. Пусть S и P — площади двух граней тетраэдра, a — длина их общего ребра, α — двугранный угол между ними. Докажите, что объем тетраэдра V может быть найден по формуле

$$V = \frac{2SP \sin \alpha}{3a}.$$

9. Докажите, что для объема произвольного тетраэдра V справедлива формула $V = \frac{1}{6} abd \sin \varphi$, где a и b — два противоположных ребра тетраэдра, α — расстояние между ними, φ — угол между ними.

10. Докажите, что плоскость, делящая пополам двугранный угол при каком-либо ребре тетраэдра, делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям граней, заключающих этот угол.

11. Докажите, что для объема V многогранника, описанного около сферы радиусом R, справедливо равенство $V = \frac{1}{3} S_n R$, где S_n — полная поверхность многогранника.

12. Дан выпуклый многогранник, все вершины которого расположены в двух параллельных плоскостях. Докажите, что его объем можно вычислять по формуле $V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S)$, где S_1 — площадь грани, расположенной в одной плоскости, S_2 — площадь грани, расположенной в другой плоскости, S — площадь сечения многогранника плоскостью, равноудаленной от двух данных, h — расстояние между данными плоскостями.

13. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке (центре тяжести тетраэдра) и делятся в ней в отношении 3:1 (считая от вершин). Докажите также, что в этой же точке пересекаются и делятся пополам отрезки, соединяющие середины противоположных ребер.

14. Докажите, что если отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, равны между собой, то противоположные ребра попарно перпендикулярны.

15. Докажите, что сумма плоских углов трехгранного угла меньше 2π, а сумма двугранных углов больше π.

16. Пусть плоские углы трехгранного угла равны α, β и γ, а противолежащие им двугранные углы — A, B и C. Докажите, что справедливы следующие равенства:

1) $\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}$ (теорема синусов для трехгранного угла);

2) $\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$ (1-я теорема косинусов для трехгранного угла);

3) $\cos A=-\cos B\cdot\cos C+\sin B\cdot\sin C\cos\alpha$ (2-я теорема косинусов для трехгранного угла).

17. Найдите геометрическое место середин отрезков, параллельных данной плоскости, концы которых находятся на двух скрещивающихся прямых.

18. Три шара радиусом R касаются одной плоскости и попарно касаются друг друга. Найдите радиус четвертого шара, касающегося трех данных и той же плоскости.

19. Докажите, что площадь части поверхности сферы, заключенной между двумя параллельными плоскостями, пересекающими сферу, можно найти по формуле $S=2\pi Rh$, где R — радиус сферы, h — расстояние между плоскостями.

20. Докажите, что объем тела, получающегося при вращении кругового сегмента вокруг диаметра, его не пересекающего, можно вычислять по формуле $V=\frac{1}{6}\pi a^2h$, где a — длина хорды этого сегмента, а h — проекция этой хорды на диаметр.

21. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 6. Найдите площадь наибольшего сечения, проходящего через два параллельных не лежащих в одной грани ребра параллелепипеда.

22. В правильной треугольной пирамиде известна сторона a основания и плоский угол при вершине α. Найдите ее объем, двугранный угол при основании, двугранный угол между боковыми гранями, радиус вписанного и описанного шаров.

23. Решите предыдущую задачу для четырехугольной пирамиды.

24. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведено сечение, параллельное двум скрещивающимся ребрам этой пирамиды. Найдите площадь этого сечения, если сторона основания равна a, а боковое ребро равно b.

25. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Постройте сечение куба плоскостью и найдите площадь сечения, если:

а) плоскость проходит через вершины A и D_1 и середину ребра BB_1;

б) плоскость проходит через вершину A и параллельна плоскости DBC_1;

в) плоскость проходит через середины ребер AB, BB_1, B_1C_1.

26. Докажите, что плоскость, пересекающая боковую поверхность цилиндра, но не пересекающая его основания, делит ось цилиндра, боковую поверхность и объем в одинаковом отношении.

27. В конус вписан цилиндр — основание цилиндра лежит на основании конуса, а другое основание цилиндра совпадает с сечением конуса плоскостью, параллельной основанию. Радиус основания цилиндра в два раза меньше радиуса основания конуса. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.

28. Через центр шара проведены три попарно перпендикулярные плоскости, разделившие шар на восемь частей. В каждую из этих частей вписано по шару.

а) Найдите отношение объема вписанного в одну из частей шара к объему исходного шара.

б) Центры вписанных шаров являются вершинами многогранника. Что это за многогранник? Найдите отношение объемов полученного многогранника и данного шара.

29. Найдите объем тела, получающегося при вращении прямоугольного треугольника с катетами a и b вокруг его гипотенузы.

30. Основания цилиндра и конуса расположены в одной плоскости, а шар касается этой же плоскости, причем высота цилиндра равна высоте конуса и равна диаметру шара. Объемы всех трех тел равны между собой. Как относятся их полные поверхности?

31. Найдите объем конуса, разверткой боковой поверхности которого является полукруг радиусом R.

32. Из круга вырезан сектор с центральным углом в 90°. Из двух получившихся частей склеены два конуса (боковые поверхности). Найдите отношение объемов получившихся конусов.

33. Найдите угол: а) между двумя диагоналями куба; б) между диагональю куба и непересекающейся с ней диагональю грани.

34. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер треугольной пирамиды объемом V.

35. Определите вид многоугольника, являющегося ортогональной проекцией куба на плоскость: а) перпендикулярную диагонали его грани; б) перпендикулярную диагонали куба. Найдите площадь этой проекции, если ребро куба равно a.

36. Все ребра правильной треугольной призмы равны между собой. Найдите угол между плоскостью основания этой призмы и плоскостью, проходящей через противоположные вершины боковой грани и середину противолежащего этой грани бокового ребра.

37. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6, боковое ребро равно 4. Найдите площадь сечения, проходящего через две вершины одного основания призмы и середину стороны другого основания (не совпадающего с боковой гранью призмы).

38. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 2. Найдите объем этой пирамиды, а также радиусы вписанного и описанного шаров.

39. В основании правильной треугольной призмы лежит правильный треугольник со стороной 6. Найдите объем этой призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

40. Основания двух правильных треугольных пирамид расположены в одной плоскости. Сторона основания и высота одной соответственно равны 3 и 2, другой, наоборот, 2 и 3. Плоскость, параллельная основаниям, пересекает эти пирамиды по равным треугольникам. Найдите площади этих сечений.

41. Внутри куба с ребром a расположены два равных касающихся между собой шара. При этом один шар касается трех граней куба, имеющих общую вершину, а другой касается трех оставшихся граней куба. Найдите радиусы этих шаров.

42. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 150°. Через вершину конуса проведено сечение, являющееся прямоугольным треугольником. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса.

43. Найдите объем треугольной пирамиды, в основании которой лежит треугольник со сторонами 3, 4 и 5, а двугранные углы при основании равны 60°.

44. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса, вписанных в один и тот же шар, если высота и цилиндра и конуса равна радиусу шара.

45. Осевое сечение конуса является правильным треугольником. Через ось конуса проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Рассмотрим два шара, каждый из которых касается этих двух плоскостей, плоскости основания конуса и его боковой поверхности, только один касается ее изнутри, а другой — снаружи. Найдите отношение радиусов этих шаров.

46. Осевым сечением цилиндра является квадрат, а осевым сечением конуса — правильный треугольник, равновеликий квадрату. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.

47. Внутри треугольной пирамиды, все ребра которой равны a, расположены четыре равных шара. Каждый шар касается трех других, а также трех граней пирамиды. Найдите радиусы этих шаров.

48. Радиус основания цилиндра равен 1, а высота равна $\sqrt{2}$. Две вершины правильного треугольника расположены на границе одного основания цилиндра, а одна вершина — на границе другого основания. Найдите сторону правильного треугольника.

49. Докажите, что рисунок 83, изображающий треугольную пирамиду, в которой проведено сечение, неверен.

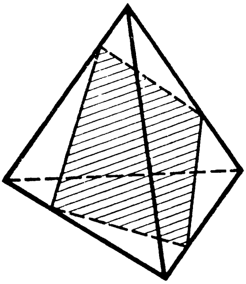


Рис. 83

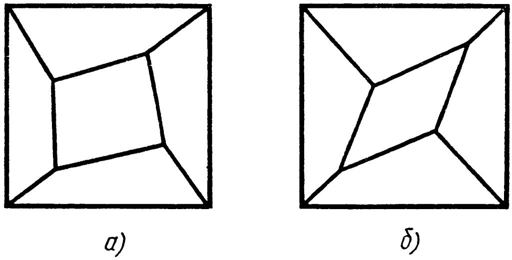


Рис. 84

50. На каждом из рисунков 84, *а* и 84, *б* изображена проекция (ортогональная) какого-то многогранника (вид сверху, невидимые ребра отсутствуют). Докажите, что многогранники, проекции которых изображены, невозможны.

51. Сколько осей симметрии имеет: а) правильный тетраэдр; б) куб; в) цилиндр; г) конус?

52. Проекцией куба является правильный шестиугольник со стороной a. Найдите объем куба.

53. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2, радиус вписанного шара $\frac{1}{2}$. Найдите величину двугранного угла между боковыми гранями пирамиды.

54. Найдите величину двугранного угла между соседними боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что радиус вписанного в нее шара в три раза меньше стороны основания.

55. Ребро куба равно 1. Найдите объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в центрах трех смежных граней и в вершине, не принадлежащей этим граням.

56. Найдите радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, пять ребер которой равны 2, а одно ребро равно 1.

57. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 1. Найдите радиус шара, касающегося ребра AB в его середине, а также ребер AC и CD.

58. В каком отношении делит объем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра C_1D_1 и центр грани BCC_1B_1?

59. В каком отношении делит объем треугольной пирамиды $ABCD$ плоскость, проходящая через вершину A и середины медиан треугольников ABC и ABD, выходящих из вершины B?

60. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите объем общей части двух треугольных пирамид ACB_1D_1 и A_1C_1BD.

61. Высота конуса равна диаметру его основания. В конус вписан куб, четыре вершины которого расположены на основании конуса, а четыре — на его боковой поверхности. Найдите отношение объемов куба и конуса.

62. Полная поверхность треугольной пирамиды в 5 раз больше поверхности вписанного в нее шара. Найдите отношение объема пирамиды к объему вписанного в нее шара.

63. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=3$. Высота пирамиды равна 4 и проходит через середину AD. Найдите AD, если известно, что в эту пирамиду можно вписать шар.

64. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB=3$, $BC=4$. Высота пирамиды равна 3 и проходит через середину BC. Найдите радиус наибольшего шара, который может поместиться внутри этой пирамиды.

65. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. В каком отношении плоскость, проходящая через D, C_1 и середину A_1B_1, делит диагональ D_1B?

66. $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние от середины ребра AB до плоскости, проходящей через C и середины ребер SB и SD.

67. Из круга вырезан сектор с центральным углом φ. Из полученного сектора и оставшейся части свернуты два конуса. Высота первого конуса в два раза больше высоты второго конуса. Найдите величину угла φ.

68. Внутри конуса находятся четыре шара равного радиуса. Три шара касаются его основания, каждый шар касается боковой поверхности конуса, кроме того, каждый шар касается трех других. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

69. Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, равен 1, радиус вписанного шара $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Найдите объем пирамиды.

70. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите радиус шара, проходящего через вершины C, C_1 и касающегося прямых AB и AD.

71. Чему равна длина кратчайшего пути по поверхности куба, соединяющего центр какой-либо грани куба с одной из вершин противоположной грани, если ребро куба равно 1?

72. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. На ребре SA взята точка M так, что $SM=2AM$. Через M и середины ребер SB и SD проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

73. В основании треугольной пирамиды лежит треугольник, одна сторона которого равна 1,04, все боковые ребра равны 2. Около пирамиды описан конус так, что вершины основания лежат на окружности основания конуса, а вершина конуса совпадает с вершиной пирамиды. Найдите угол в осевом сечении конуса, если площадь осевого сечения конуса равна 1.

74. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через середину D_1C_1 проведена прямая l, пересекающая прямые BA_1 и AD_1. Какой угол образует l с BA_1?

75. Три шара касаются попарно между собой плоскости основания конуса и боковой поверхности конуса. Центры шаров находятся вне конуса. Найдите угол в осевом сечении конуса, если известно, что точка касания каждого шара с поверхностью конуса делит соответствующую образующую пополам.

76. $ABCD$ — прямоугольник. В вершинах A, B и C к плоскости прямоугольника восставлены перпендикуляры и на них взяты точки K, M и P так, что $AK=7$, $BM=5$, $CP=3$, причем точки K и M находятся по одну сторону от плоскости $ABCD$, а P — по другую. Плоскость, проходящая через K, M и P, пересекает перпендикуляр, восставленный к плоскости $ABCD$ в вершине D, в точке S. Найдите DS.

77. Найдите объем тела, получающегося при вращении прямоугольника со сторонами 1 и 2 вокруг его диагонали.

78. $ABCD$ —правильная пирамида, в основании которой лежит правильный треугольник ABC со стороной 2. Боковые ребра пирамиды равны 3. Найдите площадь равнобедренного треугольника, одна вершина которого совпадает с A, другая — с серединой CD, а третья лежит на отрезке BC.

79. Радиус основания и высота конуса равны 1. Внутри конуса находятся три шара равного радиуса. Каждый шар касается двух других, основания конуса и боковой поверхности конуса. Найдите радиусы этих шаров.

80. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB=AC=2$, $\angle BAC=30°$. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC. Известно, что существует конус, вершина которого совпадает с точкой A, а основание вписано в треугольник SBC. Найдите объем пирамиды.

81. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 1. M — середина AB, K — точка на BC, такая, что $BK=2CK$. Найдите расстояние от точки K до середины DM.

82. Найдите радиус шара, касающегося всех ребер правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3.

83. Дана правильная треугольная призма со стороной основания, равной 6, и боковым ребром, равным 5. Через сторону основания проведено сечение, образующее угол 45° с плоскостью основания. Найдите площадь сечения.

84. В правильной четырехугольной призме, высота которой равна 5, а сторона основания 2, проведено сечение плоскостью, проходящей через вершину основания параллельно диагонали основания и образующей угол 60° с плоскостью основания. Найдите площадь сечения.

85. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, в котором $AB=2$, $AD=AA_1=1$. Найдите угол между диагональю BD_1 и плоскостью, проходящей через D, C_1 и A_1.

86. $SABC$ и $DABC$ — две правильные треугольные пирамиды с основанием ABC, причем вторая внутри первой. Все плоские углы при вершине S равны 60°, а при вершине D — 90°. Ребра DA, DB и DC продолжены до пересечения с боковыми гранями пирамиды $SABC$ в точках K, M и P. Найдите отношение площадей треугольников KMP и ABC.

87. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через центры трех смежных граней куба?

88. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через одну вершину куба и центры двух граней, не содержащих эту вершину?

89. Три диагонали параллелепипеда попарно перпендикулярны, их длины равны a, b и c. Найдите длину четвертой диагонали.

90. Радиус шара, описанного около правильной шестиугольной пирамиды, равен 2. Боковое ребро пирамиды равно 1. Найдите объем пирамиды.

91. Прямоугольный треугольник повернут вокруг биссектрисы прямого угла на угол 45°. На какой угол повернулись его катеты?

92. В основании треугольной пирамиды лежит правильный треугольник со стороной 1. Боковые грани наклонены к плоскости основания под равными углами. Одно боковое ребро равно $\sqrt{7}$, а два других меньше его. Найдите объем пирамиды.

93. Две противоположные вершины куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные лежат на боковой поверхности цилиндра. Найдите отношение объемов цилиндра и куба.

94. В основании пирамиды лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными 1. Найдите объем пирамиды, если известно, что ее боковые ребра равны, а боковые грани равновелики.

95. В каком отношении делит объем тетраэдра $ABCD$ плоскость, проходящая через точку M на ребре AB, такую, что $AM = \frac{1}{3}AB$, и через середины медиан треугольников ABC и ABD, выходящих из вершины A?

96. ABC — правильный треугольник со стороной 3; M и K — точки на BA и CA такие, что $BM = CK = 1$. Найдите объем тела, полученного при вращении треугольника ABC вокруг прямой MK.

97. Во всяком ли тетраэдре высоты пересекаются в одной точке?

98. Существует ли такая треугольная пирамида, что основания всех ее высот лежат вне соответствующих граней?

99. Докажите, что прямая, образующая равные углы с тремя пересекающимися прямыми плоскости, перпендикулярна плоскости.

100. Какие правильные многоугольники могут получаться при пересечении куба плоскостью?

101. Любой ли трехгранный угол можно пересечь плоскостью таким образом, что в сечении получится правильный треугольник?

102. Докажите, что если все плоские углы трехгранного угла равны 90°, то любое сечение этого трехгранного угла является остроугольным треугольником.

103. Дан куб с ребром a. Две вершины правильного тетраэдра лежат на его диагонали, а две оставшиеся — на диагонали его грани. Найдите объем тетраэдра.

104. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, высота пирамиды h. Найдите объем пирамиды, если известно, что все ее пять граней равновелики.

105. Среди пирамид, все ребра которых равны a, найдите объем той пирамиды, которая имеет наибольшее число ребер.

106. Вокруг шара описана правильная усеченная четырехугольная пирамида, апофема которой равна a. Найдите ее боковую поверхность.

107. Определите угол при вершине осевого сечения конуса, если его объем в три раза больше объема вписанного в него шара.

108. Три шара касаются плоскости данного треугольника в вершинах треугольника и между собой. Найдите радиусы этих шаров, если стороны треугольника равны a, b и c.

109. Докажите, что отношение объемов сферы и описанного около нее усеченного конуса равно отношению их полных поверхностей.

110. Докажите, что прямые, соединяющие середину высоты правильного тетраэдра с вершинами той грани, на которую эта высота опущена, попарно перпендикулярны.

111. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a, K — середина ребра DD_1. Найдите угол и расстояние между прямыми CK и A_1D.

112. Найдите угол и расстояние между двумя скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра с ребром a.

113. В основании пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$. Ребро SD является высотой пирамиды. Найдите объем пирамиды, если известно, что $AB=BC=\sqrt{5}$, $AD=DC=\sqrt{2}$, $AC=2$, $SA+SB=2+\sqrt{5}$.

114. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной a, боковые ребра имеют длину b. Найдите радиус шара, касающегося всех ребер пирамиды или их продолжений.

115. Сфера проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани куба. Найдите отношение объемов шара и куба.

116. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и через вершины A и C_1.

117. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной a, высота параллелепипеда равна b. Найдите радиус сферы, проходящей через концы стороны AB основания и касающейся граней параллелепипеда, параллельных AB.

118. В сферу радиусом R вписана правильная треугольная призма со стороной основания a. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр сферы и сторону основания призмы.

119. Два шара одного радиуса и два другого расположены так, что каждый шар касается трех других и данной плоскости. Найдите отношение радиуса большего шара к меньшему.

120. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины C и D и середины ребер AB и AC.

121. Одна грань куба лежит в плоскости основания правильной треугольной пирамиды, на одной из боковых граней пирамиды лежат две вершины куба, а на двух других — по одной. Найдите ребро куба, если сторона основания пирамиды равна a, а высота пирамиды h.

122. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведены две плоскости: одна проходит через вершины A, B и C_1, а другая — через вершины A_1, B_1 и C. Эти плоскости разделили призму на четыре части. Объем меньшей из этих частей равен V. Найдите объем призмы.

123. В основании правильной треугольной призмы лежит треугольник ABC со стороной a. На боковых ребрах взяты точки A_1, B_1 и C_1, удаленные от плоскости основания соответственно на расстояния $\frac{a}{2}$, a, $\frac{3}{2}a$. Найдите угол между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.

124. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна апофеме боковой грани. Через сторону основания проведено сечение, делящее пополам поверхность пирамиды. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.

125. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Определите двугранные углы между соседними боковыми гранями этой пирамиды.

126. В основании треугольной пирамиды, все боковые ребра которой попарно перпендикулярны, лежит треугольник площадью S. Площадь одной из боковых граней Q. Найдите площадь проекции этой грани на основание.

127. В правильной четырехугольной пирамиде угол между боковым ребром и плоскостью основания равен углу между боковым ребром и плоскостью боковой грани, не содержащей это ребро. Найдите этот угол.

128. Найдите двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной треугольной усеченной пирамиды, если известно, что в нее можно вписать шар и, кроме того, существует шар, касающийся всех ее ребер.

129. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$. Найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и A_1C_1D.

130. В основании пирамиды $ABCDM$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной a, боковые ребра AM и BM также равны a, боковые ребра CM и DM имеют длину b. На грани CDM как на основании во внешнюю сторону построена треугольная пирамида $CDMN$, боковые ребра которой имеют длину a. Найдите расстояние между прямыми AD и MN.

131. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; через ребро AA_1 проведена плоскость, образующая равные углы с прямыми BC и B_1D. Найдите эти углы.

132. Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, причем одно из них равно a и равно сумме двух других. Найдите радиус шара, касающегося основания пирамиды и продолжений ее боковых граней.

133. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 3, ребро SA равно 5. Найдите объем пирамиды, если известно, что боковые грани пирамиды равновелики.

134. Точка K — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка L лежит на ребре BC. Отрезок KL касается шара, вписанного в куб. В каком отношении отрезок KL делится точкой касания?

135. В тетраэдре $ABCD$ дано: $\angle ABC = \angle BAD = 90°$, $AB = a$, $DC = b$, угол между ребрами AD и BC равен α. Найдите радиус описанного шара.

136. Ребро куба и ребро правильного тетраэдра лежат на одной прямой, середины противоположных им ребер куба и тетраэдра совпадают. Найдите объем общей части куба и тетраэдра, если ребро куба равно a.

137. В каком отношении делит объем треугольной пирамиды плоскость, параллельная двум ее скрещивающимся ребрам и делящая одно из других ребер в отношении $2:1$?

138. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде проведено сечение через диагонали оснований и сечение, проходящее через сторону нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания. Угол между секущими плоскостями равен α. Найдите отношение площадей сечений.

139. В правильную шестиугольную пирамиду вписан конус и около нее описан конус. Найдите разность объемов описанного и вписанного конусов, если высота пирамиды H, радиус основания описанного конуса R.

140. В тетраэдре два противоположных ребра перпендикулярны, их длины a и b, расстояние между ними c. В тетраэдр вписан куб, четыре ребра которого перпендикулярны этим двум ребрам тетраэдра, и на каждой грани тетраэдра лежат в точности две вершины куба. Найдите ребро куба.

141. Два равных треугольника KLM и KLN имеют общую сторону KL, $\angle KLM = \angle LKN = \frac{\pi}{3}$, $KL = a$, $LM = KN = 6a$. Плоскости KLM и KLN взаимно перпендикулярны. Шар касается отрезков LM и KN в их серединах. Найдите радиус шара.

142. В тетраэдре три двугранных угла прямые. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, равен a, а другой b ($b > a$). Найдите длину наибольшего ребра тетраэдра.

143. Отрезок AB единичной длины, являющийся хордой сферы радиусом 1, расположен под углом $\frac{\pi}{3}$ к диаметру CD этой сферы. Расстояние от конца C диаметра до ближайшего к нему конца A хорды AB равно $\sqrt{2}$. Определите величину отрезка BD.

144. В треугольной пирамиде $ABCD$ грани ABC и ABD имеют площади p и q, образуют между собой угол α. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через ребро AB и центр вписанного в пирамиду шара.

145. $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром a. Пусть M — центр грани ADC, N — середина ребра BC. Найдите радиус шара, вписанного в трехгранный угол A и касающегося прямой MN.

146. В треугольной пирамиде $SABC$ известно, что $AC=AB$, а ребро SA наклонено к плоскостям граней ABC и SBC под углом 45°. Известно, что вершина A и середины всех ребер пирамиды, кроме SA, лежат на сфере радиусом 1. Докажите, что центр сферы расположен на ребре SA, и найдите площадь грани ASC.

147. Шар касается плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и сторону основания BC проведена секущая плоскость. Найдите угол наклона этой плоскости к плоскости основания, если диагонали сечения перпендикулярны ребрам SA и SD.

148. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки P, K, L — середины ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка Q — центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка.

149. Внутри правильного тетраэдра $ABCD$ расположены два шара радиусами $2R$ и $3R$, касающиеся друг друга внешним образом, причем один шар вписан в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A, а другой — в трехгранный угол с вершиной в точке B. Найдите длину ребра этого тетраэдра.

150. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ($ABCD$ — основание) сторона основания равна a, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α. Плоскость, параллельная диагонали основания AC и боковому ребру BS, пересекает пирамиду так, что в сечение можно вписать окружность. Определите радиус этой окружности.

151. В правильном тетраэдре точки M и N являются серединами противоположных ребер. Проекция тетраэдра на плоскость, параллельную MN, представляет собой четырехугольник площадью S, один из углов которого равен 60°. Найдите площадь поверхности тетраэдра.

152. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на AC взята точка M, а на диагонали BD_1 куба взята точка N так, что $\angle NMC=60°$, $\angle MNB=45°$. В каком отношении точки M и N делят отрезки AC и BD?

153. Сторона основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a. Точки M и N являются соответственно серединами ребер A_1B_1 и AA_1. Проекция отрезка BM на прямую C_1N равна $\frac{a}{2\sqrt{5}}$. Определите высоту призмы.

154. Два шара касаются между собой и граней двугранного угла, величина которого α. Пусть A и B — две точки касания этих шаров с гранями (A и B принадлежат разным шарам и разным граням). В каком отношении отрезок AB делится точками пересечения с поверхностями этих шаров?

155. Основанием пирамиды $ABCD$ является правильный треугольник ABC со стороной 12. Ребро BD перпендикулярно плоскости основания и равно $10\sqrt{3}$. Все вершины этой пирамиды лежат на боковой поверхности прямого кругового цилиндра, ось которого пересекает ребро BD и плоскость ABC. Определите радиус цилиндра.

156. Основанием пирамиды служит квадрат $ABCD$ со стороной a, боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно b. M — точка на ребре AS. Точки M, B и D лежат на боковой поверхности прямого кругового конуса с вершиной в точке A, а точка C — в плоскости основания этого конуса. Определите площадь боковой поверхности конуса.

157. Внутри прямого кругового конуса расположен куб так, что одно ребро куба лежит на диаметре основания конуса, вершины куба, не принадлежащие этому ребру, лежат на боковой поверхности конуса, центр куба лежит на высоте конуса. Найдите отношение объема конуса к объему куба.

158. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведены два сечения. Первое сечение проходит через ребро AB и середину ребра CC_1, а второе — через ребро A_1B_1 и середину ребра CB. Найдите отношение длины отрезка линии пересечения этих сечений, заключенного внутри призмы, к длине ребра AB.

159. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 сторона верхнего основания равна 1, а сторона нижнего основания равна 7. Плоскость, проходящая через ребро B_1C_1 перпендикулярно к плоскости AD_1C, делит пирамиду на две части равного объема. Найдите объем пирамиды.

160. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник ABC со стороной a. Проекцией призмы на плоскость основания является трапеция с боковой стороной AB и площадью, в два раза большей площади основания. Радиус сферы, проходящей через вершины A, B, A_1, C_1, равен a. Найдите объем призмы.

161. В плоскости дан квадрат $ABCD$ со стороной a и точка M на расстоянии b от его центра. Найдите сумму объемов тел, получающихся при вращении треугольников ABM, BCM, CDM и DAM соответственно вокруг прямых AB, BC, CD и DA.

162. Центры трех сфер, радиусы которых равны 3, 4 и 6, расположены в вершинах правильного треугольника со стороной 11. Сколько существует плоскостей, касающихся одновременно всех трех сфер?

163. Все ребра треугольной пирамиды $ABCD$ касаются некоторого шара. Три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер, равны. Угол ABC равен $100°$. Найдите отношение высот пирамиды, опущенных из вершин A и B.

164. В треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC и равными боковыми ребрами сумма двугранных углов с ребрами SA и SC равна $180°$. Известно, что $AB=a$, $BC=b$. Найдите длину бокового ребра.

165. На поверхности сферы радиусом 2 расположены три попарно касающиеся друг друга окружности радиусами $\sqrt{2}$. Часть поверхности сферы, расположенная вне окружностей, представляет собой два криволинейных треугольника. Найдите площади этих треугольников.

166. Три двугранных угла тетраэдра, не принадлежащие одной вершине, равны $\frac{\pi}{2}$. Оставшиеся три двугранных угла равны между собой. Найдите эти углы.

167. Определите полную поверхность призмы, описанной около шара, если площадь ее основания равна S.

168. Центр сферы α лежит на поверхности сферы β. Отношение поверхности сферы β, лежащей внутри сферы α, ко всей поверхности сферы α равно $\frac{1}{5}$. Найдите отношение радиусов сфер α и β.

169. Через вершину прямого кругового конуса проведено сечение максимальной площади. Известно, что площадь этого сечения в два раза больше площади осевого сечения. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

170. Найдите объем тела, полученного при вращении правильного треугольника со стороной a вокруг прямой, параллельной его плоскости и такой, что проекция этой прямой на плоскость треугольника содержит какую-либо высоту треугольника.

171. Дана треугольная пирамида $SABC$. Шар радиусом R касается плоскости ABC в точке C и ребра SA в точке S. Прямая BS вторично пересекает шар в точке, диаметрально противоположной точке C. Найдите объем пирамиды $SABC$, если $BC=a$, $SA=b$.

172. Внутри правильной треугольной пирамиды расположена вершина трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, а биссектрисы плоских углов проходят через вершины основания. В каком отношении поверхность этого угла делит объем пирамиды, если каждая грань пирамиды разделена ею на две равновеликие части?

173. Правильный тетраэдр объемом V повернут около прямой, соединяющей середины его скрещивающихся ребер, на угол α. Найдите объем общей части данного тетраэдра и повернутого $(0<\alpha<\pi)$.

174. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M — центр грани ABB_1A_1, N — точка на ребре B_1C_1, L — середина A_1B_1, K — основание перпендикуляра, опущенного из N на BC_1. В каком отношении точка N делит ребро B_1C_1, если $\angle LMK = \angle MKN$?

175. В правильной четырехугольной пирамиде центр описанного шара лежит на поверхности вписанного шара. Найдите величину плоского угла при вершине пирамиды.

176. В правильной шестиугольной пирамиде центр описанной сферы лежит на поверхности вписанной. Найдите отношения радиусов описанной и вписанной сфер.

177. n равных конусов имеют общую вершину. Каждый касается двух других по образующей, а все касаются одной плоскости. Найдите угол при вершине осевого сечения этих конусов.

178. Высота усеченной пирамиды равна h, площадь среднего сечения равна S. В каких пределах может меняться объем этой пирамиды?

179. Найдите наибольшее значение объема тетраэдра, вписанного в цилиндр, радиус основания которого R, высота h.

180. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$. Найдите наибольшую возможную величину угла между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

181. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ высота в два раза меньше стороны основания. Найдите наибольшее значение угла A_1MC_1, где M — точка на ребре AB.

182. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1. Найдите наименьшую длину таких отрезков.

183. Какое наименьшее значение может принимать отношение объема конуса к объему цилиндра, описанных около одного и того же шара?

184. Два конуса имеют общее основание и расположены по разные стороны от него. Радиус основания r, высота одного конуса h, другого H ($h \leqslant H$). Найдите наибольшее расстояние между двумя образующими этих конусов.

185. Длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Чему равно наибольшее значение площади прямоугольной проекции этого параллелепипеда на плоскость?

186. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. На прямой AA_1 взята точка M, а на прямой BC — точка N так, что прямая MN пересекает ребро C_1D_1. Найдите наименьшее значение величины MN.

187. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, одна сторона которого равна a, боковые ребра пирамиды равны b. Найдите наибольшее значение объема таких пирамид.

188. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найдите длину наименьшего отрезка, концы которого расположены на прямых AB_1 и BC_1, образующего угол $60°$ с плоскостью грани $ABCD$.

189. Две вершины тетраэдра расположены на поверхности сферы радиусом $\sqrt{10}$, две другие вершины — на поверхности сферы радиусом 2, концентрической с первой. Какой наибольший объем таких тетраэдров?

190. Каков наибольший объем тетраэдра $ABCD$, все вершины которого лежат на поверхности сферы радиусом 1, а ребра AB, BC, CD и DA видны из центра сферы под углом 60°?

191. Дан куб с ребром a. Пусть N — точка на диагонали одной грани, M — точка на окружности, находящейся в соседней грани и имеющей центр в центре этой грани и радиус $\frac{5}{12}a$. Найдите наименьшее значение величины MN.

192. n равных шаров радиусами R касаются боковой поверхности изнутри и плоскости основания конуса, причем каждый шар касается двух соседних; n шаров радиусами $2R$ расположены аналогичным образом, касаясь боковой поверхности с внешней стороны. Найдите радиус шара, вписанного в конус.

193. Все грани тетраэдра — подобные между собой прямоугольные треугольники. Найдите отношение наибольшего и наименьшего ребер этого тетраэдра.

194. На прямой l расположены центры шаров радиусами 1, 2 и 5, причем шар радиусом 2 касается двух других внешним образом. Прямая p касается всех трех шаров. Найдите угол и расстояние между прямыми l и p.

195. Два шара радиусами 1 и 3 касаются друг друга внешним образом. Через точку M, расположенную на расстоянии 3 от центра меньшего шара, проведены две прямые, касающиеся обоих шаров. Найдите угол между касательными, если известно, что одна из них образует угол 45° с прямой, проходящей через центры шаров.

196. В основании четырехугольной пирамиды лежит выпуклый четырехугольник, две стороны которого равны 10, а две другие равны 6. Высота пирамиды равна 7. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

197. Проекции прямоугольного треугольника на обе грани двугранного угла величиной α являются правильными треугольниками со стороной 1. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника.

198. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. K — середина ребра AB, P — середина ребра CC_1. Пусть M — точка грани BCC_1B_1, такая, что длина кратчайшего пути от M до K по поверхности куба равна расстоянию от M до P. Найдите геометрическое место точек M.

199. Найдите объем общей части n одинаковых цилиндров радиусом r, оси которых расположены в одной плоскости, проходят через одну точку, причем угол между двумя соседними равен $\frac{\pi}{n}$.

200. Все плоские углы при вершине D пирамиды $ABCD$ прямые, $DA=a$, $DB=b$, $DC=c$ $(a\leqslant b\leqslant c)$. Через вершину проведена прямая l. Чему равно наибольшее и наименьшее значение суммы расстояний от точек A, B и C до прямой l?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

§ 1. Тригонометрия

1. а) «—»; б) «—»; в) «—»; г) «+»; д) «—»; е) «—»; ж) «+». **2.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$; б) 0; в) $\frac{3}{4}$; г) $\sin 15° = \sin(45°-30°) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; д) $\cos 67°30' = \sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; е) $2+\sqrt{3}$. **3.** а) $\sin 7 < \sin 8$; б) $\sin 3 < \cos 5$; в) $\cos 6 < \sin 1{,}5$; г) $\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - 2\sin\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$; д) $\sin 121° > 0{,}85$. Указание. Рассмотрим график функции $y = \sin x$ (x в градусной мере) на отрезке $120° \leqslant x \leqslant 135°$. Проведем хорду, соединяющую концы получившейся дуги. Значения функции $y = \sin x$ на рассматриваемом отрезке больше соответствующих значений на хорде. При $x = 121°$ значение y на полученной прямой равно $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{30}$. Докажем, что $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{30} > 0{,}85$. Это неравенство эквивалентно неравенству $28\sqrt{3} + 2\sqrt{2} > 51$. Но $28\sqrt{3} + 2\sqrt{2} > 28\cdot 1{,}73 + 2\cdot 1{,}4 > 51$; е) $\sin 22 > -0{,}01$. Указание. Воспользуйтесь неравенством $\sin x < x$, верным для любых $x > 0$. ($|\sin x|$ есть кратчайшее расстояние от конца подвижного радиуса единичной окружности до оси абсцисс, а x — длина дуги от точки на оси абсцисс до конца этого радиуса.) Кроме того, $22 - 0{,}01 < 7\cdot 3{,}1415 < 7\pi < 7\cdot 3{,}142 < 22$. Значит, $-\sin 22 = \sin(22-7\pi) < 22 - 7\pi < 0{,}01$.

4. а) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$; г) $-\frac{44}{125}$. **5.** а) $5-2\pi$; б) $\frac{3}{2}\pi - 3$; в) $2\pi - 7$. **19.** $-\frac{7}{\sqrt{130}}$; $-\frac{9}{\sqrt{130}}$. **20.** а) $-\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{5}$.

22. Левая часть равна:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} =$$

$$=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}+$$

$$+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

23. Данное равенство сводится к предыдущему.

25. Докажем сначала, что из равенства $\operatorname{tg}\frac{x+\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}=$ $=\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$ следует равенство $\cos x=\cos\alpha\cos\beta$. Имеем $\frac{\cos\alpha-\cos x}{\cos\alpha+\cos x}=$ $=\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}$. Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем $\cos x=\cos\alpha\cos\beta$. Теперь легко проделать все преобразования в обратной последовательности.

26. $\frac{2(1+6a^2-3a^4)}{(a^2-1)^3}$. **31.** Воспользуемся формулой $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$. В нашем случае

$$\operatorname{tg}142°30'=\frac{1-\cos 285°}{\sin 285°}=\frac{1-\sin 15°}{-\cos 15°}=$$

$$=\frac{1-\sin(45°-30°)}{-\cos(45°-30°)}=\frac{1-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}-4)(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}=2+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

34. $\frac{1}{\sin 10°}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10°}=\frac{\cos 10°-\sqrt{3}\sin 10°}{\sin 10°\cos 10°}=\frac{4\sin(30°-10°)}{\sin 20°}=4.$

35. Обозначим слагаемые левой части через α, β, γ, δ. Имеем

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{4}{7},\quad \operatorname{tg}(\gamma+\delta)=\frac{3}{11},\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=1.$$

Поскольку $0<\alpha+\beta+\gamma+\delta<\pi$, то $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{\pi}{4}$.

36. Обозначим слагаемые в левой части через α, β, γ. Имеем $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{12}{13}$. Далее, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-$ $-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{16}{65}=\sin\gamma=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$. Учитывая, что α, β, γ — острые углы, сделаем вывод, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$.

37. $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{15}}-\dfrac{1}{\sin\frac{4\pi}{15}}=\dfrac{\sin\frac{4\pi}{15}-\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}}=\dfrac{4\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5}-\frac{1}{2}}=\dfrac{4\sqrt{3}\cos\frac{2\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{5}-1}$.

Аналогично $\dfrac{1}{\sin\frac{2\pi}{15}}+\dfrac{1}{\sin\frac{8\pi}{15}}=\dfrac{4\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{5}}{2\cos\frac{2\pi}{5}+1}$.

Таким образом, левая часть равна

$$4\sqrt{3}\left(\frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{5}-1}+\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{2\cos\frac{2\pi}{5}+1}\right)=$$

$$=4\sqrt{3}\,\frac{2\cos^2\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos^2\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}}{4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{2\pi}{5}-1}=$$

$$=4\sqrt{3}\,\frac{2-2\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}\right)}{4\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{2\pi}{5}-1}.$$

При решении задачи 7 вводной части мы доказали, что $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}$. Из этого также следует, что $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$. Таким образом, левая часть равна $4\sqrt{3}$.

38. Обозначим $A=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}$, $B=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}$, $C=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$. Докажем, что $A=\frac{1}{8}$, $B=0$, $C=-\frac{3}{4}$. По формулам приведения и синуса двойного угла

$$A=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{9}}\left(\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{9}}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\right)=\ldots=\frac{1}{8},$$

$B=2\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\cos\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}=0$. В выражении для C перейдем к сумме, после чего по формулам приведения докажем, что $C=\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}-B\right)=-\frac{3}{4}$. В данном выражении для каждого слагаемого в левой части воспользуемся равенством $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$. После сложения получившихся дробей получим слева $\frac{3-3A+B-C}{1+A+B+C}=\frac{3-\frac{3}{8}+\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{8}-\frac{3}{4}}=9$.

41. Умножим обе части данного равенства на $\sin\frac{\pi}{7}$ и преобразуем получившиеся слева произведения в разности синусов.

42. Стандартный путь состоит в следующем: заменить каждый тангенс отношением синуса к косинусу, а затем преобразовать числитель и знаменатель получившейся дроби, переходя от произведений к суммам и разностям. Предложим другой путь. Обозначим $x=\operatorname{tg}10°$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{tg}3\cdot10°=\frac{\operatorname{tg}20°+\operatorname{tg}10°}{1-\operatorname{tg}20°\operatorname{tg}10°}=$$

$$=\frac{\frac{2\operatorname{tg}10°}{1-\operatorname{tg}^2 10°}+\operatorname{tg}10°}{1-\frac{2\operatorname{tg}10°}{1-\operatorname{tg}^2 10°}\operatorname{tg}10°}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}.$$

С другой стороны, $\operatorname{tg}50°=\operatorname{tg}(60°-10°)=\frac{\sqrt{3}-x}{1+\sqrt{3}x}$, $\operatorname{tg}70°=$ $=\frac{\sqrt{3}+x}{1-\sqrt{3}x}$ и данное в условии произведение будет равно

$$x\,\frac{\sqrt{3}-x}{1+\sqrt{3}x}\cdot\frac{\sqrt{3}+x}{1-\sqrt{3}x}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

43. Найдем сначала сумму тангенсов. Имеем

$$\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}}+\frac{\sin\frac{4\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{9}}+\frac{\sin\frac{4\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}}{\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{9}\right)\cos\frac{4\pi}{9}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\cos\frac{4\pi}{9}+\sin\frac{4\pi}{9}+\sin\frac{5\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{9}}=$$

$$=\frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{9}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=8\sin\frac{2\pi}{9}+\sqrt{3}.$$

44. Сложим сначала пары тангенсов, равноудаленных от концов. Получим

$$\sin 10^\circ\left(\frac{1}{\cos 10^\circ \cos 160^\circ}+\frac{1}{\cos 40^\circ \cos 130^\circ}+\frac{1}{\cos 70^\circ \cos 100^\circ}\right).$$

Первое слагаемое в скобках равно

$$\frac{2}{\cos 150^\circ+\cos 170^\circ}=\frac{4}{\sqrt{3}+2\cos 10^\circ},$$

второе $-\frac{2}{\sin 80^\circ}=-\frac{2}{\cos 10^\circ}$, третье $-\frac{4}{\sqrt{3}-2\cos 10^\circ}$.

Сумма первого и третьего равна

$$\frac{16\cos 10^\circ}{3-4\cos^2 10^\circ}=\frac{16\cos 10^\circ}{1-2\cos 20^\circ}.$$

Сумма всех трех равна

$$\frac{-2+4\cos 20^\circ+16\cos^2 10^\circ}{\cos 10^\circ-2\cos 20^\circ\cos 10^\circ}=\frac{-2+4\cos 20^\circ+8\cos 20^\circ+8}{-\cos 30^\circ}=$$

$$=-8\sqrt{3}\left(\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\right).$$

Вся левая часть равна $-8\sqrt{3}\left(\sin 10^\circ\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\sin 10^\circ\right)=$ $=-8\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin 30^\circ-\frac{1}{2}\sin 10^\circ+\frac{1}{2}\sin 10^\circ\right)=-2\sqrt{3}.$

45. Можно, как это мы делали при решении задачи 7 (вводная часть), умножить обе части на $\sin\frac{\pi}{35}$, после чего «сворачивать» произведение, используя формулу $\sin 2\alpha$. При этом, однако, неясно, «свернется» ли у нас все произведение сразу, или же эту операцию надо будет делать повторно. Мы поступим несколько иначе. Левая часть равна

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{17}\frac{\sin\frac{2\pi}{35}}{\sin\frac{\pi}{35}}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{35}}{\sin\frac{2\pi}{35}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin\frac{34}{35}\pi}{\sin\frac{17}{35}\pi}.$$

Рассмотрим один множитель знаменателя: $\sin\frac{k\pi}{35}$, $k=1,\ldots 17$. Если k четно, то найдется такой же множитель в числителе. Если k нечетно, то $\sin\frac{k\pi}{35}=\sin\frac{(35-k)\pi}{35}$, а множитель $\sin\frac{(35-k)\pi}{35}$ также есть в числителе. Следовательно, равенство доказано.

46. Умножим обе части на $\cos\frac{3\pi}{11}$, возведем равенство в квадрат, а затем преобразуем произведения в суммы.

Будем иметь

$$\sin^2\frac{3\pi}{11}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{6\pi}{11},$$

$$8\sin\frac{3\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}=4\sin\frac{6\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}=$$

$$=2\cos\frac{4\pi}{11}-2\cos\frac{8\pi}{11},\quad 16\sin^2\frac{2\pi}{11}\cos^2\frac{3\pi}{11}=$$

$$=4\left(1-\cos\frac{4\pi}{11}\right)\left(1+\cos\frac{6\pi}{11}\right)=4-4\cos\frac{4\pi}{11}+$$

$$+4\cos\frac{6\pi}{11}-2\cos\frac{2\pi}{11}-2\cos\frac{6\pi}{11},$$

$$11\cos^2\frac{3\pi}{11}=\frac{11}{2}+\frac{11}{2}\cos\frac{6\pi}{11}.$$

Перенеся косинусы в левую часть, а константы в правую, придем к равенству $2\cos\frac{2\pi}{11}+2\cos\frac{4\pi}{11}+2\cos\frac{6\pi}{11}+2\cos\frac{8\pi}{11}+$ $+2\cos\frac{10\pi}{11}=-1$.

Теперь умножим обе части на $\sin\frac{\pi}{11}$ и заменим произведения на разности синусов.

47. Обозначим углы через α, β, γ. Тогда $\operatorname{tg}(\beta-\gamma)=$ $=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=\frac{\frac{x}{k}-\frac{x}{k+1}}{1+\frac{x}{k}\cdot\frac{x}{k+1}}=\frac{x}{k(k+1)+x^2}=\operatorname{tg}\alpha$.

49. а) Получается из графика функции $y=\sin x$ сжатием в два раза вдоль оси абсцисс. б) Получается из графика функции $y=\cos x$ растяжением в три раза вдоль оси абсцисс. в) Получается из графика функции $y=\operatorname{tg} x$ при помощи двух последовательных операций: 1) сдвиг влево вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{6}$ $\left(\text{можно сказать, сдвиг на } -\frac{\pi}{6}\right)$; 2) сжатие получившегося графика в три раза вдоль оси абсцисс. Или в другом порядке: 1) сжатие графика функции $y=\operatorname{tg} x$ в три раза; 2) сдвиг влево на $\frac{\pi}{18}$. г) $y=1$, $x\neq\frac{\pi}{2}k$. д) $y=\operatorname{tg} 4x$, $x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$. е) $y=\sin x$, $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$. ж) Если $0\leqslant x<\pi$, $y=2\sin x$; если $\pi\leqslant x<2\pi$, $y=0$. Далее периодически повторяется. з) $y=0$, если $x\leqslant 0$; $y=2\sin 2x$, если $x>0$. и) Рис. 85. к) Если $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, $y=\sin x$; если $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$, $y=-\sin x$. Далее периодически повторяется. л) Если $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$,

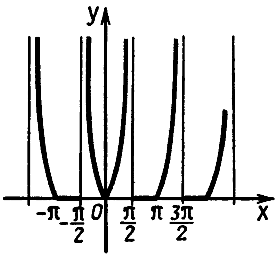


Рис. 85

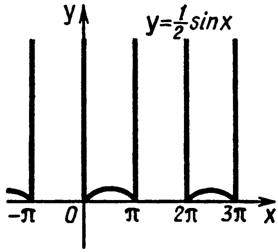


Рис. 86

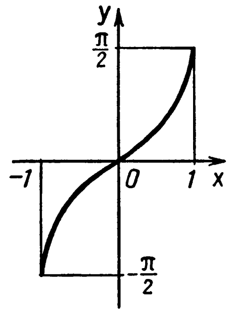


Рис. 87

$y=\operatorname{tg} x$; если $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, $y=0$; если $\pi\leqslant x<\frac{3}{2}\pi$, $y=-\operatorname{tg} x$; если $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$, $y=0$. Далее периодически повторяется. м) $y=|\sin x|$. н) Рис. 86. о) Множество точек состоит из двух семейств параллельных прямых: $x+y=2\pi k$, $x-y=\pi+2\pi k$. п) Множество точек с координатами $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, 2\pi n\right)$. р) Рис. 87. График симметричен графику $y=\sin x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, относительно биссектрисы I и III координатных углов ($y=x$). с) $y=\sqrt{1-x^2}$ или $y^2+x^2=1$, $y\geqslant 0$. т) Если $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$, $y=x$; если $\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{3}{2}\pi$, $y=\pi-x$. Далее периодически повторяется. у) В первой четверти ($x>0$, $y>0$) имеем множество точек $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k, 2\pi n\right)$, в третьей четверти ($x<0$, $y<0$) также множество точек $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \pi+2\pi n\right)$. В остальных двух четвертях части прямых: $x-y=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и $x+y=\frac{3}{2}\pi+2\pi k$. ф) $y=\frac{2x}{1+x^2}$. х) Данная функция определена при единственном значении $x=$ $=\sin 1$. График состоит из одной точки $\left(\sin 1, \frac{\pi}{2}\right)$. В самом деле, из определения $\arcsin a$ следует, что $\arcsin x\leqslant 1$, значит, $x\leqslant\sin 1$. Аналогично $\frac{2\arccos x}{\pi-2}\leqslant 1$, $\arccos x\leqslant\frac{\pi}{2}-1$, $x\geqslant$ $\geqslant\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\sin 1$. ($\arccos x$ — убывающая функция.) Значит, $x=\sin 1$.

50. а) 1; б) 2π; в) $2\pi^2$; г) 2π; д) 2π; е) 60π; ж) 2π; з) 2π; и) π; к) π. В пунктах л), м), н), о) указаны функции, не являющиеся периодическими. **51.** $\pm\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k$. **52.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$.

53. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$. **54.** πk, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **55.** $\frac{\pi}{5}k$, $\frac{\pi}{7}k$. **56.** $\frac{\pi}{8}k$. **57.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **58.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. **59.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **60.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$. **61.** $2\pi k$. **62.** $\pi+2\pi k$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. **63.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, πk. **64.** $\frac{\pi}{2}k$. **65.** $\pi+2\pi k$, $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k$. **66.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **67.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. **68.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$. **69.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $2\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$. **70.** $\frac{\pi}{2}+$ $+\pi k$, $\frac{2}{5}\pi k$. **71.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **72.** $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}k$. **73.** $\frac{\pi}{4}+$ $+\frac{\pi}{2}k, \frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}k$. **74.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}k$. **75.** $\frac{11}{60}+\pi k$, $\frac{29\pi}{240}+$ $+\frac{\pi}{4}k$. **76.** $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$. **77.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$. **78.** $\frac{\pi}{2}k$, $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **79.** $\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **80.** $4^\circ+45^\circ k$, $(-1)^k 30^\circ+8^\circ+180^\circ k$. **81.** $\frac{\pi}{14}+$ $+\frac{\pi}{7}k$, $\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi k$. **82.** $\frac{\pi}{36}+\frac{\pi}{9}k$, $-\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}k$. **83.** πk. **84.** $(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-\sqrt{6})+\pi k$. **85.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k$. **86.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **87.** $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **88.** $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{41}-3}{4}+\pi k$. **89.** $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **90.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}k$, $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k$. **91.** $\frac{\pi}{3}k$, $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **92.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\frac{\pi}{3}+\pi k$. **93.** $2\pi k$. **94.** πk, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$.

95. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. Указание: Воспользуемся следующими равенствами:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x,$$
$$\sin^8 x+\cos^8 x=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x=$$
$$=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x,$$
$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).$$

Освободимся в уравнении от знаменателя $(\sin^2 x)^5+(\cos^2 x)^5=$ $=\frac{1}{4}\sin^2 x\cos^2 x$.

Воспользуемся указанными выше равенствами, сделав при этом замену $y=\sin^2 x\cos^2 x$:

$$1-4y+2y^2-y+2y^2+y^2=\frac{1}{4}y,$$

или

$$20y^2-21y+4=0,$$

откуда $y_1=\frac{4}{5}$, $y_2=\frac{1}{4}$. В первом случае решений нет.

96. $-\frac{\pi}{4}+\pi k$. **97.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **98.** πk, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **99.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $(-1)^k \arcsin\frac{1}{8}+\pi k$. **100.** $\frac{3}{2}\pi+3\pi k$. **101.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi k$.

102. $\frac{\pi}{5}k$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}+\pi k$. Указание. Преобразуем уравнение к виду

$$\frac{\sin 5x}{\cos x\cos 4x}+\frac{\sin 5x}{\cos 2x\cos 3x}=0.$$

Возникают два случая:

1) $\sin 5x=0$, $x=\frac{\pi}{5}k$.

2) $\cos x\cos 4x+\cos 2x\cos 3x=0$.

Заменим $\cos 3x=\cos 3x+\cos x-\cos x=2\cos 2x\cos x-\cos x$. Поскольку $\cos x\neq 0$, то будем иметь $\cos 4x+\cos 2x\,(2\cos 2x-1)=0$. Далее замена $y=\cos 2x$.

103. $(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{3}-1)+\frac{\pi}{2}k$.

104. $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi k$. Указание. Воспользуемся равенством $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$.

В самом деле, $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha=$
$=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha\sin 2\alpha}+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

Следовательно, левую часть уравнения можно преобразовать следующим образом: $\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}3x+2(\operatorname{tg}2x+2\operatorname{ctg}4x)=\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}3x+2\operatorname{ctg}2x=\operatorname{ctg}x+3\operatorname{ctg}3x$.

Получаем уравнение

$$\cos x\sin 3x+3\cos 3x\sin x=0,$$

$$\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 4x)+\frac{3}{2}(\sin 4x-\sin 2x)=0,$$

$$2\sin 4x-\sin 2x=0,\quad \sin 2x\,(4\cos 2x-1)=0,$$

$$\cos 2x=\frac{1}{4}\ (\sin 2x\neq 0).$$

105. πk, $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{10}k$. **106.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$. **107.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

108. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\neq 0$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\neq 0$.

109. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. Указание. Левая часть равна $\operatorname{ctg}x$. (Докажите.)

110. $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)+2\pi k$. Указание. Обозначим $y=\cos x+\sin x$, тогда $y^2=1+2\sin x\cos x$.

Получаем для y уравнение

$$y\frac{3-y^2}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(y^2-1),\quad y^3+y^2\sqrt{2}-3y-\sqrt{2}=0.$$

Подобрав корень $y_1=\sqrt{2}$ (можно сделать замену $y=z\sqrt{2}$, тогда получим уравнение с целыми коэффициентами, один корень которого равен 1), разложим левую часть на множители:

$$y^3+y^2\sqrt{2}-3y-\sqrt{2}=(y-\sqrt{2})(y^2+2y\sqrt{2}+1)=0,$$
$$y_2=1-\sqrt{2},\quad y_3=-\sqrt{2}-1.$$

Возвращаемся к исходной переменной $y=\cos x+\sin x=$ $=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

111. $\frac{\pi}{8}+(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2}k$. Указание. Преобразуем левую часть $\left(y=2x-\frac{\pi}{4},\ 4x=2y+\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\frac{\sin 4x-\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 4x+\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos 2y-\sin y}{\cos 2y+\sin y}.$$

Затем сделаем замену $\sin y=z$.

112. $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **113.** $\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi k$. Указание. Воспользуйтесь формулой $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$.

114. $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$.

115. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. Указание. Из равенства $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{ctg}2\alpha=$ $=\operatorname{ctg}\alpha$, доказанного при решении уравнения 104, следует, что правая часть уравнения равна $\operatorname{ctg}2x-\operatorname{tg}2x$.

Получаем уравнение $\operatorname{tg}2x=\operatorname{ctg}x$ или $\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, откуда $2x=\frac{\pi}{2}-x+\pi k$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$. Теперь необходимо провести отбор корней. Поскольку общий период функций, входящих в уравнение, равен π, достаточно рассмотреть значения $k=0$, 1, 2 (или -1, 0, 1), $k=1$ не подходит.

116. $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, πk. **117.** $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k$. **118.** $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$.

119. $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$. Указание. Обозначим $\sqrt{\cos x}=y$. Получаем уравнение $\sqrt[4]{8}y^2-(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2})\,y-1=0$. Это уравнение имеет два корня: $y_1=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $y_2=-\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$.

120. $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7+\sqrt{52}}{3}}+\pi k$. Указание. Выразите все тригонометрические функции через $\operatorname{tg} x$.

121. $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $(-1)^{k+1}\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **122.** πk, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$. **123.** $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{9}k$, πk. $\left(\text{Серия } -\frac{\pi}{2}+\pi k \text{ содержится в первой.}\right)$ **124.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **125.** $(-1)^k\frac{\pi}{36}+\frac{\pi}{6}k$, $\frac{\pi}{4}n$, $n\neq 4m+2$. **126.** $\frac{\pi}{2}k$, $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{12}k$. **127.** $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}k$. **128.** $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi}{7}k$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. $\left(\text{Серия } \frac{\pi}{2}+\pi k \text{ содержится в первой.}\right)$ **129.** $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{6}-2}{2}+\frac{\pi}{2}k$. **130.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **131.** $\frac{\pi}{8}k$, $k\neq 8m+1$, $k\neq 8m+3$. Указание. Правая часть равна $\operatorname{tg}\left(-3x-\frac{\pi}{8}\right)$. **132.** πk. **133.** $\frac{\pi}{4}k$, $k\neq 5m+3$.

134. $-\frac{\pi}{10}+\frac{21}{5}\pi k$, $k\neq 5m+3$. Указание. При отборе корней достаточно отбросить те из найденных значений, при которых не имеет смысла левая часть. Если $x=-\frac{\pi}{10}+\frac{21}{5}\pi k$, то $\frac{3}{7}x+\frac{\pi}{7}=$ $=\frac{9}{5}k\pi+\frac{\pi}{10}$. Теперь достаточно рассмотреть для k значения 0, 1, 2, 3, 4, так как в дальнейшем будем получать углы, отличающиеся от рассмотренных на величину, кратную π. Но лишь при $k=3$, $\frac{3}{7}x+\frac{\pi}{7}=\frac{5}{2}\pi$ тангенс не существует.

135. $\frac{\pi}{4}+\pi k$. **136.** $2\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

137. $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $-\frac{\pi}{4}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k$. Указание. Преобразуем уравнение:

$$1-2\sin^2 x+4\sin x\cos x-2\sqrt{2}\cos x=0,$$
$$(1-\sqrt{2}\sin x)(1+\sqrt{2}\sin x)-2\sqrt{2}\cos x(1-\sqrt{2}\sin x)=0,$$
$$(1-\sqrt{2}\sin x)(1+\sqrt{2}\sin x-2\sqrt{2}\cos x)=0.$$

В уравнении $1+\sqrt{2}\sin x-2\sqrt{2}\cos x=0$ вводим вспомогательный угол φ. Тогда $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}\left(\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Получаем $\frac{1}{\sqrt{10}}-\cos(x+\varphi)=0$, $x=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k$. Можно доказать, что $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$.

138. $\pi+2\pi k$. Указание. $\frac{\sin x}{1-\cos x}=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Аналогично преобразуется вторая дробь в левой части. Получаем уравнение $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{3}{2}x=-\sin 2x$ или $\frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3}{2}x}=-\sin 2x$ и т. д.

139. $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}n$, $n\neq 9m+4$. Указание. Перенеся все в правую часть, преобразуем уравнение к виду $\frac{\cos 3x}{\sin x\cos 2x}-$ $-\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin 5x}=0$ или $\frac{\cos 3x}{\cos 2x\sin x}-\frac{2\cos 3x\sin 2x}{\sin 5x\sin x}=0$.

Возникают два случая: 1) $\cos 3x=0$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$. Здесь подходят все значения.

2) $\sin 5x-\sin 4x=0$, $\cos\frac{9}{2}x\sin\frac{x}{2}=0$.

а) $\sin\frac{x}{2}=0$, $x=2\pi k$. Эти значения не входят в область определения уравнения.

б) $\cos\frac{9}{2}x=0$, $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{9}k$. Достаточно рассмотреть для k значения 0, 1, ..., 8. Не подходит одно значение $k=4$.

140. $\frac{\pi}{7}k$, $k\neq 7n$. Указание. Освободимся от знаменателя

$$\sin 4x\sin 8x+\sin 2x\sin 8x+\sin 2x\sin 4x=0,$$
$$\cos 4x-\cos 12x+\cos 6x-\cos 10x+\cos 2x-\cos 6x=0,$$
$$(\cos 4x-\cos 10x)+(\cos 2x-\cos 12x)=0,$$
$$\sin 7x\sin 3x+\sin 7x\sin 5x=0,$$
$$\sin 7x\sin 4x\cos x=0.$$

Но $\sin 4x\neq 0$ и $\cos x\neq 0$. Значит, $\sin 7x=0$ и т. д.

141. $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}k$, $k\neq 7m+3$. **142.** $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}k$, $k\neq 7m+3$. **143.** $\frac{\pi}{4}+$ $+2\pi k$.

144. $\frac{\pi}{3}+\pi k$, $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$. Указание. Преобразуем уравнение к виду $2\sin 2x\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ или $\sin 3x+\sin x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin 3x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x$, $\sin 3x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$, $\sin 3x-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\right.$ $\left.-x\right)=0$ и т. д.

145. $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}+\pi k$. Указание. Преобразуем уравнение $2(\cos 3x+\cos x)-3(\cos x+\sin x)=0$,

$$4\cos 2x\cos x-3(\cos x+\sin x)=0,$$
$$4(\cos^2 x-\sin^2 x)\cos x-3(\cos x+\sin x)=0,$$
$$(\cos x+\sin x)(4\cos^2 x-4\cos x\sin x-3)=0,$$
$$(\cos x+\sin x)(2\cos 2x-2\sin 2x-1)=0$$

и т. д.

146. $\frac{\pi}{3}+\pi k$, πk. Указание. Уравнение можно преобразовать к виду $\dfrac{3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos x}$. Затем заменим $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ и т. д.

147. πk, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi k$. Указание. Имеем

$$4(\operatorname{tg} 4x-\operatorname{tg} 3x)=\operatorname{tg} 2x(1+\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 4x),$$
$$\frac{4\sin x}{\cos 4x\cos 3x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{\cos 3x\cos 4x}\quad \text{и т. д.}$$

148. $\frac{\pi}{4}k$, $k\neq 4n+2$. Указание. Имеем

$$(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 3x)+\operatorname{tg} 4x(1-\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 3x)=0.\quad \text{Затем}$$
$$\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 3x=(\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 3x)(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x)=-\frac{\sin 2x\sin 4x}{\cos^2 x\cos^2 3x},$$
$$1-\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 3x=\frac{\cos 4x\cos 2x}{\cos^2 x\cos^2 3x}\quad \text{и т. д.}$$

149. $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{8}k$. Указание. Заметим, что $\frac{1}{\sin 2x}-\operatorname{ctg} x=$ $=\frac{1-2\cos^2 x}{\sin 2x}=-\operatorname{ctg} 2x$. Затем преобразуем пару $\frac{1}{\sin 4x}-\operatorname{ctg} 2x=$ $=-\operatorname{ctg} 4x$ и окончательно получим $\operatorname{ctg} 8x=0$.

150. $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}k$, $k\neq 3n+1$. Указание. Имеем

$$\frac{1}{\cos 2x\sin 3x}-\frac{1}{\sin x\cos 2x}=\frac{\sin x-\sin 3x}{\cos 2x\sin x\sin 3x}=$$
$$=-\frac{2\cos 2x\sin x}{\cos 2x\sin x\sin 3x}=-\frac{2}{\sin 3x}.$$

Затем освобождаемся от знаменателя.

151. $\frac{3\pi}{23}(14k+5)$, $k\neq 23m-2$; $\frac{3\pi}{5}(14n+9)$, $n\neq 5m-1$. Указание. Остановимся на отборе корней. Заметим, что знаменатели обеих дробей при найденных значениях или одновременно равны нулю, или одновременно отличны от нуля.

Пусть $x=\frac{3\pi}{23}(14k+5)$. $\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, если $\frac{2}{3}x=2\pi n$, т. е. $\frac{2\pi}{23}(14k+5)=2\pi n$, $14k+5=23n$.

Понятно, что если при каком-то k_0 выражение $14k_0+5$ делится на 23, то оно делится на 23 при $k=k_0+23m$. Легко подобрать $k_0=-2$.

152. $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}k$. Указание. Заменим $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=$ $=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$.

Преобразуем левую часть, получим уравнение

$$\frac{2\cos 2x-\cos x+\sin x}{2\cos 2x-\cos x-\sin x}=\sqrt{3}+2.$$

Освободимся от знаменателя и перенесем все в одну часть, будем иметь: $2(\sqrt{3}+1)\cos 2x-(\sqrt{3}+1)\cos x-\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)\sin x=0$, $\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=0$, $\cos 2x-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ и т. д.

153. $\pi+2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+\pi k$. Указание. Заменим $\sin^2 5x=1-$ $-\cos^2 5x$.

После преобразований получим уравнение

$$\cos^2 x+2\cos x\cos^2 5x+\cos^2 5x=0.$$

Рассматривая это уравнение как квадратное относительно $\cos x$, найдем $\frac{1}{4}D=\cos^2 5x(\cos^2 5x-1)$.

Поскольку оказывается, что $D\leqslant 0$, то $D=0$. Значит, $\cos 5x=0$ или $\cos^2 5x=1$, откуда (из уравнения) $\cos x=0$ или $\cos x=-1$.

154. $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}k$. **155.** $\frac{\pi}{12}k$. Указание. $8\cos x\cos^3 4x=$ $=3\cos 3x+3\cos 5x+\cos 11x+\cos 13x$. **156.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{7}+\frac{\pi}{2}k$. **157.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $-\operatorname{arctg}\frac{6+\sqrt{3}}{11}+\pi k$.

158. $\frac{\pi}{3}k$, $k\neq 3m$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+\pi k$. Указание. $3\operatorname{ctg}2x-$ $-3\operatorname{ctg}x=-\frac{3}{\sin 2x}$.

Затем $6\operatorname{ctg}4x-\frac{3}{\sin 2x}=\frac{3\cos 4x}{\cos 2x\sin 2x}-\frac{3}{\sin 2x}=$

$$=\frac{3(\cos 4x-\cos 2x)}{\cos 2x\sin 2x}=-\frac{6\sin 3x\sin x}{\cos 2x\sin 2x}=-\frac{3\sin 3x}{\cos 2x\cos x}.$$

Получаем уравнение $\operatorname{tg}3x-\frac{3\sin 3x}{\cos 2x\cos x}=0$ и т. д.

159. $\frac{\pi}{2}k$. **160.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **161.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **162.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **163.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}k$. **164.** $\frac{\pi}{4}+\pi k\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+\pi k$, $\pm\frac{\pi}{8}+\pi k$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$. **165.** $\frac{1}{6}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}+\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{3}k$, $\frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}2\sqrt{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{\pi}{2}k$.

166. $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $2\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\pm\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{3\pi}{4}+2\pi k$. Указание. Замените $\cos 3x=2\cos 2x\cos x-\cos x$, $\sin 3x=2\cos 2x\sin x+\sin x$. После перенесения всех членов уравнения в одну часть можно будет вынести множитель $\cos x+\sin x$.

167. $\frac{\pi}{2}k$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$. **168.** $-\frac{\pi}{10}+2\pi k$, $-\frac{3}{5}\pi+2\pi k$. **169.** $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$. **170.** $(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k$. **171.** $(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k$. **172.** $\pi+2\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

173. $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. Указание. $\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\,|\sin x|$. Если $\sin x\geqslant 0$, то решений нет.

174. $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{6}+\pi k$. **175.** πk, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{3}+\pi k$. **176.** $2\pi k$, $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+\pi k$. **177.** $\frac{5}{6}\pi+2\pi k$.

178. $\arccos(\sqrt{5}-2)+2\pi k$, $\pi+2\pi k$. Указание. Возведем обе части в квадрат. Заметим, что в исходном уравнении правая часть неотрицательна, значит, неотрицательна и левая часть. Таким образом, возникает условие $\sin x\geqslant 0$. После возведения в квадрат получаем уравнение

$$\cos^2 x+2\cos x+2\,|\cos x|-1=0.$$

179. $\frac{3}{8}\pi+\pi k$, $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}5+\frac{\pi}{2}+\pi k$. **180.** $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

181. πk. Указание. Возведем обе части в квадрат $\left(\text{условие } \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant 0\right)$ и освободимся от знаменателя. Справа будет $8\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(4x-\frac{5}{6}\pi\right)=2\cos\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)-2\cos 6x$. Слева будет $-1-2\cos 6x$ и т. д.

182. $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **183.** $\frac{\pi}{12}+2\pi k$, $\frac{5\pi}{12}+(2k+1)\pi$.

184. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$. Указание. Замена: $\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=y$ $(y\geqslant 0)$.

185. $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ 2\pi k$.

186. $2\pi k,\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k$. Указание. При отборе корней следует ограничиться проверкой одного неравенства $\cos x-\sin 2x\geqslant 0$.

187. $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k$.

188. $\frac{5}{4}\pi+2\pi k$. Указание. Сделайте замену неизвестного $y=\cos x+\sin x$. Тогда уравнение примет вид

$$\sqrt{19\frac{1}{2}-5\frac{\sqrt{2}}{2}y}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2y.$$

189. $\frac{2}{3}\pi+\pi k,\ (-1)^k\arcsin\frac{1}{4}-\frac{\pi}{6}+\pi k$. Указание. Преобразуем уравнение:

$$4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2x\right)-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=0,$$

$$4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \text{ и т. д.}$$

190. $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ (-1)^{k+1}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi}{6}+\pi k$. Указание. Уравнение можно преобразовать к виду

$$3\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0.$$

191. $\frac{2}{3}\pi+\pi k,\ \pm\arccos\frac{1}{10}-\frac{\pi}{6}+2\pi k$.

192. $\frac{5}{6}\pi+\pi k,\ \frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$. Указание. Преобразуем уравнение:

$$\sin 3x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)-\left(\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)=0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0,$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \text{ и т. д.}$$

193. $\frac{\pi}{2}k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$.

194. $\frac{2}{9}\pi k+\frac{\pi}{4},\ k\neq 9n;\ \frac{\pi}{28}+\frac{2\pi}{7}k$. Указание. Имеем

$$(\cos x+\sin x)\sin 2x\cos 4x=\frac{\sqrt{2}}{8},\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin 2x\cos 4x=\frac{1}{8}.$$

Обозначим $\frac{\pi}{4}-x=y$, $x=\frac{\pi}{4}-y$. Получаем $\cos y\cos 2y\cos 4y=$
$=-\frac{1}{8}$.

Умножим обе части на $8\sin y$ (при этом появляются лишние корни $y=\pi n$). Приходим к уравнению $\sin 8y+\sin y=0$.

195. $-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$, $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)+2\pi k$. Указание. Умножим уравнение на $\sin x\cos x$, получим:

$$2\sin^2 x-2\sin^2 x\cos x+3\cos^2 x-3\cos^2 x\sin x+5\cos x\sin x=0,$$
$$(2\sin^2 x-2\sin^2 x\cos x+2\cos x\sin x)+(3\cos^2 x-$$
$$-3\cos^2 x\sin x+3\cos x\sin x)=0,$$
$$(2\sin x+3\cos x)(\sin x-\sin x\cos x+\cos x)=0.$$

Возникают два случая: 1) $2\sin x+3\cos x=0$;
2) $\sin x-\sin x\cos x+\cos x=0$.

Во втором случае делаем замену $u=\sin x+\cos x$, откуда $\sin x\cos x=\frac{1}{2}(y^2-1)$.

196. $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k$, $\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$.

Указание. Преобразуем уравнение: $1+\sin 2x+2\cos 3x\sin x+$
$$+2\cos 3x\cos x=2\sin x+2\cos 3x+\cos 2x,$$
$$1+\sin 2x+\sin 4x-\sin 2x+\cos 4x+\cos 2x=$$
$$=2\sin x+2\cos 3x+\cos 2x,\ (1+\cos 4x)+$$
$$+\sin 4x=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\cos 3x,$$
$$2\cos 2x(\cos 2x+\sin 2x)=4\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right),$$
$$\sqrt{2}\cos 2x\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$$ и т. д.

197. $\frac{5}{4}\pi k+5\pi k$, $-\frac{25}{24}\pi\pm\frac{5}{8}\pi+5\pi k$. Указание. Уравнение преобразуется к виду
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{5}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{2}{5}x+\frac{5\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{5}\right).$$

198. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{5}+\pi k$. Указание. Имеем $\operatorname{ctg} x-$
$-\frac{2}{\sin 2x}=-\operatorname{tg} x$. (Докажите!) Затем $\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{tg} x=\frac{\cos 3x}{\sin 2x\cos x}$.

Уравнение теперь примет вид $\frac{\cos 3x}{\cos x\sin 2x}+\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=0$.

Возникают два случая: 1) $\cos 3x=0$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $k\neq 3n+1$;

2) $\frac{\sin 3x}{\cos x \sin 2x}+1=0$, $\frac{\sin 2x \cos x+\cos 2x \sin x}{\cos x \sin 2x}+1=0$, $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}+$ $+2=0$, откуда найдем $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{5}$.

199. $\frac{3}{2}\pi+2\pi k$. **200.** $\frac{3}{4}\pi+2\pi k$. **201.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

202. $\frac{\pi}{12}+\pi k$, $\frac{5\pi}{12}+\pi k$. У к а з а н и е. Уравнение приводится к виду $\operatorname{tg} 3x=1$. Затем отбор корней. Примерный путь: левая часть преобразуется к виду $\frac{2 \cos x}{\cos 2x}$, затем переносим все в одну часть (в левую) и приводим к общему знаменателю.

203. $\frac{\pi}{9}k$, $k\neq 9n$. **204.** $8\pi k$. **205.** $4\pi k$. **206.** $-\frac{\pi}{64}+\frac{\pi}{16}k$. У к а з а н и е. Перенесем $\operatorname{ctg} x$ в левую часть и, используя равенство $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2 \operatorname{ctg} 2\alpha$, преобразуем уравнение к виду $-16 \operatorname{ctg} 16x=16$.

207. $\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}+\pi k$. У к а з а н и е. Преобразуем уравнение к виду $2 \sin 2x \cos x+2\cos 2x \sin x+\cos x \cos 2x=2 \cos 2x \cos x\times$ $\times(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} 2x)$, а затем разделим почленно на $\cos 2x \cos x$.

208. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pi+2\pi k$.

209. $\frac{2}{9}\pi k$, $k\neq 9n$. У к а з а н и е. Умножим уравнение на $\sin\frac{x}{2}$ (при этом появляются лишние корни: $x=2\pi n$). После чего уравнение преобразуется к виду $\sin\frac{9}{2}x=0$.

210. $\frac{\pi}{2}k$, $\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k$. У к а з а н и е. Докажите, что из равенства $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ следует, что $a+b+c=0$ (см. X, 18, § 1).

211. $\frac{\pi}{2}k$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$, $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k$.

212. $\frac{\pi}{3}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{6}(\sqrt{3}-4\pm\sqrt{43+16\sqrt{3}})\right)+\frac{\pi}{3}+\pi k$. У к а з а н и е. Заменим $x=y+\frac{\pi}{3}$, получим относительно y уравнение $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{3}\right)+2 \operatorname{tg} y+\operatorname{tg}\left(y+\frac{3\pi}{4}\right)=0$. Раскрывая тангенсы по формуле сложения, переходим к неизвестной $z=\operatorname{tg} y$.

213. $\frac{\pi}{2}+\pi k$. У к а з а н и е. Можно рассмотреть уравнение как квадратное относительно $\cos 3x$. Можно преобразовать его к виду $\left(\cos 3x-\frac{1}{2}\cos^4 x\right)^2+\frac{1}{4}(\cos^2 x-\cos^8 x)=0$. Отсюда следует, что каждое из слагаемых равно нулю.

214. $\pi+2\pi k$.

215. $2\pi+8\pi k$. Указание. Преобразуем уравнение к виду

$$-\sin^2 x\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)=2\left(\sin\frac{x}{4}-\cos x\right)^2.$$

Левая часть неположительна, правая неотрицательна. Следовательно, они обе равны нулю.

216. $2\pi+8\pi k$. Указание. Уравнение приводится к виду $\cos x+\sin\frac{5}{4}x=2$.

217. $\frac{\pi}{13}+\frac{2\pi}{13}k$, $k\neq 6+13m$; $\frac{2}{3}\pi n$, $n\neq 3m$. Указание. Умножим обе части на $\sin x$. Тогда все уравнение можно преобразовать к виду $\sin 5x-\sin 8x=0$.

218. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. Указание. Каждый множитель преобразуем по формуле $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Уравнение распадается на два: $\cos\frac{x}{2}\cos x\cos\frac{3}{2}x=\pm\frac{1}{4}$.

Преобразуем левую часть, а затем сделаем замену $y=\cos x$. Получаем два уравнения: 1) $4y^3+2y^2-2y-1=0$, $(2y^2-1)(2y+1)=0$.

2) $4y^3+2y^2-2y+1=0$.

Докажем, что во втором случае уравнение не имеет решений, удовлетворяющих неравенствам $-1\leqslant y\leqslant 1$.

Если $y\geqslant 0$, то $y^3\geqslant 0$ и $2y^2-2y+1>0$.

Если $-1\leqslant y<0$, то левую часть преобразуем к виду $4y(y^2-1)+(2y^2+2y+1)$.

Вновь первое слагаемое неотрицательно, а второе положительно.

219. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$. Указание. Сделайте замену $y=\sin x+\sqrt{2-\sin^2 x}$. Тогда $y^2=2+2\sin x\sqrt{2-\sin^2 x}$.

220. $\frac{\pi}{14}k$, $k\neq 14n$. Указание. Умножьте обе части на $\sin x$.

221. πk. Указание. Преобразуем левую часть:

$$4(\sin 7x-\sin 5x)+9(\sin 5x-\sin 3x)+$$
$$+15(\sin 3x-\sin x)+22\sin x=8\cos 6x\sin x+$$
$$+18\cos 4x\sin x+30\cos 2x\sin x+22\sin x=$$
$$=2\sin x(4\cos 6x+9\cos 4x+15\cos 2x+11).$$

Докажем, что выражение в скобках всегда положительно. Выразим его через $y=\cos 2x$, получим $16y^3+18y^2+3y+2$. Ясно, что при $y\geqslant 0$ этот многочлен положителен. Пусть $-1\leqslant y<0$.

Имеем $16y^2(y+1)+(2y^2+3y+2)$. Первое слагаемое неотрицательно, а второе положительно.

222. πk, $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **223.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $k\neq 3m+1$; $\frac{\pi}{5}n$, $n\neq 5m$.

224. $\operatorname{arctg} 2+\pi k$. Указание. Рассмотрите три случая: $\operatorname{tg} x=2$, $\operatorname{tg} x>2$, $\operatorname{tg} x<2$. Покажите, что во втором и третьем случаях решений нет. Левая часть соответственно меньше или больше 1.

225. $-\frac{\pi}{7}+2\pi k$, $\frac{19}{14}\pi+2\pi k$.

226. $\frac{\pi}{2}+2\pi k$. Указание. Оценим левую часть:

$$5\sin^5 x+(-3\cos^3 x)\leqslant 5\sin^2 x+3\cos^2 x=5-2\cos^2 x\leqslant 5.$$

Равенство имеет место, если $\sin x=1$, $\cos x=0$.

227. $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\arcsin(2-\sqrt{3})+\pi k$. Указание. Перепишем уравнение в виде

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\pi\sin x\right).$$

Возникают два случая: 1) $\frac{\pi}{6}\cos 2x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\pi\sin x+2\pi k$.

2) $\frac{\pi}{6}\cos 2x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\pi\sin x\right)+2\pi k$.

Рассмотрим первый случай. Обозначив $y=\sin x$, получим уравнение $\frac{1}{6}(1-2y^2)=\frac{1}{2}-\frac{4}{3}y+2k$ или $y^2-4y+6k+1=0$.

Это уравнение имеет решение, удовлетворяющее условию $-1\leqslant y\leqslant 1$ при целых k, если $k=0$ или $k=-1$. Если $k=0$, $y=2-\sqrt{3}$; если $k=-1$, $y=-1$. Аналогично разбирается второй случай.

228. $(-1)^n\arcsin\left(\frac{\pi}{4}(4k+1)+\sqrt{\frac{\pi^2}{16}(4k+1)^2-1}\right)+\pi n, k\leqslant -1;$

$(-1)^n\arcsin\left(\frac{\pi}{4}(4k+1)-\sqrt{\frac{\pi^2}{16}(4k+1)^2-1}\right)+\pi n,\ k\geqslant 1;$

$(-1)^n\arcsin\left(\frac{\pi}{4}(4k+1)+\sqrt{\frac{\pi^2}{16}(4k+1)^2+1}\right)+\pi n,\quad k\leqslant -1;$

$(-1)^n\arcsin\left(\frac{\pi}{4}(4k+1)-\sqrt{\frac{\pi^2}{16}(4k+1)^2+1}\right)+\pi n,\ k\geqslant 0.$

229. $\pm 1\pm\sqrt{1-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k\geqslant 0$, возможны любые комбинации знаков. **230.** $\pm\sqrt{\pi k}$, $k\geqslant 0$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **231.** π^2k^2, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, $n\geqslant 0$.

232. $\pm\sqrt{\pi k}$, $k\geqslant 0$; $\frac{\pi}{3}+\pi k$. **233.** $\pm\sqrt{\pi k}$, $k\geqslant 0$; $\frac{5}{6}\pi+\pi k$.

234. $\frac{(16-\pi^2)^2}{4\pi^2}$. Указание. Из уравнения следует, что $\sqrt{x+16}-\sqrt{x}=\pi k$. Но $0<\sqrt{x+16}-\sqrt{x}=\frac{16}{\sqrt{x+16}+\sqrt{x}}\leqslant 4$. Следовательно, возможно одно значение: $k=1$.

235. $1+\frac{\sqrt{15}}{8}$. **236.** $\frac{1}{12}(2k+1\pm\sqrt{(2k+1)^2-192})$, $k\leqslant -8$ или $k\geqslant 7$, $k\neq -25$, $k\neq -10$, $k\neq 9$, $k\neq 24$. Кроме того, уравнение имеет еще четыре корня: $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$. Указание. См. решение уравнения 20 вводной части. **237.** $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$. **238.** $\pi+2\pi k$, $\pi\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **239.** $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **240.** $-\frac{\pi}{42}$, $-\frac{29}{42}\pi$, $\frac{55}{42}\pi$. **241.** $-\frac{7}{12}\pi$, $\frac{13}{12}\pi$. **242.** $\frac{8}{15}\pi+4\pi k$, $\frac{4}{3}\pi+4\pi k$, $-\frac{4}{15}\pi+4\pi k$. **243.** $\frac{3}{4}\pi+\frac{4}{3}\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\pi k$, $-\frac{7\pi}{18}+\frac{4}{3}\pi k$. **244.** $\frac{13}{4}$.

245. $\frac{\pi}{2}$. Указание. Задача сводится к доказательству неравенства $\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}>3\frac{1}{3}$ или $\operatorname{tg}\left(3\frac{1}{3}-\pi\right)<\frac{1}{3}$. Но $3\frac{1}{3}-\pi<\frac{\pi}{12}$ (докажите!), а $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=2-\sqrt{3}<\frac{1}{3}$.

246. $10\frac{1}{2}\pi+3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$. Указание. Корни уравнения образуют две серии: $\frac{\pi}{2}+\pi k$ и $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}+\pi k$. Для первой серии $k=0$, 1, 2; для второй серии $k=1$, 2, 3, поскольку $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}+3\pi<$ $<\frac{\pi}{6}+3\pi<10$.

247. 0; ± 1; $\frac{1-\sqrt{17}}{4}$; $\frac{1-\sqrt{33}}{4}$. **248.** $\frac{\pi+2}{6}$, $\frac{2-3\pi}{6}$, $\frac{2-\pi}{2}$, $\frac{3\pi+2}{2}$, $\frac{2-\pi}{6}$, $\frac{-11\pi+2}{6}$, $\frac{9\pi+2}{6}$. **249.** $\frac{5}{4}\pi-1$.

250. Рассмотрим уравнение $\cos 3\alpha=-\frac{1}{2}$ или $8\cos^3\alpha-$ $-6\cos\alpha+1=0$. Ясно, что при α, равном $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}$, имеет место равенство. Положим $x=\frac{1+\cos\alpha}{2}$. При рассматриваемых значениях α x принимает значения $\cos^2\frac{\pi}{9}$, $\cos^2\frac{2\pi}{9}$, $\cos^2\frac{4\pi}{9}$.

В уравнении для α заменим $\cos\alpha=2x-1$. После преобразования получим данное уравнение.

251. 3 корня. Указание. Из уравнения следует, что $\sqrt{x+90}-\sqrt{x}=k$, где $k=1, 2, \ldots, 9$. Но лишь для $k=4, 7, 8$ полученные значения x входят в область определения исходного уравнения.

252. $0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$. Указание. Первое уравнение имеет следующие решения, удовлетворяющие неравенству $|x|\leqslant 3$: $x=\frac{\pi}{6}k$, где $-5\leqslant k\leqslant 5$, и $x=\frac{\pi}{7}k$, где $-6\leqslant k\leqslant 6$.

Нетрудно среди первой группы отобрать решения, удовлетворяющие второму уравнению. Докажем, что среди второй группы ни одно решение, кроме $x=0$, не удовлетворяет второму уравнению.

Преобразуем второе уравнение: $\cos 2x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=1$, $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{7}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

Подставим $x=\frac{\pi}{7}k$. Получим $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi k}{14}\right)\cos\left(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1$.

При целых k $\cos\left(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, должно выполняться равенство $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi k}{14}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $\frac{3\pi k}{14}=\frac{\pi}{2}n$, $k=\frac{7}{3}n$; значит, $n=3m$, $k=7m$, а поскольку $|k|<7$, то $m=0$.

253. $-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}$. Указание. Выразим из второго уравнения $\sin\frac{\pi x}{2}$. Заменим в первом $\cos\pi x=1-2\sin^2\frac{\pi x}{2}$ и подставим вместо $\sin\frac{\pi x}{2}$ найденное выражение. Получим после преобразований $\left(2\sin\frac{14\pi}{x}-1\right)\left(\cos\frac{14\pi}{x}-1\right)=0$ и т. д.

254. $-\frac{2}{3}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{3}$. Указание. На основании первого уравнения найдем $4\cos^2 5\pi x=\left(\sin\frac{3\pi}{x}-\cos\frac{3\pi}{x}\right)^2$, откуда $\sin\frac{6\pi}{x}=-2\cos 10\pi x-1$.

Заменим во втором $\sin\frac{6\pi}{x}$. Получим уравнение $\cos\left(10\pi x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, откуда: 1) $10\pi x=2\pi k$, $x=\frac{k}{5}$;

2) $10\pi x = 2\pi k - \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{3k-1}{15}$.

1) Заменив во втором уравнении $10\pi x$ на $2\pi k$, получим $\sin\frac{6\pi}{x} = -3$, что невозможно.

2) В этом случае $\sin\frac{6\pi}{x} = 0$, откуда $x = \frac{6}{n}$.

Приравняем значения x: $\frac{3k-1}{15} = \frac{6}{n}$, $n = \frac{90}{3k-1}$.

Знаменатель этой дроби не делится на 3. Следовательно, $3k-1$ может равняться делителю 90, не кратному 3, т. е. $3k-1$ может принимать следующие значения: ± 1, ± 2, ± 5, ± 10. Найдем, для каких из этих чисел k — число целое.

Получим $-1\left(k=0,\ x=-\frac{1}{15}\right)$, $2\left(k=1,\ x=\frac{2}{15}\right)$, $5\left(k=2,\ x=\frac{1}{3}\right)$, $-10\left(k=-3,\ x=-\frac{2}{3}\right)$.

Подставим эти значения x в первое уравнение. Подойдут все, кроме $x = \frac{2}{15}$.

255. При $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi \leqslant \alpha < \pi$ решение одно; при остальных α три решения. Указание. Пусть $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Обозначим $y = \operatorname{tg}(x+2\alpha)$, $a = \operatorname{tg}\alpha$.

Уравнение примет вид

$$\frac{y-a}{1+ay}\, y\, \frac{y+a}{1-ay} = 1 \text{ или } (y-1)(y^2+(1+a^2)y+1) = 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения равен $D = a^4 + 2a^2 - 3 = (a^2-1)(a^2+3)$. $D > 0$, если $a > 1$ или $a < -1$. Случаи $a = \pm 1$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ рассматриваются отдельно.

256. $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$. Указание. Преобразуем уравнение

$$4(\cos(x+\alpha) + \cos(x-\alpha))\cos(x-\alpha) + 1 = 0,$$
$$(2\cos(x-\alpha) + \cos(x+\alpha))^2 + 1 - \cos^2(x+\alpha) = 0.$$

Таким образом, $\cos^2(x+\alpha) = 1$; $x+\alpha = 2\pi k$ или $x+\alpha = \pi(2k+1)$.

В первом случае $\cos(x-\alpha) = -\frac{1}{2}$, $x-\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $\alpha = \pm\frac{\pi}{3} + \pi(k-n)$, $x = \mp\frac{\pi}{3} + \pi(k+n)$.

Во втором $\cos(x-\alpha) = \frac{1}{2}$, $x-\alpha = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\alpha = \left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}\right) + \pi(k-n)$, $x = \left(\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{6}\right) + \pi(k+n)$.

257. Рассмотрим два уравнения:

$$x^2 \cos\alpha \cos\beta + x(\sin\alpha + \sin\beta) + 1 = 0 \qquad (1)$$

и

$$x^2 \cos\beta \cos\gamma + x(\sin\beta + \sin\gamma) + 1 = 0, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha \neq \cos\gamma, \ \cos\beta \neq 0.$$

Найдем, при каком необходимом и достаточном условии эти два уравнения имеют общий корень. Вычтем почленно одно из другого и сократим на x ($x \neq 0$). Получим линейное уравнение

$$x \cos\beta (\cos\alpha - \cos\gamma) + (\sin\alpha - \sin\gamma) = 0 \text{ или}$$

$$x \cos\beta \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = 0. \qquad (1')$$

Умножим теперь почленно уравнение (1) на $\cos\gamma$, уравнение (2) на $\cos\alpha$ и вычтем почленно одно из другого. Получим после преобразований уравнение

$$x\left(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} + \sin\beta \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) + \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = 0. \qquad (2')$$

Можно доказать, что если уравнения (1) и (2) имеют общий корень, то и уравнения (1′) и (2′) также. И наоборот, если уравнения (1′) и (2′) имеют общий корень, то и уравнения (1) и (2) имеют общий (тот же) корень.

Для того чтобы уравнения (1′) и (2′) имели общий корень, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\cos\beta \sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} + \sin\beta \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = 0,$$

или

$$\cos\beta - \cos\beta\cos(\alpha+\gamma) + \cos\alpha + \cos\gamma + \sin\beta\sin(\alpha+\gamma) = 0,$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma) = 0.$$

Из симметрии этого равенства относительно α, β и γ следует, что любые из трех рассматриваемых в условии квадратных уравнений имеют общий корень.

Осталось доказать, что этот корень один и тот же для всех трех. Для этого нам достаточно доказать, что если между α, β, γ имеет место найденное соотношение, то общий корень первого и второго уравнений совпадает с общим корнем первого и третьего.

Из соотношения (1′) следует, что общий корень первого и второго равен $\dfrac{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\cos\beta\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$.

Общий корень первого и третьего равен $\dfrac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\alpha\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}$.

Надо доказать, что $\dfrac{\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}{\cos\beta\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\alpha\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}}$.

Освободившись от знаменателя и преобразовав произведения в суммы или разности, получим:

$$\sin\frac{3\alpha+\beta+2\gamma}{2}+\sin\frac{-3\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{-\alpha+\beta+2\gamma}{2}=$$
$$=\sin\frac{\alpha+3\beta+2\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha-3\beta}{2}+\sin\frac{\alpha-\beta+2\gamma}{2}.$$

Перенесем все в одну часть и вновь преобразуем разности в произведения:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\beta-\alpha)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\gamma=0,$$

откуда $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}(\cos(\alpha+\beta+\gamma)-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma)=0$.

258. 1. **259.** $\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{6}$. **260.** $\frac{\sqrt{17}-3}{4}$.

261. $-\sqrt{2}$. Указание. Перепишем уравнение в виде

$$\operatorname{arctg}(x-1)-\operatorname{arctg}(x+1)=2\operatorname{arctg}(x+1).$$

Найдем тангенс левой и правой частей. Получим:

$$\frac{(x-1)-(x+1)}{1+(x-1)(x+1)}=\frac{2(x+1)}{1-(x+1)^2},\quad \text{откуда } x^2=2.$$

$x=\sqrt{2}$ не подходит, так как $3\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)>\frac{\pi}{2}$ (даже $>\pi$).

262. $-\sin\left(\frac{\sqrt{\pi^2+16}-\pi}{4}\right)$. Указание. Воспользуйтесь тождеством $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

263. $\pm\frac{1}{4}(\sqrt{9+4\pi}-1)$. **264.** 0; 1. **265.** $10\pi+20\pi k$. **266.** $\pm(\sqrt{3}+1)$. **267.** -1; 0; 1. **268.** -1.

269. Уравнение не имеет решений. Указание. Если $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, то $2\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{3}$, $\arccos 2x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Если $-\frac{\sqrt{3}}{4}\leqslant x<0$, то $2\arcsin x<0$, $\arccos 2x\leqslant\frac{2}{3}\pi$.

Если $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{4}$, то $2\arcsin x<-\frac{\pi}{6}$, $\arccos 2x\leqslant\pi$.

(Неравенство $2\arcsin x<-\frac{\pi}{6}$, если $x<-\frac{\sqrt{3}}{4}$, следует из того, что $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})<\frac{\sqrt{3}}{4}$.)

270. 0; 1. **271.** $\left((-1)^k \frac{\pi}{4}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$. **272.** $\left((-1)^k \frac{\pi}{6}+\right.$ $\left.+\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$; $\left((-1)^{k+1} \frac{\pi}{6}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$.

273. $\left(\pm\frac{5}{6}\pi+2\pi k,\ \frac{1}{4}\right)$.

274. $\left(\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{34}\pm\sqrt{5})+\pi k,\ \pm\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{34}\pm\sqrt{5}}+2\pi n\right)$. Указание. Докажите, что $\sqrt[3]{34}-\sqrt{5}>1$.

275. $\left((-1)^{k+1} \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k,\ -\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{5}n\right)$.

276. $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k+n),\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$.

277. $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi(k+n),\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$.

278. $(k\pi;\ n\pi)$; $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ -\frac{\pi}{4}+n\pi\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$.

279. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi(k+n),\ \frac{\pi}{4}+\pi(k-n)\right)$.

280. $(0;\ 0)$; $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right)$. Указание. Если $x=0$, то $y=0$. Пусть $xy\neq 0$. Поменяем во втором уравнении левую и правую части и перемножим почленно уравнения. Получим $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin^2\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\left(y+\frac{\pi}{6}\right)\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, или $\cos\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\left(y+\frac{\pi}{6}\right)\right)\cos\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\left(y+\frac{\pi}{6}\right)\right)=0$. Значит, или $\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k$, или $\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=$ $=\frac{\pi}{2}+\pi k$. Но в обоих случаях будет $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\left(y+\right.$ $\left.+\frac{\pi}{6}\right)$, значит, $x=y$. (Следует из системы.)

281. $\left(-\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$.

282. $\left(\frac{\pi}{8}+\pi k,\ \pi+2\pi n\right)$; $\left(\frac{\pi}{8}+\pi k,\ \pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\right)$.

283. $\left(\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k,\ \mp\arccos\frac{1}{8}+2\pi n\right)$. Указание. Из системы получаем $4\cos y=5-6\cos x$, $4\sin y=-6\sin x$. Почленно возводим эти уравнения в квадрат и складываем.

284. $(\pi k,\ \pi n)$. **285.** $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ \pi n\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$.

286. $\left(\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ (-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$.

287. $\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{5}{4}\pi\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$. Выбор знаков любой. Указание. Сделайте замену $u=\sin x+\cos x$, $v=\sin y+\cos y$.

288. $(\pi k, \pi n)$; $\left(\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n\right)$. Указание. Применим к левым частям формулу синуса суммы, а затем перейдем к новым неизвестным $u=\operatorname{tg} x$, $v=\operatorname{tg} y$. Предварительно надо убедиться, что $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$.

289. $\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$; $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$. Указание. Сделайте замену $u=\sin x$, $v=\sin y$.

290. $\left(\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \mp\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$; $\left(\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \mp\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$.

Указание. Почленно возведем оба уравнения в квадрат и сложим.

291. $\left((-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+(-1)^k\operatorname{arctg}4+\pi n\right)$. Указание. Вычтем почленно одно уравнение из другого. Получим после преобразования $\frac{\sin 2x}{\cos 2y+\cos 2x}=2\cos x$. Пусть $\cos x\neq 0$.

Выразим $\cos 2y=\sin x-\cos 2x$.

Перемножим почленно уравнения: $\frac{\cos 2x-\cos 2y}{\cos 2x+\cos 2y}=16\sin^2 x-4\cos^2 x$. Заменив $\cos 2y$, после преобразований получим уравнение

$$20\sin^3 x+4\sin^2 x-3\sin x-2=0,$$

или

$$(2\sin x-1)(10\sin^2 x+7\sin x+2)=0.$$

292. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}(k+2n)\right)$.

Указание. Пусть $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$. Из первого уравнения следует $\sin x\cos y=3\cos x\sin y$ или $\operatorname{tg} y=\frac{1}{3}\operatorname{tg} x$.

Затем преобразуем второе уравнение, применив формулу косинуса суммы, разделим его почленно на $\cos y$ и заменим $\operatorname{tg} y$.

293. $\left(-\arcsin\frac{11}{24}+2\pi k,\ \arcsin\frac{43}{48}+2\pi n\right)$; $\left(\pi+\arcsin\frac{11}{24}+2\pi k,\ \pi-\arcsin\frac{43}{48}+2\pi n\right)$. Указание. Разделив почленно одно уравнение на другое, найдем $\cos x=2\cos y$.

Раскроем во втором $\sin(x+y)$ и заменим $\cos x$ на $2\cos y$, затем найдем $\sin x=\frac{4}{3}-2\sin y$ и т. д.

294. $(\pi k;\ \pi n)$; $\left(\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi k,\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n\right)$; $\left(\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$. Указание. Из системы следует уравнение

$$\sin(3x+2y)\sin y=\sin(2x+3y)\sin x,$$

откуда после обычных преобразований получим равенство

$$\sin(2x+2y)\sin(x-y)=0.$$

Если $2x+2y=\pi k$, то $\sin x=0$, $\sin y=0$.

Если $y=x+\pi k$, то, заменив в первом уравнении y, получим $4\sin 5x+\sin x=0$ или $\sin x(8\cos 4x+8\cos 2x+5)=0$.

295. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; $\left(\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a+1}{2a}+\pi k,\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a+1}{2a}+\pi n\right)$. Указание. См. решение 294.

296. $\left(\pm\frac{\pi}{4}+\pi k+2\pi n,\ \pi k\right)$, $\left(\pm\left(\frac{3\pi}{4}+\operatorname{arctg}2\right)+2\pi n+\pi k,\ \mp\operatorname{arctg}2+\pi k\right)$.

297. $(\pi k,\ 2\pi n)$; $\left(-\arccos\frac{1}{7}+2\pi k,\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$; $\left(\arccos\frac{1}{7}+2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$. Указание. Перемножим почленно данные уравнения. После преобразований получим уравнение с одним y, из которого найдем: 1) $\cos y=1$; 2) $\cos y=-\frac{1}{2}$.

Второй случай в свою очередь разбивается на два: а) $y=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; б) $y=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$.

Рассмотрим случай а). Подставим $y=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ в оба уравнения. Получим (после преобразований):

$$\begin{cases}\sqrt{3}\cos x-5\sin x=3\sqrt{3},\\ 3\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{3}.\end{cases}$$

Из этой системы найдем $\cos x=\frac{1}{7}$, $\sin x=-\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Аналогично рассматривается случай б).

Замечание. Проверьте, что при подстановке найденного y лишь в одно из уравнений будут лишние корни.

298. $\left(\pm\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\pi k,\ \mp\frac{3}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi n\right)$.

Указание. Перемножьте почленно данные уравнения.

299. $\left(\arccos\frac{4}{5},\ \pi-\arccos\frac{5}{13}\right)$; $\left(\pi-\arccos\frac{4}{5},\ \pi\right)$.

Указание. Выразим $\cos x$ и $\sin x$ через y:

$$\cos x=\frac{2}{5}(2\cos y+3\sin y),\ \sin x=\frac{1}{5}(2\sin y-3\cos y).$$

Далее почленно возводим эти равенства в квадрат и складываем.

300. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k,\ (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$; $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$.

Указание. Первое уравнение можно преобразовать к виду

$$2\left(\sin y-\frac{1}{2}\right)\left(\sin y+\frac{1}{2}\right)=\left(\sin y-\frac{1}{2}\right)(1+\sin 2x).$$

301. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$;

$\left((-1)^k\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\pi}{2}k,\ \pm\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}+2\pi n\right)$;

$\left((-1)^{k+1}\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\pi}{2}k,\ \pm\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}+\pi+2\pi n\right)$.

Указание. Из первого уравнения следует, что или $\cos y=\frac{1}{2}$, или $\cos y=\sin 2x$.

302. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \pm\arccos\frac{1}{5}+\pi n\right)$;

$\left(\pm\frac{\pi}{12}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$;

$\left(\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}+\pi k,\ -\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$.

Указание. Из первого уравнения следует, что или $\operatorname{tg} x=1$, или $\sin y=\cos 2x$.

303. $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$. Указание. Второе уравнение преобразуется к виду

$$(\sin x+\sin y)^2+2(\sin y-1)^2=0.$$

304. $\left(\frac{\pi}{2}+\pi(2k+1),\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{4}-(2k+1)\pi-\pi n\right)$.

Возможны любые перестановки указанных троек. Указание. Преобразуем первое уравнение:

$$-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 2y)-\cos^2(x+y)=0,$$

$$\cos(x+y)\cos x\cos y=0,\ \text{или}\ \cos x\cos y\cos z=0.$$

305. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi m\right)$;

$\left(\frac{5}{6}\pi+2\pi k,\ \frac{5}{6}\pi+2\pi n,\ \frac{5}{6}\pi+2\pi m\right)$;

$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi m\right)$;

$\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ -\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{7}{6}\pi+2\pi m\right)$.

Возможны также любые циклические перестановки третьей и четвертой троек. (Это означает, что если (a, b, c) — решение системы, то (b, c, a); (c, a, b) также решения.) Указание. Из первых двух уравнений найдем $\sin y=\cos x \operatorname{tg} z$, $\cos y=\frac{3}{2}\operatorname{tg} z$. Почленно возводя эти уравнения в квадрат и складывая, получаем уравнение, не содержащее y, Заменяя в этом уравнении $\left(\operatorname{tg}^2 z=\frac{1-\cos^2 z}{\cos^2 z}\right)$ $\cos z$ на $\frac{3}{2}\operatorname{tg} x$, получим уравнение относительно x.

306. $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{\pi}{6}\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}+2\pi n,\ \frac{\pi}{3}+2\pi m\right)$;

$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ -\frac{\pi}{6}\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{3}+2\pi m\right)$;

$\left(\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}+2\pi n,\ \frac{2}{3}\pi+2\pi m\right)$;

$\left(-\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\ -\frac{5}{6}\pi\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}+2\pi n,\ -\frac{2}{3}\pi+2\pi m\right)$. Указание. Вычтем почленно второе уравнение из первого. Получим (после преобразований) $\sin\frac{x-z}{2}\left(2\sin\frac{x+z-2y}{2}+\sin\frac{x+z+2y}{2}\right)=0.$

Возникают два случая: 1) $\sin\frac{x-z}{2}=0$, $x-z=2\pi k$. На основании третьего уравнения найдем $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $z=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m$ (знаки одинаковые). Затем подставляем в первое (или во второе).

2) $2\sin\left(\frac{x+z}{2}-y\right)+\sin\left(\frac{x+z}{2}+y\right)=0$, откуда

$$2\sin\frac{x+z}{2}\cos y-2\cos\frac{x+z}{2}\sin y+\sin\frac{x+z}{2}\cos y+$$
$$+\cos\frac{x+z}{2}\sin y=0,\quad 3\sin\frac{x+z}{2}\cos y=$$
$$=\cos\frac{x+z}{2}\sin y,\quad \operatorname{tg} y=3\operatorname{tg}\frac{x+z}{2}.$$

Преобразуем теперь первое уравнение:

$$12\cos x\cos y+4\sin x\sin y=3.$$

Почленно поделим это уравнение на $\cos y$ и возведем в квадрат, а затем сделаем замену: $\operatorname{tg} y=3 \operatorname{tg}\frac{x+z}{2}$;

получим $16\left(\cos x+\operatorname{tg}\frac{x+z}{2}\sin x\right)^2=1+9\operatorname{tg}^2\frac{x+z}{2}$,

или $16\left(\cos\frac{x+z}{2}\cos x+\sin\frac{x+z}{2}\sin x\right)^2=\cos^2\frac{x+z}{2}+9\sin^2\frac{x+z}{2}$,

$16\cos^2\frac{x-z}{2}=\cos^2\frac{x+z}{2}+9\sin^2\frac{x+z}{2}$,

$16+16\cos(x-z)=1+\cos(x+z)+9-9\cos(x+z)$,

$8\cos(x-z)+4\cos(x+z)=-3$.

Учитывая третье уравнение, получим $\cos(x-z)=\cos(x+z)=$ $=-\frac{1}{4}$.

Вновь возможны два случая. Рассмотрим один: $x=2\pi k$, $z=\pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi n$.

Заменив x и z в первом и втором уравнениях, получим для y два уравнения, не имеющие общих решений.

Аналогично рассматривается другой случай.

307. $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi m,\ \mp\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$,

где $k+m+n$ — четное число. У к а з а н и е. В каждом уравнении перенесем константы в левую часть и попарно перемножим (почленно). Например, рассмотрим первое и второе. Получим:

$$\operatorname{tg} x\operatorname{tg}^2 y\operatorname{tg} z-3\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z+5\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y-15=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} z\frac{1}{\cos^2 y}.$$

Но $\frac{1}{\cos^2 y}=1+\operatorname{tg}^2 y$.

Обозначим $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=a$, $\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z=b$, $\operatorname{tg} z\operatorname{tg} x=c$.

Получим из первых двух уравнений $5a-3b-c=15$.

Аналогично, рассматривая другие пары, найдем:

$$3a-b-3c=9,\quad -a+3b+5c=-15.$$

Из системы для a, b и c найдем $a=1$, $b=-3$, $c=-1$. Затем найдем $\operatorname{tg} x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg} y=\pm\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} z=\mp\sqrt{3}$ и т. д.

308. $\left(\alpha\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \alpha\mp\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$.

309. $((-1)^k\alpha+\pi k,\ \pi n)$; $(\pi k,\ (-1)^n\alpha+\pi n)$.

310. $(\alpha+2\pi k,\ \pi n)$; $(\pi k,\ \alpha+2\pi n)$;

$\left(\pm\frac{2\pi}{3}-\alpha+2\pi k,\ \mp\frac{2\pi}{3}-\alpha+2\pi n\right)$.

У к а з а н и е. Будем преобразовывать второе уравнение, учитывая первое уравнение, имеем

$$\sin x\cos x+\sin y\cos y=(\sin x+\sin y)\cos\alpha,$$
$$\sin x(\cos x-\cos\alpha)+\sin y(\cos y-\cos\alpha)=0,$$
$$(\sin\alpha-\sin y)(\cos x-\cos\alpha)+(\sin\alpha-\sin x)(\cos y-\cos\alpha)=0,$$
$$(\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x)+(\sin y\cos\alpha+\cos y\sin\alpha)-$$
$$-(\sin y\cos x+\cos y\sin x)-2\sin\alpha\cos\alpha=0,$$
$$\sin(\alpha+x)+\sin(\alpha+y)-\sin(x+y)-\sin 2\alpha=0,$$
$$\sin\left(\alpha+\frac{x+y}{2}\right)\cos\frac{x-y}{2}-\sin\left(\alpha+\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{x+y}{2}\right)=0,$$
$$\sin\left(\alpha+\frac{x+y}{2}\right)\sin\frac{x-\alpha}{2}\sin\frac{y-\alpha}{2}=0 \quad \text{и т. д.}$$

В следующих далее ответах на неравенства указывается номер соответствующего уравнения, затем в скобках — знак неравенства, заменивший знак равенства. В самом ответе для краткости указывается период решения и решение на одном периоде. Включается или нет конец интервала в решение, указывается направлением квадратной скобки. Изолированные точки решения обозначаются фигурными скобками.

Например, запись ответа в виде $T=\pi$, $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$, $\left[\frac{\pi}{3}\ \frac{\pi}{2}\right[$ означает, что решение состоит из изолированных значений $x=\frac{\pi}{6}+\pi k$ и системы интервалов $\frac{\pi}{3}+\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k$.

51. ($>$) $T=\frac{\pi}{2}$; $\left]-\frac{\pi}{24};\ \frac{\pi}{24}\right[$. **52.** ($\leqslant$) $T=2\pi$; $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6}\right]$; $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi\right]$. **53.** ($\geqslant$) $T=\pi$; $\left[\frac{\pi}{12},\ \frac{5\pi}{12}\right]$; $\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$. **54.** ($<$) $T=2\pi$; $\left]0,\ \frac{\pi}{4}\right[$; $\left]\frac{3\pi}{4},\ \pi\right[$; $\left]\frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right[$. **55.** ($>$) $T=\pi$; $\left]0,\ \frac{\pi}{7}\right[$; $\left]\frac{\pi}{5},\ \frac{2}{7}\pi\right[$; $\left]\frac{2}{5}\pi,\ \frac{3}{7}\pi\right[$; $\left]\frac{4}{7}\pi,\ \frac{3}{5}\pi\right[$; $\left]\frac{5}{7}\pi,\ \frac{4}{5}\pi\right[$; $\left]\frac{6}{7}\pi,\ \pi\right[$.

56. ($\leqslant$) $T=\frac{\pi}{2}$; $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$; $\left\{\frac{3\pi}{8}\right\}$.

57. ($\geqslant$) $T=\pi$; $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$. **58.** ($<$) $T=2\pi$; $\left]-\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi\right[$.

59. ($>$) $T=2\pi$; $\left]\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right[$. **60.** ($\leqslant$) $T=2\pi$; $\left[-\frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$.

61. ($\geqslant$) $x=2\pi k$. **62.** ($<$) $T=2\pi$; $\left]\frac{5}{6}\pi,\ \pi\right[$; $\left]\pi,\ \frac{13}{6}\pi\right[$.

63. ($>$) $x\neq\pi k$, $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi k$. **64.** ($\leqslant$) x — любое. **65.** ($\geqslant$) $T=2\pi$; $\left[-\arccos\frac{3}{4},\ \arccos\frac{3}{4}\right]$; $\{\pi\}$. **66.** ($<$) $T=\pi$; $\left]\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right[$.

67. $(>)$ $T=\pi$; $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

68. $(\leqslant)$ $T=\pi$; $\left[-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}, \frac{\pi}{4}\right]$.

69. $(\geqslant)$ $T=2\pi$; $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

70. $(<)$ $T=2\pi$; $\left]-\frac{2}{5}\pi, 0\right[$; $\left]\frac{2}{5}\pi; \frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\frac{4}{5}\pi, \pi\right[$; $\left]\frac{6}{5}\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$.

71. $(>)$ $T=2\pi$; $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$; $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3}{2}\pi\right[$.

72. $(\leqslant)$ $T=\pi$; $\left[\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\right]$; $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; $\left[\frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}\right]$.

73. $(\geqslant)$ $T=\pi$; $\left[-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}\right]$; $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{10}\right]$; $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; $\left[\frac{7\pi}{10}, \frac{3}{4}\pi\right]$.

74. $(<)$ $T=2\pi$; $\left]\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{4}\right[$; $\left]\frac{5\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}\right[$; $\left]\frac{13\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}\right[$;
$\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{21}{16}\pi\right[$; $\left]\frac{25}{16}\pi, \frac{29}{16}\pi\right[$.

75. $(>)$ $T=2\pi$; $\left]-\frac{31}{240}\pi, \frac{29}{240}\pi\right[$; $\left]\frac{11}{60}\pi, \frac{89}{240}\pi\right[$;
$\left]\frac{149}{240}\pi, \frac{209}{240}\pi\right[$; $\left]\frac{269}{240}\pi, \frac{71}{60}\pi\right[$; $\left]\frac{329}{240}\pi, \frac{389}{240}\pi\right[$.

76. $(\leqslant)$ $T=\frac{\pi}{2}$; $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. 77. $(\geqslant)$ x — любое.

78. $(<)$ $T=2\pi$; $\left]-\frac{\pi}{6}, 0\right[$; $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$.

79. $(>)$ $T=\pi$; $\left]0, \frac{\pi}{12}\right[$; $\left]\frac{5}{12}\pi, \frac{\pi}{2}\right[$.

80. $(\leqslant)$ $T=360°$; $[4°, 38°]$; $[49°, 94°]$; $[139°, 158°]$; $[184°, 229°]$; $[274°, 319°]$ 81. $(\geqslant)$ $\frac{\pi}{14}+\frac{2}{7}\pi k\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{14}+\frac{2}{7}\pi k$; $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi k$. *Замечание.* Часть указанных изолированных точек принадлежит также и интервалам. 82. $(<)$ $T=\pi$; $\left]-\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{36}\right[$; $\left]\frac{5\pi}{36}, \frac{3\pi}{20}\right[$; $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{20}\right[$; $\left]\frac{13}{36}\pi, \frac{17}{36}\pi\right[$; $\left]\frac{11}{20}\pi, \frac{7}{12}\pi\right[$; $\left]\frac{25}{36}\pi, \frac{3}{4}\pi\right[$; $\left]\frac{29}{36}\pi, \frac{11}{12}\pi\right[$.

83. $(>)$ $x\neq\pi k$. 84. $(\leqslant)$ $T=2\pi$; $\left[\pi-\arcsin\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-\sqrt{6}), 2\pi+\right.$ $\left.+\arcsin\frac{1}{2}(2\sqrt{2}-\sqrt{6})\right]$. 85. $(\geqslant)$ $T=2\pi$; $\left[-\frac{2}{9}\pi, \frac{2}{9}\pi\right]$; $\left[\frac{4}{9}\pi, \frac{\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{8}{9}\pi, \frac{10}{9}\pi\right]$; $\left[\frac{3}{2}\pi, \frac{14}{9}\pi\right]$. 86. $(<)$ $T=2\pi$; $\left]-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right[$. 87. $(>)$ $T=2\pi$; $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi\right[$.

88. $(\leqslant)$ $T=\pi$; $\left[-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{41}-3}{4},\ 0\right[$; $\left]0,\ \frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{41}-3}{4}\right]$.

89. $(\geqslant)$ $T=2\pi$; $\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right]$; $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right[$; $\left]\frac{3\pi}{4},\ \frac{5}{6}\pi\right]$; $\left[\frac{7}{6}\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right[$; $\left]\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\right]$. **90** $(<)$ $T=2\pi$; $\left]\frac{\pi}{7},\ \frac{\pi}{5}\right[$; $\left]\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{7}\right[$; $\left]\frac{3}{5}\pi,\ \frac{3}{4}\pi\right[$; $\left]\frac{5}{7}\pi,\ \pi\right[$; $\left]\pi,\ \frac{5}{4}\pi\right[$; $\left]\frac{9}{7}\pi,\ \frac{7}{5}\pi\right[$; $\left]\frac{11}{7}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\right[$; $\left]\frac{9}{5}\pi,\ \frac{13}{7}\pi\right[$. **91.** $(>)$ $T=\pi$; $\left]0,\ \frac{\pi}{3}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi\right[$. **92.** $(\leqslant)$ $T=\pi$; $\left[-\frac{2}{3}\pi,\ \frac{\pi}{4}\right]$. **93.** $(\geqslant)$ $x=2\pi k$. **94.** $(<)$ $T=2\pi$; $\left]\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi\right[$; $]\pi,\ 2\pi[$. **95.** $(>)$ $x\neq\frac{\pi}{4}k$. **96.** $(\leqslant)$ $T=\pi$; $\left]-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4}\right]$; $\left]\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right[$.

97. $(\geqslant)$ $T=\pi$; $\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right]$. **98.** $(<)$ $T=2\pi$; $\left]-\frac{\pi}{6},\ 0\right[$; $\left]\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi\right[$; $\left]\pi,\ \frac{7}{6}\pi\right[$. **99.** $(>)$ $T=2\pi$; $\left]-\frac{\pi}{2},\ \arcsin\frac{1}{8}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2},\ \pi-\arcsin\frac{1}{8}\right[$.

100. $(\leqslant)$ $T=6\pi$; $\left[-\frac{3}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right]$. **101.** $(\geqslant)$ $T=2\pi$; $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$; $\left[\frac{5\pi}{12},\ \frac{\pi}{2}\right]$; $\left[\frac{11}{12}\pi,\ \frac{13}{12}\pi\right]$; $\left[\frac{3}{2}\pi,\ \frac{19}{12}\pi\right]$. **102.** $(<)$ $T=\pi$; $\left]\frac{\pi}{8},\ \frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right[$; $\left]\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{5}\right[$; $\left]\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right[$; $\left]\frac{3}{8}\pi,\ \frac{2}{5}\pi\right[$; $\left]\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{5}\right[$; $\left]\frac{5\pi}{8},\ \pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right[$; $\left]\frac{3}{4}\pi,\ \frac{4}{5}\pi\right[$; $\left]\frac{5}{6}\pi,\ \pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right[$; $\left]\frac{7\pi}{8},\ \pi\right[$.

103. $(>)$ $T=\pi$; $\left]\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{3}-1),\ \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{3}-1)\right[$.

104. $(\leqslant)$ $T=\pi$; $\left[-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4},\ 0\right[$; $\left[\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4},\ \frac{\pi}{4}\right[$; $\left]\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3}\right[$. **105.** $(\geqslant)$ $T=2\pi$; $\left[\frac{\pi}{20},\ \frac{\pi}{10}\right[$; $\left[\frac{3\pi}{20},\ \frac{\pi}{4}\right]$; $\left]\frac{3\pi}{10},\ \frac{7\pi}{20}\right]$; $\left[\frac{9\pi}{20},\ \frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2},\ \frac{11\pi}{20}\right]$; $\left[\frac{13\pi}{20},\ \frac{7\pi}{10}\right[$; $\left[\frac{3\pi}{4},\ \frac{17\pi}{20}\right]$; $\left]\frac{9}{10}\pi,\ \frac{19}{20}\pi\right]$; $\left[\pi,\ \frac{21}{20}\pi\right]$; $\left]\frac{11\pi}{10},\ \frac{23}{20}\pi\right]$; $\left[\frac{5}{4}\pi,\ \frac{13}{10}\pi\right[$; $\left[\frac{27}{20}\pi,\ \frac{29}{20}\pi\right]$; $\left[\frac{31}{20}\pi,\ \frac{33}{20}\pi\right]$; $\left]\frac{17}{10}\pi,\ \frac{7}{4}\pi\right]$; $\left[\frac{37}{20}\pi,\ \frac{19}{10}\pi\right[$; $\left[\frac{39}{20}\pi,\ 2\pi\right]$. **106.** $(<)$ $T=2\pi$; $\left]-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right[$.

107. $(>)$ $T=2\pi$; $\left]-\frac{\pi}{3},\ 0\right[$; $\left]0,\ \frac{\pi}{3}\right[$. **108.** $(\leqslant)$ Если $0\leqslant x\leqslant 2\pi$,

то решением неравенства будет $0 \leqslant x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{6}\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$. Если $2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi(k+1)$, $k \neq 0$, то $2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2\pi k$. $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi(k+1)$. **109.** $(\geqslant)$ $T = \pi$; $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$; $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$. **110.** $(<)$ $T = 2\pi$; $\left]\frac{5\pi}{4} - \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{5\pi}{4} + \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right[$. **111.** $(>)$ $T = \pi$; $\left]\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}\right[$; $\left]\frac{5\pi}{8} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{4}, \frac{17}{24}\pi\right[$. **112.** $(\leqslant)$ $T = \pi$; $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$; $\left]\frac{2}{3}\pi, \pi\right[$. **113.** $(\geqslant)$ $T = \frac{2}{3}\pi$; $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. **114.** $(<)$ $T = 2\pi$; $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{7}{6}\pi\right[$; $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{11}{6}\pi\right[$. **115.** $(>)$ $T = \pi$; $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$; $\left]\frac{5}{6}\pi, \pi\right[$. **116.** $(\leqslant)$ $T = \pi$; $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. **117.** $(\geqslant)$ $T = 2\pi$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right]$; $\left]\pi, \frac{4}{3}\pi\right]$; $\left]\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right[$. **118.** $(<)$ $T = 2\pi$; $\left]-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right[$. **119.** $(>)$ $T = 2\pi$; $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$. **120.** $(\leqslant)$ $T = \pi$; $\left]-\frac{\pi}{2}, -\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7+\sqrt{52}}{3}}\right]$; $\left]-\frac{\pi}{3}, 0\right[$; $\left]\frac{\pi}{3}, \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7+\sqrt{52}}{3}}\right]$.
121. $(\geqslant)$ $T = \pi$; $\left]-\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}\right]$; $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$; $\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\pi\right[$. **122.** $(<)$ $T = \frac{\pi}{2}$; $\left]\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right[$. **123.** $(>)$ $T = \pi$; $\left]\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{6}\right[$; $\left]\frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{18}\right[$; $\left]\frac{13\pi}{18}, \frac{5\pi}{6}\right[$; $\left]\frac{17\pi}{18}, \pi\right[$. **124.** $(\leqslant)$ $T = \pi$; $\left]0, \frac{\pi}{8}\right]$; $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$; $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{8}\right]$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}\right]$; $\left]\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right[$; $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8}\right]$.
125. $(\geqslant)$ $T = 2\pi$; $\left[0, \frac{\pi}{36}\right]$; $\left[\frac{5\pi}{36}, \frac{\pi}{6}\right[$; $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{36}\right]$; $\left[\frac{17\pi}{36}, \frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{25\pi}{36}\right]$; $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{29\pi}{36}\right]$; $\left]\frac{5}{6}\pi, \pi\right]$; $\left[\frac{37}{36}\pi, \frac{41}{36}\pi\right]$; $\left]\frac{7}{6}\pi, \frac{5}{4}\pi\right[$; $\left[\frac{49}{36}\pi, \frac{53}{36}\pi\right]$; $\left[\frac{61}{36}\pi, \frac{7\pi}{4}\right]$; $\left[\frac{65}{36}\pi, \frac{11}{6}\pi\right[$. **126.** $(<)$ $T = \pi$; $\left]0, \frac{\pi}{24}\right[$; $\left]\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{24}\right[$; $\left]\frac{7\pi}{24}, \frac{3\pi}{8}\right[$; $\left]\frac{11\pi}{24}, \frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\frac{13\pi}{24}, \frac{5\pi}{8}\right[$; $\left]\frac{17\pi}{24}, \frac{19\pi}{24}\right[$; $\left]\frac{7\pi}{8}, \frac{23\pi}{24}\right[$.
127. $(>)$ $T = \frac{\pi}{2}$; $\left]\frac{\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}\right[$. **128.** $(\leqslant)$ $T = \pi$; $\left[-\frac{\pi}{14}, \frac{\pi}{14}\right]$; $\left[\frac{3\pi}{14}, \frac{\pi}{4}\right]$; $\left[\frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}\right]$; $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{14}\right]$. **129.** $(\geqslant)$ $T = \pi$;

$\left[\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}(\sqrt{6}-2),\ \pi-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}(\sqrt{6}-2)\right]$. **130.** ($<$) Нет решений. **131.** ($>$) $T=\pi$; $\left]0, \frac{\pi}{24}\right[$; $\left]\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{8}\right[$; $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{40}\right[$; $\left]\frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{24}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{21\pi}{40}\right[$; $\left]\frac{5\pi}{8}, \frac{17\pi}{24}\right[$; $\left]\frac{17\pi}{24}, \frac{29\pi}{40}\right[$; $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{19\pi}{24}\right[$; $\left]\frac{7\pi}{8}, \frac{37\pi}{40}\right[$. **132.** ($\leqslant$) $T=\pi$; $\left[0; \frac{\pi}{6}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\right[$. **133.** ($\geqslant$) $T=\pi$; $\left]\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}\right]$; $\left]\frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\frac{7\pi}{10}, \frac{3\pi}{4}\right]$; $\left]\frac{9\pi}{10}, \pi\right]$. **134.** ($<$) $T=21\pi$. Если $0<x<\frac{\pi}{2}$, неравенство выполняется. Знак меняется в точках $-\frac{\pi}{10}+\frac{21}{5}\pi k$, $\frac{5}{6}\pi+\frac{7}{3}\pi k$, $\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi k$. При этом $x=\frac{25\pi}{2}+21\pi k$ принадлежит всем трем сериям, т. е. знак в этих точках меняется. **135.** ($>$) $T=2\pi$; $\left]-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right[$. **136.** ($<$) $T=2\pi$; $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$.
137. ($\geqslant$) $T=2\pi$; $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$; $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right]$. **138.** ($\leqslant$) $T=2\pi$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right[$; $\left[\pi, \frac{4}{3}\pi\right[$; $\left]\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right[$. **139.** ($>$) $T=2\pi$. Если $0<x<\frac{\pi}{9}$, то левая часть меньше правой (знак $<$). Знак меняется в точках $\frac{\pi}{9}(1+2k)$, $\frac{\pi}{5}k$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. (В точках πk знак меняется.) **140.** ($<$) $T=\pi$; $\left]\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{7}\right[$; $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{7}\right[$; $\left]\frac{3\pi}{8}, \frac{3\pi}{7}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{7}\right[$; $\left]\frac{5\pi}{8}, \frac{5\pi}{7}\right[$; $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{6\pi}{7}\right[$; $\left]\frac{7\pi}{8}, \pi\right[$. **141.** ($\geqslant$) $T=2\pi$; $\left]0, \frac{\pi}{7}\right]$; $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{3}{7}\pi\right]$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right[$; $\left[\frac{5}{7}\pi, \pi\right[$; $\left[\frac{9}{7}\pi, \frac{4}{3}\pi\right[$; $\left]\frac{3}{2}\pi, \frac{11}{7}\pi\right]$; $\left]\frac{5}{3}\pi, \frac{13}{7}\pi\right]$. **142.** ($\leqslant$) $T=2\pi$; $\left[\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{4}\right[$; $\left[\frac{3\pi}{7}, \frac{\pi}{2}\right[$; $\left[\frac{5\pi}{7}, \frac{3\pi}{4}\right[$; $\left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[$; $\left[\frac{9\pi}{7}, \frac{3}{2}\pi\right[$; $\left[\frac{11}{7}\pi, \frac{7\pi}{4}\right[$; $\left[\frac{13}{7}\pi, 2\pi\right[$. **143.** ($>$) $T=2\pi$; $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$; $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. **144.** ($<$) $T=2\pi$; $\left]0, \frac{\pi}{12}\right[$; $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\frac{7\pi}{12}, \pi\right[$; $\left]\frac{13}{12}\pi, \frac{4}{3}\pi\right[$; $\left]\frac{3}{2}\pi, \frac{19\pi}{12}\right[$. **145.** ($\geqslant$) $T=2\pi$; $\left[-\frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}-2}{3}\right]$; $\left[\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}+2}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$; $\left[\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}-2}{3}, 2\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}+2}{3}\right]$. **146.** ($\leqslant$) $T=2\pi$; $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$;

$\left]\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi\right[$; $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right[$; $\left]\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right]$. **147.** $(>)$ $T=\pi$. Если $0<x<\frac{\pi}{8}$, неравенство справедливо. Знак меняется в точках $\frac{\pi k}{8}$, $\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi k\left(\frac{\pi}{6}<\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}<\frac{\pi}{4}\right)$.

148. $(<)$ $T=\pi$; $\left]0, \frac{\pi}{8}\right[$; $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right[$; $\left]\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[$; $\left]\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

149. $(\geqslant)$ $T=\frac{\pi}{8}$; $\left[-\frac{\pi}{16}, 0\right[$. **150.** $(\leqslant)$ $T=2\pi$; $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$; $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}\right]$; $\left]\frac{2}{3}\pi, \frac{11}{12}\pi\right]$; $\left]\pi, \frac{5\pi}{4}\right[$; $\left]\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right[$; $\left[\frac{19}{12}\pi, \frac{5\pi}{3}\right[$; $\left[\frac{23}{12}\pi, 2\pi\right]$.

§ 2. Показательная и логарифмическая функции

1. а) 1; б) 24; в) 8; г) $\lg 2$; д) 10; е) 7; ж) 0; з) 0; и) 0. Указание. Группируем первое слагаемое с последним, второе — с предпоследним и т. д.; к) 1.

2. а), б), в) Минус; г) плюс. **3.** а) $\log_5 3>\frac{2}{3}$; б) $\log_2 5<2\frac{1}{3}$; в) $\log_{\frac{1}{3}} 10>-2\frac{1}{5}$; г) $\sqrt{8}>2^{2\log_2 5+\log_{0,5} 9}$; д) равны; е) $\log_8 5<\log_6 5$; ж) $\log_2 5>\log_5 32$; з) $\log_7 8>\log_8 9$. **4.** $3a+ab$. **5.** $3(1-a-b)$. **6.** $\frac{4(3-a)}{3+a}$. **7.** $\frac{2b+a-2}{1-a}$. **8.** $\frac{5n-3}{6}$. **9.** а) $-6<x\leqslant-5$; $5\leqslant x<7$; б) $-3<x<-2$; $-2<x<-1$; $x>1$; в) $-5<x<-4$; $-4<x<-\frac{2}{3}$; $x>0,5$; г) $x>-4,5$; д) $1<x<2$; $2<x<3$; е) $1<x<2$. **10.** а) Рис. 88; б) $y=\log_2|x|$; в) $y=1-x^2$, $1-x^2>0$; г) $y=x^2$, $x>0$; д) рис. 89; е) рис. 90; ж) $y=\log_2 x$, $\log_2 x>0$; з) рис. 91; и) рис. 92; к) $y=0$, $x>0$, $x\neq1$. **11.** 9. **12.** -2; 4. **13.** -5; 5. **14.** -3; 5. Указание. $33+\sqrt{128}=(\sqrt{32}+1)^2$. **15.** 5. **16.** 0,6. **17.** 0,25. **18.** -4; 3. **19.** 66. **20.** 2. **21.** 1,5.

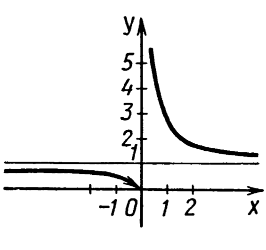


Рис. 88

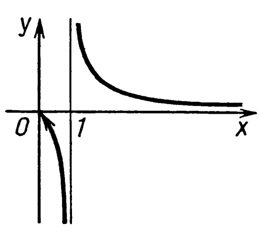


Рис. 89

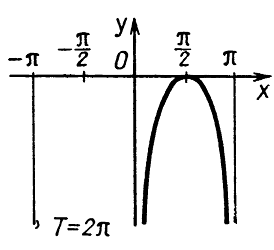


Рис. 90

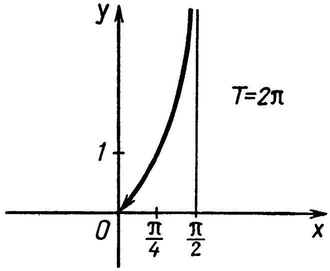


Рис. 91

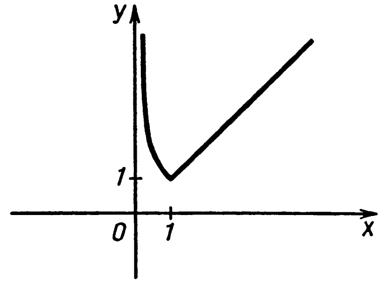


Рис. 92

22. Решения нет. **23.** 3. **24.** 1. **25.** 1,5. **26.** -2; 3. **27.** 0; 2. **28.** -1; 2. **29.** -1; 0. **30.** 0. **31.** 1; 2. **32.** 0. **33.** $-\log_2 3$; 1. **34.** 1; 4. **35.** 2; 9. **36.** -2; 2. **37.** -2; -1; 1; 2. У к а з а н и е. Замена $y=2^x-2^{-x}$ **38.** 1. **39.** 4; 5. **40.** 1. **41.** -2.

42. Решения нет. У к а з а н и е. После замены $y=\frac{1}{5^{-x}+4\cdot 5^x}$ получаем $4y^2-y+\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{\sqrt{23}}{5}-0{,}01=0$. Так как свободный член этого квадратного уравнения отрицательный, то корни имеют разные знаки. Сумма корней $\frac{1}{4}$, значит, положительный корень больше $\frac{1}{4}$, а по замене $0<y<\frac{1}{4}$.

43. πk. **44.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **45.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $\pi+2\pi k$.

46. $\frac{\pi}{2}k$. **47.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$. **48.** $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$; πk. **49.** 1. **50.** 0,1; $10^{\sqrt{2}}$. **51.** 10. **52.** 4. **53.** 10; 100. **54.** 0,001; 10. **55.** 3; 81. **56.** 4. **57.** -17. **58.** -3; -2. **59.** -2. **60.** 5. **61.** 2. **62.** 1,5. **63.** 1. **64.** 9. **65.** $\log_3 10$; $\log_3 28-3$. **66.** 1. **67.** 1. **68.** 100. **69.** 10. **70.** $-2\log_5 2$; 2.

71. $\frac{\log_2 5}{1-\log_2 5}$; 1. **72.** $\frac{3(1+\log_2 3)}{1-5\log_2 3}$; 2. **73.** 3; $4+\log_5 3$. **74.** 0,1; 1; 10. **75.** 0,1; 10. **76.** 0,0001; 10. **77.** 7; 14. **78.** 10^4. **79.** 2. **80.** 10. **81.** 2. **82.** $\frac{1}{6}$; 6. **83.** 3. **84.** 2. **85.** $\frac{1}{4}$; 2. **86.** $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{4}$. **87.** $\frac{1}{16}$; 2. **88.** 1.

89. $\frac{1}{9}$. **90.** $\frac{9\sqrt{5}}{5}$. **91.** $\frac{1}{3}$; 9. **92.** 8. **93.** $\frac{1}{2}$. **94.** $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. **95.** 5. **96.** $\sqrt{2}$; 3. **97.** $-\frac{13}{5}$; -2; 3. **98.** 1; 2. **99.** $\frac{5}{3}$. **100.** $-\frac{5}{3}$. **101.** 17. **102.** $-\frac{37}{4}$. **103.** -1. **104.** $0\leqslant x\leqslant 1$; 4. **105.** $\frac{1}{25}$. **106.** -32; -2. **107.** -64; -1. **108.** $\frac{5}{4}$. У к а з а н и е. $\sqrt{x\pm 2\sqrt{x-1}}=|\sqrt{x-1}\pm 1|$.

109. $-\frac{1}{4}$. Указание. $6x^2+23x+21=(3x+7)(2x+3)$. После замены $y=\log_{3x+7}(2x+3)$ уравнение принимает вид $2y+\frac{1}{y}=3$. **110.** $\frac{1}{2}$; 1. **111.** $\frac{1}{4}$. **112.** $-\frac{2}{3}$. **113.** $\frac{\pi}{12}+2\pi k$. **114.** $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+$ $+\pi k$. **115.** $\frac{\pi}{3}+2\pi k$. Указание. Замена $y=\log_2 \cos x$, тогда $\cos x=2^y$, $\operatorname{ctg}^2 x=3^y$. Так как $\operatorname{ctg}^2 x=\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$, то получаем уравнение $3^y=\frac{4^y}{1-4^y}$ или $\left(\frac{3}{4}\right)^y=3^y+1$, которое решаем графически. **116.** $\frac{\pi}{4}+\pi k$. **117.** $\frac{\pi}{3}+2\pi k$. **118.** $\frac{\pi}{3}+\pi k$. **119.** $\frac{\pi}{4}+2\pi k$. **120.** $\frac{\pi}{4}+$ $+2\pi k$. **121.** $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k$; $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k$.

122. $\arccos(\sqrt{2}-1)+2\pi k$. Указание. Замена $y=\log_{(2\cos x)}\sin x$. **123.** $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$. **124.** $\frac{57}{25}$. **125.** $\frac{18}{25}$. **126.** 1. **127.** 3. Указание. Проверить все целые числа из области определения. **128.** 2. **129.** $(0; -3)$. **130.** $(1; 2)$. **131.** $(3; 0)$. **132.** $(3; -9)$. **133.** $(13; 8)$. **134.** $(1{,}5; 2)$. **135.** $(-2; -2)$; $(2; 2)$. Указание. Первое уравнение имеет вид $f(x)=f(y)$, где функция $f(t)$ монотонно возрастает, значит, принимает каждое свое значение один раз, откуда $x=y$. **136.** $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. **137.** $(1; 2)$. **138.** $(2; 2)$. **139.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

140. $(4; 2)$. **141.** $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$. **142.** $(\sqrt{2}; 15)$; $(2; 3)$. **143.** $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right)$; $(3; 9)$. **144.** $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **145.** $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $(2; 1)$. **146.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Указание. Умножим первое уравнение на $2^{-x+y}\cdot 3^{2y}$, выразим 2^{-x-y} и подставим во второе. Получим однородное уравнение $3^{2y}-4\cdot 3^{x+y}+3\cdot 3^{2x}=0$. **147.** $(c; -2)$; $(1{,}5; 4)$, где $1<c<2$.

148. $(2; 1)$; $(c; c)$, где c — любое действительное положительное число. **149.** $(125; 4)$; $(625; 3)$. **150.** $(4; 16)$. Указание. Прологарифмировать первое уравнение по основанию y. **151.** $(2; 6)$; $(6; 2)$. **152.** $(-1; -3)$; $(3; -3)$. **153.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{27}{8}; \frac{32}{3}\right)$. Указание. В каждом уравнении переходим к одному основанию и потенцируем. Получаем $x\sqrt{yz}=4$, $y\sqrt{xz}=9$, $z\sqrt{xy}=16$, откуда $xyz=24$. **154.** $-\sqrt{3}\leqslant$ $\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$. **155.** $-2\leqslant x<2$. **156.** $-3\leqslant x<-2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}<x\leqslant 3$. **157.** $x<4-2\sqrt{2}$; $x>4+2\sqrt{2}$. **158.** $x>-2$. **159.** $x>\frac{1}{2}$.

160. $x\leqslant\log_3\frac{1}{2}$; $\log_3\frac{3}{5}\leqslant x<\log_3\frac{5}{3}$. **161.** $\log_{\frac{3}{5}}\frac{122}{49}<x<1$.

162. $0 \leqslant x \leqslant 1$. **163.** $x < -6$; $x > 2$. **164.** $x < -3$; $x > -1$. **165.** $x \leqslant -2$; $x \geqslant 1$. **166.** $x \geqslant 1$. **167.** $1 \leqslant x < 2$. **168.** $-2 \leqslant x < -1$; $x \geqslant 1$. Указание. Домножить на $(\sqrt{5}-2)^{x-1}$. **169.** $-3 \leqslant x < 2$; $2 < x \leqslant 7$. **170.** $-\frac{3\sqrt{5}+1}{2} < x < -2$; $1 < x < \frac{3\sqrt{5}+1}{2}$.
171. $-\frac{5}{3} < x < -\frac{5+\sqrt{13}}{6}$; $\frac{\sqrt{13}-5}{6} < x < 0$. **172.** $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$. $2 < x \leqslant \frac{5}{2}$. **173.** $\frac{3}{4} \leqslant x < 1$. **174.** $x > 2$. **175.** $1 \leqslant x \leqslant 4$. **176.** $2 < x < 5$; $5 < x < 15$. **177.** $-\frac{3\sqrt{5}}{5} < x < -1$; $1 < x < \frac{3\sqrt{5}}{5}$. **178.** $1 < x < 10$.
179. $0 < x < \frac{1}{3}$; $x > 243$. **180.** $x > 3$. Указание. $2^x + 3 \cdot 2^{-x} > 1$.
181. $0 < x < 3$. **182.** $x \leqslant 0$; $1\frac{31}{32} \leqslant x < 2$. **183.** $0 \leqslant x \leqslant 1$.
184. $-1 < x \leqslant \frac{1}{3}$; $1 \leqslant x < \frac{7}{3}$. **185.** $-1 < x \leqslant \frac{1}{2}$; $1 \leqslant x < \frac{5}{2}$.
186. $1 < x \leqslant \frac{4}{3}$. **187.** $2 < x < 3$; $x \geqslant 7$. **188.** $x > 1$. **189.** $\frac{1}{4} \leqslant x < \frac{1}{2}$; $1 < x \leqslant 4$. **190.** $x < -2$. **191.** $-\frac{1}{2} < x < 1$; $x > 1$. **192.** $-1 < x < 1$; $3 < x < 5$. **193.** $-\frac{4}{3} < x < 0$. **194.** $\frac{5}{4} < x < \frac{3}{2}$; $x > \frac{3}{2}$. **195.** $x > 2$.
196. $x > 0$. **197.** $4 < x < 3+\sqrt{2}$; $x > 5$. **198.** $x > \sqrt{3}$. **199.** $0 < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **200.** $-2 < x < -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **201.** $0 < x < 0{,}1$; $x > 1$.
202. $-2 < x \leqslant -1$; $1 < x < 2$. **203.** $1 < x < \frac{3}{2}$; $2 < x < \frac{5}{2}$; $x > 3$.
204. $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{2}$. **205.** $x < -2-\sqrt{3+\sqrt{5}}$; $-3 < x < -2-\sqrt{3-\sqrt{5}}$; $-2+\sqrt{3-\sqrt{5}} < x < -1$; $x > -2+\sqrt{3+\sqrt{5}}$. Указание. Замена: $y = x+2$. **206.** $-2+\sqrt{3-\sqrt{5}} < x < -1$; $x > -2+\sqrt{3+\sqrt{5}}$. **207.** $3 < x \leqslant \frac{5+\sqrt{7}}{2}$; $4 < x \leqslant \frac{9}{2}$. **208.** $0 < x \leqslant 1$.
209. $0 < x < 1$; $x > 1$. **210.** $0 < x < 1$; $x > 1$. Указание. Перейти к основанию $\frac{x+2}{x^2+2}$. **211.** $x < -\frac{9+\sqrt{33}}{2}$; $-5 < x < -4$; $4 < x < 5$; $x > \frac{9+\sqrt{33}}{2}$. **212.** $x < -\frac{9+\sqrt{33}}{2}$; $-5 < x < -\sqrt{17}$; $-\sqrt{17} < x < -4$; $4 < x < \sqrt{17}$; $\sqrt{17} < x < 5$; $x > \frac{9+\sqrt{33}}{2}$. **213.** $-\frac{1}{2} < x < 0$. Указание. Рассмотреть графики функций $y_1 = \frac{6x}{2x+1}$, $y_2 = 1 + \log_2 x$ и доказать, что при $-\frac{1}{2} < x < 0$ и $x > 0$ будет $y_1 < y_2$.

214. $\frac{1}{2}<x<1$. **215.** $x<-3$; $-1+\sqrt{3}<x<1$. **216.** $x\leqslant 0$; $1\leqslant x<3$. **217.** $1<x<4$. **218.** $\frac{1}{2}<x<1$; $x\geqslant\frac{3}{2}$.

219. $x\leqslant 3$. **220.** 1. **221.** $x<1$; $1<x<2$. **222.** $-4<x\leqslant 1$. **223.** $x<0$; $\frac{1}{2}\leqslant x<1$; $1<x<2$; $x\geqslant 3$. **224.** $\frac{3}{2}<x<6$.

§ 3. Элементы математического анализа

1. а) Отразить график $y=f(x)$ симметрично относительно оси y. б) Сжать график функции $y=f(x)$ к оси ординат в два раза. в) Для построения графика функции $y=f\left(\frac{x}{2}+1\right)=f\left(\frac{1}{2}(x+2)\right)$ нужно растянуть график функции $y=f(x)$ в два раза от оси ординат и перенести влево на 2 параллельно оси x. г) График функции $y=f(x)$ растянуть в два раза от оси ординат, перенести вправо на 2 параллельно оси x, растянуть в два раза от оси абсцисс и поднять вверх на 1 параллельно оси ординат. д) Искомый график функции симметричен относительно оси y. Следовательно, достаточно построить график функции $y=|f(x)|$, оставив только те его точки, которые лежат в правой полуплоскости. Затем эти точки отразить симметрично оси ординат. Для построения графика функции $y=|f(x)|$ надо точки графика функции $y=f(x)$, лежащие в верхней полуплоскости, дополнить точками, симметричными относительно оси x точкам графика функции $y=f(x)$, лежащим в нижней полуплоскости.

2. Рис. 93. Указание.

$$y=\begin{cases} 3x-2+2-3x=0 \text{ при } x\geqslant\frac{2}{3}, \\ -3x+2+2-3x=-6x+4 \text{ при } x<\frac{2}{3}. \end{cases}$$

3. Рис. 94. Указание.

$$y=\begin{cases} -x+3-2x+1=-3x+4 \text{ при } x\leqslant\frac{1}{2}, \\ -x+3+2x-1=x+2 \text{ при } \frac{1}{2}<x\leqslant 3, \\ x-3+2x-1=3x-4 \text{ при } x>3. \end{cases}$$

4. Рис. 95. Функция $y=||x+2|-|x-2||$ четная. Сначала построить ее график в правой полуплоскости, рассмотрев два интервала: $[0; 2]$ и $]2; \infty[$.

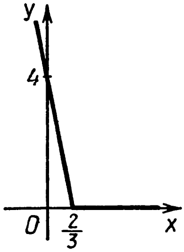


Рис. 93

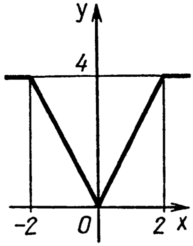


Рис. 94

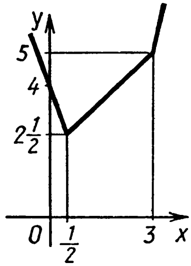


Рис. 95

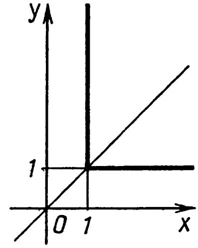


Рис. 96

5. Рис. 96. Пусть $x \leqslant y$, тогда $x=1$. Если $y \leqslant x$, то $y=1$.

6. См. рис. 97.

7. Рис. 98. Данное равенство равносильно совокупности четырех систем:

1) $\begin{cases} x \geqslant y, \\ |x| \geqslant |y|, \\ x=|y|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \geqslant y, \\ |x| \leqslant |y|, \\ x=|x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \leqslant y, \\ |x| \geqslant |y|, \\ y=|y|; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant y, \\ |x| \leqslant |y|, \\ y=|x|. \end{cases}$

8. Рис. 99. Множество точек симметрично относительно обеих осей. Для точек I четверти уравнение переписывается в виде $x+y=1$.

9. Рис. 100. I способ. Для освобождения от знаков модуля рассмотреть четыре случая. II способ. При $y \geqslant 0$ получаем совокупность двух уравнений: $x+y=2y$ и $x+y=-2y$; при $y<0$ получаем $x+y=0$.

10. Рис. 101.

11. Данное равенство равносильно совокупности четырех систем:

1) $\begin{cases} |x| \geqslant y+1, \\ x^2 \geqslant 2x+y, \\ |x|=2x+y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \geqslant y+1, \\ x^2 \leqslant 2x+y, \\ |x|=x^2; \end{cases}$

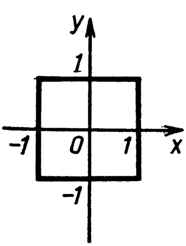


Рис. 97

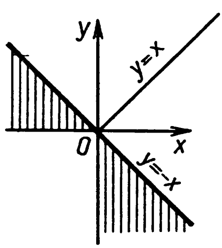


Рис. 98

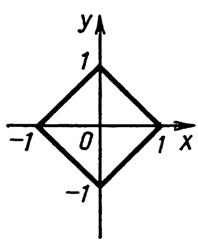


Рис. 99

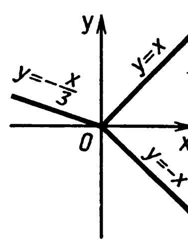


Рис. 100

3) $\begin{cases} |x| \leqslant y+1, \\ x^2 \geqslant 2x+y, \\ y+1=2x+y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x| \leqslant y+1, \\ x^2 \leqslant 2x+y, \\ y+1=x^2. \end{cases}$

Построим точки, удовлетворяющие системе 1. Эта система равносильна совокупности двух систем:

1, *а*) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant y+1, \\ x^2 \geqslant 2x+y, \\ x=2x+y \end{cases}$ и 1, *б*) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ -x \geqslant y+1, \\ x^2 \geqslant 2x+y, \\ -x=2x+y. \end{cases}$

Систему 1, *а* перепишем в виде $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \leqslant x-1, \\ y \leqslant x^2-2x, \\ y=-x. \end{cases}$

Точки, удовлетворяющие этой системе, изображены на рисунке 102, *а* (луч $y=-x$, $x \geqslant 1$).

Систему 1, *б* перепишем в виде $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant -x-1, \\ y \leqslant x^2-2x, \\ y=-3x. \end{cases}$

Точек, удовлетворяющих этой системе, нет (см. рис. 102, *б*).

Построим точки, удовлетворяющие системе 2. Так как уравнение $|x|=x^2$ имеет три корня: -1; 0; 1, то эта система равносильна совокупности трех систем:

2, *а*) $\begin{cases} y \leqslant 0, \\ y \geqslant 3, \\ x=-1; \end{cases}$ 2, *б*) $\begin{cases} y \leqslant -1, \\ y \geqslant 0, \\ x=0; \end{cases}$ 2, *в*) $\begin{cases} y \leqslant 0, \\ y \geqslant -1, \\ x=1. \end{cases}$

Из этих систем только система 2, *в* имеет решения. Они изображены на рисунке 102, *в*.

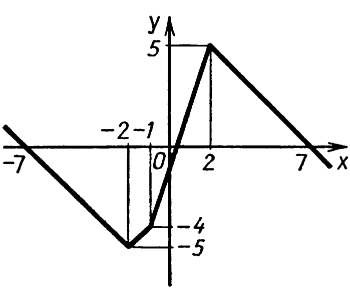


Рис. 101

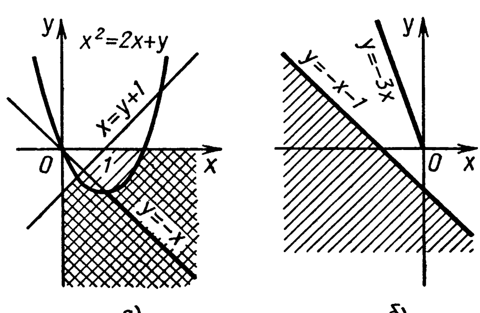


Рис. 102

Построим точки, удовлетворяющие системе 3. Так как из уравнения системы 3 следует, что $x=\frac{1}{2}$, то эта система равносильна системе $\begin{cases} y \geqslant -\frac{1}{2}, \\ y \leqslant -\frac{3}{4}, \\ x=\frac{1}{2}, \end{cases}$

которая является противоречивой.

Построим точки, удовлетворяющие системе 4. Эту систему перепишем так:

$$\begin{cases} y \geqslant |x|-1, \\ y \geqslant x^2-2x, \\ y=x^2-1. \end{cases}$$

Точки, удовлетворяющие этой системе, приведены на рисунке 102, *г* (часть параболы $y=x^2-1$, $x \geqslant 0$).

Окончательная картинка приведена на рисунке 102, *д*.

12. Рис. 103. Так как нужно найти минимальное значение выражения в зависимости от a, то x рассматриваем в качестве параметра. Дифференцируя $ax^2+\frac{1}{a}$ по a и приравнивая производную нулю, получаем $a=\pm\frac{1}{x}$.

Значение выражения $\frac{1}{x}$ лежит в промежутке $[1; 2]$ для x из отрезка $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Следовательно, при этих значениях x нужно взять наименьшее из выражений: $\frac{1}{x}x^2+\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}=2x$, x^2+1 и $2x^2+\frac{1}{2}$.

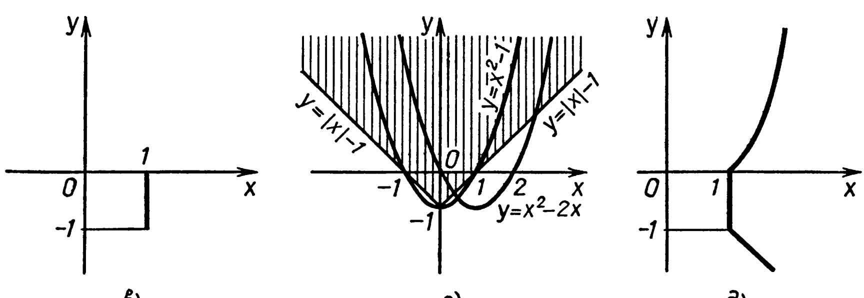


Рис. 102

Сравнивая их, получаем, что $2x$ — наименьшее из них $\left(\right.$даже при любых x, а не только из промежутка $\left.\left[\frac{1}{2};\ 1\right]\right)$.

Значение выражения $\left(-\frac{1}{x}\right)$ лежит в промежутке $[1;2]$ для x из отрезка $\left[-1;\ -\frac{1}{2}\right]$. Следовательно, при этих значениях x нужно взять наименьшее из выражений: $-\frac{1}{x}x^2+\frac{1}{\left(-\frac{1}{x}\right)}=$ $=-2x$, x^2+1 и $2x^2+1$. Таким выражением является $(-2x)$.

При x, лежащих вне отрезков $\left[-1;\ -\frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$, нули производной не попадают в промежуток $[1;\ 2]$, и для определения минимального значения данного выражения нужно сравнивать его значения на концах промежутка: x^2+1 и $2x^2+\frac{1}{2}$.

Так как $x^2+1<2x^2+\frac{1}{2}$ $\left(\right.$интересуют только значения x, лежащих вне отрезков $\left[-1;\ -\frac{1}{2}\right]$ и $\left.\left[\frac{1}{2};\ 1\right]\right)$ при $|x|>1$ и $2x^2+\frac{1}{2}<x^2+1$ $\left(\right.$интересуют только значения x, лежащих вне отрезков $\left[-1;\ -\frac{1}{2}\right]$ и $\left.\left[\frac{1}{2};\ 1\right]\right)$ при $|x|<\frac{1}{2}$, то окончательно получаем:

$$y=\begin{cases} 2x^2+\frac{1}{2}, \text{ если } |x|<\frac{1}{2}, \\ 2|x|, \text{ если } \frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 1, \\ x^2+1, \text{ если } |x|>1. \end{cases}$$

13. См. рис. 104. **14.** $y=x^3-3x^2+3x-5=(x-1)^3-4$. **15.** См. рис. 105.

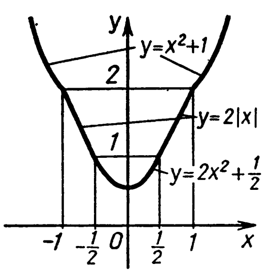


Рис. 103

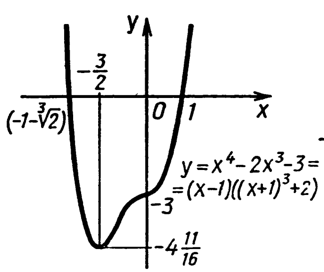


Рис. 104

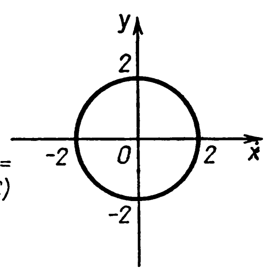


Рис. 105

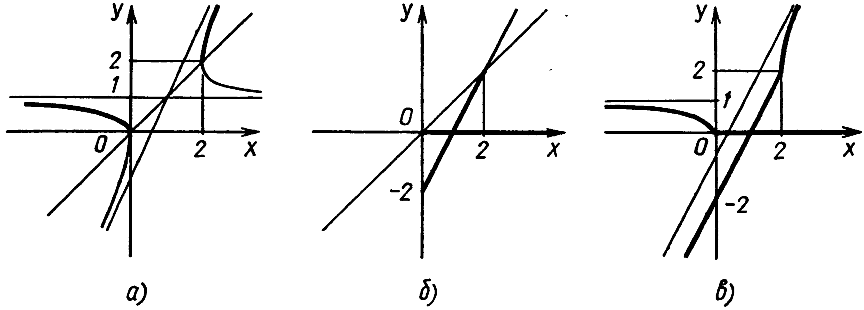


Рис. 106

16. Уравнение можно переписать в виде $(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$, т. е. искомое множество точек — окружность с центром в точке $(1; 2)$ радиусом 3.

17. Рис. 106,*в*. Указание. а) Если $y \geqslant x$, то $y^2-y+x+y-$ $-2xy+x=0$, $y^2-2xy+2x=0$,

$$x=\frac{y^2}{2(y-1)}=\frac{y^2-1+1}{2(y-1)}=\frac{y+1}{2}+\frac{1}{2(y-1)}.$$

Соответствующее множество точек изображено на рисунке 106, *а*.

б) Если $y<x$, то $y^2+y-x+y-2xy+x=0$, $y^2+2y-2xy=0$, что равносильно совокупности уравнений $y=0$, $y=2x-2$ (см. рис. 106, *б*).

18. Рис. 107. Указание. Множество точек симметрично относительно начала координат.

Для точек I четверти уравнение можно переписать в виде $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$, для точек IV — в виде $(y-x)\times$ $\times(y+x-1)=0$.

19. Рис. 108. Указание. Левее прямой $x=1$ точек нет. При $x \geqslant 1$, возводя почленно правую и левую части уравнения в квадрат, получаем:

$$(x-1)^2=3+2x-y^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=6.$$

20. $y=\frac{x+2}{x-1}=\frac{(x-1)+3}{x-1}=1+\frac{3}{x-1}$ (см. рис. 109).

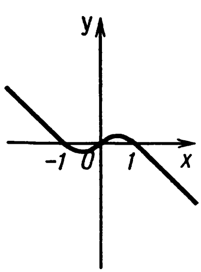


Рис. 107

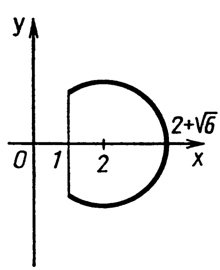


Рис. 108

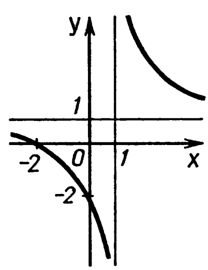


Рис. 109

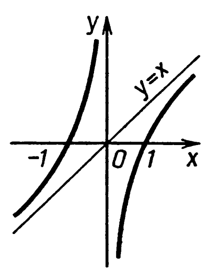


Рис. 110

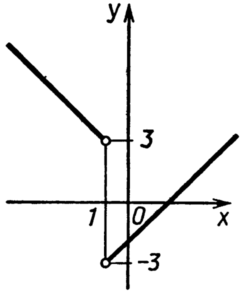


Рис. 111

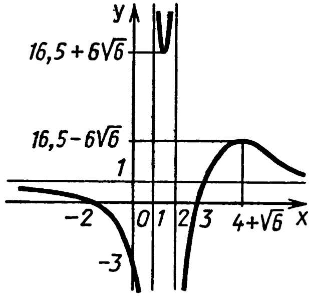


Рис. 112

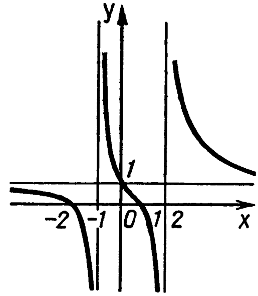


Рис. 113

21. Рис. 110. $y=\frac{x^2-1}{x}=x-\frac{1}{x}$. Область определения: $x\neq 0$. Функция нечетная. Так как производная данной функции существует при всех x из области определения и не равна нулю ни в одной точке, то экстремумов нет. Решение неравенства: $y'=\frac{x^2+1}{x}>0$; $x>0$ дает промежуток возрастания.

22. Рис. 111. $y=\frac{x^2-x-2}{|x+1|}=\frac{(x+1)(x-2)}{|x+1|}$. Следовательно, если $x>-1$, то $y=x-2$, а если $x<-1$, то $y=2-x$.

23. Рис. 112. Указание. Область определения: $x\neq 1$, $x\neq 2$. $y'=-\frac{2(x^2-8x+10)}{(x-1)^2(x-2)^2}$. Так как $y'<0$ при $x<1$, $1<x<4-\sqrt{6}$, $4+\sqrt{6}<x$, то на этих промежутках функция убывает. При $4-\sqrt{6}<x<2$, $2<x<4+\sqrt{6}$ функция возрастает. Точка максимума: $\left(4+\sqrt{6};\ \frac{33-12\sqrt{6}}{2}\right)$, точка минимума: $\left(4-\sqrt{6};\ \frac{33+12\sqrt{6}}{2}\right)$.

24. Рис. 113. Указание. Область определения: $x\neq 1$, $x\neq 2$. Так как $y'=-\frac{2(x^2+2)}{(x^2-x-2)}<0$ при всех x из области определения, то функция убывает, если $x<-1$, $-1<x<2$, $x>2$. Экстремумов нет.

25. Рис. 114. Указание. $y=\frac{x^3-3x+2}{x^2-3x+2}=\frac{(x^3-x)-2x+2}{(x-1)(x-2)}=$

$$=\frac{x(x-1)(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x-2)}=\frac{x^2+x-2}{x-2}$$

при $x\neq 1$. Так как $y'=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}>0$ при $x<0$, $x>4$, то функция возрастает на этих промежутках. На промежутках]0; 1[;]1; 2[;]2; 4[функция убывает.

В точке $x=0$ максимум ($y_{\max}=1$), в точке $x=4$ минимум ($y_{\min}=9$). При x, принимающих «очень большие» значения по модулю, график данной функции приближается к прямой $y=x+3$, так как $\frac{x^2+x-2}{x-2}=x+3+\frac{4}{x-2}$.

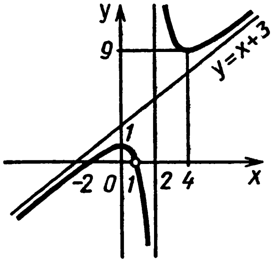


Рис. 114

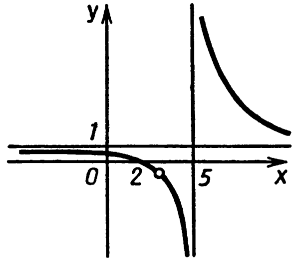


Рис. 115

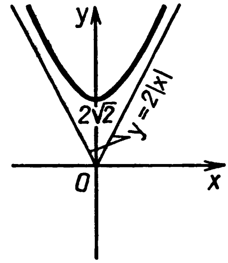


Рис. 116

26. Рис. 115. Указание. $y=\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x-3)}=$ $=\frac{(x-2)}{(x-5)}=\frac{((x-5)+3)}{x-5}=1+\frac{3}{x-5}\quad (x\neq 3).$

27. Рис. 116. Указание. $y=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\frac{3}{4}}+$ $+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\frac{3}{4}}$. При $x>0$ прямая $y=\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)=$ $=2x$ является асимптотой. Строя график, учитываем четность функции.

28. Рис. 117. Указание. Функция нечетная. Так как $y'>0$ при всех x, то функция возрастает на всей оси. При возрастании x функция стремится к 1.

29. Рис. 118. Указание. Так как $y=\sqrt{4-(x+1)^2}$, то $y^2+(x+1)^2=2^2$, где $y\geqslant 0$.

30. Рис. 119. Указание. Так как $y=\frac{|x-1|}{x-1}\sqrt{x}$, то при $0\leqslant x<1\quad y=-\sqrt{x}$, а при $x>1\quad y=\sqrt{x}$.

31. Так как $y'=\frac{1-x}{e^x}>0$ при $x<1$, то на этом промежутке функция возрастает; $y'<0$ при $x>1$, и на этом промежутке функция убывает; $\left(1;\ \frac{1}{e}\right)$ — точка максимума.

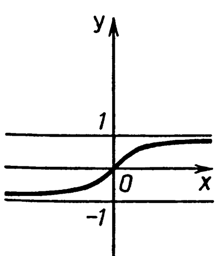


Рис. 117

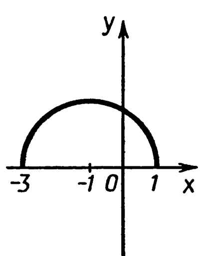


Рис. 118

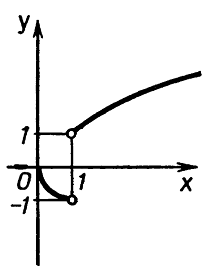


Рис. 119

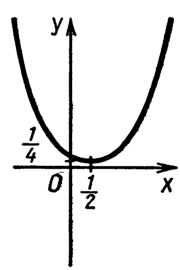


Рис. 120

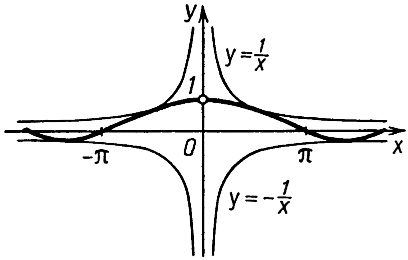


Рис. 121

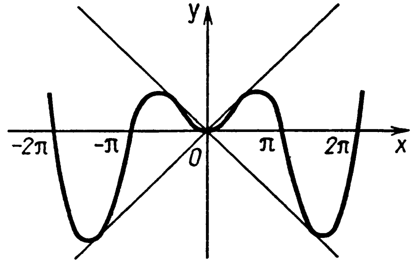


Рис. 122

32. Рис. 120. Указание. Можно построить график функции $y=x^2-x-2$ и при данных абсциссах точек этого графика возвести 2 в степень, равную ординатам этих точек.

33. Так как $y'=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}<0$ при $0<x<1$, $1<x<e$, то на этих промежутках функция убывает; $y'>0$ при $x>e$. При $x=e$ минимум.

34. Так как $y'=e^{-x}(2x-x^2)>0$ при $0<x<2$, то функция на этом промежутке возрастает; $y'<0$ при $x<0$, $x>2$. При $x=0$ минимум, при $x=2$ максимум. Учесть, что показательная функция растет быстрее степенной.

35. Область определения: $x>0$. Так как $y'=\frac{1-2\ln x}{x^3}>0$ при $0<x<\sqrt{e}$, то на этом промежутке функция возрастает; $y'<0$ при $x>\sqrt{e}$. При $x=\sqrt{e}$ максимум. Учесть, что логарифмическая функция растет медленнее, чем степенная.

36. Рис. 121. Указание. График данной функции можно построить «умножением» графиков функций $y=\frac{1}{x}$ и $y=\sin x$. Этот способ полезно применять, когда у одной из функций — «сомножителей» «много» нулей.

37. Рис. 122. Указание. См. задачу 36.

38. Рис. 123.

39. Функция определена при $x=\pi k$.

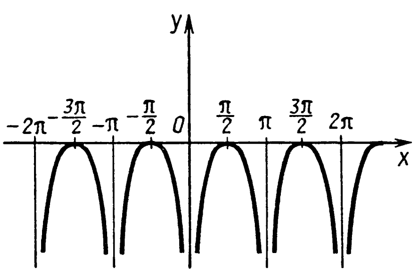


Рис. 123

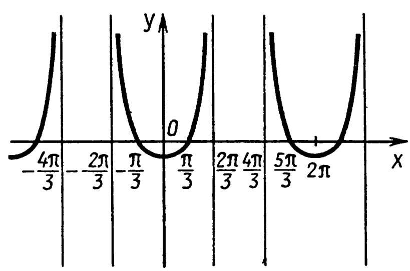


Рис. 124

40. Рис. 124. Указание. $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)$. От ординат точек графика функции $y=\frac{1}{2}+\cos x$ $(y>0)$ при данных абсциссах находим логарифм.

41. а) $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$;
б) $a<0$, $b<0$, $c>0$, $d<0$;
в) $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$.

Указание. Знак a определяется по направлению правой ветви. График идет вверх, $a>0$, вниз, $a<0$. Знаки d, b и c определяются по знаку y, y' и y'' при $x=0$, поскольку $y(0)=d$, $y'(0)=c$, $y''(0)=2b$. (Если выпуклость вверх, то $y''=2b<0$.)

42. а) 3; б) 63. Указание. Построить графики левой и правой частей. Число точек пересечения равно числу корней. Например, в пункте б), поскольку $15\cdot 2\pi+\pi<100<16\cdot 2\pi$, на каждом из первых 15 периодов луч $y=\frac{x}{100}$ пересечется с синусоидой дважды (включая точку $x=0$). Также два пересечения будет и на 16-м периоде. Далее, $\frac{x}{100}>1$ и решения нет. Таким образом, число корней будет при $x\geqslant 0$ равным $2\cdot 16=32$, а всего их $2\cdot 32-1=63$.

43. а) 4. Указание. Данная система неравенств равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x\leqslant 0, \\ y\leqslant 6+2x, \\ y\geqslant 2-2x \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\leqslant 6-2x, \\ y\geqslant 2+2x, \end{cases}$$

в которых каждое неравенство определяет полуплоскость, а системы неравенств — равнобедренные треугольники с общим основанием на оси y. Два треугольника образуют ромб с вершинами $A(0;\ 6)$, $B(1;\ 4)$, $C(0;\ 2)$ и $D(-1;\ 4)$, площадь которого равна $\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=\frac{1}{2}\ 4\cdot 2=4$. б) 6.

44. а) 25; б) 36; в) 16. **45.** а) $100(x+1)^{99}$;

б) $\frac{2}{3}(x^{-\frac{1}{3}}-x^{-\frac{5}{3}})$; в) $\dfrac{1}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$; г) $2x+2^x\ln 2$;

д) $-3x^2\sin x^3$; е) $2\cos 2x$; ж) $x^{\log_2 x-1}\cdot 2\log_2 x$;

з) $-2\sin\cos^3 x\cdot\cos\cos^3 x\cdot 3\cos^2 x\cdot\sin x$;

и) $\frac{1}{2}\sin^{-\frac{1}{2}}x\cdot\cos^{\frac{3}{4}}x+\frac{1}{4}\cos^{-\frac{5}{4}}x\cdot\sin^{\frac{3}{2}}x$.

Указание. $y=\sqrt{\operatorname{tg} x\sqrt{\cos x}}=\sin^{\frac{1}{2}}x\cdot\cos^{-\frac{1}{4}}x$,

к) $-\dfrac{\operatorname{tg} x}{(2\ln 2)\sqrt{\log_2\cos x-1}}$. Это формально найденная производная.

Обращаем внимание на то, что исходная функция не определена ни при одном значении x.

46. а) $y_{max}=400$, $y_{min}=-86$; б) $y_{max}=350$, $y_{min}=-497$.

47. а) Функция убывает на промежутках $0<x<1$ и $1<x<e$, возрастает на промежутке $e<x<\infty$, имеет точку минимума $x=e$ и не имеет точек максимума.

б) Функция возрастает на промежутках $e^2<x<\infty$ и $0<x<1$, убывает на промежутке $1<x<e^2$, имеет точку минимума $x=e^2$ и не имеет точек максимума.

в) Функция возрастает на промежутке $-\infty<x<\frac{1}{3}$, убывает на промежутке $\frac{1}{3}<x<\infty$, имеет точку максимума $x=\frac{1}{3}$ и не имеет точек минимума.

48. а) $x=\frac{1}{2}\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{7}+\pi n\right)$, n — целое;

б) $x=\frac{1}{5}\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $x=\frac{1}{5}\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, n — целое;

в) $x=\frac{1}{3}\left(-\frac{14}{33}\pi+2\pi n\right)$, $x=\frac{1}{3}\left(\frac{8}{33}\pi+2\pi n\right)$, n — целое.

49. а) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n$, n — целое; б) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, n — целое.

50. $-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. **51.** $-2-\sqrt{5}$. **52.** $-1-\sqrt{7}$.

53. $y_{min}=0$, $y_{max}=21+3\ln 2$. Указание. Трехчлен под знаком модуля имеет абсциссу вершины $x=-1$ и корень $x=1$ на промежутке $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$, слагаемое $\frac{3}{2}\ln x$ есть монотонно возрастающая функция от x. Поэтому максимальное значение y достигается в точке $x=4$, а минимальное значение y находится на промежутке $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$, где $y=\frac{3}{2}\ln x-x^2+2x+3$, $y'=\frac{3}{2x}-2x-$ $-2\leqslant 0$ для всех x из этого промежутка, т. е. $y_{min}=y(1)=0$.

54. Функция имеет минимум в точке $x=\frac{\sqrt{10}-2}{3}$, а наибольшее значение ее равно 21.

55. $y_{min}=y(-3)=-3$, $y_{max}=y\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$. Указание. Преобразовать $y(x)$ к виду $y=x+|x+3|\cdot|x+1|=$ $=x-(x+1)|x+3|\ \left(x+1<0 \text{ при } -4\leqslant x\leqslant-\frac{5}{4}\right)$.

56. $y_{min}=y\left(\frac{5}{e}\right)=-\frac{5}{e}$. **57.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $2\pi n$. **58.** 17. **59.** -19. **60.** -118. **61.** $y_{min}=y(0)=1$. **62.** Функция возрастает на промежутках $-\infty<x<0$ и $2<x<\infty$, функция убывает на промежутках $0<x<1$ и $1<x<2$. **63.** 2, e^2. **64.** 3, e^3.

65. $y_{\max}=y\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$, $y_{\min}=y(0)=0$. **66.** $y_{\max}=y(0)=1$, $y_{\min}=y\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\sqrt{5}}e^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}}$. **67.** $y_{\max}=54$, $y_{\min}=-135$. **68.** $y_{\max}=8$, $y_{\min}=-73$. **69.** $\max f(x)=\frac{3}{4}$, $\min f(x)=-\frac{3}{2}$.

70. $\max f(x)=4\pi-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\min f(x)=-4\pi-1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

71. $\max f(x)=\pi-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\min f(x)=-1-7\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **72.** $3\sqrt{3}$.

73. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **74.** $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. **75.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$, n — целое.

76. $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, n — целое. **77.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, k — целое.

78. Имеется единственная точка экстремума (минимума) $x=\frac{1}{4}$ и $y_{\min}=\sqrt{\frac{15}{8}}$.

79. Имеется единственная точка экстремума (минимума) $x=\frac{1}{6}$ и $y_{\min}=-\frac{2}{3}\sqrt{e}$.

80. $-\sqrt{29}\leqslant A\leqslant\sqrt{29}$. У к а з а н и е. Воспользоваться фактом, что величина $a\sin x+b\cos x$ принимает все значения от $-\sqrt{a^2+b^2}$ до $\sqrt{a^2+b^2}$, и тем очевидным обстоятельством, что число A есть значение функции $y=5\sin x+2\cos x$.

81. $-\sqrt{58}\leqslant A\leqslant\sqrt{58}$. **82.** $\pm\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{16}+\pi n$, n — целое.

83. $-\frac{4\pi}{3}+\pi k$, k — целое. **84.** $\frac{\pi}{12}+\pi n$, n — целое.

85. У к а з а н и е. Можно решать путем прямого вычисления максимума функции на отрезке и доказательства затем требуемого неравенства либо перейти к равносильной задаче: доказать, что для функции $\varphi(t)=2t(1-t^2)=-2t^3+2t$ справедливо неравенство $\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}\varphi(t)<0{,}77$ $(t=\cos x)$.

86. См. указание к задаче 85.

87. $\frac{\pi}{4}+1$. У к а з а н и е. Оба слагаемых, а следовательно, и сумма достигают наибольшего значения при $x=\frac{\pi}{2}$.

88. $(0;\ 5)$. **89.** $\left(\frac{9}{2};\ 0\right)$. **90.** $\left(\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{3};\ -\frac{\pi}{4}\right)$. **91.** $(-7;\ 4)$.

92. $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{3+\pi\sqrt{3}}{6}\right)$. **93.** $y=-\sqrt{\frac{5}{11}}(x-3)$. **94.** $(5{,}5;\ 3{,}5)$.

95. $y=\frac{x}{2}+\sqrt{2}$; $y=\frac{x}{2}-\sqrt{2}$. **96.** $y=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}$; $y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$.

97. $y=2x$. **98.** $y=2x$ и $y=2x-\frac{32}{3}$. **99.** πn, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$; n — целое.

100. $\frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, n — целое. **101.** $y=2x+1$. **102.** $(-3;\ 11)$.

103. 6, 25. **104.** 43, 75. **105.** 49/32. **106.** $(8;\ 0)$, $(0;\ 0)$.

107. $y_{\max}=3$ при $2\leqslant x\leqslant 3$. **108.** $y_{\min}=-3$ при $1<x<0$.

109. $y=-\frac{1}{x_0^2}x\pm\frac{2}{x_0}$, где $x_0=\sqrt{8+\sqrt{63}}$ или $x_0=\sqrt{8-\sqrt{63}}$.

Указание. В силу свойств функции $y=\frac{1}{x}$ уравнения параллельных касательных имеют вид ($x_0>0$, x_0 и $(-x_0)$ — абсциссы точек касания) (1) $y=-\frac{1}{x_0^2}x+\frac{2}{x_0}$ и (2) $y=-\frac{1}{x_0^2}x-\frac{2}{x_0}$.

Для прямых $y=kx+l_1$ и $y=kx+l_2$ расстояние между ними равно (докажите) $\frac{|l_1-l_2|}{\sqrt{1+k^2}}$, откуда для x_0 получаем уравнение $\frac{\frac{2}{x_0}-\left(-\frac{2}{x_0}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x_0^2}\right)^2}}=1$, т. е. $x_0^4-16x_0^2+1=0$, откуда $x_0^2=8\pm\sqrt{63}$, $x_0=\sqrt{8\pm\sqrt{63}}$ и $x_0=\sqrt{8-\sqrt{63}}$ и т. д.

110. $-8x-4$. Указание. Представим y в виде $y=(x^2-2x-2)^2-8x-4$. Теперь можно доказать, что прямая $y=-8x-4$ касается данной кривой в точках x_1 и x_2, являющихся корнями уравнения $x^2-2x-2=0$. Для этого достаточно проверить, что $y(x_1)=-8x-4$, $y'(x_1)=-8$. То же для x_2.

Замечание. Можно доказать, что найденная прямая единственная, обладающая требуемым свойством. Докажем сначала, что если график многочлена 4-й степени касается оси абсцисс в точках 0 и a, то этот многочлен имеет вид $x^2(x-a)^2$ (предполагаем, что коэффициент при x^4 равен 1). В самом деле, из того, что одна точка касания с осью абсцисс есть 0, следует, что многочлен имеет вид $P(x)=x^4+mx^3+nx^2=x^2q_2(x)$, где $q_2(x)=x^2+mx+n$. Далее, $P(a)=a^2q_2(a)=0$, т. е. $q_2(a)=0$, $P'(a)=2aq_2(a)+a^2q_2'(a)=0$, т. е. $q_2'(a)=0$. Из этого следует, что $q_2(a)=(x-a)^2$. Наш случай (и общий также) сводится к рассмотренному. Пусть $y=kx+b$ — искомая прямая, абсциссы точек касания c и $a+c$, $Q(x)$ — данный многочлен. Тогда $Q(x)-kx-b=Q_1(x)$ касается оси абсцисс в точках c и $a+c$, а многочлен $Q_2(x)=Q_1(x+c)$ касается ее в точках 0 и a.

111. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **112.** $(0;\ 2)$. **113.** $\left(\frac{3\pi}{4};\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

114. а) $\sqrt{2}/4$; б) $\sqrt{2}\cdot\log_2\frac{e}{\log_2 e}$. Указание. а) и б). Данные функции являются обратными друг к другу, т. е. их графики симметричны относительно прямой $y=x$. Кроме того, они не пересекаются с этой прямой. Построим касательные к каждой из этих функций, параллельные прямой $y=x$. Искомое расстояние равно расстоянию между этими касательными.

115. 1. Указание. Расстояние от точки $(x; y)$ до точки $(0; 0)$ равно $d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+4}=\sqrt{f(x)}$.

Если d $(d\geqslant 0)$ минимально, то минимально и d^2. $f'(x)=x^2+x-2$ обращается в нуль при $x=-2$ и $x=1$. Минимум достигается в точке $x=1$, где $f'(x)$ меняет знак «$-$» на «$+$».

116. $B\left(\frac{4}{\sqrt{3}};\ \frac{16}{3}(\sqrt{3}-1)\right)$. **117.** $B\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{9}\right)$. **118.** $18\frac{1}{3}$ кг.

119. 20 км/ч. **120.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **121.** $\frac{a}{8}\sqrt{4-a^2}$, $a=\sqrt{2}$.

122. $\frac{2}{\sqrt{(\sqrt[3]{4}+1)^3}}$.

123. $2R\sin 40°$. *Замечание.* Получившаяся трапеция будет иметь наибольшую площадь среди возможных четырехугольников, вписанных в окружность и имеющих одну сторону $R\sqrt{3}$.

124. $2d$. **125.** 4. **126.** 6.

127. $\frac{2}{9}V$. Указание. Пусть площадь основания пирамиды равна S, высота пирамиды h, высота параллелепипеда x. Тогда площадь сечения пирамиды плоскостью, содержащей верхнее основание параллелепипеда, равна $Q=\left(\frac{h-x}{h}\right)^2 S$. Площадь наибольшего прямоугольника, вписанного в правильный треугольник площадью Q, равна $\frac{1}{2}Q$ (см. задачу 121). Объем параллелепипеда равен $\frac{1}{2}x\left(\frac{h-x}{h}\right)^2 S$. Наибольшим он будет при $x=\frac{h}{3}$.

128. $\frac{242\pi}{225\sqrt{5}}$. Указание. Докажем сначала, что высота искомого цилиндра равна половине высоты пирамиды. Пусть $h=SA$ — высота пирамиды, r — радиус окружности, вписанной в ABC, x — высота цилиндра, ρ — радиус его основания. Тогда $\rho=\frac{h-x}{h}r$ (ρ равно радиусу окружности, вписанной в сечение пирамиды плоскостью, содержащей верхнее основание цилиндра). Площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi\rho x=2\pi\frac{r}{h}x(h-x)$. Наибольшее значение будет при $x=\frac{h}{2}$. Осталось найти h и r. Имеем:

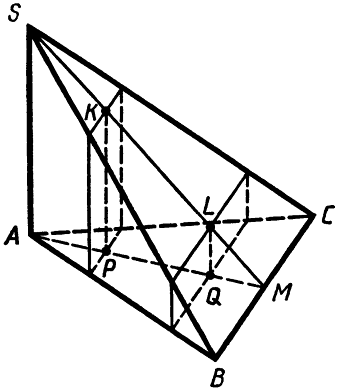


Рис. 125

$h = SA = AB \cdot \operatorname{tg} \angle ABS =$
$= \frac{11}{\sqrt{5}}$, $BS = 4\sqrt{\frac{11}{5}}$.
Пусть $\angle BSC = 2\alpha$, $\angle BAC = 4\alpha$. Далее, $BC = 2BS \cdot \sin\alpha = 8\sqrt{\frac{11}{5}} \sin\alpha$, $BC = 2AB \cdot \sin 2\alpha = 2\sqrt{11} \sin 2\alpha$. Приравнивая эти значения, найдем $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Далее, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $S_{ABC} = \frac{132}{25}$. Из формулы $S = pr$ найдем $r = \frac{4\sqrt{11}}{15}$ и т. д.

129. $\frac{\pi(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{36}$. Указание. Обозначим $SA = h$, $AM = m$, $BC = b$. Диаметр оснований цилиндров равен x (рис. 125). Проведем через основания цилиндра плоскости. Эти плоскости пересекают нашу пирамиду по прямоугольникам. Одна сторона каждого из них равна x. Пусть K и L, P и Q — точки пересечения этих плоскостей с SM и AM. Из подобия соответствующих треугольников найдем $QM = AM \frac{LQ}{SA} = m \frac{x}{h}$, $AP = AM \frac{SK}{SM} = m \frac{x}{b}$.

Таким образом, образующая цилиндра $PQ = m - m\frac{x}{h} - m\frac{x}{b}$.

Боковая поверхность $2\pi mx\left(1 - \frac{x}{h} - \frac{x}{b}\right) = 2\pi mx\left(1 - x\frac{h+b}{hb}\right)$. Наибольшее значение при $x = \frac{hb}{2(h+b)}$. При этом она равна $\frac{\pi mhb}{2(b+h)}$.

Далее, по условию $h = m\sqrt{8}$, $SM = 3m$. Пусть $\angle BSM = \alpha$, тогда $\angle BAC = 2\alpha$. $BM = SM \cdot \operatorname{tg}\alpha = 3m \operatorname{tg}\alpha$, $BM = AM \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = m \operatorname{tg} 2\alpha$. Имеем уравнение $\operatorname{tg} 2\alpha = 3 \operatorname{tg}\alpha$, откуда $\alpha = 30°$. Затем $m = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $h = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

130. $\frac{2}{27}S$. Указание. Пусть y — площадь сечения, x — площадь соответствующей грани пирамиды, V — объем данной пирамиды, W — объем отсекаемой пирамиды, r — радиус вписанного шара. Ввиду подобия пирамид $\frac{V}{W} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}$. С другой стороны, $V = \frac{1}{3}rS$. Пусть $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности меньшей пирамиды. Справедливо равенство $W = \frac{1}{3}r(S_{бок} - y)$. (Докажите эту формулу. Она аналогична формуле $V=\frac{1}{3}rS$.) Поскольку боковая поверхность исходной пирамиды равна $S-x$, то $\frac{S_{бок}}{S-x}=\frac{y}{x}$, $S_{бок}=(S-x)\frac{y}{x}$ и $W=\frac{1}{3}r\left((S-x)\frac{y}{x}-y\right)=\frac{1}{3}r\frac{y}{x}(S-2x)$. Таким образом, $\frac{V}{W}=\frac{Sx}{y(S-2x)}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}}$, откуда $\sqrt{y}=\frac{(S-2x)\sqrt{x}}{S}$, наибольшее значение y будет при $x=\frac{S}{6}$.

131. $(6+2\sqrt{3})r$. Указание. Пусть x — высота пирамиды, $2y$ — сторона основания. Рассмотрев сечение плоскостью проходящей через высоту пирамиды и перпендикулярной двум сторонам основания, найдем $y=\frac{rx}{\sqrt{x^2+6xr+8r^2}}$. Объем пирамиды равен $V=\frac{4}{3}y^2x=\frac{4}{3}r^2\frac{x^3}{x^2-6xr+8r^2}$.

132. $R\frac{2}{\sqrt{3}}$, $R\sqrt{\frac{2}{3}}$. **133.** $\frac{8\pi}{3}$. **134.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

135. Если $0<a\leqslant\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, высота равна $2(2a+1)+$ $+2\sqrt{a^2+a+1}$, если $a>\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, то высота $\frac{2a^2}{a-1}$. Указание. Рассмотрим половину осевого сечения конуса (рис. 126, O_1, O_2, O — центры шаров и основания конуса, SM — образующая, K — точка касания, $O_2L\perp SM$). Имеем $SK=\sqrt{x^2-1}$.

Из подобия треугольников SO_1K и SMO найдем $MO=$ $=\frac{x+2a+1}{\sqrt{x^2-1}}$. Тогда объем конуса будет $V=\frac{\pi}{3}\frac{(x+2a+1)^3}{x^2-1}$. Наименьшее значение V будет при $x=2a+1+2\sqrt{a^2+a+1}$. (Высота равна $x+2a+1$.) Необходимо еще учесть, что $O_2L\geqslant a$. (В противном случае наименьший объем будет, когда конус описан около обоих шаров.)

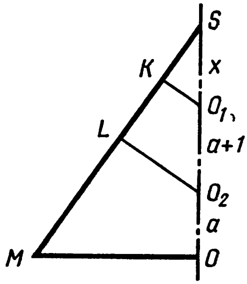


Рис. 126

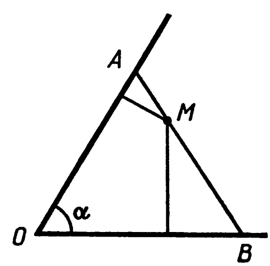


Рис. 127

Поскольку $O_2L=\frac{x+a+1}{x}$, то приходим к неравенству $\frac{x+a+1}{x}>$ $>a$, $x(a-1)<a+1$.

Интерес представляет случай $a>1$. Тогда $x<\frac{a+1}{a-1}$. Имеем неравенство $2a+1+2\sqrt{a^2+a+1}<\frac{a+1}{a-1}$, или $(a-1)\sqrt{a^2+a+1}<$ $<-a^2+a+1$. Решая его обычными средствами, найдем, что $a<\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

136. $\frac{a\sqrt{6}(4b^2-a^2)}{8\sqrt{2b^2+a^2}}$.

137. $\frac{3\sqrt{3}a}{8}$. Указание. Пусть построенная прямая пересекает стороны угла в точках A и B, O — вершина угла (рис. 127). Из условия следует, что $OA=OB$. Обозначим $OA=OB=x$, расстояния от M до OA и OB равны m и n $(m+n=a)$. Имеем $S_{BOA}=\frac{1}{2}x^2\sin\alpha=S_{MOA}+S_{MOB}=\frac{1}{2}xm+\frac{1}{2}xn=\frac{1}{2}ax$. Следовательно, $x=\frac{a}{\sin\alpha}$. Радиус описанного круга равен

$$R=\frac{x}{2\sin\left(90-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Задача сводится к определению наименьшего значения функции $f(t)=t(1-t^2)$, где $0\leqslant t\leqslant 1$. Это наименьшее значение равно $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ $\left(\text{при } t=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

138. Треугольная пирамида, четырехугольная пирамида, конус, параллелепипед, цилиндр. Указание. Пусть поверхность каждого тела равна 1. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду, x — сторона основания, l — апофема боковой грани. Полная поверхность $x^2\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{2}lx=1$, откуда $l=\frac{2}{3x}-\frac{x\sqrt{3}}{6}$.

Высота пирамиды $h=\sqrt{l^2-\frac{x^2}{12}}=\sqrt{\frac{4}{9x^2}-\frac{2\sqrt{3}}{9}}$.

Объем $V=\frac{x^2\sqrt{3}}{12}\sqrt{\frac{4}{9x^2}-\frac{2\sqrt{3}}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{36}\sqrt{4x^2-2\sqrt{3}x^4}$.

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $f(x)=4x^2-2\sqrt{3}x^4$. Наибольшее значение при $x=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, тогда $l=$ $=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}=x\frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. искомая пирамида — правильный тетраэдр, ее объем $\frac{\sqrt{2}}{12\sqrt[4]{27}}$. В случае четырехугольной пирамиды наибольший объем имеет та, у которой высота равна диагонали основания, ее объем ($S_{пол}=1$) равен $\frac{\sqrt{2}}{24}$. Наибольшим из параллелепипедов будет куб, его объем $\frac{1}{6\sqrt{6}}$.

У наибольшего конуса образующая в три раза больше радиуса основания, его объем $\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}$.

У наибольшего цилиндра высота равна диаметру основания, его объем $\frac{\sqrt{3}}{9\sqrt{2\pi}}$.

139. Задача имеет смысл при $\cos\alpha>\frac{k}{2}$, $k<2$. 1) $\sqrt{\frac{2}{3}}<k<1$. Если $\frac{k}{2}<\cos\alpha<k$, $\varphi=\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+32}}{8}$. Если $\cos\alpha\geqslant k$, $\varphi=0$. 2) $1\leqslant k<2$, $\varphi=\arccos\frac{k+\sqrt{k^2+32}}{8}$. Указание. Рассмотрим положение, при котором стержень образует угол φ с горизонтальной плоскостью, $t=\cos\varphi$. Если $k<1$, то обозначим $\cos\varphi_0=k$, φ_0 соответствует положению, изображенному на рис. 128, *а*.

Пусть диаметр равен 2, длина стержня $2k$, $y=f(t)$ — расстояние от середины стержня до диаметральной плоскости полусферы. В положении равновесия $y(t)$ имеет локальный максимум (расстояние от середины стержня — его центра тяжести — до горизонтальной плоскости равно $R-y(t)$, будет иметь локальный минимум).

Построим график функции $y=y(t)$.

Возникают два случая: 1) $0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0$ или $k\leqslant t\leqslant 1$. При этих t оба конца стержня внутри чаши (рис. 128, *а*). Расстояние от центра полусферы до середины стержня равно $\sqrt{1-k^2}$, значит, $y(t)=\sqrt{1-k^2}\cos\varphi=t\sqrt{1-k^2}$.

2) $\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1$, где φ_1 соответствует положению, при котором середина стержня расположена на границе полусферы, т. е. $y(t_1)=y(\cos\varphi_1)=0$. Можно показать, что $t_1=\frac{k}{2}$.

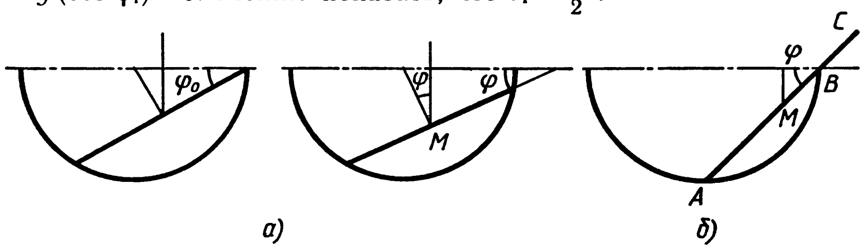


Рис. 128

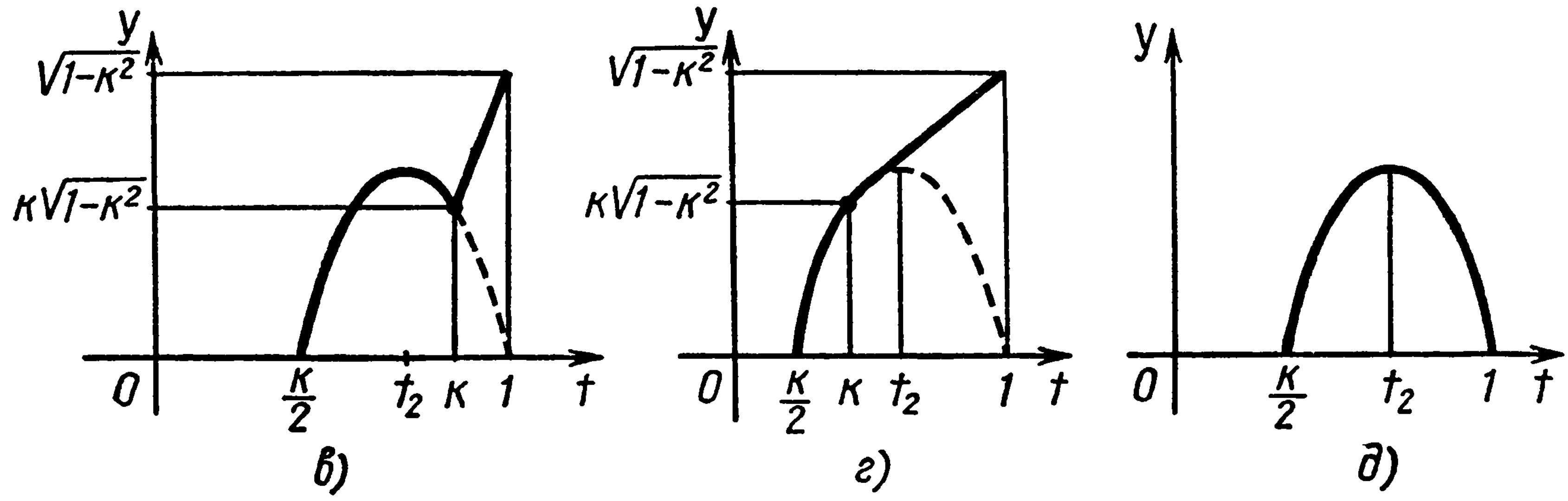


Рис. 128

Имеем (рис. 128, *б*, M — середина стержня AC) $AB=2\cos\varphi$, $MB=AB-AM=2\cos\varphi-k$. Расстояние от M до диаметральной плоскости равно $y(t)=(2\cos\varphi-k)\sin\varphi=(2t-k)\sqrt{1-t^2}$. $y'(t)=$ $=\frac{-4t^2+kt+2}{\sqrt{1-t^2}}$. Обозначим через t_2 положительный корень уравнения $y'(t)=0$. $t_2=\frac{k+\sqrt{k^2+32}}{8}$. При этом $t_2<k$, если $k>\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Таким образом, график $y(t)$ имеет вид: если $k>\sqrt{\frac{2}{3}}$ — рисунок 128, *в*, если $k<\sqrt{\frac{2}{3}}$ — рисунок 128, *г*. Поэтому, если $1>k>\sqrt{\frac{2}{3}}$, возможны два положения равновесия. А именно при $\frac{k}{2}<\cos\alpha<k$ в положении равновесия $\cos\varphi=t_2=\frac{k+\sqrt{k^2+32}}{8}$. Если $\cos\alpha\geqslant k$, в положении равновесия $\cos\varphi=1$, т. е. $\varphi=0$. Если $1<k<2$, положение равновесия единственно (рис. 128, *д*): $\cos\varphi=t_2=\frac{k+\sqrt{k^2+32}}{8}$.

140. Если $h\leqslant 2$, то $a>\sqrt[3]{\frac{5}{9}}h$; если $h>2$, то $a>h\times$ $\times\sqrt[3]{1-\frac{3h^2}{(h+1)^3}}$. Указание. Обозначим ребро куба через x. Понятно, что глубже всего куб можно опустить, если ребра его нижней грани будут перемещаться параллельно боковым граням. Рассмотрим самое нижнее положение куба. (На рис. 129 изображено сечение пирамиды и куба. Плоскость сечения перпендикулярна противоположным боковым граням.)

Пусть y — высота подъема воды. При этом часть куба выступает над поверхностью, т. е. $xh+x\geqslant y$. (Нижняя часть куба ограничивает пирамиду, подобную данной.) Аналогично тому, как это делалось при решении задачи 45 из вводной части, имеем соот-

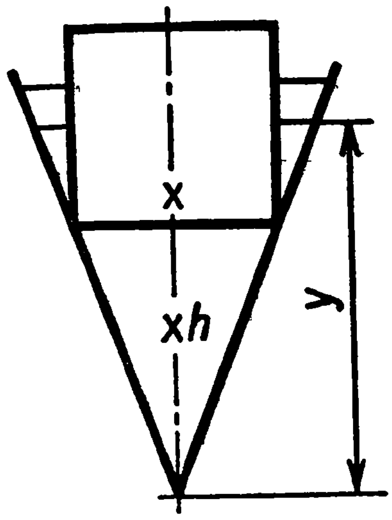


Рис. 129

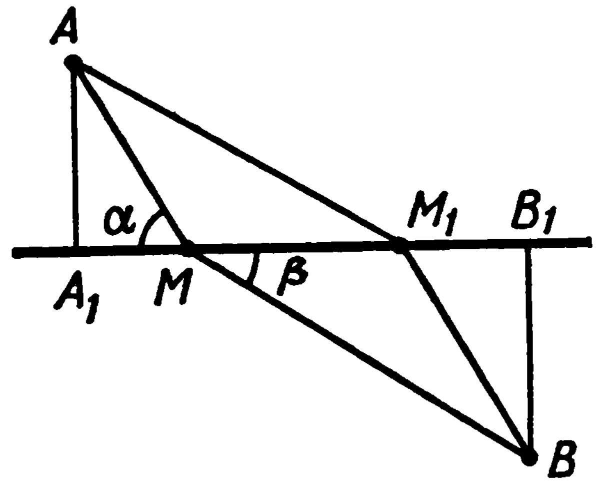


Рис. 130

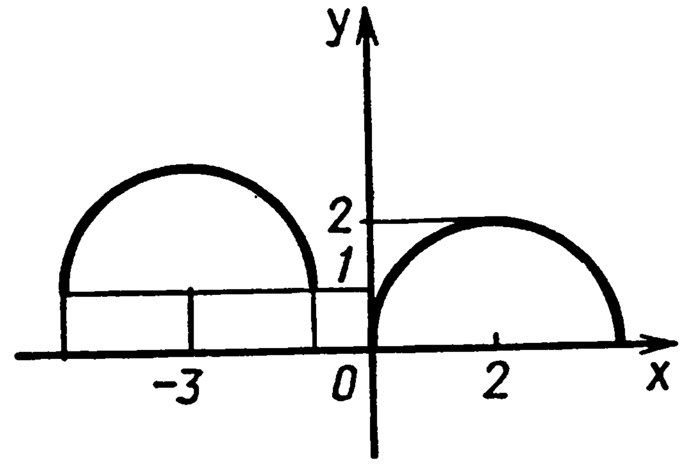


Рис. 131

ношение $\frac{y^3}{3h^2}=\frac{a^3}{3h^2}+x^2(y-xh)$. Найдем наибольшее значение y.

Берем производную обеих частей, заменяя $y'=0$. Найдем $y=\frac{3}{2}xh$.

Из условия $xh+x\geqslant y$ получим $h\leqslant 2$. Далее найдем $y=a\sqrt[3]{\frac{9}{5}}$ и т. д.

141. $2\frac{\sqrt{33}}{33}$ ч. Указание (см. задачу 9 вводной части). Примем за $t=0$ момент, когда отрезок, соединяющий корабли, перпендикулярен их курсам. Обозначим через x_1 и x_2 моменты выхода и возвращения катера, y — момент его прибытия на второй корабль. Получаем соотношения $28^2(y-x_1)^2=(20y-16x_1)^2+$ $+16$; $28^2(x_2-y)^2=(20y-16x_2)^2+16$.

Из этих соотношений следует, что x_1 и x_2 — корни одного квадратного уравнения (относительно x).
$49(y-x)^2=(5y-4x)^2+1$ или $33x^2-58yx+24y^2-1=0$.

Разность корней $\frac{\sqrt{D}}{33}$, где $D=58^2y^2-4\cdot 33\cdot 24y^2+33\cdot 4$. Понятно, что наименьшее значение D будет при $y=0$.

142. Понятно, что плоскость AMB должна быть перпендикулярной плоскости, разделяющей пространство. Понятно также, что M должна принадлежать отрезку, соединяющему проекции A и B на эту плоскость (рис. 130).

Возьмем на A_1B_1 точку M так, что $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{u}{v}$, где $\alpha=\angle AMA_1$, $\beta=\angle BMB_1$. Такая точка существует. Если M совпадает с A_1, то $\cos\alpha=0$.

При движении M от A_1 к B_1 отношение косинусов монотонно неограниченно возрастает. Пусть $AM=a$, $BM=b$, $u=k\cos\alpha$, $v=k\cos\beta$.

Нам надо доказать, что $\frac{a}{k\cdot\cos\alpha}+\frac{b}{k\cdot\cos\beta}<\frac{AM_1}{k\cdot\cos\alpha}+\frac{BM_1}{k\cdot\cos\beta}$, где M_1 — любая точка отрезка A_1B_1.

Обозначим $MM_1=x$. (Предполагаем, что M_1 на MB_1.) Справедливы неравенства $AM_1>a+x\cos\alpha$, $BM_1>b-x\cos\beta$. В самом деле, $AM_1^2=a^2+x^2+2ax\cos\alpha>a^2+x^2\cos^2\alpha+2ax\cos\alpha=$ $=(a+x\cos\alpha)^2$.

Аналогично доказывается второе неравенство. Таким образом,

$$\frac{AM_1}{\cos\alpha}+\frac{BM_1}{\cos\beta}>\frac{a+x\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{b-x\cdot\cos\beta}{\cos\beta}=\frac{a}{\cos\alpha}+\frac{b}{\cos\beta}.$$

Замечание. Частным случаем является следующая задача: «На плоскости дана прямая l, точка A расположена на прямой, B — вне ее. Точка движется по прямой со скоростью u и вне прямой со скоростью v $(v<u)$. Пусть точка движется от A до N, $AN>0$, по прямой, а затем от N до B. Тогда время, затрачиваемое на путь от A до B, будет наименьшим, если $\cos\alpha=\frac{v}{u}$, где α — угол, образованный BN с l.

143. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}+\frac{2\sqrt{26}}{5}$.

144. $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{2}$ и $\sqrt{13}+\sqrt{2}$. Указание. Множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению, есть полуокружность: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$, $y-x\geqslant 0$. Второе уравнение есть уравнение окружности $(x+2)^2+(y+1)^2=2$ (рис. 132). Длина отрезка, соединяющего их центры, равна $\sqrt{\left(\frac{1}{2}+2\right)^2+\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$. Он больше суммы радиусов и пересекает обе линии. Наименьшее расстояние равно $\frac{\sqrt{34}}{2}-\sqrt{2}-$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{2}$. Наибольшее расстояние реализуется для крайней точки полуокружности $(1, 1)$. Оно равно расстоянию от этой точки до центра окружности плюс радиус окружности: $\sqrt{13}+\sqrt{2}$.

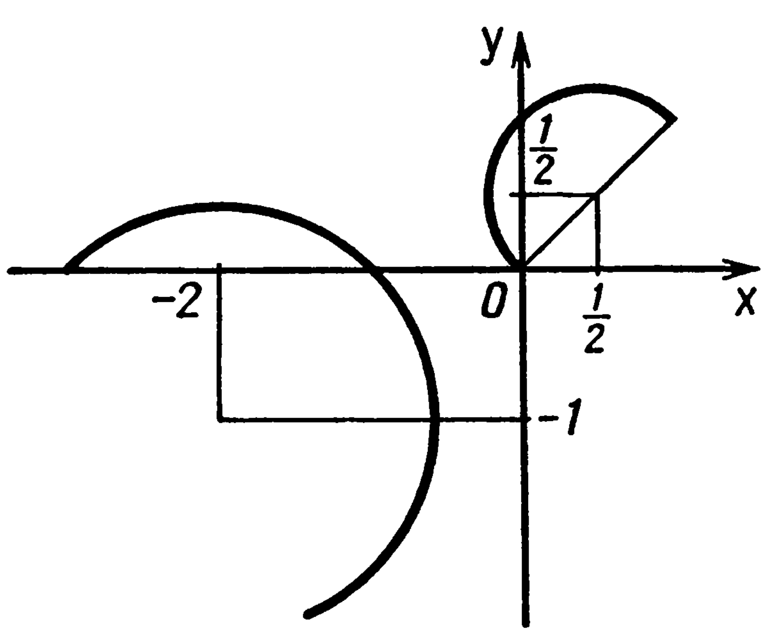


Рис. 132

145. $126\frac{5}{6}$. **146.** 2,25. **147.** 2,25. **148.** 62,5. **149.** 9. **150.** $21\frac{1}{3}$. **151.** $2\frac{2}{3}$. **152.** $\frac{1}{6}$. **153.** $2\sqrt{2}-2$. **154.** 2. **155.** 1. **156.** 0. **157.** 3.

158. Прямая $y=-\frac{1}{4}$. Указание. Пусть $M(x_0;\,y_0)$ — точка, удовлетворяющая условию задачи. Тогда уравнение произвольной прямой (не вертикальной), проходящей через M, имеет вид $y=y_0+k(x-x_0)$. Условие означает, что дискриминант уравнения $x^2-y_0-k(x-x_0)=0$ равен 0, т. е. $k^2-4kx_0+4y_0=0$. Для того чтобы существовали две касательные, должно выполняться условие $x_0^2-y_0>0$, т. е. $M(x_0;\ y_0)$ ниже данной параболы. Пусть k_1 и k_2 — корни последнего уравнения. Перпендикулярность направлений с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 означает, что $k_1k_2=-1$, т. е. $4y_0=-1$, $y_0=-\frac{1}{4}$.

159. Лучшее приближение дает касательная, проведенная в точке с абсциссой a. Указание. Поскольку рассматриваемая дуга лежит ниже каждой касательной, то лучшее приближение дает та из них, для которой ордината в точке $x=\frac{a+b}{2}$ меньше. Сравним их. Для первой $y_1=\sin a+\left(\frac{b-a}{2}\right)\cos a$. Для второй $y_2=\sin b-\left(\frac{b-a}{2}\right)\cos b$, $y_2-y_1=(\sin b-\sin a)-\frac{b-a}{2}\times$ $\times(\cos a+\cos b)=2\cos\frac{b+a}{2}\cos\frac{b-a}{2}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{b-a}{2}-\frac{b-a}{2}\right)>0$, поскольку $\operatorname{tg} x>x$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$.

160. Точка $M(x_0;\ y_0)$ лежит в I четверти на ветви гиперболы $x_0y_0=\frac{1}{4}$. Указание. То, что точка M лежит в I четверти, достаточно очевидно из графических соображений. Единственность решения означает, что соответствующие две параболы касаются, т. е. имеют общую касательную. Ее угловой коэффициент — $2x_0$. С другой стороны, рассматривая во втором уравнении x как функцию от y, получим, что $x'(y_0)=2y_0$, т. е. $2y_0$ — тангенс угла наклона этой касательной к оси y. Значит, тангенс угла наклона к оси x равен $\frac{1}{2y_0}$. Получаем $2x_0=\frac{1}{2y_0}$, $x_0y_0=\frac{1}{4}$. Обратно, возьмем произвольную точку $M(x_0;\ y_0)$, для которой $x_0y_0=$ $=\frac{1}{4}$. Проведем через нее две параболы заданного вида: $y=$ $=x^2+y_0-x_0^2$, $x=y^2+x_0-y_0^2$. Докажем, что эта система имеет единственное решение $(x_0;\ y_0)$. То, что $(x_0;\ y_0)$ — решение системы, очевидно. Его единственность следует из того, что обе параболы имеют в этой точке общую касательную и расположены по разные стороны от нее.

161. $|x+4|+|x-6|-|x+1|-|x-3|+|x-1|-5$.

Указание. Рассмотрим график функции $y=|||x-1|-$ $-2|-3|$ (рис. 133). Этот график представляет собой ломаную

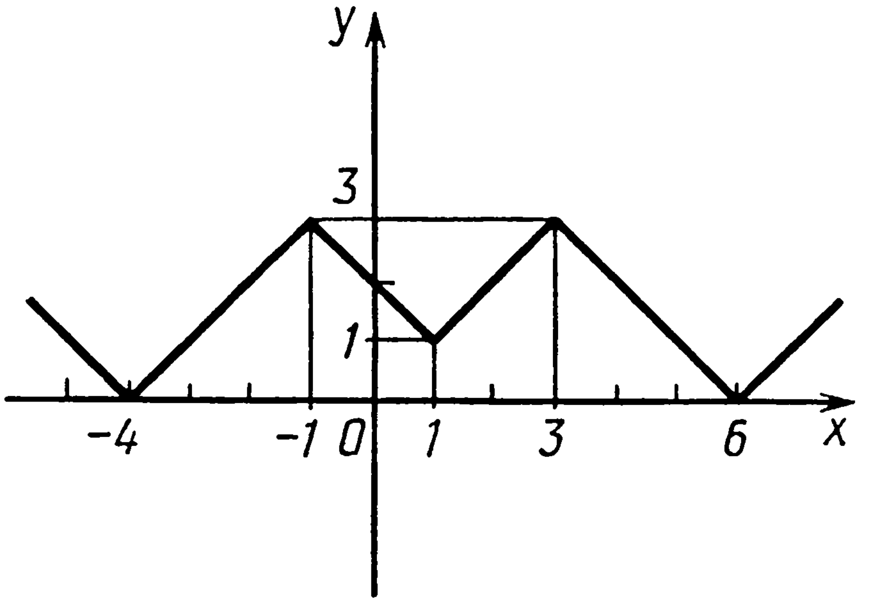


Рис. 133

линию, все звенья которой образуют с осью x углы $\pm 45°$ с вершинами в точках, указанных на рисунке. Следовательно, в представлении данной функции в виде суммы слагаемых вида $k|x-a|$ буква a принимает значения -4, -1, 1, 3, 6. Поскольку график симметричен относительно прямой $x=1$, следует взять равными соответствующие значения k. Итак, будем искать представление в виде $b+k_1(|x+4|+|x-6|)+k_2(|x+1|+$ $+|x-3|)+k_3|x-1|$.

Рассматривая три значения x: -4, -1, 1, получим систему:

$$\begin{cases} 10k_1+10k_2+5k_3+b=0, \\ 10k_1+4k_2+2k_3+b=3, \\ 10k_1+4k_2+b=1, \\ 2k_1+2k_2+k_3=1. \end{cases}$$

162. а) Функция $y=\frac{\ln x}{x}$ имеет наибольшее значение при $x=e$. Значит, $\frac{1}{e}>\frac{\ln 3}{3}$, $e^3>3^e$.

б) Рассмотрим функцию $f(x)=xe^{-ex}$. Она имеет наибольшее значение при $x=\frac{1}{e}$, значит, $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{e}\right)$ и т. д.

в) То, что $\cos 40°<0{,}78$, следует из неравенств $\cos 40°=$ $=\cos(45°-5°)<\cos 45°+\sin 45°\cdot\frac{\pi}{36}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{72}$, $\pi<3{,}15$. Левое неравенство следует из выпуклости вверх функции $y=\cos x$:
$\cos 40°=\cos\left(\frac{1}{3}\cdot 30°+\frac{2}{3}\cdot 45°\right)>\frac{1}{3}\cos 30°+\frac{2}{3}\cos 45°=$
$=\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{2\sqrt{2}}{6}>0{,}75$.

г) Из выпуклости вниз (вогнутости) тангенса при $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ следует, что $\operatorname{tg} 55°<\frac{1}{3}\operatorname{tg} 45°+\frac{2}{3}\operatorname{tg} 60°=\frac{1+2\sqrt{3}}{3}<\frac{1+2\cdot 1{,}75}{3}=$ $=1{,}5$.

Докажем левую часть неравенства. Имеем $\sin 55°>\frac{7}{5}\cos 55°$.

Возводим неравенство в квадрат: $1-\cos 110°>\frac{49}{25}(1+\cos 110°)$,

откуда $\sin 20°=-\cos 110°>\frac{12}{37}$. Далее воспользуемся неравенством $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ (см. вводную часть): $\sin 20° = = \sin\frac{\pi}{9} > \frac{\pi}{9} - \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} > \frac{3{,}141}{9} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} > 0{,}33$, но $\frac{12}{37} < 0{,}33$.

д) Возведем обе части в квадрат: $1 - \cos 2\sqrt{2} > 2\sin 2$ или $1 + \cos(\pi - 2\sqrt{2}) > 2\sin 2$. Далее докажем, что $\cos(\pi - 2\sqrt{2}) > > \cos 0{,}35 > 0{,}93$. В самом деле, $\sin^2 0{,}35 < (0{,}35)^2 < 0{,}13$.

Значит, $\cos^2 0{,}35 = 1 - \sin^2 0{,}35 > 0{,}87$; $\cos 0{,}35 > \sqrt{0{,}87} > 0{,}93$. Таким образом, $1 + \cos(\pi - 2\sqrt{2}) > 1{,}93$.

С другой стороны, $2\sin 2 = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \left(2 - \frac{2\pi}{3}\right)\right) < < 2\left(\sin\frac{2\pi}{3} + \left(2 - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 2\left(\frac{\pi}{3} - 1\right) < 1{,}75 + 0{,}1 = = 1{,}85$.

163. в) Перепишем неравенство в виде $\sin x \geqslant \left(x + \frac{x^3}{3}\right)\cos x$, а затем оценим $\sin x$ снизу, а $\cos x$ — сверху:

$$\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}, \quad \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

г) Поделим обе части неравенства на x и перенесем все в одну часть. Надо доказать, что $f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x} \leqslant 0$ при $x > 1$.

Имеем $f'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} \leqslant 0$.

Значит, $f(x)$ убывает. Но $f(1) = 0$.

д) Оценим $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{6}$, $\cos \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

е) Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$.

Докажем, что эта функция возрастает при $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Имеем $f'(x) = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{x^3} = \frac{2(\sin^3 x - x^3\cos x)}{x^3 \sin^3 x}$.

Из неравенства г) следует, что числитель положителен. При $x = \frac{\pi}{2}$ имеем $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}$. Следовательно,

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \leqslant 1 - \frac{4}{\pi^2} \quad \text{при } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

164. а) Неравенство следует из выпуклости вниз (вогнутости) функции $f(x) = \frac{1}{x}$ и общего неравенства (см. вводную часть).

б) Рассмотрите функцию $f(x) = x^k$.

165. Если $0<a<e^{-\frac{1}{e}}$, три корня; при $e^{-\frac{1}{e}}\leqslant a<1$ один корень; если $1<a<e^{\frac{1}{e}}$, два корня; если $a=e^{\frac{1}{e}}$, один корень; если $a>e^{\frac{1}{e}}$, решений нет.

Указание. Рассмотрим случай $a>1$. Имеем две монотонно возрастающие взаимно обратные функции: $y=a^x$ и $y=\log_a x$. Эти функции пересекаться могут лишь на прямой $y=x$, а поскольку каждая из них может пересекаться с прямой не более чем в двух точках, то, значит, при $a>1$ число решений данного уравнения может равняться 0, 1 или 2. Число решений равно 1, если каждая из функций касается прямой $y=x$, т. е. существует такая точка $(x_0; y_0)$, что $y_0=a^{x_0}=x_0$ и $y_0'=a^{x_0}\ln a=1$.

Значит, $x_0=\frac{1}{\ln a}=\log_a e$ и $a^{\log_a e}=\log_a e$, $e=\log_a e$, $a=e^{\frac{1}{e}}$.

Таким образом, если $1<a<e^{\frac{1}{e}}$, решений два; если $a=e^{\frac{1}{e}}$, решение одно; если $a>e^{\frac{1}{e}}$, решений нет.

Рассмотрим случай $0<a<1$. В этом случае функции a^x и $\log_a x$ убывают, их графики симметричны относительно прямой $y=x$. Значит, симметричны их точки пересечения, причем всегда есть одна точка пересечения, расположенная на этой прямой. Значит, число решений нашего уравнения при $0<a<1$ нечетно. Докажем, что оно равно 1 или 3. Пусть их больше трех. Данное уравнение эквивалентно уравнению $f(x)=x-\log_a\log_a x=0$. Тогда уравнение $f'(x)=1-\frac{1}{x\log_a x\cdot\ln^2 a}=0$ имеет больше двух корней. Столько же (больше двух) имеет эквивалентное ему уравнение $\varphi(x)=\log_a x-\frac{1}{x\ln^2 a}=0$. Значит, уравнение $\varphi'(x)=$ $=\frac{1}{x\ln a}+\frac{1}{x^2\ln^2 a}=0$ имеет более одного корня, но последнее уравнение имеет один корень: $x=-\frac{1}{\ln a}$.

Итак, число корней равно 1 или 3. Обозначим через $(m; m)$ точку пересечения графиков функций $f_1(x)=a^x$ и $f_2(x)=\log_a x$ с прямой $y=x$, т. е. $a^m=m=\log_a m$. Пусть $k=f_1'(m)$, $\frac{1}{k}=f_2'(m)$. Докажем, что если $k>-1$, корень уравнения один; если же $k<-1$, корней три.

Пусть $k>-1$, $x>m$. Вблизи к точке $x=m$ $f_1'(x)>f_2'(x)$, т. е. $f_1(x)>f_2(x)$ (рис. 134). Поскольку при $x\geqslant 1$ также $f_1(x)>f_2(x)$, то всюду $f_1(x)\geqslant f_2(x)$. Иначе при $x>m$ было бы две точки пересечения (по крайней мере) и столько же при $0<x<m$. И всего их было бы более трех. Пусть найдется еще одна точка, где $x=n$,

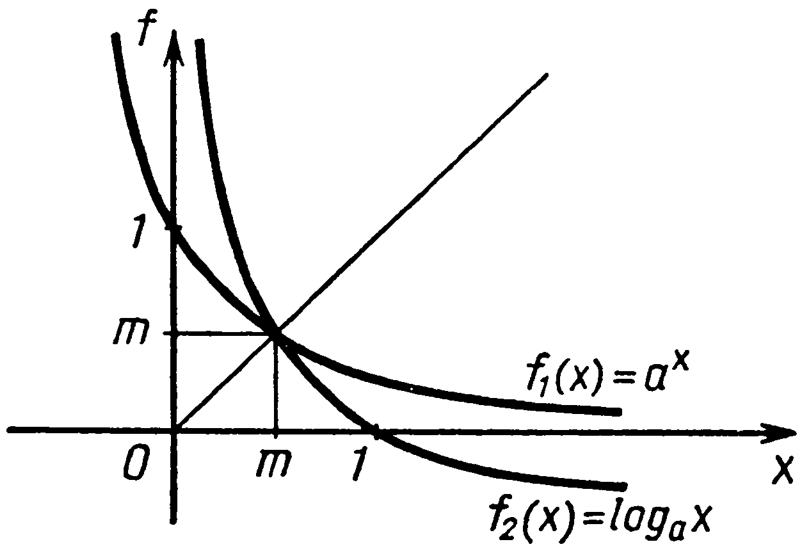


Рис. 134

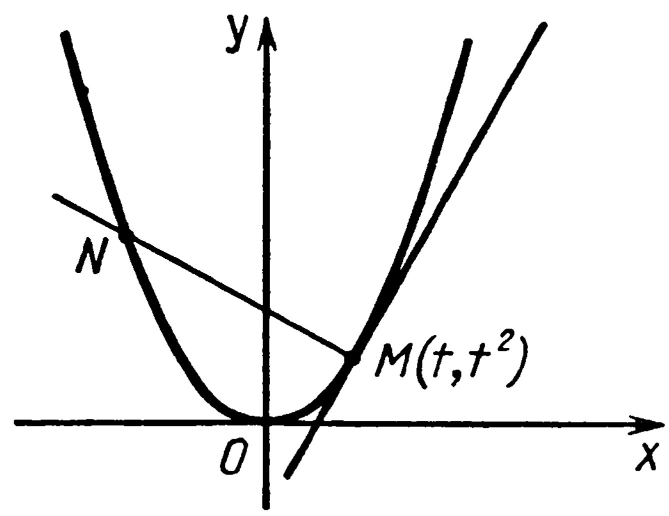


Рис. 135

$f_1(n)=f_2(n)$. Значит, при $x \geqslant m$ всюду $a^x \geqslant \log_a x$ и $a^m=\log_a m$, $a^n=\log_a n$. Из этого следует, что при $m \leqslant x < 1$ будет $f(x)=x-\log_a \log_a(x) \leqslant 0$ и обратится в нуль в точках m и n. Таким образом, n есть точка локального минимума и $f'(n)=0$. Кроме того, есть еще одно значение x между m и n, где $f'(x)=0$. То же было бы и при $0<x<m$. Значит, $f'(x)=0$ в четырех точках, что невозможно. Можно доказать, что при $k<-1$ корней будет три (зная, что их не более трех). Осталось найти a, при котором если $a^m=m$, то $a^m \ln a=-1$. Имеем $a^m=-\frac{1}{\ln a}=-\log_a e=m$, $a^{-\log_a e}=-\log_a e$, $\frac{1}{e}=\log_a \frac{1}{e}$, $a=e^{-\frac{1}{e}}$. (При $a=e^{-\frac{1}{e}}$ число решений 1. Докажите.) Таким образом, если $0<a<e^{-\frac{1}{e}}$, уравнение имеет три корня; если $e^{-\frac{1}{e}} \leqslant a<1$, уравнение имеет один корень.

166. $\frac{4}{3}$. Указание. Пусть $M(t; t^2)$ — некоторая точка на параболе $y=x^2$, $t>0$ (рис. 135). Угловой коэффициент касательной в этой точке равен $2t$. Тогда угловой коэффициент прямой, ей перпендикулярной, равен $-\frac{1}{2t}$, а уравнение перпендикуляра

$$y=t^2-\frac{1}{2t}(x-t),\ y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}.$$

Найдем вторую точку пересечения N перпендикуляра с параболой $y=x^2$. Получаем уравнение $x^2=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$, $x^2+\frac{1}{2t}x-t^2-\frac{1}{2}=0$. Один корень этого уравнения $x_1=t$ (точка M), второй корень будет $x_2=-t-\frac{1}{2t}$. Площадь сегмента равна $S=\int\limits_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}(y_1-y_2)\,dx$, где $y_1=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$; $y_2=x^2$.

Имеем $\int\limits_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}\left(-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}-x^2\right)dx=$

$$=-\frac{1}{2t}\cdot\frac{x^2}{2}+\left(t^2+\frac{1}{2}\right)x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}=\frac{4}{3}t^3+t+\frac{1}{4t}+\frac{1}{48t^3}=$$
$$=\frac{4}{3}\left(t^3+\frac{1}{64t^3}\right)+t+\frac{1}{4t}=\frac{4}{3}\left(t+\frac{1}{4t}\right)^3.$$

Наименьшее значение будет при $t=\frac{1}{2}$

§ 4. Нестандартные задачи

1. а) $-2-\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}}\leqslant x<0$, б) $-1-\sqrt{1-\cos 5}<x\leqslant-\frac{1}{3}$

Указание а) Пусть $f(x)=\cos\frac{3}{2}-4x-x^2$. Так как $\frac{\pi}{3}<\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{\pi}{3}>\cos\frac{3}{2}>\cos\frac{\pi}{2}$, т е $0<\cos\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$ Поэтому $f\left(-\frac{21}{5}\right)=\cos\frac{3}{2}-\frac{21}{25}<0$, а $f(0)=\cos\frac{3}{2}>0$. Отсюда по свойству квадратного трехчлена $\cos\frac{3}{2}-4x-x^2$ решение задачи определяется условием $x_1\leqslant x<0$, где x_1 есть «левый» корень этого трехчлена, т е $x_1=-2-\sqrt{4+\cos\frac{3}{2}}$

2. а) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$,

б) $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$

Указание

а) Так как $y=\frac{\pi}{3}(\sin x+\sqrt{3}\cos x)=$ $=\frac{2\pi}{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, то y принимает все значения из промежутка $-\frac{2\pi}{3}\leqslant y\leqslant\frac{2\pi}{3}$. Логарифмическое уравнение (2) относительно $\operatorname{tg}y$ равносильно уравнению $\operatorname{tg}y=-\sqrt{3}$, откуда для y получаем совокупность двух значений $y=-\frac{\pi}{3}$ и $y=\frac{2}{3}\pi$

Соответственно и для значений x

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}\text{ и }\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$$

3. а) $n=6, 7, 8$, б) $n=-2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 11$

Указание а) Так как $0<\frac{2\pi}{7}<\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, то $\frac{1}{2}<$ $<\cos\frac{2\pi}{7}<1$. Отсюда основание логарифма $2\cos\frac{2\pi}{7}-n+8$ при $n=9$ положительно и меньше единицы, а для остальных допустимых значений n больше единицы (область определения для целых значений n определяется условием $-3 \leqslant n \leqslant 9$). При $n=9$ исходное неравенство, очевидно, ложно, а для остальных решаем систему (n — целое) $\begin{cases} -3 \leqslant n \leqslant 8, \\ \dfrac{\sqrt{n+5}-1}{\sqrt{10-n}} \geqslant 1. \end{cases}$

4. а) $(3, -4)$; $(4, -5)$; б) $(-7, 7)$; $(-6, 6)$.

Указание. а) Выделим в левой части первого неравенства полные квадраты по x и по y. Получим $2(x-3)^2+2(y+5)^2<3$. Затем выписываем все целые (x, y), удовлетворяющие этому неравенству (всего их 5), и отбираем те, которые удовлетворяют второму.

5. а) $-\sqrt[4]{2}<x<-1$ и $x \neq \dfrac{-1-\sqrt{1+16k}}{16}$, где $k=15, 16, \ldots, 20$;

$1<x<\sqrt[4]{2}$ и $x \neq \dfrac{-1+\sqrt{1+16l}}{16}$, где $l=19, 20, \ldots, 25$;

б) $1<x<\sqrt[4]{2}$ и $x \neq \dfrac{1+\sqrt{1+13k}}{13}$, где $k=12, 13, 14, 15, 16$;

$-\sqrt[4]{2}<x<-1$ и $x \neq \dfrac{1-\sqrt{1+13l}}{13}$, где $l=16, 17, 18, 19, 20$.

Указание. а) Задача равносильна решению системы $\begin{cases} 3x^4-2-x^8>0, \\ \sin(\pi(2x+16x^2)) \neq 0, \end{cases}$ которая равносильна совокупности двух систем:
$\begin{cases} -\sqrt[4]{2}<x<-1, \\ 16x^2+2x-k \neq 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 1<x<\sqrt[4]{2}, \\ 16x^2+2x-k \neq 0, \end{cases}$
где k — целое число.

Так как абсцисса вершины параболы трехчлена $16x^2+2x$ равна $\left(-\dfrac{1}{16}\right)$, то $f(x)=16x^2+2x$ монотонна на каждом из интервалов $(-\sqrt[4]{2}; -1)$ и $(1; \sqrt[4]{2})$. Следовательно, решаем неравенства относительно целочисленной переменной k: $f(-1)<k<f(-\sqrt[4]{2})$ и $f(1)<k<f(\sqrt[4]{2})$ и исключаем им соответствующие значения x из найденных интервалов («левый» корень для первой системы, «правый» корень для второй системы).

6. а) $(-1)^k \arcsin \dfrac{1}{3}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; б) $\pm \arccos \dfrac{2}{5}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Указание. а) Задача равносильна решению системы данных уравнений, каждое из которых сводится к кубическому относительно $\sin x$:

$$\begin{cases} 6\sin^3 x+10\sin^2 x+14\sin x-6=0, \\ 6\sin^3 x+\sin^2 x+2\sin x-1=0. \end{cases}$$

Вычитая, получаем как следствие уравнение $9\sin^2 x+12\sin x-5=0$, т. е. $\sin x=\dfrac{1}{3}$. Так как полученное равенство есть следствие, то либо оно определяет искомые решения, либо решений нет.

Поэтому необходима проверка исходных условий для найденных x.

7. а) $x<-2$; $-2<x<2-\sqrt{15}$; $6\leqslant x$;

б) $x\leqslant -2$; $1+\sqrt{8}<x<4$; $x>4$.

Указание. а) Неравенство равносильно следующему:

$$\left(2-\frac{3}{\log_7 18}\right)\frac{\log_5(x^2-4x-11)}{3x^2+5x-2}\leqslant 0,$$

которое равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 3x^2+5x-2>0, \\ x^2-4x-11\geqslant 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3x^2+5x-2<0, \\ 0<x^2-4x-11\leqslant 1, \end{cases}$$

так как $2-\frac{3}{\log_7 18}<0$.

8. а) 7; б) -1.

Указание. а) Перенесем все радикалы в левую часть и разложим ее на множители. Получим $(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2})=4$. Умножим обе части на $(\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2})$ получим $\sqrt{2x-1}-3=\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}$. Далее возводим в квадрат и т. д.

9. $\frac{1}{2}$. Указание. Поскольку $\dfrac{8\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{3}}=4\sin\frac{2\pi x}{3}$, то наше уравнение приведется к виду $|5-6x|=4\sin\frac{\pi x}{3}$. Построим график левой и правой частей. Разбирая два случая $x<\frac{5}{6}$ и $x\geqslant\frac{5}{6}$, докажем, что в каждом случае существует единственное значение x, удовлетворяющее последнему уравнению (из соображений монотонности). Эти значения подбираются. $x=\frac{3}{2}$ не входит в область определения исходного уравнения.

10. а) 2; б) 2. Указание. а) При всех x будет $4x-x^2-3\leqslant 1$ и $0\leqslant\log_2(\cos^2\pi x+1)\leqslant 1$. Значит, каждый множитель равен 1.

11. $\frac{3}{5}\leqslant x\leqslant 1$. Указание. Сделаем замену $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, откуда $x=\frac{1-y^2}{1+y^2}$. Получаем неравенство $\frac{1-y^2}{1+y^2}(8y+1)\leqslant 11-16y$ или $4y^3-6y^2+12y-5\leqslant 0$. Один корень многочлена, расположенного в левой части, подбирается: $y=\frac{1}{2}$ (X, § 3). Затем этот многочлен раскладываем на множители.

12. $x\geqslant 1$. Указание. Левая часть — монотонно возрастающая функция.

13. $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 2$. Указание. Рассмотрите графики левой и правой частей.

14. а) $1+\sqrt{11+4\sqrt{3}}$, $1-\sqrt{11+4\sqrt{3}}$;

б) $2+\sqrt{14+4\sqrt{3}}$, $2-\sqrt{14+4\sqrt{3}}$.

Указание. а) Возведя в квадрат основания обоих логарифмов, получим равносильное уравнение

$$\log_{8+4\sqrt{3}}(x^2-2x-2)=\log_{7+4\sqrt{3}}(x^2-2x-3),$$

которое можно переписать в виде $\log_a(a+1)=\log_b(b+1)$, где $a=x^2-2x-3$, $b=7+4\sqrt{3}$. Так как функция $\varphi(t)=\log_t(t+1)$ монотонна (см. задачу 3 вводной части), то $\varphi(a)=\varphi(b)$ равносильно $a=b$, т. е. получаем уравнение $x^2-2x-3=7+4\sqrt{3}$, равносильное исходному.

15. а) 1; б) 1. Указание. а) Уравнение можно переписать в виде $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}+1)+1}$. Оно имеет вид $x=f(f(x))$, где $f(x)=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}+1)$, $f(x)$ — монотонно возрастает. Следовательно, уравнение эквивалентно $x=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x}+1)$. Заменим $\sqrt[3]{x}=y$. Будем иметь $2y^3-y-1=0$, откуда $y=1$.

16. а) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$; б) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

Указание. а) Перепишем уравнение в виде $\cos 3x+\sin 3x=$ $=3\sqrt{2}+2\cos x+2\sin 18x\sin x$. Воспользуемся в левой и правой частях неравенством $-\sqrt{a^2+b^2}\leqslant a\cos z+b\sin z\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ (см. § 1). В частности, $2\cos x+2\sin 18x\sin x\geqslant-\sqrt{4+4\sin^2 18x}\geqslant$ $\geqslant-2\sqrt{2}$. Левая часть не больше $\sqrt{2}$, правая не меньше $\sqrt{2}$. Равенство получится, если $\cos 3x+\sin 3x=\sqrt{2}$, $\sin 18x=\pm 1$, $\cos x\pm\sin x=-\sqrt{2}$.

17. $\frac{\pi}{2}+\pi k$. Указание. Обозначим $t=1-\frac{1}{8}\cos^2 x$. Тогда $\sin^2 x=8t-7$. Имеем уравнение $t^8=8t-7$. Но прямая $y=8t-7$ является касательной к функции $y=t^8$ в точке $t=1$.

18. а) 1; 3; б) $10^{0,01}$; $10^{-0,02}$. Указание. Докажите, что уравнение $a^x=kx+b$ $(a\neq 1)$ может иметь не более двух корней (см. § 3).

19. а) $-1<x<0$, $x>2$; б) $x\leqslant-2$, $-\sqrt[3]{7}<x\leqslant 1$.

Указание. а) Рассмотрим два случая: $x<0$ и $x>0$. В обоих случаях левая часть монотонно возрастает.

20. $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Указание. Обозначим $x-y=z$, $x-2\sqrt{x}+$ $+2=u$ $(u\geqslant 1)$. Будем иметь $z^2+(u-z)^2=\frac{1}{2}$, или $2z^2-2uz+$

$+u^2-\frac{1}{2}=0$, откуда $\frac{1}{4}D=u^2-2\left(u^2-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0$, $u^2\leqslant 1$. Значит, $u=1$ и т. д.

21. $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$.

Указание. I *способ.* Преобразуйте сумму $\cos x+\cos y$ в произведение и $\cos(x+y)$ в выражение $2\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right)-1$ и рассмотрите полученное уравнение как квадратное относительно $\cos\frac{x+y}{2}$.

II *способ.* Преобразуем левую часть к виду $(1-\cos y)\cos x+$ $+\sin y\sin x+\cos y$ и оценим ее ($a\cos x+b\sin x\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$), она не превосходит $\sqrt{(1-\cos y)^2+\sin^2 y}+\cos y=\sqrt{2-2\cos y}+$ $+\cos y=1-2\sin^2 y+2\left|\sin\frac{y}{2}\right|=\frac{3}{2}-2\left(\left|\sin\frac{y}{2}\right|-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{2}$. Равенство, если $\left|\sin\frac{y}{2}\right|=\frac{1}{2}$ и т. д.

22. $\left(\frac{\pi}{4}(2k+1),\ \frac{\pi}{4}(4m-2k+1)\right)$. Указание. Докажите, что левая часть больше или равна 4, а правая — меньше или равна 4.

23. а) $\left(1;\ 1+\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$; б) $\left(2;\ \pm\frac{2\pi}{3}-2+2\pi n\right)$. Указание. а) Пользуясь формулами $2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$ и $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$, преобразуйте уравнение к квадратному относительно $\cos(x-y)$ и исследуйте его дискриминант.

24. а) (0; 1); б) (1; 0). Указание. а) Область определения: $y\geqslant x^2+1$, т. е. $y\geqslant 1$. Поскольку $\cos x\leqslant 1$, $y^2\geqslant 1$, $\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0$, то левая часть неположительна и равна нулю при $x=0$, $y=1$.

25. а) $(-1;\ -3)$, $(3;\ -3)$; б) (2; 0), (6; 0). Указание. а) Уравнение системы преобразуется к виду $2^{|x^2-2x-3|}=3^{-y-3}$. Так как $2^{|x^2-2x-3|}\geqslant 2^0=1$, то $3^{-y-3}\geqslant 1$, откуда $y\leqslant -3$, что позволяет определить знаки величин под модулем в неравенстве системы и найти y.

26. $(\pm 2;\ \pm 9)$. Указание. Из уравнения следует, что $y=$ $=2x+\frac{10}{x}\geqslant 2\sqrt{2x\frac{10}{x}}=2\sqrt{20}$ (воспользовались неравенством $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$). Значит, $y^2\geqslant 80$. Тогда для x возможны значения ± 1, ± 2, ± 3, поскольку $x^2\leqslant 90-y^2\leqslant 10$.

27. а) $\left(-\frac{3}{2};\ \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right)$; б) $\left(\frac{1}{3};\ -3\right)$, $\left(3;\ -\frac{1}{3}\right)$.

Указание. а) Так как равенство $|a|+|b|=a+b$ равносильно неотрицательности чисел a и b, то первое уравнение равносильно системе неравенств $y+\frac{1}{x}\geqslant 0$ и $\frac{13}{6}+x-y\geqslant 0$, или $-\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant\frac{13}{6}+x$. Отсюда с учетом условий $x<0$ и $y>0$ для значений x получаем ограничения: $\begin{cases} -\frac{1}{x}\leqslant\frac{13}{6}+x, \\ x<0, \\ x^2+\left(\frac{13}{6}+x\right)^2\geqslant\frac{97}{36}, \end{cases}$

из которых следует, что $x=-\frac{3}{2}$ или $x=-\frac{2}{3}$ и т. д.

28. а) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi(n+k);\ -\frac{\pi}{3}+\pi(n-k),\ 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi(n+k),\ \frac{\pi}{3}+\pi(n-k),\ 2\pi n\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+\pi(n+k),\ \frac{\pi}{3}+\pi(n-k),\ \pi+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+\pi(n+k),\ \frac{2\pi}{3}+\pi(n-k),\ \pi+2\pi n\right)$;

б) $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(n+k),\ -\frac{5}{12}\pi+\pi(n-k),\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi(n-k),\ -\frac{7}{12}\pi+\pi(n-k),\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi(n+k),\ \frac{5}{12}\pi+\pi(n-k),\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(n+k),\ \frac{7}{12}\pi+\pi(n-k),\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$.

Указание. а) Преобразовав произведение $\cos x\cos y$ в сумму, перепишем первое уравнение системы в виде квадратного относительно $\cos(x-y)$, из неотрицательности дискриминанта получим, что $\cos^2(x+y)=1$. Отсюда следует, что исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos(x+y)=-1, \\ \cos(x-y)=\frac{1}{2}, \\ x+y=z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos(x+y)=1, \\ \cos(x-y)=-\frac{1}{2}, \\ x+y=z. \end{cases}$$

29. а) $\left(\frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+16}},\ \frac{\sqrt{\pi^2+16}}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}},\ \frac{-\sqrt{\pi^2+16}}{4}\right)$, $\left(\frac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+9}},\ \frac{\sqrt{\pi^2+9}}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+9}},\ \frac{-\sqrt{\pi^2+9}}{3}\right)$;

б) $\left(-\sqrt[3]{\frac{(4-\pi)}{4}},\ \frac{-\pi}{2\sqrt[3]{2(4-\pi)}}\right)$,

$$\left(-\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}},\ -\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{1-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}\right).$$

Указание. а) Первое уравнение системы на основании формул $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ и $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ сводится к однородному тригонометрическому уравнению

$$\sin^2(xy)+(\sqrt{3}+1)\sin(xy)\cos(xy)+\sqrt{3}\cos^2 xy=0,$$

а второе уравнение и очевидное равенство $x^2=\frac{(xy)^2}{y^2}$ позволяют выразить квадраты x и y (а следовательно, и сами x и y) через xy — аргумент тригонометрических функций:

$$y^2=(xy)^2+1,\quad x^2=\frac{(xy)^2}{(xy)^2+1}.$$

Полученные выражения для x^2 и y^2 после их подстановки в неравенство системы определяют область изменения xy.

30. а) $(-1;2)$, $(-1;-2)$; б) $(2;-1)$, $(-2;-1)$.

Указание. а) Так как при любом x величина $5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}$ больше нуля (докажите, воспользовавшись неравенством $|A\sin 2x+B\cos 2x|\leqslant\sqrt{A^2+B^2}$ или, исследуя соответствующую функцию, средствами анализа), а $(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5\pi}{4}\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\pi^2-\frac{5\pi^2}{4}=0$, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sqrt{2-|y|}=0,\\ |\arcsin x|=\frac{\pi}{2},\\ |\arccos x|=\pi,\quad \text{т. е. } |y|=2 \text{ и } x=-1.\end{cases}$$

31. а) $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},1,1\right)$; $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},7,-9\right)$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},2,0\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-1{,}5\right)$.

Указание. а) Оба подкоренных выражения равны нулю. Рассматривая второе как квадратное относительно x, найдем

$$\frac{1}{4}D=3(\cos\pi y+\cos\pi z)^2-12\geqslant 0.$$

Следовательно, $|\cos\pi y+\cos\pi z|\geqslant 2$, $\cos\pi y=\cos\pi z=\pm1$,

$$x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Возникают два случая: 1) $y=2k$, $z=2m$, $x=2\frac{\sqrt{3}}{3}$. Выражение под первым корнем равно $-8k^2+8m^2+20m+12k-14=0$. Равенство невозможно, поскольку все члены, кроме последнего, кратны 4;

2) $y=2k+1$, $z=2m+1$, $x=-2\frac{\sqrt{3}}{3}$. Первое уравнение даст

нам $-2k^2+2m^2+k+7m=0$, или $2(m-k)(m+k)+k+7m=0$. Положим $m-k=u$, $m+k=v$, тогда $m=\frac{u+v}{2}$, $k=\frac{v-u}{2}$. Будем иметь $2uv+4v+3u=0$, откуда $(2v+3)(u+2)=6$. Это уравнение имеет два решения в целых числах, дающие целые значения m и k: $u=v=0$, т. е. $m=k=0$, и $u=-8$, $v=-2$, т. е $m=-5$, $k=3$.

32. а) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ -1\right)$, n — целое число; б) $(\pi n;\ 1)$, n — целое число.

Указание. а) Рассматривая второе уравнение как квадратное относительно y, получите равенство $(6t^2-25t+24)y^2+$ $+(2t^2-6t+8)y-t=0$, где $t=4^{\sin^2 x}$.

Случай $6t^2-25t+24=0$, т. е. $t=\frac{8}{3}$ или $t=\frac{3}{2}$, означает, что $y=\frac{3}{7}$, что несовместно с первым уравнением системы (докажите!). Поэтому найдите y как корень полученного трехчлена: $y=\frac{t}{8-3t}$ и $y=\frac{1}{2t-3}$, откуда $\frac{y}{1+3y}$ равно соответственно $\frac{t}{8}$ и $\frac{1}{2t}$, т. е. число под знаком логарифма равно соответственно $|\sin x|\cdot 2^{2\sin^2 x-3}$ и $|\sin x|\cdot 2^{-2\sin^2 x-1}$.

Далее из первого уравнения системы и условия $|y|\leqslant 1$ докажите, что $y=-1$, и т. д.

33. а) $\left(-\frac{1}{2};\ -1\right)$; б) $\left(-2;\ \frac{3}{2}\right)$, $\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$.

Указание. а) Оценим правую часть первого, а затем второго соотношения.

Имеем $\sqrt{xy-x^2y^2}=\sqrt{-\left(xy-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\leqslant\frac{1}{2}$,

$$2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2}\geqslant 2x^2+1.$$

Получаем систему $\begin{cases} y^6+y^3+2x^2\leqslant\frac{1}{2}, \\ 4xy^3+y^3\geqslant 2x^2+\frac{1}{2}. \end{cases}$

Вычтем почленно эти неравенства:

$$y^6-4xy^3+4x^2\leqslant 0 \text{ или } (y^3-2x)^2\leqslant 0.$$

Следовательно, это и все предыдущие неравенства должны обратиться в равенства, т. е. $y^3-2x=0$, $2x-y=0$, $xy-\frac{1}{2}=0$ и т. д.

34. а) $(4;\ -3;\ 0)$, $(2;\ -1;\ 2)$; б) $(2;\ -3;\ 3)$, $(1;\ 0;\ 0)$.

Указание. а) Условия существования корней квадратных относительно y и x второго и третьего уравнений соответственно равносильно неотрицательности их дискриминантов, зависящих от z, что наряду с условием $z \geqslant 0$ определяет только два возможных значения для z: $z=0$ или $z=2$. Для каждого из них находим значения остальных переменных.

35. а) $(3; 3; 3)$; б) $(-1; -1; -1)$; в) $(1; 1; 1)$, $(-2; -2; -2)$.

Указание. а) Докажем, что $y=x=z=3$. Перейдем к новым неизвестным. $x=3+u$, $y=3+v$, $z=3+w$. Получаем систему

$$\begin{cases}(v^2+9v+27)\,v=9u\,(u+3),\\(w^2+9w+27)\,w=9v\,(v+3),\\(u^2+9u+27)\,u=9w\,(w+3).\end{cases}$$

Пусть $u \neq 0$, для определенности $u>0$. Из первого уравнения следует, что $v>0$ (так как $v^2+9v+27>0$ при всех v), а из второго $w>0$. Таким образом, из положительности одного неизвестного следует положительность всех. Значит, если отрицательно одно, то отрицательны все.

Сложив все три уравнения, получим $u^3+v^3+w^3=0$. Противоречие.

в) Положим $f(x)=\sqrt[3]{3x-2}$, $f(x)$ монотонно возрастает. Имеем $x=f(z)=f(f(y))=f(f(f(x)))$. Это уравнение эквивалентно уравнению $x=f(x)$ (см. вводную часть) и т. д.

36. $\cos\frac{\pi}{9}$, $\cos\frac{5}{9}\pi$, $\cos\frac{4}{9}\pi$.

Указание. Сделаем замену: $x=\cos y$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Будем иметь $\cos 3y=\frac{1}{2}$, откуда $y_1=\frac{\pi}{9}$, $y_2=\frac{7}{9}\pi$, $y_3=\frac{5}{9}\pi$.

37. $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} \pm \frac{1}{3}\arccos\frac{1}{20}\right)+2\pi k$,

$\frac{\pi}{4} \pm \arccos\sqrt{2}\left(-\cos\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{20}\right)+2\pi k$.

Указание. Сделаем замену: $\cos x+\sin x=y$.

Получим $y(3-y^2)+0{,}1=0$; $3y-y^3+0{,}1=0$.

Положим теперь $y=2\cos z$ $(0 \leqslant z \leqslant \pi)$.

Будем иметь $2(3\cos z-4\cos^3 z)+0{,}1=0$; $\cos 3z=-\frac{1}{20}$. Тогда

$z_1=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{20}$, $z_2=\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{20}$,

$z_3=\pi-\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{20}$.

38. $(2; 3)$. Указание. Рассматривая в первом уравнении левую часть как функцию от x с параметром y, запишем ее в виде $f(f(x))$, где $f(x)=\sqrt{x+y^2-7}$. Поскольку $f(x)$ монотонно возрастает, то первое уравнение эквивалентно уравнению $\sqrt{x+y^2-7}=x$.

Преобразуя так же второе уравнение, получим систему $\begin{cases}\sqrt{x+y^2-7}=x,\\ \sqrt{y+x^2+2}=y\end{cases}$ и т. д.

39. $\left(\frac{4t^2-1}{4t}, \frac{25t^2+1}{10t}; t\geqslant\frac{1}{5}\right)$.

Указание. Положим $x+\sqrt{x^2+1}=u$, $y+\sqrt{y^2-1}=v$. Тогда $(\sqrt{x^2+1})^2=(u-x)^2$, $x=\frac{u^2-1}{2u}$, $\sqrt{x^2+1}=u-\frac{u^2-1}{2u}=\frac{u^2+1}{2u}$, $u>0$.

Аналогично $y=\frac{v^2+1}{2v}$, $\sqrt{y^2-1}=\frac{v^2-1}{2v}$, $\frac{v^2-1}{v}\geqslant 0$. Получаем систему
$$\begin{cases}u^2+v^2=\frac{29}{10}uv,\\ v^2-u^2=\frac{21}{10}uv,\\ u>0,\ \frac{v^2-1}{v}\geqslant 0.\end{cases}$$
Ее решение $u=2t$, $v=5t$, $t\geqslant 1$.

40. Указание. Перейти к тригонометрическим функциям аргумента $2x$ по формулам $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ и $2\sin x\cos x=\sin 2x$ и воспользоваться неравенством $|A\sin\alpha+B\cos\alpha|\leqslant\sqrt{A^2+B^2}$ либо исследовать исходную функцию на экстремум средствами анализа.

41. а) (6; 1; 0), (6; -1; 0), (0; -1; 0);

б) (1; 5; 0), (1; -5; 0), (-1; 5; 0), (-1; -5; 0).

Указание. а) Все слагаемые, кроме одного, и сумма кратны 3. Отсюда $z^2=0$ или $z^2=9$ и т. д.

42. Четыре корня. Указание. См. задачу 10 вводной части.

43. 112 корней. Наибольший корень $\left(\frac{10\,387}{4}\right)^2$.

Указание. Получаем уравнение $\pi\sqrt{20\,790+x}-\pi\sqrt{x}=\pi k$, $\sqrt{20\,790+x}-\sqrt{x}=k$. $20\,790=k^2+2k\sqrt{x}$, $\sqrt{x}=\frac{20\,790-k^2}{2k}$.

Из условия $0<k\leqslant\sqrt{20\,790}$ находим, что $k=1, 2, 3, \ldots, 144$. Из этих значений необходимо удалить те значения, при которых $\sqrt{x}=\frac{2m+1}{2}$. Найдем соответствующие k.

Рассмотрим два случая: 1) $k=2n$. Тогда $\sqrt{x}=\frac{10\,395}{2n}-n$. Поскольку $\sqrt{x}=m+\frac{1}{2}$, то n — делитель числа $10\,395=3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$ $n\leqslant 72$. Число делителей, не превосходящих 72, включая 1, нетрудно подсчитать. Их 14.

2) $k=2n+1$, тогда $x=\frac{10\,395}{2n+1}-n-\frac{1}{2}$. На сей раз для n

имеем 18 возможных значений ($2n+1$ — делитель 10 395, и $(2n+1)^2 \leqslant 20\,790$). Всего исключается $32=14+18$ значений k. Наибольший корень будет при $k=4$, $\sqrt{x}=\frac{10\,387}{4}$.

44. а) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pi m\right)$; $\left(\frac{\pi}{2} \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \pi k,\right.$ $\left.\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \pi(2m+1)\right)$; $\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 4 + \frac{\pi}{2}k,\right.$ $\left.\operatorname{arctg} 4 + \pi(k+2m)\right)$.

б) $\left(\frac{\pi}{2}k;\ \pi m\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \pi m\right)$; $\left(\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} -\right.$ $-\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\pi}{2}(2k+1);$ $\left.\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + \pi m\right)$.

Указание. а) По условию составляем систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}(y-x)=\sin y+\cos y \operatorname{ctg} x, \\ 4\cos y \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(y-x)+(\sin y-1)\operatorname{ctg} x. \end{cases}$$

Первое уравнение преобразуем к виду $\frac{\cos(y-x)}{\sin(y-x)}=\frac{\cos(y-x)}{\sin x}$.

Возникают два случая: 1) $\cos(y-x)=0$. Второе уравнение будет иметь вид ($\operatorname{ctg}(y-x)=0$): $4\cos y \operatorname{ctg} x=(\sin y-1)\operatorname{ctg} x$.

Вновь два случая: 1 а) $\operatorname{ctg} x=0$. В этом случае $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $y=x+\frac{\pi}{2}+\pi n=\pi m$;

1 б) $4\cos y=\sin y-1$, $y=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}-\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+$ $+\pi(2m+1)$.

2) $\sin(y-x)=\sin x$. 2 а) $y-x=x+2\pi k$, $y=2x+2\pi k$.

Подставляя во второе уравнение, получим $4\cos 2x \operatorname{ctg} x=$ $=\operatorname{ctg} x+(\sin 2x-1)\operatorname{ctg} x$; откуда $\operatorname{ctg} x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $y=$ $=\pi+2\pi n+2\pi k$. Это решение является частью решения пункта 1 а или $4\cos 2x=\sin 2x$, $\operatorname{ctg} 2x=4$ и т. д.

2 б) $y-x=\pi-x+2\pi k$, $y=\pi+2\pi k$ и т. д.

45. Положим $u=\sqrt{x-1}$, $v=\sqrt[3]{x^2-1}$. Второе неравенство примет вид $u^2+2u+v^2-2v>0$ или $(u+1)^2-(v-1)^2>2$.

Нам надо доказать, что если $u+v>2$, $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, то $(u+1)^2+$ $+(v-1)^2>2$.

Воспользуемся неравенством $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$ (докажите это неравенство).

Имеем $2(u+1)^2+2(v-1)^2\geqslant(u+v)^2>4$.

46. 1) а) — е) Не существует; ж) $a=0$; 2) а) — ж) не существует; 3) а), б) $a>0$; в) $-1<a<\frac{1}{4}$; г) $-\frac{1}{4}<a<1$; д), е) $a<0$; ж) $-1\leqslant a\leqslant 1$; 4) а) $x\geqslant 2$; б), е), ж) x — любое; в) $x>-2$; г) $x<2$; д) $x<-2$; 5) а) — е) $-a$ — любое действительное число; ж) $a\neq 0$; 6) а), б) $a\leqslant 0$; в) $a\leqslant -1$, $a\geqslant\frac{1}{4}$; г) $a\geqslant 1$, $a\leqslant -\frac{1}{4}$; д), е) $a\geqslant 0$; ж) $a<-1$, $a>1$; 7) а) $x\leqslant 2$; б), е), ж) не существует; в) $x\leqslant -2$; г) $x\geqslant 2$; д) $x\geqslant -2$; 8) а), д) не существует; б) $a\geqslant 1$; в) $a=-\frac{1}{4}$; г) $\frac{1}{8}\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$; е) $a\leqslant -1$; ж) $-\frac{1}{4}\leqslant$ $\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$; 9) а), б), д), е) не существует; в) $-1<a\leqslant -\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}\leqslant a<1$; ж) $\frac{1}{2}\leqslant a<1$; $-1<a\leqslant -\frac{1}{2}$; 10) а) a — любое; б) $a\leqslant\frac{1}{4}$; в) $a\leqslant -1$, $a\geqslant\frac{1}{8}$; г) $a\leqslant -\frac{1}{4}$, $a\geqslant 1$; д) a — любое; е) $a\geqslant -\frac{1}{4}$; ж) $a<-1$, $a>1$; 11) а), д) a — любое число; б) $a<1$; в) $a\neq -\frac{1}{4}$; г) $a<\frac{1}{8}$, $a>\frac{1}{4}$; е) $a>-1$; ж) $a<$ $<-\frac{1}{4}$, $a>\frac{1}{4}$.

47. а) $a<-2$, $a>1$; б) $-2<a<3$. **48.** а) $a<6$; б) $a<-4$. **49.** $-8\pi<a<-6\pi$, $6\pi<a<8\pi$. **50.** а) $\frac{1}{2}<a<1$; б) $2<a<8$. **51.** а) Если $a<0$, то $x=2\log_2|a|$; если $a=0$, решений нет; если $a>0$, то $x_1=\log_2 a$, $x_2=2\log_2 a$. б) Если $a<0$, то $x_1=3\log_5|a|$, $x_2=2\log_5|a|$; если $a=0$, решений нет; если $a>0$, то $x=2\log_5 a$. **52.** Если $0<a\leqslant 1$, то $-a\leqslant x<0$ и $0<x<\frac{2a\sqrt{a}}{a+1}$; если $a>1$, то $-a\leqslant x<0$ и $0<x\leqslant a$. **53.** а) Если $a<0$, то $x<\log_3(-a)$; если $a>0$, то $x<-2+\log_3 a$; при $a=0$ решений нет. б) Если $a<0$, то $x<\log_2(-a)-1$; если $a>0$, то $x<\log_2 a-2$; при $a=0$ решений нет.

54. Если $|a|\geqslant\sqrt{2}$, решений нет; если $1\leqslant|a|<\sqrt{2}$, $0<x<$ $<\sqrt{2-a^2}$; если $|a|<1$, то $0<x\leqslant 1-\sqrt{1-a^2}$ и $\sqrt{2-a^2}<x\leqslant 1+$ $+\sqrt{1-a^2}$. Указание. На рисунке 136 изображено решение неравенства на плоскости (x, a).

55. Если $a\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $0<x<\frac{1}{3a}$, $a<x<2a$; если $\frac{1}{\sqrt{6}}\leqslant a<$

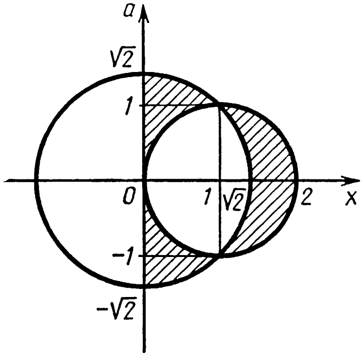


Рис. 136

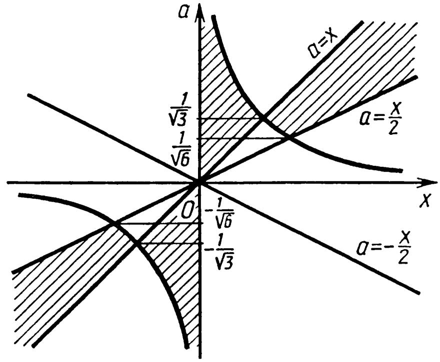


Рис. 137

$<\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $0<x<a$, $\frac{1}{3a}<x<2a$; если $0<a<\frac{1}{\sqrt{6}}$, то $0<x<a$; если $a=0$, решений нет; если $-\frac{1}{\sqrt{6}}<a<0$, то $a<x<0$; если $-\frac{1}{\sqrt{3}}<a\leqslant-\frac{1}{\sqrt{6}}$, то $a<x<0$, $2a<x<\frac{1}{3a}$; если $a\leqslant-\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $\frac{1}{3a}<x<0$, $2a<x<a$. Указание. См. рис. 137.

56. Если $0<|a|<1$, $|a|=\sqrt{2}$, решений нет; при остальных a получим $x=\pm 1$.

57. $x=a^{-2}$ и $x=a^{-\frac{1}{2}}$ при $a>0$ и $a\neq 1$; при остальных a решений нет.

58. а) При $a=\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{\pi}{2}+2\pi n$ получим $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, при $a=-\arcsin\frac{2}{\sqrt{7}}-\frac{\pi}{2}+2\pi n$ имеем $x=-\frac{5}{6}\pi+2\pi k$. При остальных a решений нет; б) при $a=\frac{5}{6}\pi+2\pi n$ получим $x=\frac{\pi}{6}+$ $+2\pi k$, при $a=-\frac{5}{6}\pi+2\pi n$ получим $x=\frac{5}{6}\pi+2\pi k$. При остальных a решений нет.

Указание. а) Оценим левую часть $(A\cos\varphi+B\sin\varphi\leqslant\leqslant\sqrt{A^2+B^2})$: $4\cos x\sin a+(2\sin x-3)\cos a\leqslant$

$$\leqslant\sqrt{16\cos^2 x+(2\sin x-3)^2}=\sqrt{28-12\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2}\leqslant 2\sqrt{7}.$$

59. Задача имеет решение при $|a|\leqslant\sqrt{2}-1$:

$$x=\pi n+(-1)^n\arcsin(a^2\pm 2a),\ y=2\pi k\pm\arccos(a^2\pm 2a).$$

Выбор знака под символом arccos противоположен знаку под символом arcsin. Знак перед arccos произволен.

60. Если $\sqrt{2}-1 \leqslant a \leqslant 1$, то $x=\frac{1}{2}(\pm\arccos(2a-a^2)\pm$
$\pm\arccos(2-2a-a^2))+\pi(k+n)$, $y=\frac{1}{2}(\pm\arccos(2a-a^2)-$
$-(\pm\arccos(2-2a-a^2)))+\pi(k-n)$.

Выбор знаков произволен (4 варианта), но одинаковый для x и y. При остальных a решений нет.

61. а) Если $|a| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, решений нет; если $\frac{1}{\sqrt{2}} < |a| \leqslant 1$, $\frac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$; если $|a| > 1$, $-|a| \leqslant x <$ $< \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$.

б) Если $a \leqslant -1$, решений нет; если $-1 < a \leqslant 1$, $\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2} < x \leqslant 1$; если $1 < a \leqslant \sqrt{2}$, $-1 \leqslant x < \frac{-a-\sqrt{2-a^2}}{2}$ и $\frac{-a+\sqrt{2-a^2}}{2} < x \leqslant 1$; если $a > \sqrt{2}$, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Указание. а) На плоскости (x, y) рассмотрим прямую $y=x+1$ и семейство полуокружностей $y=\sqrt{a^2-x^2}$ (центр в начале координат, радиус $|a|$, рис. 138). Легко определяются граничные значения для a: $|a|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (полуокружность касается прямой) и $|a|=1$ (прямая проходит через один из концов полуокружности). Понятно, что при $|a| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ полуокружность ниже прямой (или касается), решений нет, и т. д.

б) Как и в пункте а), только вместо семейства полуокружностей семейство прямых.

62. а) При $a=\frac{1}{3}$ $x=1$, при остальных значениях a решений нет. б) При $a=2$ $x=-1$, при остальных значениях a решений нет.

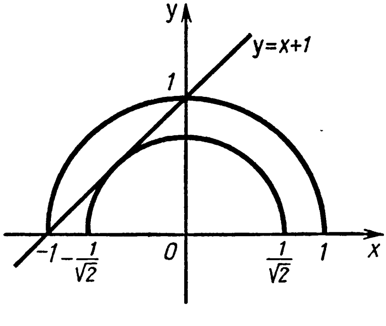


Рис. 138

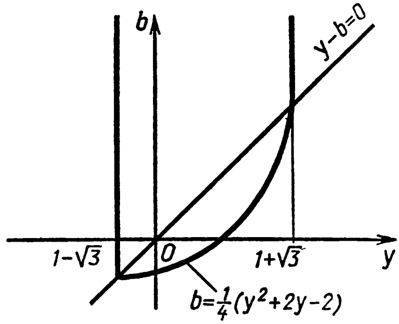


Рис. 139

Указание. а) Уравнение приводится к виду

$$(a+2)^2\log_3(2x-x^2)+(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0,$$

где оба логарифма в области определения неположительны (докажите!), а коэффициенты при них неотрицательны, поэтому уравнение равносильно системе $\begin{cases}(a+2)^2\log_3(2x-x^2)=0,\\(3a-1)^2\log_{11}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=0.\end{cases}$

63. а) Если $a<10^{1-\sqrt{3}}$, решений нет; если $a=10^{1-\sqrt{3}}$, то $x=10^{1-\sqrt{3}}$; если $10^{1-\sqrt{3}}<a<10^{1+\sqrt{3}}$, $x_1=10^{1-\sqrt{3}}$, $x_2=10^{-1+\sqrt{3+4\lg a}}$; если $a\geqslant 10^{1+\sqrt{3}}$, $x_1=10^{1-\sqrt{3}}$, $x_2=10^{1+\sqrt{3}}$.

б) Если $0<a\leqslant 1$, $x_1=a^{-1+\sqrt{1-a}}$, $x_2=a^{1-\sqrt{1+3a}}$; при остальных a решений нет.

Указание. а) Обозначим $y=\lg x$, $b=\lg a$. Получаем уравнение $y=\frac{2}{y}(1+b-|y-b|)$ или $y^2+2|y-b|-2-2b=0$. Полезно множество пар (y, b) изобразить на координатной плоскости (см. рис. 139).

64. а) $x=a-a^5$; б) $a+\left(\frac{1-a}{a}\right)^2$, если $0<a\leqslant 1$. При других a решений нет.

Указание. а) Рассмотрим данное уравнение относительно a. Преобразуем его: $a=x+(a^5+x)^5$. Полученное уравнение имеет вид $a=f(f(a))$, где $f(a)=a^5+x$. Значит, оно эквивалентно уравнению $a=a^5+x$.

65. а) $|a|\leqslant\frac{1}{4}$, $x=\cos\left((-1)^k\frac{1}{4}\arcsin 4a+\frac{\pi k}{4}\right)$, где $k=0, 1, 2, 3$ при $a\geqslant 0$ и $k=1, 2, 3, 4$ при $a<0$;

б) $x=\dfrac{\sqrt{4a+\sqrt{16a^2+1}}-1}{2\sqrt[4]{4a+\sqrt{16a^2+1}}}$; в) $\pm\dfrac{\sqrt[4]{8|a|+\sqrt{64a^2+1}}+1}{2\sqrt[8]{8|a|+\sqrt{64a^2+1}}}$, где знак совпадает со знаком a. Если $a=0$, $x=\pm 1$.

Указание. а) Сделаем замену: $x=\cos t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$. Имеем $\cos t\cos 2t\sin t=a$, $\sin 4t=4a$ и т. д.

б) Сделаем замену: $x=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)$, $y>0$. Получаем

$\frac{1}{8}\left(y-\frac{1}{y}\right)\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=a$ или $y^4-\frac{1}{y^4}=8a$, $y^8-8ay^4-1=0$.

в) Пусть $a>0$, тогда $x>1$. Сделаем замену: $x=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)$, где $y>1$. Имеем $8x^4-8x^2+1=2((2x^2-1)^2-1)$.

$\frac{1}{16}\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)=a$ или $y^{16}-16ay^8-$ $-1=0$, откуда $y=\sqrt[8]{8a+\sqrt{64a^2+1}}$.

66. $a^{\frac{1}{a}}$. **67.** а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{\pi}{18}+2\pi n$; $\frac{13\pi}{18}+2\pi n$; б) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$; $\frac{\pi}{12}+2\pi n$.

68. а) При $k=-1$ $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$; при $k=0$ $x=\pm\frac{2\pi}{3}+$ $+2\pi n$; при $k=1$ $x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2}+2\pi n$; б) при $k=0$ $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$; при $k=1$ $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$; при $k=2$ $x=$ $=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{2}+\pi n$.

69. а) 1; б) -4.

Указание. а) Преобразуем уравнение к виду $a(2x+1)=$ $=-x^2+6x+13$. Значит, $2x+1\neq 0$, $a=\frac{-x^2+6x+13}{2x+1}$.

Найдем наибольшее значение x, при котором $a\geqslant 1$, т. е. наибольшее решение неравенства $\frac{-x^2+6x+13}{2x+1}\geqslant 1$, а затем найдем a.

70. а) Если $a<0$, то нет решений; если $a=0$, то три решения; если $0<a<1$, то четыре решения; если $a=1$, то два решения; если $a>1$, то нет решений.

б) Если $a<0$, то нет решений; если $a=0$, то два решения; если $0<a<4$, то четыре решения; если $a=4$, то три решения; если $a>4$, то два решения.

71. а) $a=-2$, $a=-\frac{1}{2}$.

При $a=-2$ $x_1=-2$, $x_2=\frac{6}{5}$, $x_3=\frac{10}{3}$;

при $a=-\frac{1}{2}$ $x_1=-\frac{1}{5}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{3}$;

б) $a=-2$, $a=-\frac{1}{8}$. При $a=-2$ $x_1=-1$, $x_2=\frac{15}{17}$, $x_3=\frac{17}{15}$;

при $a=-\frac{1}{8}$ $x_1=-\frac{1}{136}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{120}$;

в) $a=-3$, $a=-\frac{1}{27}$. При $a=-3$ $x_1=-1$, $x_2=\frac{41}{40}$, $x_3=\frac{40}{41}$;

при $a=-\frac{1}{27}$ $x_1=-\frac{1}{3321}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{3240}$;

г) $a=-1$, $a=-\frac{1}{4}$. При $a=-1$ $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{10}$, $x_3=\frac{5}{6}$;

при $a=-\frac{1}{4} x_1=-\frac{1}{20}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{12}$.

Указание. а) Полезно предварительно представить график правой части уравнения, построив последовательно следующую серию графиков: $y_1=2x-a^2$, $y_2=y_1(|x|)$, $y_3=|y_2|$, $y=2y_3$. Последний график и есть график правой части исходного уравнения; при $a=0$ он напоминает символ V, а при $a\neq 0$ — W. Поскольку график левой части уравнения есть прямая, параллельная биссектрисе I и III координатных углов, то эта прямая может пересекать график правой части в трех точках (что соответствует трем решениям) только при $a\neq 0$ и только в двух вариантах (найдите в каких).

72. а) $-\sqrt{2}<a<-\frac{16}{17}$, $0<a<\sqrt{2}$; б) $-1<a<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $1<a<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Указание. а) Неравенство перепишем в виде $(x+a)(x+4a+2)<0$. На плоскости (x, a) уравнение $x^2+a^2=4$ задает окружность. Точки пересечения этой окружности с прямыми $x+a=0$ и $x+4a+2=0$ разбивают ее на четыре дуги. Две дуги соответствуют точкам (x, a), для которых неравенство выполняется.

73. а) 0; 1; б) -1; 1. Указание. При любом a уравнение имеет корень $x=0$.

74. а) 50; б) 32.

Указание. а) Условие $|x|=|y|$ равносильно условию $x=y$ или $x=-y$. Поэтому неравенство принимает вид $(a+50)x^2-$

$-2x+\frac{1}{100}\geqslant 0$ или $(50-a)x^2+\frac{1}{100}\geqslant 0$.

Полученные неравенства должны одновременно выполняться для любых значений x. Очевидно, что в этом случае a должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} a+50>0, \\ (-2)^2-4(a+50)\cdot\frac{1}{100}\leqslant 0, \\ 50-a\geqslant 0. \end{cases}$$

75. а) $a=1$, $b=5$; б) $a=-1$, $b=\frac{3}{2}$.

Указание. а) Покажите, что наибольшее значение левой части равенства равно наименьшему значению правой части равенства, т. е. исследуйте функции $f(t)=\frac{5t}{t^2+25}$, где $t=5^a$ и

$\varphi(b)=\frac{1}{2}b^2-5b+13$.

76. а) $\left(\frac{1}{9}+\frac{\sqrt{7}}{18}+\frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{13}{36}+\frac{\sqrt{7}}{18}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$;

$\left(\frac{1}{9}-\frac{\sqrt{7}}{18}+\frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{13}{36}-\frac{\sqrt{7}}{18}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$;

$\left(\frac{1}{9}+\frac{\sqrt{7}}{18}-\frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{13}{36}+\frac{\sqrt{7}}{18}+\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$;

$\left(\frac{1}{9}-\frac{\sqrt{7}}{18}-\frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{13}{36}-\frac{\sqrt{7}}{18}+\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$, $n=-1$;

б) $\left(\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{5}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

$\left(\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{5}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

$\left(\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{5}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

$\left(\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{5}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $n=1$.

Указание. а) Уравнения системы преобразуйте к квадратным относительно $(x+2y)$ и $(x-y)$ соответственно, затем потребуйте неотрицательности их дискриминантов, зависящих от n.

77. Отрезок прямой $c=\frac{1}{4}$, $0<b<\frac{1}{2}$, и часть линии $b=2^{-4c-\frac{1}{4}}$, $c\leqslant 0$.

78. $a\leqslant-\sqrt{7}$ и $a\geqslant\sqrt{7}$; б) $-\frac{3}{2\sqrt{5}}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

Указание. а) Решая неравенство (1), находим, что $-1\leqslant x\leqslant 2$ и $x\neq 0$, а второе неравенство равносильно неравенству $|x|\leqslant\frac{2}{7}a^2$. Так как наибольшее значение $|x|$ для решений неравенства (1) равно 2, то для искомых значений a получаем неравенство $\frac{2}{7}a^2\geqslant 2$.

79. а) $a<-2-\sqrt{6}$; $a>\sqrt{2}$; б) $a<-2-\sqrt{8}$; $a>2$.

Указание. а) Исследуйте после замены $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ квадратное относительно $t=\cos x$ неравенство $t^2-2at+a^2+2a-3>0$ на промежутке $-1\leqslant t\leqslant 1$.

80. а) $-\frac{12}{5}\leqslant a\leqslant 0$; б) $1\leqslant a\leqslant\frac{17}{5}$.

Указание. а) Неравенство можно преобразовать к виду

$$|2+a+(a\sin 2x-\cos 2x)|\leqslant 3 \text{ или}$$
$$|2+a+\sqrt{a^2+1}\sin(2x+\varphi)|\leqslant 3,$$

где φ — некоторый зависящий от a угол. Так как неравенство должно выполняться для любых x, что равносильно тому, чтобы наибольшее значение левой части было меньше 3, то для искомых значений a получаем неравенство $|2+a|+\sqrt{a^2+1}\leqslant 3$.

81. а) $x=1$; б) $x=2$.

Указание. а) При $a=1$ левая часть равна 1, соответствующее уравнение имеет корни $x=1$ и $x=-\frac{3}{2}$. Корень $x=1$ является решением при всех a, второй корень $x=-\frac{3}{2}$ не при всех a (например, при $a=0$).

82. а) $4<a<8$; б) $a=8$.

Указание. а) Освобождаясь от логарифмов, получаем уравнение (после преобразований): $16x^2-(6a+56)x+a^2+8a+{}$ $+40=0$, которое должно иметь единственное решение, удовлетворяющее условиям $1<x<3$, причем $4<a<10$, $a\neq 7\pm\sqrt{8}$.

Обозначим левую часть через $f(x)$.

Имеем $f(1)=a^2+2a$, $f(3)=a^2-10a+16$. Поскольку при $4<a<10$ будет $f(1)>0$, то должно быть $f(3)<0$, если $D>0$. Отдельно рассматриваются случаи $f(3)<0$, $f(3)=0$ и $D=0$.

83. $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$.

Указание. Уравнение можно переписать в виде

$2^{x^2-2x}\log_3(x^2-2x+3)=2^{2|x-a|-1}\log_3(2|x-a|+2)$, т. е. в виде $\varphi(y_1)=\varphi(y_2)$, где $\varphi(y)=2^y\log_3(y+3)$, $y_1=x^2-2x$, $y_2=2|x-a|-{}$ -1. Функция $\varphi(y)$ монотонно возрастает (докажите!), поэтому исходное уравнение равносильно равенству $y_1=y_2$, т. е. $x^2-2x=$ $=2|x-a|-1$ или $(x-1)^2=2|x-a|$. Последнее уравнение имеет три корня при тех значениях a, при которых парабола $y=(x-1)^2$ либо проходит через вершину угла (графика $y=2|x-a|$), пересекая его стороны по одному разу (случай $a=1$), либо касается одной стороны угла и пересекает дважды вторую сторону угла $\left(\text{случай } a=\frac{1}{2} \text{ и } a=\frac{3}{2}\right)$.

84. $\alpha=-\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi n$.

Указание. Квадратичная функция должна иметь коэффициент при x^2 положительным и дискриминант равным нулю, что очевидно и достаточно для искомых α, т. е. значения параметра α удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \cos\alpha>0, \\ 4\sin^2\alpha-2\cos\alpha(\cos\alpha-\sin\alpha)=0. \end{cases}$$

85. $\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}-2}{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}-2}{2}+{}$ $+\pi(2k+1)$.

86. а) $\alpha=2\pi k$; б) $\alpha=\pi+2\pi k$.

Указание. а) Квадрат трехчлена ax^2+bx+c имеет вид $a^2x^4+2abx^3+(b^2+2ac)x^2+2bcx+c^2$, откуда для искомых значений α имеем систему уравнений $a^2=1$, $2ab=0$, $b^2+2ac=2^{\cos\alpha}$, $2bc=\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha$ и $c^2=2^{\cos\alpha}-1$, т. е. $|a|=1$, $b=0$, $ac=2^{\cos\alpha-1}$, $\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha=0$, $c^2=2^{\cos\alpha}-1$. Из этих равенств следует, что $\cos\alpha>0$ и $\sin\alpha=0$ или $\alpha=2\pi k$ и т. д.

87. $a\leqslant-1$, $a\geqslant3$. Указание. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x^2-2xy-3y^2=8, \\ 2x^2+4xy+5y^2=b. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на b, второе — на 8 и вычтем. Получим $(b-16)x^2-2(b+16)xy-(3b+40)y^2=0$. Если $t=\frac{x}{y}$, то относительно t имеем квадратное уравнение. Его дискриминант $\frac{1}{4}D=(b+16)^2+(b-16)(3b+40)\geqslant0$ или $b^2+6b-96\geqslant0$. Из второго уравнения следует, что $b\geqslant0$. Значит, $b\geqslant-3+\sqrt{105}$.

Перейдем к a: $b=a^2(a-2)^2-12+\sqrt{105}\geqslant-3+\sqrt{105}$.

88. $b=3, 4, 5, \ldots$. Указание. Условие задачи эквивалентно тому, что система $x+y+3=0$, $xy=b$ имеет не более одного решения $x<0$, $y<0$.

89. $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{128}$.

90. $\frac{1}{\sqrt{5}}<a<\frac{1}{2}$. Указание. Очевидно, искомые значения a больше нуля. График первого уравнения представляет собой ромб с центром в точке (0; 0) и диагоналями на осях координат, а график второго при $a>0$ — окружность с тем же центром и радиусом $\sqrt{a}$. Количество решений системы равно числу точек пересечения ромба с окружностью. Поэтому восемь решений система имеет тогда и только тогда, когда радиус указанной окружности больше радиуса окружности, вписанной в ромб, и одновременно меньше половины меньшей диагонали ромба.

91. $q\leqslant0$, $q\geqslant12$. Указание. Рассмотрите плоскость (x, q).

92. $t<-\frac{5}{2}$. Указание. t должно удовлетворять системе неравенств $1<\frac{t+1}{t+2}<3$.

93. $x>3$. Указание. Если $x>1$ и $0<b\leqslant2$, то $\frac{x^2+x}{b}\geqslant1$ (равенство при $x=1$, $b=2$). На рассматриваемом множестве получаем $(x+2b-1)<\frac{x^2+x}{b}$ или $(x+b)(x-2b+1)>0$, откуда $x>2b-1$. Значит, должно быть $x>3$. (Предыдущее неравенство выполняется при всех $0<b\leqslant2$.)

94. $2\sqrt{2}$. Указание. Преобразуем уравнение $2^x+\frac{2}{2^x}=$ $=a\sin\pi x$.

Наименьшее значение левой части равно $2\sqrt{2}$, достигается при $x=\frac{1}{2}$. При этом же x наибольшей будет и правая часть (поскольку $a>0$). И т. д.

95. $a=0$, $b=-1$. Указание. Если $a>0$, то множество решений первого уравнения состоит из двух прямых.

96. $a=\pi n$, $b=0$. Указание. Пусть $a\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ и $\operatorname{tg}x=u$, $\operatorname{tg}a=A$.

Имеем $u+\frac{A-u}{1+Au}=b$, т. е. $Au^2-Abu+A-b=0$. Получилось квадратное относительно u уравнение, имеющее более двух (бесконечно много) корней. Значит, $A=0$, $b=0$ и т. д.

Случай $a=\frac{\pi}{2}+\pi k$ рассматривается отдельно.

97. $0<x\leqslant\sqrt{32}$. Указание. См. задачу 26 вводной части.

98. $a<\frac{1}{2}$; $a>\frac{3}{2}$. Указание. Задача равносильна определению тех значений a, при которых совместна система исходных неравенств, равносильная после преобразований следующей:

$$\begin{cases}(x+3a+1)(x+a-1)>0,\\(x+3a-2)(x-a+2)\leqslant 0.\end{cases}$$

Точки $M(a;\,x)$, координаты которых удовлетворяют каждому из неравенств, составляют пару вертикальных углов (изобразите!).

99. $a<\frac{1}{4}$. Указание. См. задачу 98.

100. а) $-\sqrt{2}\leqslant a<1$; $\sqrt{2}\leqslant a<+\infty$; б) $-\sqrt{3}\leqslant a<1$; $\sqrt{3}\leqslant a<+\infty$.

Указание. Перенеся $-\sqrt{2}$ в правую часть, получим квадратный трехчлен, старший коэффициент которого равен $(a-\sqrt{2})\times$ $\times(a^2+a-3)$, а дискриминант $(a^2-2)(1-a)$.

101. $-\frac{7}{2}\leqslant a\leqslant 1$. Указание. Точки оси x имеют $y=0$. Поэтому требуется найти те a, при которых для всех x из промежутка $-2\leqslant x\leqslant -1$ выполняется система неравенств $x^2+(a+4)x+$ $+4a\leqslant 0$ и $3x-(2a+4)\leqslant 0$, т. е. $(a+x)(x+4)\leqslant 0$ и $a\geqslant\frac{3x-4}{2}$. Так как при $-2\leqslant x\leqslant -1$ множитель $(x+4)$ больше нуля, то $\frac{3x-4}{2}\leqslant a\leqslant -x$ при всех x из этого промежутка, т. е.

$-\frac{7}{2}=\max\limits_{-2\leqslant x\leqslant -1}\ \frac{3x-4}{2}\leqslant a\leqslant \min\limits_{-2\leqslant x\leqslant -1}\ (-x)=1.$

102. а) $-\frac{5}{16}<a\leqslant -\frac{1}{16}$; б) $\frac{1}{\sqrt{14}}\leqslant |a|<\sqrt{\frac{3}{14}}$.

Указание. а) Из уравнения системы следует, что $x=k$, где k — целое число, а неравенство равносильно условию $\frac{16a-23}{4}\leqslant x\leqslant -\frac{2a+33}{6}$, так как $\frac{16a-23}{4}<-\frac{2a+33}{6}$ при $a<0$, откуда следует, что искомые отрицательные значения a определяются требованием единственности целочисленного решения двойного неравенства $\frac{16a-23}{4}\leqslant k\leqslant -\frac{2a+33}{6}$.

Величина $\frac{16a-23}{4}$ возрастает с увеличением a, а величина $\left(-\frac{2a+33}{6}\right)$ убывает, поэтому если при некотором a_0 число k является решением, то и при всех $a<a_0$ оно также будет решением. Отсюда и из того, что $-\frac{-2a+33}{6}=-5$ при $a=-\frac{3}{2}$, $\frac{16a-23}{4}=-6$ при $a=-\frac{1}{16}$ и $\frac{16a-23}{4}=-7$ при $a=-\frac{5}{16}$, следует ответ: $-\frac{5}{16}<a\leqslant -\frac{1}{16}$.

103. $6k\pi<a\leqslant 3(2k+1)\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots$.

Указание. Второе уравнение системы преобразуется к виду $a-y=3x$ с условием $x>0$ и $y>0$, поэтому система равносильна следующей:

$$\begin{cases} a>y>0, \\ a-y=3x, \\ \sin x\,(5-4\sin^2 x)=0, \end{cases}$$

т. е. $x=\pi m$, $y=a-3\pi m$, где m — натуральное число и $y>0$.

Отсюда видно, что искомые значения a определяются условием четности числа решений в натуральных числах неравенства $a-3\pi m>0$.

104. $3(2m+1)\pi+\frac{3\pi}{2}<b\leqslant 6(m+1)\pi-\frac{3\pi}{2}$, $m=0, 1, 2, \ldots$.

Указание. См. задачу 102.

105. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$; $\sqrt{2}<a<2$; б) $\frac{1}{4}<a<1$; $1<a<\sqrt{2}$.

Указание. См. задачу 28 вводной части.

106. $-\frac{13}{3}<a\leqslant -\frac{19}{5}$. Указание. Данное уравнение решается в целых числах. Преобразуем его к виду $(5x-2y)(3x-4)=-7$.

Возможны четыре случая:

$$\begin{cases} 5x-2y=1, \\ 3x-y=-7; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-2y=-1, \\ 3x-y=7; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-2y=7, \\ 3x-y=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x-2y=-7 \\ 3x-y=1. \end{cases}$$

Решения этих систем: $(-15;\ -38)$, $(15;\ 38)$, $(-9;\ -26)$, $(9;\ 26)$. Условие $x<y$ оставляет два из них. Затем находятся значения a, при которых одна пара удовлетворяет неравенству $2a^2x+$ $+3ay<0$, а другая нет.

107. $-a^2$, если $a\leqslant 4-2\sqrt{2}$; $-8(a-1)$, если $a>4-2\sqrt{2}$. Указание. См. решение задачи 100 вводной части.

108. $-\frac{a^2}{2}$, если $a\leqslant 2-\sqrt{2}$; $1-2a$, если $a>2-\sqrt{2}$. Указание. См. решение задачи 100 вводной части.

109. $y=-2x+6$. Указание. Используйте подобие треугольников, образованных касательной, осями координат и перпендикуляром из точки A на ось абсцисс.

110. $a=2$; $a=-4$. Указание. Кубическая парабола имеет с прямой тогда и только тогда ровно две общие точки, когда одна из них есть точка касания. Поэтому, приравнивая производные, получим уравнение для абсциссы точки касания: $9x^2-a^2=2a+1$, т. е. $x=-\frac{1}{3}(a+1)$ или $x=\frac{1}{3}(a+1)$. Далее, используя равенство значений функций при найденном x, получаем уравнение для a вида $(a+1)^2=9$, т. е. $a=2$ и $a=-4$.

111. а) $y_{\max}=3$ при $2\leqslant x\leqslant 3$; б) $y_{\min}=-3$ при $-1<x<0$.

112. а) 7,5; б) 30. Указание. а) Так как $\frac{1}{2}x^2\geqslant 0$, то неравенство равносильно совокупности систем:

$$(1)\ \begin{cases} y<-\frac{1}{2}x^2, \\ y\geqslant -1-\frac{x}{2}; \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2\leqslant y<\frac{1}{2}x^2, \\ x^2-x-2\leqslant 0; \end{cases} \quad (3)\ \begin{cases} y\geqslant\frac{1}{2}x^2, \\ y\leqslant 1+\frac{x}{2}. \end{cases}$$

Далее, построив на координатной плоскости $(x;\ y)$ множества решений систем (1) — (3) (рис. 140), находим площадь полученной трапеции.

113. $x=a-1-\sqrt{2-a}$, $y=2(a-1)-2\sqrt{2-a}$. Наибольшее значение y при $a=2$.

114. $a=\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Указание. Уравнение равносильно уравнению $x|x-2a|=a^2$ при $a>0$ и $a\neq 1$. Это уравнение имеет корни a и $a(1+\sqrt{2})$, откуда получаем равенство для определения искомых a.

115. $x+y=-2$ или $x+y=-4$. Указание. Так как в области определения неравенства $x+y\neq 0$, то прямая, о которой идет речь, не может пересекаться с прямой $x+y=0$ и, следовательно, имеет уравнение вида $y=a-x$. Поэтому неравенство принимает вид:

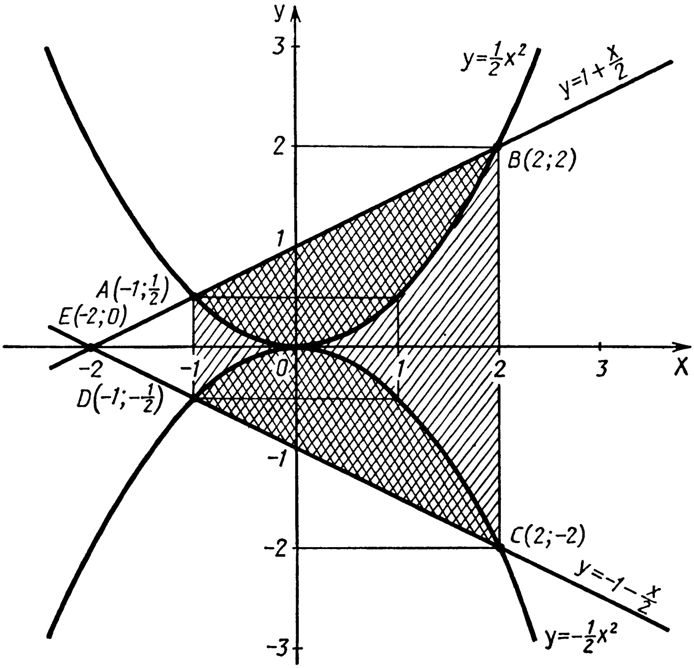


Рис. 140

$$(x^2-(\log_4|a|+\log_{|a|}4)\,x+1)\,(x^2-10\cdot 2^a x+a^2-3)\geqslant 0,$$

и требуется найти значения a, при которых это неравенство выполняется при любом x. Первый множитель при $|a|\neq 4$ имеет два различных корня и отрицателен в промежутке между ними, так что для справедливости неравенства при любом x второй трехчлен также должен быть отрицателен в точности в этом же промежутке, т. е. должен иметь те же корни. Но тогда должны выполняться равенства

$$10\cdot 2^a=\log_{|a|}4+\log_4|a|,\ a^2-3=1,$$

откуда $a=-2$.

При $|a|=4$ первый множитель неотрицателен, а второй принимает вид $x^2-160x+13$, если $a=4$, или $x^2-\frac{5}{8}x+13$, если $a=-4$, и неотрицателен при $a=-4$. Следовательно, a равно -2 или -4.

116. См. рис. 141. Указание. Преобразуем выражение к виду $2\left(\cos t+\frac{1}{2}\cos x\cos y\right)^2+\cos x-\cos y$. Оно будет положительным при всех t, если $\cos x-\cos y>0$, или $\sin\frac{(x+y)}{2}\sin\frac{(y-x)}{2}>$

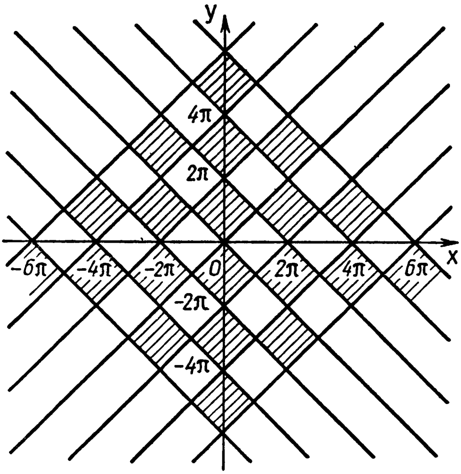


Рис. 141

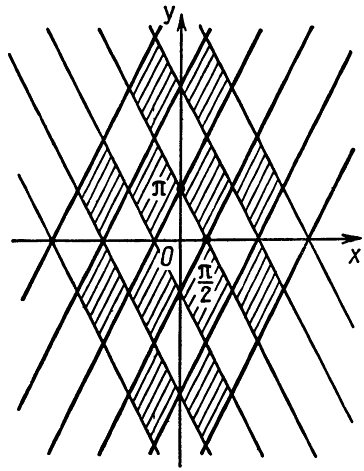


Рис. 142

>0. Левая часть обращается в нуль на прямых $x+y=2\pi k$, $y-x=2\pi n$. На этих прямых происходит смена знака.

117. См. рис. 142.

118. $x=\frac{3\sqrt{7}}{14}$, $y=\frac{5\sqrt{21}}{14}$, $a=\frac{25}{\sqrt{28}}$, $b=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$.

Указание. Первые два уравнения определяют в соответствующих координатах уравнения окружностей радиусами $\sqrt{3}$ и 5. Искомые значения x и a, очевидно, неотрицательны. Поэтому удобно ввести замену $x=\sqrt{3}\cos\alpha$, $y=\sqrt{3}\sin\alpha$, $a=5\cos\beta$, $b=5\sin\beta$, где углы α и β меняются от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Третье уравнение системы примет вид $\sin(\alpha+\beta)=1$, т. е. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, а величина $p=x+a=\sqrt{3}\cos\alpha+5\cos\beta=\sqrt{3}\cos\alpha+5\sin\alpha$ принимает максимальное значение $\sqrt{(\sqrt{3})^2+5^2}=\sqrt{28}$ (см. § 1), $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}=\arccos\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$ и т. д.

119. $\frac{5}{6}-\sqrt{7}\leqslant a\leqslant\frac{5}{6}+\sqrt{7}$. Указание. См. решение задачи 100 вводной части.

120. а) $a=6l-1$, $a=6l$, $a=6l+2$, $a=6l+3$, $l\in\boldsymbol{Z}$;
б) $a=-2+12k$, $a=2+12k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Указание. а) Для первого уравнения покажите, что его левая часть не меньше 11, а правая не больше 11, т. е. что это уравнение равносильно системе уравнений $\cos\frac{\pi y}{2}=0$ и $\sin\frac{\pi(x-2y-1)}{3}=0$.

Второе уравнение исходной системы решите относительно $t=(x^2+(y-a)^2)$. В итоге получите, что система равносильна следующей: $\begin{cases} y=2k+1, \\ x-2y-1=3l, \\ x^2+(y-a)^2=1 \text{ и т. д.} \end{cases}$

121. $a=1$. Указание. Возьмем $b=0$. Имеем систему $(x^2+1)^a=1$, $a+x^2y=1$.

Возникают два случая: 1) $a=0$. Исходная система будет иметь вид $(b^2+1)^y=1$, $bxy+x^2y=1$, откуда при $b\neq 0$ из первого уравнения $y=0$, что не подходит второму уравнению.

2) $x=0$, тогда $a=1$. Можно проверить, что при $a=1$ исходная система всегда имеет решение $x=y=0$ при любом b.

122. а) $a=2$; б) $a=0$.

Указание. а) Если (x_0, y_0) — решение системы, то и $(-x_0, y_0)$ также является ее решением. Значит, $x_0=0$. Подставляя $x_0=0$ в систему, найдем для a два значения: 0 и 2.

1) $a=0$. Исходная система имеет вид $y+\cos x=0$, $\sin^4 x+y^2=1$. Эта система имеет более одного решения. (Решений бесконечно много: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $y=0$ и др.)

2) $a=2$. Имеем систему $2+2|x|=y+\cos x$, $\sin^4 x+y^2=1$. Из второго уравнения $y\leqslant 1$. На основании первого заключаем, что $x=0$, $y=1$. Решение единственное.

б) Из четности по x заключаем, что должно быть $x=0$, откуда $a=0$ или $a=2$. При $a=2$ есть по крайней мере два решения: $(0, -1)$ и $(1, 0)$.

123. $a=-2$, $b=-2$.

124. $a=1$. Указание. Каждое неравенство определяет на плоскости (x, y) полуплоскость (вместе с границей). Для того чтобы эти полуплоскости имели единственную общую точку, необходимо, чтобы прямые, их ограничивающие, пересеклись в одной точке. Соответствующая система из трех линейных уравнений будет совместна, если $42a^2-17a-25=0$. Полученные значения $a=1$ и $a=\frac{25}{42}$ проверяем.

125. а) $-\sqrt{3}+1<a<1$; б) $-2\sqrt{3}<a<-1$.

Указание. а) Второе неравенство имеет вид $a^2(x+y)^2+y^2>a-1$, и поэтому оно выполняется при всех x и y тогда и только тогда, когда $a-1<0$ (так как левая часть неотрицательна и равна нулю при $x=y=0$). Считая далее $a-1<0$, первое неравенство преобразуем к квадратному относительно $\sin(x-y)$:

$$\sin^2(x-y)+(a-1)\sin(x-y)+a^2-a-4<0.$$

Последнее неравенство выполняется при всех x и y тогда и только тогда, когда оно истинно при минимальном и максимальном значениях $\sin(x-y)$. (Докажите!)

126. а) $0<a<\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}<a\leqslant\frac{1}{3}$ $\left(\pm\arccos\frac{1-2a}{2-3a}+2\pi k;\right.$ $\left.(-1)^n\arcsin\frac{1}{2-3a}+\pi n;\ \frac{2a}{1-2a}\right)$; б) $\frac{3}{2}<a<2$; $2<a<4$ $\left((-1)^k\arcsin\frac{1-a}{2a-1}+2\pi k;\ \pm\arccos\frac{1}{1-2a}+2\pi n;\ \frac{a}{4-a}\right)$.

Указание. а) Система в области допускаемых значений переменных равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} 2\cos x+a\sin y=1, \\ 3\cos x+\sin y=2, \\ z=\frac{2a}{1-2a}, \end{cases}$$

в которой первые два составляют линейную систему относительно $\cos x$ и $\sin y$. Так как в силу третьего уравнения исходной системы $0<a<\frac{1}{2}$, то имеем $\cos x=\frac{1-2a}{2-3a}$, $\sin y=\frac{1}{2-3a}$ и $z=\frac{2a}{1-2a}$. Осталось учесть ограничения для значений $\cos x$ и $\sin y$ и выразить в явном виде x и y.

127. $\frac{9\pi}{13}$, $\frac{15\pi}{13}$. Указание. Докажите, что левая часть уравнения больше или равна единице, а правая меньше или равна единице, после чего рассмотрите систему

$$\begin{cases} \sin\alpha x=1, \\ \cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)=1, \\ 2\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$$

для α из интервала (2; 5).

128. $\frac{9\pi}{5}$, $\frac{17\pi}{5}$, 5π. Указание. См. решение задачи 127.

129. $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{31}-7}{5}$; $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{31}-7}{5}$. Производная данной функции обращается в нуль в точках $x_1=-\cos\alpha$, $x_2=0$, $x_3=\sin\alpha$. При этом x_1 и x_3 соответствуют минимальным значениям функции.

Рассмотрим два случая: 1) $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$. Имеем $\sin\alpha\leqslant\cos\alpha$. Значит, если $-\sin\alpha\leqslant x\leqslant\cos\alpha$, то $x_1\leqslant-\sin\alpha$ и наименьшее значение $f(x)$ будет или при $x=-\sin\alpha$, или при $x=x_3=\sin\alpha$.

Далее, $f(-\sin\alpha)=\sin^3\alpha\,(7\sin\alpha-10\cos\alpha)$, $f(\sin\alpha)=-\sin^3\alpha\,(\sin\alpha+2\cos\alpha)$, $f(-\sin\alpha)-f(\sin\alpha)=$ $=8\sin^3\alpha\,(\sin\alpha-\cos\alpha)\leqslant 0$, т. е. наименьшее значение $f(x)$ при $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$ будет при $x=-\sin\alpha$, т. е. $\sin^3\alpha\,(7\sin\alpha-10\cos\alpha)$.

2) $\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. В этом случае наименьшее значение будет

$f(\cos\alpha)=\cos^3\alpha\,(7\cos\alpha-10\sin\alpha)$. Затем найдем наименьшие (по α) значения на отрезках $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ и сравним их (они равны).

130. $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Указание. См. решение задачи 129.

131. $a=\frac{2}{3}$. Указание. Первое уравнение имеет неотрицательный дискриминант $(9a^2-4)^2$, поэтому оно имеет один корень при $a=\pm\frac{2}{3}$ и два корня при остальных значениях a. Второе уравнение имеет вид $f(x)=\varphi(x)$, где $f(x)$ монотонно возрастает, $\varphi(x)$ монотонно убывает. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Поэтому достаточно для нахождения ответа рассмотреть случаи $a=\frac{2}{3}$ и $a=-\frac{2}{3}$.

132. $a=\frac{1}{3}$. Указание. См. решение задачи 131.

133. $-4|x|$. Указание. Пользуясь тем, что $x^2=|x|^2$, получаем:

$$M(x)=\begin{cases}2x^2 & \text{при } |x|\geqslant 2,\\ 4|x| & \text{при } |x|<2.\end{cases}$$

Отсюда легко увидеть, что речь в условии задачи идет о функциях $y=2x^2$, $y=-4x$ и $y=4x$, для которых при $x\leqslant 0$ наименьшее значение принимает $y=4x$, а при $x>0$ наименьшее значение принимает $y=-4x$.

134. $0\leqslant a\leqslant 5+2\sqrt{6}$. Указание. Очевидно, $x=0$ является решением неравенства, которое при $x<0$ принимает вид $x^2-(1-a)x+2a\geqslant 0$, а при $x>0$ принимает вид $x^2-(1+a)x-2a\leqslant 0$.

В первом случае неравенство всегда имеет решения и, следовательно, ему должны удовлетворять все отрицательные x. Поэтому либо дискриминант трехчлена $x^2-(1-a)x+2a$ должен быть неположительным числом, либо при $x=0$ трехчлен принимает неотрицательное значение и вершина его параболы находится справа от оси ординат, т. е. либо $(1-a)^2-8a\leqslant 0$, либо $2a\geqslant 0$ и $\frac{1-a}{2}>0$, что означает $0\leqslant a\leqslant 5+2\sqrt{6}$.

При найденных a квадратный трехчлен $x^2-(1+a)x-2a$ в нуле отрицателен. Значит, он отрицателен на промежутке, содержащем $x=0$.

135. $f(x)=\frac{1}{14}x+\frac{15}{14}$; $q(x)=-\frac{2}{7}x+\frac{5}{7}$.

136. См. рис. 143. Указание. Исходное неравенство равносильно системе
$$\begin{cases}y\geqslant -3x & \text{при } x\leqslant -2,\\ y\geqslant 4-x & \text{при } -2\leqslant x\leqslant 1,\\ y\geqslant 3x & \text{при } x\geqslant 1.\end{cases}$$

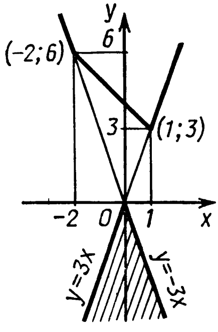


Рис. 143

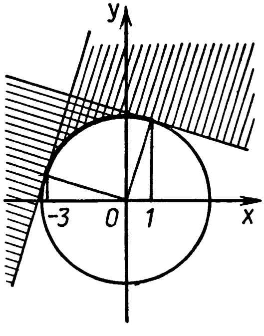


Рис. 144

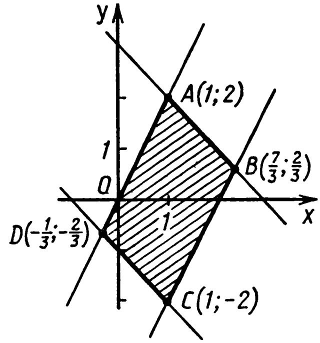


Рис. 145

Теперь покажите, что в этой системе можно снять ограничения на переменную x, после чего для искомого множества получаем систему неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant -3x, \\ y \leqslant 4-x, \\ y \leqslant 3x. \end{cases}$$

137. См. рис. 144. Указание. Задача сводится к нахождению точек плоскости, через которые можно провести касательные к данной дуге окружности.

138. Параллелограмм $ABCD$ (рис. 145).

Неравенство разными способами (или выделением квадрата, или разложением квадратного относительно y трехчлена на множители) можно привести к виду $(y-(a(x-1)+2))(y-(a(x-1)-2))\leqslant 0$. И так как при всех a и x $a(x-1)-2<a(x-1)+2$, то исходное неравенство равносильно системе линейных относительно x и y неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant a(x-1)+2, \\ y \geqslant a(x-1)-2. \end{cases}$$

Каждое неравенство, как известно, определяет полуплоскость. Для первого неравенства граница полуплоскости есть прямая AB (при $a=-1$) (см. рис. 145), которая вращается вокруг точки A при возрастании параметра a от -1 до 2 до положения прямой AD (при $a=2$). Следовательно, искомые точки должны лежать внутри острого угла DAB. Аналогично показывается, что искомые точки должны лежать внутри острого угла DCB, и, следовательно, они образуют параллелограмм.

139. 12. Указание. Произведение xy координат искомых точек постоянно, т. е. $xy=c$. Следовательно, они лежат на гиперболе, которую любая прямая может пересекать не более чем в двух точках (или, что равносильно тому, система линейного уравнения, соответствующего прямой, и уравнения $xy=c$ имеет не более двух решений). Поэтому на каждой из проведенных четырех прямых находятся две различные точки, для которых

$$\begin{cases} y=k(x-3), \\ xy=c, \end{cases}$$ где c, а поэтому и k не равны нулю.

Отсюда для двух различных абсцисс получаем соответствующее квадратное уравнение $kx^2-3kx-c=0$. Тогда по теореме Виета для суммы указанных абсцисс получаем $x_1+x_2=3$, а для всех восьми точек сумма равна $3\cdot4=12$.

140. $\frac{7}{3}$; $\frac{7\sqrt{2}}{6}$. Указание. Пусть $x=x_0$ — уравнение прямой, на которой лежит гипотенуза искомого прямоугольного треугольника. Тогда длина гипотенузы равна $c=\left(\frac{17}{3}-2x_0\right)-$ $-\frac{1}{2x_0}$, абсцисса и ордината вершины прямого угла в силу условия задачи равны соответственно $\left(x_0-\frac{c}{2}\right)$ и $\frac{1}{2x_0}+\frac{c}{2}$ (докажите), откуда для x_0 получаем уравнение $\frac{1}{2x_0}+\frac{c}{2}=\frac{1}{2\left(x_0-\frac{c}{2}\right)}$, т. е. $2x_0^2-cx_0-1=0$ $(c\neq0)$, или после подстановки c имеем $24x_0^2-34x_0-3=0$ и т. д.

141. $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$. Указание. Так как прямая $y=x-4$ образует с положительной полуосью x угол, равный $45°$, то одна из диагоналей квадрата параллельна оси ординат и равна $c=$ $=x_0^2-(x_0-4)$, где x_0 — абсцисса соответствующих этой диагонали вершин квадрата. Далее см. указание к задаче 140.

142. а) $\frac{7\sqrt{3}-\pi}{3}$; б) $3-\frac{\pi}{2}$.

Указание. а) Исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$(1)\begin{cases} 2y+1<0, \\ x^2+y^2\geqslant1, \\ y+4\geqslant2\sqrt{3}|x| \end{cases} \quad \text{и} \quad (2)\begin{cases} 2y+1\geqslant0, \\ \sqrt{3}|x|\geqslant y+2, \\ y+4\geqslant2\sqrt{3}|x|. \end{cases}$$

Далее воспользуйтесь тем, что окружность, определяемая равенством $x^2+y^2=1$, касается сторон угла, определяемого равенством $\sqrt{3}|x|=y+2$, и лежит внутри угла $y+4=2\sqrt{3}|x|$.

143. 1) $a=1$, $b=10$; 2) $(-1;\,9)$, $(2;\,12)$.

Указание. Докажите, что a и b удовлетворяют системе уравнений $D_1=0$ и $D_2=0$, где D_1 — дискриминант квадратного относительно x уравнения $8-3x-2x^2=ax+b$, а D_2 — дискриминант квадратного относительно x уравнения $2+9x-2x^2=ax+b$.

144. 1) $a=0$, $b=\frac{1}{4}$; 2) $\left(-\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2};\,\frac{13}{2}\right)$. Указание. См. задачу 143.

145. а) 1) $-2-2\sqrt{2}<a<0$, $-2+2\sqrt{2}<a$; 2) $a\leqslant-2-2\sqrt{2}$, $0<a\leqslant-2+2\sqrt{2}$, $x=\pm\sqrt{\frac{4-4a-a^2}{4-a^2}}$, $y=\frac{2|a|-|a|^3}{\sqrt{4a-a^3}}$; 3) $a=0$, $x\in[-1;1]$, $y=-\sqrt{1-x^2}$.

б) 1) $a\leqslant\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $-1\leqslant a<0$, $0<a\leqslant\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $1\leqslant a$;

2) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<a<-1$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<a<1$, $x=\left(\log_2\frac{|a|-\sqrt{a-a^3}}{\sqrt{a-a^3}}\right)$, $y=\frac{\sqrt{a-a^3}-|a|^3-|a|}{|a|-\sqrt{a-a^3}}$; 3) $a=0$, $x\in\boldsymbol{R}$, $y=2^{-x}$.

в) 1) $a<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $0<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

2) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant a<0$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\leqslant a$, $x=\frac{|a|^3}{\sqrt{a^3-a}}$, $y=\pm\sqrt[4]{\frac{a^2-a-1}{a^2-1}}$;

3) $a=0$, $x=\sqrt{1-y^4}$, $y\in[-1;1]$.

г) 1) $a\leqslant-2{,}8-2\sqrt{17}\leqslant a<0$, $0<a\leqslant2{,}8+2\sqrt{17}\leqslant a$;

2) $-2<a<8-2\sqrt{17}$, $2<a<8+2\sqrt{17}$,

$x=\frac{\sqrt{a^3-4a}-4|a|+|a|^3}{-4|a|+\sqrt{a^3-4a}}$, $y=\log_3\left(\frac{4|a|-\sqrt{a^3-4a}}{\sqrt{a^3-4a}}\right)$;

3) $a=0$, $x=-3^{-y}$, $y\in\boldsymbol{R}$.

Указание. а) Вводя переменную $t=\sqrt{1-x^2}$, получим систему уравнений $yt+t^2=2a$ и $y^2+yt=2a-a^3$, почленно складывая и вычитая которые, получим ей равносильную систему уравнений $(t+y)^2=4a-a^3$ и $(t+y)(t-y)=a^3$ и т. д.

146. а) $27\frac{11}{27}-5\pi$; б) $6\sqrt{5}-2-5\pi+5\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Указание. а) Из площади четырехугольника, определяемого неравенствами $3x^2-4x-32\leqslant0$ и $(3x-2y)(3y-x+10)\geqslant0$, одна из сторон которого проходит через центр окружности $x^2+y^2=10$, вычесть площадь полукруга.

147. 1) $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{34}{5}$; 2) $-4\leqslant a\leqslant2$.

Указание. 1) Вычислить по координатам точек B, C, D координаты точки A. Далее, подставив их в систему, решить полученную систему относительно a. 2) Уравнение прямой, проходящей через точки B и D, имеет вид $y=-x-1$. Поэтому задача сводится к определению тех значений параметра a, при которых система неравенств $3x+1-2a\leqslant0$ и $-4x-6+5a\leqslant0$ имеет решения при $x_B\leqslant x\leqslant x_D$, т. е. при $-3\leqslant x\leqslant3$. Переписывая систему в виде $\frac{3x+1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{4x+6}{5}$, замечаем, что $\frac{3x+1}{2}\leqslant\frac{4x+6}{5}$ при $x\leqslant1$.

Отсюда $\min\limits_{-3\leqslant x\leqslant1}\frac{3x+1}{2}\leqslant a\leqslant\max\limits_{-3\leqslant x\leqslant1}\frac{4x+6}{5}$, т. е. $-4\leqslant a\leqslant2$.

148. 1) $-\frac{21}{5}\leqslant a\leqslant -1$; 2) $-9\leqslant a\leqslant 9$. Указание. См. задачу 147.

149. 2,2. Указание. $b-11a\neq 0$, так как уравнение иначе имеет не более двух корней. Искомые точки имеют координаты (a, b), такие, для которых квадратный трехчлен $(b-11a)t^2+$ $+(b-4a)t+(a-b)$ имеет два различных положительных корня, т. е. для a и b имеем систему

$$\begin{cases} 0<a<3, \\ 0<b<22, \\ D=(b-4a)^2-4(b-11a)(a-b)>0, \\ \dfrac{b-4a}{b-11a}<0, \\ a-b<0, \end{cases}$$

принимающую после упрощения вид:

$$\begin{cases} 0<a<3, \\ 0<b<22, \\ (b-10a)(5b-6a)>0, \\ (b-4a)(b-11a)<0, \\ a-b<0 \text{ и т. д.} \end{cases}$$

150. $16\frac{1}{5}$. Указание. См. задачу 149.

151. $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$. Указание. Если x_0 — решение уравнения, то $x=-x_0$ также решение. Поэтому из условия единственности решения следует, что $x_0=0$, и других решений уравнение не должно иметь. Отсюда, подставляя $x=0$ в уравнение, имеем равенство $|b^2-4|+b^2-4=0$, равносильное неравенству $b^2-4\leqslant 0$, т. е. $-2\leqslant b\leqslant 2$. При указанных b уравнение принимает вид:

$$x^2((20a+21b+63)x^2+(3b-4a+9))=0.$$

Чтобы последнее уравнение имело единственный корень $x=0$, необходимо и достаточно (докажите), чтобы

$$(20a+21b+63)(3b-4a+9)\geqslant 0.$$

Отсюда (с учетом неравенства $-2\leqslant b\leqslant 2$) следует, что искомое множество есть трапеция с вершинами $A(-1{,}05; -2)$, $B(0{,}75; -2)$, $C(3{,}75; 2)$ и $D(-5{,}25; 2)$, для которой выполняется равенство $AB+CD=BC+AD$ (докажите), т. е. в нее можно вписать окружность. Очевидно, для центра окружности координата b равна нулю и т. д.

152. а) $a\leqslant -4$; $a=1$; $\frac{8}{3}\leqslant a<4$; $a>4$; б) $a\leqslant -3$; $a=-1$; $\frac{3}{5}\leqslant a<3$; $a>3$.

Указание. а) Исследуйте отдельно случай $a=0$. При $a\neq 0$ рассмотрите две функции $a=x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}$ и $a=\frac{8}{x}$ на промежутке $-2\leqslant x\leqslant 3$. Вторая функция монотонна и поэтому принимает один раз любое значение из промежутков $a\leqslant -4$ и $a\geqslant\frac{8}{3}$, а первая функция на промежутке $-2\leqslant x\leqslant 2$ каждое свое значение принимает четное число раз, кроме значения 1, которое оно достигает при $x=0$, и монотонно возрастает на промежутке $2<x\leqslant 3$. Осталось заметить, что на промежутке $-2\leqslant x\leqslant 3$ равенство $x^2+\cos\frac{11\pi x}{4}=\frac{8}{x}$ выполняется только при $x=2$, поэтому соответствующее значение $a=4$ не принадлежит ответу задачи.

153. $a=\frac{3}{2}$; $a=\frac{5}{3}$; $2\leqslant a<4$.

Указание. а) Ограничения на a: $\frac{3}{2}\leqslant a<4$. Пусть второй множитель не равен нулю. Обозначим квадратный трехчлен в квадратных скобках через $f(x)$. Коэффициент при x^2 отрицателен. Для того чтобы квадратное уравнение $f(x)=0$ имело корни x_1 и x_2, причем $x_1\leqslant -1$, $x_2\geqslant 0$, необходимо и достаточно выполнение неравенств $f(-1)\geqslant 0$, $f(0)\geqslant 0$, откуда $a=\frac{3}{2}$ или $2\leqslant a<4$. Затем рассматриваем случай, когда равен нулю второй множитель. В этом случае решений бесконечно много.

154. $a=2$, $a=\frac{5}{2}$, $4\leqslant a<9$. Указание. См. решение задачи 153.

155. $-1{,}2$; $-0{,}67$. Указание. Если $a=-1{,}2$, то, приравнивая нулю первый множитель, найдем $x=\frac{1}{15}(18-2^{2,8})$, $0<x<1$, поскольку $4<2^{2,8}<8$. Далее уравнение имеет решение $x=-\frac{4}{3}-2a$ (равен нулю второй множитель). При $a=-0{,}67$ это значение попадает на интервал $[0;\ 1]$; при $a=-66$ не попадает и никакое значение не попадает $\left(x=\pm\frac{4}{3}-2a+4k\right)$. Остается доказать, что при $a=-0{,}6$ не имеет нужного корня и первый множитель.

156. a — любое, $b=2$; $a=\pm 1$, $b=-2$.

Указание. Первое уравнение приводится к виду $(x-y+a)(x+y-1)=0$. Возникают две системы:

$$\begin{cases} x-y+a=0, \\ x^2+y^2+bxy-1=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y-1=0, \\ x^2+y^2+bxy-1=0. \end{cases}$$

Хотя бы одна из этих систем имеет не менее трех решений. Пусть это первая система. Выразив y через x и подставив во второе уравнение, получим квадратное уравнение, имеющее не менее трех корней (каждому значению x соответствует единственное значение y). Следовательно, это уравнение равно нулю тождественно.

Имеем уравнение $(b+2)x^2+a(b+2)x+a^2-1=0$, откуда $b=-2$, $a=\pm 1$.

Аналогично рассматривается вторая система.

157. а) $-\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$.

Указание. а) Почленно умножим первое уравнение на $2b$ и сложим со вторым. Получим $(2b^2+b-6)x-2abz^2-4z=4$. Если $2b^2+b-6\neq 0$, то при любых a и z можем найти x, а затем y (из первого уравнения).

Пусть $2b^2+b-6=0$. 1) $b=-2$. Имеем для z уравнение $az^2-z-1=0$. Из условия $D\geqslant 0$ найдем $a\geqslant-\frac{1}{4}$. 2) $b=\frac{3}{2}$. Получаем $3az^2+4z+4=0$, откуда $a\leqslant\frac{1}{3}$. Остается убедиться, что при этих a и b можно найти x и y (x можно взять произвольным).

158. $-2\pi<a\leqslant 0$ и $2\pi\leqslant a<4\pi$.

Указание. Возведем почленно в квадрат третье уравнение и прибавим учетверенное произведение первого и второго. Получим (после преобразований) $\cos(2x+2y)=1$, откуда $x+y=\pi k$. Вычтем теперь почленно из второго уравнения первое. Получим $\cos(x+y)=-\frac{(x+y)^2}{(a-\pi)^2}-\frac{1}{z^2}$. Но $\cos(x+y)=\cos\pi k=(-1)^k$. Значит, $(-1)^k<0$, т. е. $k=2n+1$. Таким образом, $x=(2n+1)\pi-y$. Из первого уравнения найдем $\sin y=\frac{1}{z}$. Тогда из третьего будем иметь $\cos y=\frac{(2n+1)\pi}{a-\pi}$. (Проверьте, что при этом автоматически выполняется второе уравнение.)

Число решений системы равно числу целых n, для которых $0\leqslant\frac{(2n+1)\pi}{(a-\pi)}\leqslant 1$. Если $a-\pi>0$, то последние неравенства должны выполняться при $n=0$ и не выполняться при $n=1$, т. е. $\frac{\pi}{a-\pi}\leqslant 1$, $\frac{3\pi}{a-\pi}>1$, откуда $2\pi\leqslant a<4\pi$. Если $a-\pi<0$, получаем $-2\pi<a\leqslant 0$.

159. Функция $f(x)=\frac{\log_3 x}{\log_3(x+1)}$ при $x>1$ возрастает (докажите!). Обозначим левую часть неравенства через A. Пусть $B=\frac{\log_3 3}{\log_3 4}\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 6}\cdot\ldots\cdot\frac{\log_3 79}{\log_3 80}$. Поскольку $B<A$, $A^2>BA=\frac{\log_3 3}{\log_3 81}=\frac{1}{4}$, $A>\frac{1}{2}$.

160. 560 цифр. Указание. Пусть $N=5^{800}$, тогда $\lg N = 800-800\lg 2$. Заметим, что $2^{10}=1024$. Имеем $800\lg 2 = 80\lg 1024 > 80\cdot 3 = 240$. Докажем, что $80\lg 1024 < 241$. Для этого воспользуемся неравенством $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ (эквивалентным неравенству $e<3$). Имеем $80\lg 1024 - 240 = 80(\lg 1024 - 3) = 80\lg\left(1+\frac{24}{1000}\right) = 80\cdot\frac{24}{1000}\lg\left(1+\frac{24}{1000}\right)^{\frac{1000}{24}} < 80\cdot\frac{24}{1000}\lg 3 < 2\lg 3 < 1$. Значит, $559 < \lg N < 560$.

161. Для прямой $y=\frac{1}{2}$ при всех x, $0\leqslant x\leqslant \pi$, будет $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, причем при $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$ имеет место равенство. Предположим, что при некоторых a и b будет $|\sin x - ax - b| < \frac{1}{2}$ при всех $0\leqslant x\leqslant\pi$. В частности, это неравенство имеет место при $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\pi$. Из этого следует, что $a\cdot 0+b<\frac{1}{2}$, $a\frac{\pi}{2}+b>\frac{1}{2}$, $a\pi+b<\frac{1}{2}$. Таким образом, прямые $y=\frac{1}{2}$ и $y=ax+b$ пересекаются не менее двух раз $\left(\text{между } 0 \text{ и } \frac{\pi}{2},\ \text{между } \frac{\pi}{2} \text{ и } \pi\right)$, чего не может быть.

162. 1. Указание. Положим $z=x+iy$, $\alpha=a+bi$. Левые части данной системы представляют собой действительную и мнимую части квадратного трехчлена $z^2+\alpha z+1$. Но $\alpha\neq\pm 2$. Значит, уравнение $z^2+\alpha z+1=0$ имеет два комплексных корня: $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$. По теореме Виета $z_1z_2 = (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_2)i=1$, т. е. $x_1x_2-y_1y_2=1$.

163. $\frac{2r}{2+r^2}$, $\frac{2-r^2}{2+r^2}$, где r — произвольное рациональное число.

Указание. Рациональная точка (0, 1) лежит на кривой. Проведем через эту точку прямую с рациональным угловым коэффициентом $y-1=rx$. Получаем уравнение $2x^2+r^2x^2+2rx=0$. Это уравнение имеет корень $x=-\frac{2r}{2+r^2}$, тогда $y=\frac{2-r^2}{2+r^2}$. Нетрудно видеть, что таким образом мы можем найти все рациональные точки на заданной кривой.

§ 5. Планиметрия

1. Внутренняя часть и граница квадрата, образованного серединными перпендикулярами к четырем отрезкам, концами каждого из которых является центр квадрата и одна из его вершин. Иначе, квадрат с вершинами в серединах сторон данного квадрата.

2. Геометрическое место состоит из граничных точек криволинейного восьмиугольника. Сам восьмиугольник представляет собой объединение четырех сегментов, построенных на сторонах квадрата во внешнюю сторону и соответствующих углам 60° (из точек на дуге сегмента соответствующая сторона видна под углом 60°), и четырех таких же сегментов, построенных на каждой диагонали в обе стороны.

3. Пусть O — центр данной окружности. Искомое геометрическое место является дугой окружности с диаметром OA, заключенной внутри данной окружности. В частности, если A внутри данной окружности, то получаем всю окружность с диаметром OA.

4. Пусть прямая AB пересекает l. Центры окружностей расположены на серединном перпендикуляре m к AB. На прямой m есть две точки O_1 и O_2, такие, что окружности с центрами O_1 и O_2, проходящие через A и B, касаются l. Искомое геометрическое место состоит из двух лучей прямой m с началами O_1 и O_2 (из m исключена внутренняя часть отрезка O_1O_2). Если AB параллельна l, будет один луч.

5. Если угол C треугольника ABC тупой, искомое множество пусто. Пусть C_1 — такая точка плоскости, что $ACBC_1$ — параллелограмм. Если $\angle C = 90°$, искомое множество состоит из одной точки C_1. Если $\angle C < 90°$, имеем окружность с центром C_1 и радиусом $b^2+c^2-a^2$ (a, b, c — стороны $\triangle ABC$). Доказать это можно методом координат, введя систему, в которой $A\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, $C(m, n)$, при этом $\left(m+\frac{a}{2}\right)^2+n^2=b^2$, $\left(m-\frac{a}{2}\right)^2+n^2=$ $=c^2$.

Можно иначе. Рассмотрим два треугольника AMB и CMC_1. Медианы, проведенные из вершины M в этих треугольниках, равны. Значит $2AM^2+2BM^2-AB^2=2CM^2+2C_1M^2-CC_1^2$, из условия получим $2C_1M^2=CC_1^2-AB^2$ и т. д. (см. задачу 5 вводной части).

6. Прямая, перпендикулярная основаниям трапеции (см. задачи 2 и 5 вводной части).

7. а) Окружность, гомотетичная данной. Коэффициент гомотетии $\frac{1}{3}$, центр гомотетии в середине AB. Точки, соответствующие A и B, удалены.

б) Окружность, симметричная данной относительно AB. Точки, диаметрально противоположные A и B, удалены.

в) Две дуги с общей хордой AB. У к а з а н и е. Если I — центр вписанной в ABC окружности, то $\angle AIB = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB$.

8. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 146). Ис-

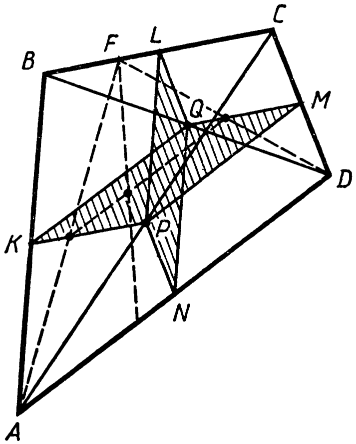


Рис. 146

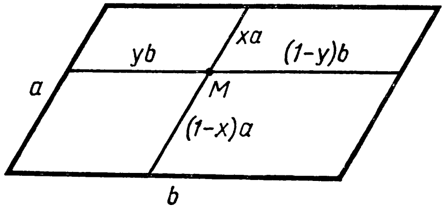


Рис. 147

комое множество заполняет два параллелограмма $KQMP$ и $LQNP$, вершины которых соответственно середины сторон и диагоналей $ABCD$. В частности, если F на стороне BC, а другой конец отрезка пробегает сторону AD, то середины отрезков заполнят отрезок, параллельный KQ и MP, с концами на KP и QM.

9. а) Диагонали параллелограмма. Указание. Пусть стороны параллелограмма a и b. Стороны одного из двух равновеликих параллелограммов xa, yb, другого — $(1-x)a$, $(1-y)b$ (рис. 147). Тогда из равенства площадей получаем $xy = (1-x)(1-y)$, $x+y=1$. Это означает, что M лежит на диагонали исходного параллелограмма, не проходящей внутри двух рассматриваемых.

б) Отрезки прямых, соединяющих середины противоположных сторон параллелограмма. Указание. Если сумма площадей двух соседних параллелограммов равна половине исходного, все очевидно. В другом случае (в обозначениях рис. 147) имеем $xy+(1-x)(1-y)=\frac{1}{2}$, откуда $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$.

10. а) Пусть O — точка пересечения прямых. Возьмем на прямых точки K, L, P и Q так, что расстояние от каждой из них до другой прямой равно данной величине (рис. 148). Прямоугольник $KLPQ$ (граница) есть искомое геометрическое место. Это следует из того, что для любой точки на основании LP равнобедренного треугольника LOP сумма расстояний до боковых сторон постоянна. Для точек внутри $\triangle LOP$ оно меньше, вне $\triangle LOP$ (внутри угла LOP) соответственно больше.

б) Продолжения сторон прямоугольника $KLPQ$ (см. рис. 148).

11. Пусть r — радиус данной окружности, ρ_A, ρ_B, ρ_C — расстояния от A, B, C до центра этой окружности. Во всех трех случаях граница множества состоит из концентрических окружностей. При этом $r<\rho_A\leqslant r\sqrt{3}$, $r\sqrt{2}<\rho_B$, $r\sqrt{3}\leqslant\rho_C$. Указание. $60^\circ\leqslant\angle A<180^\circ$, $\angle B<90^\circ$, $\angle C\leqslant 60^\circ$. Причем каждый из углов может принимать любые значения, удовлетворяющие указанным ограничениям.

12. Внутренняя часть треугольника с вершинами в серединах сторон данного. Указание. См. решение задачи 8.

13. Пусть B_1 — точка, симметричная B относительно A. Искомое множество состоит из двух равных окружностей, проходящих через A и B_1, делящихся хордой AB_1 на две дуги в 60° и 300°. Указание. Опустим перпендикуляр MK на AC (рис. 149). Тогда $MK=\frac{1}{2}BN$, значит, $\sin\angle CAM=\frac{1}{2}$, $\angle CAM$ равен или 30°, или 150°, а $\angle B_1CA=\angle CAM$.

14. Прямая, перпендикулярная OA, где O — центр данной окружности. Указание. Касательные, проведенные через M к обеим окружностям, равны (см. задачу 10 вводной части). Значит, касательная из M к данной окружности равна MA. Далее, $MA^2-MO^2=R^2$ (см. задачу 2 вводной части).

15. Пусть C и D — точки пересечения окружностей (C на AB), M — середина AB. Все треугольники ABD подобны между собой. Значит, угол CMD равен одному из углов между DM и AB (в зависимости от того, по какую сторону от CD расположена точка M). Искомое множество есть окружность, проходящая через C и D.

Другое решение. R_1 и R_2 — радиусы окружностей, O_1 и O_2 — их центры, K_1 и K_2 — проекции центров на AB, K_1 и K_2 — середины AC и CB. Значит, $K_1M=CK_2$, $K_2M=CK_1$, $O_1M^2+O_2M^2=(O_1K_1^2+K_1M^2)+(O_2K_2^2+K_2M^2)=(O_1K_1^2+K_2M^2)+(O_2K_2^2+K_1M^2)=(O_1K_1^2+CK_1^2)+(O_2K_2^2+CK_2^2)=R_1^2+R_2^2$.

Таким образом (см. вводную часть), искомое множество есть окружность с центром в середине O_1O_2, проходящая через C и D.

16. Искомое геометрическое место состоит из двух прямых, получающихся из l поворотом вокруг A на 60° в ту и другую сторону.

17. Искомое геометрическое место представляет собой дугу BC окружности, описанной около треугольника ABC. Указание.

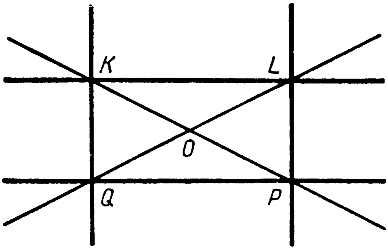


Рис. 148

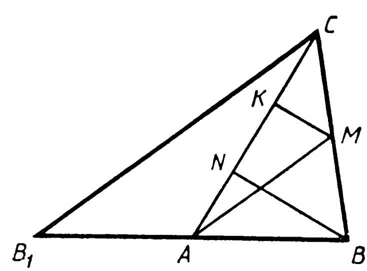


Рис. 149

Треугольники DBC и BCE подобны $\left(\angle DBC = \angle BCE = 120°,\ \frac{DB}{BC} = \frac{BC}{CE}\right)$ и подобны треугольнику BMC (M — точка пересечения DC и BE), значит, $\angle BMC = \angle DBC = 120°$.

18. Если N — точка пересечения прямых PQ и AB, то $\frac{CN}{AN} = \frac{PC}{AQ} = \frac{CB}{AC}$, т. е. N — фиксированная точка. Искомое множество есть окружность с диаметром CN. Если теперь M — фиксированная точка, то D лежит на прямой, параллельной прямой MN и проходящей через такую фиксированную точку L на прямой AB, для которой $\frac{AL}{LB} = \frac{AN}{CN}$, причем L так же расположена относительно отрезка AB, как N относительно отрезка AC. (Проведем через D прямую, параллельную MN, найдем точку L. Поскольку MN содержит PQ, то из соответствующих подобий, найдем $\frac{AL}{LB} = \frac{AL}{AD} \cdot \frac{BD}{LB} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{AN}{AQ} \cdot \frac{BP}{BN} \cdot \frac{AQ}{CQ} = \frac{AN}{BN} \cdot \frac{BP}{CQ} = \frac{AN}{BN} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AN}{CN}$.)

19. Средняя линия, параллельная AC. Указание. Пусть φ — угол между AC и BD. Тогда $S_{APK} = \frac{1}{2} AK \cdot PD \cdot \sin\varphi$, $S_{BPC} = \frac{1}{2} BP \cdot DC \cdot \sin\varphi$.

Из условия следует, что $AK \cdot PD = BP \cdot DC$, откуда $BP = \frac{AK \cdot PD}{DC} = \frac{AK \cdot PD}{AD}$.

Пусть прямая, проходящая через K параллельно BD, пересекает AP в точке N. Из подобия треугольников AKN и ADP найдем $KN = \frac{AK \cdot PD}{AD} = BP$. Отсюда следует, что AP делит BK пополам.

20. Поскольку $\angle DEM = \angle DPM = 90°$, точки D, E, P и M лежат на одной окружности. Значит, $\angle DME = \angle DPE = 45°$. Искомое геометрическое место точек есть прямая DC.

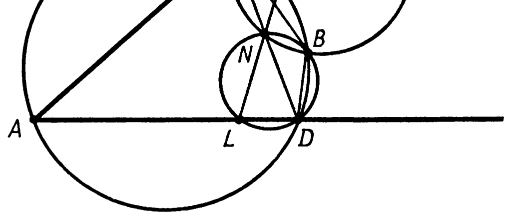


Рис. 150

21. Рассмотрим случай, когда точка B лежит внутри данного угла. Прежде всего заметим, что все получающиеся треугольники BCD (рис. 150) подобны между собой, поскольку $\angle BCD = \angle BAD$, $\angle BDC = \angle BAC$. Поэтому если N — середина CD, то постоянными будут углы BNC и BND. Опишем около $\triangle BNC$ окружность. Пусть K — вторая точка пересечения этой окружности с AC. Поскольку $\angle BKA = 180° - \angle BNC$, то точка K фиксирована. Аналогично фиксированной будет точка L — вторая точка пересечения окружности, описанной около $\triangle BND$, с прямой AD. При этом $\angle LNK = \angle LNB + \angle BNK = 180° - \angle BDA + \angle BCK = 180°$, т. е. N лежит на прямой LK. Множество точек N есть отрезок LK, а геометрическим местом центров тяжести $\triangle ACD$ будет отрезок, ему параллельный, делящий AK в отношении $2:1$ (получается с помощью гомотетии с центром в A и коэффициентом $\frac{2}{3}$).

22. Если O — вершина угла, $ABCD$ — прямоугольник (A фиксирована), то точки A, B, C, D, O на одной окружности. Следовательно, $\angle COA = 90°$, т. е. точка C лежит на прямой, перпендикулярной OA и проходящей через O.

23. Заметим, что все получающиеся треугольники ABC подобны между собой. Следовательно, если взять в каждом треугольнике точку K, делящую сторону BC в одном и том же отношении, то, поскольку $\angle AKC$ сохраняет постоянное значение, точка K будет описывать окружность. Значит, точка M, делящая AK в постоянном отношении, также будет описывать окружность, получающуюся из предыдущей с помощью гомотетии с центром в точке A и с коэффициентом $k = \frac{AM}{AK}$. Это рассуждение используется во всех пунктах: а), б) и в).

24. Пусть K — середина AB, а M — основание перпендикуляра, опущенного из K на AC. Все треугольники AKM подобны между собой (по двум углам), следовательно, будут подобны все треугольники ABM. Теперь легко получить, что искомое геометрическое место есть окружность с хордой BC, причем углы, опирающиеся на эту хорду, равны углу AMB или к нему дополнительному. (Меньшая дуга этой окружности расположена по ту же сторону от BC, что и меньшая дуга исходной окружности.)

25. Если M, N, L и K — данные точки (M и N на противоположных сторонах прямоугольника, L и K также), P — середина MN, Q — середина KL, O — точка пересечения диагоналей прямоугольника (рис. 151), то $\angle POQ = 90°$. Следовательно, искомым геометрическим местом точек будет окружность, построенная на PQ как на диаметре.

26. Искомое геометрическое место точек — две прямые, перпендикулярные данным прямым. Указание. Обозначим данную точку буквой A, расстояние от A до данных прямых равно a

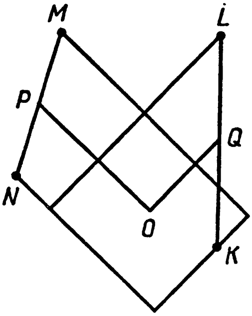


Рис. 151

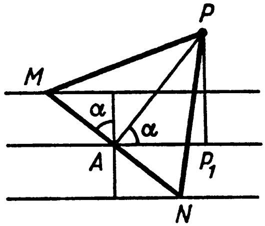


Рис. 152

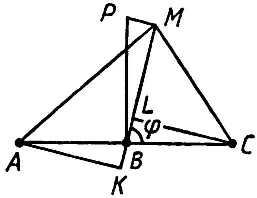


Рис. 153

(рис. 152). Имеем $MA=\frac{a}{\cos\alpha}$, $AP=MA\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{3}}{\cos\alpha}$. Пусть P_1 — проекция P на прямую, проходящую через A параллельно данным. Тогда $AP_1=AP\cos\alpha=a\sqrt{3}$.

27. Восставим к BM в точке M перпендикуляр; пусть P — точка пересечения этого перпендикуляра и перпендикуляра, восставленного к исходной прямой в точке B (рис. 153). Покажем, что величина PB постоянна. Пусть $\angle MBC=\varphi$, через K и L обозначим основания перпендикуляров, опущенных из A и C на MB.

По условию $\frac{MK}{KA}+\frac{LM}{LC}=k$, но $LC=BC\sin\varphi$, $AK=BA\sin\varphi$.

Значит,

$$\frac{MK}{BA\sin\varphi}+\frac{LM}{BC\sin\varphi}=k,\quad \frac{BM\pm BK}{BA\sin\varphi}+\frac{BM\mp BL}{BC\sin\varphi}=k,$$

$$\frac{BM}{\sin\varphi}\left(\frac{1}{BA}+\frac{1}{BC}\right)\pm\left(\frac{BK}{BA\sin\varphi}-\frac{BL}{BC\sin\varphi}\right)=k,$$

$$\frac{BM}{\sin\varphi}=\frac{k\cdot BA\cdot BC}{BA+BC},\quad PB=\frac{k\cdot BA\cdot BC}{BA+BC},$$

что и требовалось. Следовательно, искомое геометрическое место точек — две окружности, касающиеся прямой AC в точке B, с диаметрами, равными $\frac{k\cdot BA\cdot BC}{BA+BC}$.

28. Продолжим AQ за точку Q и возьмем на этом луче точку M так, что $QM=\frac{1}{2}AQ$, и точку A_1 так, что $MA_1=AM$; M — середина стороны BC треугольника ABC; $\angle CBA_1=\angle BCA$, $\angle ABA_1=180°-\angle BAC$.

Следовательно, если мы построим окружности на AM, MA_1 и AA_1 как на диаметрах, то искомое геометрическое место точек будет состоять из точек, расположенных вне первых двух и внутри третьей окружностей.

29. Пусть A — вершина данного угла. Рассмотрим случай, когда O вне треугольника AMN (рис. 154, a). Обозначим через

P точку пересечения окружности, описанной около AMN, с биссектрисой AO. Докажем, что P — центр окружности, описанной около треугольника MON.

Имеем $\angle MPN = 180° - \alpha$ $(\alpha = \angle MAN)$, $\angle MON = 180° - (\angle OMN + \angle ONM) = 180° - \frac{1}{2}((180° - \angle AMN) + (180° - \angle ANM)) = \frac{1}{2}(\angle AMN + \angle ANM) = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Значит, $\angle MPN = 2\angle MON$, а поскольку $MP = PN$ (как хорды, окружности, которым соответствуют равные углы), то P — центр описанной около MON окружности.

Итак, точка P находится на отрезке AO. Найдем крайние положения этой точки. В треугольнике MON угол MON постоянен, OP — радиус описанной окружности. Значит, OP пропорционален MN. Из геометрических соображений достаточно ясно, что наименьшим MN будет в случае, когда MN перпендикулярно AO, а наибольшим, когда MN совпадает с AQ (вернее, сколько угодно близко к AQ). Докажем это. OM_0N_0 — треугольник, соответствующий перпендикулярности M_0N_0 и AO. Рассмотрим треугольники OMN (общий случай), OM_0N_0 и OQA. У них одинаковые углы при вершине O и равные высоты, опущенные из O. Повернем треугольники OMN и OM_0N_0 вокруг O так, чтобы MN и M_0N_0 попали на прямую AQ (рис. 154, *б*). Треугольник OM_0N_0 равнобедренный $(OM_0 = ON_0)$. Значит, $NO > N_0O = M_0O > MO$ и площадь треугольника NON_0 больше площади треугольника MOM_0 (углы при вершине O у них равны). Следовательно, $NN_0 > MM_0$ и т. д.

Аналогично рассматривается случай, когда O внутри треугольника AMN. Рассмотрим на луче AO точки P_1, P_2, P_3, такие, что $AP_1 = \frac{1}{2}AO$, $AP_2 = \dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$, $AP_3 = \dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$, где r — радиус данной окружности.

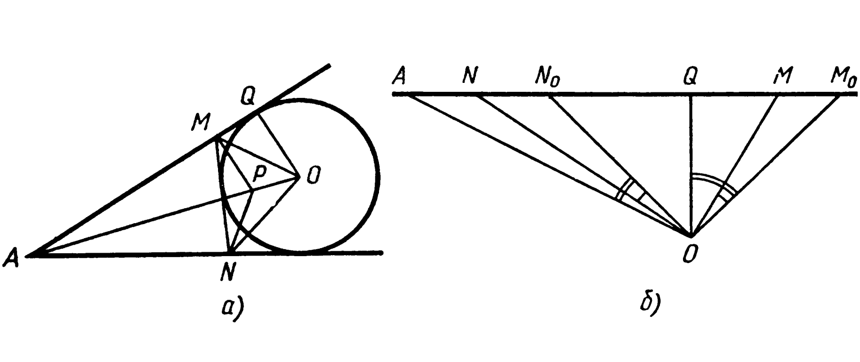


Рис. 154

Тогда P удовлетворяет условиям $AP_1 < AP \leqslant AP_2$, $AP \geqslant AP_3$ (отрезок и луч).

30. Обозначим: O_1, O_2 — центры окружностей, r_1, r_2 — их радиусы, M — середина AB, O — середина O_1O_2.

Имеем (по формуле длины медианы)

$$O_1M^2 = \frac{1}{4}(2r_1^2 + 2O_1B^2 - AB^2), \quad O_2M^2 = \frac{1}{4}(2r_2^2 + 2O_2A^2 - AB^2),$$

$$O_1B^2 = \frac{1}{2}(O_1O_2^2 + 4OB^2 - 2r_2^2), \quad O_2A^2 = \frac{1}{2}(O_1O_2^2 + 4OA^2 - 2r_1^2).$$

Таким образом, $O_1M^2 - O_2M^2 = r_1^2 - r_2^2$, т. е. (задача 2 вводной части) точки M расположены на перпендикуляре к O_1O_2. Если окружности разного радиуса и не пересекаются, то искомое геометрическое место точек состоит из двух отрезков, получающихся следующим образом: надо из отрезка с концами в середине общих внешних касательных выкинуть точки, расположенные между серединами общих внутренних касательных. (Если M — точка отрезка с концами в серединах общих внутренних касательных, то прямая, проходящая через M перпендикулярно OM, не пересекает окружности.) В остальных случаях (окружности пересекаются или равны) искомое геометрическое место точек — весь отрезок с концами в серединах общих внешних касательных.

31. а) Так как $\angle FNB = 90°$, $\angle CNM = 135°$, $\angle FNM = 45°$ (предполагаем, что $AM > MB$), то $\angle FNC = 90°$ и C, N и B на одной прямой и т. д.

б) Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABK с гипотенузой AB (K по другую сторону от AB, в отличие от квадратов). Четырехугольник $ANBK$ вписанный, следовательно, $\angle ANK = \angle ABK = 45°$, т. е. NK проходит через M. Искомое геометрическое место точек есть средняя линия треугольника ALB, где L — точка, симметричная точке K относительно AB.

32. Пусть N — точка пересечения серединного перпендикуляра и касательной, O — центр окружности, R — ее радиус.

Имеем $ON^2 - NA^2 = R^2 + MN^2 - NA^2 = R^2$. Таким образом, искомое геометрическое место точек — прямая, перпендикулярная OA (задача 2 вводной части).

33. Если O_1 и O_2 — центры данных окружностей, Q_1 и Q_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC_1 и AB_1C, то $O_1Q_1O_2Q_2$ — параллелограмм. Прямая Q_1Q_2 проходит через середину отрезка O_1O_2 (точка D). Вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников ABC_1 и AB_1C, симметрична точке A относительно прямой Q_1Q_2. Искомое геометрическое место точек есть окружность с центром в точке D и радиусом AD.

34. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, r_1 и r_2 — их радиусы. Рассмотрим два равнобедренных прямоугольных треугольника с гипотенузой O_1O_2: O_1O_2O и O_1O_2O'. Искомое геометрическое место точек есть два кольца с центрами O и O' и радиусами: внешним $\frac{\sqrt{2}}{2}(r_1+r_2)$ и внутренним $\frac{\sqrt{2}}{2}|r_1-r_2|$.

Докажем это. Пусть M — точка на окружности O_1, N — на окружности O_2. Если M фиксирована, а N пробегает вторую окружность, то вершины прямых углов равнобедренных прямоугольных треугольников описывают две окружности радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}r_2$, получающиеся из окружности O_2 с помощью поворота вокруг M на угол 45° (в одну и в другую сторону) с последующей гомотетией с центром в M и коэффициентом $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Пусть O_M — центр одной из этих окружностей. Точка O_M получена из O_2 поворотом вокруг M в соответствующем направлении и гомотетией с центром в M и коэффициентом $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Но O_M можно получить из M с помощью соответствующего поворота и гомотетии с центром O_2. Следовательно, когда M описывает окружность O_1, O_M описывает окружность радиусом $\frac{\sqrt{2}}{2}r_1$ с центром в O или O'.

35. в) Строим сначала $y=\frac{ab}{d}$, затем $x=\frac{yc}{e}$. г) $x=\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}$.

е) Умножим обе части на $\sqrt{a}$. Справа будет $a+\sqrt{ba}+\sqrt{ca}=y$. Тогда $\sqrt{xa}=y$, $x=\frac{y^2}{a}$. ж) Умножим обе части на a^2. Затем строим y, равный правой части.

37. Возьмем отрезок $AB=2k$. С центрами A и B построим окружности радиусами $k+1$, C и F — точки их пересечения (рис. 155). Тогда $CE=\sqrt{(k+1)^2-k^2}=\sqrt{2k+1}$, $CD=\sqrt{2(k+1)}$. Если $k\geqslant 1$, то получаем отрезки длиной $\sqrt{n}$, начиная с $\sqrt{3}$. Отрезок длиной $\sqrt{2}$ также легко строится.

39. Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то в треугольнике BMC знаем все стороны.

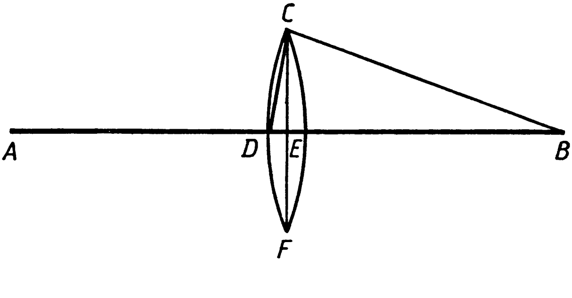


Рис. 155

40. Если I — центр вписанной окружности треугольника ABC, то в треугольнике BIC известны BC, высота из вершины I (равна r) и $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$.

41. Задача решается методом подобия (см. задачу 11 вводной части).

42. Рассмотрим треугольник ABC. BC известна. Вершина A расположена на прямой, параллельной BC (расстояние до BC равно h_a). Кроме того, поскольку $AC:AB$ известно, то A лежит на известной окружности (см. задачу 3 вводной части).

43. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, N — середина BC, K — середина BM. В треугольнике MNK известны все стороны $\left(MN = \frac{1}{3}m_a,\ KM = \frac{1}{3}m_b,\ KN = \frac{1}{3}m_c\right)$.

44. Возьмем произвольный отрезок d. Треугольник со сторонами $x = \frac{d^2}{h_a}$, $y = \frac{d^2}{h_b}$, $z = \frac{d^2}{h_c}$ подобен искомому по третьему признаку $\left(x:y = h_b:h_a = \frac{2S}{b}:\frac{2S}{a} = a:b;\ x:y:z = a:b:c\right)$.

45. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ACBC_1$. В треугольнике CBC_1 знаем сторону $CC_1 = 2m_c$ и высоты из вершин C (равна h_b, так как AC параллельна BC_1) и C_1 (равна h_a). Построение следующее: строим CC_1, с центрами C и C_1 строим окружности радиусами h_b и h_c, проводим к ним касательные из C_1 и C (возможны два случая), получаем треугольник CBC_1, а затем и ABC.

46. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. В треугольнике BMC знаем стороны $BM = \frac{2}{3}m_b$, $CM = \frac{2}{3}m_c$ и высоту, опущенную из M $\left(\text{равна } \frac{1}{3}h_a\right)$. Этот треугольник можно построить. (Возможны два случая.)

47. Рассмотрим треугольник ABC, в котором AD — высота, AE — медиана. Треугольник ADE можно построить. Расстояние от E до AB равно $\frac{1}{2}h_c$, т. е. AB — касательная к окружности радиусом $\frac{1}{2}h_c$ с центром в E.

48. Рассмотрим треугольник ABC, в котором AD — высота, AE — биссектриса. Прямоугольный треугольник ADE задан. Обозначим $\angle DAE = \beta$. Проведем через A прямую параллельную CB, и обозначим через B_1 точку, симметричную B относительно этой прямой (рис. 156). Если $\angle CAE = \alpha$, то $\angle BAD = \alpha + \beta$, $\angle BAB_1 = 2(90° - \angle BAD) = 180° - 2\alpha - 2\beta$, $\angle CAB_1 = \angle BAB_1 + \angle BAC = 180° - 2\alpha - 2\beta + 2\alpha = 180° - 2\beta$. Таким образом, $\angle B_1AC$ известен. Отсюда следует нужное построение.

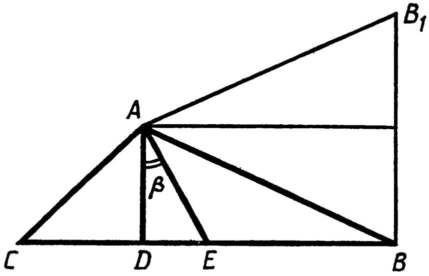


Рис. 156

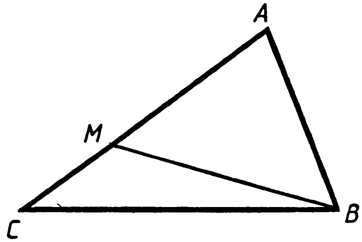


Рис. 157

49. Возьмем на луче AB точку M так, что $AM = AC$. В треугольнике CBM известны две стороны и угол. Можем его построить. Вершина A находится на пересечении прямой BM и серединного перпендикуляра к CM.

50. Возьмем на луче AC точку M так, что $AM = AB$ (рис. 157). В треугольнике CMB знаем стороны CM и CB и угол MBC:
$$\angle MBC = B - \angle ABM = B - \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = B - \frac{B+C}{2} = \frac{1}{2}(B - C).$$

51. Продолжим высоту AD треугольника ABC и возьмем на продолжении AD точку C_1 так, что $AC_1 = AC$ ($DC_1 = b - h_a$). Проведем через C_1 прямую, параллельную BC, B_1 — точка ее пересечения с AB (рис. 158). Получаем задачу: «Внутри угла с вершиной B_1 дана точка C. Найти на заданной стороне этого угла точку A, такую, что расстояния от A до C и другой стороны угла равны между собой».

Нужное построение можно осуществить методом подобия. Берем произвольную точку K на одной стороне угла (B_1C_1), восставляем к ней перпендикуляр KM, строим окружность с центром M и радиусом MK. Берем одну (любую) из точек пересечения этой окружности с B_1C, проводим через C прямую, параллельную NM, находим точку A.

52. См. решение задачи 16 вводной части.

53. Пусть CD — биссектриса треугольника ABC. Поскольку $h_a \cdot a = h_b \cdot b$, то $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$. Значит, $\frac{BD}{DA} = \frac{BC}{CA} = \frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$, т. е. точка D

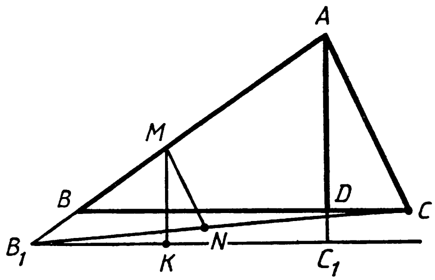


Рис. 158

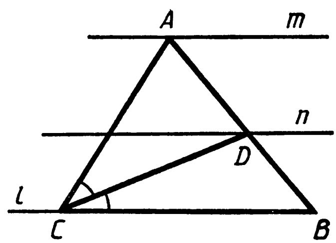


Рис. 159

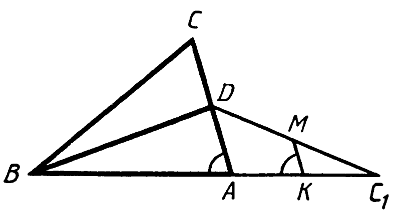


Рис. 160

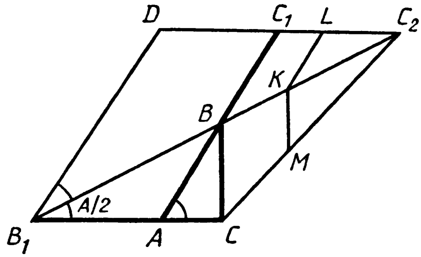


Рис. 161

находится на прямой, параллельной BC, расположенной на известном расстоянии от BC.

Построение. Берем произвольно прямую l (рис. 159) и точку C на ней. Строим прямые m и n, параллельные l, m — на расстоянии h_a от l, n делит расстояние между l и m в отношении $\frac{h_b}{h_a}$. Находим точку D на n ($CD = l_c$). Симметрично отображаем l относительно CD и находим A.

54. Возьмем на продолжении BA точку C_1, так, что $AC_1 = AC$ (рис. 160). Треугольник DAC_1 нам известен с точностью до подобия. $\left(\angle DAC_1 = 180° - A,\ \frac{DA}{AC_1} = \frac{1}{2}.\right)$ Имеем построение. На прямой откладываем $BC_1 = b + c$. Берем произвольно K на BC и строим треугольник C_1KM $\left(\angle MKC_1 = 180° - A,\ MK = \frac{1}{2} C_1K\right)$. Затем на прямой C_1M находим D как точку пересечения этой прямой с окружностью с центром в B и радиусом m_b.

55. Возьмем на прямой AC точку B_1, на прямой AB точку C_1 так, что $B_1A = AB = c$, $BC_1 = BC = a$ (рис. 161). $B_1C = b + c$ и $AC_1 = a + c$ известны, $\angle BB_1A = \frac{1}{2} \angle A$. Проведем $B_1D = AC_1$, $BD \| AB$, а затем DC_1. Пусть C_2 — точка пересечения DC_1 и B_1B. Взяв на прямой отрезок B_1C, можем построить точки D и C_2. На прямой BC_2 возьмем произвольно K, найдем L на DC_2 так, что KL параллельна B_1D. Пусть M — одна из точек пересечения окружности с центром K и радиусом KL с прямой CC_2. Проведя через C прямую, параллельную KM, найдем точку B и т. д.

56. Указание. Геометрическим местом точек внутри данного угла, для которых отношение расстояний до сторон угла равно заданной величине, есть луч, выходящий из вершины угла.

57. Указание. Воспользуйтесь результатом задачи 3 вводной части.

58. Таких точек 4; две из них находятся на луче BD, где D — середина AC, причем $BM_1 = \frac{4}{5} BD$, $BM_2 = \frac{4}{3} BD$, а две на прямой, проходящей через B параллельно AC, причем M_3 и M_4 удалены от B на расстояние $2AC$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что для заданных точек P, Q и R геометрическое место точек M, таких, что треугольники MPQ и MPR равновелики, состоит из двух прямых, проходящих через P: одна параллельна QR, другая делит QR пополам.

59. Пусть K, L и M — точки пересечения продолжения биссектрисы, медианы и высоты, выходящих из вершины A треугольника ABC, с описанной окружностью (порядок следования L, K, M), O — центр окружности. Прямая KO перпендикулярна BC, так как K — середина дуги BC, значит, KO параллельна AM. Можно построить точку A, затем середину BC как точку пересечения AL и KO и т. д.

60. Возможны два случая: 1) Прямая l не пересекает отрезок AB. В этом случае расстояние до l от середины AB равняется половине данной величины, т. е. эта прямая касается соответствующей окружности. 2) Прямая l пересекает отрезок AB. Проведем прямую l_1, проходящую через A и параллельную l. Расстояние от B до l_1 равно заданной величине.

61. Если M — такая точка, что $\angle AMB = \angle BMC$, то MB — биссектриса угла M треугольника AMC. Значит, $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}$, точка M принадлежит известной окружности (см. задачу 3 вводной части). Искомые точки — точки пересечения соответствующих окружностей (если окружности пересекаются).

62. Пусть O — точка пересечения l и p. Возьмем на продолжении отрезка OM точку D так, что $MD = \frac{1}{2} OM$. Тогда BD параллельна l, т. е. B можно построить.

63. Пусть O — начало лучей. Построим сначала прямую, пересекающую данные лучи и OM в токах P, Q, L, K так, что $PQ = LK$ (рис. 162, a). Рассмотрим параллелограмм $KOPD$. Из равенства $PQ = LK$ следует равновеликость треугольников OPE и OKF. В самом деле, $\frac{PE}{OK} = \frac{PQ}{QK} = \frac{LK}{PL} = \frac{KF}{OP}$, т. е. $OP \cdot PE = OK \cdot KF$. Возможно следующее построение. Возьмем точ-

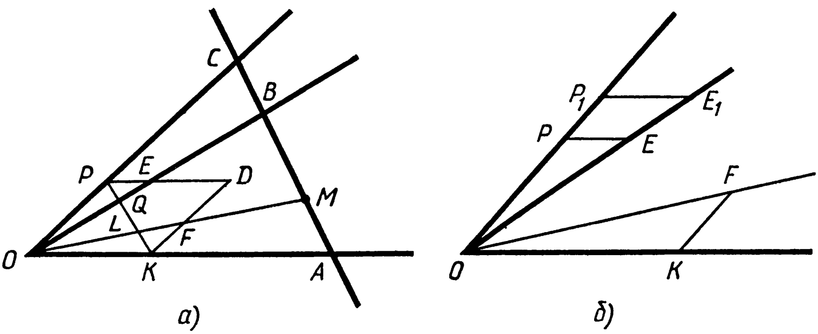


Рис. 162

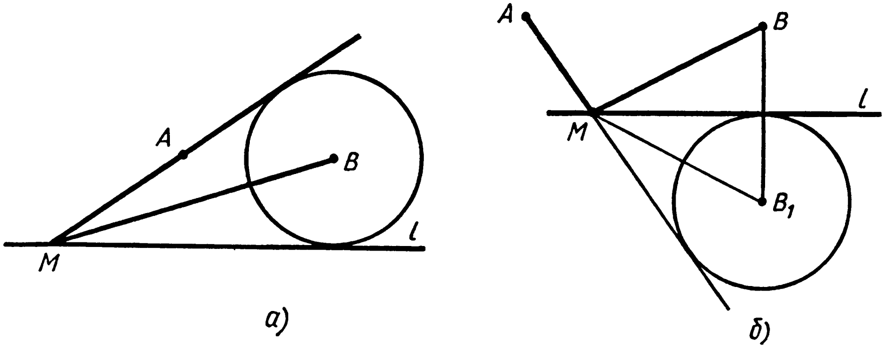


Рис. 163

ки K и P_1 произвольно, $OK = OP_1 = a$. Построим треугольники OKF и OP_1E_1 (рис. 162, *б*, $KF \parallel OP_1$, $P_1E_1 \parallel OK$). Пусть $KF = b$, $P_1E_1 = c$, $OP = x$. Из подобия треугольников OPE и OP_1E_1 следует, что $\frac{S_{OPE}}{S_{OP_1E_1}} = \frac{x^2}{a^2}$, а поскольку $S_{OPE} = S_{OKF}$, то $\frac{ab}{ac} = \frac{x^2}{a^2}$, откуда $x = a\sqrt{\frac{b}{c}}$, и отрезок x можно построить. Затем через M проводим прямую, параллельную PK.

64. Возможны два решения, которым соответствуют рисунки 163, *а, б*. В первом случае строим окружность с центром в B, касающуюся прямой l, и через A проводим касательную к этой окружности так, как на рисунке 163, *а*. Во втором сначала строим B_1, симметричную B относительно l, затем, как и в первом случае, строим окружность и касательную к ней (рис. 163, *б*).

65. Рассмотрим квадрат $ABCD$ и точки K, M, L и P на его сторонах.

I решение основывается на том, что пара перпендикулярных прямых образует при пересечении со сторонами квадрата или их продолжениями равные отрезки (рис. 164, *а*). Отсюда построе-

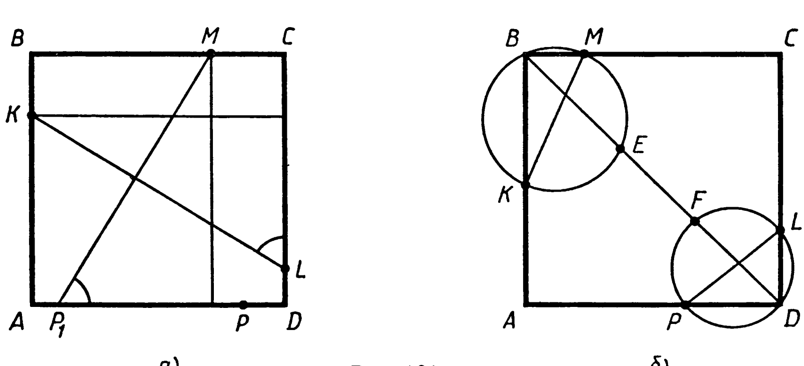


Рис. 164

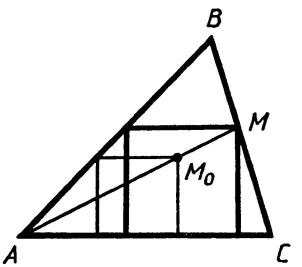


Рис. 165

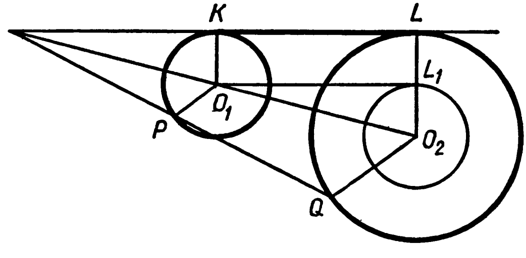


Рис. 166

ние: проводим через M прямую, перпендикулярную KL, и откладываем на ней отрезок $MP_1 = KL$ (два случая) и проводим прямую PP_1, на которой расположена сторона AD. (Если P и P_1 совпадут, решений бесконечно много.)

II решение. Окружности, построенные на KM и PL как на диаметрах, проходят через вершины B и D квадрата (рис. 164, *б*). Диагональ BD, будучи биссектрисой углов B и D квадрата, пройдет через середины дуг KM и PL — точки E и F, которые можно построить, затем провести прямую EF и найти точки B и D (здесь также возможна неоднозначность).

66. Построения можно осуществить методом подобия (рис. 165). «Маленький» квадрат строим произвольно, проводим AM_0 и находим точку M — одну из вершин искомого квадрата.

67. Пусть KL — общая внешняя касательная к окружностям с центрами O_1 и O_2 (рис. 166). Тогда прямая, проходящая через O_1 параллельно KL, касается окружности с центром O_2 и радиусом, равным разности радиусов данных окружностей. Можно сделать иначе. Проведем в окружностях параллельные радиусы O_1P и O_2Q, как на рисунке 166, найдем точку пересечения PQ и O_1O_2. Через эту же точку должна проходить и прямая KL.

Аналогично решается задача о построении общей внутренней касательной (при первом способе строится окружность с центром O_2 и радиусом, равным сумме радиусов).

68. Задача может быть решена методом подобия. Возьмем на AB произвольную точку K_1 (рис. 167), проведем через K_1 прямую, параллельную BC, возьмем на ней точку M_1 так, что $AK_1 = K_1M_1$, затем найдем на AC точку C_1, такую, что $M_1C_1 = K_1M_1 = AK_1$, построим ромб $K_1M_1C_1M_2$, после чего найдем точку M как точку пересечения BC и AM_2, $MK \| M_2K_1$ (обоснование этого построения достаточно очевидно).

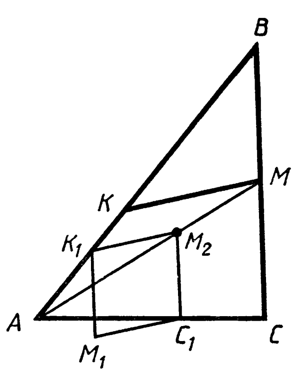


Рис. 167

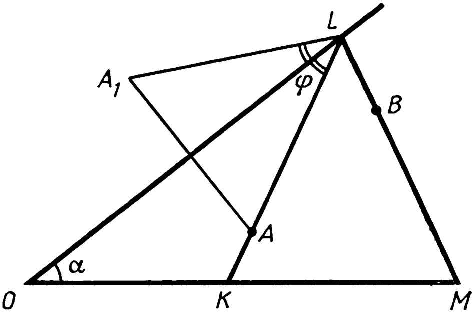


Рис. 168

69. Сделайте поворот на 90° вокруг заданной точки (в ту и другую сторону).

70. Пусть O — вершина угла, α — его величина. Построим точку A_1, симметричную A относительно стороны OL этого угла (рис. 168). Если $\angle OLK=\varphi$, то $\angle A_1LB=$ $=2\varphi+\angle KLM=2\varphi+$ $+(180°-2\angle LKM)=2\varphi+$ $+(180°-2(\alpha+\varphi))=180°-2\alpha$. Значит, $\angle A_1LB$ известен. Отсюда следует построение.

71. Если K — точка на AM, такая, что $MK=BM$, то треугольник AKB можно построить (известны AB, AK и $\angle AKB$).

72. Опустим из O_1 и O_2 — центров окружностей — перпендикуляры O_1M и O_2N на AB (рис. 169). Отрезок MN известен, $MN=\frac{1}{2}AB$. Пусть L — точка на O_1M, такая, что $O_2L\parallel MN$ ($O_2L=MN$). В прямоугольном треугольнике O_1O_2L известны гипотенуза O_1O_2 и катет $O_2L=MN$. Значит, его можно построить.

73. Решим другую задачу: около данного правильного (на самом деле, можно любого) треугольника KLM описать треугольник ABC, равный данному. Поскольку углы A, B и C известны, то точки A, B и C лежат на окружностях, которые мы можем построить, и задача сводится к предыдущей: через точку пересечения окружностей провести прямую, образующую в пересечении с ними отрезок данной длины.

74. I *решение.* Пусть M — точка пересечения AB с данной прямой l, а P — точка касания с этой прямой искомой окружности (рис. 170). Тогда $MP=\sqrt{MA\cdot MB}$, т. е. отрезок длиной MP можем построить. (Обратите внимание на то, что для точки P есть два положения — по ту и другую сторону от M.) Если AB парал-

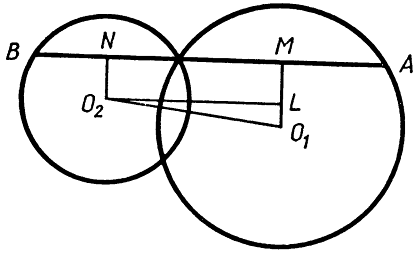


Рис. 169

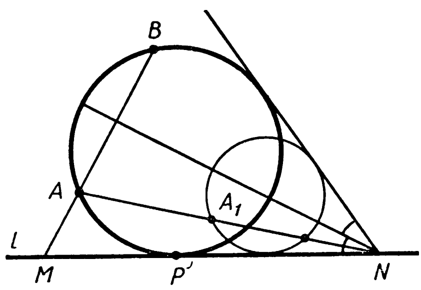


Рис. 170

лельна данной прямой, то P единственна и находится на срединном перпендикуляре к AB.

II *решение.* Пусть серединный перпендикуляр к AB пересекает прямую в точке N. Прямая, симметричная данной относительно серединного перпендикуляра, также касается окружности. Приходим к задаче: «В данный угол вписать окружность, проходящую через данные (достаточно, впрочем, одной) точки A и B». Эта задача может быть решена методом подобия: вписываем произвольную окружность, находим ее точки пересечения с AN и т. д.

75. См. решение задачи 14 вводной части.

76. Геометрическим местом точек M, таких, что касательная к данной окружности из M равна данной величине, есть окружность, концентрическая данной.

77. См. решение задачи 17 вводной части. Надо сделать перенос одной из окружностей, параллельный l, так, чтобы расстояние между проекциями центров на l равнялось половине заданного отрезка.

78. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, A и B — заданные на них точки, C — точка пересечения O_1A и O_2B. Требуется найти на AC и BC точки K и M, такие, что $AK=\frac{1}{2}KM=BM$. Решение этой задачи аналогично решению задачи 68.

79. Пусть искомая окружность касается данной прямой в точке L, а окружности в точке K (рис. 171). Проведем через центр O данной окружности прямую, перпендикулярную данной прямой, и обозначим через C, E и D ее точки пересечения с окружностью и прямой. M — точка пересечения CA с искомой окружностью. Точки C, K и L лежат на одной прямой. (Докажите!) Треугольники CKE и CDL — подобные прямоугольные треугольники, откуда $CK\cdot CL=CE\cdot CD$. Значит, $CA\cdot CM=CK\cdot CL=$ $=CE\cdot CD$, $CM=\frac{CE\cdot CD}{CA}$. Отрезок CM можно построить (два случая). Задача теперь свелась к задаче 74.

80. Построение понятно из рисунка 172. Проводим последовательно AM, MB, MC, DC. Находим точку K, проводим AK,

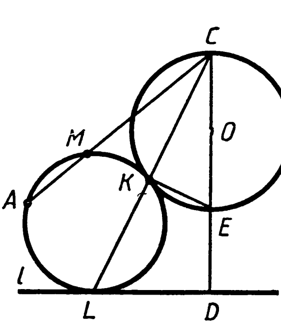


Рис. 171

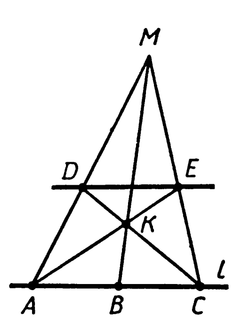


Рис. 172

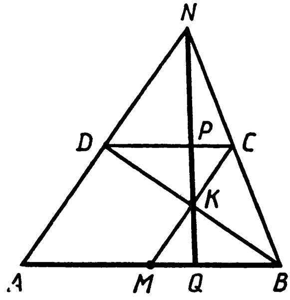


Рис. 173

находим точку E. DE параллельна AB (см. также задачу 25 вводной части).

81. Построение основывается на следующей теореме. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD. Пусть N — точка пересечения AD и BC, M — середина AB, K — точка пересечения MC и DB. Тогда прямая NK пересекает DC и AB в точках P и Q, таких, что $\frac{CP}{CD}=\frac{BQ}{BA}=\frac{1}{3}$ (рис. 173).

Докажем это. Имеем $\frac{BQ}{QA}=\frac{BQ}{DP}\cdot\frac{DP}{QA}=\frac{BK}{KD}\cdot\frac{DC}{AB}=$
$=\frac{BM}{DC}\cdot\frac{DC}{AB}=\frac{BM}{AB}=\frac{1}{2}$. Значит, $BQ=\frac{1}{3}AB$.

Теперь, учитывая построение задачи 80, можно выполнить требуемое построение.

Замечание. Можно доказать, что если $MB=\frac{1}{n}AB$, то $BQ=$
$=\frac{1}{n+1}AB$. Значит, при заданных условиях мы можем с помощью одной линейки делить отрезок на n равных частей.

82. Возможность требуемого построения основывается на следующей теореме: если через точки пересечения двух окружностей проведены две прямые, пересекающие одну окружность в точках M и N, а другую в P и Q, то MN параллельна PQ. Если расположение точек такое, как на рисунке 174, то по свойству вписанного четырехугольника $\angle PQA=180°-\angle ABP=180°-\angle AMN$, т. е. $MN \parallel PQ$. То же имеет место и для других расположений (например, на рис. 174 $P_1Q_1 \parallel MN$). Дальнейшее основывается на известном свойстве трапеции (см. решение задачи 25 вводной части), благодаря которому мы можем найти середины параллельных хорд PQ и P_1Q_1 и построить прямую, проходящую через центр этой окружности.

83. Можно, например, воспользоваться тем, что для любого треугольника OAB биссектрисы углов, смежных к его углам A

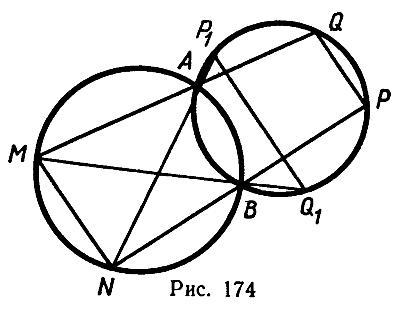


Рис. 174

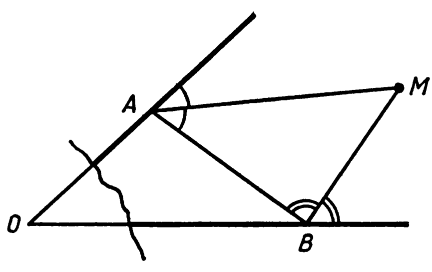


Рис. 175

и B (биссектрисы внешних углов A и B), пересекаются в точке M, расположенной на биссектрисе угла AOB (рис. 175).

84. Можно, например, взяв три точки A, B и C на данной окружности, построить три точки A_1, B_1 и C_1, им симметричные относительно данной точки, провести через A_1, B_1 и C_1 окружность и т. д.

85. Достаточно просто уметь построить какой-нибудь перпендикуляр. Тогда, построив два перпендикуляра, через данную точку проведем параллельную прямую (см. задачу 25 вводной части). Для построения одного перпендикуляра воспользуемся методом задачи 26 вводной части. Берем любую точку A на прямой, строим на прямой такие две точки C и D, для которых $CA = AD$. Теперь нам достаточно найти какие-либо две точки, расположенные на полуокружности с диаметром CD. Это сделать легко. Затем «включается» построение задачи 26 вводной части.

86. Пусть O — центр данной окружности. Предположим, что O не на прямой AB. Построим точку O_1, симметричную O относительно AB, а затем окружность того же радиуса с центром O_1. Искомые точки есть точки пересечения двух окружностей.

Пусть O на прямой AB и A отлична от O. Построим окружность с центром A, пересекающую данную. Задача сводится к делению пополам двух получившихся дуг (см. задачу 28 вводной части).

87. Например, прямоугольник со сторонами $\frac{1}{150}$, 150. Равновеликий ему квадрат имеет сторону 1. Наибольшее расстояние между точками квадрата равно $\sqrt{2} < 1{,}5$. Следовательно, при разрезании допускаются части, в которых наибольшее расстояние между точками меньше чем 1,5. Точки, лежащие на наибольшей стороне на расстоянии 1,5 от исходной, должны принадлежать различным кускам.

88. На рисунке 176 показано нужное разрезание. Прямоугольник $ABCD$ разрезан на части $ABEFM$, EDC, FDM. В квадрате $AKLM$, равновеликом $ABCD$, имеем $\triangle KLF = \triangle ECD$, $\triangle BKE = \triangle MFD$.

89. Пусть в треугольнике ABC сторона AC наименьшая, AB наибольшая (рис. 177). Выберем на сторонах AB и AC точки P

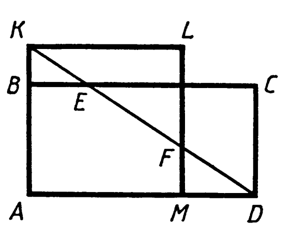


Рис. 176

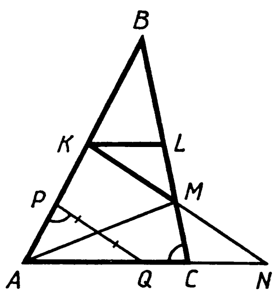


Рис. 177

и Q так, что $\angle APQ = \angle ACB$. Треугольник APQ подобен треугольнику ABC. Через середину PQ проведем прямую, пересекающую BC в точке M. Проведя через M прямую, параллельную PQ, определим точки K и N (K на стороне AB). Проведем KL параллельно AC. Нужное разрезание: треугольник BKL (он подобен ABC), треугольник KLM и четырехугольник $AKMC$ (из них составляется треугольник AKN).

90. На рисунке 178 показано, как прямоугольный треугольник ABC с острым углом $\alpha \leqslant 45°$ можно разрезать на семь остроугольных треугольников (OCK, OKL, OLM, OMN, ONC, AKL и BMN), O — центр вписанной окружности, $45° - \frac{\alpha}{2} < \varphi < 45°$.

92. Имеем $\angle ADB > \angle DBC = \angle ABD$. Значит, $AB > AD$. То же для $\triangle DBC$.

93. Из неравенства треугольника следует, что $AC + BD > > AB + DC$. Следовательно, если $AB \geqslant AC$, то $BD > DC$.

94. См. решение задачи 24 вводной части, а также задачи 59.

95. $\sqrt{10} + 1$. Указание. M — вершина треугольника, противоположная катету 3, MN содержит центр окружности.

96. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Указание. Задача сводится к определению наименьшего расстояния между точками прямой и непересекающейся с ней окружности. Для этого находим расстояние от центра окружности до прямой и вычитаем из него радиус окружности. В нашем случае, если O — центр окружности, описанной около ANB (N внутри угла), прямая AO перпендикулярна противоположной стороне угла.

97. CM — высота треугольника. Указание. Точки C, M, P и Q лежат на одной окружности с диаметром CM.

98. $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}(a+b)^2 > \frac{1}{2}c^2$.

99. Из неравенства треугольника следует $a^2 < a(b+c)$, $b^2 < b(a+c)$, $c^2 < c(a+b)$. Сложив почленно неравенства, получим наше неравенство.

100. Пусть $x = a + b - c$, $y = a - b + c$, $z = -a + b + c$. Тогда $a = \frac{1}{2}(x+y)$, $b = \frac{1}{2}(x+z)$, $c = \frac{1}{2}(y+z)$. Имеем неравенство $8xyz \leqslant (x+y)(y+z)(z+x)$. Последнее получается при почленном перемножении трех неравенств $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$, $2\sqrt{yz} \leqslant y + z$, $2\sqrt{zx} \leqslant z + x$.

101. $S \leqslant \frac{1}{2}ab \leqslant \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

103. $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$, $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$. Имеем неравенство $a^2 + b^2 + 4c^2 > \frac{9}{2}c^2$ или $a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2$ (см. задачу 98).

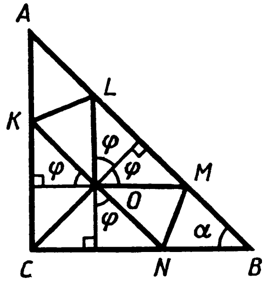


Рис. 178

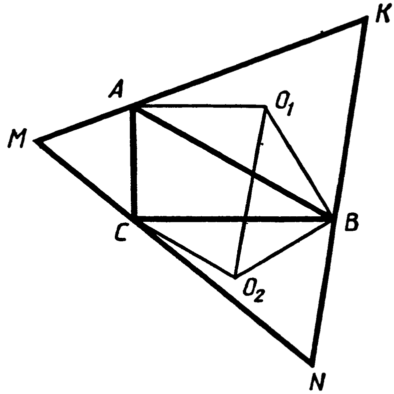


Рис. 179

104. Имеем $\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S}$, $\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S}$, $\frac{1}{r}=\frac{p}{S}$. Левое неравенство: $a+b>p$ или $a+b>c$. Правое неравенство: $c>0$.

105. Получаем неравенство (см. задачу 104) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant$ $\geqslant\frac{9}{a+b+c}$, или $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$.

Перемножаем: $1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1\geqslant 9$.

Группируем: $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant 6$. По теореме о среднем сумма в каждой скобке не меньше 2.

106. Из равенств $S=\frac{abc}{4R}$ и $S=pr$ следует, что $Rr=\frac{abc}{4p}$. Получаем неравенство $p\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{abc}{p}}$, или $(2p)^3\geqslant 27abc$, $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\geqslant abc$. Последнее неравенство есть теорема о среднем (арифметическом и геометрическом) для трех чисел.

107. $\operatorname{arctg}\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$. Указание. Докажите, что окружность, описанная около ABM, должна касаться прямой OM.

108. M совпадает с A. Указание. $3AM+2BM+CM=$ $=2(AM+BM)+(AM+CM)\geqslant 2AB+AC$.

109. $2\sqrt{\frac{7}{3}}$. Указание. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник (рис. 179), KMN — описанный около него правильный треугольник. Точки K, M и N лежат на дугах окружностей, проходящих соответственно через A и B, A и C, C и B и вмещающих углы по 60°. Задача сводится к следующей: «Через точку пересечения двух окружностей (B) провести прямую, на которой

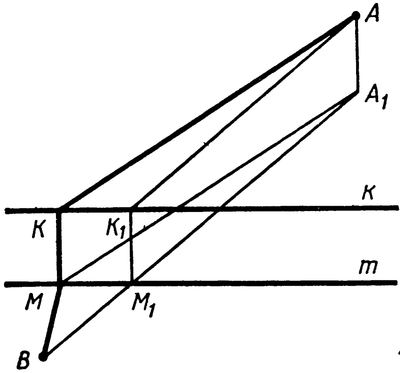


Рис. 180

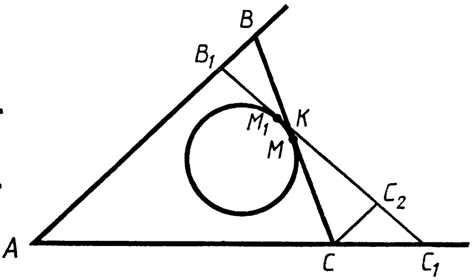


Рис. 181

эти окружности высекают отрезок (NK) наибольшей длины». Можно доказать, что искомая прямая должна быть параллельной линии центров. (Спроектируем центры окружностей на прямую. Получим отрезок, равный половине высекаемого и меньший, чем расстояние между центрами.) При этом длина самого отрезка равна удвоенному расстоянию между центрами. В нашем случае, рассмотрев O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около ABK и CBN, увидим, что $\angle O_1BO_2=90°$, $O_1B=R_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $O_2B=$ $=R_2=1$.

110. Пусть $AKMB$ — маршрут из A в B (рис. 180, KM — мост). Рассмотрим параллелограмм AA_1MK. Точка A_1 фиксирована. Понятно, что надо соединить A_1 с B, найти точку M_1 и строить мост K_1M_1.

111. Из неравенств $AM^2+BM^2\geqslant 2AM\cdot BM$ и т. д. следует, что $AM^2+BM^2+CM^2+DM^2\geqslant AM\cdot BM+BM\cdot CM+CM\cdot DM+$ $+DM\cdot AM\geqslant 2S$. Равенство будет, если $AM=BM=CM=DM$ (первое неравенство) и углы между AM и BM, BM и CM, CM и DM, DM и AM прямые (второе неравенство). Значит, $ABCD$ — квадрат, M — его центр.

112. Рассмотрим другую касательную B_1C_1, касающуюся окружности в точке M_1 (рис. 181). Пусть K — точка пересечения B_1C_1 и BC. Если B_1 на AB (как на рисунке), то K на BM и $KC>BK$. Проведем через C прямую CC_2 параллельно AB. Имеем $S_{KCC_1}>S_{KCC_2}>S_{KBB_1}$. Значит, $S_{AB_1C_1}>S_{ABC}$, что и требовалось.

Замечание. В частности, если окружность вырождается в точку M, то прямая, проходящая через M, отсекает треугольник ABC наименьшей площади, если M — середина BC.

113. $\frac{R^2}{2}\left(\operatorname{ctg}\alpha+3\operatorname{ctg}\left(60°-\frac{\alpha}{3}\right)\right)$. Указание. Пусть M и N — точки касания окружности с BC и AB. Из результата предыдущей задачи следует, что M — середина BC. Значит, $NB=$

$=BM=MC$. Если $\angle MCO=\varphi$, то $\angle MBN=2\varphi$, $\varphi+2\varphi+\alpha=180°$, $\varphi=60°-\frac{\alpha}{3}$. Затем $S_{ABC}=S_{ANO}+3S_{CMO}$.

114. $7-4\sqrt{3}$. Указание. Пусть BC и AC пересекают MN в точках P и Q. Обозначим $\frac{MC}{CN}=x$. Тогда $\frac{MP}{PN}=\frac{S_{BMC}}{S_{BNC}}=$

$$=\frac{MB\cdot MC}{BN\cdot CN}=\frac{3x}{4}.$$

Значит, $MP=\frac{3x}{3x+4}$. Аналогично $MQ=\frac{x}{x+1}$. Для x получаем уравнение $\frac{x}{x+1}-\frac{3x}{3x+4}=a$, $3ax^2+(7a-1)x+4a=0$. Поскольку $D\geqslant 0$ и $0<a<1$, то наибольшее значение a равно $7-4\sqrt{3}$.

115. $ABCD$ — квадрат площадью 1. Указание. Докажите, что из всех описанных около данной окружности четырехугольников наименьшую площадь имеет квадрат. Можно, например, выразить площадь через радиус и углы четырехугольника, а затем воспользоваться неравенством $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta\geqslant\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$. Дальнейшее следует из результата задачи 111.

116. $\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}<r<\sqrt{ab+bc+ca}$. Указание. Радиус вписанной окружности заключен между величинами радиусов двух предельных случаев. Он не может быть меньше радиуса окружности, вписанной в треугольник со сторонами $a+b$, $b+c$, $c+a$, который равен $\frac{S}{p}$, где S — площадь, p — полупериметр треугольника; таким образом, $r>\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{(a+b+c)\,abc}}{a+b+c}=\sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$. С другой стороны, r меньше радиуса окружности, изображенной на рисунке 182 (на этом рисунке противоположные касательные параллельны, точка C «убегает» в бесконечность). Поскольку для углов α, β и γ, отмеченных на рисунке, выполняется равенство $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{c}{\rho}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{a}{\rho}$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{b}{\rho}$, где ρ — радиус изображенной окружности, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=$ $=\operatorname{ctg}\gamma$ или $\frac{(c+a)\rho}{\rho^2-ac}=\frac{\rho}{b}$, откуда $\rho=$ $=\sqrt{ab+bc+ca}$.

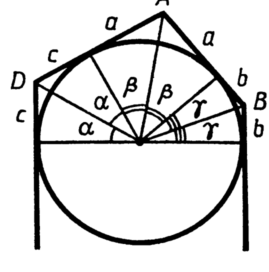


Рис. 182

117. Если m_a — наибольшая из медиан, то $m_a^2>m_b^2+m_c^2$. Выразив медианы через стороны треугольника, получим, что $5a^2<b^2+c^2$, откуда $\cos A>\frac{2(b^2+c^2)}{5bc}=$ $=\frac{2}{5}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geqslant\frac{4}{5}>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

118. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Предположим, что все углы, указанные в условии, больше $\frac{\pi}{4}$. Тогда на отрезках OB и OC можно взять соответственно точки B_1 и C_1 так, что $\angle B_1AO = \angle OB_1C_1 = \frac{\pi}{4}$.

Пусть $\angle BOA = \alpha \left(\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}\right)$. Имеем

$$OC > OC_1 = \frac{OB_1}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{OA}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{OA}{\cos 2\alpha} \geqslant OA.$$

Точно так же докажем неравенство $OA > OC$. Противоречие.

119. Пусть в $\triangle ABC$ стороны связаны соотношением $a \geqslant b \geqslant c$. Возьмем на CB точку M так, что $\angle CAM = \frac{1}{2}\angle C$. Надо доказать, что $CM \leqslant \frac{a}{2}$. По теореме синусов для $\triangle CAM$ имеем

$$CM = \frac{b \sin \frac{\angle C}{2}}{\sin \frac{3\angle C}{2}} = \frac{b}{2\cos\angle C + 1} = \frac{ab^2}{a^2 + ab + b^2 - c^2} \leqslant \frac{a}{2}.$$

120. Пусть D — середина AC. Восставим в D перпендикуляр к AC и обозначим через M точку пересечения его с BC; $\triangle AMC$ равнобедренный, значит, $\angle MAC = \angle BCA$. По условию $\triangle ABD$ также равнобедренный, $\angle ABD = \angle BDA$, $\angle ABM > 90°$ (по условию), $\angle ADM = 90°$; значит, $\angle MBD > \angle MDB$ и $MD > BM$. Отсюда следует, что $\angle MAD > \angle MAB$ (если отобразим симметрично B относительно прямой AM, то получим точку B_1 внутри угла MAD, так как $MD \perp AD$ и $MD > MB = MB_1$); таким образом, $\angle C > \angle A - \angle C$, $\angle C > \frac{1}{2}\angle A$.

121. Если $A < 90°$, то угол между медианой и биссектрисой меньше, чем угол между биссектрисой и высотой. Если $A > 90°$ — наоборот; если $A = 90°$, то углы равны. Указание. Пусть AD — высота, AL — биссектриса, AM — медиана. Продолжим биссектрису до пересечения с описанной около треугольника окружностью в точке A_1. Поскольку $MA_1 \parallel AD$, то $\angle MA_1A = \angle LAD$.

122. Если AD — высота, AN — медиана, M — точка пересечения медиан, то

$$\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{DB}{AD} + \frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AD} \geqslant \frac{CB}{AN} = \frac{CB}{3MN} = \frac{2}{3}.$$

123. Из того, что $S_{BAM} = S_{BCM}$ и $BC > BA$, $CM > MA$, следует, что $\sin\angle BAM > \sin\angle BCM$. Значит, если углы острые, то $\angle BAM > \angle BCM$; тупым же может быть лишь угол BAM. Таким образом, всегда $\angle BAM > \angle BCM$.

124. Если $OA=a$, R — радиус окружности, K — точка пересечения OA и DE, то легко найти, что $OK=a-\frac{a^2-R^2}{2a}=\frac{a^2+R^2}{2a}>R$.

125. Рассмотрим два случая:

1) Данный треугольник ABC остроугольный. Пусть $\angle B$ наибольший: $60^\circ \leqslant B < 90^\circ$. Поскольку биссектрисы углов A и C меньше 1, то и высоты этих углов h_A и h_C меньше 1. Имеем $S_{ABC}=$ $=\frac{h_A \cdot h_C}{2\sin B}<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2) Если один из углов треугольника, например B, не острый, то стороны, его заключающие, меньше соответствующих биссектрис, т. е. меньше 1, а площадь не превосходит $\frac{1}{2}$.

126. Допустим противное: например, что $c \geqslant a$; тогда $2c \geqslant$ $\geqslant c+a>b$; возводя неравенства в квадрат и складывая, получаем $5c^2>a^2+b^2$ — противоречие.

127. Обозначим $AB=BC=a$, $AM=c$, $MC=b$, $MB=m$, $\angle BMO=\psi$, $\angle MBO=\varphi$. Нужно доказать, что $OB>OM$, или $\psi>\varphi$, или $\cos\psi<\cos\varphi$. По теореме косинусов для $\triangle MBA$ и $\triangle MBC$ получим

$$\cos\varphi-\cos\psi=\frac{m^2+a^2-c^2}{2ma}-\frac{m^2+b^2-a^2}{2mb}=$$
$$=\frac{m^2(b-a)-a(b^2-a^2)+b(a^2-c^2)}{2mab},$$

но $a-c=b-a$, значит,

$$\cos\varphi-\cos\psi=\frac{(b-a)(m^2-ab-a^2+ab+bc)}{2mab}=$$
$$=\frac{(b-a)(m^2-a^2+b(2a-b))}{2mab}=\frac{(b-a)(m+b-a)(m-a+b)}{2mab}>0,$$

что и требовалось доказать.

128. Проведем через M прямую, параллельную AC, до пересечения с AB в точке K. Легко найдем $AK=CM\cdot\frac{AB}{CB}$, $MK=$ $=MB\cdot\frac{AC}{CB}$. Поскольку $AM \leqslant AK+KM$, то, заменяя AK и KM, получим $AM \leqslant \frac{CM\cdot AB}{BC}+\frac{MB\cdot AC}{BC}$, откуда (поскольку $MB=CB-CM$)

$(AM-AC)\,BC \leqslant (AB-AC)\,MC$, что и требовалось.

129. Минимум равен $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$ и достигается, если M — центр тяжести $\triangle ABC$. (Это можно доказать, например, методом координат.)

130. Если дороги построить так, как показано на рисунке 183 (A, B, C и D — деревни, дороги — толстые линии), то их сум-

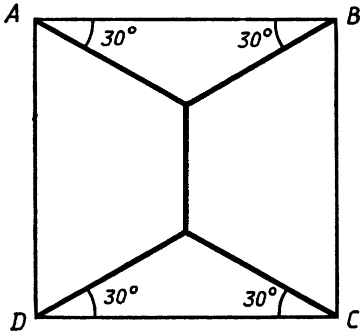


Рис. 183

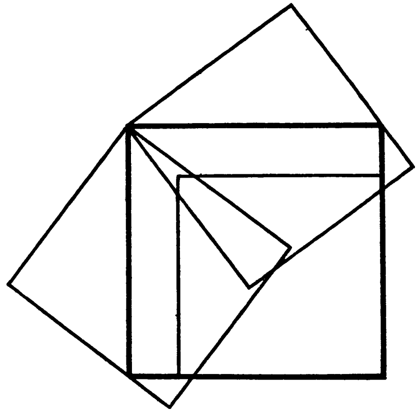


Рис. 184

марная длина будет $2+2\sqrt{3}<5{,}5$. Можно показать, что указанное расположение дорог реализует минимум их суммарной длины.

131. $ab \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Указание. Если одна из сторон треугольника, проходящая через A, образует угол φ с прямой, перпендикулярной данным параллельным прямым, то другая сторона образует угол $180-\varphi-\alpha$; найдя эти стороны, получим, что площадь треугольника равна $-\frac{ab \sin \alpha}{2 \cos \varphi \cos (\varphi+\alpha)}=-\frac{ab \sin \alpha}{\cos \alpha+\cos (\alpha+2\varphi)}$. Это выражение минимально, если $\alpha+2\varphi=180°$.

132. Радиус небольшого круга равен диаметру окружности, описанной около правильного треугольника со стороной $2R$, т. е. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. (Возьмем такой треугольник и на его сторонах как на диаметрах построим окружности.) Для любой окружности большего радиуса, если бы она была покрыта данными кругами, нашлась бы дуга не меньше чем в $120°$, покрытая одним кругом, но такая дуга содержит хорду больше $2R$ — противоречие.

В общем случае, если существует остроугольный треугольник со сторонами $2R_1$, $2R_2$, $2R_2$, радиус описанной около него окружности и будет искомым. Во всех остальных случаях радиус наибольшего круга равен наибольшему из чисел R_1, R_2, R_3.

133. Можно. На рисунке 184 показаны три единичных квадрата, покрывающие квадрат со стороной $\frac{5}{4}$.

134. Пусть $\operatorname{ctg} \alpha=x$, $\operatorname{ctg} \beta=y$, тогда

$$\operatorname{ctg} \gamma=\frac{-xy+1}{x+y}=\frac{x^2+1}{x+y}-x,$$

$$a^2 \operatorname{ctg} \alpha+b^2 \operatorname{ctg} \beta+c^2 \operatorname{ctg} \gamma=$$

$$=(a^2-b^2-c^2)\, x+b^2(x+y)+c^2\, \frac{x+1}{x+y}.$$

Минимум выражения $b^2(x+y)+c^2\frac{x^2+1}{x+y}$ при фиксированном x и $x+y>0$ достигается при таком y, для которого выполняется равенство $b^2(x+y)=c^2\frac{x^2+1}{x+y}$, $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{c}{b}$.

Таким образом, $\frac{c}{b}=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$. Значит, наименьшее значение данного в условии выражения достигается для таких α, β и γ, синусы которых пропорциональны сторонам a, b и c, т. е. когда рассматриваемые треугольники подобны. Но в этом случае имеет место равенство (легко проверить).

135. $3<2p\leqslant\frac{9}{\sqrt{2}}$. Указание. Обозначим отношения через k. Пусть $KB=NC=x$, $AM=y$. Тогда $AK=BN=kx$, $CM=ky$. По теореме косинусов для треугольника KBN имеем $1=KN^2=$ $=x^2+k^2x^2-2kx^2\cos B$. Но $\cos B=\frac{2x^2-y^2}{2x^2}$ (из $\triangle ABC$). Значит, $x^2(1+k^2)-k(2x^2-y^2)=1$ или $x^2(k^2-2k+1)+ky^2=1$. Аналогично из $\triangle MNC$ найдем $1=MN^2=x^2+k^2y^2-2kxy\cos C=$ $=x^2+k^2y^2-ky^2\left(\cos C=\frac{y}{2x}\right)$, откуда $x^2+y^2(k^2-k)=1$. Вычитая почленно одно из другого полученные соотношения, будем иметь $x^2(k^2-2k)+y^2(2k-k^2)=0$, откуда или $x=y$, или $k^2-2k=0$.

1) $x=y$. Треугольник ABC правильный, KMN также правильный. Периметр ABC больше 3, не превосходит 6 (равен 6, если K, M, N — середины сторон).

2) $k^2-2k=0$. По условию $k\neq0$. Значит, $k=2$. Возьмем $k=2$ в одном из соотношений (любом), получим $x^2+2y^2=1$. Пусть $l=2x+y$. Учитывая связь между x и y, получим $l=2\sqrt{1-2y^2}+y$, откуда $9y^2-2yl+l^2-4=0$. Условие $D\geqslant0$ дает нам $l^2\leqslant\frac{9}{2}$, значит, $l\leqslant\frac{3}{\sqrt{2}}$ (надо проверить, что при $l=\frac{3}{\sqrt{2}}$ можно найти x и y). Значит, периметр, равный $3l$, не превосходит $\frac{9}{\sqrt{2}}$.

Докажем, что в этом случае $3l>4$. В треугольнике KBN стороны x, $2x$ и 1, значит, $3x>1$, $x>\frac{1}{3}$. Поскольку $y=\sqrt{\frac{1}{2}(1-x^2)}$, то $l=2x+\sqrt{\frac{1}{2}(1-x^2)}$. Нам надо доказать, что при $\frac{1}{3}<x<1$ будет $l>\frac{4}{3}$. Если $\frac{2}{3}\leqslant x<1$, то неравенство очевидно. Если $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$, то, уединяя корень и возводя в квадрат, получаем после преобразований $81x^2-96x+23<0$, или $(3x-1)(27x-23)<$

<0. Неравенство выполняется. Во втором случае периметр больше 4 и не превосходит $\frac{9}{\sqrt{2}}$.

136. Пусть K и L — середины AB и AC. Докажите, что K и L на отрезке MN.

137. Имеем $BN^2=BA^2+AN^2=(BD^2+DA^2)+DC^2=$ $=(BD^2+DC^2)+DA^2=BC^2+CM^2=BM^2$.

138. Пусть катеты треугольника равны a и b. Рассмотрим прямоугольную систему координат, оси которой содержат катеты, начало в вершине прямого угла. Пусть x — радиус искомой окружности с центром $O_1(x, x)$. Центр описанной окружности $O\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Условие касания означает, что $OO_1=R-x$, или $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(x-\frac{b}{2}\right)^2=(R-x)^2$, откуда $x=a+$ $+b-2R=2r$, где r — радиус вписанной окружности. (Докажите равенство $2R+2r=a+b$.)

139. Докажите, что точка, симметричная точке пересечения высот треугольника относительно стороны треугольника, лежит на описанной окружности.

140. Пусть H — точка пересечения высот $\triangle ABC$, AD — высота, K, L, M, N — проекции D на AC, CH, HB и BA соответственно. Воспользуйтесь тем, что K и L лежат на окружности с диаметром CD, L и M — на окружности с диаметром HD, M и N — на окружности с диаметром DB.

141. Пусть окружности пересекаются вторично в точках A, B и C, как на рисунке 185. Тогда $\angle BAH=\angle BCH$ (опираются на равные дуги в равных окружностях). Соответственно образуются еще две пары равных углов. Обозначим их α, β и γ. Поскольку $2\alpha+2\beta+2\gamma=180°$, то $\alpha+\beta+\gamma=90°$. Значит, AH (BH, CH) перпендикулярна BC (AC, AB). Для полноты решения необходимо рассмотреть случай, когда H вне треугольника ABC.

142. Пусть M — середина AD. Проверьте, что $BF^2+FM^2=$ $=BM^2$.

143. Докажите, что l образует с AD такие же углы, что и прямая BC, касающаяся нашей окружности. Отсюда следует, что другая касательная к окружности, проходящая через D, будет параллельна l.

144. Построим окружность, касающуюся прямых MN, AC и BC таким образом, чтобы точки касания P и Q с прямыми AC и BC были вне отрезков CM и CN (это будет окружность, вневписанная в треугольник MCN). Если R — точка касания MN с окружностью, то $MP=MR$, $NQ=NR$, следовательно, $MN=MP+NQ$, но по условию $MN=MA+NB$. Таким образом, одна из точек — P или Q — лежит внутри соответствующей стороны, а другая — на продолжении. При этом $AP=BQ$ и $CP=$

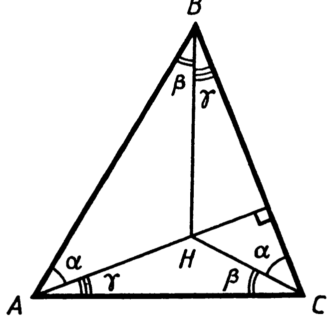


Рис. 185

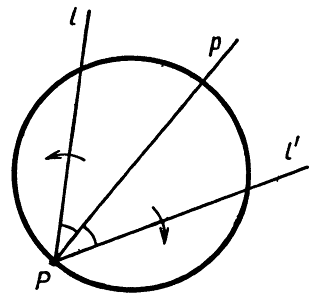


Рис. 186

$=CQ=\frac{1}{2}(CP+CQ)=\frac{1}{2}(AC+CB)$, т. е. построенная окружность постоянна для всех прямых.

145. Если O — центр круга, описанного около $\triangle ABC$, D — середина CB, H — точка пересечения высот, L — середина AH, то $AL=OD$, и поскольку $AL \parallel OD$, то OL делит AD пополам, т. е. L симметрична O относительно середины AD.

146. Если O — вершина угла, A — точка на биссектрисе, B_1 и B_2 — точки пересечения со сторонами угла одной окружности, C_1 и C_2 (B_1 и C_1 на одной стороне) — точки пересечения другой окружности, то $\triangle AB_1C_1=\triangle AB_2C_2$.

147. Продемонстрируем на примере этой задачи один красивый метод. Пусть P — некоторая точка окружности, прямая l, проходящая через P, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг P. Тогда прямая l', симметричная l относительно фиксированной прямой p, проходящей через P, вращается в другую сторону с той же угловой скоростью, а ее точка пересечения с окружностью — точка M — движется по этой окружности с постоянной скоростью (рис. 186). Применяя это рассуждение к нашей задаче, приходим к выводу, что если прямые, симметричные l_1, l_2, l_3 относительно соответствующих биссектрис, пересекаются в одной точке на окружности, описанной около $\triangle ABC$ при каком-то положении, то они пересекаются в одной точке на этой окружности всегда. В качестве исходного положения можно взять направление, параллельное AB. Тогда симметричные прямые пересекутся в вершине C.

148. Если O — центр окружности, описанной около $\triangle AMB$, то $\angle MAB=90°-\angle OMB=\angle BMC-180°$. Таким же будет и $\angle MAC$.

149. Обозначим через C_1 и A_1 середины AB и BC, B' и A' — точки касания вписанной окружности с AC и BC. Пусть для определенности $c \geqslant b$ (c и b — стороны $\triangle ABC$), тогда биссектриса угла A пересекает продолжение C_1A_1 в такой точке K, что $A_1K=$

$=\frac{1}{2}(c-b)$, а прямая $B'A'$ должна пройти через ту же точку K, поскольку треугольники KA_1A' и $A'B'C$ равнобедренные, $A'C=$ $=B'C$, $A_1K=A_1A'$, $\angle A'A_1K=\angle A'CB'$.

150. Докажем, что центр искомой окружности совпадает с ортоцентром (точкой пересечения высот). Пусть BD — высота, H — точка пересечения высот, а K и L — середины построенных отрезков, выходящих из вершины B, $BK=BL=l$, M — середина BD. Тогда $KH^2=LH^2=MH^2+KM^2=l^2-BM^2+MH^2=$

$$=l^2-\frac{1}{4}BD^2+\left(BH-\frac{1}{2}BD\right)^2=l^2+BH^2-BH\cdot BD=l^2-BH\cdot HD.$$

Нам осталось доказать, что произведения отрезков высот, на которые каждая делится их точкой пересечения, равны. Проведем высоту AH. Ввиду подобия $\triangle BHE$ и $\triangle AHD$ имеем $BH\cdot HD=$ $=AH\cdot HE$, что и требовалось.

151. Утверждение задачи следует из того, что середина AB проектируется в середину CD.

152. Пусть общая хорда будет MN, K — ее точка пересечения с прямой. Тогда $AK\cdot KC=MK\cdot KN=BK\cdot KD$. Если $AB=a$, то $BC=2a$, $AC=3a$, $CD=3a$, $BD=5a$. Пусть $AK=x$, тогда $KC=$ $=3a-x$, $BK=x-a$, $KD=6a-x$. Имеем уравнение $x(3a-x)=$ $=(x-a)(6a-x)$, $x=\frac{3}{2}a$, т. е. $AK=KC$.

153. Пусть $AB=2a$, $BC=2b$, O_1 — середина AB, O_2 — середина AC, x — радиус окружности, касающейся полуокружностей с центрами O_1 и O_2, O — центр (рис. 187). В треугольнике OO_1O_2 имеем $O_1O=a+x$, $O_2O=a+b-x$, $O_1O_2=b$. Если M — проекция O на AB, то $MB=x$, $O_1M=a-x$. Косинус угла OO_1O_2 равен $\frac{O_1M}{O_1O}=\frac{a-x}{a+x}$. Запишем теорему косинусов для треугольника OO_1O_2: $(a+b-x)^2=(a+x)^2+b^2-2b(a-x)$. Из этого уравнения найдем $x=\frac{ab}{a+b}$. Таким же будет и радиус второй окружности.

154. Докажите, что центры этих трех окружностей в середине отрезка, соединяющего центры данных окружностей.

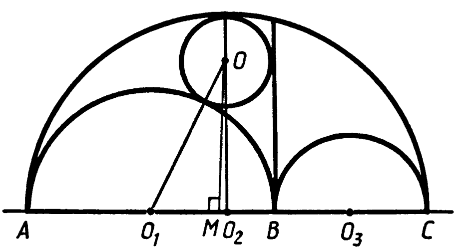


Рис. 187

155. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, R_1 и R_2 — их радиусы, $O_1O_2=a$, M — точка пересечения общих внутренних касательных. Окружность диаметром O_1O_2 проходит через точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными. При гомотетии с центром в точке

M и коэффициентом $\frac{a-R_1-R_2}{a}$ эта окружность перейдет в окружность, касающуюся данных внешним образом, с центром на O_1O_2.

156. $\frac{3}{4}h$. Указание. Пусть H — точка пересечения высот треугольника CMN, $\angle CMD=\alpha$. Тогда $\angle HND=90°-\alpha$ и

$$HD=DN\cdot\operatorname{tg}(90°-\alpha)=DN\cdot\operatorname{ctg}\alpha=DN\cdot\frac{MD}{CD}=$$
$$=\frac{1}{2}DB\cdot\frac{1}{2}\frac{AD}{h}=\frac{1}{4h}AD\cdot DB=\frac{1}{4h}\cdot h^2=\frac{1}{4}h.$$

157. $\frac{c}{a+b}$. Указание. Обозначим $\angle BAC=\angle BDC=\alpha$, $\angle CBA=\angle BCD=\beta$, $\angle BAM=\varphi$. Тогда

$$\frac{BM+MC}{AM+MD}=\frac{\sin\varphi+\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\beta+\alpha-\varphi)+\sin(\beta+\varphi)}=$$
$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\varphi\right)}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta+\alpha)+\sin\beta}=\frac{c}{a+b}.$$

158. Если $0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$, существуют две хорды, удовлетворяющие условию, их длины $\frac{3a}{2a^2+1}$ и $\frac{3}{\sqrt{9-2a^2}}$. Если $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant a<2$, такая хорда одна: $\frac{3a}{2a^2+1}$. Указание. Если $0<a<2$, то всегда существует хорда, параллельная основанию и делящаяся боковыми сторонами на три равные части. Ее длина равна $\frac{3a}{2a^2+1}$.

Пусть хорда, непараллельная основанию, делится боковыми сторонами на три части, длиной x каждая. Если одна боковая сторона делится этой хордой на отрезки (считая от вершины, противолежащей основанию) y и $1-y$, то другая должна делиться на части $1-y$ и y (суммы и произведения этих отрезков равны). Имеем уравнение $y(1-y)=2x^2$ (по теореме о произведении отрезков хорд). Если α — угол против стороны a, то $\cos\alpha=\frac{1}{2}(2-a^2)$. Применим теорему косинусов к треугольнику, отсекаемому проведенной хордой: $x^2=y^2+(1-y)^2-y(1-y)(2-a^2)$. Заменяя $x^2=\frac{1}{2}y(1-y)$, получим для y квадратное уравнение (после упрощения):

$$(9-2a^2)y^2-(9-2a^2)y+2=0.$$

Из этого уравнения $y-y^2=\frac{2}{9-2a^2}$. Но $y-y^2=2x^2$. Значит, $x=\frac{1}{\sqrt{9-2a^2}}$. Кроме того, на a ограничение: $D\geqslant 0$, откуда

$(9-2a^2)^2-8(9-2a^2)\geqslant 0$, $(9-2a^2)(1-2a^2)\geqslant 0$, значит, $a^2\leqslant\frac{1}{2}$.

Но при $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ будет $y=\frac{1}{2}$, т. е. этот случай совпадает с первым.

159. $\frac{5k-2\pm 2\sqrt{2k(2k-1)}}{2-3k}$. Указание. Из равенства $S_{ABN}=S_{CDM}$ следует, что $S_{MBN}=S_{MCN}$, так как MN — медиана треугольников ABN и CDM. Значит, $BC\parallel MN$, точно так же $AD\parallel MN$, т. е. $ABCD$ — трапеция, в которой AD и BC — основания.

160. $\sqrt{7}$. Указание. Имеем $AD\geqslant DM-AM=2$. С другой стороны, $AD\leqslant\frac{BD}{\sin 60^\circ}=2$. Следовательно, $AD=2$, AD — большее основание и точка M лежит на прямой AD.

161. Пусть BD — биссектриса в треугольнике ABC, A_1 и C_1 — середины BC и AB, $DA_1=DC_1$.

Возможны два случая: 1) $\angle BA_1D=\angle BC_1D$ и 2) $\angle BA_1D+\angle BC_1D=180^\circ$.

В первом случае $AB=BC$. Во втором случае повернем треугольник AC_1D вокруг D на угол C_1DA_1 так, чтобы C_1 перешла в A_1. Получим треугольник со сторонами $\frac{ba}{a+c}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{bc}{a+c}$, составленный из частей AC_1D и DA_1C (a, b и c — стороны $\triangle ABC$), подобный треугольнику ABC. Следовательно,

$$\frac{ba}{a+c}:a=\frac{a+c}{2}:b=\frac{bc}{a+c}:c,$$

откуда $a+c=b\sqrt{2}$.

Поскольку $a\neq c$, то хотя бы одно из двух неравенств $b\neq a$, $b\neq c$ верно. Пусть $b\neq c$, тогда аналогично $b+c=a\sqrt{2}$. Значит, $b=a$ и мы получаем треугольник со сторонами a, a, $a(\sqrt{2}-1)$, обладающий данным свойством. Таким образом, с точностью до подобия существуют два треугольника, удовлетворяющие условию задачи: правильный и треугольник со сторонами 1, 1, $\sqrt{2}-1$.

162. $\sqrt{a^2+b^2}$. Указание. Если α — угол между сторонами a и b, то из условия следует $a+b\sin\alpha\leqslant b+a\sin\alpha$, $(a-b)(\sin\alpha-1)\geqslant 0$, $\sin\alpha\geqslant 1$. Отсюда $\alpha=90^\circ$.

163. $\frac{3\pm\sqrt{9-8k^2}}{4}$. Если $1<k<\frac{3\sqrt{2}}{2}$, то обе точки находятся внутри отрезка AB. Указание. Обозначим: R — радиус описанной около ABC окружности, O — ее центр, N — точка пересечения медиан $\triangle BCM$. Перпендикулярность ON и CM равносильна равенству $CN^2-MN^2=CO^2-OM^2$.

Пусть $AB=1$, $MB=x$, $CM=y$, тогда

$$MN^2=\frac{1}{9}(2y^2+2x^2-k^2),$$

$$CN^2=\frac{1}{9}(2y^2+2k^2-x^2),\quad CO^2=R^2,$$

$$OM^2 = R^2\cos^2 C + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \quad R\sin C = \frac{1}{2}.$$

Получаем для x уравнение $2x^2 - 3x + k^2 = 0$.

164. $\sqrt{b^2 + bd}$. Указание. Треугольники ABK и ABD подобны: $\frac{AB}{BK} = \frac{BD}{AB}$.

165. $\frac{a}{2}$. Указание. Пусть x — расстояние от центра квадрата до прямой l, φ — острый угол, образованный одной из диагоналей квадрата с l. Расстояния от вершин квадрата до l в порядке обхода равны $x + a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$, $x + a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi$, $\left|x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right|$, $\left|x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right|$.

По условию $\left|x^2 - \frac{a^2}{2}\sin^2\varphi\right| = \left|x^2 - \frac{a^2}{2}\cos^2\varphi\right|$, откуда или $\operatorname{tg}^2\varphi = 1$, что невозможно по условию, или $x^2 = \frac{a^2}{4}$.

166. $\angle C = \frac{\pi}{6}$, $\angle B = \frac{\pi}{3}$, $\angle A = \frac{\pi}{2}$. Указание. Из условия $\angle B = 2\angle C$ следует соотношение между сторонами треугольника $b^2 = c^2 + ac$. Перебирая всевозможные варианты: $b = 2c$, $a = 2c$, $b = 2a$, $a = 2b$, получим, что $a = 2c$, так как в других случаях не будет выполняться неравенство треугольника.

167. $2\sqrt{pq}$. Указание. Треугольники KBC и CDL подобны, откуда $\frac{KB}{BC} = \frac{CD}{DL}$, или $KB \cdot DL = BC \cdot CD$, $(KB \cdot BC) \cdot (DL \cdot CD) = (BC \cdot CD)^2$. Умножая обе части на $\sin^2\alpha$, где α — угол параллелограмма, получим $4pq = S^2_{ABCD}$.

168. $\frac{ab}{|a-b|}$. Указание. Проведем через вершину C трапеции $ABCD$ прямую, параллельную диагонали BD, и прямую, параллельную боковой стороне AB (рис. 188). Получим треугольники ACE и FCD: $\angle ACE = 90°$, $\angle FCD = 45°$, $AF = DE = b$, $FD = a - b$ (считаем, что $a > b$). Пусть O и O_1 — центры окружностей, описанных около ACE и FCD. O — середина AE, $OC = \frac{a+b}{2}$, $\angle FO_1D = 90°$, $O_1C = FO_1 = O_1D = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$, $O_1O = \frac{a-b}{2}$.

Задача сводится к определению величины проекции OC на прямую O_1O. Все стороны треугольника COO_1 известны. Если $\angle COO_1 = \varphi$, то $CO_1^2 = CO^2 + OO_1^2 - 2OO_1 \cdot CO \cdot \cos\varphi$.

Но $CO \cdot \cos\varphi = x$ — искомая проекция $\frac{1}{2}(a-b)^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2 - (a-b)x$, откуда $x = \frac{ab}{a-b}$.

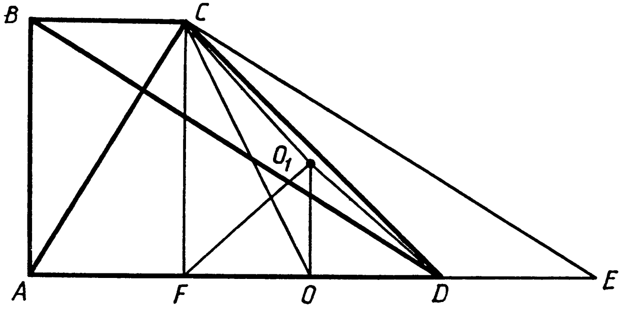


Рис. 188

169. 2 или $\sqrt[3]{2}$. Указания. Пусть C находится между A и D (рис. 189), M — проекция A на BD, $AM \parallel BC$.

Обозначим $CD=x$. Из пропорции $\frac{MB}{AC}=\frac{BD}{CD}$ найдем $MB=\frac{1}{x}$. Тогда $AM=\frac{\sqrt{3}}{x}$. По теореме Пифагора для $\triangle AMD$ имеем:

$$\frac{3}{x^2}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2=(1+x)^2,$$

откуда $x^4+2x^3-2x-4=0$, $(x+2)(x^3-2)=0$, $x=\sqrt[3]{2}$.

Аналогично рассматривается случай, когда A между C и D.

170. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{6}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\pi-\operatorname{arctg}\sqrt{6}$. Указание. Ситуация, соответствующая условию, показана на рисунке 190. (KL и MN — отрезки проведенных прямых.) Пусть $KL=MN=AC=1$. Проведем $CP \parallel KL$. P — середина AB. (Докажите!) Значит, $S_{ALK}:S_{ACP}=2:3$, $CP=\sqrt{\frac{3}{2}}$ и т. д.

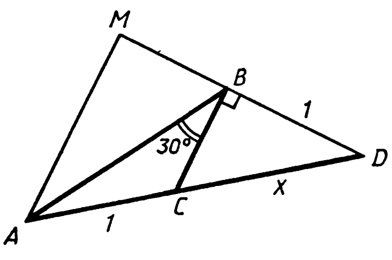


Рис. 189

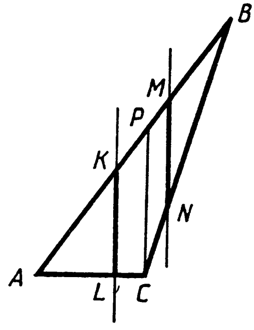


Рис. 190

171. $\frac{22}{23}$. Указание. Пусть $\frac{AM}{MC}=k$. Условие равенства радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABM и BCM, означает, что их площади относятся как периметры. Отсюда, поскольку отношение площадей равно k, получим $BM=\frac{13k-12}{1-k}$.

Из этого равенства, в частности, следует, что $\frac{12}{13}<k<1$. Записывая для треугольников ABM и BCM теоремы косинусов (относительно углов BMA и BMC) и исключая из этих уравнений косинусы углов, получим для k квадратное уравнение с корнями $\frac{2}{3}$ и $\frac{22}{23}$. Учитывая ограничения для k, получаем ответ $k=\frac{22}{23}$.

Замечание. Для получения нужного квадратного уравнения можно все выкладки делать «в лоб», но можно и обойти вычислительные трудности. Например, следующим образом. Пусть $BM=l=\frac{13k-12}{1-k}$, $MC=x$, $AM=kx$, $x=\frac{15}{k+1}$, $\angle AMB=\varphi$.

Тогда (из $\triangle AMB$) $144=l^2+k^2x^2-2kxl\cos\varphi$, (из $\triangle BMC$) $169=l^2+x^2+2xl\cos\varphi$.

Почленно умножая второе на k и складывая с первым, получим:

$$144+169k=l^2(k+1)+(k^2+k)x^2,$$

или

$$(144-l^2)+k(169-l^2)=k(k+1)x^2,$$

$$(12-l)(12+l)+k(13-l)(13+l)=k(k+1)x^2.$$

Заменяем l и x:

$$\frac{24-25k}{1-k}\cdot\frac{k}{1-k}+k\,\frac{25-26k}{1-k}\cdot\frac{1}{1-k}=k\,\frac{225}{k+1}.$$

Сокращаем на k: $\frac{49-51k}{(1-k)^2}=\frac{225}{k+1}$ и т. д.

172. $4a^2$. Указание. I *решение.* Пусть P — проекция M на AB, $AP=a+x$. Тогда $PB=a-x$, $MP=y=\sqrt{a^2-x^2}$, $AN=$ $=(a+x)\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+y}$, $NB=2a-(a+x)\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+y}=\frac{a\sqrt{2}(a-x+y\sqrt{2})}{a\sqrt{2}+y}$,

$AL=\frac{a\sqrt{2}(a+x+y\sqrt{2})}{a\sqrt{2}+y}$.

Отсюда

$$AL^2+NB^2=\frac{4a^2}{(a\sqrt{2}+y)^2}(a^2+2\sqrt{2}ay+2y^2+x^2)=$$

$$=\frac{4a^2}{(a\sqrt{2}+y)^2}(a^2+2\sqrt{2}ay+2y^2+(a^2-y^2))=4a^2.$$

II *решение.* Докажем, что $AL^2+BN^2=AB^2$. Продолжим MA и MB до пересечения с прямой DC в точках A_1 и B_1, обозначим $A_1D=x$, $CB_1=y$. Из подобия треугольников A_1AD и BB_1C следует, что $xy=BC^2=2a^2$.

Учитывая это, нетрудно проверить, что $A_1C^2+B_1D^2=$ $=(x+2a)^2+(y+2a)^2=(x+y+2a)^2=A_1B_1^2$.

Из подобия треугольников A_1MB_1 и AMB следует, что $AL^2+BN^2=AB^2$.

173. $a\sqrt{\frac{R+r}{R}}$. Указание. Проведем прямую BA и обозначим через D вторую точку пересечения с меньшей окружностью. Рассмотрим дуги AB и AD (меньшие, чем полуокружность). Поскольку общая касательная к окружностям в точке A образует с AB и AD равные углы, то и центральные углы, соответствующие этим дугам, равны. Следовательно, $\frac{AD}{AB}=\frac{r}{R}$, $AD=a\frac{r}{R}$, $BC=$ $=\sqrt{BD\cdot BA}=a\sqrt{\frac{R+r}{R}}$.

174. a. Указание. Обозначения: O_1, O_2 и O — центры окружностей (первые две касаются AB), x, y и R соответственно их радиусы. Общие касательные к окружностям O_1 и O_2, O_1 и O, O_2 и O равны соответственно $2\sqrt{xy}$, $2\sqrt{Rx}$, $2\sqrt{Ry}$.

По условию $2\sqrt{xy}=a$. Рассмотрим прямоугольный треугольник O_1MO_2 с прямым углом при вершине M: $O_1M\parallel BC$, $O_1O_2=x+y$, $O_2M=2R-(x+y)$, $O_1M=|2\sqrt{Rx}-2\sqrt{Ry}|$ (O_1M равен разности общих касательных к окружностям с центрами O, O_1 и O, O_2). Таким образом, $(x+y)^2=(2R-x-y)^2+(2\sqrt{Rx}-2\sqrt{Ry})^2$, откуда $R=2\sqrt{xy}=a$.

175. $\frac{S_1S_3(S_1+S_2)(S_3+S_2)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)}$. Указание. Обозначим через x площадь треугольника OMN, через y площадь треугольника CMN, тогда

$$\frac{ON}{OA}=\frac{x}{S_1}=\frac{S_3}{S_2},\ x=\frac{S_1S_3}{S_2},\ \frac{AM}{MC}=\frac{S_1+x}{y}=\frac{S_1+S_2}{S_3+x+y}.$$

176. 10:5:13. Указание. Пусть отрезки медианы равны a. Обозначим через x меньший из отрезков, на которые разделена точкой касания сторона, соответствующая медиане. Теперь все стороны треугольника можно выразить через a и x. Стороны, заключающие медиану: $a\sqrt{2}+x$, $3a\sqrt{2}+x$, третья сторона: $2a\sqrt{2}+2x$. Используя формулу длины медианы, получим $9a^2=\frac{1}{4}(2(a\sqrt{2}+x)^2+2(3a\sqrt{2}+x)^2-(2a\sqrt{2}+2x)^2)$, откуда $x=$ $=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

177. $\frac{a^2r}{a-r}$. Указание. Пусть O — центр вписанной окружности, M — середина BC, K, L, N — точки касания вписанной окружности со сторонами AC, AB, BC треугольника. Обозначим: $AK=AL=x$, $CK=CN=y$, $BL=BN=z$, $y+z=a$.

По условию $OM=\frac{a}{2}-r$. Следовательно, $NM=\sqrt{OM^2-ON^2}=$ $=\sqrt{\frac{a^2}{4}-ar}$ и один из отрезков — y или z — равен $\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{2}-ar}$, а другой $\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-ar}$. Приравняем выражения для площади треугольника по формулам Герона и $S=pr$: $\sqrt{(x+y+z)\,xyz}=$ $=(x+y+z)\,r$, откуда $x=\frac{ar}{a-r}$. Таким образом, искомая площадь равна $\left(\frac{ar}{a-r}+a\right)r=\frac{a^2r}{a-r}$.

178. $\frac{a}{4}\sqrt{13}$. Указание. Докажем, что если C_1 и C_2 (рис. 191) находятся по другую сторону от BC в отличие от вершины A, то центр окружности, описанной около CC_1C_2, находится в точке O на стороне AB, при этом $BO=\frac{1}{4}AB$. Проведя высоту CM из вершины C, получим, что BC_1CM — прямоугольник. Значит, перпендикуляр, восставленный к CC_1 в середине, проходит через O. Учитывая, что $C_1C_2\parallel BD$ и $C_1C_2=\frac{1}{2}BD$, получим, что перпендикуляр C_1C_2 в его середине также проходит через O. Теперь легко найдем искомый радиус: он равен $\sqrt{CM^2+MO^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{16}}=$ $=\frac{a}{4}\sqrt{13}$.

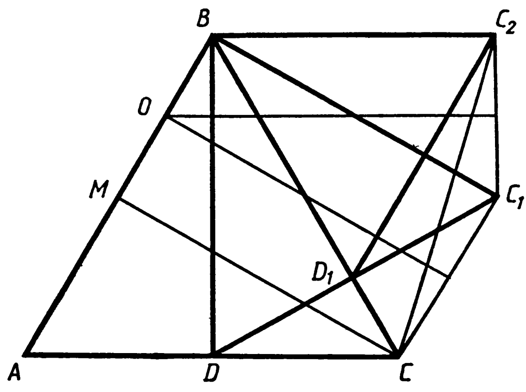


Рис. 191

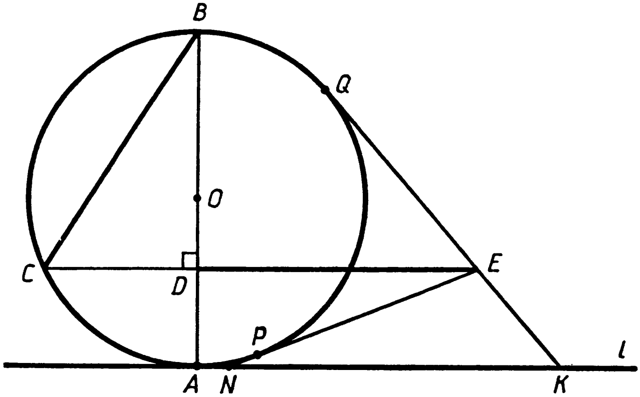


Рис. 192

179. Длина хорды $h\sqrt{5}$, ее отрезки $\frac{\sqrt{5}-1}{2}h$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}h$. Указание. Обозначения: ABC — прямоугольный треугольник, CD — высота, L и K — проекции D на CB и CA. Имеем $CL \cdot CB = CD^2 = CK \cdot CA$. Из этого следует, что B, L, K и A лежат на одной окружности. Эта окружность пересекает прямую CD в точках P и Q (P находится на CD), причем $PD = x$, $DQ = y$.

Имеем $h^2 = CD^2 = CL \cdot CB = CP \cdot CQ = (h-x)(h+y)$, кроме того, $xy = PD \cdot DQ = BD \cdot DA = CD^2 = h^2$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} xy = h^2, \\ (h-x)(h+y) = h^2 \end{cases} \text{ и т. д.}$$

180. $2R$. Указание. Пусть (рис. 192) P и Q — точки касания касательных, проведенных из E. Докажем, что $EP = EQ = BD$. В самом деле, $EP^2 = (ED+DC)(ED-DC) = ED^2 - DC^2 = BC^2 - DC^2 = BD^2$ (по условию $ED = BC$). Обозначим: $KN = x$, $PN = NA = y$, $EQ = EP = BD = z$.

Тогда $KE = x + y - z$. Имеем $S_{KEN} = \frac{1}{2}x(2R - z)$, с другой стороны, $S_{KEN} = S_{KON} + S_{KOE} - S_{EON} = \frac{1}{2}R(x + x + y - z - y - z) = R(x - z)$.

Таким образом, $\frac{1}{2}x(2R - z) = R(x - z)$, $x = 2R$.

§ 6. Стереометрия

1. $a^2\sqrt{3}$, $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, $a\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a\frac{\sqrt{6}}{4}$, $a\frac{\sqrt{6}}{12}$.

2. Вершина пирамиды проектируется в центр основания, следовательно, проекция бокового ребра на основание перпендикулярна противоположной стороне основания. По теореме о трех перпендикулярах (обратное утверждение) боковое ребро перпендикулярно противоположной стороне основания.

3. Проекции боковых ребер равны, значит, вершина пирамиды проектируется в точку, равноудаленную от вершин основания.

4. Из условия следует, что вершина должна проектироваться вовнутрь основания в точку, равноудаленную от его сторон.

Если вместо равенства двугранных углов дано равенство углов наклона, то вершина может спроектироваться и во вне основания, но при этом ее проекция по-прежнему равноудалена от прямых, образующих стороны основания, т. е. вершина проектируется в центр окружности, касающейся сторон многоугольника, расположенного в основании, или продолжений этих сторон. В частности, вершина треугольной пирамиды может спроектироваться в центр так называемой вневписанной окружности.

5. Утверждение задачи очевидно для треугольника, одна сторона которого принадлежит линии пересечения плоскостей α и β. Если одна вершина лежит на этой прямой, то, продолжив противоположную сторону этого треугольника, можно представить площадь данного треугольника и его проекции как разность (или сумму) площадей треугольников и их проекций рассмотренного вида. Таким образом, доказываемая формула верна для треугольников. Далее она распространяется на произвольные многоугольники.

6. Примем за основания пирамиды соответственно AB_1C_1 и AB_2C_2, h_1 и h_2 — высоты, опущенные на эти грани из вершин D_1 и D_2 (рис. 193). Имеем

$$\frac{V_{AB_1C_1D_1}}{V_{AB_2C_2D_2}}=\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{AB_2C_2}}\cdot\frac{h_1}{h_2}=\frac{AB_1\cdot AC_1}{AB_2\cdot AC_2}\cdot\frac{AD_1}{AD_2}.$$

7. Рассмотрите прямоугольный параллелепипед с одной из вершин в начале координат, три ребра которого идут по осям координат, а диагональ расположена на данной прямой.

8. Пусть d — высота грани площадью P, опущенная на сторону a. Тогда если h — высота тетраэдра, опущенная на грань площадью S, то $h=d\sin\alpha$. Имеем $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}Sd\sin\alpha=$ $=\frac{1}{3}S\cdot\frac{2P}{a}\sin\alpha$.

9. Достройте тетраэдр до параллелепипеда так, как это делалось при решении задачи 15 (см. вводную часть). Данный тет-

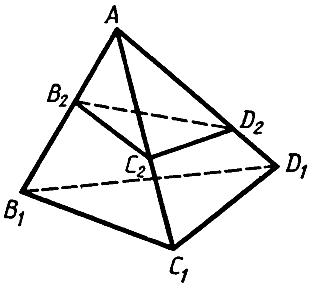


Рис. 193

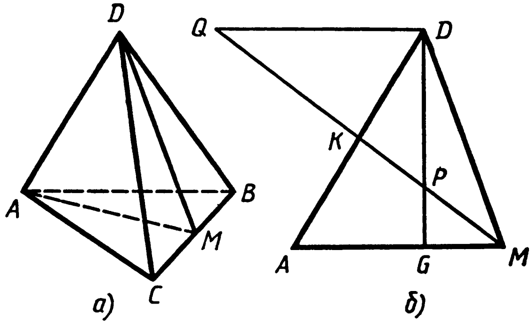


Рис. 194

раэдр составляет $\frac{1}{3}$ от объема полученного параллелепипеда. $S=\frac{1}{2}ab\sin\varphi$ — площадь граней параллелепипеда, содержащих ребра a и b, d — расстояние между этими гранями.

10. Легко видеть, что каждое из этих отношений (площадей граней и отрезков ребра) равно отношению объемов двух тетраэдров, на которые разделила данный тетраэдр биссекторная плоскость.

11. Соединив центр сферы с вершинами многогранника, разобьем его на пирамиды, основаниями которых являются грани многогранника, а высоты равны радиусу сферы.

12. Легко проверить справедливость данной формулы для тетраэдра. При этом надо рассмотреть два случая: 1) три вершины тетраэдра расположены в одной плоскости и одна вершина — в другой; 2) две вершины тетраэдра расположены в одной плоскости, две — в другой. Во втором случае для объема тетраэдра воспользуемся формулой задачи 9.

Произвольный выпуклый (и не только выпуклый) многогранник указанного в условии вида можно разбить на тетраэдры с вершинами в данных плоскостях. Примем этот факт за очевидный. (К сожалению, простого доказательства этого очевидного факта мы не знаем.)

13. Пусть M — середина BC в тетраэдре $ABCD$ (рис. 194, *а*). Рассмотрим треугольник ADM (рис. 194, *б*), K — середина AD, G — точка пересечения медиан треугольника ABC, $AG=2GM$, Q — точка на прямой MK, такая, что $QD \parallel AM$. Поскольку $AK=KD$, то $QD=AM$. Далее, $\frac{DP}{PG}=\frac{QD}{GM}=\frac{AM}{GM}=3$. Проведя через M прямую, параллельную AD, до пересечения с прямой DG, докажем, что $KP=PM$. Итак, мы доказали, что один отрезок, соединяющий середины BC и AD, пересекает DG в такой точке P, что $DP=3PG$, $MP=PK$. Отсюда следует, что все отрезки, о которых говорится в условии задачи, пересекаются в одной точке P и делятся в ней в указанном отношении.

Замечание. Точка P является центром масс (центром тяжести) тетраэдра. В этой точке будет находиться центр масс равных грузов, расположенных в вершинах тетраэдра.

14. Достройте тетраэдр до параллелепипеда так, как это делалось при решении задачи 15 (вводная часть). Ребра этого параллелепипеда равны расстояниям между серединами скрещивающихся ребер тетраэдра. Из условия следует, что все грани параллелепипеда — ромбы. Диагонали граней перпендикулярны. Значит, перпендикулярны противоположные ребра тетраэдра данного вида.

Замечание. Утверждение этой задачи является обобщением задачи 2.

15. Отложим на ребрах трехгранного угла от вершины S равные отрезки SA, SB, SC. Обозначим через O проекцию S на плоскость ABC. Треугольники ASB и AOB равнобедренные с общим основанием AB, причем боковые стороны треугольника AOB меньше боковых сторон треугольника ASB. Следовательно, $\angle AOB > \angle ASB$. Аналогичные неравенства верны и для других углов. Таким образом, $\angle ASB + \angle BSC + \angle CSA < \angle AOB + \angle BOC + \angle COA \leqslant 2\pi$. (Последняя сумма равна 2π, если O внутри $\triangle ABC$, и меньше 2π, если O вне $\triangle ABC$.)

Для доказательства второй части возьмем произвольную точку внутри данного угла и опустим из нее перпендикуляры на грани данного угла. Эти перпендикуляры будут являться ребрами другого трехгранного угла. (Полученный угол называется дополнительным к данному трехгранному углу. Этот прием является стандартным приемом в геометрии трехгранных углов.) Двугранные углы данного трехгранного угла дополняются до π плоскими углами дополнительного трехгранного угла, и наоборот. Если α, β, γ — двугранные углы данного трехгранного угла, то, используя вышедоказанное неравенство для плоских углов, будем иметь $(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma)<2\pi$, откуда следует, что $\alpha+\beta+\gamma>\pi$.

16. 1) Пусть S — вершина угла, M — точка на ребре, M_1 и M_2 — проекции M на два других ребра, N — проекция M на противоположную грань (рис. 195, *а*). Предположим, что ребро SM соответствует двугранному углу C. Если $SM=a$, то, находя последовательно SM_1, а затем MN (из $\triangle MM_1N$) или по-другому сначала SM_2, а затем MN (из $\triangle MM_2N$), придем к равенству $MN = a\sin\alpha\sin B = a\sin\beta\sin A$, т. е. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin A}=\dfrac{\sin\beta}{\sin B}$.

2) Обозначим через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ единичные векторы, направленные по ребрам трехгранного угла (рис. 195, *б*) ($\vec{a}$ противолежит плоскому углу величиной α, $\vec{b}$ — β, $\vec{c}$ — γ). Вектор $\vec{b}$ можно представить в виде $\vec{b}=\vec{a}\cos\gamma+\vec{\eta}$, где $|\vec{\eta}|=\sin\gamma$, $\vec{\eta}$ — вектор, перпендикулярный $\vec{a}$; аналогично $\vec{c}=\vec{a}\cos\beta+\vec{\xi}$, где $|\vec{\xi}|=\sin\beta$, $\vec{\xi}$ перпендикулярен $\vec{a}$.

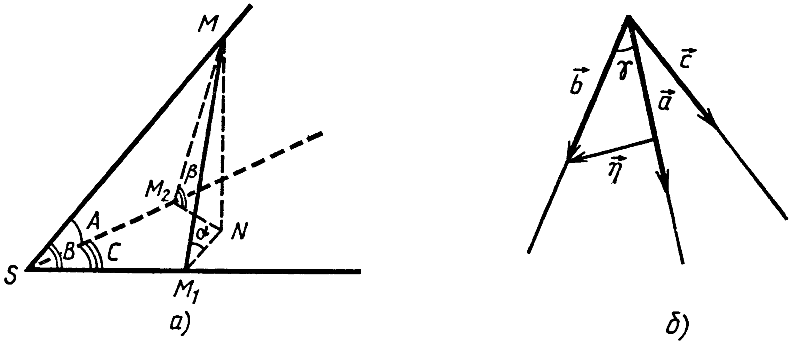


Рис. 195

Угол между векторами $\vec{\eta}$ и $\vec{\xi}$ равен A.

Перемножая скалярно $\vec{b}$ и $\vec{c}$, получим $\vec{b}\vec{c}=\cos\alpha=(\vec{a}\cos\gamma+\vec{\eta})\times$ $\times(\vec{a}\cos\beta+\vec{\xi})=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A$, что и требовалось.

3) Опустим из точки внутри угла перпендикуляры на грани данного угла. Получим, как известно (см. задачу 15), трехгранный угол, дополнительный к данному. Плоские углы данного трехгранного угла дополняют до π двугранные углы дополнительного и наоборот. Применяя к дополнительному трехгранному углу первую теорему косинусов, получим наше утверждение.

17. Обозначим данные прямые через l_1 и l_2. Проведем через l_1 плоскость p_1, параллельную l_2, а через l_2 плоскость p_2, параллельную l_1. Очевидно, что середины отрезков с концами на l_1 и l_2 принадлежат плоскости p, параллельной p_1 и p_2 и равноудаленной от p_1 и p_2. (Можно показать, что, если рассматривать всевозможные такие отрезки, их середины целиком заполнят плоскость p.) Спроектируем теперь эти отрезки на плоскость p параллельно заданной плоскости. Их концы теперь будут лежать на двух прямых, являющихся проекциями прямых l_1 и l_2, а сами проекции окажутся параллельными заданной прямой плоскости p, представляющей собой линию пересечения плоскости p и заданной плоскости. Из этого следует, что искомое геометрическое место точек есть прямая.

18. $\frac{R}{3}$. Указание. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры данных шаров, K_1, K_2, K_3 — точки их касания с плоскостью, O — центр четвертого шара радиусом x. Тогда $K_1K_2K_3O_1O_2O_3$ — правильная призма со стороной основания $2R$ и боковым ребром R, расстояние от O до плоскости $K_1K_2K_3$ равно x, до вершин O_1, O_2, O_3 равно $R+x$ (рис. 196). Высота призмы R равна сумме высоты правильной пирамиды $OO_1O_2O_3$, опущенной на $O_1O_2O_3$ (равна $\sqrt{(R+x)^2-\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{x^2+2Rx-\frac{R^2}{3}}$), и радиуса x.

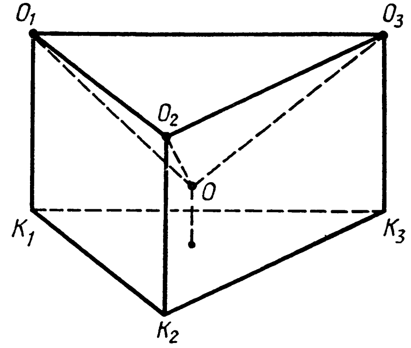


Рис. 196

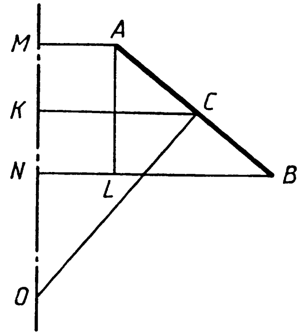


Рис. 197

Получаем уравнение $\sqrt{x^2+2Rx-\frac{R^2}{3}}+x=R$.

19. Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение. Отрезок AB вращается вокруг прямой l (l не пересекает отрезок AB). AB и l расположены в одной плоскости. Перпендикуляр, восставленный к AB в точке C — середине AB, пересекает прямую l в точке O, MN — проекция AB на прямую l (рис. 197). Тогда площадь поверхности, полученной при вращении AB вокруг l, равна $2\pi CO \cdot MN$.

Поверхность, полученная при вращении AB, представляет собой боковую поверхность усеченного конуса с радиусами оснований BN и AM, высотой MN и образующей AB. Проведем через A прямую, параллельную l, и обозначим через L точку ее пересечения с перпендикуляром BN, опущенным из B на l, $MN=AL$. Обозначим через K проекцию C на l. Заметим, что треугольники ABL и COK подобны. Учитывая это, получим, что боковая поверхность усеченного конуса равна $2\pi\frac{BN+AM}{2}\cdot AB=2\pi CK\cdot AB=2\pi CO\times$ $\times AL=2\pi CO\cdot MN$.

Теперь с помощью предельного перехода нетрудно получить утверждение нашей задачи. (Если рассматриваемый шаровой пояс получается от вращения некоторой дуги $\smile AB$ окружности вокруг ее диаметра, то площадь поверхности этого пояса равна пределу площади поверхности, получающейся при вращении вокруг этого же диаметра ломаной $AL_1L_2\ldots L_nB$, все вершины которой лежат на $\smile AB$, при условии, что длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю.)

20. Пусть AB — хорда данного сегмента, O — центр круга. Обозначим через x расстояние от O до AB, а через R радиус окружности. Тогда объем тела, получающегося при вращении сектора AOB вокруг диаметра, будет равен произведению площади поверхности, получающейся от вращения дуги на $\frac{R}{3}$ (см. задачу 19), т. е. этот объем равен $\frac{1}{3}2\pi R^2h=\frac{2}{3}\pi\left(x^2+\frac{a^2}{4}\right)h=$ $=\frac{1}{6}\pi a^2h+\frac{2}{3}\pi x^2h.$

Но второе слагаемое равно объему тела, получающегося при вращении треугольника AOB вокруг диаметра. Значит, первое слагаемое и есть объем тела, получающегося при вращении данного сегмента.

21. $6\sqrt{41}$. **22.** $\frac{a^3\sqrt{1+2\cos\alpha}}{24\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$,

$2\arcsin\left(\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$, $\frac{a\sqrt{1+2\cos\alpha}}{4\sqrt{3}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}$, $\frac{\sqrt{3}a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}}$.

23. $\frac{a^3}{6\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha}$, $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$, $2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$,

$\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$, $\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$. **24.** $\frac{ab}{4}$. **25.** а) $\frac{9}{8}a^2$; б) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$;

в) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

26. Пусть плоскость L пересекает ось в точке A. Рассмотрим плоскость L_1, проходящую через A перпендикулярно оси. Докажите, что L и L_1 делят боковую поверхность и объем цилиндра на одинаковые по величине части.

27. $\frac{3}{8}$. **28.** а) $\frac{1}{10+6\sqrt{3}}$; б) $\frac{3}{\pi(5+3\sqrt{3})}$. **29.** $\frac{\pi a^2b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$.

30. $\frac{\sqrt{6}+1}{3}:\frac{\sqrt{3}+1}{2}:1$. **31.** $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{24}$. **32.** $3\sqrt{\frac{21}{5}}$. **33.** а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) 90°. **34.** $\frac{V}{2}$. **35.** а) $a^2\sqrt{2}$; б) $a^2\sqrt{3}$. **36.** 45°. **37.** $\frac{9\sqrt{91}}{4}$. **38.** $\frac{4}{3}\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$, $\sqrt{2}$. **39.** 54. **40.** $\frac{9\sqrt{3}}{25}$.

41. $\frac{a\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$. Указание. Центры шаров располагаются на одной диагонали куба. Пусть это диагональ MN, O_1 и O_2 — центры шаров, их радиусы — r. Тогда $MN=a\sqrt{3}$, $MO_1=r\sqrt{3}$, $O_1O_2=2r$, $O_2N=r\sqrt{3}$. Получаем $a\sqrt{3}=2r\sqrt{3}+2r$.

42. $\frac{1}{2}\arccos(\sqrt{3}-1)$. Указание. R, h, l — радиус основания, высота и образующая конуса: $h^2=l^2-R^2$, $2l^2+l^2\sqrt{3}=4R^2$. (Из условия, что угол в осевом сечении 150°.) Высота сечения равна $l\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, если φ — угол наклона сечения, то $\sin^2\varphi=\frac{2h^2}{l^2}=\frac{2(l^2-R^2)}{l^2}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

43. $2\sqrt{3}$. **44.** $\frac{9}{4}$. **45.** $\frac{9+4\sqrt{6}}{5}$. Указание. См. задачу 7 вводной части. **46.** $\frac{3\sqrt[4]{3}}{4}$.

47. $\frac{a(\sqrt{6}-1)}{10}$. Указание. Центры шаров образуют правильный тетраэдр с ребром $2r$ (r — радиус каждого шара), грани этого тетраэдра параллельны граням данного тетраэдра и удалены от них на расстояние, равное r. Радиус шара, вписанного в данный тетраэдр, на r больше радиуса шара, вписанного во второй тетраэдр с ребром $2r$, т. е. (см. задачу 1) $\frac{a\sqrt{6}}{12}=\frac{2r\sqrt{6}}{12}+r$.

48. 2. Указание. Пусть две вершины A и B правильного треугольника ABC принадлежат нижнему основанию цилиндра. Обозначим его сторону через $2x$. Спроектируем треугольник на нижнее основание. Получим равнобедренный треугольник ABC_1 (рис. 198), в котором $AB=2x$, $AC_1=BC_1=\sqrt{4x^2-2}$. По теореме синусов найдем радиус окружности, описанной около треугольника ABC_1 (через x), получим $R=\frac{4x^2-2}{2\sqrt{3x^2-2}}=1$.

49. Противоположные стороны сечения (рис. 83) при продолжении пересекают продолжение «переднего» ребра тетраэдра в двух различных точках. Этого не может быть.

50. Обозначим вершины внешнего четырехугольника, начиная с левой нижней и по часовой стрелке, через A, B, C и D, а соответствующие вершины внутреннего через A_1, B_1, C_1 и D_1. а) Получается, что вершина B_1 дальше, чем A_1, удалена от плоскости $ABCD$ (B_1 «выше» A_1). Чтобы в этом убедиться, достаточно провести через A_1 прямую, параллельную AB. Далее, C_1 «выше B_1, D_1 «выше» C_1 и, наконец, A_1 «выше» D_1. Противоречие.

б) Обозначим через K, L, M и N точки пересечения соответственно AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1, DA и D_1A_1. Если бы нужный многогранник существовал, точки K, L, M и N лежали бы на одной прямой. Но это не так.

Замечание. Рассуждения пункта б) применимы и в пункте а).

51. а) 3. Осями являются прямые, проходящие через середины противоположных ребер тетраэдра.

б) 9. Куб имеет осями три прямые, проходящие через центры его противоположных граней, и шесть прямых, проходящих через середины противоположных ребер.

в) Бесконечно много. г) 1.

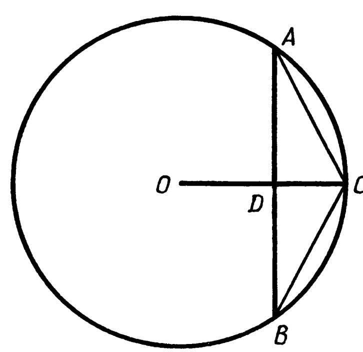


Рис. 198

52. $\frac{3}{2}a^3\sqrt{\frac{3}{2}}$. **53.** $\arccos\frac{23}{49}$. **54.** $\pi-\arccos\frac{25}{169}$. **55.** $\frac{1}{12}$.
56. $\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{3}+\sqrt{15}}$. **57.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **58.** 1:1. **59.** 1:8. **60.** $\frac{1}{6}$. **61.** $\frac{12(5\sqrt{2}-7)}{\pi}$.
62. 5. **63.** $2\sqrt{2}$. Указание. Радиус вписанного шара равен радиусу окружности, вписанной в треугольник, являющийся сечением нашей пирамиды плоскостью, проходящей через S перпендикулярно AD. Этот треугольник прямоугольный с катетами 3 и 4, радиус вписанной окружности равен 1. Таким же должен быть радиус окружности, вписанной в треугольник SAD.

64. $\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$. Указание. Радиус искомого шара равен наименьшему из двух радиусов окружностей, вписанных в треугольники SBC и SKM, где K и M — середины BC и AD. Первый радиус равен $\frac{2}{3}(\sqrt{13}-2)$, второй $\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$.

65. 2:3. **66.** $\frac{3\sqrt{10}}{20}$. **67.** $\frac{2\pi(4-\sqrt{13})}{3}$. **68.** $\arccos\frac{1}{3}$.

69. $\frac{2}{3}$ или $4-2\sqrt{3}$. Указание. Пусть a — сторона основания, h — высота пирамиды. Радиус описанного шара равен $\frac{2h^2+a^2}{4h}$. (Докажите!) Значит, $\frac{2h^2+a^2}{4h}=1$, $a^2=4h-2h^2$. Пусть r — радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h (равен радиусу вписанного шара). Проведем в нем высоту к основанию. Рассмотрим один из получившихся прямоугольных треугольников с катетами h и $\frac{a}{2}$. Центр окружности делит высоту на отрезки r и $h-r$. По теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника (X, 19, § 5) имеем $\frac{r}{h-r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+4h^2}}$, т. е. $ha^2-4hr^2-2ra^2=0$.

Заменив r и a^2, получим для h квадратное уравнение $h^2-(\sqrt{3}+1)h+\sqrt{3}=0$, откуда $h_1=1$, $h_2=\sqrt{3}$.

70. $\frac{\sqrt{25\pm16\sqrt{2}}}{2}$. **71.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **72.** 2:13.

73. 150°. Указание. Из условия следует, что $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ (α — угол при вершине осевого сечения). Возникают две возможности: $\alpha=30°$ или $\alpha=150°$. Если $\alpha=30°$, то диаметр основания будет $4\sin15°=\sqrt{6}-\sqrt{2}$. Докажем, что $\sqrt{6}-\sqrt{2}<1{,}04$. Легко проверить, что $\sqrt{6}<2{,}45$, $\sqrt{2}>1{,}41$. Значит, $\sqrt{6}-\sqrt{2}<2{,}45-1{,}41=1{,}04$.

74. 45°. Указание. Докажите, что l проходит через вершину B.

75. 60°. Указание. На рисунке 199 изображено: SO — ось конуса, SA — образующая, которой касается шар с центром O_1, M и K — точки касания этого шара с SA и плоскостью основания, M — середина SA. Поскольку шары равны и попарно касаются друг друга, то их центры образуют правильный треугольник со стороной $2r$ (r — радиусы шаров, OK равняется радиусу окружности, описанной около правильного треугольника со стороной $2r$: $OK=\frac{2r}{\sqrt{3}}$). Пусть $\angle O_1AK=\angle O_1AM=\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi=x$.

Имеем

$$AK=xr,\ SA=2AM=2AK=2xr,$$

$$OA=SA\cos(180^\circ-2\varphi)=-2xr\,\frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=2xr\,\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Получаем для x уравнение

$$x+2x\,\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}},\quad x^3+\frac{2}{\sqrt{3}}x^2-3x+\frac{2}{\sqrt{3}}=0.$$

Сделаем замену $y=x\sqrt{3}$. Для y будет уравнение $y^3+2y^2-9y+6=0$, $(y^3-y^2)+(3y^2-3y)-(6y-6)=0$, $(y-1)(y^2+3y-6)=0$. По условию $\varphi>45^\circ$, т. е. $0<\operatorname{ctg}\varphi<1$, $0<y<\sqrt{3}$.

Уравнение $y^2+3y-6=0$ не имеет корней $0<y<\sqrt{3}$. Значит, $y=1$, $\varphi=60^\circ$.

76. 1. Указание. Середины отрезков KP и MS совпадают. Обозначим эту точку через Q, O — центр $ABCD$. Тогда $QO=\frac{1}{2}(AK-CP)=2$, причем Q по ту же сторону от плоскости $ABCD$, что и K. Далее рассмотрим трапецию с вершинами B, M, D и S, порядок обхода вершин будет $BMDS$.

77. $\frac{103}{240}\pi\sqrt{5}$. Указание. Объем тела можно получить как сумму объемов двух тел, получающихся при вращении треугольни-

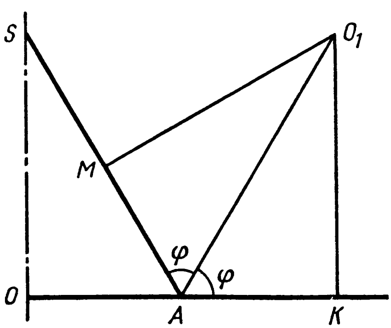


Рис. 199

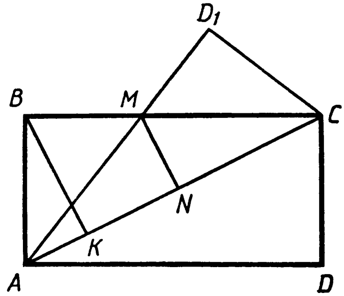


Рис. 200

ков ABC и ADC вокруг AC, минус объем тела, получающегося при вращении треугольника AMC (рис. 200, точка D_1 симметрична D относительно AC). Получаем формулу для объема

$V=\frac{\pi}{3}AC(2BK^2-MN^2)$.

78. $\frac{\sqrt{170}}{8}$ или $\frac{\sqrt{13}}{2}$. Указание. Обозначим искомый треугольник AMN, M — середина CD, N на BC.

Возможны случаи: 1) $AN=NM$. Этот случай дает первый ответ.

2) $AM=MN$. В этом случае N совпадает с B. Соответствует второму ответу.

3) Если $AM=AN$, то эти стороны равны $\frac{\sqrt{17}}{2}$. Но $\frac{\sqrt{17}}{2}>2$, т. е. N на продолжении BC. То же имеет место для других возможностей.

79. $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$. **80.** $\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$. **81.** $\frac{\sqrt{55}}{12}$.

82. $\frac{4}{\sqrt{23}}$. Указание. Искомый шар касается сторон основания в серединах. Используя равенство касательных, проведенных из одной точки, найдем положение точек касания боковых ребер.

83. $\frac{1}{3}(90-25\sqrt{3})\sqrt{2}$. Указание. Докажите, что плоскость пересекает второе основание и в сечении имеем трапецию.

84. 8. Указание. Докажите, что в сечении получается ромб.

85. $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. **86.** $\frac{1}{25}$. **87.** 1:5. **88.** 1:2.

89. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Указание. На рисунке 201 изображена одна грань параллелепипеда $ABCD$ и точка пересечения диагоналей O.

Пусть $OA=\frac{a}{2}$, $OB=\frac{b}{2}$, $OC=\frac{c}{2}$, $OD=\frac{x}{2}$.

Имеем $AB^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$, $BC^2=\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}$, $CA^2=\frac{c^2}{4}+\frac{a^2}{4}$, $OQ^2=$ $=\frac{1}{4}AC^2=\frac{1}{16}(a^2+c^2)$.

Далее, по формуле задачи 21 (X, § 7)

$$OQ^2=\frac{1}{4}(2OD^2+2OB^2-DB^2)$$

или $\frac{1}{16}(a^2+c^2)=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{b^2}{2}-DB^2\right)$,

откуда $x^2=\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{2}-b^2+2DB^2$.

Но $DB^2+AC^2=2(AB^2+BC^2)$ (см. X, 20, § 7)

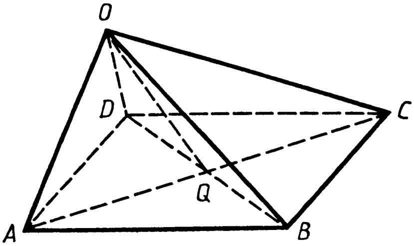


Рис. 201

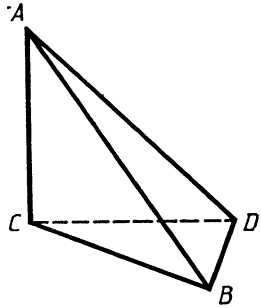


Рис. 202

или $DB^2+\frac{c^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}$, $DB^2=\frac{a^2}{4}+b^2+\frac{c^2}{4}$.

Значит, $x^2=a^2+b^2+c^2$.

90. $\frac{15\sqrt{3}}{128}$.

91. $\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Указание. На рисунке 202 изображена пирамида, в которой AC перпендикулярна плоскости BCD, $\angle BCD=45°$. ACB и ACD — равнобедренные прямоугольные треугольники. Можно считать, что AB — катет исходного прямоугольного треугольника, AC — биссектриса, C — проекция B на биссектрису. Требуется найти угол BAD.

92. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Указание. Докажите, что вершина пирамиды проектируется вне основания в точку, равноудаленную от прямых, образующих основание (центр вневписанной окружности, см. задачу 4).

93. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. **94.** $\frac{1}{12}$. **95.** 1:2. Указание. Докажите, что плоскость сечения проходит через точки C и D. **96.** 3π. **97.** Нет, не во всяком. **98.** Указанным свойством обладает пирамида, у которой два противоположных двугранных угла тупые.

99. Докажите, что если прямая не перпендикулярна плоскости и образует равные углы с двумя пересекающимися прямыми этой плоскости, то проекция этой прямой на плоскость также образует равные углы с теми же прямыми, т. е. параллельна биссектрисе какого-то из двух углов, ими образованных.

100. Треугольник, четырехугольник и шестиугольник. Сечение куба не может быть правильным пятиугольником, поскольку у сечения, имеющего более трех сторон, найдется хотя бы одна пара параллельных сторон, а у правильного пятиугольника параллельных сторон нет.

101. Нет, не любой. Например, если один плоский угол трехгранного угла достаточно мал, а два других плоских угла прямые, то легко убедиться, что никакое сечение этого трехгранного угла не является правильным треугольником.

102. Обозначим через x, y, z отрезки ребер трехгранного угла от вершины до плоскости сечения. Тогда стороны, получающиеся в сечении треугольника, будут равны $a^2=x^2+y^2$, $b^2=y^2+z^2$, $c^2=z^2+x^2$. Теперь проверяем, что квадрат любой стороны меньше суммы квадратов двух других сторон.

103. $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$. Указание. Расстояние между диагональю куба и непересекающейся с ней диагональю его грани равно $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}a$. Таким же должно быть и расстояние между ребрами правильного тетраэдра, лежащими на этих диагоналях. Но для правильного тетраэдра с ребром b расстояние между противоположными ребрами равно $b\frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. задачу 1), т. е. $b\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}a$, $b=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

104. $\frac{4h^3}{45}$. Указание. Из условия следует, что данная пирамида является правильной. Если x — сторона основания, то площадь основания будет x^2, а площадь боковой грани $\frac{x}{2}\sqrt{\frac{x^2}{4}+h^2}$.

105. $\frac{5+\sqrt{5}}{24}a^3$. Указание. Данная пирамида является правильной пятиугольной пирамидой. Для вычислений воспользуйтесь равенством $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

106. $4a^2$. Указание. Пусть одно основание усеченной пирамиды имеет сторону x, а другое y. Боковая поверхность равна $2(x+y)a$. В сечении пирамиды плоскостью, проходящей через центр шара перпендикулярно основаниям пирамиды, будет равнобочная трапеция с основаниями x и y, боковой стороной a, в которую можно вписать окружность. Значит, $x+y=2a$.

107. $\pi-2\arccos\frac{5\pm 2\sqrt{3}}{13}$.

108. $\frac{ab}{2c}$, $\frac{bc}{2a}$, $\frac{ca}{2b}$. Указание. Обозначим радиусы шаров через x, y, z. Пусть радиусы шаров, касающихся плоскости треугольника в концах стороны a, равны x и y. Центры этих шаров и концы стороны служат вершинами прямоугольной трапеции с основаниями x и y, перпендикулярной им боковой стороной, равной a, и другой боковой стороной, равной $(x+y)$.
Легко получить уравнение $(x+y)^2-(x-y)^2=a^2$, или $4xy=a^2$.

Получаем систему $xy=\frac{a^2}{4}$, $yz=\frac{b^2}{4}$, $zx=\frac{c^2}{4}$.

Перемножив эти уравнения, найдем $xyz=\frac{abc}{8}$ и т. д.

109. Докажите, что для вычисления объема усеченного конуса можно воспользоваться формулой задачи 11.

110. Пусть ребро тетраэдра $ABCD$ равно a. Высота AO равна $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Если M — середина AO, то $MB=\sqrt{BO^2+OM^2}=$ $=\sqrt{\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Значит, треугольник BMC равнобедренный, прямоугольный.

111. $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{a}{3}$. Указание. Решим эту задачу иначе, чем мы это делали во вводной части (см. задачи 11, 12). Если M — середина BB_1, то $A_1M \parallel CK$ (рис. 203). Следовательно, искомый угол равен углу MA_1D. С другой стороны, плоскость A_1DM параллельна CK, значит, расстояние между CK и A_1D равно расстоянию от точки K до плоскости A_1DM. Обозначим искомое расстояние через x, а искомый угол через φ.

Тогда $V_{A_1MDK}=\frac{1}{3}S_{A_1MD}\cdot x=\frac{1}{3}S_{A_1KD}\cdot a=\frac{a^3}{12}$. Отсюда $x=\frac{a^3}{4S_{A_1MD}}$.

Найдем стороны $\triangle A_1MD$: $A_1D=a\sqrt{2}$, $A_1M=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $DM=\frac{3}{2}a$.

По теореме косинусов $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $S_{A_1MD}=\frac{3}{4}a^2$, $x=\frac{a}{3}$.

112. $\arccos\frac{1}{6}$, $a\sqrt{\frac{2}{35}}$ и $\arccos\frac{2}{3}$, $a\frac{\sqrt{10}}{10}$. Указание. Будем решать эту задачу методом, рассмотренным во вводной части (см. задачи 11, 12). Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, K — середина AB, M — середина AC. Спроектируем тетраэдр на плоскость, проходящую через AB перпендикулярно CK. Тетраэдр спроектируется в треугольник ABD_1, где D_1 — проекция D. Если M_1 — проекция M (M_1 — середина AK), то расстояние между прямыми CK и DM равно расстоянию от точки K до прямой D_1M_1. Это расстояние легко найти, поскольку D_1KM_1 — прямоугольный треугольник, в котором катеты D_1K и KM_1 равны соответственно $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ (высота тетраэдра) и $\frac{a}{4}$.

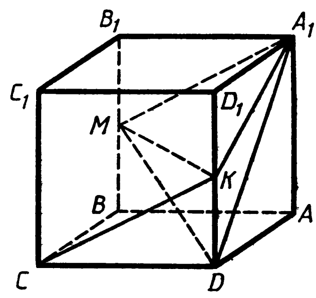


Рис. 203

Задача имеет два решения. Второе

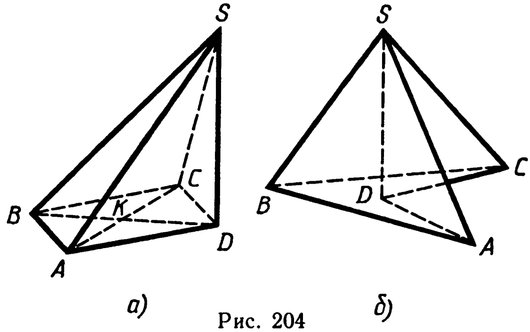


Рис. 204

мы получим, если рассмотрим медианы CK и BN, где N — середина DC.

113. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Указание. Рассмотрим сначала пирамиду, соответствующую рисунку 204, *а*. Из условия следует, что $BK = \sqrt{5-1} = 2$, $KD = \sqrt{2-1} = 1$.

Значит, $BD = 3$, но по условию $SA + SB = 2 + \sqrt{5} < 3 + \sqrt{2} = DB + DA$, т. е. сумма проекций отрезков больше их суммы. Этого не может быть.

Рассмотрим теперь пирамиду, как на рисунке 204, *б*.

Если $SD = h$, то $SA = \sqrt{h^2+2}$, $SB = \sqrt{h^2+1}$ $(BD = 1)$. Получаем уравнение $\sqrt{h^2+2} + \sqrt{h^2+1} = 2 + \sqrt{5}$. Из этого уравнения $h^2 = 3$.

Замечание. Данная задача юридически не совсем законна, поскольку в школе мы не рассматриваем невыпуклые многогранники, хотя математически она абсолютно верна.

114. $\frac{(2b \pm a)\,a}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$. Указание. Докажите, что искомый шар касается сторон основания в их серединах. При этом возникают две возможности: шар касается боковых ребер во внутренних точках и шар касается продолжений боковых ребер.

115. $\frac{41\pi\sqrt{41}}{384}$. **116.** $a\sqrt{\frac{7}{8}}$. **117.** $a + b \pm \sqrt{2ab - \frac{a^2}{4}}$.

118. $\frac{2a}{3}\sqrt{4R^2 - a^2}$.

119. $2 + \sqrt{3}$. Указание. Рассмотрим тетраэдр $O_1O_2Q_1Q_2$, где O_1 и O_2 — центры шаров радиусами R, Q_1 и Q_2 — центры шаров радиусами r $(r < R)$.

Из условия следует, что $O_1O_2 = 2R$, $Q_1Q_2 = 2r$, все остальные ребра этого тетраэдра равны $R + r$. Теперь можно найти расстояние между ребрами O_1O_2 и Q_1Q_2, равное расстоянию между их серединами. С другой стороны, из условия следует, что это расстояние равно $R - r$.

120. $\frac{a\sqrt{22}}{8}$. **121.** $\frac{3ah}{3a+h(3+2\sqrt{3})}$. **122.** $12V$. **123.** $\frac{\pi}{4}$.

124. $\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})$. **125.** $\arccos(2-\sqrt{5})$.

126. $\frac{Q^2}{S}$. У к а з а н и е. Если α — угол между рассматриваемыми гранями, то надо найти $Q\cos\alpha$ (см. задачу 5). С другой стороны, грань площадью Q является проекцией грани площадью S, т. е. $Q=S\cos\alpha$, $\cos\alpha=\frac{Q}{S}$.

127. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

128. $2\operatorname{arctg}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. У к а з а н и е. Продолжим боковые грани до пересечения. При этом мы получим две подобные пирамиды, основаниями которых являются большее и меньшее основания данной усеченной пирамиды. Пусть a — сторона большего основания усеченной пирамиды, α — двугранный угол при этом основании. Можно найти высоту большей пирамиды $h=\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$, радиус вписанного в нее шара $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, высоту меньшей пирамиды $h_1=h-2r=\frac{a\sqrt{3}}{6}\left(\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$, сторону меньшего основания $a_1=\frac{h_1}{h}a=a\frac{\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$, боковое ребро большей пирамиды $l=\frac{a\sqrt{3}}{6}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+4}$, боковое ребро меньшей пирамиды $l_1=l\frac{h_1}{h}$.

После этого воспользуемся условием существования шара, касающегося всех ребер усеченной пирамиды. Это условие эквивалентно существованию окружности, вписанной в боковую грань, т. е. должно выполняться равенство $2(l-l_1)=a+a_1$.

Выразив l, l_1, a_1 через a и α, получим уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+4}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

129. $\arccos\frac{a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

У к а з а н и е. Пусть M — центр грани $A_1B_1C_1D_1$, K — центр грани ADD_1A_1. Данные плоскости пересекаются по прямой MK. Рассмотрим тетраэдр A_1D_1MK. Его объем равен $\frac{1}{24}$ объема параллелепипеда, т. е. он равен $\frac{1}{24}abc$.

Площади граней D_1MK и A_1MK соответственно в четыре раза меньше площадей треугольников D_1AB_1 и A_1DC_1. Площади двух последних можно выразить через a, b и c. Затем воспользуемся формулой задачи 8 и найдем синус искомого угла.

130. $\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}$. Указание. Многогранник $ABMDCN$ является треугольной призмой с основанием ABM и боковыми ребрами AD, BC, MN.

131. $\arcsin\frac{\sqrt{6}\pm 1}{5}$. Указание. Возьмем на продолжении ребра CC_1 точку K так, что $B_1K \| BC_1$, а через ребро BB_1 проведем плоскость, параллельную данной (рис. 205). Эта плоскость должна проходить или через внутреннюю, или через внешнюю биссектрису угла DB_1K. Поскольку отношение, в котором плоскость, проходящая через BB_1, делит DK, равно отношению, в котором она делит DC, то возможны два случая: плоскость проходит через точку N на ребре DC, такую, что $DN:NC=\sqrt{3}:\sqrt{2}$, или же она проходит через точку M на его продолжении и опять $DM:MC=$ $=\sqrt{3}:\sqrt{2}$.

Найдем расстояние от точки K до первой плоскости. Оно равно расстоянию от точки C до прямой BN. Если это расстояние x, то

$$x=\frac{2S_{BNC}}{BN}=\frac{a\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{11-4\sqrt{6}}}=\frac{a(\sqrt{6}-1)\sqrt{2}}{5}$$

$$\text{и } \sin\varphi=\frac{x}{B_1K}=\frac{\sqrt{6}-1}{5},$$

где φ — угол между плоскостью BB_1N и прямыми B_1D и B_1K. Точно так же находится другой угол.

132. $\frac{a}{2}$. Указание. Пусть $ABCD$ — данная пирамида, боковые ребра которой $DA=a$, $DB=x$, $DC=y$; по условию эти ребра перпендикулярны и $x+y=a$. Нетрудно найти, что $S_{ABC}=$

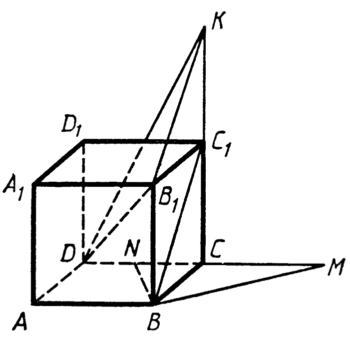


Рис. 205

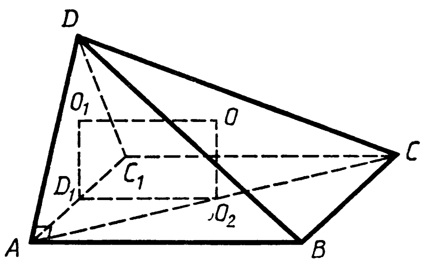


Рис. 206

$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2(x^2+y^2)+x^2y^2}$, $V_{ABCD}=\frac{1}{6}axy$. С другой стороны, если R — радиус искомого шара, то

$$V_{ABCD}=\frac{R}{3}(S_{DAB}+S_{DBC}+S_{DCA}-S_{ABC})=$$
$$=\frac{R}{6}(ax+ay+xy-\sqrt{a^2(x^2+y^2)+x^2y^2})=$$
$$=\frac{R}{6}(a^2+xy-\sqrt{a^4-2xya^2+x^2y^2})=\frac{R}{3}xy.$$

Приравнивая два выражения для V_{ABCD}, найдем $R=\frac{a}{2}$.

133. $\frac{3}{4}\sqrt{66}$ и $3\sqrt{3}$. Указание. Возможны две пирамиды: правильная, ее объем равен $\frac{3}{4}\sqrt{66}$; пирамида, вершина которой проектируется в центр вневписанной окружности основания (причем два боковых ребра равны 5), ее объем равен $3\sqrt{3}$.

134. $\frac{4}{5}$, считая от точки 4. Указание. Пусть $BL=x$, ребро куба равно 2. Тогда в треугольнике KLO, где O — центр куба, будем иметь $KO=\sqrt{2}$, $KL=\sqrt{AK^2+AB^2+BL^2}=\sqrt{5+x^2}$, $LO=$ $=\sqrt{(x-1)^2+2}=\sqrt{x^2-2x+3}$. Высота в этом треугольнике, опущенная на KL, равна 1. Пусть M — основание высоты.

Имеем $KM=\sqrt{KO^2-OM^2}=1$, $ML=\sqrt{LO^2-OM^2}=\sqrt{x^2-2x+2}$.

Получаем уравнение $\sqrt{x^2-2x+2}+1=\sqrt{5+x^2}$, т. е. $x=\frac{1}{4}$.

135. $\frac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{b^2-a^2\cos^2\alpha}$. Указание. Возьмем C_1 так, что $ABCC_1$ — прямоугольник (рис. 206). D_1 — середина AC_1, O_1, O_2 — соответственно центры окружностей, описанных около треугольников AC_1D, ABC, O — центр сферы, описанной около $ABCD$. Очевидно, O_2 — середина AC, AB и C_1C перпендикулярны AD и AC_1, следовательно, плоскости ADC_1 и $ABCC_1$ перпендикулярны, а $O_1D_1O_2O$ — прямоугольник.

Таким образом, $DC_1=\sqrt{DC^2-C_1C^2}=\sqrt{b^2-a^2}$. Радиус окружности, описанной около DC_1A будет равен

$$R_1=\frac{DC_1}{2\sin\angle DAC_1}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2\sin\alpha}.$$

А радиус сферы $R=OA$ можно найти из прямоугольного треугольника AO_1O (на рисунке этот треугольник не изображен):

$$R=\sqrt{AO_1^2+O_1O^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{\sin^2\alpha}+a^2}=\frac{1}{2\sin\alpha}\sqrt{b^2-a^2\cos^2\alpha}.$$

136. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Указание. Пусть K — середина ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, M — середина ребра D_1C_1, K и M одновременно

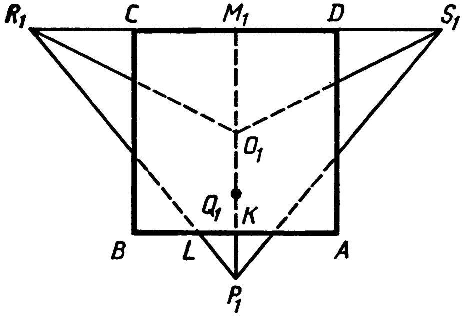


Рис. 207

являются серединами ребер PQ и RS правильного тетраэдра $PQRS$. D_1C_1 лежит на RS. Если ребро тетраэдра равно b, то $MK = b\frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$. Значит, $b = 2a$.

Спроектируем тетраэдр на плоскость $ABCD$ (рис. 207). P_1, Q_1, R_1, S_1 — проекции P, Q, R, S. Поскольку PQ составляет с этой плоскостью угол 45°, то длина P_1Q_1 будет $a\sqrt{2}$.

Пусть L — точка пересечения прямой AB и прямой P_1R_1. Из подобия треугольников P_1LK и $P_1R_1M_1$ найдем

$$LK = \frac{R_1M_1 \cdot P_1K}{P_1M_1} = \frac{a}{1+\sqrt{2}} < \frac{a}{2}.$$

Значит, ребро тетраэдра PR (а следовательно, и другие ребра PS, QR и QS) пересекают куб.

Для вычисления объема получившегося тела удобно это тело рассматривать как тетраэдр со срезанными углами.

137. $\frac{20}{7}$. Указание. Обозначим длины этих скрещивающихся ребер через a и b, расстояние между ними через d, угол через φ, по формуле задачи 12 найдем объемы получившихся частей:

$$V_1 = \frac{10}{81} abd \sin\varphi, \quad V_2 = \frac{7}{162} abd \sin\varphi.$$

138. $2\cos\alpha$. Указание. Площадь проекции второго сечения на первую плоскость вдвое меньше площади первого сечения. С другой стороны, отношение площади проекции второго сечения к площади самого сечения равно $\cos\alpha$ (задача 5).

139. $\frac{1}{12}\pi R^2 H$.

140. $\frac{abc}{ab+bc+ca}$. Указание. Пусть общий перпендикуляр к данным ребрам делится кубом на отрезки y, x и z, $y+x+z=c$ (x — ребро куба, y примыкает к ребру a). Грани куба, параллельные данным ребрам, пересекают тетраэдр по двум прямоугольникам, у первого стороны $\frac{x+z}{c}a$, $\frac{yb}{c}$, у второго — $\frac{za}{c}$, $\frac{x+y}{c}b$, при этом меньшие стороны этих прямоугольников равны ребру куба, т. е. $\frac{yb}{c}=x$, $\frac{za}{c}=x$, откуда $y=\frac{cx}{b}$, $z=\frac{cx}{a}$, $\frac{cx}{b}+x+\frac{cx}{a}=c$,

$x=\frac{abc}{ab+bc+ca}$.

141. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{137}{3}}$. Указание. Пусть O_1 и O_2 — проекции центра шара O на плоскости KLM и KLN, P — середина ML.

Проекции O_1 и O_2 на KL должны совпадать. Можно доказать, что эти проекции попадают в середину KL — точку Q (рис. 208). Поскольку двугранный угол между плоскостями KLM и KLN равен 90°, радиус искомой сферы будет

$$\sqrt{PO_1^2+O_1O^2}=\sqrt{PO_1^2+O_1Q^2}.$$

Если мы продолжим O_1P до пересечения с прямой KL в точке R, то из прямоугольного треугольника PLR найдем $RL=6a$, $RP=$ $=3a\sqrt{3}$. Затем найдем $RQ=\frac{11}{2}a$, $O_1Q=\frac{11\sqrt{3}}{6}a$, $RO_1=\frac{11\sqrt{3}}{3}a$, $PO_1=\frac{11\sqrt{3}}{3}a-3a\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Следовательно, радиус сферы равен $\sqrt{\frac{4a^2}{3}+\frac{121}{12}a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{137}{3}}$.

142. $\sqrt{b^2+3a^2}$. Указание. Данные три угла не могут прилегать к одной грани; далее, они не могут прилегать к одной вершине, поскольку в этом случае все отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, будут равны.

Остается случай, когда три ребра, соответствующие прямым углам, образуют незамкнутую ломаную. Пусть это будут ребра AB, BC и CD (рис. 209). Обозначим $DB=x$, $BC=y$, $CA=z$. Тогда расстояние между серединами DB и CA будет $\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{4}}$, а между AB и CD (или AD и BC) $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+z^2}$.

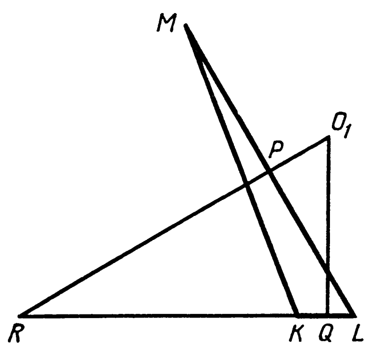


Рис. 208

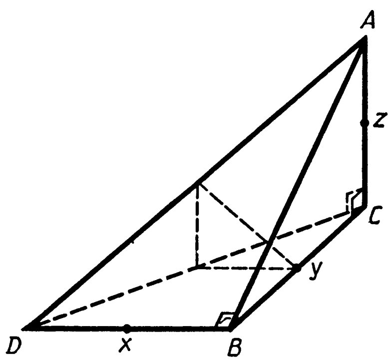


Рис. 209

Наибольшим будет ребро $AD=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=$

$$=\sqrt{\left(\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{4}\right)+3\left(\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{4}\right)}=\sqrt{b^2+3a^2}.$$

143. 1. Указание. Проведем через C прямую, параллельную AB, и возьмем на ней точку E так, что $CE=AB$, $ABEC$ — параллелограмм (рис. 210). Если O — центр сферы, то, поскольку $\angle OCE=\frac{\pi}{3}$ и $CE=1$ (следует из условия), $\triangle OCE$ правильный. Значит, точка O равноудалена от всех вершин параллелограмма $ABEC$. Отсюда следует, что $ABEC$ — прямоугольник, проекция O на плоскость $ABEC$ — точка K — центр $ABEC$ и $BD=2\cdot OK=$

$$=2\sqrt{OC^2-\frac{1}{4}BC^2}=1.$$

144. $\dfrac{2pq\cos\frac{\alpha}{2}}{p+q}$. Указание. Если x — площадь искомого сечения, $AB=a$, то, воспользовавшись для объема пирамиды $ABCD$ и ее частей формулой задачи 8, получим

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{px\sin\frac{\alpha}{2}}{a}+\frac{2}{3}\cdot\frac{qx\sin\frac{\alpha}{2}}{a}=\frac{2}{3}\cdot\frac{pq\sin\alpha}{a}, \text{ т. е. } x=\frac{2pq\cos\frac{\alpha}{2}}{p+q}.$$

145. $\frac{5\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{48}a$. Указание. При пересечении шара плоскостью AMN получим окружность, вписанную в треугольник AMN. В этом треугольнике $AN=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $AM=\frac{\sqrt{3}}{3}a$, $MN=\frac{a}{2}$ (находится из $\triangle CMB$).

Следовательно, если L — точка касания искомого шара с AM, то $AL=\dfrac{AN+AM-MN}{2}=\left(\frac{5}{12}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)a$.

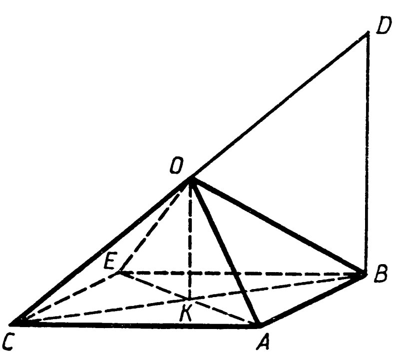


Рис. 210

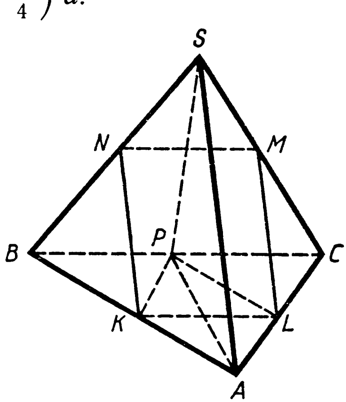


Рис. 211

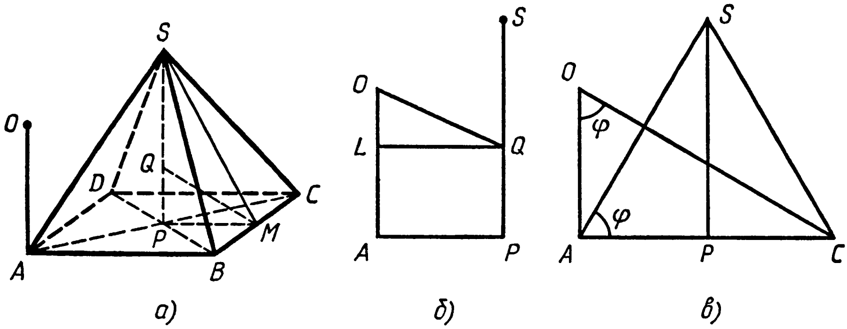


Рис. 212

Шар, вписанный в $ABCD$, имеет радиус $r=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a$ и касается плоскости ACD в точке M.

Таким образом, если x — радиус искомого шара, то

$$\frac{x}{r}=\frac{AL}{AM}=\frac{5-\sqrt{3}}{4}.$$

146. $\sqrt{3}$. Указание. На рисунке 211 точки K, L, M, N и P — середины соответствующих ребер, $AKPL$ — ромб (следует из условия), точки A, K, L и P на одной окружности, значит, $AKLP$ — квадрат. Так как K, L, M и N лежат на одной окружности и $KLMN$ — параллелограмм, то $KLMN$ — прямоугольник.

Следовательно, $SA \perp BC$ и проекция SA на BC есть точка P — середина BC. По условию $\angle PAS=\angle PSA=45°$.

Таким образом, $SP=PA$, $\angle SPA=90°$, $\triangle BAC=\triangle BSC$, а треугольники ABS и ACS правильные. Середина AS равноудалена от точек A, K, L, M, N и P.

147. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Указание. На рисунке 212, *а* O — центр шара, Q — центр вписанного шара, M — середина BC. Обозначим через R, r, a и h соответственно радиусы шара с центром O, вписанного шара, сторону основания и высоту пирамиды. Отношение $\frac{R}{a}$ равно тангенсу искомого угла. Из $\triangle SPM$ $\left(SM=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\right)$ имеем $\frac{PQ}{SQ}=\frac{PM}{SM}$ (QM — биссектриса) или

$$\frac{r}{h-r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+4h^2}}. \qquad (1)$$

В прямоугольном треугольнике OLQ (рис. 212, *б*) имеем $OQ=$ $=R+r$ (по условию), $OL=R-r$, $LQ=AP=a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

По теореме Пифагора получаем:

$$8Rr = a^2. \qquad (2)$$

И наконец, поскольку $OC \perp AS$ (рис. 212, *в*), то $\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{a}\sqrt{2}$ (из $\triangle APS$) и $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{R}\sqrt{2}$ (из $\triangle OAC$), т. е.

$$hR = a^2. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) имеем $h = 8r$.

Подставляя в (1), найдем $r = \frac{\sqrt{3}}{4} a$ и т. д.

148. $\frac{a}{3}\sqrt{14}$. Указание. Заметим, что отрезок MN своей точкой пересечения с прямой PQ делится пополам. Спроектируем этот отрезок на плоскость $ABCD$. Если N_1 — проекция N, K_1 — середина AD, Q_1 — середина DC (K_1 и Q_1 — проекции K и Q), то N_1M перпендикулярен AQ_1 и делится точкой пересечения пополам. Значит, $\angle N_1AD = 2\angle Q_1AD$. Отсюда найдем N_1K_1, затем N_1M.

149. $(5\sqrt{6} + \sqrt{22})R$. Указание. На рисунке 213 O — центр шара, вписанного в $ABCD$, O_1 и O_2 — центры данных шаров, K — середина AB. Зная, как выражается радиус шара, вписанного в правильный тетраэдр, через ребро и расстояние между противоположными ребрами (задача 1), выразим $AK = r\sqrt{6}$, $OK = r\sqrt{3}$, где r — радиус шара, вписанного в тетраэдр $ABCD$. Следовательно, $AK_1 = 2R\sqrt{6}$, $BK_2 = 3R\sqrt{6}$, $O_2M = O_2K_2 - O_1K_1 = 3R\sqrt{3} - 2R\sqrt{3} = R\sqrt{3}$, $O_1O_2 = 5R$, $K_1K_2 = O_1M = \sqrt{25R^2 - 3R^2} = R\sqrt{22}$.

150. $0 < r \leqslant \dfrac{a}{\sqrt{2}\,(2\cos\alpha + \sqrt{4\cos^2\alpha + 1})}$, $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{1 + 2\cos\alpha + \sqrt{4\cos^2\alpha + 1}}$.

Указание. Если плоскость пересекает ребра AD и CD, то в сечении будет треугольник, при этом радиус вписанной окружности будет меняться от 0 до $\dfrac{a}{\sqrt{2}\,(2\cos\alpha + \sqrt{4\cos^2\alpha + 1})}$.

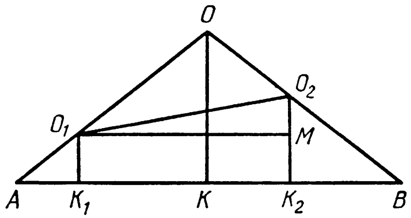


Рис. 213

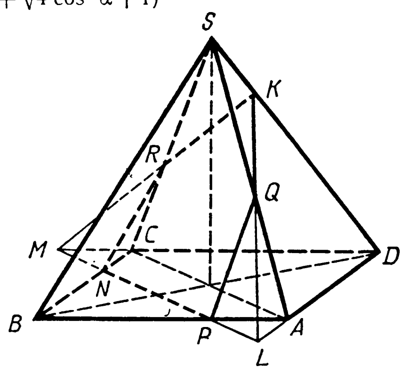


Рис. 214

Пусть теперь плоскость пересекает ребра AB и BC в точках P и N, SA и SC в точках Q и R, SD в точке K и продолжения AD и CD в точках L и M (рис. 214). Поскольку прямые PQ и NR параллельны и касаются окружности, вписанной в наше сечение, то PN есть диаметр этой окружности. Обозначим $PN=2r$, тогда $ML=2a\sqrt{2}-2r$, $KL=\frac{a\sqrt{2}-r}{2\cos\alpha}\sqrt{4\cos^2\alpha+1}$, $S_{MKL}=\frac{(a\sqrt{2}-r)^2}{2\cos\alpha}$.

Таким образом (из равенства $S=pr$), $r=\frac{a\sqrt{2}-r}{2\cos\alpha+\sqrt{4\cos^2\alpha+1}}$, откуда $r=\frac{a\sqrt{2}}{1+2\cos\alpha+\sqrt{4\cos^2\alpha+1}}$.

151. $3S\sqrt{2}$. Указание. Пусть x — ребро тетраэдра, $MN=\frac{x}{\sqrt{2}}$. Если ребро, середина которого M, образует с данной плоскостью угол α, то противоположное образует угол $\frac{\pi}{2}-\alpha$. Проекция тетраэдра на эту плоскость представляет собой равнобочную трапецию с основаниями $x\cos\alpha$ и $x\sin\alpha$ и расстоянием между основаниями, равным $\frac{x}{\sqrt{2}}$. Таким образом, $S=\frac{x^2}{2\sqrt{2}}(\cos\alpha+\sin\alpha)$. Кроме того, по условию угол при большем основании $60°$, откуда $|\cos\alpha-\sin\alpha|=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

152. $AM:MC=2-\sqrt{3}$, $BN:ND_1=2$. Указание. Пусть ребро куба равно 1. Обозначим через O центр грани $ABCD$. Из того, что $\angle NMC=60°$ и $\angle NOC=90°$, следует, что O между M и C. Обозначим $OM=x$, $NB=y$. Тогда $MN=2x$, $NO=x\sqrt{3}$, $MB=\sqrt{\frac{1}{2}+x^2}$.

Применив теорему косинусов к треугольникам MNB и ONB, получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}+x^2=4x^2+y^2-2xy\sqrt{2}, \\ 3x^2=\frac{1}{2}+y^2-\frac{2}{\sqrt{3}}y. \end{cases}$$

Отсюда найдем $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

153. $\frac{a}{2\sqrt{5}}$ или a. Указание. Пусть высота призмы равна x. Возьмем на продолжении ребра B_1B точку K так, что $BK=\frac{3}{2}x$, $B_1K=\frac{5}{2}x$. Поскольку KN параллельна BM и $KN=2BM$, проекция KN на CN вдвое больше проекции BM на CN, т. е. она равна $\frac{a}{\sqrt{5}}$. В $\triangle CNK$ имеем $CN=\sqrt{a^2+\frac{x^2}{4}}$, $NK=\sqrt{a^2+4x^2}$, $CK=\sqrt{a^2+\frac{25}{4}x^2}$.

В зависимости от того, острый или тупой угол C_1NK, будем иметь два уравнения:

$$a^2+\frac{25}{4}x^2=\left(a^2+\frac{x^2}{4}\right)+(a^2+4x^2)\mp 2\sqrt{a^2+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{a}{\sqrt{5}}$$

(«—» для острого угла, «+» для тупого).

154. Отрезок AB разделен в отношении $\cos^2\frac{\alpha}{2}:\sin^2\frac{\alpha}{2}:$ $:\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Указание. Обозначим через A_1 и B_1 две другие точки касания, R и r — радиусы шаров. В трапеции AA_1BB_1 найдем основания $AA_1=2R\cos\frac{\alpha}{2}$, $BB_1=2r\cos\frac{\alpha}{2}$ и боковые стороны $AB_1=A_1B=2\sqrt{Rr}$, затем диагонали $AB=A_1B_1=$ $=2\sqrt{Rr\left(1+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Если шар, проходящий через A и A_1, пересекает AB в точке K, то $A_1B^2=BK\cdot BA$, откуда

$$BK=\frac{2\sqrt{Rr}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{AB}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}},\qquad AK=\frac{AB\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Так же находятся другие части отрезка AB.

155. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ или $\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$. Указание. Можно доказать, что ось цилиндра должна проходить через середину ребра BD и принадлежать плоскости BDL, где L — середина AC. Пусть ось цилиндра образует с BD острый угол α (рис. 215, *а*). Спроектируем пирамиду на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра, получим вписанный четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 215, *б*), в котором $A_1C_1=AC=12$. Диагонали A_1C_1 и B_1D_1 перпендикулярны, точка пересечения диагоналей делит A_1C_1 пополам, а диагональ D_1B_1 делится точкой L_1 на отрезки $6\sqrt{3}\cos\alpha$ и $10\sqrt{3}\sin\alpha-6\sqrt{3}\cos\alpha$.

Из условия $A_1L_1\cdot L_1C_1=B_1L_1\cdot L_1D_1$ получим для α уравнение

$$\sin^2\alpha-5\sin\alpha\cdot\cos\alpha+4\cos^2\alpha=0,$$

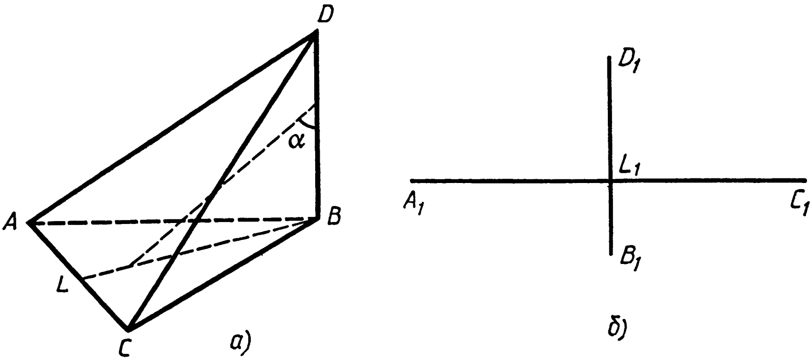


Рис. 215

откуда найдем $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = 4$. Но $B_1D_1 = 10\sqrt{3}\sin\alpha$ и равняется диаметру основания цилиндра. Получим два значения для радиуса основания цилиндра: $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ или $\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{17}}$.

156. $\frac{4\sqrt{2}\pi a^2\left(\sqrt{b^2+2a^2}-a\right)}{\sqrt[4]{b^2+2a^2}\sqrt{3\sqrt{b^2+2a^2}-4a}}$. Указание. Возьмем на ребре AS точку K так, что $AK = a$. Тогда точки B, D и K принадлежат сечению конуса плоскостью, параллельной основанию конуса ($AB = AD = AK$). Из того, что C лежит в плоскости основания, следует, что плоскость BDK делит пополам высоту конуса. Таким образом, поверхность нашего конуса в четыре раза больше поверхности конуса, радиус основания которого равен радиусу окружности, описанной около $\triangle BDK$, с образующей, равной a.

157. $\frac{\pi\sqrt{2}\,(53-7\sqrt{3})}{48}$. Указание. Пусть радиус основания конуса равен R, высота h, ребро куба a. Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию и проходящей через центр куба, есть окружность радиусом $R\,\frac{2h-a\sqrt{2}}{2h}$, в которую вписан прямоугольник (сечение куба) со сторонами a и $a\sqrt{2}$, т. е.

$$3a^2 = R^2\,\frac{(2h-a\sqrt{2})^2}{h^2}. \qquad (1)$$

Сечение конуса, параллельное основанию конуса и проходящее через ребро куба, противоположное ребру, лежащему в основании, есть окружность радиусом $R\,\frac{h-a\sqrt{2}}{h}$.

С другой стороны, диаметр этой окружности равен a, т. е.

$$a = 2R\,\frac{h-a\sqrt{2}}{h}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) найдем $h=\frac{\sqrt{2}(5+\sqrt{3})}{4}a$, $R=\frac{2\sqrt{3}-1}{2}a$.

158. $\frac{3}{5}$.

159. $\frac{38\sqrt{5}}{5}$. Указание. Пусть плоскость, проходящая через B_1C_1, пересекает AB и DC в точках K и L (рис. 216). По условию объемы многогранников $AKLDA_1B_1C_1D_1$ и $KBCLB_1C_1$ равны.

Применим к ним формулу Симпсона (задача 12), обозначив $AK=DL=a$.

Поскольку высоты этих многогранников равны, получим для a уравнение

$$7a+1+4\frac{(a+1)}{2}\cdot\frac{(7+1)}{2}=(7-a)7+4\frac{(7-a)}{2}\cdot\frac{(7+1)}{2},$$

откуда $a=\frac{16}{5}$.

Обозначим высоту пирамиды через h. Введем систему координат, взяв ее начало в центре $ABCD$, оси x и y параллельными AB и BC. Точки A, C и D_1 будут иметь координаты

$$\left(-\frac{7}{2},\ -\frac{7}{2},\ 0\right),\left(\frac{7}{2},\ \frac{7}{2},\ 0\right),\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ h\right).$$

Нетрудно найти уравнение плоскости ACD_1: $hx-hy+z=0$. Плоскость KLC_1B_1 будет иметь уравнение $10hx-8z+3h=0$.

Нормальный вектор к первой плоскости $\vec{n}(h,\ -h,\ 1)$, ко второй $\vec{m}(10h,\ 0,\ -8)$.

Условие их перпендикулярности даст нам $10h^2-8=0$, $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

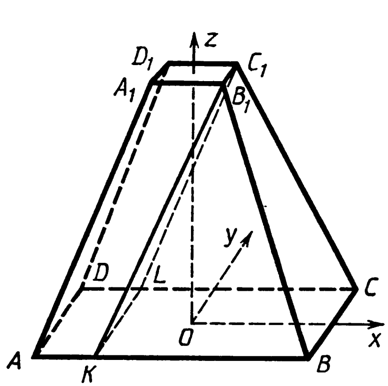


Рис. 216

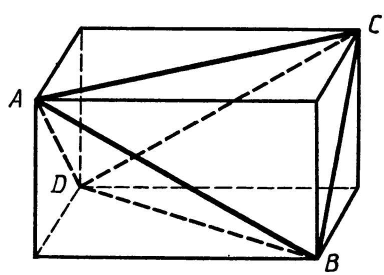


Рис. 217

160. $\frac{3a^3}{8}$ или $\frac{a^3\sqrt{5}}{4}$. Указание. Возможны два случая:

1) Боковыми сторонами трапеции являются проекции ребер AB и B_1C_1. Можно доказать, что в этом случае центр сферы находится в точке C. Объем призмы будет равен $\frac{3a^3}{8}$.

2) Боковыми сторонами трапеции являются проекции ребер AB и A_1C_1. В этом случае центр сферы проектируется в центр окружности, описанной около трапеции $ABC_1'A_1'$, высота призмы равна $a\sqrt{\frac{5}{3}}$, объем призмы равен $a^3\frac{\sqrt{5}}{4}$.

161. $\frac{\pi}{3}a(a^2+2b^2)$.

162. 6. Указание. Любая касательная плоскость делит пространство на две части, при этом либо все три сферы расположены в одной части, либо две — в одной, а одна — в другой. Очевидно, что если некоторая плоскость касается сфер, то и плоскость, ей симметричная относительно плоскости, проходящей через центры сфер, также является касательной. Покажем, что не существует плоскости, касающейся данных сфер так, что сферы радиусами 3 и 4 находятся по одну сторону от нее, а сфера радиусом 6 — по другую.

Пусть центры сфер радиусами 3, 4 и 6 находятся в точках A, B и C. Плоскость, касающаяся данных сфер указанным выше образом, разделит стороны AC и BC в отношениях $1:2$, $2:3$, т. е. пройдет через точки K и L на AC и BC, такие, что $CK=\frac{22}{3}$, $CL=\frac{33}{5}$. Нетрудно найти расстояние от C до KL. Оно равно $33\sqrt{\frac{3}{91}}<6$. Отсюда следует, что через KL нельзя провести плоскость, касающуюся сферы радиусом 6 с центром в C. Можно показать, что все другие касательные плоскости существуют, а всего их будет 6.

163. $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,50°$. Указание. Из того, что ребра пирамиды $ABCD$ касаются шара, следует, что суммы противоположных ребер пирамиды равны. Достроим пирамиду $ABCD$ до параллелепипеда, проведя через каждое ребро пирамиды плоскость, параллельную противоположному ребру (см. вводную часть). Ребра пирамиды будут являться диагоналями граней параллелепипеда (рис. 217), а ребра параллелепипеда равны расстояниям между серединами противоположных ребер пирамиды.

Пусть $AD=a$, $BC=b$, тогда любые два противоположных ребра пирамиды будут равны a и b. Докажем это. Пусть $AB=x$, $DC=y$. Тогда $x+y=a+b$, $x^2+y^2=a^2+b^2$. (Последнее равенство следует из того, что все грани параллелепипеда — ромбы с равными сторонами.)

Отсюда следует, что $x=a$, $y=b$ или $x=b$, $y=a$. Значит, в $\triangle ABC$ по крайней мере две стороны равны между собой. Но $\angle ABC=100°$, следовательно, $AB=x=BC=b$, $AC=a$, $DB=b$, $DC=a$.

Из $\triangle ABC$ найдем

$$a=2b\sin 50°, \quad V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ADC}\cdot h_B=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot h_B=$$
$$=\frac{1}{3}S_{DBC}\cdot h_A=\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2\sin 100°}{2}h_A,$$

откуда $\frac{h_A}{h_B}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2b^2\sin 100°}=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,50°$.

164. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Указание. Продолжим ребро SA за точку S и возьмем на продолжении точку A_1 так, что $SA_1=SA$. В SA_1BC двугранные углы при ребрах SA_1 и SC будут равны, а поскольку $SA_1=SC$, то $A_1B=CB=b$. Треугольник ABA_1 прямоугольный с катетами a и b. Следовательно, гипотенуза $AA_1=$ $=2AS=\sqrt{a^2+b^2}$.

165. $\pi(3\sqrt{2}-4)$ и $\pi(9\sqrt{2}-4)$. Указание. Рассмотрим куб с ребром $2\sqrt{2}$. Сфера с центром в центре куба, касающаяся его ребер, имеет радиус 2. Поверхность сферы разбивается поверхностью куба на шесть сегментов и восемь криволинейных треугольников, равных меньшему из искомых треугольников.

166. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

167. $6S$. Указание. Каждая грань призмы представляет собой параллелограмм. Если мы соединим точку касания этой грани и вписанного шара со всеми вершинами этого параллелограмма, то наша грань разобьется на четыре треугольника, причем сумма площадей двух из них, прилежащих к сторонам оснований, равна сумме площадей двух других. Площади треугольников первого типа для всех боковых граней дадут в сумме $2S$. Значит, боковая поверхность равна $4S$, а вся поверхность пирамиды $6S$.

168. $\sqrt{5}$. Указание. Если бы сферы α и β пересекались, то площадь поверхности части сферы β, расположенной внутри сферы α, составляла бы $\frac{1}{4}$ всей поверхности сферы α. (Эта часть представляла бы сегмент высотой $\frac{r^2}{2R}$, где r — радиус сферы α, R — радиус сферы β. Следовательно, его поверхность будет $2\pi R\cdot\frac{r^2}{2R}=\pi r^2$.) Значит сфера α содержит внутри себя сферу β и отношение радиусов равно $\sqrt{5}$.

169. $\frac{5}{6}\pi$. Указание. Любое из рассматриваемых сечений представляет собой равнобедренный треугольник, боковые сто-

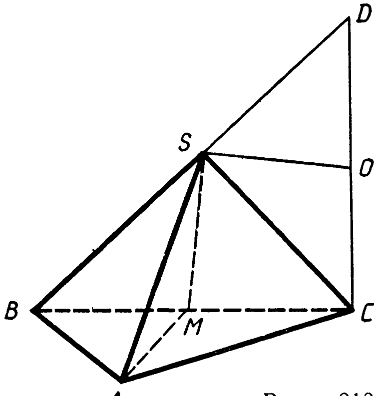


Рис. 218

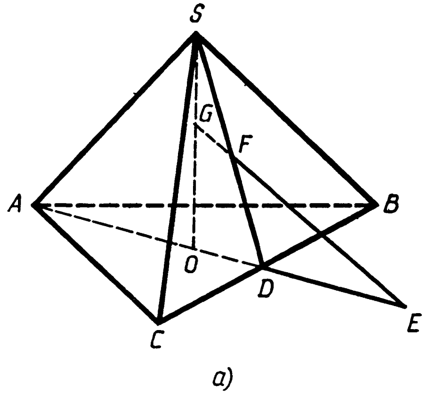


Рис. 219

роны которого равны образующей конуса. Следовательно, наибольшую площадь имеет то сечение, у которого наибольшее значение принимает синус угла при вершине. Если угол при вершине осевого сечения конуса острый, то осевое сечение имеет наибольшую площадь. Если этот угол тупой, то наибольшую площадь имеет прямоугольный треугольник.

170. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. Указание. Легко видеть, что сечение данного тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения, представляет собой кольцо, площадь которого не зависит от расстояния оси вращения до плоскости треугольника.

171. $\frac{Ra^3\sqrt{4b^2-a^2}}{6(4R^2+a^2)}$. Указание. Пусть O — центр шара, CD — диаметр, M — середина BC (рис. 218). Докажем, что $AB=AC$. Для этого достаточно доказать, что $AM\perp BC$. По условию $SA\perp OS$, кроме того, $SM\perp OS$ (треугольники CSD, CSB, BCD прямоугольные, O и M — середины CD и CB). Следовательно, плоскость AMS перпендикулярна OS, $AM\perp OS$. Но $AM\perp CD$, значит, AM перпендикулярна плоскости BCD, таким образом, $AM\perp BC$.

172. Объем части пирамиды, расположенной вне трехгранного угла, к объему части внутри него относится как 3:11. Указание. На рисунке 219, *а* $SABC$ — данная пирамида, SO — ее высота, G — вершина трехгранного угла. Из условия следует, что G находится на SO. Кроме того, грани трехгранного угла при пересечении с плоскостью основания ABC образуют правильный треугольник, стороны которого параллельны сторонам $\triangle ABC$ и проходят через его вершины. Следовательно, если одно из ребер трехгранного угла пересекает плоскость ABC в точке E, а грань CSB — в точке F, то F лежит на апофеме SD боковой грани CSB и $ED=DA$. По условию $SF=FD$. Проведем через S прямую, параллельную EO, и обозначим через K точку пересечения этой прямой с прямой EF (рис. 219, *б*).

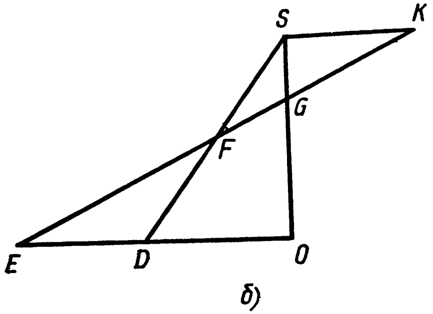


Рис. 219

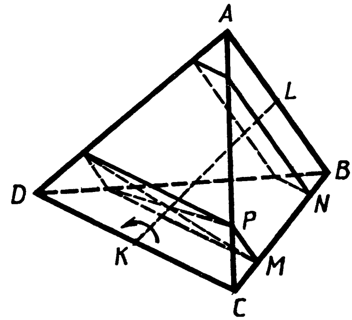


Рис. 220

Имеем $SK=ED$. Значит, $\frac{SG}{GO}=\frac{SK}{EO}=\frac{ED}{EO}=\frac{3}{4}$. Таким образом, объем пирамиды $GABC$ составляет $\frac{4}{7}$ объема пирамиды $SABC$.

С другой стороны, построенный трехгранный угол делит часть пирамиды $SABC$, расположенную над пирамидой $GABC$, пополам.

173. $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}V$. Указание. Пусть ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a, K и L — середины ребер CD и AB (рис. 220). Возьмем на ребре CB точку M, проведем через M сечение, перпендикулярное KL. Обозначим $CM=x$ и определим величину x, при которой прямоугольник, получившийся в нашем сечении, будет иметь угол между диагоналями, равный α. Поскольку стороны получившегося прямоугольника равны x и $a-x$, величину x можно найти из уравнения

$$\frac{x}{a-x}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\quad x=\frac{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Если мы возьмем на ребре BC еще и точку N так, что $BN=CM=x$, и проведем через нее сечение, перпендикулярное KL, мы получим второй прямоугольник с углом между диагоналями, равным α. Из этого следует, что плоскость BCD после поворота вокруг KL на угол α против часовой стрелки будет проходить через точки K, P и N. Таким образом, после поворота плоскость BCD отсечет от тетраэдра $ABCD$ пирамиду $KPNC$, объем которой равен

$$\frac{KC}{CD}\cdot\frac{CP}{CA}\cdot\frac{CN}{CB}V_{ABCD}=\frac{x(a-x)}{2a^2}V=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}\cdot V.$$

Те же рассуждения будут верны для любой грани тетраэдра. Следовательно, объем общей части будет равен $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}V$.

174. $\frac{B_1N}{NC_1}=\sqrt{2}+1$. Указание. Пусть ребро куба равно a, $NC_1=x$. Найдем:

$$LM=\frac{a}{2},\ NK=\frac{x}{\sqrt{2}},\ LN^2=LB_1^2+B_1N^2=$$
$$=\frac{a^2}{4}+(a-x)^2=\frac{5}{4}a^2-2ax+x^2,\ LK^2=LB_1^2+B_1K^2=$$
$$=LB_1^2+B_1N^2+NK^2+2B_1N\cdot NK\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2}{4}+(a-x)^2+$$
$$+\frac{x^2}{2}+(a-x)\,x=\frac{5}{4}a^2-ax+\frac{x^2}{2},\quad MN^2=MB_1^2+B_1N^2=$$
$$=\frac{3}{2}a^2-2ax+x^2,\quad MK^2=MB^2+BK^2-MB\cdot BK=$$
$$=\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{2}ax+\frac{x^2}{2}.$$

Если $\angle LMK=\angle MKN=\varphi$, то по теореме косинусов для треугольников LMK и MKN получим:

$$LK^2=LM^2+MK^2-2LM\cdot MK\cos\varphi,$$
$$MN^2=MK^2+KN^2-2MK\cdot KN\cos\varphi.$$

Исключая из этих уравнений $\cos\varphi$, получим:

$$LK^2\cdot KN-MN^2\cdot LM=(LM-KN)(LM\cdot KN-MK^2).$$

Выражая входящие в это равенство отрезки по найденным выше формулам, получаем

$$\left(\frac{5a^2}{4}-ax+\frac{x^2}{2}\right)\frac{x}{\sqrt{2}}-\left(\frac{3a^2}{2}-2ax+x^2\right)\frac{a}{2}=$$
$$=\left(\frac{a}{2}-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{ax}{2\sqrt{2}}-\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}ax-\frac{x^2}{2}\right).$$

Из этого уравнения найдем $x=a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

175. $\frac{\pi}{3}$ или $\frac{\pi}{6}$. **176.** $\frac{3+\sqrt{21}}{3}$. **177.** $2\arcsin\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}}$.

178. От Sh до $\frac{4}{3}Sh$. **179.** $\frac{2}{3}R^2h$. **180.** $\arcsin\frac{1}{3}$. **181.** $\frac{\pi}{2}$.

182. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **183.** $\frac{4}{3}$. **184.** $\frac{(h+H)\,r}{\sqrt{r^2+H^2}}$.

185. $\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

186. $3a$. Указание. Пусть прямая MN пересекает D_1C_1 в точке L. Обозначим $AM=x$, $BN=y$. Из условия следует, что $x>a$, $y>a$.

Спроектировав все точки на плоскость ABB_1A_1, найдем $\frac{C_1L}{LD_1}=\frac{a}{x-a}$, а на плоскость $ABCD$, найдем $\frac{C_1L}{LD_1}=\frac{y-a}{a}$.

Следовательно, $\frac{a}{x-a}=\frac{y-a}{a}$, откуда $xy=(x+y)\,a$. Но $(x+y)^2\geqslant$ $\geqslant 4xy$. Значит, $xy\geqslant 4a^2$.

Теперь получим $MN^2=x^2+y^2+a^2=(x+y)^2-2xy+a^2=$ $=\frac{(xy)^2}{a^2}-2xy+a^2=\frac{1}{a^2}(xy-a^2)\geqslant 9a^2$.

Наименьшее значение MN равно $3a$.

187. $\frac{a\,(4b^2-a^2)}{12}$. Указание. Если x — длина двух других сторон прямоугольника, то объем пирамиды равен $\frac{ax}{3}\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}-\frac{x^2}{4}}$.

Наибольший объем $\frac{a\,(4b^2-a^2)}{12}$ будет при $x=\sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2}}$.

188. $2a\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Указание. Пусть M — точка на прямой AB_1, N — на прямой BC_1, M_1 и N_1 — проекции M и N на плоскость $ABCD$. Обозначим $BM_1=x$, $BN_1=y$, тогда $M_1N_1=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$, $MN=\sqrt{x^2+y^2+(a-x-y)^2}$. По условию $MN=2M_1N_1$, следовательно, $(a-x-y)^2=3\,(x^2+y^2)$.

Пусть $x^2+y^2=u^2$, $x+y=v$, тогда $2u^2-v^2\geqslant 0$, а поскольку $u^2=\frac{1}{3}(a-v)^2$, то, заменяя u^2 в неравенстве, связывающем u и v, получим неравенство для v: $v^2+4av-2a^2\leqslant 0$, откуда $-a\,(2+\sqrt{6})\leqslant v\leqslant a\,(\sqrt{6}-2)$. Теперь найдем наименьшее значение MN, оно равно $2a\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

189. $6\sqrt{2}$. Указание. Пусть $ABCD$ — тетраэдр наибольшего объема, O — центр данных сфер. Каждый отрезок, соединяющий O с вершиной тетраэдра, должен быть перпендикулярен грани, противоположной этой вершине. Если, например, AO не перпендикулярен плоскости BCD, то на поверхности той сферы, на которой лежит точка A, можно найти точки, более удаленные от плоскости BCD, чем точка A. (Это рассуждение, очевидно, останется верным, если A, B, C и D лежат на поверхности различных сфер, и даже необязательно концентрических.) Отсюда следует, что противоположные ребра тетраэдра $ABCD$ попарно перпендикулярны. Пусть, далее, точки A и B лежат на сфере радиусом $R=\sqrt{10}$, а C и D — на сфере радиусом $r=2$. Обозначим через x и y расстояния от O до AB и CD соответственно.

Проведем через AB сечение, перпендикулярное CD. Обозначим через K точку пересечения этой плоскости с CD. Учитывая свойства нашего тетраэдра $ABCD$, нетрудно доказать, что $AK = BK$, O — точка пересечения высот $\triangle ABK$. Проведем высоты KL и AM (рис. 221). Из подобия треугольников ALO и OKM найдем $OM = \frac{xy}{R}$. Далее, $AB = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, и из подобия треугольников AOL и AMB получим $\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{R + \frac{xy}{R}}$, откуда $2x^2 + xy = R^2$.

Точно так же получим $2y^2 + xy = r^2$.

Из системы уравнений $\begin{cases} 2x^2 + xy = 10, \\ 2y^2 + xy = 4 \end{cases}$ найдем $x = 2$, $y = 1$.

190. $\frac{1}{12}$. Указание. Обозначим $BD = 2x$. Можно найти $V = V_{ABCD} = \frac{x|1 - 2x^2|\sqrt{3 - 4x^2}}{6(1 - x^2)}$.

Заменив $u = 1 - x^2$, а затем $w = 4u + \frac{1}{u}$, получим

$$36V^2 = \frac{x^2(1 - 2x^2)^2(3 - 4x^2)}{(1 - x^2)^2} = \frac{(1 - u)(2u - 1)^2(4u - 1)}{u^2} =$$
$$= \frac{(1 - u)(4u - 1)}{u} \cdot \frac{(2u - 1)^2}{u} = \left(5 - \frac{1}{u} - 4u\right)\left(4u + \frac{1}{u} - 4\right) =$$
$$= (5 - w)(w - 4) = -w^2 + 9w - 20.$$

Наибольшее значение достигается при $w = \frac{9}{2}$, откуда $x = \sqrt{1 - u} = \sqrt{1 - \frac{9 \pm \sqrt{17}}{16}}$ и т. д.

191. $a\frac{\sqrt{34}}{24}$. Указание. Если O — центр окружности, L — проекция точки N на общее ребро, то точка M, поскольку M — ближайшая к N точка окружности, должна находиться на отрезке LO. С другой стороны, поскольку N — ближайшая к M точка

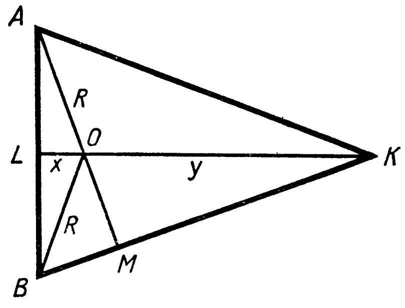


Рис. 221

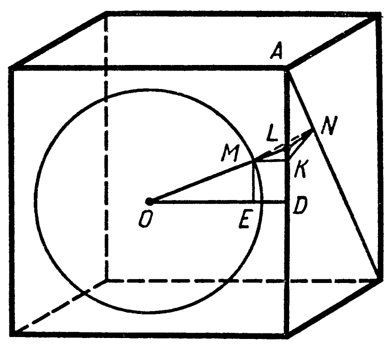


Рис. 222

диагонали грани, MN — перпендикуляр к этой диагонали, а значит, KN также перпендикулярна этой диагонали, где K — проекция M на грань, содержащую эту диагональ (рис. 222).

Пусть $AL=ax$; $\triangle ANK$ равнобедренный прямоугольный, следовательно, $LK=AL=ax$, $MK=OD\cdot\frac{LK}{LD}=\frac{ax}{1-2x}$, $KD=\frac{a}{2}(1-4x)$.

Записав для $\triangle MOE$ (ME параллельна AD) теорему Пифагора, получим для x уравнение

$$\frac{(1-4x)^2}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{1-2x}\right)^2=\frac{25}{144},$$

$$(6(1-4x)(1-2x))^2+(6(1-4x))^2=(5(1-2x))^2.$$

Заменив в правой части $5^2=3^2+4^2$ и перенеся ее влево, получим:

$$(6(1-4x)(1-2x))^2-(3(1-2x))^2+(6(1-4x))^2-(4(1-2x))^2=0,$$

$$9(1-2x)^2(1-8x)(3-8x)+4(5-16x)(1-8x)=0,$$

$$(1-8x)(9(1-2x)^2(3-8x)+4(5-16x))=0.$$

Легко видеть, что точка K должна находиться выше D, т. е. $0<x<\frac{1}{4}$, значит, второй множитель не равен нулю и $x=\frac{1}{8}$.

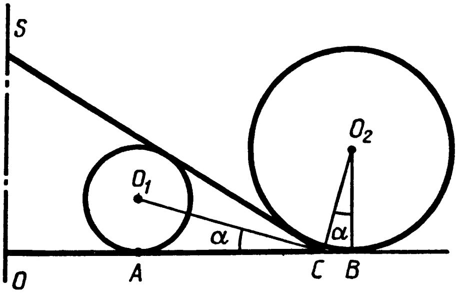
192. $R\,\dfrac{4\sin^2\frac{\pi}{n}+1-\sqrt{1-8\sin^2\frac{\pi}{n}}}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}$ при $n\geqslant 9$. Кроме того, при $n=9$ возможно еще одно значение:

$$R\,\frac{4\sin^2\frac{\pi}{9}+1+\sqrt{1-8\sin^2\frac{\pi}{9}}}{4\sin^2\frac{\pi}{9}}.$$

Указание. Не ограничивая общности, будем считать, что все образующие конуса, касающиеся шаров, касаются одновременно двух шаров — внутреннего и внешнего. Проведем сечение через вершину конуса S и центры двух шаров, касающихся одной образующей (рис. 223, *а*, обозначения понятны из рисунка). Из условия, что n шаров радиусом R касаются друг друга, следует равенство $OA=\dfrac{R}{\sin\frac{\pi}{n}}$, аналогично $OB=\dfrac{2R}{\sin\frac{\pi}{n}}$.

Следовательно, $AB=a=\dfrac{R}{\sin\frac{\pi}{n}}$. Пусть $AC=x$. Тогда

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{R}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{R}{a-x}$. Перемножив эти равенства, получим



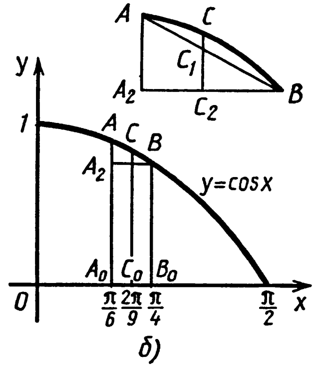


Рис. 223

уравнение для x: $x^2-ax+2R^2=0$, откуда $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8R^2}}{2}$, $x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8R^2}}{2}$, где $a=\frac{R}{\sin\frac{\pi}{n}}$.

Условие $a^2-8R^2\geqslant 0$ приводит к неравенству $\sin\frac{\pi}{n}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Кроме того, должно выполняться неравенство $\operatorname{tg}\alpha=\frac{R}{x}<1$. Теперь нетрудно получить, что корень x_1 подходит, если $\frac{1}{3}<\sin\frac{\pi}{n}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Для корня x_2 остается одно ограничение: $\sin\frac{\pi}{n}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Можно доказать, что $\frac{1}{3}<\sin\frac{\pi}{n}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}$ лишь при $n=9$.

То, что $\sin\frac{\pi}{8}>\frac{1}{2\sqrt{2}}$, проверяется без труда. (Возведем в квадрат: $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ и т. д.) Докажем, что $\sin\frac{\pi}{9}<\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Возведем в квадрат: $\sin^2\frac{\pi}{9}<\frac{1}{8}$, $\frac{1-\cos^2\frac{\pi}{9}}{2}<\frac{1}{8}$, $\cos\frac{2\pi}{9}>\frac{3}{4}$.

Итак, нам надо доказать, что $\cos\frac{2\pi}{9}>\frac{3}{4}$. Рассмотрим график функции $y=\cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$ (рис. 223, *б*). Ордината точки C больше ординаты точки C_1, расположенной на хорде AB. Но ордината точки C_1 есть

$$C_0C_1=C_0C_2+C_2C_1=B_0B+AA_2\frac{C_2B}{A_2B}=\frac{\sqrt{2}}{2}+(A_0A-B_0B)\frac{C_0B_0}{A_0B_0}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\frac{1}{4}-\frac{2}{9}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Осталось доказать, что $\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}>\frac{3}{4}$ или $4\sqrt{2}+2\sqrt{3}>9$. Возводим в квадрат, получим $16\sqrt{6}>37$ и т. д.

Нетрудно проверить, что $\sin\frac{\pi}{10}<\frac{1}{3}$, поскольку $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Радиус вписанного шара равен $(a+x)\operatorname{tg}\alpha$.

Выразив a, x и $\operatorname{tg}\alpha$ через R и n, с учетом найденных ограничений на n получим ответ.

193. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{3/2}$. Указание. Все грани не могут быть равными прямоугольными треугольниками, поскольку в этом случае к каждой вершине тетраэдра будут прилегать три различных угла этого треугольника и получится, что один плоский угол при каждой вершине будет $90°$ и будет равняться сумме двух других плоских углов. Пусть $ABCD$ — тетраэдр, все грани которого — подобные прямоугольные треугольники (рис. 224). Предположим, что DC — наименьшее ребро этого тетраэдра. Тогда треугольники ADC и BCD должны быть равными. При этом прямые углы в них не должны прилегать к одной вершине тетраэдра. (Докажите!) Пусть $\angle ADC=\angle BCD=90°$, $DC=a$, $AD=BC=\lambda a$. Легко видеть, что в треугольниках ABC и ABD наибольшей должна быть сторона AB, а прямыми — углы ACB и ADB. Стороны AD и BC — наименьшие стороны этих треугольников. Следовательно, $\frac{DB}{DA}=\frac{CA}{CB}=\frac{AD}{DC}=\lambda$, $DB=CA=\lambda^2a$, а значит, $AB=\lambda^3a$. По теореме Пифагора для $\triangle ACD$ получаем для λ уравнение $\lambda^4=\lambda^2+1$, $\lambda^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Отношение наибольшего и наименьшего ребра равно λ^3.

194. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Указание. Проведем через p плоскость, параллельную прямой l, и спроектируем на нее прямую l и центры шаров. Пусть O_1, O_2, O_3 — проекции центров шаров, A_1, A_2, A_3 — точки касания, A — точка пересечения p и l' — проекции l, α — угол между l и p, d — расстояние между ними. Пусть $AO_1=x$. Расстояние от O_1 до p равно $x\sin\alpha$, а расстояние от центра первого шара до p равно $\sqrt{x^2\sin^2\alpha+d^2}$. Таким образом, $x^2\sin^2\alpha+d^2=1$.

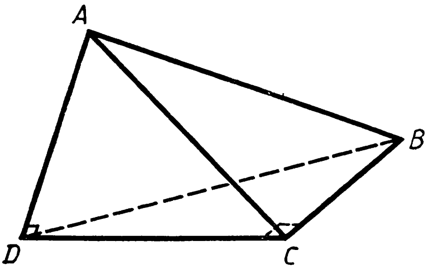


Рис. 224

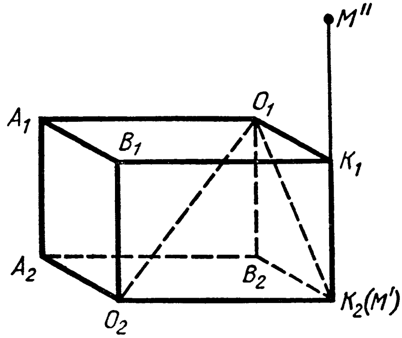


Рис. 225

Аналогично получаем еще два уравнения:

$$(x+3)^2 \sin^2 \alpha + d^2 = 4, \; (x+10)^2 \sin^2 \alpha + d^2 = 25.$$

Последние два уравнения с учетом первого преобразуются к виду

$$2x \sin^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha = 1, \; 5x \sin^2 \alpha + 25 \sin^2 \alpha = 6,$$

откуда $\sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$, $x = 1$. Затем $d^2 = \frac{4}{5}$.

195. $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$. Указание. Обозначим центры шаров через O_1 и O_2, точки касания одной из касательных с этими шарами через K_1 и K_2 соответственно. Рассмотрим параллелепипед $O_1K_1B_1A_1B_2K_2O_2A_2$ (рис. 225). По условию $O_1K_1 = 1$, $O_2K_2 = 3$, $O_1K_1 \perp K_1K_2$, $O_2K_2 \perp K_1K_2$.

Следовательно, параллелепипед прямой, K_1K_2 перпендикулярно его основаниям. Поскольку K_1K_2 образует с O_1O_2 угол 45°, то сечение $O_1B_2O_2B_1$ является квадратом. Его диагональ $O_1O_2 = 4$. Следовательно, $K_1K_2 = O_1B_2 = O_1B_1 = 2\sqrt{2}$.

Треугольник $B_1O_1K_1$ оказывается прямоугольным ($O_1B_1 = 2\sqrt{2}$, $O_1K_1 = 1$, $B_1K_1 = 3$), $\angle B_1O_1K_1 = 90°$. Точка M расположена на прямой K_1K_2 на расстоянии 3 от O_1. Но $O_1K_2 = 3$.

Значит, возможны два положения точки M: 1) M совпадает с K_2 (точка M');

2) M на продолжении K_2K_1 за K_1 (точка M''), $K_1M'' = K_1K_2$.

Вторая касательная к шарам, проходящая через M, симметрична K_1K_2 относительно плоскости O_1O_2M. Значит, угол между касательными равен удвоенному углу между одной из них и плоскостью O_1O_2M (или дополняет удвоенный угол до 180°). Рассмотрим первый случай. Объем параллелепипеда равен 8. (Площадь основания $O_1K_1 \cdot B_1O_1 = 2\sqrt{2}$, высота $K_1K_2 = 2\sqrt{2}$.) Рассмотрим тетраэдр $O_1O_2K_2K_1$. Его объем $\frac{1}{6} 8 = \frac{4}{3}$.

Примем за основание $O_1O_2K_2$: $O_1O_2 = 4$, $O_2K_2 = O_1K_2 = 3$. Площадь $O_1O_2K_2$ равна $2\sqrt{5}$. Из уравнения $\frac{1}{3}2\sqrt{5}\,h=\frac{4}{3}$ найдем $h=\frac{2}{\sqrt{5}}$ — высоту, опущенную из K_1 на $O_1O_2K_2$. Значит, синус угла между K_1K_2 и плоскостью $O_1O_2K_2$ равен $\frac{2}{\sqrt{5}}/2\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$, т. е. $\frac{\alpha}{2}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\left(\text{или } \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$, где α — искомый угол. Таким же будет ответ и во втором случае.

196. $\frac{196}{3\sqrt{3}}$. Указание. Из условия следует (боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°), что вершина проектируется в точку, равноудаленную от прямых, образующих четырехугольник основания, причем эта проекция удалена от этих прямых на расстояние, равное $\frac{7}{\sqrt{3}}$. Теперь понятно, что в основании не может лежать параллелограмм. Пусть в основании лежит четырехугольник $ABCD$, в котором $AB=BC=10$, $CD=DA=6$ (рис. 226). Существуют две точки, равноудаленные от прямых AB, BC, CD и DA: одна внутри — точка O_1, а другая вне его — точка O_2 (точка O_2 лежит на прямой BD на пересечении с нею биссектрис углов, смежных с углами A и C). Если вершина проектируется в точку O_1, то площадь основания будет (по формуле $S=pr$) $16\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}$. Но площадь основания не может превосходить 60 (это будет, если $\angle BAD=\angle BCD=90°$), а $16\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}>60°$.

Значит, вершина проектируется в точку O_2, причем O_2 находится на расстоянии $\frac{7}{\sqrt{3}}$ от прямых AB, BC, CD и DA. В этом случае площадь основания будет равна $S_{ABO_2}+S_{BCO_2}-S_{ADO_2}-S_{DCO_2}=$ $=\frac{1}{2}(10+10-6-6)\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{28}{\sqrt{3}}$. Объем пирамиды $\frac{28}{\sqrt{3}}\cdot\frac{7}{3}=\frac{196}{3\sqrt{3}}$.

197. $\frac{1}{2}\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+6}$, если $0<\alpha\leqslant\arccos\frac{1}{3}$;

$\frac{1}{2}\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+6}$, если $\pi-\arccos\frac{1}{3}\leqslant\alpha<\pi$. При других α решения нет. Указание. Из того, что проекции прямоугольного треугольника на грани двухгранного угла являются равными правильными треугольниками, следует, что плоскость этого прямоугольного треугольника образует равные углы с гранями двухгранного угла. (Докажите!) Следовательно, эта плоскость или параллельна биссекторной плоскости двугранного угла, или перпендикулярна ей (параллельна биссекторной плоскости смежного двугранного угла).

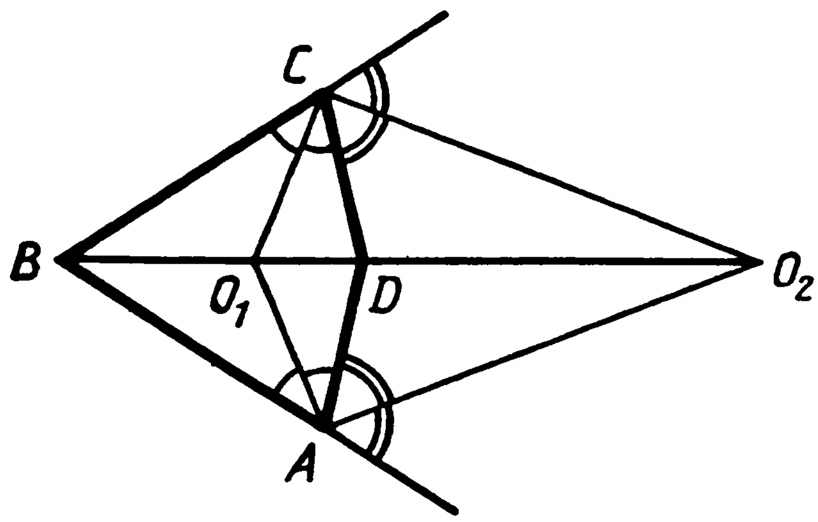


Рис. 226

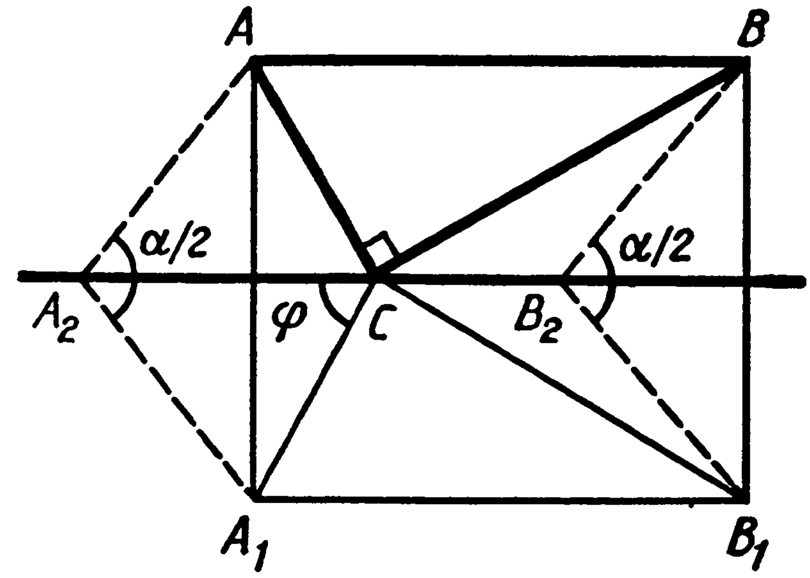


Рис. 227

Рассмотрим первый случай. Можно считать что вершина прямого угла треугольника расположена на ребре двугранного угла. На рисунке 227 ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. A_1 и B_1 — проекции A и B на одну из граней. По условию AB_1C_1 — правильный треугольник со стороной 1. Углы AA_2A_1 и BB_2B_1 — линейные углы между плоскостями ABC и AB_1C_1, они равны $\frac{\alpha}{2}$. Пусть $\angle A_1CA_2=\varphi$. Тогда $A_2C=\cos\varphi$, $A_1A_2=\sin\varphi$,

$$AA_2=\frac{\sin\varphi}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Аналогично найдем $B_2C=\cos(120^\circ-\varphi)$, $BB_2=\dfrac{\sin(120^\circ-\varphi)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Но AA_2C и CB_2B — подобные прямоугольные треугольники:

$$\frac{AA_2}{A_2C}=\frac{CB_2}{B_2B},\quad \frac{\sin\varphi}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\varphi}=\frac{\cos(120^\circ-\varphi)\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin(120^\circ-\varphi)},$$

$$\sin\varphi\sin(120^\circ-\varphi)=\cos\varphi\cos(120^\circ-\varphi)\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos(120^\circ-2\varphi)+\frac{1}{2}=\left(\cos(120^\circ-2\varphi)-\frac{1}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, $\cos(120^\circ-2\varphi)=-\dfrac{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Из условия $\cos(120^\circ-2\varphi)\geqslant-1$ получим $\cos^2\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{1}{3}$ или $\cos\alpha\leqslant-\frac{1}{3}$, т. е. α — угол тупой, $\pi-\arccos\frac{1}{3}\leqslant\alpha<\pi$.

Найдем AB:

$$AB^2=(CA_2+CB_2)^2+(AA_2-BB_2)^2=(\cos\varphi+\cos(120^\circ-\varphi))^2+$$

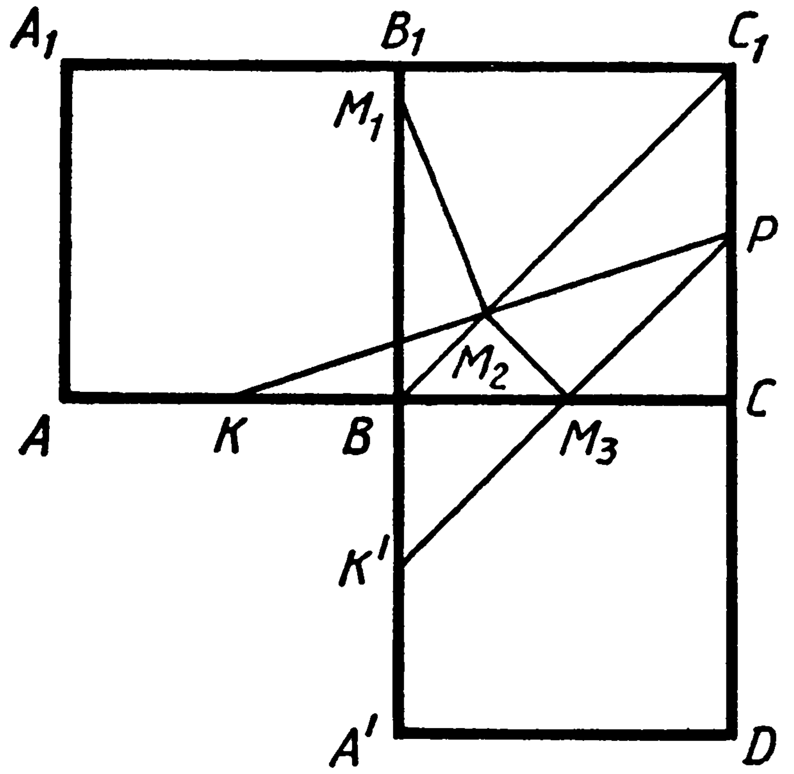


Рис. 228

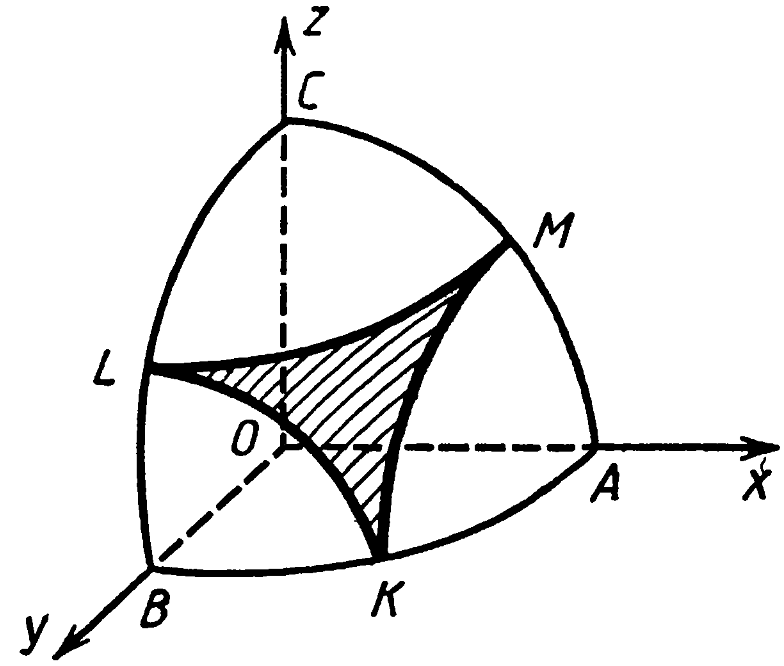


Рис. 229

$$+\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}(\sin\varphi-\sin(120^\circ-\varphi))^2=\cos^2(60^\circ-\varphi)+\frac{\sin^2(60^\circ-\varphi)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{1+\cos(120^\circ-2\varphi)}{2}+\frac{1-\cos(120^\circ-2\varphi)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{3}{2}.$$

Второй случай получается при замене α на $180^\circ-\alpha$.

198. Если точка M принадлежит треугольнику BB_1C_1, то кратчайший путь от K до M пересекает ребро BB_1. Если M принадлежит треугольнику BCC_1, то этот путь проходит через ребро BC. Это «видно» на развертке (рис. 228. Поскольку точки A и K принадлежат двум граням, то на этом рисунке они «раздвоились» — получились точки A и A', K и K'). Искомое множество представляет собой двузвенную ломаную $M_1M_2M_3$, где M_2 — середина KP (докажите, что M_2 совпадает с точкой пересечения KP и BC_1), $M_1M_2\perp KP$, M_3 — середина PK' и BC. (Докажите это, а также то, что $M_2M_3\perp K'P$.)

199. $\frac{8}{3}nr^3\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$. Указание. Рассмотрим шар радиусом r с центром в точке пересечения осей цилиндров. Плоскость, параллельная плоскости, которой принадлежат оси цилиндров, пересекает тело, являющееся общей частью цилиндров, по правильному $2n$-угольнику, описанному около круга, являющегося сечением шара. Таким образом, для всех таких плоскостей отношение площадей сечений искомого тела и шара постоянно: $\dfrac{2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}{\pi}$.

Таким же будет и отношение объемов этих тел.

200. Если $c^2\leqslant a^2+b^2$, то наибольшее значение суммы расстояний равно $\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$. Если $c^2>a^2+b^2$, то оно равно $c+\sqrt{a^2+b^2}$. Наименьшее значение равно $a+b$.

Пусть x, y, z соответственно синусы углов между ребрами DA, DB, DC и прямой l. Поскольку сумма квадратов косинусов этих углов равна 1, то $x^2+y^2+z^2=2$.

Приходим к задаче: «Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $s=ax+by+cz$, если $x^2+y^2+z^2=2$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$».

Точка (x, y, z) принадлежит криволинейному треугольнику KLM, лежащему на поверхности сферы с центром в $(0, 0, 0)$ и радиусом 2, K, L, M соответственно середины дуг AB, BC, CA (рис. 229). Зафиксируем s, тогда уравнение $ax+by+cz=s$ задает нам плоскость. Нам надо найти наибольшее и наименьшее значения s, для которых эта плоскость имеет хотя бы одну общую точку с треугольником KLM.

Найдем S_0, такое, что плоскость $ax+by+cz=s_0$ касается нашей сферы в первом октанте. Известно, что вектор $(a; b; c)$ перпендикулярен плоскости $ax+by+cz=s$. (Докажите!) Следовательно, вектор $\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ имеет длину 2 и перпендикулярен плоскости. Значит, если s_0 таково, что плоскость $ax+by+cz=s_0$ проходит через конец этого вектора, то эта плоскость касается шара, т. е. $s_0=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$.

Если точка касания принадлежит треугольнику KLM, то найденное s_0 дает наибольшее значение для s. Это имеет место, если $\frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leqslant 1$ или $c^2\leqslant a^2+b^2$.

Пусть $c^2>a^2+b^2$. Тогда точка касания окажется принадлежащей треугольнику MLC. Начнем уменьшать s от s_0 до тех пор, пока наша плоскость не коснется треугольника KLM. Понятно, что это произойдет в точке на дуге LM, т. е. при $z=1$. Мы получаем задачу: «Найти наибольшее значение для функции $s=ax+by+c$, если $x^2+y^2=1$».

Ответом будет $s_0'=c+\sqrt{a^2+b^2}$.

Нетрудно видеть, что наименьшее значение s будет, когда плоскость пройдет через точку K, оно равно $a+b$.

ББК 22.1я72
Ш26

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук *В. М. Уроев*,
учитель-методист школы № 857 Москвы *Е. С. Смирнова*

Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.

Ш26 Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред. шк.— М.: Просвещение, 1991.—384 с.: ил.— ISBN 5-09-001288-1.

Данная книга является продолжением вышедшего в 1989 г. аналогичного учебного пособия для 10 класса средней школы. Ее основная цель — подготовка учащихся к продолжению образования в высших учебных заведениях, повышение уровня общей математической подготовки. Факультатив строится как углубленное изучение вопросов, предусмотренных программой основного курса. Углубление реализуется на базе обучения методам и приемам решения математических задач.

Ш $\frac{4306020000-303}{103(03)-91}$ инф. письмо — 90, № 144 ББК 22.1я72

ISBN 5-09-001288-1

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Шарыгин Игорь Федорович
Голубев Виктор Иванович

Факультативный курс математики

Решение задач

Учебное пособие для 11 класса
средней школы

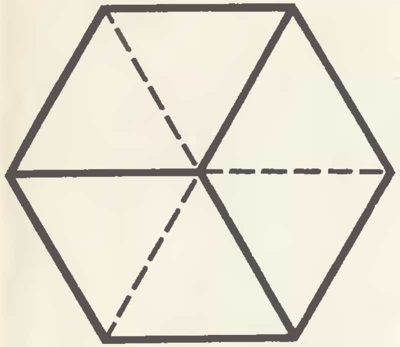
Зав. редакцией **Т. А. Бурмистрова**
Редактор **Н. И. Никитина**
Младший редактор **О. В. Агапова**
Художники **В. В. Костин, Б. Л. Николаев**
Художественный редактор **Ю. В. Пахомов**
Технический редактор **Р. С. Невретдинова**
Корректор **Г. И. Мосякина**

ИБ № 12628

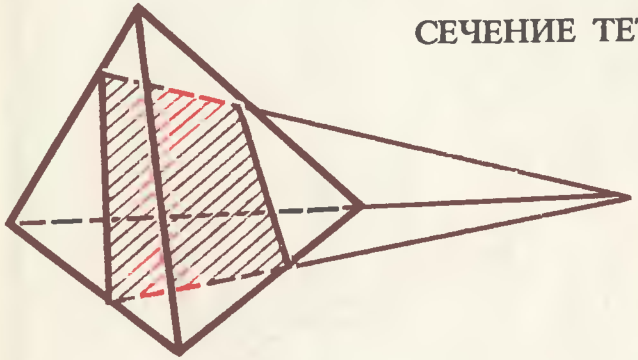
Сдано в набор 19.12.89. Подписано к печати 04.01.91. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Гарнит. литерат. Печать высокая. Усл. печ. л. 24 + форз. 0,25. Усл. кр.-отт. 24,69. Уч.-изд. л. 23,22 + форз. 0,42. Тираж 650 000 экз. Заказ 717. Цена 2 р.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и массовой информации РСФСР. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства печати и массовой информации РСФСР. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

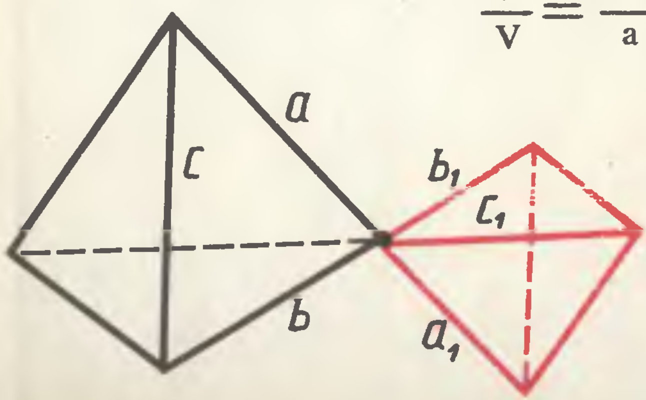


ПРОЕКЦИЯ КУБА

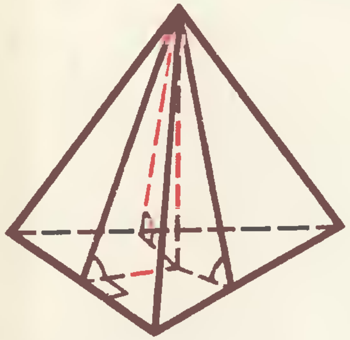


СЕЧЕНИЕ ТЕТРАЭДРА

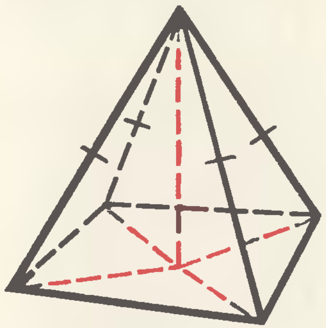
$$\frac{V_1}{V} = \frac{a_1\ b_1\ c_1}{a\ b\ c}$$



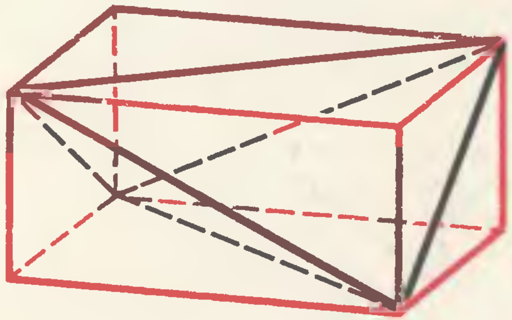
ВЕРШИНА ПРОЕКТИРУЕТСЯ



В ЦЕНТР ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

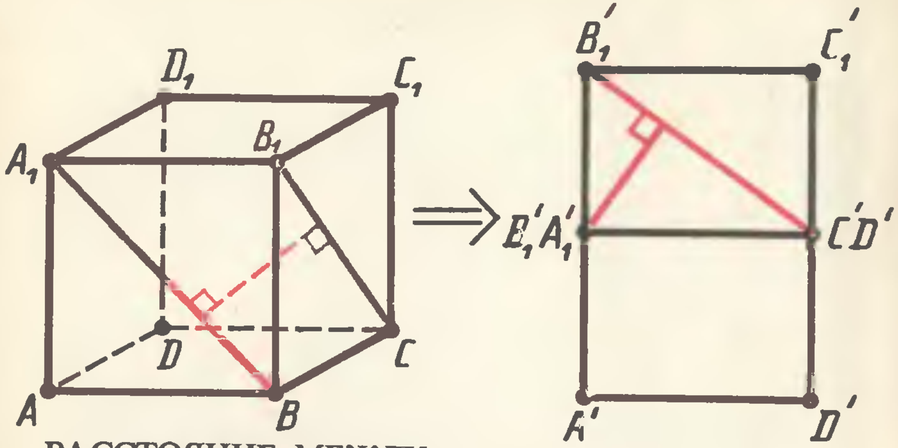


В ЦЕНТР ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

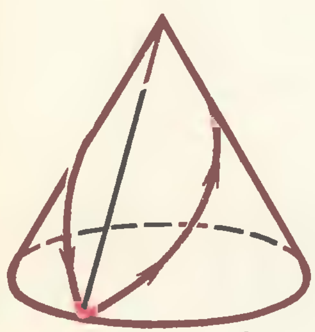


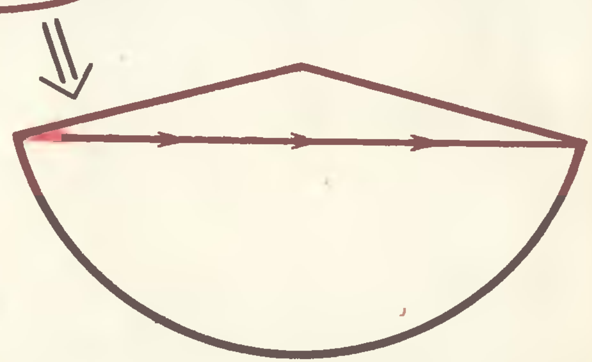
ДОСТРАИВАНИЕ ТЕТРАЭДРА

КАРКАС ДЛЯ КОНУСА



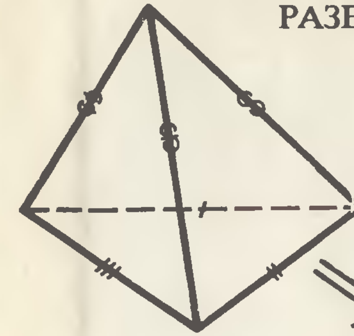
РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

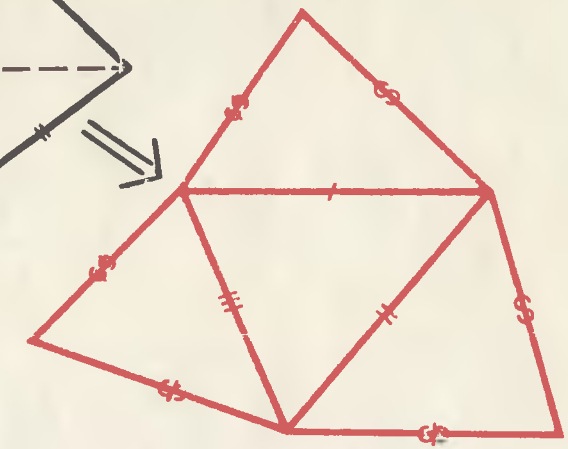




КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ

РАЗВЕРТКА ТЕТРАЭДРА





КАСАНИЕ ЧЕТЫРЕХ ШАРОЕ И ПЛОСКОСТИ