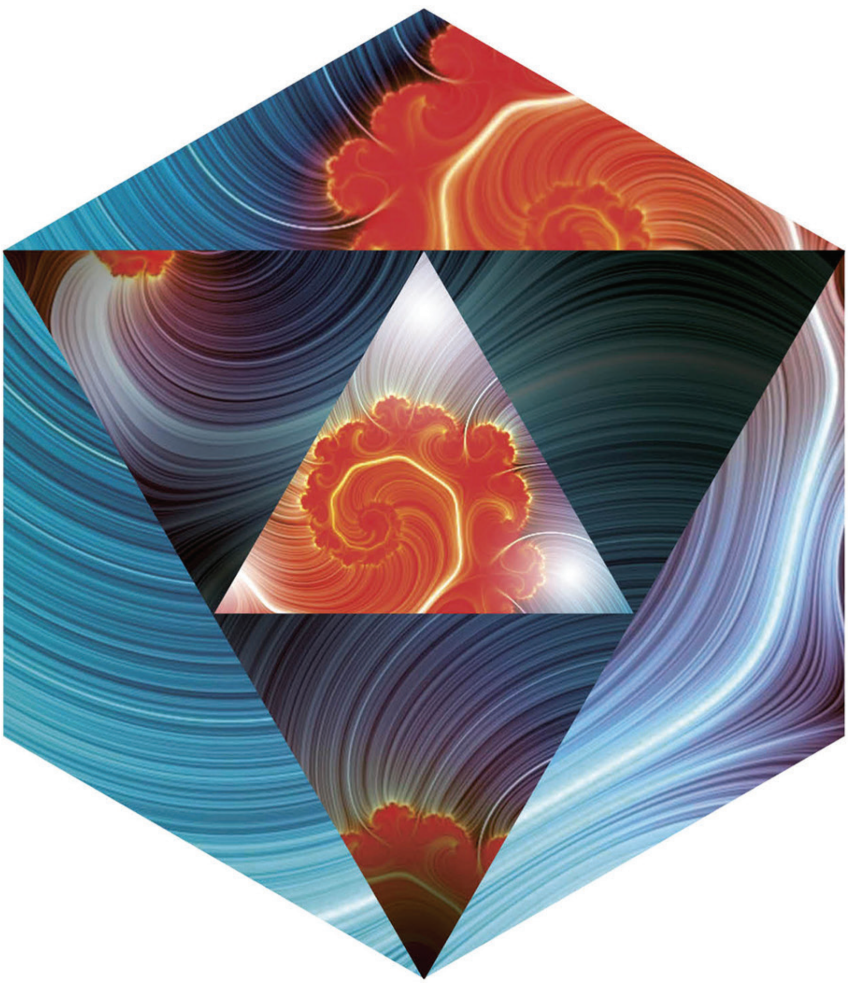
Алекс Беллос

КРАСОТА в квадрате



Как цифры отражают жизнь и жизнь отражает цифры

Alex Bellos

Alex Through the Looking-Glass:

How Life Reflects Numbers and Numbers Reflect Life

Three Rivers Press

Алекс Беллос

Красота в квадрате

Как цифры отражают жизнь и жизнь отражает цифры

Перевод с английского Натальи Яцюк

Москва
Издательство «Манн, Иванов и Фербер»
2015

УДК 512
ББК 22.1я9
Б43

Научный редактор Александр Минько

*Издано с разрешения Janklow & Nesbit (uk) Ltd
и литературного агентства Prava i perevodi*

На русском языке публикуется впервые

Беллос, Алекс

Б43 Красота в квадрате. Как цифры отражают жизнь и жизнь отражает цифры / Алекс Беллос ; пер. с англ. Н. Яцюк. — М. : Манн, Иванов и Фербер, 2015. — 368 с.

ISBN 978-5-00057-605-2

Читая эту книгу, вы не сразу сможете осознать, что изучаете и понимаете сложные идеи и концепции, которые прежде казались доступными только ученым и специалистам. Вы с удивлением обнаружите, насколько интересным и веселым может быть мир математики.

Книга будет полезной для всех, кто любит математику и науку вообще. И для тех, кто получил «удовольствие от *x*».

УДК 512
ББК 22.1я9

ISBN 978-5-00057-605-2

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ 9

ГЛАВА 1 13

У каждого числа своя история

Автор анализирует, какие чувства мы испытываем по отношению к числам, и объясняет, почему 11 — более интересное число, чем 10, а 24 гигиеничнее 31 и почему семерка приносит удачу.

ГЛАВА 2 41

Длинный хвост закона

Автор изучает универсальные законы чисел и обнаруживает числовые закономерности повсюду, включая и страницы этой книги.

ГЛАВА 3 73

Любовные треугольники

Автор исследует треугольники. Призрачный мир древнегреческой геометрии приводит его сначала к колодцу, а затем на вершину самой высокой горы мира.

ГЛАВА 4 97

Конусоголовые

Автор направляет свет своего факела на конус и видит его отражение в ракетах, планетах и башнях. Он познаёт радость катания шаров — как погруженных в чернила в Италии эпохи Возрождения, так и отскакивающих от бортика бильярдного стола в Нью-Йорке.

ГЛАВА 5 129

Движение по замкнутому кругу

Автор исследует вращение: крутит колесо, качает маятник, приводит в движение пружину и ударяет по камертону.

ГЛАВА 6 157

Все о числе *e*

Автор изучает пропорциональный рост. Он беседует с ученым из Колорадо, ставшим звездой YouTube, и рассказывает биографию числа, лежащего в основе капитализма, каталонской архитектуры и поисков спутника жизни.

ГЛАВА 7 193

Позитивная сила негативного мышления

Автор отправляется в путешествие по другую сторону ноля. Он должен объяснить, почему минус, умноженный на минус, дает плюс. Ему не удается сохранить связь с реальностью, и он погружается в Долину морского конька.

ГЛАВА 8 229

Профессор Калькулус

Автор принимается за исчисление, катается на американских горках с Архимедом и Ньютоном, а также пытается выяснить, почему среди французов так много талантливых математиков.

ГЛАВА 9 261

Назвние етой главы содержжит три ошбки

Автор исследует математическое доказательство. Он высмеивает логическую дедукцию и встречается с анонимным членом тайной математической секты.

ГЛАВА 10 285

Соседи по клетке

Автор совершает путешествие в мир клеточных автоматов. Он пытается понять смысл «Жизни» и беседует с человеком, который ищет вселенные у себя в подвале.

ГЛОССАРИЙ 315

БЛАГОДАРНОСТИ 334

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ, УТОЧНЕНИЯ, ССЫЛКИ И ПРИМЕЧАНИЯ 336

ИСТОЧНИКИ ФОТОГРАФИЙ И РИСУНКОВ 354

ПРЕДМЕТНО-ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ 355

ОБ АВТОРЕ 359

Посвящается Нэт

Предисловие

Математика — это шутка.

Поверьте, я говорю совершенно серьезно.

Понять математику — это то же самое, что уловить смысл шутки.

Мыслительный процесс в обоих случаях один и тот же.

Подумайте вот о чем. Шутка — это небольшой рассказ со своим построением и кульминацией. Вы внимательно следите за развитием сюжета до самой развязки, которая вызывает у вас улыбку.

Любая математическая концепция — тоже своего рода короткий рассказ с построением и кульминацией. Безусловно, это совсем другая история, где главные действующие лица — числа, фигуры, символы и закономерности. Как правило, в математике такую историю называют доказательством, а ее кульминацию — теоремой.

Вы следите за доказательством, пока не наступит развязка. И вдруг все становится понятным! Нейроны начинают буйствовать! Внезапный прилив интеллектуальной удовлетворенности оправдывает ваше первоначальное замешательство — и вы улыбаетесь.

Удовольствие от хорошей шутки и озарение в математике — эмоции одного порядка. Именно поэтому понимание математики может быть настолько приятным и захватывающим.

Подобно шуткам с очень смешной кульминацией, самые красивые теоремы проливают свет на нечто совершенно неожиданное. Они раскрывают новую идею, перспективу. Хорошая шутка вызывает смех. Математика приводит в благоговейный трепет. Именно из-за этого элемента неожиданности я влюбился в математику с малых лет. Она — единственный предмет, систематически подвергающий сомнению те выводы, к которым я когда-то пришел.

Цель данной книги — удивить вас. В ней я расскажу о своих любимых математических концепциях и попытаюсь обнаружить следы их присутствия в нашей повседневной жизни. Я хочу, чтобы вы по достоинству оценили красоту, функциональность и увлекательность логического мышления.

В моей предыдущей книге «Алекс в стране чисел. Необычайное путешествие в мир математики»* я совершаю странствие в мир математической абстракции. В этой возвращаюсь к реальности: меня в равной мере интересует как реальный мир, отраженный в зеркале математики, так и абстрактный, возникший под влиянием физического опыта.

Сначала я подвергаю психоанализу людей (какие чувства они испытывают по отношению к числам и что вызывает эти чувства), затем — числа, каждое в отдельности и все вместе. У каждого числа есть свои свойства, но если взять *множество* чисел, то можно заметить нечто удивительное: они ведут себя как хорошо организованная группа.

Числа помогают нам постичь смысл бытия, что мы и пытаемся сделать с того самого момента, как научились считать. Пожалуй, наиболее удивительное свойство математики состоит в том, что она позволяет нам четче понять мир, в котором мы живем. Цивилизация обязана своим развитием открытию таких простых фигур, как окружность и треугольник, — сперва в графическом виде, а затем и в виде уравнений.

Я бы сказал, что математика — это самое впечатляющее и продолжительное коллективное начинание в истории человечества. В этой книге мы, ведомые путеводной звездой открытий, проследуем от египетских пирамид до Эвереста, из Праги в Гуанчжоу, из викторианской гостиной в цифровую вселенную самовоспроизводящихся сущностей. Мы встретимся с самыми дерзкими мыслителями, среди которых будут как хорошо известные мудрецы античного мира, так и менее известные представители современности. В этом списке есть знаменитость из Индии, частный детектив из Соединенных Штатов Америки, член тайного общества из Франции и создатель космических кораблей, проживающий со мной по соседству в Лондоне.

Во время странствий по физическому и абстрактному мирам мы исследуем привычные для нас математические понятия, такие как число π и отрицательные числа, а также познакомимся с более загадочными концепциями, которые станут нашими близкими друзьями. Мы рассмотрим конкретные примеры практического применения математических идей — и обещаю: это приведет вас в восторг!

---

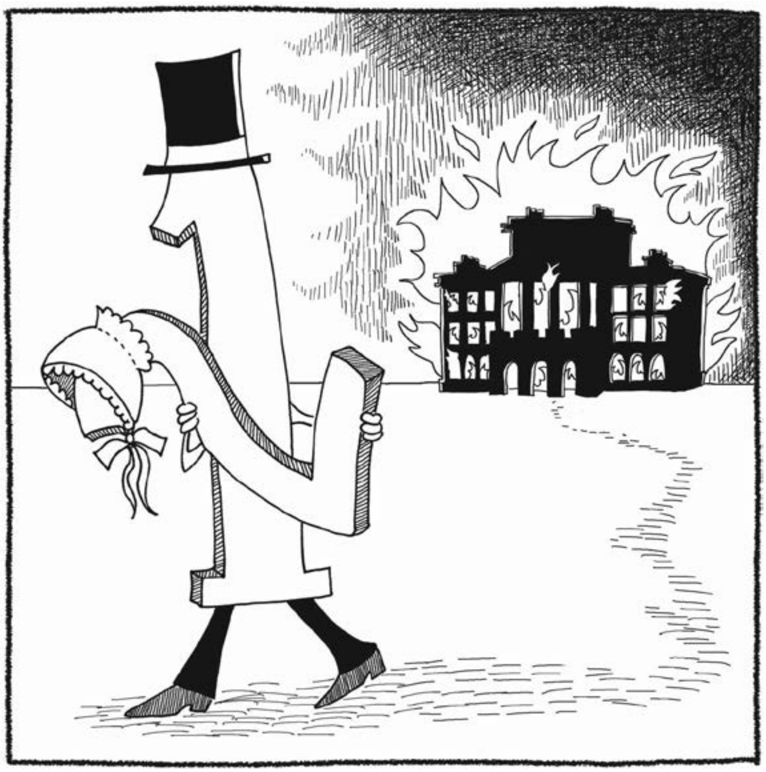
* *Беллос А.* Алекс в стране чисел. Необычайное путешествие в мир математики. — М. : КоЛибри, Азбука-Аттикус, 2012.

Для понимания содержания этой книги не нужно быть выдающимся математиком, поскольку она предназначена для обычного читателя. В каждой главе представлена отдельная математическая концепция, для усвоения которой не понадобятся предварительные знания. Хотя, несомненно, одни концепции неизбежно окажутся сложнее, чем другие. Иногда изложенный материал соответствует уровню бакалавра, поэтому в нем трудно будет разобраться без должной математической подготовки. В таких случаях просто переходите к началу следующей главы, где я снова возвращаюсь к элементарному уровню. Поначалу текст книги может вызвать у вас замешательство, особенно если вы впервые знакомитесь с данной темой, однако именно в этом и состоит мой замысел. Я хочу, чтобы вы взглянули на жизнь по-другому. А прозрение порой требует времени.

Возможно, это кажется вам слишком серьезным, но на самом деле все вовсе не так. Способность математики удивлять сделала ее самой занимательной из всех интеллектуальных дисциплин. Числа всегда были для человека развлечением не в меньшей степени, чем математическим инструментом.

Математика поможет вам не только лучше понять мир, но и получать от него больше удовольствия.

1 У каждого числа своя история



Джерри Ньюпорт попросил меня выбрать четырехзначное число.

— 2761, — сказал я.

— Это 11 × 251, — ответил он, назвав числа без запинки и колебаний.

— 2762.

— Это 2 × 1381.

— 2763.

— 3 × 3 × 307.

— 2764.

— 2 × 2 × 691.

Джерри — бывший таксист из города Тусон, страдающий синдромом Аспергера. У него румяное лицо, маленькие голубые глаза и русые волосы, прядь которых спадает на большой лоб. Джерри очень любит птиц и числа. Когда мы встретились, он был одет в красную рубашку с цветочным узором и изображением попугая. Мы сидели в гостиной в компании какаду, голубя, трех длиннохвостых попугаев и двух корелл, которые тоже слушали наш разговор и порой даже повторяли некоторые фразы.

Когда Джерри видит большое число, он сразу же делит его на простые числа — 2, 3, 5, 7, 11… то есть числа, которые делятся только на себя и единицу [1]*. Благодаря этой привычке Джерри получал особое удовольствие от работы таксиста, поскольку у него перед глазами постоянно мельками номерные знаки автомобилей. Когда Джерри жил в Санта-Монике, где номерные знаки состоят из четырех-пяти цифр, он часто посещал четырехэтажную парковку возле местного торгового центра и не уходил оттуда до тех пор, пока не прорабатывал все номера.

Однако в Тусоне в номерах автомобилей всего три цифры, поэтому теперь Джерри почти не смотрит на них.

— Я обращаю внимание только на числа, в которых больше четырех цифр. Если же их меньше, это как раздавленное на дороге животное. Да, именно так! — возмущенно заявил он. — Ну же, покажите мне что-нибудь новенькое!

Синдром Аспергера — это психическое расстройство, при котором человек испытывает трудности в межличностном общении, но обладает уникальными талантами. В случае Джерри это невероятные способности

* Числа в квадратных скобках соответствуют номерам примечаний к каждой главе, помещенным в конце книги.

к арифметическим вычислениям в уме. В 2010 году Джерри безо всякой подготовки принял участие в чемпионате мира по устному счету, проходившем в Германии, и получил титул «Самый универсальный вычислитель». Он стал единственным участником конкурса, набравшим максимальное количество баллов за выполнение задания, по условиям которого 19 пятизначных чисел за десять минут следовало разложить на простые множители. Больше никто даже не приблизился к этому результату.

Джерри выработал свою систему разбиения больших чисел на простые множители: перебирать простые числа в порядке возрастания, отсеивая сначала все четные числа, которые делятся на 2, потом все числа, которые делятся на 3, затем на 5 и т. д.

Джерри повысил голос:

— О да, мы просеиваем числа, детка! — Он начал вертеться. — Мы на сцене. Люди, давайте свои числа — мы просеем их для вас! Да! Джерри и решето!

— У меня есть два решета, — прервала его жена Мэри, сидевшая на диване рядом с нами. Мэри, музыкант и бывшая актриса массовок в сериале «Звездный путь», тоже страдает синдромом Аспергера, хотя у женщин он встречается гораздо реже, чем у мужчин. Пары с таким синдромом крайне редко вступают в брак; в 2005 году был снят фильм Mozart and the Whale («Моцарт и Кит»)*, в основу которого лег их необычный роман.

Иногда Джерри не удается разложить большое число на простые множители, а это означает, что данное число само является простым. Такие случаи вызывают у Джерри непередаваемые ощущения:

— Когда встречаешь новое простое число, это как будто смотришь на камни и находишь среди них что-то необычное. Нечто вроде бриллианта, который можно взять домой и положить на полку, — объясняет Джерри.

И, сделав паузу, добавляет:

— Новое простое число — это как новый друг [2].

Первые слова и символы для обозначения чисел появились около 5000 лет назад в Шумере, исторической области в Южном Двуречье, расположенной на территории современного Ирака. Шумеры придумывали для чисел названия, пользуясь имеющимися в их языке словами. Например, для обозначения единицы употреблялось слово *ges* («геш»), второе значение которого — мужчина

* В русском прокате — «Без ума от любви». *Прим. пер.*

или фаллос. Двойка обозначалась словом *min* («мин»), также символизирующим женское начало. Возможно, это подчеркивало то, что мужчина занимает доминирующее положение, а женщина — лишь дополнение к нему, или характеризовало мужской половой член и женскую грудь [3].

Изначально числа использовались для практических целей, таких как подсчет овец или расчет налогов, но при этом отображали и абстрактные закономерности, что делало их предметом глубоких размышлений. Одним из первых математических открытий было, пожалуй, разделение чисел на две категории: четные — целые числа, которые делятся на 2 без остатка (например, числа 2, 4 и 6); и нечетные — которые не делятся на 2 без остатка (например, 1, 3 и 5). Греческий мыслитель Пифагор, живший в VI веке до нашей эры, провозгласил нечетные числа мужскими, а четные — женскими, тем самым подтвердив отмеченную шумерами ассоциативную связь между единицей и мужчиной, а также двойкой и женщиной. Он утверждал, что нежелание делиться на два — это признак силы, тогда как склонность к такому делению — признак слабости. Пифагор дал следующее арифметическое обоснование своих выводов: нечетные числа главенствуют над четными точно так же, как мужчина главенствует над женщиной, поскольку сложение нечетного и четного чисел всегда дает в результате нечетное число.

Пифагор больше всего известен теоремой о треугольниках, о которой мы поговорим позже. Тем не менее его утверждение о гендерной принадлежности чисел доминировало в западной философской традиции более двух тысяч лет. В христианстве это нашло отражение в мифе о сотворении мира: Адама Бог создал первым, а Еву — второй. Единица символизирует единство, тогда как двойка — «грех как отклонение от изначального добра» [4]. Средневековая церковь считала нечетные числа, в отличие от четных, более сильными, добродетельными, праведными и приносящими удачу. Во времена Шекспира были широко распространены метафизические представления о нечетных числах. В комедии The Merry Wives of Windsor («Виндзорские насмешницы») Фальстаф заявляет: «Я верю в нечет и всегда ставлю на нечетные числа — говорят, счастье их любит»*. И эти предрассудки сохранились до наших дней. Мистическими по-прежнему считаются только нечетные числа, в частности магическое число три, приносящее удачу, число семь и несчастливое число тринадцать.

* Перевод М.М. Морозова. *Прим. пер.*

Кроме того, именно Шекспиру приписывают употребление слова *odd* («нечетный») в новом значении [5]. Первоначально это слово ассоциировалось исключительно с числами и использовалось в таких фразах, как *odd man out* («третий лишний») — член группы из трех человек, оставшийся без пары [6]. Однако в комедии Love's Labour's Lost («Бесплодные усилия любви») чудаковатый испанец Дон Адриано де Армадо описывается как «человек характера крайне причудливого и слишком, слишком тщеславного»*. С тех пор словом, которое ассоциировалось раньше только с единицей в остатке от деления на два, начали обозначать и нечто необычное, причудливое.

Человеку свойственна чувствительность к числовым закономерностям. Они вызывают у него субъективную реакцию, порой чрезмерную — как в случае Джерри Ньюпорта, но в основном пробуждают глубокие культурные ассоциации. Восточная философия построена на признании дуальности мира, отраженной в таких символах, как *инь* и *ян*, «тьма» и «свет». *Инь* ассоциируется с пассивностью, женским началом, Луной, невезением и четными числами, а *ян* — с их противоположностями: агрессивностью, мужским началом, Солнцем, удачей и нечетными числами. Здесь снова можно увидеть историческую связь между удачей и нечетными числами. Особенно она сильна в Японии, где, например, принято дарить по три, пять или семь предметов, но никогда четыре или шесть [7]. Когда японцы дарят деньги молодоженам, они предпочитают суммы 30 000, 50 000 и 100 000 иен. Сумма 20 000 тоже приемлема, но в этом случае следует дарить одну банкноту достоинством 10 000 иен и две банкноты по 5000 иен. Эстетика нечетных чисел лежит также в основе *икебаны* — традиционного японского искусства создания цветочных композиций, в котором используется только нечетное количество цветов (это связано с влиянием буддийских представлений об асимметричности природы). *Кайсэки* — обед японской высокой кухни — состоит исключительно из нечетного числа блюд. Японские дети получают этот сигнал в раннем возрасте, во время праздника под названием Shichi-Go-San (буквально «семь, пять, три») — фестиваля, в котором участвуют дети только семи, пяти и трех лет. Профессор Осакского университета экономики Ютака Нишияма писал, что пристрастие японцев к нечетным числам до того укоренилось, что когда в 2000 году правительство выпустило банкноту достоинством 2000 иен, никто не стал ее использовать [8].

---

* Перевод Ю. Корнеева. *Прим. пер.*

В странах Восточной Азии предрассудки в отношении чисел более распространены, чем на Западе. Результаты их жителей по международным тестам на математические способности гораздо выше, а это говорит о том, что мистические предубеждения не мешают освоению математических навыков. На самом деле такие предрассудки могут даже усиливать интерес к числам, желание ближе с ними познакомиться и находить в них нечто занимательное. Самое распространенное в Азии предубеждение касательно чисел связано с игрой слов. В японском языке, кантонском и мандаринском диалектах китайского языка, а также в корейском языке слово «четыре» (*shi, sei, si, sa*) звучит точно так же, как слова, обозначающие смерть, поэтому носители этих языков всячески избегают числа четыре. В этом регионе во многих отелях нет четвертого этажа, в салонах самолетов отсутствует четвертый ряд, а компании не выпускают продукты с четверкой в названии. В действительности число четыре ассоциируется со смертью настолько сильно, что эта связь превратилась в неизбежно сбывающееся пророчество: по данным наблюдений в США, четвертого числа каждого месяца среди американцев японского и китайского происхождения количество сердечных приступов со смертельным исходом резко увеличивается [9]. Напротив, число восемь считается счастливым, поскольку в китайском языке оно звучит так же, как слово «процветание». В ценах, которые указываются в газетных рекламных объявлениях, число 8 появляется несоразмерно часто. Получается, что две смерти равны процветанию.

В Индии нечетные числа тоже ассоциируются с процветанием и удачей. Но есть ли какая-то причина, по которой как на Востоке, так и на Западе они наделены духовным смыслом в большей степени, чем четные? Возможно, это связано с тем, что наш мозг обрабатывает нечетные числа дольше, чем четные. Данный феномен открыл психолог из Университета Пейса Теренс Хайнс и назвал его эффектом нечетных чисел. Во время одного из экспериментов Хайнс показывал на экране числа из двух цифр [10]: либо нечетных (например, 35), либо четных (как 64), либо одна четная и одна нечетная (как 27). Он попросил участников эксперимента нажимать кнопку лишь тогда, когда они видят числа, состоящие только из четных или нечетных цифр. Испытуемым понадобилось в среднем на 20 процентов больше времени, чтобы нажимать кнопку в случае чисел из двух нечетных цифр; кроме того, они при этом делали больше ошибок. Сначала Хайнс не поверил полученным результатам и подумал, что в методике тестирования, должно быть, какая-то погрешность, однако дальнейшие исследования однозначно подтвердили наличие данного феномена. Мы относимся к нечетным числам иначе не только из-за многовековых культурных установок, но и потому, что по-другому о них *думаем*. Нечетные числа стимулируют работу мозга.

Существует лингвистический ключ к разгадке эффекта нечетных чисел, которого не могут увидеть носители английского языка — единственного из основных европейских языков, где четные и нечетные числа обозначаются неродственными словами *even* («четный») и *odd* («нечетный»). В других европейских языках используются родственные слова: во французском — *pair и impair*, в немецком — *gerade и ungerade*, в русском — *четный и нечетный*. Понятие четности предшествует понятию нечетности, поскольку это более простая и доступная для усвоения концепция.

Впоследствии были проведены и другие исследования по теме когнитивного разрыва между нечетными и четными числами. В частности, Джеймс Уилки и Гален Боденхаузен из Северо-Западного университета решили выяснить, существует ли какая-либо психологическая основа у древней веры в то, что нечетные числа ассоциируются с мужским, а четные — с женским началом. Они показали участникам эксперимента расположенные в произвольном порядке фотографии младенцев вместе с трехзначными числами, каждое из которых состояло либо из четных, либо из нечетных цифр, и попросили определить пол ребенка [11]. На первый взгляд эксперимент кажется абсурдным, и о нем никто бы даже не вспомнил, если бы не поразительный результат: выбор пола ребенка в значительной мере зависел от четности или нечетности цифр, из которых состоит число. Если фотографии новорожденного соответствовало число из нечетных цифр, вероятность того, что респонденты выберут мужской пол, была на 10 процентов выше, чем в случае, когда с тем же ребенком ассоциировалось число из четных цифр [12]. Уилки и Боденхаузен пришли к выводу, что пифагорейцы, средневековые христиане и даосисты правы. Свойственная разным культурам древняя вера в то, что нечетные числа ассоциируются с мужественностью, а четные — с женственностью, нашла свое подтверждение в результатах исследований. «Не исключено, что склонность проецировать гендерную идентичность на числа — универсальное качество человека», — писали авторы эксперимента. Однако они не смогли объяснить, почему нечетные числа считаются мужскими, а четные — женскими, а не наоборот.

Культура, язык и психология влияют на нашу манеру восприятия математических понятий и закономерностей. Мы уже убедились в этом на примере четных и нечетных чисел и еще увидим на примере других свойств чисел. Числа имеют конкретное математическое значение: они являются абстрактными или обозначают количество и порядок предметов при счете, но также они могут обозначать и нечто совсем иное.

Влиятельный немецкий богослов Гуго Сен-Викторский (1096–1141) представил одно из первых толкований чисел: число десять символизирует «высокую нравственность веры»; число девять, предшествующее десяти, — «изъян в совершенстве», а число одиннадцать, следующее после десяти, — «выход за пределы» [13]. Если бы Гуго Сен-Викторский жил в наше время, он получил бы весьма выгодную работу в The Semiotic Alliance — одном из ведущих агентств, занимающихся семиотикой рекламы и брендинга. Я встретился с его основателем Грегом Роулендом в Лондоне. В пиджаке, надетом на черно-белую футболку, с глубокими морщинами на лбу и проницательным взглядом, Роуленд производил впечатление обычного университетского профессора, хотя его среда обитания — скорее, не библиотека, а зал заседаний совета директоров. Грег Роуленд консультирует транснациональные корпорации по вопросам символики их брендов, которая включает также ассоциации с числами, свойственные той или иной культуре. Среди его клиентов такие крупные компании, как Unilever, Calvin Klein и KFC. Например, число одиннадцать — важный элемент корпоративной мифологии KFC: фирменное блюдо этой сети ресторанов — жареная курица в особой панировке, изготовленной по секретному оригинальному рецепту полковника Сандерса с одиннадцатью травами и специями. «Это самый яркий пример мистического использования числа одиннадцать в корпоративной культуре, — считает Грег. — Это число олицетворяет выход за пределы, в данном случае в виде применения дополнительного ингредиента, благодаря которому их общее количество увеличивается на единицу. Число одиннадцать на единицу больше десяти, а значит, оно признаёт существующий порядок вещей, но в то же время выходит за его пределы. Число одиннадцать открывает дверь в бесконечность, но не уходит слишком далеко. Это как… буржуазное восстание в своей крайней форме!» Я спросил, не значит ли это, что полковник Сандерс ничем не отличается от рок-группы Spinal Tap*, у которой регулятор на усилителе можно

* Spinal Tap — вымышленная рок-группа, которой посвящен псевдодокументальный фильм «Это — Spinal Tap». Этот фильм представляет собой пародию на привычки, внешний вид и бунтарское поведение участников популярных рок-групп. *Прим. пер.*

было выставить на 11, чтобы он звучал громче усилителей с максимальным уровнем 10. Грег рассмеялся: «Да, именно так! Но я действительно в это верю! Я верю в то, что 11 — более интересное число, чем 10!»

Грег добавил, что дополнительная единица — весьма распространенный мем. Классический пример — джинсы Levi's 501. «Дополнительная единица усиливает ожидания от продукта, не переигрывая при этом. Именно так и поступают в Levi's: прибавляют к своим продуктам какой-то небольшой элемент — маленькая кнопочка здесь, шовчик там. Это действительно что-то одно. Своим названием Levi's как будто говорит, что джинсы 501 — не просто 500, а немного лучше, а вот число 502 (на два больше) уже не дает такого эффекта. Этот мистический дополнительный элемент делает число 501 менее рациональным и поддающимся определению по сравнению с числом 500. Лучше всего данный принцип работает с большими десятичными числами, как в случае фильма 2001: A Space Odyssey («2001 год: космическая одиссея»), драм-машины 101 и комнаты 101*. Это была не комната 100 — кто бы ее испугался?

Еще задолго до появления компании Levi's и ее джинсов дополнительная единица стала неотъемлемой частью индийской культуры. *Shagun* («шагун») — это традиция, согласно которой деньги следует дарить в виде какой-либо круглой суммы плюс еще одна рупия (101 рупия, 501 рупия или 100 001 рупия). Например, в свадебных магазинах продаются подарочные конверты с уже приклеенной рупией, чтобы никто о ней не забыл. Хотя у этой практики нет единого рационального объяснения (одни утверждают, что единица символизирует благословение, другие — что она олицетворяет начало нового цикла), принято считать, дополнительная рупия по своему символическому значению так же важна, как и сумма, вложенная в конверт.

Все это напоминает мне старую семейную историю. В начале XX столетия мой дед работал над новым рецептом газированного напитка, который он назвал 4 Up. Потребителям напиток не понравился, поэтому дед потратил еще несколько лет на его усовершенствование. Следующий продукт под названием 5 Up тоже не обрел популярности. Еще через несколько лет вышел очередной напиток 6 Up. Догадайтесь, какой была его участь? Он тоже потерпел неудачу. К большому сожалению, дед умер, так и не узнав, насколько он был близок к цели.

---

* В романе Джорджа Оруэлла «1984» комната 101 — это камера пыток в Министерстве любви. *Прим. пер.*

Да, это старая шутка. Но в ней есть доля правды. В бизнесе, как и в религии, хорошее число имеет огромное значение. Например, число десять («высокая нравственность веры») усиливает веру потребителей в антивозрастной крем Oxy 10: «Десять — это баланс, безопасность, возврат к норме. Это совершенное десятичное число, — объясняет Грег. — К десятке нет никаких претензий, а ведь именно это вам и нужно от продукта. Вам не нужен крем Oxy 9 или Oxy 8. Тем более вам не нужен продукт под названием Oxy 7, 11, 13 или 15. В таком продукте, как Oxy 10, есть определенность». Я спросил Грега вот о чем: если бы универсальное водоотталкивающее средство WD40 нарекли WD41, оно было бы таким же успешным? «Название WD41 говорило бы о ненадежности продукта, — объяснил Грег, — поскольку в нем содержалось бы нечто большее, чем вам необходимо. В нем было бы что-то лишнее, не так ли?» Грег продолжил вслух анализировать другие варианты: «Название WD10 имело бы бинарное значение: продукт либо делает что-то, либо нет. Но в названии продукта не должны присутствовать числа 400 или 4000 — не нужно перегибать палку! WD40 говорит о том, что продукт не претендует на многое. Это простое, незаметное улучшение». Согласно корпоративной легенде, своим названием средство обязано химику Норму Ларсену. Он поставил себе цель изобрести антикоррозионную жидкость, отсюда и аббревиатура от слов «Water Displacement» в названии, а 40 — потому что формула была разработана с сороковой попытки. Безусловно, невозможно выяснить, насколько успешным было бы детище Ларсена, создай он его на сорок первой попытке. Тем не менее результаты научных исследований подтверждают семиотический вывод Грега: числа, которые делятся без остатка, в названиях товаров для дома более привлекательны для потребителей по сравнению с неделимыми числами.

В 2011 году Дэн Кинг из Национального университета Сингапура и Крис Янишевски из Флоридского университета продемонстрировали, что воображаемый бренд шампуня против перхоти вызывает у потребителей больше симпатий, если он называется Zinc 24, а не Zinc 31 [14]. Предпочтения участников эксперимента в отношении продукта Zinc 24 настолько доминировали, что люди были готовы переплачивать за него 10 процентов. По мнению Кинга и Янишевски, это объяснялось прежде всего тем, что респонденты знакомы с числом 24 еще со школьных времен по таблице умножения: $3 \times 8 = 24$ и $4 \times 6 = 24$. А вот простого числа 31 в таблице умножения нет. И поскольку число 24 для нас привычнее, наш мозг быстрее обрабатывает его, поэтому у нас и появляется ощущение, что оно нам больше нравится. По мнению исследователей, эту установку мы переносим и на продукты Zinc 24 и Zinc 31. Когда я рассказал Грегу Роуленду об этом эксперименте, он не удивился, но подчеркнул культурный аспект данного феномена: «Zinc 24 соответствует нашим представлениям о том, что четные числа в названии продукта возвращают нам ощущение нормальности, то есть того, что все так, как должно быть. Нечетные числа оставляют больше простора для эмоций, поэтому вокруг них всегда больше мистики». По мнению Грега, именно поэтому мы не хотим, чтобы наши волосы так или иначе соприкасались с этими числами.

Для подтверждения гипотезы о том, что предпочтения в выборе продукта зависят от скорости обработки чисел мозгом человека, Кинг и Янишевски решили провести еще один эксперимент, в ходе которого в рекламу бренда с числом в названии были включены другие цифры. Сначала исследователи придумали Solus 36 и Solus 37 — два вымышленных типа контактных линз реально существующего бренда Solus. Затем составили четыре рекламных объявления: одно для Solus 36, второе для Solus 37 и по одному для каждого продукта со строкой «6 цветов, 6 вариантов посадки». В случае объявлений без дополнительной строки респонденты отдавали предпочтение линзам Solus 36, как и ожидалось. Но, когда эта строка добавлялась, популярность линз Solus 36 увеличивалась, а спрос на линзы Solus 37 падал еще больше. Кинг и Янишевски пришли к выводу, что, поскольку сочетание чисел 6, 6 и 36 хорошо нам знакомо по таблице умножения (6 × 6 = 36), это повышает скорость их обработки мозгом, тогда как сочетание чисел 6, 6 и 37, не связанных между собой арифметически, обрабатывается гораздо медленнее. По мнению исследователей, под воздействием удовольствия, обусловленного подсознательным распознаванием простой операции умножения, у нас поднимается настроение — и мы ошибочно относим это состояние на счет удовлетворенности продуктом. Кинг и Янишевски утверждают: включение скрытых арифметических операций в рекламные объявления помогло бы компаниям увеличить объем продаж.

По мнению Кинга и Янишевски, наша чувствительность к тому, делится ли число без остатка или нет, влияет на наше поведение. Все мы немного похожи на Джерри Ньюпорта, таксиста из Тусона, раскладывающего числа на простые множители. Деление на два — это самый ранний и естественный тип деления. Именно поэтому мы настолько восприимчивы к арифметической закономерности, культурные ассоциации с которой глубоко укоренились в нашем сознании, — к различиям между четными и нечетными числами.

Какой пакет контактных линз кажется вам более привлекательным?

Числа изобретены для подсчета точного количества: три зуба, семь дней, двенадцать коз. Однако, когда количество становится достаточно большим, мы перестаем использовать числа в их точном значении и прибегаем к аппроксимации, беря округленное число в качестве опорной точки. Например, когда я говорю, что на рынке была сотня людей, я не имею в виду, что там находилось именно сто человек. А утверждение, что Вселенной около 13,7 миллиарда лет, не означает, что ей 13 700 000 000 лет, ей 13,7 миллиарда лет плюс-минус несколько сотен миллионов лет. Большие числа воспринимаются как приближенные величины, тогда как малые числа — как величины точные, и между этими двумя системами очень непростое взаимодействие. Явно некорректным выглядит заявление, что в следующем году Вселенной исполнится 13,7 миллиарда и один год: ей по-прежнему будет 13,7 миллиарда лет до конца наших дней.

Как правило, круглые числа заканчиваются нулем. Слово «круглый» используется для обозначения этих чисел не потому, что ноль имеет форму окружности, а потому, что круглое число отображает завершение полного цикла счета. В нашей системе счисления десять цифр, поэтому любое сочетание таких циклов всегда кратно десяти.

Мы привыкли обозначать крупные величины круглыми числами, поэтому встреча с большим числом, которое не является круглым (скажем, 754 156 293), вызывает у нас протест. Психолог Корнельского университета Маной Томас утверждает, что из-за чувства дискомфорта, порождаемого большими некруглыми числами, их значение кажется нам меньше, чем оно есть в действительности: «Мы склонны полагать, что малые числа более точны, поэтому, видя точное большое число, инстинктивно предполагаем, что оно меньше, чем на самом деле» [15]. В итоге, по мнению Маноя Томаса, мы платим за дорогой продукт больше, если его цена представлена некруглым числом. Во время одного из экспериментов Томас дал испытуемым фотографии нескольких домов, где были также указаны их цены, в произвольном порядке представленные либо круглым числом (скажем, 390 000 долларов), либо чуть бо́льшим точным числом (например, 391 534 доллара). Когда респондентов спросили, какую цену они считают выше, а какую ниже, они в среднем оценили точные цены как более низкие, хотя на самом деле все было наоборот. По мнению Томаса и его коллег, даже если участники эксперимента объясняли точность некоторых цен какими-то другими причинами (например, продавец тщательно размышлял над этой суммой, значит, она более справедлива), на подсознательном уровне им все равно казалось, что некруглые числа меньше круглых. Совет тем, кто собирается продавать дом: если хотите выручить за него больше денег, его цена не должна заканчиваться нулем.

Чуть выше мы говорили о культурных коннотациях прибавления единицы к круглому числу. Практика ее *вычитания* из круглого числа тоже несет мощный сигнал.

При прочтении числа левая крайняя цифра для нас более значима, чем крайняя правая, поскольку именно в таком порядке мы обрабатываем цифры. Число 799 кажется нам намного меньше, чем 800, так как мы воспринимаем первое число как семь и еще что-то, а второе — как восемь и еще что-то, тогда как числа 798 и 799 кажутся нам практически одинаковыми. Начиная с XIX столетия владельцы магазинов используют этот трюк, назначая на свои товары цены, заканчивающиеся на 9, для того чтобы создать у покупателей впечатление, будто этот продукт дешевле, чем он реально стоит. Согласно исследованиям, в наше время от одной до двух третей всех розничных цен заканчиваются на 9.

Хотя все мы вроде бы достаточно опытные покупатели, эта уловка попрежнему вводит нас в заблуждение. В 2008 году ученые из Университета Южной Бретани изучили спрос в местной пиццерии, в которой готовили пять видов пиццы по 8 евро [16]. Когда одна из пицц стала стоить 7,99 евро, доля ее продаж увеличилась от трети до половины. Снижения цены на один цент (совсем незначительная сумма с финансовой точки зрения) оказалось достаточно для того, чтобы существенно повлиять на выбор клиентов.

Однако наша реакция на цены, заканчивающиеся на 9, — следствие более сложного комплекса факторов, чем только склонность придавать большее значение крайней левой цифре числа. Цена с девяткой в конце кажется нам гораздо ниже, даже если на самом деле это не так [17]. Эрик Андерсон из Чикагского университета и Данкан Симестер из Массачусетского технологического института сделали так, чтобы одно и то же платье было представлено в трех идентичных каталогах по разным ценам — 34 доллара, 39 долларов и 44 доллара. Лучше всего платье продавалось не по 34 доллара, а по 39 долларов. Аналогичные результаты были получены и в ходе других исследований: когда цена заканчивается на 9, покупатель воспринимает это как признак того, что она снижена, а значит, покупка выгодная. С другой стороны, ассоциативная связь между девяткой и продуктами, которые продаются со скидкой, может также означать, что такой товар будет воспринят как дешевый, или создавать впечатление, что продавец пытается вами манипулировать. Например, в элитном ресторане даже не подумают устанавливать на основное блюдо цену, скажем, 22,99 доллара. Точно так же никто не станет доверять психотерапевту, берущему 59,99 доллара за сеанс. В этих случаях цены должны быть 23 и 60 долларов соответственно — они выглядят более честными и создают ощущение высокого класса обслуживания. Наша реакция на число 9 обусловлена целым рядом культурных и психологических факторов.

У розничных торговцев есть еще одна причина для использования цен, заканчивающихся на 9 или, если уж на то пошло, на 8. Результаты исследований говорят о том, что цены с этими цифрами в конце вспомнить намного труднее, чем цены, последняя цифра которых 0 и 5, поскольку мозгу требуется больше времени для их сохранения и обработки. Если вы хотите, чтобы ваш клиент не запомнил цену (например, чтобы лишить его возможности сравнить ее с другими), лучше устанавливать ее с цифрами 8 или 9 в конце. Напротив, если вам нужно, чтобы клиент запомнил цену (скажем, для подтверждения того факта, что она ниже, чем у конкурентов), тогда лучше указать 5 фунтов, а не 4,98 фунта. На самом деле розничные торговцы применяют целый ряд различных психологических трюков с числами, чтобы снизить осведомленность потребителей о цене. Например, одно из исследований Корнельского университета показало, что, не указывая денежную единицу в стоимости блюд, перечисленных в меню, один нью-йоркский ресторан на восемь процентов увеличил среднюю сумму, потраченную одним клиентом [18]. Денежная единица в цене напоминает нам о том, что мы не любим расставаться с деньгами. Еще одна умная стратегия составления меню сводится к отображению цены сразу же после названия каждого блюда, а не в отдельном столбце, поскольку в последнем случае легче сравнивать цены [19]. Необходимо сделать так, чтобы гости ресторана заказывали блюда независимо от их цены, руководствуясь исключительно своими предпочтениями, а не стоимостью кушанья.

Правильное меню

*Жареное филе морского окуня
с теплым картофельным салатом
и хрустящим луком 7,50*

*Кремовый грибной суп
с соусом шантильи из трюфелей 5,50*

*Куриные фрикадельки с кускусом,
приправленные зеленью,
и фондю из лука-порея 8,20*

Неправильное меню

Жареное филе морского окуня с теплым картофельным салатом и хрустящим луком £7,50

*Кремовый грибной суп с соусом шантильи
из трюфелей £5,50*

*Куриные фрикадельки с кускусом,
приправленные зеленью, и фондю из лука-порея £8,20*

Однако самый вопиющий пример использования психологии восприятия чисел в розничной торговле — это, пожалуй, показ абсурдно дорогих товаров для создания искусственного эталона для сравнения цен. Автомобиль за 100 000 фунтов в демонстрационном зале автосалона или пара туфель за 10 000 фунтов в витрине магазина выставляются не потому, что их рассчитывают продать, а для того чтобы ввести покупателя в заблуждение, убедив его в том, что на фоне этих цен автомобиль за 50 000 фунтов или пара туфель за 5000 фунтов — очень дешево. Супермаркеты применяют аналогичную стратегию. Числовые стимулы оказывают необычайное влияние на процесс принятия решений, причем не только в отношении покупок. Во время одного из исследований 52 судьям из Германии предложили прочитать дело о женщине, арестованной за совершение мелкой кражи в магазине, а затем кинуть кости, сделанные так, чтобы выпадали либо числа 1 и 2, либо 3 и 6 [20]. После каждого броска костей судей просили определить, какой срок тюремного заключения они назначили бы этой женщине — больше или меньше месяцев, чем сумма чисел на костях. Судьи, у которых получалось 3, давали подсудимой в среднем пять месяцев тюремного заключения, тогда как судьи, у которых выпадала сумма 9, — восемь. Все эти судьи были опытными профессионалами, тем не менее даже простое упоминание чисел, никак не связанных с делом, сказалось на вынесенном ими приговоре.

Если случайные числа способны так сильно влиять даже на честных немецких судей, то только представьте себе, что они делают с нами, обычными людьми. Каждый раз, когда мы видим то или иное число, оно воздействует на наши поступки; при этом мы далеко не всегда осознаём и можем контролировать данный процесс.

Еще один аспект нашей реакции на числа — эмоциональная привязанность к некоторым из них. Помимо того что числа служат нам в качестве инструмента для подсчета, вычислений и установления количества тех или иных объектов, у нас возникают еще и определенные чувства по отношению к ним. Например, Джерри Ньюпорт любит несколько чисел, как близких друзей. Я не осознавал, насколько сильна привязанность людей к числам, пока не провел интернет-опрос, в ходе которого его участники должны были назвать свое любимое число и объяснить, почему они отдают ему предпочтение [21]. Я был поражен не только тем, какой интерес вызвал у людей этот опрос (за первые пару недель в нем приняли участие более 30 000 пользователей), но и разнообразием и эмоциональностью ответов: число 2 — потому что у респондента сделан пирсинг в двух местах; число 6 — потому что шестой в любимых альбомах респондента всегда оказывается самая лучшая песня; 7,07 — потому что опрашиваемый ежедневно встает в 7:07 утра, а однажды он сделал в местном магазине покупку на 7,07 доллара, общаясь с симпатичной кассиршей; 24 — потому что девушка, принявшая участие в опросе, спит, подогнув ногу в форме четверки, а ее парень спит на боку, и его тело в этот момент напоминает двойку; число 73, известное поклонникам сериала «Теория Большого взрыва» как «Чак Норрис чисел», — потому что главный герой сериала Шелдон Купер обратил внимание на то, что это двадцать первое простое число, а его зеркальное отображение 37 — двенадцатое простое число; число 83 — потому что оно хорошо звучит, когда нужно что-то преувеличить, как в такой фразе: «Наверное, я сделал это 83 раза!»; число 101 — потому что это самое меньшее целое число с артиклем «а» в английском названии; число 120 — потому что оно делится на 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 10, предоставляя респонденту достаточно чисел для их подсчета в прямом и обратном направлении, пока он не уснет; число 159 — потому что эти цифры расположены по диагонали на клавиатуре телефона; число 18 912 — потому что оно с самым красивым в мире звучанием; и 142 857 («число феникса») — потому что его произведение на 1, 2, 3, 4, 5, 6 представляет собой анаграмму самого числа.

```
                 142857142857
142857 × 1 =  142857
142857 × 2 =    285714
142857 × 3 =   428571
142857 × 4 =      571428
142857 × 5 =       714285
142857 × 6 =     857142
142857 × 7 =  999999
```

«Когда есть любимое число, ты испытываешь небольшое возбуждение каждый раз, когда едешь на 53-м месте в поезде или замечаешь, что на часах 9:53, — написал один из респондентов. — Я не вижу причин, почему у человека не должно быть любимого числа».

Следует заметить, что участие в опросе было сугубо добровольным и он представлял собой скорее развлечение, чем строгое научное исследование. Тем не менее полученные данные позволили обнаружить удивительные закономерности в выборе любимого числа.

Во-первых, охват чисел оказался просто огромным: 30 025 респондентов назвали 1123 любимых числа. Определенное количество голосов получили все числа от 1 до 100, а 472 числа попали в диапазон от 1 до 1000. Самым меньшим целым числом, за которое не было отдано ни одного голоса, стало 110. Неужели это самое нелюбимое число в мире?

Вот итоговая таблица.

Позиция	*Число*	*Процент*
1	7	9,7%
2	3	7,5%
3	8	6,7%
4	4	5,6%
5	5	5,1%
6	13	5,0%
7	9	4,8%
8	6	3,4%
9	2	3,4%
10	11	2,9%
11	42	2,8%
12	17	2,7%
13	23	2,3%
14	12	2,2%
15	27	1,9%
16	22	1,5%
17	21	1,4%
18	π	1,4%
19	14	1,3%
20	24	1,2%
21	1	1,2%
22	16	1,2%
23	10	1,2%
24	37	1,0%

Позиция	*Число*	*Процент*
25	0	1,0%
26	19	0,9%
27	18	0,8%
28	e	0,7%
29	28	0,7%
30	69	0,6%

Общий вывод таков: нам милее всего одноразрядные числа; кроме того, чем больше число, тем меньше оно нам нравится. Отображенные в таблице данные говорят также о шокирующем безразличии к круглым числам. Все числа от двух до девяти входят в первую десятку самых любимых чисел, однако само число 10 находится на двадцать третьем месте, число 20 — на пятидесятом, а 30 — на шестьдесят девятом. Число 10 — краеугольный камень десятичной системы счисления — почему-то не пользуется особой симпатией у людей; возможно потому, что «продает» себя ради округления чисел.

Некоторые числа выбирают из-за их свойств; к ним относится упомянутое выше «число феникса», а также константы π и e (о них мы подробнее поговорим в следующих главах книги). Однако в большинстве случаев наши предпочтения обусловлены личными причинами, например это день или месяц нашего рождения. Тем не менее различие между сугубо математическими и личными причинами не всегда однозначно, учитывая наличие чисел, редко выбираемых в качестве любимых, даже если человек родился в этот день. Например, если вы родились 10-го числа, вероятность того, что 10 окажется вашим любимым числом, в шесть раз меньше вероятности того, что вы выбрали бы семерку, если бы родились 7-го числа. А если бы вы родились 30-го, то такая вероятность уменьшилась бы в сорок раз. Некоторые числа явно вызывают у людей больше симпатий, чем другие. (Я так заинтересовался темой любимых чисел не в последнюю очередь потому, что у меня такого числа нет, и мне трудно было поверить, что многие люди испытывают столь сильную привязанность к числам. Теперь же я объясняю отсутствие любимого числа тем, что родился не со второго по девятое число месяца.)

В результатах этого опроса нашла свое отражение и историческая закономерность, согласно которой нечетные числа привлекают больше внимания, чем четные. В диапазоне от 1 до 1000 процентное соотношение выбора нечетных и четных чисел составляет 60 к 40. Эта таблица демонстрирует также, что известная шутка Дугласа Адамса о том, что число 42 — это ответ на главный вопрос жизни, Вселенной и всего остального*, звучит спустя 30 лет по-прежнему смешно. (Число 42 производит подобный эффект, потому что оно совершенно безликое. Шутка не была бы настолько смешной, если бы Адамс предпочел, скажем, число 41, нечетное и простое.) Появление в таблице числа 69 говорит о том, что при проведении интернет-опросов нельзя исключать и такой фактор, как наивный юношеский юмор.

Число 7 оказалось бесспорным лидером. Нет ничего удивительного в том, что его выбрали самые разные респонденты, независимо от возраста, пола и математических способностей. Привязанность человека к этому числу находила свое отражение в культуре на протяжении всей известной нам истории человечества. Семь чудес света, семь смертных грехов, семь возрастов человека, семь столпов мудрости, семь невест семерых братьев, семь морей, семь самураев и семь гномов — во всех этих случаях присутствует число семь. Вавилонские зиккураты состояли из семи ступеней; египтяне говорили о семи вратах в загробный мир; в колесницу ведического бога Солнца было запряжено семь лошадей, а мусульмане должны обойти Каабу семь раз во время хаджа. Даже в наши дни основной ритм жизни подчиняется семидневным циклам, поскольку неделя состоит из семи дней.

Время — это первое, что начал считать человек. Мы выреза́ли зазубрины на палках и рисовали линии на скалах, отмечая уходящие дни. Первые календари были привязаны к астрономическим явлениям, таким как смена фаз Луны, а это означало, что количество дней в каждом календарном цикле варьировалось между 29–30 днями, поскольку точная средняя продолжительность лунного месяца составляет 29,53 дня. Однако примерно в середине первого тысячелетия до нашей эры иудеи применили новую систему [22]. Они ввели шабат — день отдыха, наступающий один раз в семь дней, и так до бесконечности, независимо от положения планет. Непрерывный семидневный цикл оказался для человечества огромным шагом вперед. Он освободил нас от необходимости постоянно согласовывать свои действия с природой

* *Адамс Д.* Жизнь, Вселенная и все остальное. М. : АСТ: Ермак, 2003.

и сделал регулярность основой религиозной практики и социальной организации. Семидневная неделя стала самой стойкой календарной традицией.

Но почему в неделе именно *семь* дней? Число семь приобрело мистическое значение задолго до заявления иудеев о том, что Богу понадобилось шесть дней на сотворение мира, а на седьмой день он отдыхал. Более ранние народы также использовали в своих календарях семидневные периоды, но у них они не повторялись на протяжении бесконечного цикла. Самое распространенное объяснение преобладания числа семь в религиозном контексте сводится к тому, что древние видели на небе семь небесных тел: Солнце, Луну, Венеру, Меркурий, Марс, Юпитер и Сатурн, которые, например в английском языке, послужили причиной названия трех дней: Saturday — день Сатурна (суббота), Sunday — день Солнца (воскресенье), Monday — день Луны (понедельник). Ассоциативная связь между планетами и днями недели восходит к эллинским временам, но, как это ни парадоксально, именно в иудейской неделе (первой календарной системе, разорвавшей связь между движением небесных тел и отсчетом дней) семь дней недели были названы по именам планет. Возможно, потому что эта астрологическая зависимость делала такую неделю более жизнеспособной по сравнению с конкурирующими календарными системами. Некоторые историки утверждают, что выбор семидневного периода обусловлен тем, что семь — это примерно четверть лунного месяца (29,53 дня). Но если бы дело было только в кратности, более точный календарь состоял бы из пяти недель по шесть дней, шести недель по пять дней или даже трех недель по десять дней.

Египтяне использовали для обозначения числа семь иероглиф, изображающий голову человека  , что выдвигает еще одну возможную причину символической значимости этого числа: в человеческом черепе семь отверстий — для ушей, глаз, ноздрей и рта [23]. В физиологии человека можно найти и другие объяснения: по всей вероятности, шесть дней — это оптимальная продолжительность периода, в течение которого человек может работать, прежде чем у него возникнет потребность в отдыхе; кроме того, семидневная неделя может быть наиболее приемлемым временны́м промежутком для нашей кратковременной памяти, поскольку обычный человек способен одновременно удерживать в памяти семь объектов (плюс-минус два).

Я не считаю достаточно убедительной ни одну из вышеперечисленных гипотез, даже если это результат счастливого совпадения. Уникальность числа семь объясняется не планетами, орбитами или отверстиями в черепе, а простой арифметикой. Число семь отличается от остальных чисел первой десятки тем, что оно единственное, которое нельзя удвоить, оставаясь в пределах первой десятки чисел, или разделить на какое-либо число из этой группы (числа 1, 2, 3, 4 и 5 можно удвоить, не выходя за пределы группы; числа 6, 8 и 10 делятся на два, а число 9 — на три). Неудивительно, что оно вызывает особые чувства — ведь оно действительно особенное!

Психологи изучают причины уникальности числа 7 на протяжении вот уже нескольких десятилетий [24]. Когда людей просят назвать число, не задумываясь, они чаще всего называют семерку, а при выборе числа в диапазоне от 1 до 20 зачастую отдают предпочтение числу 17. Подсознательное пристрастие к числам, заканчивающимся на 7, лежит в основе классического трюка, когда иллюзионист предлагает одному из добровольцев загадать двузначное нечетное число от 1 до 50, состоящее из разных цифр (например, 15 можно выбрать, а 11 — нельзя), а затем угадывает его (не читайте примечание, пока сами не загадаете число) [25]. Психологи Майкл Кубови и Джозеф Псотка утверждают, что если участников эксперимента попросить назвать случайную цифру, они отсеивают числа, кажущиеся им слишком непроизвольными, — четные числа; числа, кратные трем, а также числа с цифрами 0, 1 и 5 в начале или посредине последовательности цифр. Семь — самое особенное число: оно нечетное, некруглое и простое.

Любимое число отражает уникальные качества человека. И в этом смысле лучше числа, чем семь, нет.

Числа выражают *количество*. Тем не менее участники моего интернет-опроса во многих случаях приписывали им различные *качества*, в частности цвет. Первым таким числом стала четверка (58 голосов), причем самая большая группа опрашиваемых (17) приписывала ей голубой цвет. Следующее место заняла семерка (28 голосов) — у многих респондентов (9) она ассоциировалась с зеленым цветом. На третьем месте оказалось число пять (27 респондентов), его большинство участников (9) посчитали красным. Способность видеть цвет в числах — это проявление синестезии, состояния, при наличии которого определенные концепции вызывают у человека атипичную реакцию, обусловленного формированием нетипичных связей между различными отделами головного мозга.

Кроме того, участники опроса называли различные числа теплыми, шероховатыми, огорченными, безмятежными, самонадеянными, колоритными, спокойными и примитивными. Каждая из этих характеристик в отдельности кажется нелепой, но их совокупность образует на удивление целостную картину индивидуальности чисел. Ниже представлен список чисел от 1 до 13 вместе со словами, которые респонденты использовали для их описания.

Один	Независимое, сильное, честное, храброе, понятное, одинокое
Два	Осмотрительное, мудрое, красивое, ранимое, открытое, доброжелательное, спокойное, чистое, гибкое
Три	Динамичное, теплое, дружелюбное, коммуникабельное, напыщенное, мягкое, раскованное, претенциозное
Четыре	Вальяжное, нестандартное, основательное, надежное, многогранное, прагматичное, представительное
Пять	Уравновешенное, важное, остроумное, толстое, властное (но не слишком), счастливое
Шесть	Жизнерадостное, чувственное, уступчивое, мягкое, сильное, храброе, искреннее, смелое, скромное
Семь	Магическое, непреложное, умное, неуклюжее, самонадеянное, мужественное
Восемь	Мягкое, женственное, доброе, рассудительное, упитанное, основательное, чувственное, притягательное, одаренное
Девять	Спокойное, ненавязчивое, беспощадное, не имеющее принадлежности к какому-либо полу, профессиональное, мягкое, великодушное
Десять	Прагматичное, логичное, опрятное, обнадеживающее, честное, выносливое, простодушное, рассудительное
Одиннадцать	Вероломное, способное подражать звукам, благородное, мудрое, простодушное, дерзкое, выносливое, элегантное
Двенадцать	Податливое, героическое, величественное, крепкое, покладистое, бесконфликтное
Тринадцать	Неуклюжее, неустойчивое, творческое, честное, загадочное, нелюбимое, «темная лошадка»

Не нужно быть голливудским сценаристом, чтобы распределить роли так: мистер Один — отличный романтический персонаж, мисс Двойка — классическая главная героиня. Хотя этот список кажется нелепым, все же в нем есть определенный смысл. Кроме того, в нем видны прочно укоренившиеся ассоциации единицы с мужскими качествами, а двойки — с женскими.

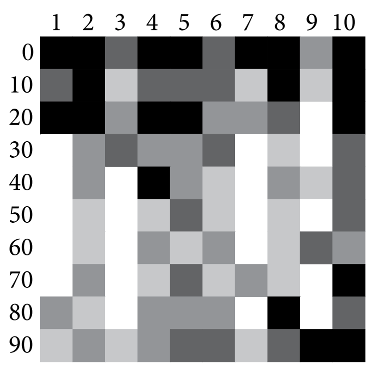
Участие в интернет-опросе было абсолютно добровольным, а это значит, что большинство респондентов испытывали сильную эмоциональную привязанность к тем или иным числам. Ну а что же можно сказать обо всех остальных?

Возьмем в качестве примера число 44.

Вам оно нравится? Не нравится? Вы к нему равнодушны?

Дэн Кинг и Крис Янишевски, с которыми мы уже встречались во время обсуждения шампуня Zinc 24, провели эксперимент, в ходе которого респонденты должны были высказать свое отношение к каждому числу от 1 до 100: нравится им оно, не нравится, или они не испытывают к нему никаких эмоций [26]. Затем был составлен рейтинг чисел этой группы в порядке снижения их популярности.

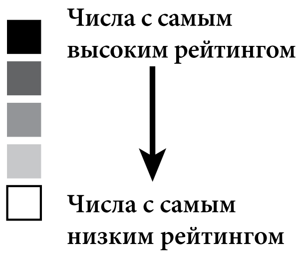
Как показали результаты эксперимента, такую постановку вопроса нельзя считать неуместной. Наши симпатии по отношению к числам подчиняются четкой закономерности, что прекрасно видно на теплокарте, где числа от 1 до 100 представлены квадратами. (В верхнем ряду квадратов сетки находятся числа от 1 до 10, во втором ряду — от 11 до 20 и т. д.) Черными квадратами обозначены числа, получившие наибольшее количество голосов (первые двадцать позиций в рейтинге); белыми — «самые нелюбимые» числа (последние двадцать позиций в рейтинге); числа с промежуточными результатами представлены квадратами разных оттенков серого.

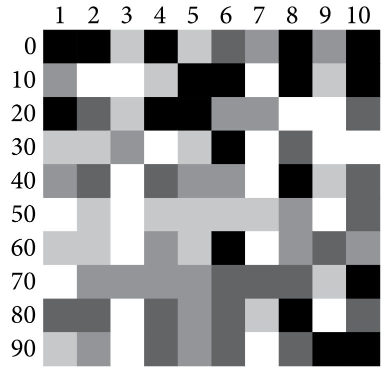


На этой теплокарте прослеживаются четкие тенденции. Черные квадраты сосредоточены главным образом в верхней части сетки, а это говорит о том, что в среднем люди отдают предпочтение небольшим числам. Диагональ с наклоном влево показывает, что двузначные числа с двумя одинаковыми цифрами тоже вызывают у людей симпатии: мы любим закономерности. Однако самое удивительное то, что четыре белых столбца свидетельствуют о непопулярности чисел, заканчивающихся на 1, 3, 7 и 9. Как уже упоминалось выше, Кинг и Янишевски считают, что числа, представляющие собой результат простых арифметических операций (например, числа, которые встречаются в таблице умножения), более узнаваемы и легче обрабатываются мозгом, поэтому они больше нравятся людям. *Все без исключения* четные числа и числа, заканчивающиеся на 5, делятся без остатка, тогда как многие числа, заканчивающиеся на 1, 3, 7 и 9, ни на что не делятся.

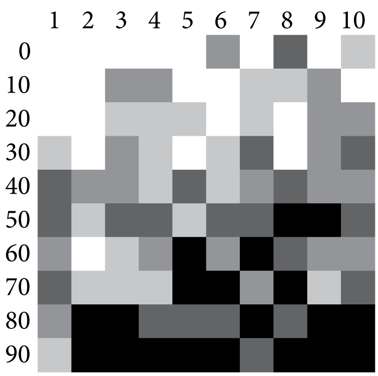
В ходе аналогичного исследования Маришка Миликовски из Амстердамского университета предложила участникам оценить числа от 1 до 100 по трем критериям: хорошие — плохие, тяжелые — легкие, возбудимые — спокойные [27]. Когда опрашиваемых попросили спроецировать на числа те или иные свойства, не имеющие отношения к математике, ответы и на этот раз оказались на удивление обоснованными. Я представил результаты данного эксперимента в виде теплокарт.

Здесь тоже отчетливо видны определенные закономерности. Белые столбцы сетки «Хорошие — плохие числа» показывают, что респонденты считают самыми плохими числа, заканчивающиеся на 3, 7 и 9, — что неудивительно, поскольку мы уже убедились, что такие числа нравятся людям меньше всего. В случае оценки по шкале «Тяжелые — легкие числа» основная масса черных квадратов сосредоточена в нижней части сетки; это говорит о том, что чем больше число, тем более тяжелым оно кажется. В сетке «Возбудимые — спокойные числа» закономерность не сразу бросается в глаза, но если присмотреться внимательно, то становится очевидным, что столбцы, соответствующие нечетным числам, гораздо темнее столбцов с четными числами. Следовательно, нечетные числа считаются возбудимыми, тогда как четные — спокойными. Мы легко проецируем на числа нематематические свойства, отображающие количественные характеристики чисел, особенно их величину и кратность.

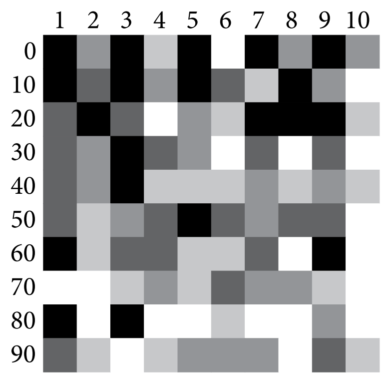




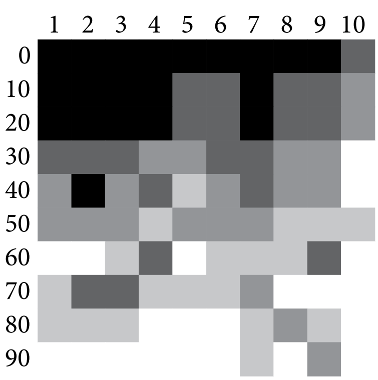
Хорошие — плохие числа



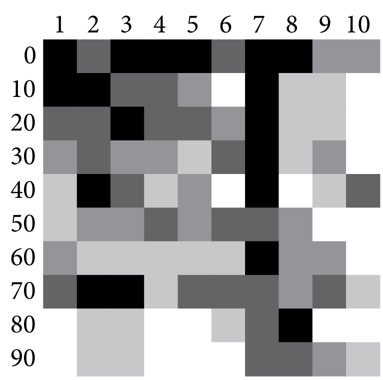
Тяжелые — легкие числа



Возбудимые — спокойные числа



Самые любимые числа



Произвольно выбранные числа

Сетка, расположенная в левом нижнем углу, — это теплокарта рейтинга чисел, составленного по результатам интернет-опроса, на которой 20 самых популярных чисел представлены черными квадратами и т. д. Сетка, находящаяся в правом нижнем углу, отображает результаты еще одного интернет-опроса, в ходе которого я предложил участникам в произвольном порядке выбрать число от 1 до 100. Здесь двадцать самых популярных чисел тоже представлены черными квадратами. Интересно, что эти две теплокарты очень похожи друг на друга: когда нас просят назвать понравившееся число, а также первое число, пришедшее нам в голову, мы склонны называть одни и те же числа. Как ни странно, в большинстве случаев наши любимые числа не совпадают с числами, которые нам нравятся или которые мы считаем самыми хорошими. Симпатия и *любовь* — разные вещи.

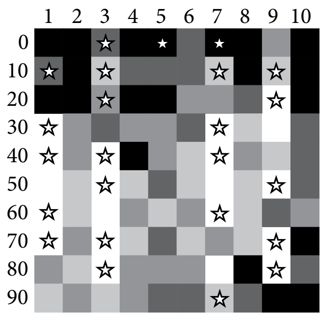
Эти теплокарты сразу же напомнили мне о Джерри Ньюпорте — чемпионе мира по устному счету и бывшем таксисте, с которым я встречался в Аризоне. Джерри рассказывал, что когда он видит четырех- или пятизначное число, то сразу же «отсеивает» простые числа. Другими словами, сначала Джерри определяет, делится ли это число на 2, затем на 3, а потом на 5, 7, 11 и т. д., чтобы найти его простые делители.

Например:

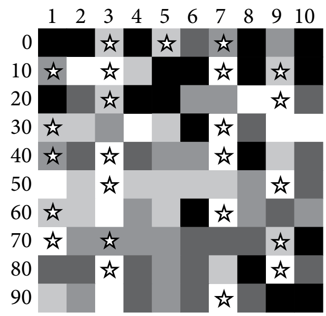
$2761 = 11 \times 251$
$2762 = 2 \times 1381$
$2763 = 3 \times 3 \times 307$

Благодаря этим теплокартам я понял, что мы действительно отсеиваем простые числа. Ниже представлены те же теплокарты, но в них простые числа отмечены звездочками. Они и впрямь похожи на решето! В теплокартах «Самые любимые числа» и «Хорошие — плохие числа» простые числа почти всегда попадают в белые квадраты, как будто проваливаются через отверстия в металлической сетке. Напротив, в теплокартах «Возбудимые — спокойные числа», «Самые любимые числа» и «Произвольно выбранные числа» простые числа обозначены черными и серыми квадратами. Эти сетки напоминают решето, предназначенное для вылавливания простых чисел. Следовательно, простые числа — это очень важный элемент внутренних представлений о числах, причем не только для таких гениев, как Джерри Ньюпорт, но и для всех нас. Наш мозг всегда настроен на восприятие арифметических истин.

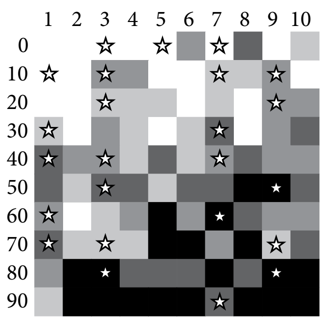
Числа атакуют нас постоянно. Они взывают к нам с часов, телефонов, газетных страниц, компьютерных мониторов, дорожных знаков, этикеток, автобусных остановок, адресов, номерных знаков, рекламных щитов, книг и постоянно воздействуют на наши нейроны. Внимательно присмотревшись к ним, мы обнаруживаем удивительные закономерности.



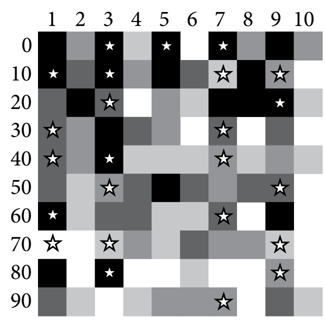
Числа, которые нравятся больше всего



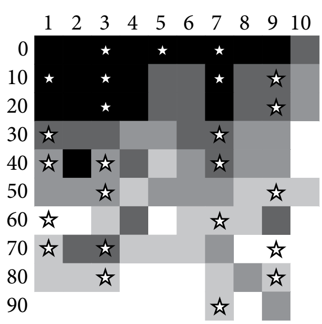
Хорошие — плохие числа



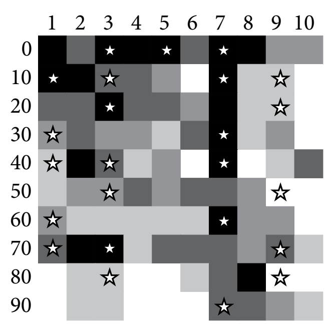
Тяжелые — легкие числа



Возбудимые — спокойные числа



Самые любимые числа



Произвольно выбранные числа

Теплокарты, на которых простые числа отмечены звездочками

Длинный хвост закона 2

В 1085 году Вильгельм Завоеватель приказал провести в Англии перепись. Он хотел знать, сколько людей живет на его землях, кто эти люди, какое у них имущество, какой доход они получают и, что самое главное, какие налоги должны платить. Он разослал своих представителей по всему королевству, и его приказ был выполнен настолько тщательно, что в летописи Anglo-Saxon Chronicle («Англосаксонские хроники») появилась запись: «Ни одного быка, ни одной коровы и ни одной свиньи не осталось неучтенной».

Книга с результатами этой переписи известна под названием Doomsday Book («Книга Судного дня»). Это самый ранний источник сведений о населении Англии, первый в западном мире крупный сборник статистических данных и настоящая находка для историков, специалистов по генеалогии и лексикографов. Движимый желанием узнать, скрыты ли в этой книге математические тайны, я приступил к изучению первого раздела, посвященного графству Кент [1].

В самом начале говорилось о том, что город Дувр заплатил 18 фунтов налога, из которых две части ушло королю Эдуарду, а третья — графу Гудвину. Жители Дувра дали королю 20 кораблей на 15 дней с экипажем в количестве 21 человека на каждом судне.

Поскольку меня интересовали исключительно числа, я выделил из этого абзаца следующий список: 18, 2, 20, 15 и 21 — и мне сразу же кое-что бросилось в глаза. Посмотрите на *первую цифру* каждого числа: 1, 2, 2, 1 и 2. Только единицы и двойки, самые маленькие цифры. Любопытно, не правда ли? По всей вероятности, да. Но все же выборка была слишком мала, чтобы делать какие-то выводы. Я прочитал книгу до конца, отмечая первые цифры каждого числа, которое мне встречалось. Преобладание единиц и двоек наблюдалось по всей книге. Да, тройки, четверки и другие цифры тоже присутствовали, но гораздо реже. Я был просто поражен тем, насколько чаще числа начинаются с маленьких цифр, чем с больших.

Я насчитал уже 182 числа, когда мне впервые попалась на глаза девятка. Она обозначала количество крестьян, подчинявшихся Вульфстану, сыну Вульфвина из Шепердсуэлла. К тому времени я насчитал 53 числа, начинающихся с цифры 1, 22 — с цифры 2, 18 — с цифры 3 и 15 — с цифры 4. Посмотрите на эти числа еще раз: в них тоже прослеживается четкая закономерность. Числа с цифрой 1 в начале встречаются чаще, чем с цифрой 2, последняя, в свою очередь, чаще, чем с цифрой 3, и т. д., вплоть до чисел с цифрой 9 в начале, которых меньше всего.

Мне было понятно, почему единица попадалась так часто. Королевские посланцы, проводившие перепись, переходили от одного жилища к другому, пересчитывая людей, домашний скот и инвентарь. В хозяйствах, которые вспахивали свои земли, было, как правило, по одному плугу — отсюда и такая высокая повторяемость единицы. Однако это не объясняло невероятно устойчивого снижения частотности чисел по мере увеличения их первых цифр, особенно когда этими числами обозначались самые разные объекты в самых разных количествах — например, 40 000 сельдей, подаренных монахам в Кентербери, или 27 соляных приисков в Милтон-Реджисе.

Возможно, это свойственно только тем давним временам. Я закрыл «Книгу Судного дня» и перенес свои исследования на 800 лет вперед, оказавшись в Лондоне викторианской эпохи.

Двенадцатого марта 1881 года на первой странице газеты The Times были опубликованы такие объявления: владелец 25-тонной шхуны ищет джентльмена, который согласится отправиться вместе с ним в южные моря; временный приют для бездомных собак в Баттерси приглашает людей, желающих купить домашнее животное, посмотреть 500–700 своих обитателей; Сэмюел Брэндрем сообщает, что его шекспировские чтения состоятся в четверг, в 3 часа дня, по адресу Старая Бонд-стрит, 33 — забронировать места можно за 5 шиллингов.

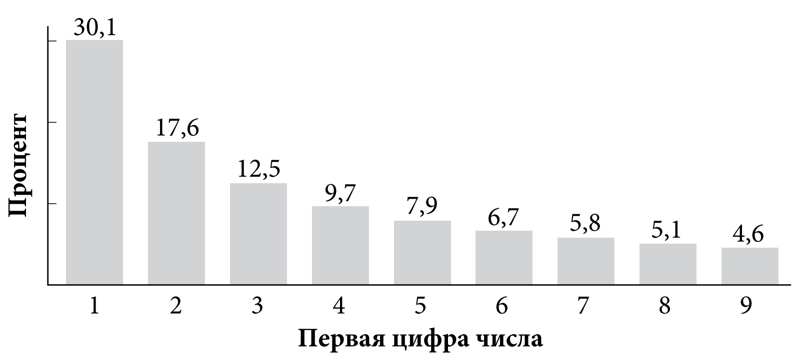
Я подсчитал частотность первых цифр (также именуемых *ведущими цифрами*) во всех числах, которые нашел на первой полосе The Times. Числа с цифрой 1 в начале и на сей раз встречались чаще всего, в отличие от цифры 9, занимавшей в этом рейтинге последнюю позицию. Хотя жизнь в XIX столетии существенно отличалась от жизни в XI веке, первые цифры чисел, отражавших социальную статистику, вели себя практически одинаково.

Такую же закономерность можно найти на страницах любой современной прессы. Попробуйте сделать это сами! Этот простой трюк можно показывать на вечеринке; его также любят демонстрировать фокусники в пабах. Посчитайте первые цифры — и увидите, что их частотность неизменно снижается: числа, начинающиеся с цифры 1, встречаются чаще всего; затем следуют числа, первая цифра которых 2, потом 3 — и т. д. до цифры 9, которая используется в начале чисел реже всего.

Это действительно невероятно. Большинство людей просто не поверят вам, пока вы не подсчитаете цифры. На интуитивном уровне нам кажется, что числа, указанные в газетах, не могут вести себя столь упорядоченно, особенно учитывая тот факт, что они произвольно взяты из огромного количества самых разных источников. Тем не менее, о каких бы числах ни шла речь — о результатах спортивных соревнований, ценах акций или количестве погибших, — уверяю вас: цифра 1 в начале чисел будет встречаться чаще, а цифра 9 — реже всего.

Этот вывод представляется нам несколько неожиданным, так как мы интуитивно предполагаем, что все числа имеют равные шансы на появление. Безусловно, если поместить в ящик 999 шариков для пинг-понга, пронумерованных от 1 до 999, и извлекать их в произвольном порядке, то вероятность выбора любого числа с определенной цифрой в начале составляет одну девятую, или 11 процентов. Другими словами, у всех цифр в этом случае одинаковые перспективы. Однако очевидно и то, что в газетах первые цифры чисел ведут себя абсолютно иначе: они распределены по явно выраженному асимметричному закону.

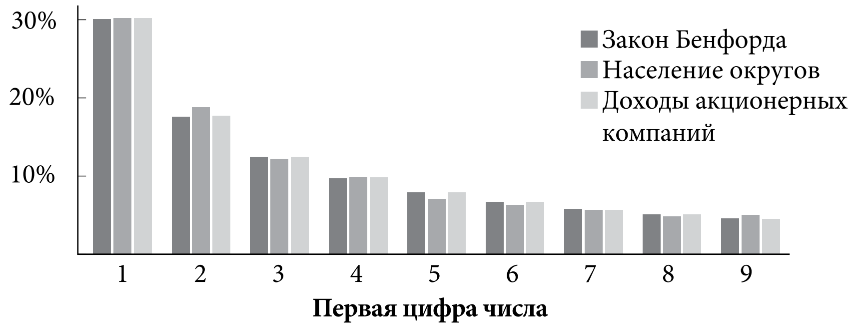
Тенденцию к преобладанию чисел, начинающихся с единицы, впервые заметил американский астроном канадского происхождения Саймон Ньюком [2]. В 1881 году он опубликовал в журнале American Journal of Mathematics краткую заметку, в которой объяснял, что выявил данную особенность благодаря книгам с логарифмическими таблицами. Первые страницы с таблицами логарифмов для чисел, начинающихся с цифры 1, всегда были более истрепаны, чем страницы с таблицами для чисел, начинающихся с цифры 9. Подобный феномен уж точно не объяснишь тем, что исследователи якобы внимательно читали первые страницы книги, а затем теряли к ней интерес из-за отсутствия захватывающего сюжета. Здесь причина в другом: они чаще сталкивались в работе с числами, начинающимися с единицы. Ньюком предположил, что частотность первых цифр чисел, выраженная в процентах, примерно такова.



Частота наличия цифры 1 в начале чисел составляет 30,1 процента, цифры 2 — 17,6 процента, цифры 3 — 12,5 процента, причем этот показатель стремительно падает по мере увеличения цифры: шанс встретить цифру 1 в начале чисел в семь раз превышает подобную вероятность по отношению к цифре 9.

Ньюком рассчитал эти показатели с помощью логарифмов. Он утверждал, что вероятность появления цифры d в начале числа определяется по формуле: $\log(d + 1) - \log d$. (В Приложении 1 я объясню ее суть.) Однако он не смог четко обосновать ее, поэтому привел вместо этого неформальный аргумент, просто представив его как некую любопытную тенденцию.

Более чем полвека спустя, в 1938 году, физик из General Electric Фрэнк Бенфорд заново открыл феномен первой цифры, тоже обратив внимание на потрепанность страниц в книгах с таблицами логарифмов (по всей вероятности, он не знал о статье Ньюкома) [3]. Однако Бенфорд проанализировал эту закономерность не только на основании книг с логарифмами. Он изучил распределение первых цифр исходя из таких данных, как население городов США, адреса первых нескольких сотен людей из биографического справочника американских ученых American Men of Science, атомный вес химических элементов, площадь бассейна рек и статистика бейсбольных матчей. В большинстве случаев результаты были близки к ожидаемому распределению. Наверное, было очень интересно наблюдать за тем, как одна и та же последовательность возникает в самых разных ситуациях. Разумеется, полученные показатели не были в точности такими, как представленные выше проценты (в реальном мире подобной точности нет). Тем не менее в целом они почти полностью совпадали с прогнозируемыми значениями, отклоняясь от них не более чем на несколько десятых процента. В настоящее время закон Бенфорда нашел свое подтверждение в самых разных областях, в том числе в естествознании, финансах, экономике и вычислительной технике. Этот закон гласит: в любом множестве данных о естественных произвольных процессах, включающем в себя величины нескольких порядков, частота появления цифры 1 в качестве первой значащей цифры составляет около 30 процентов, цифры 2 — около 18 процентов и т. д. Бенфорд считал, что этот феномен отражает универсальный закон, который он обозначил термином «закон аномальных чисел». Но термин не прижился, и открытие получило известность под названием «закон Бенфорда».



Закону Бенфорда подчиняется большинство множеств данных, взятых из реальной жизни, например численность населения в 3221 округе США и совокупный квартальный доход 30 525 открытых акционерных компаний за период с 1961 по 2011 год [4].

Закон Бенфорда — одна из самых замечательных числовых закономерностей, существующих в мире. Чуть ниже я остановлюсь на некоторых других, но, прежде чем перейти к ним, мы должны провести одно расследование.

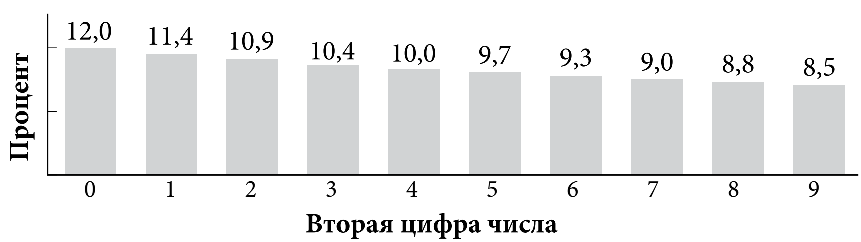
Даррелл Доррелл напоминал мне медведя. Эта ассоциация отчасти объяснялась тем, что мы с ним встретились в Портленде, столице штата Орегон, в котором водится много медведей, и частично тем, что Даррелл был мужчиной коренастого телосложения, с торчащими усами и низким голосом, смахивающим на тихое рычание. Кроме того, ассоциация была связана с его работой финансового следователя. Даррелл вынюхивает искаженные данные с хищническим инстинктом гризли, добывающего себе пищу. Вам лучше не допускать его к своим бухгалтерским книгам, если в них есть хотя бы малейший намек на злоупотребления. ЦРУ, Министерство юстиции и Комиссия по ценным бумагам и биржам регулярно пользовались его услугами в области судебно-бухгалтерской экспертизы (этим отраслевым термином обозначается расследование финансовых махинаций). У Даррелла есть лицензия на ношение оружия. «Все двери здесь закрываются изнутри, — объяснял он. — Мы вызываем у многих людей недовольство».

Когда в начале тысячелетия Даррелл впервые услышал о законе Бенфорда, он испытал примерно те же эмоции, что и люди, пережившие большую утрату: удивление, отрицание, гнев и принятие. «Сначала у меня возникла мысль: “Почему я не слышал об этом раньше?” Затем я подумал: “Этого просто не может быть!” А когда в конце концов понял суть этого закона, на меня снизошло озарение: “Вот это да! Ведь это еще один инструмент, который можно использовать”». Теперь в ходе расследования финансовых махинаций Даррелл прежде всего проверяет первые цифры номеров банковских счетов и данных в бухгалтерских книгах компаний. Финансовые данные, включающие в себя величины нескольких порядков (другими словами, которые отражают количество, измеряемое в единицах продукции или в десятках, сотнях и тысячах долларов), должны подчиняться закону Бенфорда. Если этого не происходит, значит, либо существует обоснованное объяснение (например, регулярная закупка товаров стоимостью, скажем, 40 долларов за единицу, которая влечет за собой повышение вероятности появления цифры 4), либо имеют место преступные действия. Отклонение от закона Бенфорда — это признак того, что соответствующие финансовые данные требуют более тщательного анализа.

Даррелл показал на висевшую на стене рамку, в которую была помещена первая страница газеты со статьей о вынесении приговора Уэсли Родсу — местному финансовому консультанту, укравшему у инвесторов миллионы долларов, чтобы покупать на эти деньги классические модели автомобилей. «Закон Бенфорда помог нам привлечь его к ответственности», — сообщил Даррелл. Отчеты, которые Родс отправлял инвесторам, не прошли проверку на соответствие закону первой цифры, а это означало, что что-то с ними не так. Проанализировав отчеты более внимательно, Даррелл обнаружил, что Родс сфальсифицировал данные. Теперь Даррелл характеризует закон Бенфорда так: «Это ДНК количественного исследования, исходное предположение о том, как работают цифры. И, как я уже неоднократно объяснял в суде, хорошо то, что здесь речь идет о науке. Открытие Бенфорда — не теория. Это *закон*».

Метод анализа чисел на предмет их соответствия закону Бенфорда все чаще используется для выявления манипуляций с данными, причем не только в контексте финансовых махинаций, но и во всех тех случаях, к которым этот закон применим. В 2006 году Скотт де Марчи и Джеймс Гамильтон из Университета Дьюка написали, что предоставленные промышленными предприятиями сведения об уровне выброса свинца и азотной кислоты не удовлетворяют закону Бенфорда, а это говорит о вероятности искажения информации [5]. На основании закона Бенфорда политолог Мичиганского университета Уолтер Мибейн заявил о возможной фальсификации результатов президентских выборов в Иране. Мибейн проанализировал все протоколы голосования и обнаружил существенные расхождения в количестве голосов за Махмуда Ахмадинежада с законом Бенфорда, тогда как в результатах его соперника, сторонника реформ Мир-Хосейна Мусави, никаких отклонений от этого закона не наблюдалось. «Самое простое объяснение, — писал Мибейн, — состоит в том, что в результаты Ахмадинежада были искусственным образом включены дополнительные голоса, тогда как результаты Мусави остались нетронутыми». Ученые используют закон Бенфорда и в качестве инструмента диагностики. Так, во время землетрясений верхние и нижние значения показаний сейсмографа подчиняются данному закону. Малколм Сэмбридж из Австралийского национального университета проанализировал две разные сейсмограммы, на которых было зафиксировано землетрясение в Индонезии в 2004 году, — одна была записана в Перу, а другая в Австралии. Данные, отображенные на первой сейсмограмме, полностью соответствовали закону Бенфорда, тогда как на второй имели место небольшие отклонения. Сэмбридж объяснил это тем, что в районе Канберры могло произойти незначительное сейсмическое возмущение. Так проверка данных на соответствие закону первой цифры позволила выявить землетрясение, которое осталось незамеченным.

Цифра 1 встречается чаще цифры 2 не только на первой, но и на второй, третьей, четвертой и фактически любой позиции в записи числа. На представленном ниже рисунке продемонстрирована частотность вторых цифр в процентном выражении (среди которых есть теперь и цифра 0). Различия между этими показателями не столь ощутимы, как в случае первых цифр, но их все же можно использовать в целях диагностики, скажем в процессе анализа финансовых данных и результатов выборов. По мере продвижения к следующим позициям данные о частоте появления цифр стремятся к одному значению. Следовательно, закон Бенфорда касается не только первых цифр. В мире действительно *гораздо* больше единиц!



В суде Доррелла часто просят обосновать закон Бенфорда. В таких случаях Даррелл становится перед лекционной доской и начинает считать от единицы и далее, записывая названные цифры. При этом он чувствует себя школьным учителем, проводящим урок математики. «Это просто выводит из себя судью и адвоката», — иронизирует он.

Мы можем сделать то же самое. Вот числа от 1 до 20:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20

Больше половины этих чисел начинаются с цифры 1, поскольку от 11 до 19 все числа начинаются с единицы. Продолжаем считать. Где бы мы ни остановились, чисел с первой цифрой 1 будет не меньше, чем чисел с первой цифрой 2, поскольку для того, чтобы добраться до второго десятка, второй сотни или второй тысячи, необходимо назвать все числа первого десятка, первой сотни и первой тысячи. Точно так же чисел с первой цифрой 2 будет не меньше, чем чисел с первой цифрой 3 и т. д., вплоть до чисел с первой цифрой 9. Такое обоснование помогает понять закон Бенфорда на интуитивном уровне, и его вполне достаточно для суда как государственного органа, а вот для суда математики требуется более строгое доказательство.

Одно из самых поразительных свойств закона Бенфорда — что последовательность цифр не зависит от единицы измерения. Когда массив финансовых данных подчиняется закону Бенфорда в случае, если они выражены в фунтах, он будет подчиняться этому закону и после их конвертации в доллары. Если массив географических данных соответствует закону Бенфорда в километрах, он будет соответствовать ему и в случае их представления в милях. Это свойство, обозначаемое термином «*масштабная инвариантность*», верно всегда, поскольку числа, взятые из газет, банковских счетов и атласов мира показывают одно и то же распределение первых цифр независимо от используемых систем измерения и валюты.

Для перевода расстояния из миль в километры необходимо умножить его на 1,6; для конвертации денежной суммы из фунтов в доллары ее тоже следует умножить на фиксированное число, соответствующее текущему обменному курсу. Простейший способ понять масштабную инвариантность закона Бенфорда сводится к анализу поведения чисел в случае их умножения на два. Если число, начинающееся с цифры 1, умножить на 2, результат будет начинаться с цифры 2 или 3. (Например, 12 × 2 = 24; 166 × 2 = 332.) Если число, начинающееся с цифры 2, умножить на 2, первой цифрой произведения будет 4 или 5. (Например, 2,1 × 2 = 4,2; 25 × 2 = 50.) Первые две строки представленной ниже таблицы показывают, что происходит с первой цифрой числа в случае его умножения на два.

Первая цифра числа *n*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Первая цифра числа 2*n*	2 или 3	4 или 5	6 или 7	8 или 9	1	1	1	1	1
Процент чисел в распределении Бенфорда	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6

Предположим, S — это массив данных, подчиняющихся закону Бенфорда. Давайте умножим на два каждое число, входящее в массив S, и обозначим новый массив чисел буквой T. Согласно таблице, числа из массива S, начинающиеся с цифры 5, составляют 7,9 процента от общего количества чисел в массиве; числа, первая цифра которых 6, — 6,7 процента, 7, 8 и 9 — 5,8; 5,1 и 4,6 процента соответственно. Следовательно, в массиве S доля чисел, начинающихся с 5, 6, 7, 8 или 9, равна 7,9 + 6,7 + 5,8 + 5,1 + 4,6 = 30,1 процента. Если числа, первая цифра которых 5, 6, 7, 8 или 9, умножить на два, произведение всегда будет начинаться с цифры 1, как показано в таблице. Другими словами, 30,1 процента чисел в массиве T начинается с цифры 1, что соответствует закону Бенфорда!

Данная закономерность имеет место и в случае других цифр. Умножение на 2 сначала нарушает, а затем восстанавливает действие закона Бенфорда, но распределение первых цифр при этом сохраняется. Я выбрал умножение на 2, поскольку это самый простой множитель, но с таким же успехом можно было бы взять в качестве множителя 3, или 1,6, или число π, или какое-либо еще — закон Бенфорда действовал бы, так или иначе. Под любое изменение масштаба распределение Бенфорда перенастраивается, как будто это делает рука самого Бога.

В течение нескольких десятилетий после открытия закона Бенфорда он считался не более чем аномалией, трюком из шоу иллюзионистов, нумерологией, но никак не математикой. Однако в 90-х годах XX столетия профессор Технологического института штата Джорджия Тед Хилл решил найти теоретическое обоснование распространенности этого закона. Сейчас ученый живет в городе Лос-Осос; это чуть дальше вдоль побережья Тихого океана от того места, где обосновался Даррелл Доррелл. Тед — бывший солдат, высокий, широкоплечий стройный мужчина с бритой головой и седыми усами, сохранивший армейскую выправку. Когда я приехал к нему, он повел меня в небольшой деревянный домик в конце сада, из окон которого открывался вид на океан и два национальных парка. В камине потрескивали дрова. Тед назвал этот домик «математической дачей». Это глобальный центр исследования закона Бенфорда.

Первый серьезный результат, полученный Тедом Хиллом, — это доказательство того, что при существовании некой универсальной закономерности распределения первых цифр оно подчиняется исключительно закону Бенфорда. То есть распределение первых цифр по Бенфорду — единственное, которое не меняется в случае изменения масштаба. Этот вывод позволил Теду изобрести игру, в которую мы с ним сыграли.

«Каждый из нас выбирает число, — объяснил мне Тед. — Затем мы их перемножаем. Если произведение начинается с цифры 1, 2 или 3, значит, выигрываю я; если с цифры 4, 5, 6, 7, 8 или 9 — то вы».

На первый взгляд может показаться, что в этой игре явный перевес в мою пользу, поскольку в моем распоряжении шесть цифр, тогда как у Теда — всего три. Тем не менее в большинстве случаев Тед будет выигрывать, выбирая числа в соответствии с распределением Бенфорда, другими словами — если на протяжении нескольких игр он будет выбирать числа, начинающиеся с цифры 1, — то в 30,1 процента случаев, цифру 2 — в 17,6 процента случаев и т. д. Если Тед будет действовать таким образом, от выбранного мной числа не зависит, какая цифра окажется первой: в 30,1 процента случаев это будет цифра 1, в 17,6 процента случаев — цифра 2, в 12,5 процента случаев — цифра 3. Сумма этих трех показателей составляет 60,2 процента; следовательно, Тед выиграет в 60,2 процента случаев. В эту игру хорошо играть на деньги: даже если в вашем распоряжении только 1, 2 и 3 в качестве целевых цифр, ваши шансы на победу гораздо выше, чем в случае цифр 4, 5, 6, 7, 8 и 9, хотя поначалу кажется, что это не так.

Эта игра помогает объяснить, почему многие массивы данных, формирующиеся естественным образом, подчиняются закону Бенфорда. Предположим, мы с Тедом сыграли в эту игру сто раз; у него были числа (a_1, a_2, a_3 … a_{100}), а у меня — числа (b_1, b_2, b_3 … b_{100}). Мы знаем, что если числа Теда удовлетворяют закону Бенфорда, то результат умножения его чисел на мои ($a_1 \times b_1$, $a_2 \times b_2$, $a_3 \times b_3$ … $a_{100} \times b_{100}$) также подчиняется этому закону. Следовательно, если мы умножим эти числа на еще один набор случайно выбранных чисел (c_1, c_2, c_3 … c_{100}), для того чтобы получить еще один массив чисел ($a_1 \times b_1 \times c_1$, $a_2 \times b_2 \times c_2$, $a_3 \times b_3 \times c_3$ … $a_{100} \times b_{100} \times c_{100}$), этот массив тоже будет соответствовать закону Бенфорда. Дело в том, что, сколько бы массивов данных мы ни умножали друг на друга, достаточно, чтобы хотя бы один из них удовлетворял закону Бенфорда, для того чтобы этому закону подчинялся и массив результатов умножения. Другими словами, закон Бенфорда настолько заразителен, что наличие в мультипликативной цепочке единственного массива данных, удовлетворяющего ему, влияет на общий результат. Поскольку многие явления (такие как цены акций, численность населения, длина рек и т. д.) формируются под воздействием повышения или снижения различных показателей, обусловленного множеством независимых случайных факторов, это объясняет широкую распространенность неравномерного распределения первых цифр.

Самая известная теорема Теда Хилла гласит:

Если взять случайные выборки из случайным образом выбранных массивов данных, то чем больше количество массивов и выборок, тем ближе к закону Бенфорда будет распределение первых цифр в смешанной выборке.

Эта теорема позволяет определить, когда может иметь место закон Бенфорда. «Если предположение о том, что несмещенные случайные выборки взяты из случайных распределений верно, тогда эти данные должны полностью подчиняться закону Бенфорда», — утверждает Тед. Этот вывод объясняет, почему газеты так хорошо иллюстрируют действие закона первой цифры. Числа, которые появляются в новостях, — это, по сути, произвольные выборки, взятые из случайных массивов данных, таких как цены акций, температура воздуха, распределение голосов во время выборов или результаты лотереи. Хотя многие из этих массивов данных могут не удовлетворять закону Бенфорда, чем больше массивов мы проанализируем и чем больше выборок включим в анализ, тем ближе к распределению Бенфорда будет смешанная выборка. Если продолжать процесс до бесконечности, смешанные выборки будут подчиняться закону Бенфорда с точностью до 100 процентов.

Я спросил Теда, есть ли у его теоремы простое интуитивное объяснение. В ответ он покачал головой. Тед доказал эту теорему, применив эргодическую теорию — передовую область науки, которая представляет собой сочетание теории вероятности и статистической физики и изучается только в аспирантуре. Несмотря на достаточно понятную формулировку, у теоремы нет простого доказательства. «Во всяком случае, такое доказательство не обнаружено», — поясняет Тед.

Тем не менее работа Теда Хилла дает математическое обоснование для использования закона Бенфорда при рассмотрении судебных дел. Впоследствии к Теду начали обращаться за советом ученые, которые хотели знать, соответствуют ли их данные закону первой цифры. По словам Хилла, самая необычная просьба поступила от одной христианской организации. В ней обнаружили, что процентное содержание различных минералов в морской воде и земной коре подчиняется закону Бенфорда. Это открытие так поразило и удивило ее членов, что, по их словам, это мог быть только продукт разумного замысла. Так не согласится ли Тед выступить в рамках их кампании за преподавание учения о сотворении мира в техасских школах?

Теду нравилось выискивать примеры действия закона Бенфорда в чистой математике.

Последовательность, каждый член которой в два раза больше предыдущего:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024…

Последовательность, каждый член которой в три раза больше предыдущего:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19 683…

Последовательность, каждый член которой поочередно умножается на два и на три:

1, 2, 6, 12, 36, 72, 216, 432, 1296, 2592, 7776, 15 552…

Все эти последовательности подчиняются закону Бенфорда.

То же самое можно сказать и о последовательности чисел Фибоначчи, в которой каждое следующее число представляет собой сумму двух предыдущих:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144…

Чем больше членов последовательности вы анализируете, тем ближе распределение первых цифр чисел, входящих в нее, к распределению Бенфорда.

Тед также доказал, что любая последовательность, которая начинается со случайного числа и формируется по принципу «удвоить и прибавить 1», соответствует закону Бенфорда. То же самое касается и любой последовательности, начинающейся с произвольного числа и формирующейся по принципу «возвести в квадрат». Но, когда Тед приступил к анализу последовательности чисел, построенной по принципу «возвести в квадрат и прибавить 1», он обнаружил нечто неожиданное.

«С какого бы числа ни начиналась такая последовательность, она почти всегда подчиняется закону Бенфорда. Однако при некоторых исходных числах этого не происходит, причем найти эти числа довольно трудно. Сперва мне казалось, что их нет. Я думал: “Этого не может быть! Это просто невозможно!” Но мы все же нашли одно число, обладающее поразительным свойством: когда оно является первым членом последовательности, в которой каждый следующий член на единицу больше квадрата предыдущего, то каждое число такой последовательности начинается с цифры 9. Это просто невероятно. Это сбой в системе».

Вот это число: 9,94962308959395941218332124109326…

На самом деле для последовательности чисел, сформированной по принципу «возвести в квадрат и прибавить 1», существует бесконечное множество таких исходных чисел, но они размещены на цифровой оси настолько редко, что вероятность выбрать какое-то из них случайным образом равна нулю. По словам Теда, у закона Бенфорда масса секретов, которые еще предстоит открыть.

Закон Бенфорда — один из самых ярких примеров того, как процесс, в котором фигурирует большое количество неизвестных случайных факторов, может образовать очень простую числовую закономерность. Точная последовательность событий, приводящих к росту или падению курса акций или увеличению численности населения города, может оказаться слишком сложной для понимания, но результат этих событий хорошо упорядочен и довольно прост. Не исключено, что у нас не получится составить прогноз в отношении курса конкретных акций или численности населения определенного города, но мы можем быть уверены в одном: в целом эти показатели всегда подчиняются закону Бенфорда.

В книгах тоже часто встречаются простые числовые закономерности. Возьмем в качестве примера книгу Джеймса Джойса Ulysses («Улисс»)*. В 40-х годах XX столетия исследователи Висконсинского университета на протяжении четырнадцати месяцев составляли список слов, которые использовались в этой книге [6]. Они напечатали ее на гуммированной бумаге, вырезали отдельные слова и наклеили их на тысячах отдельных листков. Затем упорядочили эти слова по убыванию частоты их встречаемости в тексте. Полученные данные представляли интерес не только для студентов, изучающих лингвистику, но и для психологов, работающих с лексическими ассоциациями, а также для таких нестандартно мыслящих ученых, как профессор Гарвардского университета Джордж Кингсли Ципф, который выявил потрясающую закономерность [7].

Слово	**Ранг (порядковый номер)**	**Частота**
I («я»)	10	2653
Say («сказать»)	100	265
Bag («сумка»)	1000	26
Orangefiery («оранжево-пламенный»)	10 000	2

Оказалось, что десятое по частоте употребления слово встречается в тексте почти в десять раз чаще, чем сотое, почти в сто раз чаще, чем тысячное, и почти в тысячу раз чаще, чем десятитысячное. Джеймс Джойс не выбирал слова с такой арифметической точностью специально; тем не менее закономерность, которой подчиняется их встречаемость в его книге, очевидна.

* *Джойс Дж.* Улисс. М. : Иностранка, 2013.

Если говорить языком математики, частота встречаемости слов в романе «Улисс» приближенно подчиняется следующему закону:

частота × ранг = 26 500

Эту формулу можно привести к такому виду:

$$\text{частота} = \frac{26\,500}{\text{ранг}}$$

В общем виде данное уравнение выглядит так:

$$\text{частота} = \frac{k}{\text{ранг}}, \text{ где } k \text{ — константа}$$

Следовательно, частотность употребления того или иного слова обратно пропорциональна его рангу (порядковому номеру) в списке, упорядоченном по убыванию частоты. Другими словами, если ранг слова в n раз больше, то частота его использования в n раз меньше.

Изучив другие тексты, Ципф пришел к выводу, что во всех книгах на всех языках частота встречаемости слов и их порядковый номер в частотном списке находятся в обратной зависимости, но с небольшим уточнением:

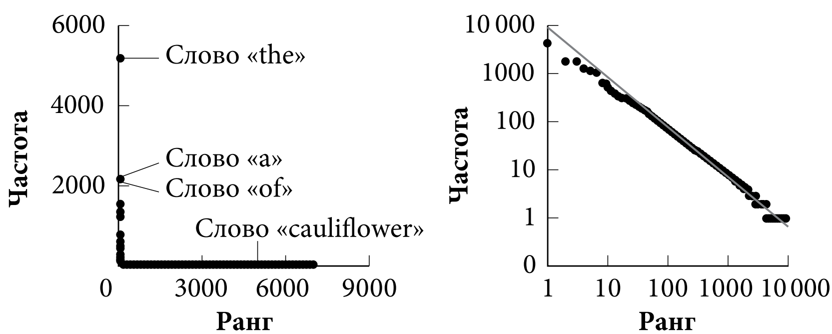
$$\text{частота} = \frac{k}{\text{ранг}^a}, \text{ где } k \text{ и } a \text{ — константы}$$

Это уравнение известно как закон Ципфа. (Когда два числа записаны в форме x^y, мы говорим «x в степени y», и это значит, что число x умножается само на себя y раз. Как мы знаем со школьных лет, $4^2 = 4 \times 4$, а $2^3 = 2 \times 2 \times 2$. Однако число y может быть не только целым числом. Следовательно, $2^{1,5}$ означает, что число 2 умножается само на себя 1,5 раза, а это равно 2,83. Чем ближе значение числа y к 1, тем ближе x^y к числу x.)

Ципф обнаружил, что значение константы a всегда стремится к 1 независимо от того, кто автор книги и каково ее содержание. То есть зависимость между частотой встречаемости слов и их рангом всегда очень близка к обратно пропорциональной зависимости. В случае романа «Улисс» значение a равно 1.

Я считаю закон Ципфа чрезвычайно увлекательным. Он раскрывает заманчиво простую математическую закономерность, определяющую выбор слов. Я решил выяснить, соблюдается ли этот закон в книге, которую вы сейчас читаете. Для подсчета частотности слов я воспользовался компьютерной программой, а не гуммированной бумагой и ножницами. Просматривая частотную таблицу, я увидел, что частота встречаемости слов действительно обратно пропорциональна их порядковому номеру в таблице. Самое распространенное слово, употребляемое мною в книге («the»), встречается в десять раз чаще, чем десятое по частоте слово «was», примерно в сто раз чаще, чем сотое по частоте слово «who», и в тысячу раз чаще, чем тысячное слово «spirals».

Когда я составил на основе данных о частоте и ранге слов график (левый график, представленный ниже), оказалось, что соответствующие точки лежат близко к координатным осям. График, отображающий обратно пропорциональную зависимость, всегда представляет собой L-образную кривую. Сначала кривая резко снижается, а затем быстро выравнивается и переходит в своего рода «длинный хвост». Это говорит о том, что одни слова встречаются в тексте в огромном количестве, а другие почти не используются. (На самом деле во всех текстах, независимо от их объема, около 50 процентов слов употребляются только один раз. В данной книге таких слов 51 процент [8].)



Распределение частотности слов в книге «Алекс в Зазеркалье»

На графике, расположенном справа, отображены те же данные, но изменен масштаб. Расстояние от 1 до 10, от 10 до 100 и от 100 до 1000 теперь одинаковое на обеих осях, другими словами, мы имеем двойной логарифмический масштаб. График, напоминающий провисший кабель, как по волшебству превратился в туго натянутую струну. Появился некий математический порядок: точки графика образуют почти идеальную прямую.

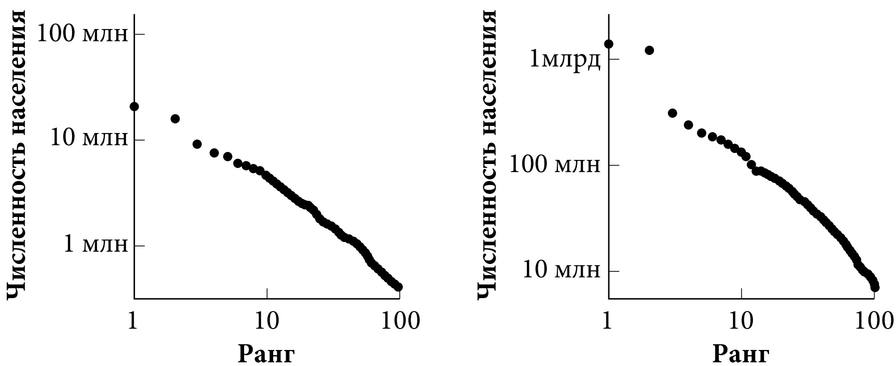
Прямая линия на графике, построенном в двойном логарифмическом масштабе, — доказательство того, что эти данные подчиняются закону Ципфа (в Приложении 2 я объясню почему). С математической точки зрения прямая линия более полезна, чем кривая с длинным хвостом, поскольку ее свойства легче анализировать. В частности, у прямой есть постоянный градиент. Мы вернемся к понятию градиента немного позже, а пока вам нужно знать только то, что градиент — это степень наклона: отношение расстояния, покрытого прямой по вертикали, к расстоянию по горизонтали. Если нарисовать линию наилучшего соответствия и определить ее градиент, он и будет представлять собой константу *a* в уравнении закона Ципфа. Я рассчитал градиент линии на расположенном выше графике. Он чуть больше единицы, а это значит, что по сравнению с Джеймсом Джойсом я чаще использую самые распространенные слова и реже — наименее распространенные.

При более близком рассмотрении не все точки на графике попадают на прямую линию. Некоторые отклоняются от нее, особенно примерно двадцать слов, встречающихся в тексте чаще всего. Однако в большинстве случаев точки находятся очень близко к этой линии. Поразительно то, что порядковый номер подавляющего количества слов в этой книге позволяет достаточно точно определить частоту их использования, и наоборот.

Профессор Ципф обнаружил такую же обратно пропорциональную зависимость еще в одной книге — книге переписи населения США 1940 года. Однако в этот раз он подсчитывал не частотность слов, а численность населения крупных американских городов.

Муниципальный район	Ранг	Население
Нью-Йорк / северо-восток Нью-Джерси	1	12 миллионов
Кливленд	10	1,2 миллиона
Гамильтон/Мидлтаун	100	0,11 миллиона

В это трудно поверить, но и здесь прослеживается та же закономерность. В Нью-Йорке (самом крупном городе США) численность населения в десять раз больше, чем в Кливленде (десятом по величине городе), и в сто раз больше, чем в Гамильтоне (сотом по величине городе). Никто не предлагал американцам расселяться с такой точностью. Тем не менее их выбор подчинялся строгой закономерности. Это происходит и сейчас. На самом деле все мы поступаем именно так. На представленных ниже графиках в двойном логарифмическом масштабе отображены данные о численности населения американских городов и их ранге (порядковом номере), взятые из отчетов о переписи населения США 2000 года, а также данные о численности населения крупнейших городов мира.



Распределение численности населения крупнейших городов США в 2000 году (график слева) и крупнейших городов мира в 2013 году (график справа)

Все точки стремятся к прямой линии, как послушные муравьи. Это означает, что здесь, как и прежде, применимо все то же общее уравнение:

$$\text{население} = \frac{k}{\text{ранг}^{a}}, \text{ где } k \text{ и } a \text{ — константы}$$

На этот раз Ципф тоже пришел к выводу, что для городов и стран значение константы *a* почти или равно 1. В случае американских городов это значение составляет 0,947, для крупнейших городов мира — 1,156, а в случае переписи населения США 1940 года равно 1.

Безусловно, имеются и отклонения, особенно в наиболее крупных странах и городах. Например, в действительности в Индии (второй самой густонаселенной стране мира) жителей больше, чем можно было бы ожидать, опираясь на закон Ципфа. Однако волатильность (изменчивость значений) в начале упорядоченного списка неизбежна, поскольку там намного меньше данных. Можно предположить, что города и страны обходят друг друга в рейтинге по мере изменения численности населения под влиянием экономических, социальных и экологических факторов. Когда подобные изменения происходят в странах, занимающих самые высокие места в списке, отклонение от прямой линии становится гораздо заметнее. Тем не менее такой разброс данных в верхней части графика не должен приуменьшать важности точного расположения точек далее вниз по линии. Из этого следует, что частота встречаемости слов, а также численность населения городов и стран подчиняются универсальному закону.

Для Ципфа обнаружение одной и той же элементарной математической закономерности в разных контекстах было равносильно духовному пробуждению. «В явлениях повседневной жизни мы находим единство, упорядоченность и равновесие, внушающие нам веру в высшую разумность всего сущего, целостность которого пребывает за пределами наших полномочий и понимания», — писал Ципф. Он предложил принцип наименьших усилий в качестве теоретической базы для своих эмпирических наблюдений. Мы часто используем ограниченное количество слов, потому что нашему мозгу так легче; мы живем в больших городах, потому что нам так удобнее. Однако Ципф так и не смог предоставить убедительное математическое обоснование закона, как, впрочем, и никто сто лет спустя. Многие пытались это сделать, и хотя некоторые даже добились определенных успехов в данном направлении, причина, почему закон действует, по-прежнему остается загадкой. Математические модели часто подвергают критике за то, что они слишком упрощают сложные закономерности. В случае закона Ципфа верно обратное утверждение: математические модели невероятно сложны, а закономерность настолько проста, что ее может понять даже ребенок.

В начале XX века итальянский экономист Вильфредо Парето заявил, что распределение богатства среди населения подчиняется следующему закону:

$$\text{богатство отдельного человека} = \frac{k}{\text{ранг}^{a}}, \text{ где } k \text{ и } a \text{ — константы}$$

Очевидно, что с математической точки зрения закон Парето эквивалентен закону Ципфа. Если составить список всех граждан страны в порядке уменьшения их богатства, график распределения последнего будет выглядеть точно так же, как представленный выше график частоты использования слов в этой книге. В целом самый богатый человек страны существенно богаче второго наиболее состоятельного человека, а тот, в свою очередь, намного богаче (хотя и чуть меньше, чем в предыдущем случае) третьего наиболее состоятельного человека, который гораздо богаче (хотя и чуть меньше, чем в предыдущем случае) четвертого наиболее состоятельного человека и т. д. В общем, к категории богачей относится крохотное меньшинство населения, тогда как его подавляющее большинство живет в бедности. Парето вывел этот закон на основании данных из многих стран и череды столетий. И он по-прежнему актуален.

Обратно пропорциональная зависимость описывает ситуации, в которых имеет место предельное, вопиющее неравенство. В случае закона Ципфа крохотный процент слов выполняет почти всю работу. В случае закона Парето в руках крохотного процента населения сосредоточена основная часть капитала. В 1906 году Парето написал, что в Италии около 20 процентов людей владеют 80 процентами земли. Это меткое замечание вошло в массовую культуру как «принцип Парето», или закон 80/20, согласно которому 20 процентов причин порождает 80 процентов следствий — фраза, отражающая несправедливость жизни. По мнению Ричарда Коха, автора книги о законе Парето [9], 20 процентов сотрудников обеспечивают 80 процентов результата; 20 процентов покупателей приносят 80 процентов прибыли; 80 процентов счастья мы испытываем за 20 процентов времени. Ричард Кох пишет, что закон 80/20 — это ключ к управлению своей жизнью, поскольку мы можем преодолеть трудности современного мира только одним способом: сосредоточившись на 20 процентах самых важных вещей. Закон Парето хорошо запоминается благодаря своей арифметической точности: 80 + 20 = 100. Однако такая точность не всегда применима к математической модели, описываемой этим законом, так как обратно пропорциональная зависимость во многих случаях носит приближенный характер.

Как закон Парето, так и закон Ципфа гласят, что одна величина обратно пропорциональна определенной *степени* другой величины.

Если переменные величины — x и y, то общая формула этой математической зависимости выглядит так:

$$y = \frac{k}{x^a}, \text{ где } k \text{ и } a \text{ — константы}$$

Уравнения данного типа обозначаются термином «степенной закон». Имена Ципфа и Парето носят два самых известных закона подобного рода, но за последние годы действие степенных законов проявилось в очень большом количестве самых разных ситуаций. Например, по результатам проведенного в Швеции опроса по поводу сексуальных привычек была установлена такая закономерность [10]:

$$\text{процент мужчин, имевших минимум } n \text{ половых партнеров на протяжении прошлого года} \approx \frac{k}{n^{2,31}}$$

Символ ≈ говорит не о том, что шведские женщины предпочитают мужчин с волнистыми усами. Он означает «приблизительно равно» и используется здесь потому, что данное уравнение обеспечивает наилучшее приближение. Примерно один из тысячи шведских мужчин имеет в течение года двадцать половых партнеров, в то время как большинство — только одного. Если продолжить линию максимального приближения, то получится, что где-то один из десяти тысяч мужчин имеет около шестидесяти половых партнеров в год.

В любви — как на войне. Исследователи, изучавшие случаи насилия в зонах военных конфликтов, выявили следующую закономерность [11]:

$$\text{процент инцидентов во время гражданской войны в Колумбии, в которых произошло не менее } n \text{ смертей и ранений} \approx \frac{k}{n^{2,5}}$$

Массовая гибель людей в результате военных действий наблюдается гораздо реже по сравнению с числом единичных случаев. Подобные выводы были сделаны в ходе анализа и сравнения данных о разных войнах. В мире велось всего несколько войн, повлекших за собой гибель миллионов людей; сотни тысяч людей лишились жизни в чуть большем количестве войн; еще больше войн унесло жизни десятков тысяч людей и т. д.

Чарльз Дарвин написал за свою жизнь тысячи писем, многие из которых представляли собой ответ на полученные письма. На большинство из них он отвечал в первый же день, а чтобы ответить на другие, ему понадобились годы [12]:

$$\text{вероятность того, что Чарльз Дарвин ответит на письмо за } n \text{ дней} \approx \frac{k}{n^{1,5}}$$

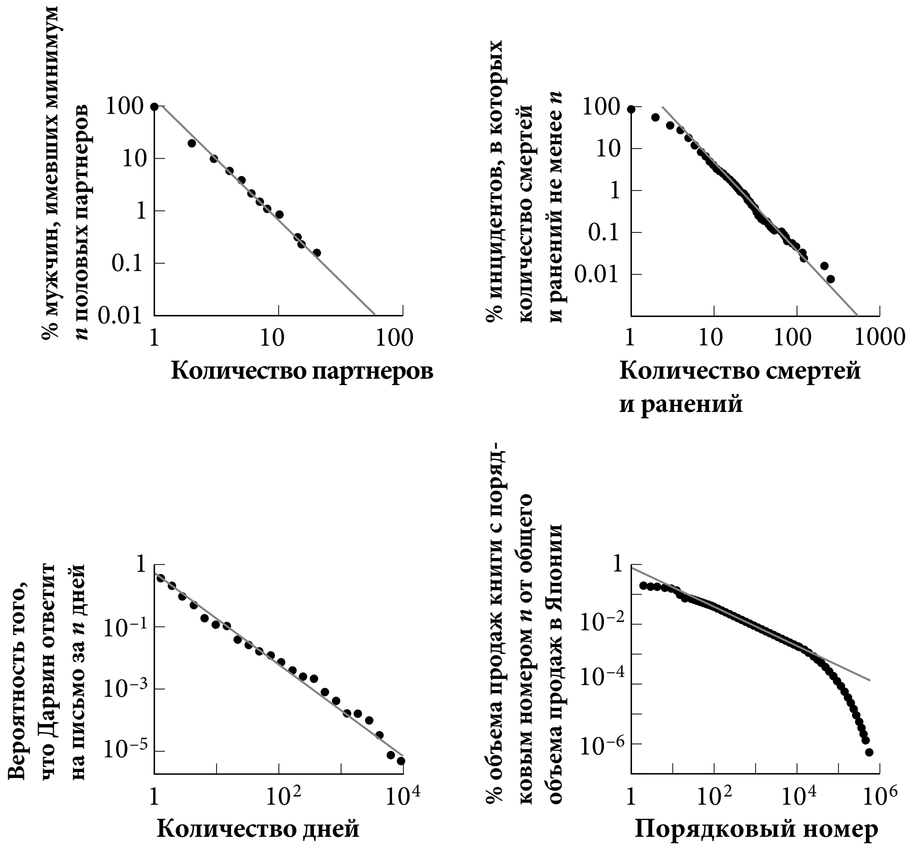
Мы отвечаем на электронные письма по такой же схеме: на большинство даем ответ немедленно, тогда как некоторые лежат в папке «Входящие» целую вечность.

Японские ученые, оценив объем продаж книг за период с 2005 по 2006 год, пришли к следующему выводу [13]:

$$\text{процент от общего объема продаж книги с порядковым номером } n \text{ в Японии в 2005–2006 годах} \approx \frac{k}{n^{0,65}}$$

Иными словами, несколько книг становятся лидерами продаж, тогда как другие так и остаются непроданными. В киноиндустрии в основе модели ведения бизнеса лежит та же закономерность: незначительное количество фильмов становятся блокбастерами, тогда как большинство терпят крах в прокате. В обоих случаях переход от успеха к неудаче математически предсказуем.

Мы получили четыре представленных выше уравнения, отобразив фактические данные на графике, выполненном в двойном логарифмическом масштабе (эти графики размещены чуть ниже), и измерили градиент линий наилучшего соответствия. (Снижение линии на последнем участке данных, полученных в Японии, объясняется нехваткой места на полках: книжные магазины не могут вместить все книги, которые теоретически могли бы быть у них в наличии.) Прямая линия на графике с логарифмическим масштабом по обеим осям означает, что здесь имеет место степенной закон, а градиент этой линии — константа a в уравнении степенного закона. Я не указывал значения константы k в каждом из уравнений, поскольку она зависит от размера выборки и не влияет на форму кривой, поэтому не представляет для нас интереса. Не забывайте о том, что, если бы в каждом из этих случаев данные были отображены на графике в нормальном масштабе, мы получили бы L-образную кривую с резким снижением в начале и длинным хвостом.



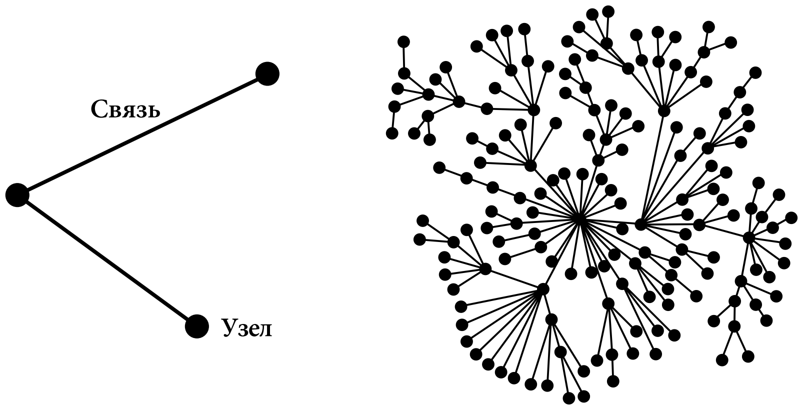
Данные о поведении шведских мужчин, колумбийских боевиков, Чарльза Дарвина и японских покупателей книг подчиняются степенному закону

Я привожу так много примеров для того, чтобы вы увидели мир таким, каким его видели Джордж Ципф, Вильфредо Парето и Ричард Кох. Если мы возьмем, к примеру, распределение роста в произвольной группе людей, мы сможем вычислить его среднее значение, поскольку вокруг него группируется больше всего чисел. Например, средний рост британских мужчин составляет 175 сантиметров. Но что касается частоты употребления слов, богатства, количества половых партнеров, войн, времени для ответа на письма, книг и фильмов, то тут мы не можем говорить о среднем значении. Понятие средней величины неприменимо к употреблению слов, распределению богатства, продаже книг или кассовым сборам от проката фильмов. Когда речь идет о поведении человека, мы живем в мире, смещенном в сторону экстремальных значений.

Степенные законы широко распространены не только в гуманитарных, но и в естественных науках. Магнитуда землетрясения обратно пропорциональна количеству землетрясений данной магнитуды; размер лунного кратера обратно пропорционален числу кратеров данного размера; если разбить замерзшую картофелину о стену, размер каждого фрагмента будет обратно пропорционален количеству фрагментов этого размера [14]. Распространенность степенных законов в физике объясняет, почему многие ученые, исследующие эти законы в социальных системах, начинали свою карьеру в качестве физиков. Один из таких ученых — Альберт-Ласло Барабаши, авторитетный профессор Северо-Восточного университета в Бостоне.

В настоящее время Барабаши занимается изучением сетей [15]. В определенных сетях, таких как интернет, принята математическая теория, которая объясняет причины появления степенных законов. Например, популярность сайтов в целом подчиняется степенному закону, так же как и рейтинг пользователей «Твиттера» по количеству подписчиков. «Тот факт, что степенные законы столь типичны, универсальны и легко узнаваемы, приводит в недоумение, — говорит Барабаши. — Казалось бы, в мире должно быть больше разнообразия!»

Предположим, на рисунке слева изображена модель сети, состоящей из трех узлов и двух связей. В качестве узлов могут выступать люди или сайты, а в качестве связей — любой тип соединения между ними. Барабаши утверждает, что степенной закон имеет место в случае роста сети по принципу предпочтительного присоединения. Это означает, что, когда в сети появляется новый узел, вероятность его связи с любым другим узлом, уже включенным в сеть, пропорциональна количеству связей, имеющихся у этого узла. Другими словами, узлы с большим числом связей получают еще больше связей. Богатые становятся богаче. Известные еще известнее. У узла с наибольшим количеством связей самые высокие шансы на получение новых связей, и чем больше связей у него появляется, тем привлекательнее он становится.



Если маленькая сеть начнет расти по принципу предпочтительного присоединения, то со временем она будет напоминать крупную сеть

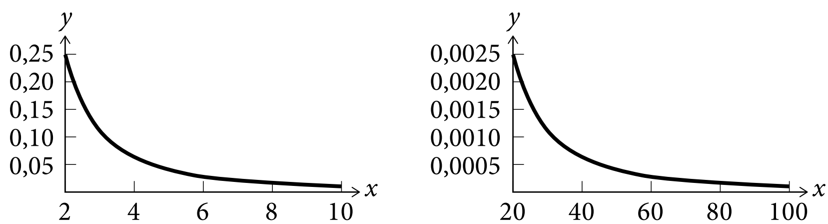
Если бы сеть, расположенная слева, расширялась по принципу предпочтительного присоединения, после включения в нее пары сотен новых узлов она выглядела бы так же, как сеть справа. У большинства узлов этой сети есть только одна связь, и всего несколько узлов (называемых хабами) имеют несколько связей. Если упорядочить узлы по числу связей и построить график, получится уже знакомая вам кривая с длинным хвостом. «Степенной закон вступает в игру каждый раз, когда вы принимаете решение [о том, с кем устанавливать связь]», — утверждает Барабаши. Если включить в сеть несколько миллионов узлов по принципу предпочтительного присоединения, то она будет выглядеть точно так же, как карта связей между пользователями «Твиттера» или модель интернет-пространства.

Одна из причин столь широкой распространенности сетей со степенным распределением узлов по количеству связей кроется в их особой устойчивости. Если в такой сети вы удаляете узел случайным образом, это, скорее всего, будет второстепенный узел (поскольку таких узлов гораздо больше), а не хаб, поэтому в целом на всей сети это особо не скажется. И наоборот, степенные сети становятся очень уязвимыми, если происходит атака на хаб. Иными словами, если выйдет из строя мой сайт, этого никто не заметит, кроме меня самого. Однако, если хотя бы на пять минут отключится сайт Google, наступит глобальный хаос.

Интерес к степенным законам объясняется тем, что они позволяют выстроить на удивление простую математическую модель для целого ряда сложных явлений. Кроме того, их очень легко обнаружить. Как мы уже видели, две переменные подчиняются степенному закону, если точки на графике в двойном логарифмическом масштабе образуют прямую линию.

Однако в последнее время все чаще высказываются предположения о том, что ученые слишком спешат с выводами о присутствии степенного закона в полученных ими данных, поскольку в ряде случаев точки данных образуют на графике кривые линии, и их необходимо описывать другими уравнениями [16]. Безусловно, это важная тема для обсуждения, но она выходит за рамки данной книги. Тем не менее у степенных законов есть один аспект, который отрицать невозможно: они обладают одним удивительным математическим свойством.

Рассмотрим уравнение степенного закона: $y = \frac{1}{x^2}$. Построив график этого уравнения для значений x от 2 до 10, мы получим кривую, изображенную на представленном ниже рисунке слева; график уравнения для значений x от 20 до 100 даст нам кривую, изображенную справа.



Кривая $y = \frac{1}{x^2}$ *на графике в двух масштабах*

Вы заметили разницу? Кривые абсолютно одинаковы. На самом деле, если построить кривую от n до $5n$ для любого значения n, она будет выглядеть точно так же, как на рисунке выше. Кривые для значений x от a до b всегда одинаковы, если отношение a/b представляет собой постоянную величину. Степенные законы раскрывают одну и ту же закономерность в любом масштабе, как бы далеко по хвосту вы ни продвинулись.

Если говорить о длинных хвостах, то такой был у Годзиллы.

Рост этого японского монстра (мутировавшего динозавра) — около 100 метров, что примерно в 50 раз больше роста высокого взрослого человека. А теперь представьте себе человека в 50 раз выше обычного роста, но с телом такой же формы. Этот увеличенный человек был бы в 50 раз шире и в 50 раз толще, а значит, в 50 × 50 × 50 = 125 000 раз тяжелее, чем раньше. Однако его кости в поперечном сечении увечились бы только в 50 × 50 = 2500 раз, стало быть, каждый квадратный дюйм его костей должен был бы поддерживать в 50 раз больше веса. Кости гигантского человека сломались бы при первой же попытке сделать шаг. Годзиллу постигла бы та же участь.

Согласен, нет ничего утомительнее, чем ворчание умника, утверждающего, что в реальном мире такой монстр просто не выжил бы. Тем не менее этот аргумент объясняет, почему животные разных размеров имеют разную форму. Чем крупнее животное, тем толще должны быть его кости относительно роста [17]. К такому выводу впервые пришел Галилей в 1638 году. У слона кости пропорционально толще, чем у человека, кости которого, в свою очередь, пропорционально толще костей собаки. Галилей понял, что у более крупных животных кости толще, потому что им приходится выдерживать больше веса в расчете на размер поперечного сечения кости.

Наблюдение Галилея можно представить в виде уравнения, в котором фигурируют площадь и объем. Утверждение о том, что площадь объекта в поперечном сечении находится в прямо пропорциональной зависимости от *квадрата* высоты, тогда как объем — в прямо пропорциональной зависимости от *куба* высоты, можно выразить двумя уравнениями:

$$\text{площадь} = l\,(\text{высота})^2;$$
$$\text{объем} = m\,(\text{высота})^3,$$

где l и m — константы.

Исключив переменную «высота», получим следующее уравнение:

$$\text{площадь}^3 = \frac{l}{m}\,(\text{объем})^2$$

Его можно преобразовать так:

$$\text{площадь} = \frac{l}{m}\,(\text{объем})^{2/3}$$

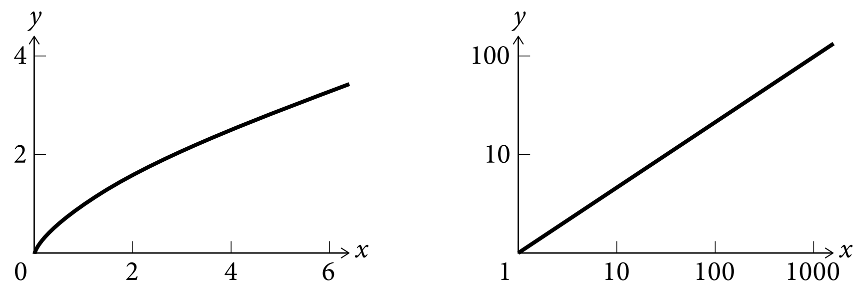
А это уравнение можно отнести к следующему типу:

$$y = kx^a,$$

где x и y — переменные, а k и a — константы.

Уравнение данного типа также называется степенным законом. Когда степенной закон выражен в такой форме, говорят, что переменная y находится в *прямой* пропорциональной зависимости от x^a, а когда он представлен в виде уравнения $y = \frac{k}{x^a}$, о котором шла речь выше, переменная y находится в *обратной* пропорциональной зависимости от x^a.

График уравнения степенного закона $y = x^{2/3}$ размещен ниже. На расположенном слева графике в нормальном масштабе кривая по мере повышения выравнивается. Если y — это площадь, а x — объем, то это показывает, что по мере увеличения объема площадь тоже увеличивается, но не так быстро. На графике в двойном логарифмическом масштабе (график справа) степенной закон, отражающий прямо пропорциональную зависимость, дает прямую линию с наклоном вправо.



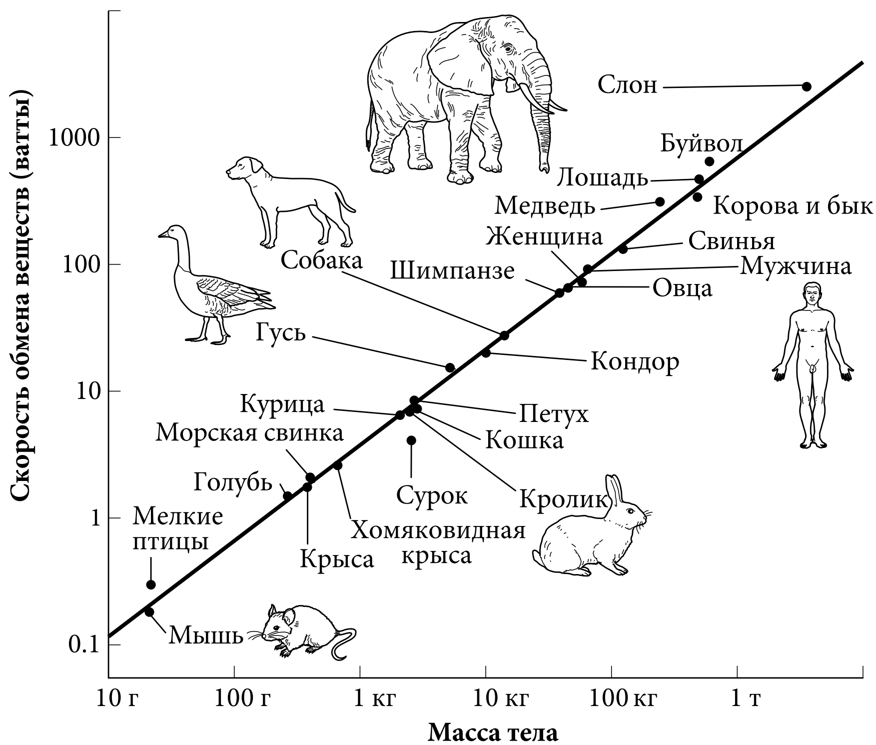
Кривая $y = x^{2/3}$ на графике в простом и двойном логарифмическом масштабе

Уравнение степенной зависимости между объемом и площадью обозначается также термином «закон масштабирования», поскольку оно демонстрирует, что происходит с измеримой величиной объекта (в данном случае площадью поперечного сечения) в результате увеличения общего размера.

В 30-х годах XX столетия швейцарский зоолог Макс Клайбер измерил вес нескольких видов млекопитающих и их уровень метаболизма (минимальное количество энергии, вырабатываемое животными в состоянии покоя) [18]. Когда ученый отобразил полученные данные на графике в двойном логарифмическом масштабе, получилась прямая линия, на основании которой он вывел следующий степенной закон:

скорость обмена веществ ≈ 70 (масса)$^{3/4}$

Этот закон известен как закон Клайбера. Впоследствии биологи расширили его действие на всех теплокровных животных, как показано на представленном ниже рисунке. Скорость обмена веществ растет не так быстро, как масса, а это говорит о том, что чем крупнее животные, тем эффективнее они вырабатывают энергию. Было также выявлено, что жизнь животных подчиняется и многим другим законам масштабирования. Например, продолжительность жизни животных прямо пропорциональна массе в степени ¼, а частота сердечных сокращений обратно пропорциональна массе в степени ¼. Поскольку коэффициент степенного закона — это в большинстве случаев величина, кратная ¼, биологические степенные законы называют законами четвертного степенного масштабирования. Учитывая разнообразие животного мира (размер млекопитающих колеблется от этрусской мыши весом около одного грамма до голубого кита, который в 100 миллионов раз тяжелее), действительно замечательно, что информация о размере животного позволяет так много сказать о нем.



Закон Клайбера

Физик Джеффри Уэст из Института Санта-Фе и биологи Джеймс Браун и Брайан Энквист из Университета Нью-Мексико разработали математическую теорию, которая объясняет эффект четвертного степенного масштабирования [19]. Если в общих чертах, то они утверждают, что при рассмотрении любого организма как транспортной системы (кровь поступает в аорту, разветвляющуюся на артерии, которые, в свою очередь, разветвляются на более узкие кровеносные сосуды) ее оптимизация под имеющееся пространство порождает степенной закон. Подробное объяснение данного феномена выходит за рамки материала этой книги, но представляет интерес в данном контексте в связи с другой работой Уэста — изучением организма иного типа: города.

Уэст и его коллеги обнаружили, что масштабирование по степенному закону весьма характерно для маленьких и больших городов [20]. Проанализировав огромное количество экономических и социальных данных и отобразив полученные результаты на графиках в двойном логарифмическом масштабе, они установили, что в США имеют место следующие закономерности:

количество изобретателей = k (численность населения)^{1,25}
совокупная заработная плата = k (численность населения)^{1,12}
количество случаев заболевания СПИДом = k (численность населения)^{1,23}
количество тяжких преступлений = k (численность населения)^{1,16}

В этих уравнениях показатель степени (экспонента) больше 1, а это значит, что чем крупнее город, тем в нем больше изобретателей, совокупной заработной платы, случаев заболеваний СПИДом и тяжких преступлений на душу населения. Здесь налицо пропорциональная зависимость. По всем этим городским индикаторам значение показателей степени составляет примерно 1,2, и такая сосредоточенность вокруг одного значения интересна сама по себе. Исходя из этого, получается, что при увеличении размера города вдвое можно ожидать роста количества изобретателей, совокупной заработной платы, случаев заболеваний СПИДом и тяжких преступлений на душу населения на 15 процентов.

В случае ряда других городских индикаторов показатель степени меньше 1, а это значит, что рост города может привести к сокращению следующих показателей на душу населения:

количество автозаправочных станций = k (численность населения)^{0,77}
длина электрических кабелей = k (численность населения)^{0,83}

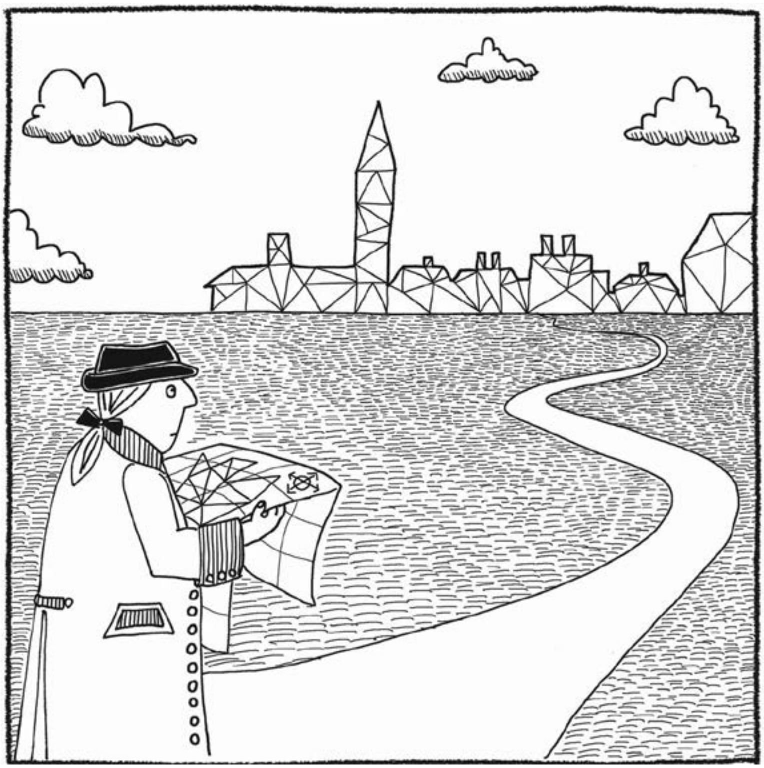
При увеличении размера города в два раза количество автозаправочных станций и длина электрических кабелей на душу населения могут сократиться на 15 процентов. Другими словами, в городах имеет место математически прогнозируемая экономия от масштаба — и это происходит во всем мире. «Японские города развивались абсолютно независимо от европейских и американских городов, тем не менее закон масштабирования действует [в каждой стране], — говорит Уэст. — Это наводит на мысль о существовании некой универсальной движущей силы». Уэст убежден, что степенные законы действуют в городах по той же причине, что и в мире животных. Город — это и транспортная сеть. Подобно тому как кровеносная система обеспечивает перемещение крови по толстым, а затем по все более тонким сосудам, города тоже распределяют ресурсы по сети разветвляющихся дорог, кабелей и труб.

Мы сами решаем, где нам жить, на что тратить деньги и как расходовать свое время. Тем не менее, если взглянуть на наше коллективное поведение сквозь призму чисел, становится очевидным, что оно вполне предсказуемо и подчиняется простым, взаимно совместимым математическим законам. Мы так распределены по земному шару, что в 30 процентах больших и малых городов численность населения начинается с единицы, размер городов в целом обратно пропорционален их номеру в упорядоченном по численности населения списке и все города являются версиями друг друга, образованными по принципу степенного масштабирования. Возможно, в чем-то этот мир сложен. Но в чем-то — достаточно прост.

Числа — незаменимый инструмент, помогающий нам понять мир, в котором мы живем. То же самое можно сказать о фигурах. Именно изучение одной из фигур дало начало развитию западной математики.

3

Любовные треугольники



Роб Вудолл — коллекционер геодезических знаков. В этом он преуспел как никто другой. Геодезические знаки представляют собой бетонные сооружения высотой до пояса, которыми обозначаются базисные точки национальной геодезической сети, использовавшейся в свое время картографами и топографами. Если вы когда-либо бывали в сельских районах Великобритании, то наверняка видели эти сооружения. Они, как правило, расположены на вершинах холмов — как трофей в конце восхождения. За период с 1936 по 1962 год Управление геодезии и картографии установило более 6500 таких знаков, 6200 из них сохранились до настоящего времени. По посещению, или «коллекционированию», геодезических знаков проводятся соревнования. На счету 50-летнего Роба Вудолла уже 6155 знаков — другими словами, почти все [1]. На данный момент он опережает ближайшего соперника почти на тысячу знаков.

В начале своего увлечения геодезическими знаками Роб раз в две недели устраивал экспедицию, уезжая из дома в пятницу вечером и возвращаясь в понедельник утром. Геодезические знаки размещены приблизительно в 5 километрах друг от друга, поэтому, действуя оперативно, Боб мог обойти примерно 50 знаков за одни выходные. При удачном стечении обстоятельств эти сооружения располагались у обочины дороги, где он мог припарковать автомобиль. Однако в большинстве случаев геодезические знаки находились вдали от дорог или пешеходных троп и были скрыты в зарослях можжевельника, куманики и прочих колючих кустов. Для того чтобы не возвращаться на работу с ободранными до крови руками, Боб стал брать с собой садовые ножницы.

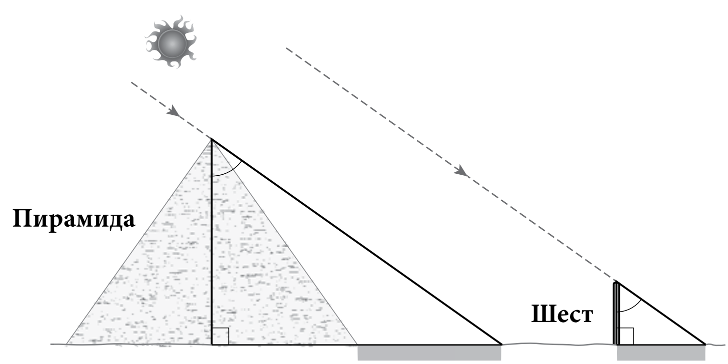
Геодезические знаки — это реликвии нашего технологического наследства, такие же элементы ландшафта, как средневековые крепости или прямые римские дороги. Робу нравится их коллекционировать, поскольку благодаря этому он путешествует по красивым местам, удовлетворяя свою тягу к приключениям и получая от этого огромное удовольствие. Он совершал ночные переходы по фермерским полям, побывал на страусиной ферме и потратил три года на переговоры с одним землевладельцем, чтобы добиться у него разрешения посмотреть геодезический знак, расположенный на его земельном участке. Мне тоже нравятся геодезические знаки. Они олицетворяют собой величие треугольника — фигуры, которая изменила мир.

Числа появились около 8000 лет назад, а математика возникла в Египте примерно в 600 году до нашей эры.

Все началось с публичной демонстрации способа измерения высоты пирамид. Греческий мыслитель Фалес показал, как определить высоту Великой пирамиды в Гизе, не взбираясь на нее. Сначала он установил на земле шест, который вместе с тенью образовал две стороны треугольника, как показано на представленном ниже рисунке. Пирамида со своей тенью тоже создавала треугольник. Гениальность Фалеса состояла в том, что он понял: хотя эти два треугольника существенно разнятся по размерам, у них одинаковая форма, поскольку солнечные лучи падают параллельно друг другу. Это означало, что на основании высоты маленького треугольника можно рассчитать высоту большого. Если говорить в современных терминах, Фалес понял следующее:

$$\frac{\text{высота шеста}}{\text{длина тени шеста}} = \frac{\text{высота пирамиды}}{\begin{array}{c}\text{расстояние от центра основания пирамиды}\\ \text{до конца ее тени}\end{array}}$$

Высоту шеста и длину его тени измерить не составляет труда. Расстояние от центра основания пирамиды до конца ее тени измерить непосредственно нельзя, поскольку этому мешает сама пирамида [2]. Возможно, прежде чем делать расчеты, Фалес подождал, когда солнечные лучи будут направлены перпендикулярно грани пирамиды, так как в этот момент расстояние от центра пирамиды до ее грани равно половине длины стороны пирамиды. Учитывая, что в приведенном выше уравнении три значения были известны, Фалес смог вычислить оставшееся значение — высоту пирамиды.



Параллельные лучи солнца образуют два подобных треугольника: один создан пирамидой, а другой — шестом

Открытие Фалеса стало крохотным шагом для тригонометрии, науки о треугольниках, и огромным скачком для человечества. По мнению ученого, способ определять размер объекта логически вытекал из его свойств [3]. Это отличало мышление Фалеса от мышления египтян, которые проявляли выдающиеся способности в практических областях (таких как строительство пирамид), но при этом их математические знания значительно ограничивались эмпирическими правилами и треугольниками, существующими в реальной жизни. В расчетах Фалеса был задействован треугольник, являющийся абстракцией реальности, образованной солнечными лучами. Идеи Фалеса положили начало греческому рациональному мышлению, которое мы считаем основной западной математики, философии и науки.

Имя Фалеса также носит еще одно его открытие — теорема Фалеса, которая гласит, что треугольник, вписанный в полукруг, всегда прямоугольный [4]*. Кроме того, воспользовавшись дедуктивным методом, Фалес предсказал солнечное затмение 585 года до нашей эры, а также повышение урожайности оливковых деревьев в его родном городе Милете после нескольких неблагоприятных лет. Он скупил все оливковые маслобойни, какие только смог, по самым низким ценам и разбогател во время небывалого урожая оливок. Столетие спустя древнегреческий комедиограф Аристофан подшутил над великим мудрецом, введя в одну из пьес сцену, где Фалес упал в канаву, в задумчивости рассматривая звезды. Фалеса помнят не только как первого в истории математика и философа, но и как первого самого рассеянного ученого.

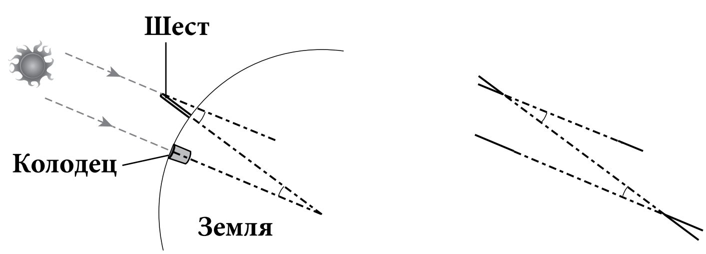
Во время устроенного в Гизе представления Фалес продемонстрировал, как посредством треугольника измерить расстояние от ближней точки до дальней без физического перемещения в дальнюю точку. Впоследствии треугольники стали использовать для измерения гораздо бóльших расстояний, чем высота пирамиды, что полностью изменило такие науки, как астрономия, навигация и картография. Но об этом мы поговорим позже. Иногда огромные расстояния можно измерить, просто понаблюдав за тенью, отбрасываемой вертикально установленным шестом в солнечный день. Спустя три столетия после того, как Фалес с помощью шеста и дедуктивной логики произвел впечатление на фараона, Эратосфен применил тот же метод для получения первой реалистичной оценки окружности Земли.

---

* Уточнение: не просто вписаный в полукруг, а одна сторона треугольника равна диаметру круга. *Прим. ред.*

Эратосфен жил в Александрии, столице эллинистического Египта, где возглавлял крупнейшую в то время знаменитую Александрийскую библиотеку. Там же, в Александрии, он измерил угол падения солнечных лучей у верхушки вертикального шеста в полдень летнего солнцестояния. Оказалось, что этот угол составляет примерно пятидесятую часть полного круга. Эратосфену было известно, что в Сиене, самом южном городе Египта, есть знаменитый колодец, дно которого полностью освещается в полдень летнего солнцестояния, то есть в это время в этом месте Солнце совсем не отбрасывает тень. На основании этих двух фактов Эратосфен сделал вывод, что расстояние от Александрии до Сиены должно составлять пятидесятую часть окружности Земли.

Эратосфен рассуждал так. Во-первых, в то время уже знали, что Земля круглая: люди видели, что корабли уходят за горизонт, а Земля отбрасывает изогнутую тень на Луну во время лунного затмения. Во-вторых, Эратосфену было известно, что Сиена находится строго на юг от Александрии. С учетом этих двух фактов он смог нарисовать представленную ниже схему, на которой изображено поперечное сечение земного шара с севера на юг, проходящее через Александрию и Сиену, в полдень летнего солнцестояния. В этот момент солнечные лучи направлены через Сиену прямо в центр Земли, а в Александрии падают на шест под углом. Поскольку шест установлен вертикально, он также должен указывать на центр земного шара. Следовательно, можно нарисовать абстрактную геометрическую схему (рисунок справа), на которой параллельные линии изображают солнечные лучи, а пересекающая их линия проходит от вершины шеста к центру Земли.



В полдень летнего солнцестояния Солнце не отбрасывает тень в Сиене, но отбрасывает тень от шеста, установленного в Александрии. Угол, который образуют солнечные лучи с шестом, равен углу от центра Земли к этим двум городам

Одна из основных теорем греческой геометрии гласит, что лежащие накрест углы равны, а это значит, что линия, пересекающая две параллельные прямые, образует с ними равные углы. Следовательно, угол, который образует с лучами шест, равен углу в центре Земли. Эратосфен определил, что построенный шестом угол составляет пятидесятую часть полного круга, стало быть, и угол в центре Земли такой же. Получается, расстояние от Александрии до Сиены составляет одну пятидесятую окружности земного шара.

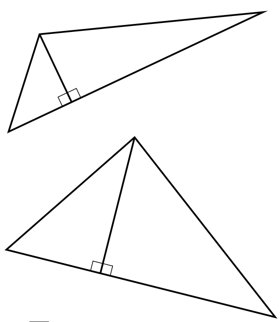
Выходит, что для того, чтобы вычислить окружность Земли, Эратосфену следовало просто умножить расстояние от Александрии до Сиены на пятьдесят. У греков уже была достаточно точная оценка этого расстояния — 5000 стадиев: его измерили *бематисты* (землемеры), шагомеры, определяющие расстояние и маршрут. (Эратосфену как создателю географии судьба подарила три географических факта, без которых его измерения были бы невозможны: египтяне расселились вплоть до Сиены, находящейся на Тропике Рака — самой северной широте, где Солнце не отбрасывает тень по крайней мере один раз в год; Сиена расположена строго на юг от Александрии; земля между этими двумя городами позволяла проложить более-менее ровную дорогу.) Один стадий в современной системе измерения равен 166 метрам. Таким образом, окружность Земли была рассчитана так: 166 метров × 5000 стадиев × 50, что составляет примерно 41 500 километров, всего на 1500 километров (около 4 процентов) больше правильного значения. На протяжении целой тысячи лет никому не удалось получить более точный результат, чем Эратосфен.

Сейчас город Сиена известен как Асуан. В нем до сих пор сохранился тот самый колодец, однако из-за безжалостного полуденного зноя, наступающего в день летнего солнцестояния, это место вряд ли станет Меккой для туристов.

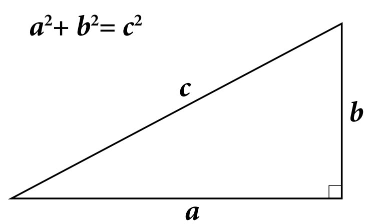
Ко временам Эратосфена греческая математика уже прошла путь от первых идей Фалеса относительно треугольников до большого свода теорем о них вместе с доказательствами. Преобладание треугольника в греческом мышлении обусловлено тем, что все фигуры, построенные на основе прямых линий (квадраты, пятиугольники и т. д.), можно разбить на треугольники, а фигуры, образованные кривыми линиями (такие как окружности, эллипсы и параболы), — приближенно представить в виде треугольников.

Поскольку все треугольники делятся на *прямоугольные* (треугольники, в которых один угол прямой, или «четвертьоборотный»), древние греки ценили последние больше всего. На представленном ниже рисунке показано, как разбить треугольник на два треугольника поменьше с прямыми углами. Для этого необходимо провести перпендикуляр до самой большой стороны от противоположного угла треугольника. Когда мы начинаем изучать математику, нам рассказывают, что такое гипотенуза — самая длинная сторона прямоугольного треугольника, противоположная прямому углу. И сразу после этого объясняют теорему Пифагора (рис. справа), которая гласит:

> *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов* [5].



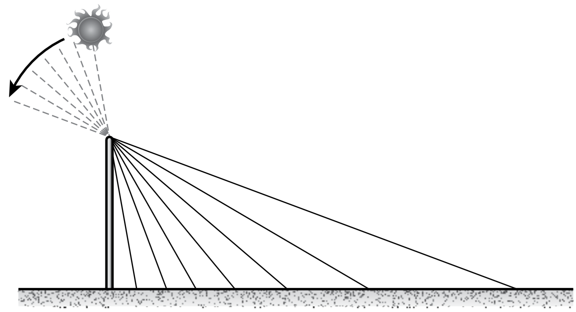
Прямоугольные треугольники



Теорема Пифагора

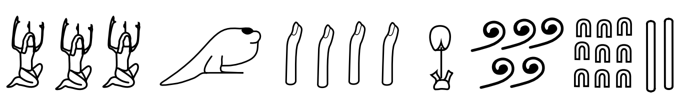
Теорема Пифагора стала одной из наиболее известных в математике по многим причинам, самая главная из которых состоит в том, что в ней речь идет о прямоугольном треугольнике — объекте планиметрии, не поддающемся упрощению.

Когда Солнце отбрасывает тень от шеста, образуется прямоугольный треугольник, как мы помним из истории о Фалесе. Однако, когда Солнце движется по небу, изменение угла падения солнечных лучей не вызывает пропорционального изменения длины тени. Если угол увеличивается с постоянным приращением (как на представленном ниже рисунке), то приращение длины тени с каждым разом становится все больше, поэтому в конце дня мы видим, как тени буквально ползут по земле. Астрономы, не говоря уже о производителях солнечных часов, очень хотели понять взаимосвязь между углом падения солнечных лучей и длиной тени. Но у древних греков не было инструмента, который бы помог им ответить на этот вопрос: при всех их геометрических знаниях, существовавшая на то время система представления чисел была чрезвычайно громоздкой. Для того чтобы продвинуться дальше в изучении треугольников, древним грекам требовалась более эффективная система записи дробных чисел.



Солнечные лучи, падающие под равными углами, отбрасывают тени разной длины

Греческая система счисления произошла от египетской, которая подразумевала запись чисел двумя способами [6]. Вырезая числа на дереве или высекая на камне, египтяне использовали иероглифы. Каждая степень десяти от единицы до миллиона была представлена специальным символом: 1 — вертикальная линия, 10 — перевернутая буква U, 100 — спираль, 1000 — цветок лотоса со стеблем, 10 000 — слегка изогнутый палец, 100 000 — головастик, 1 000 000 — человек на коленях с поднятой к небу головой [7]. Любое число записывалось посредством повторения этих символов; например, число 3 141 592 выглядело бы так.



Для записи чисел на папирусе египтяне применяли менее сложную систему иератического письма, которая больше подходила для использования ручки и чернил. Они ввели специальные символы для обозначения цифр и чисел, кратных 10. Таким образом, вместо утомительного изображения числа 7 в виде семи вертикальных линий египтяне применяли один символ . Переход от представления чисел в виде повторяющихся иероглифов к их записи с помощью символов был важным шагом вперед.

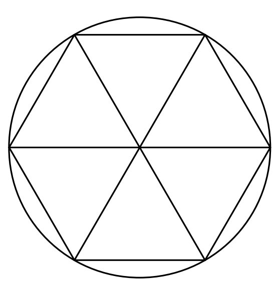
В случае записи чисел с помощью иероглифов для обозначения дробей над числом размещался символ рта, для того чтобы обозначить обратную величину — подобно тому, как мы ставим 1 над линией дроби. Например, дробь $\frac{1}{3}$ изображалась как, а $\frac{1}{10}$ — как. В системе записи чисел посредством иератического письма для обозначения дроби над числом ставилась точка; например, дробь $\frac{1}{7}$ выглядела так:. Египтяне использовали только единичные дроби, поэтому им приходилось разбивать дроби с числителем больше 1 на сумму единичных дробей, например $\frac{2}{5}$ — на $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ и $\frac{2}{101}$ — на $\frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$. Сжатое значение египетских сумм единичных дробей напоминает нашу систему десятичных дробей, в которой, например, число 0,234 представляет сумму дробей $\frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000}$, хотя египетская система была не настолько эффективной и гибкой, как наша [8].

Во времена Евклида древние греки уже использовали систему счисления, основанную на египетском иератическом письме: 27 числам соответствовали 27 различных символов — букв греческого алфавита [9]. Например, число 444 записывалось как υμδ, поскольку символом υ обозначалось число 400, символом μ — 40 и δ — 4. Дроби описывались словами, скажем, «одиннадцать частей в восьмидесяти трех» или отображались в виде простых дробей с числителем и знаменателем, во многом напоминавших современную форму, такую как $\frac{11}{83}$, хотя у греков сохранилось исторически сложившееся пристрастие к единичным дробям. Египетская и греческая системы представления чисел не годились для астрономии, поскольку для отслеживания движения планет необходимо рассчитывать малейшие доли углов, а простые и единичные дроби слишком громоздки для этого.

В Месопотамии, однако, применялась гораздо более гибкая система представления чисел. В Вавилоне использовалась позиционная система счисления, в которой значение каждой цифры зависело от ее позиции в числе. Современная числовая система — это десятичная позиционная система счисления. Например, в числе 123 цифра 3 находится в разряде единиц, цифра 2 — в разряде десятков и цифра 1 — в разряде сотен. Большим преимуществом позиционной системы счисления является то, что с ее помощью можно записывать дроби. В нашей системе счисления такие дроби называются десятичными. Например, в числе 0,56 цифра 5 находится в разряде десятых, а цифра 6 — в разряде сотых.

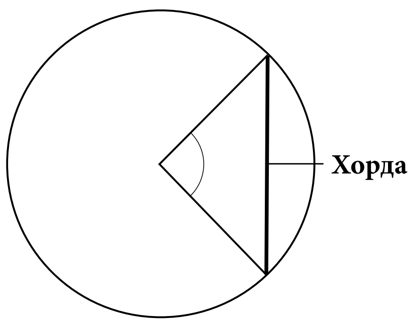
Вавилоняне применяли шестидесятеричную систему счисления, то есть в ее основу было положено число 60. (В вавилонской системе числа записывались в виде комбинации двух символов — вертикального клина 𒁹 и горизонтального клина 𒌋.) До сих пор неизвестно, почему вавилоняне выбрали именно число 60 в качестве основания позиционной системы, хотя, возможно, это объясняется тем, что шестьдесят — минимальное число, которое делится на 1, 2, 3, 4, 5 и 6, а это упрощало решение ряда арифметических задач. Вавилоняне расширили свою систему представления чисел на дроби. У них не было специального «шестидесятеричного» символа, подобного нашей десятичной запятой, поэтому значение разрядов приходилось определять по контексту. Например, число 123 могло означать также, что цифра 1 находится в разряде единиц, цифра 2 — в разряде шестидесятых, а цифра 3 — в разряде 3600-х. Позиционные дроби значительно превосходят простые дроби, как мы знаем по собственному опыту применения десятичных дробей. Для их записи требуется меньше символов, и с ними проще делать расчеты. Вавилоняне умели извлекать корень из двух до трех шестидесятеричных разрядов, или с точностью около 0,000008 от истинного значения — поразительный результат для того периода. Легкость, с которой вавилоняне делили углы на более мелкие части, позволила им добиться выдающихся для своего времени успехов в астрономии.

Вавилоняне поделили круг на 360 градусов. Возможно, такое разбиение было связано с зодиакальным кругом, который состоял из 12 знаков зодиака и 36 декан (деканальных божеств), или с тем, что 360 — это примерное количество дней в году. Не так давно появилось еще одно предположение: число 360 выбрано потому, что, как показано на рисунке ниже, в окружность вписывается шесть равносторонних треугольников и каждый из углов в ее центре разделен на 60 частей, как того требуют шестидесятеричные дроби. Безусловно, все эти причины дополняли друг друга, и вавилонская система счисления оказалась чрезвычайно долговечной.



Во II столетии до нашей эры древние греки заимствовали вавилонские дроби, используемые до сих пор. Градус по традиции был разделен на 60 более мелких частей, каждая из которых обозначалась как *pars minuta prima* («часть мелкая первая») и состояла, в свою очередь, тоже из шестидесяти мелких частей, позиционируемых как *pars minuta secunda* («часть мелкая вторая»). От этих латинских выражений произошли слова *минута* и *секунда*, или единицы времени, — самые известные реликвии, доставшиеся нам от древней шестидесятеричной системы счисления.

Имея в своем распоряжении подходящую систему счисления, древнегреческий астроном Гиппарх приступил к составлению таблицы данных о соотношении сторон треугольника. Он делал это на основе хорды — отрезка, соединяющего две точки окружности и названного так потому, что он напоминает туго натянутую струну лука*. Каждая хорда с центром окружности образует треугольник, как показано на рисунке ниже

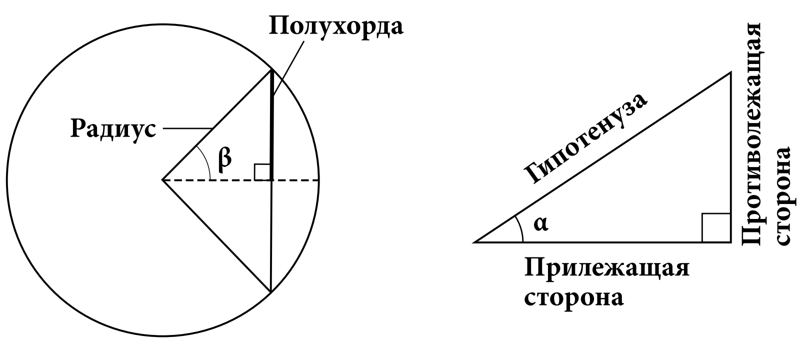


Если длина окружности постоянна, то углам с вершиной в ее центре соответствуют хорды разной длины. Гиппарх составил таблицу углов, кратных 7,5 градуса, с указанием длины хорд. Во II столетии нашей эры астроном Птолемей развил эту идею, создав таблицу хорд для окружности с радиусом 60 единиц, в которой была приведена длина хорд, соответствующих углам с интервалом в полградуса от 0 до 180 градусов, с точностью до третьего шестидесятеричного разряда. Таблицы хорд Гиппарха и Птолемея оказались бесценны для западных астрономов, рассматривавших Землю и другие небесные тела как вершины космических треугольников. Таким образом, треугольник стал первым телескопом за всю историю человечества, сделав внеземные объекты доступными для измерения.

---

* Одно из значений английского слова «chord» — «струна». *Прим. пер.*

В Индии в середине первого тысячелетия нашей эры астрономия процветала по той же причине, что и в Вавилоне: у индийцев тоже была позиционная система счисления, позволяющая им эффективно описывать как очень большие, так и очень малые числа. На самом деле индийская система счисления даже превосходила вавилонскую, поскольку основывалась на десятках, что было более удобно, чем группы по шестьдесят цифр. Кроме того, индийцы считали ноль полноправным числом, а не символом-заполнителем незначащих разрядов чисел, как вавилоняне. Индийские астрономы также пользовались таблицами длин сторон треугольников. Однако вместо хорд они их составили для полухорд. Как показано на рисунке слева, полухорда — это сторона прямоугольного треугольника, в котором радиус окружности представляет собой гипотенузу, а другая сторона — часть биссектрисы, перпендикулярной хорде. Концепция полухорд удобнее для расчетов, поскольку, как мы уже знаем, любой треугольник делится на прямоугольные треугольники. Позиционная система счисления индийцев и их знания о длине сторон треугольников получили распространение в арабском мире и со временем достигли Европы. Система представления чисел с помощью цифр от 0 до 9, которые мы используем в наше время, так же как и выбор полухорд, берет свое начало в индийской системе счисления.



В VI столетии до нашей эры Фалес уловил суть самого важного свойства треугольников, лежащего в основе всего, что мы о них знаем, в частности, что при равных углах отношения их сторон не меняются.

А теперь представим, что мы перенеслись на две тысячи лет вперед, в то время, когда математики изобрели три новые концепции, основанные на этом свойстве: синус, косинус, тангенс.

SOH-CAH-TOA!*

Тем, кто забыл это мнемоническое правило, хочу напомнить формулы:

$$\text{синус} = \frac{\text{противолежащая сторона}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\text{косинус} = \frac{\text{прилежащая сторона}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\text{тангенс} = \frac{\text{противолежащая сторона}}{\text{прилежащая сторона}}$$

Синус, косинус и тангенс — это тригонометрические функции, применяемые по отношению к прямоугольным треугольникам, таким как треугольник справа на представленном выше рисунке. Синус угла α — это отношение противолежащего катета к гипотенузе; косинус угла α — отношение прилежащего катета к гипотенузе; тангенс угла α — отношение противолежащего катета к прилежащему.

Если понадобится увеличить изображенный на рисунке треугольник до нужного размера, пропорции между сторонами останутся неизменными, а это значит, что синус, косинус и тангенс угла α, которые принято записывать как «$\sin \alpha$», «$\cos \alpha$» и «$\tan \alpha$»**, представляют собой постоянную величину. Тригонометрические функции — это своего рода идентификационный код, описывающий форму прямоугольных треугольников: она зависит от внутренних углов, поэтому, если они неизменны, не изменяются и значения синуса, косинуса и тангенса.

При внимательном рассмотрении приведенных выше рисунков связь между синусом и полухордой становится очевидной. Синус угла β представляет собой отношение противолежащей стороны к гипотенузе, которое

---

* SOH-CAH-TOA — мнемоническое правило для запоминания формул определения синуса, косинуса и тангенса. *Прим. пер.*

** В русской математической литературе принято обозначение тангенса как $\operatorname{tg} \alpha$. *Прим. ред.*

равно отношению полухорды к радиусу. Если радиус равен 1, тогда синус угла β — это и есть полухорда.

Согласно этимологии слова «синус», оно пришло к нам из Индии. На санскрите полухорда обозначалась как *jya-ardha*, или «половина тетивы». Арабы транслитерировали это слово как *jiba* — лишенное смысла слово, звучащее почти как *jaib* — «пазуха», или «углубление». При переводе арабских текстов на латынь термин *jaib* был переведен как *sinus*, что означало складку тоги над грудью женщины. В английском языке это слово трансформировалось в *sine*.

Ниже представлена небольшая тригонометрическая таблица. Углам с изящными значениями не всегда соответствуют столь же изящные значения тригонометрических функций. При величине угла от 0 до 90 градусов значение синуса находится в пределах от 0 до 1, косинуса — от 1 до 0, а тангенса — от 0 до бесконечности. Первые тригонометрические таблицы были составлены в XV–XVI веках с использованием геометрических и математических методов, что подготовило почву для золотого века треугольника.

$\sin 1° = 0{,}0175$	$\cos 1° = 0{,}9998$	$\tan 1° = 0{,}0175$
$\sin 10° = 0{,}1736$	$\cos 10° = 0{,}9848$	$\tan 10° = 0{,}1763$
$\sin 30° = 0{,}5000$	$\cos 30° = 0{,}8660$	$\tan 30° = 0{,}5774$
$\sin 45° = 0{,}7071$	$\cos 45° = 0{,}7071$	$\tan 45° = 1{,}0000$
$\sin 60° = 0{,}8660$	$\cos 60° = 0{,}5000$	$\tan 60° = 1{,}7321$
$\sin 90° = 1{,}0000$	$\cos 90° = 0{,}0000$	$\tan 90° = \infty$

При отсутствии необходимых технических приспособлений можно применить новые математические инструменты. Например, если мы хотим измерить высоту дерева, мы решаем эту задачу при помощи прямоугольного треугольника, как показано ниже.

Если P — это точка на земле, с которой видна верхушка дерева, а α — угол наблюдения, то:

$$\tan\alpha = \frac{\text{высота дерева}}{\text{расстояние от точки наблюдения до дерева}} = \frac{h}{d}$$

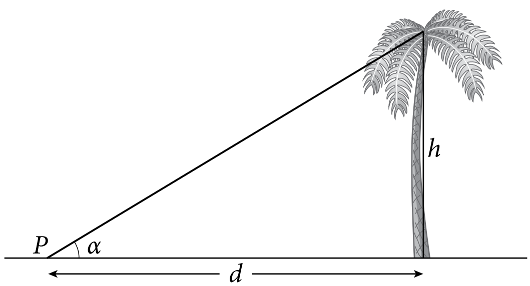
Эту формулу можно преобразовать в следующее уравнение:

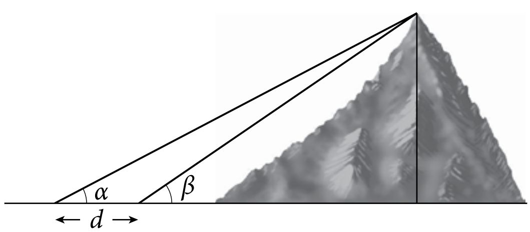
$h = d \times \tan \alpha$

Как правило, такие уравнения записываются так:

$h = d \tan \alpha$

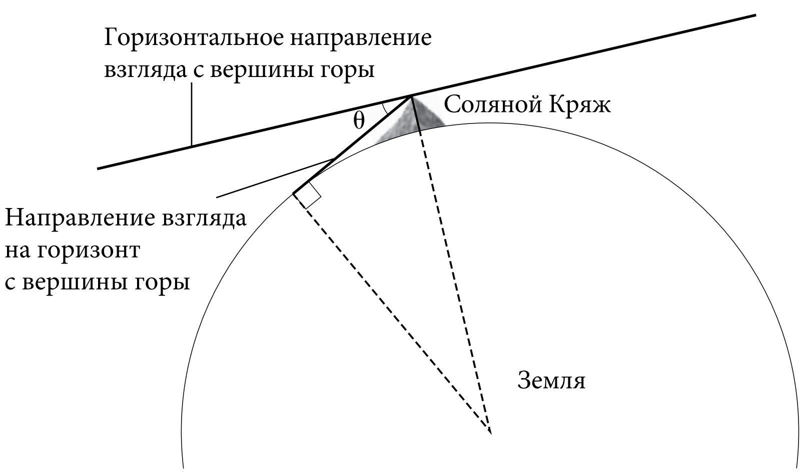
Топографу эпохи Возрождения следовало измерить угол α с помощью транспортира и визира, после чего ему лишь оставалось найти в тригонометрической таблице значение tan α. Расстояние *d* он мог измерить посредством мерной ленты или куска веревки. Вот и весь секрет того, как вычислить высоту дерева, не отрываясь от земли.





Для того чтобы определить высоту горы, необходимо нарисовать два треугольника (как показано выше), поскольку добраться до угла треугольника, расположенного прямо под вершиной горы, невозможно. Топограф решает эту задачу путем наблюдения за вершиной горы из двух точек, каждая из которых образует прямую линию с вершиной под углами α и β. Кроме того, он измеряет расстояние *d* между этими двумя точками. Высоту горы можно рассчитать с помощью значений tan α, tan β и *d* (в Приложении 3 показано, как это сделать).

Тригонометрия (или наука о соотношении сторон треугольника) повлияла на развитие таких областей, как навигация и военное дело, позволив морякам и солдатам измерять расстояния до объектов, к которым они не могли приблизиться без риска утонуть или быть убитыми. Кроме того, тригонометрия помогла арабскому ученому аль-Бируни превзойти результат Эратосфена в определении окружности Земли. В XI веке нашей эры, когда аль-Бируни жил в крепости у Соляного Кряжа в Пенджабе, он случайно нашел место, географические характеристики которого идеально подходили для измерения высоты горы. Она была высокой и выходила на плоскую равнину. Все складывалось как нельзя лучше для реализации этого намерения посредством тригонометрии, поэтому аль-Бируни так и поступил. Но затем, вместо того чтобы собрать вещи и уйти, он взобрался на вершину горы и измерил угол между горизонтальным направлением взгляда и горизонтом, обозначенный на рисунке ниже как θ. Далее аль-Бируни соединил точку встречи горизонта с землей и точку на вершине горы, в которой он стоял, с центром Земли, образовав прямоугольный треугольник. Затем он вычислил радиус Земли, умножив высоту горы на отношение $\frac{\cos\theta}{1 - \cos\theta}$ (доказательство можно найти в Приложении 3). Выполнив необходимые расчеты, аль-Бируни получил значение радиуса Земли, равное 6335 километрам, что дает окружность 39 800 километров — всего на 0,5 процента меньше правильного значения и почти в десять раз точнее, чем оценка Эратосфена.



Измерение радиуса Земли по методу аль-Бируни

Соотношение сторон треугольника стало настоящим открытием для архитекторов, астрономов, артиллеристов, ученых и мореплавателей. К тому же это послужило толчком к формированию абстрактной математики, позволяющей по-новому взглянуть на классические геометрические концепции, такие как теорема Пифагора, которая гласит, что:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

где c — гипотенуза, a и b — два катета.

Если α — это угол между сторонами b и c, тогда:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Другими словами, $a = c \sin \alpha$, а $b = c \cos \alpha$. Мы можем подставить эти значения в уравнение Пифагора:

$$(c \sin \alpha)^2 + (c \cos \alpha)^2 = c^2,$$

которое можно преобразовать так:

$$c^2 (\sin \alpha)^2 + c^2 (\cos \alpha)^2 = c^2$$

и привести к следующему виду:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

Прекрасно! Теперь у нас есть компактная формула, демонстрирующая, как можно вычислить синус по косинусу и наоборот без необходимости рисовать треугольник. Это простейшее из уравнений, которые называют тригонометрическими тождествами — уравнениями, включающими в себя тригонометрические функции. Принято считать, что арабский математик ибн-Юнус (современник аль-Бируни) вывел следующую формулу:

$$\cos \alpha \times \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

Она имела огромное значение, хотя математикам понадобилось пять сотен лет, чтобы понять почему. Уравнение ибн-Юнуса позволяет заменить такую трудную математическую операцию, как умножение, на более простое действие — сложение.

Представьте, что нам нужно умножить 0,2897 на 0,3165.

Оба числа находятся в диапазоне от 0 до 1, стало быть, есть такие углы, для которых эти числа являются косинусами. Определить, какие именно углы соответствуют данным значениям, помогут тригонометрические таблицы. Вот эти углы:

$$\cos 73{,}160° = 0{,}2897$$
$$\cos 71{,}548° = 0{,}3165$$

Следовательно, мы можем записать уравнение так:

$$0{,}2897 \times 0{,}3165 = \cos 73{,}160° \times \cos 71{,}548°$$

Приведенное выше тождество говорит о том, что эта формула эквивалентна следующему уравнению:

$$\frac{\cos (73{,}160 + 71{,}548)° + \cos (73{,}160 - 71{,}548)°}{2} = \frac{\cos 144{,}708° + \cos 1{,}612°}{2}$$

Обратившись к таблицам, получим тождество:

$$\frac{\cos 144{,}708° + \cos 1{,}612°}{2} = \frac{-0{,}8162 + 0{,}9996}{2} = \frac{0{,}1834}{2} = 0{,}0917$$

Это и есть результат умножения чисел 0,2897 и 0,3165, причем очень точный. Умножьте их с помощью калькулятора, округлите произведение до четвертого десятичного знака, и получите 0,0917.

Приведенный выше способ умножения чисел может показаться слишком сложным, но в конце XVI столетия он был самым легким. Вместо того чтобы расписывать операцию умножения в столбик, что требует больших усилий и времени, достаточно просто посмотреть в сборник тригонометрических таблиц, сложить два числа, найти их разность, снова посмотреть в таблицы, сложить два числа и разделить их на два. Этот метод обозначается термином *простаферезис* (prosthaphaeresis), который образован от греческих слов, означающих сложение и вычитание, — *prosthesis* и *aphaeresis*.

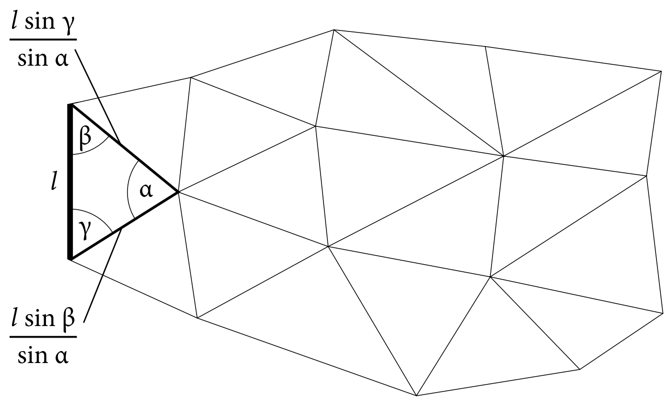
Метод простаферезиса вдохновил шотландца Джона Непера на поиск еще более эффективного способа преобразования умножения в сложение, что в 1614 году привело к открытию логарифма. Вместо умножения двух чисел теперь можно было сложить их логарифмы. Логарифмы Непера существенно упростили процесс умножения, из-за чего метод простаферезиса утратил популярность. Тем не менее на протяжении нескольких десятилетий триумфа прямоугольный треугольник — квинтэссенция геометрии — играл двойную роль в качестве невидимого оружия арифметики.

Хотя треугольники, несомненно, весьма полезны по отдельности, в командной игре они особенно эффективны. Если нарисовать сеть треугольников (как показано на рисунке ниже) и измерить в ней все углы, то достаточно определить точную длину одной линии, чтобы рассчитать длину всех остальных линий сети. Предположим, нам известна точная длина линии, выделенной жирным; обозначим ее как l. Тригонометрическое тождество, которое принято называть теоремой синусов, дает нам формулу расчета длины двух других сторон треугольника:

$$\frac{l \sin \beta}{\sin \alpha} \quad \text{и} \quad \frac{l \sin \gamma}{\sin \alpha},$$

где α — угол, противоположный жирной линии, β и γ — два других угла треугольника. Поскольку все углы в треугольниках сети известны, на основании длины каждой очередной линии можно вычислить длину двух других линий — и так далее, пока не будет известна длина каждой линии сети. Этот метод применим к любым треугольникам, а не только к прямоугольным.

В 1533 году голландский математик Гемма Фризиус понял, что метод триангуляции как нельзя лучше подходит для картографии, поскольку измерять углы гораздо легче, чем большие расстояния [10]. Его идея состояла в том, чтобы выбрать точки на местности так, чтобы от каждой из них было видно две других, и построить таким образом сеть треугольников. Он измерил углы между точками с помощью теодолита — круглого транспортира на подставке. Определив длину базисной линии, Гемма Фризиус смог рассчитать все остальные расстояния, используя тригонометрические таблицы, а затем нарисовал точную карту местности.



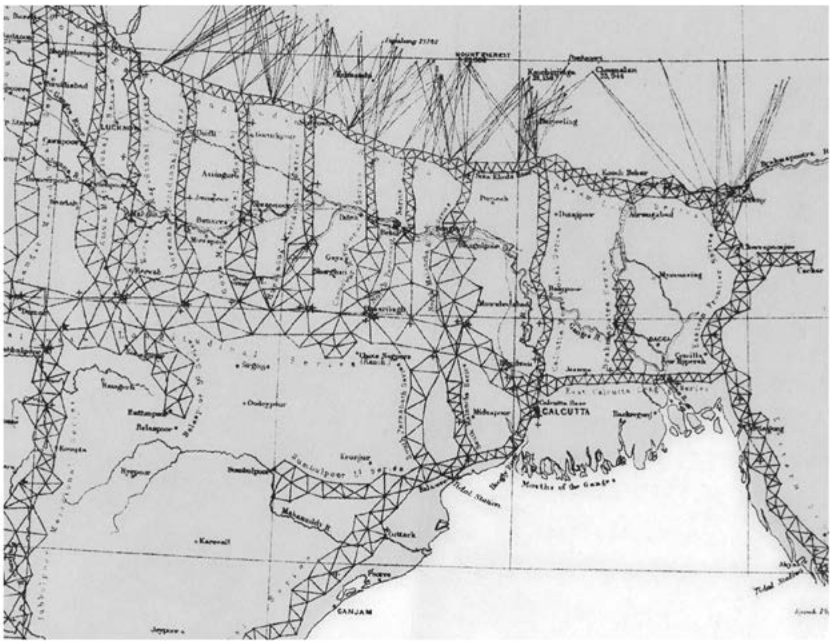
Триангуляция

Франция стала первой страной, в которой триангуляция была выполнена по всей территории, и произошло это в 1668 году. Единственная сложная задача в любом виде триангуляции заключается в измерении первого расстояния. Аббат Жан Пикар взял за основу участок прямой дороги от Вильжюиф до Жувиньи длиной в 11 километров, который тщательно измерил с помощью деревянных мерных реек. Затем Пикар отправился на север, используя в качестве вершин треугольников такие ориентиры, как часовые башни и вершины холмов, и измеряя только углы между ними. Добравшись до Атлантического океана, Пикар обнаружил, что побережье гораздо ближе расположено к Парижу, чем считалось раньше. «Твоя работа стоила мне приличной части моих владений!» — фыркнул Людовик XIV. Начатый Пикаром процесс триангуляции продолжался еще столетие после его смерти, пока территорию Франции не покрыли четыре сотни треугольников. Знаменитая карта Франции, составленная в итоге, содержала больше деталей, чем любая другая из созданных ранее карт, и была выполнена почти в том же масштабе, что и стандартные туристические карты Michelin, доступные в наше время.

Французы испытывали *amour fou* — безумную любовь к треугольникам. В 1735 году Людовик XV отправил две команды геодезистов-триангуляторов в противоположные концы Земли, для того чтобы решить важный научный спор. Земля — неидеальная сфера. Шли жаркие дискуссии вокруг того, какую форму она имеет — сплюснутую у полюсов (как грейпфрут) или на экваторе (как лимон). Эта тема стала предметом раздора между британцами, ратующими за первое, и французами, которые с ними не соглашались. Французы поняли, что можно правильно определить, на какой именно плод похожа Земля, сравнив расстояние, которое покрывает на поверхности Земли один градус широты у Северного полюса и у экватора. Если бы Земля имела форму идеальной сферы, длина одного градуса широты была бы везде одинаковой и составляла бы $\frac{1}{360}$ окружности Земли. Однако, если бы у полюсов это расстояние было больше, это означало бы, что земной шар сплюснут у полюсов, а если меньше, значит, у экватора. Французы отправили одну экспедицию в Лапландию, а другую — в сторону современного Эквадора в Южной Америке. Наблюдая за звездами, они рассчитали начальную широту, а затем в Лапландии начали строить сеть триангуляции строго на север, а в Эквадоре — строго на юг. В конечной точке триангуляции они снова определили широту посредством наблюдений за звездами. После длительной борьбы со снежными бурями и москитами в Скандинавии и высотной болезнью в Андах две группы пришли к выводу, что в Лапландии один градус широты длиннее. Британцы оказались правы: наш мир действительно похож на большой *pamplemousse* («грейпфрут» по-французски).

Французы использовали треугольник в качестве рабочего инструмента для социального и научного развития. Для Великобритании же это был инструмент управления империей [11]. Великое тригонометрическое исследование Индии, проводившееся в течение большей части XIX столетия, стало крупнейшим научным проектом своего времени. Говорят, по количеству погибших людей и потраченных денег оно превзошло многие индийские войны той эпохи. Процесс измерения начался с южной оконечности Индийского полуострова, продолжился по джунглям, Деканскому плоскогорью и северным равнинам и закончился в Гималаях под руководством полковника Джорджа Эвереста (правильное произношение его имени — «Иврест»).

В ходе триангуляции измеряются как горизонтальные, так и вертикальные углы, что дает возможность создать трехмерную сеть треугольников, позволяющую топографам измерить и высоту объектов, и расстояние между ними. В Гималаях высота горных вершин представляла наибольший интерес. В то время самой высокой в мире считалась гора Чимборасо в Эквадоре, высоту которой столетием ранее измерили французы. Гималаи с их покрытыми снегом вершинами называли величественными горами, но заявления о том, что они выше Анд, воспринимались как очередная небылица из страны фокусников и заклинателей змей. Однако это мнение изменилось, когда экспедиция Джорджа Эвереста добралась до цепи гор, вздымающихся в небо, у самой высокой из которых не было местного названия. Впоследствии ее нарекли «Эверест» — по имени полковника Эвереста. Это самая высокая гора в мире, и ее название все произносят неправильно.



Северо-восточная территория Великой тригонометрической службы Индии, в том числе Колката (бывшая Калькутта) и Гималаи

В Великобритании создание первой триангуляционной сети, охватывающей всю территорию страны, осуществлялось в период с 1783 по 1853 год. (Один конец базисной линии находится сейчас на территории автопарка аэропорта Хитроу, где размещен небольшой памятный знак. Базисные линии и аэропорты чаще всего располагаются на равнинах.) Повторная триангуляция началась в 1935 году и продолжалась до 1962 года. Управление геодезии и картографии установило в вершинах треугольников более шести тысяч бетонных геодезических знаков, ставших основой создания сети координат, используемой в официальных картах до сих пор.

Однако результаты повторной триангуляции почти сразу же устарели. Необходимость построения триангуляционной сети в масштабах всей страны была обусловлена тем, что измерять углы гораздо легче, чем расстояние между объектами. Но в 1960-х годах появилась новая лазерная технология, позволяющая точно определять большие расстояния. Достаточно разместить лазерный передатчик в одном месте, а приемник — в другом, и лазерный луч пройдет этот отрезок со скоростью света. Расстояние от источника до цели равно произведению скорости света на время прохождения этого расстояния. Когда у геодезистов появилась возможность использовать лазерные приборы, у них отпала необходимость в построении треугольников.

В Великобритании осталось 6200 геодезических знаков, и все они стали местом паломничества, причем не только для таких людей, как Роб Вудолл, но и для искателей приключений самых разных мастей. Геометрическая простота этих знаков, которые представляют собой пирамидальные обелиски с плоской верхушкой, придает им непреходящее мистическое очарование. Сейчас, когда они изрядно обветшали и потрепаны временем, поневоле задаешься вопросом: может, их поставили здесь друиды, а не географы?

Тем не менее новые технологии все же не могут обойтись без треугольников. Тригонометрические функции — неотъемлемая часть Глобальной системы позиционирования (Global Positioning System, GPS), инфраструктуры на основе спутниковой связи, которая устанавливает местоположение наших смартфонов и автомобильных навигаторов, в каком бы месте земного шара мы ни находились. Каждый спутник сети расположен на независимой орбите, которая определяется на основании ряда параметров, рассчитанных с помощью синусов и косинусов. Для того чтобы мой телефон вычислил свое местоположение, он должен получить такие координаты минимум с четырех спутников. Когда это происходит, он обрабатывает эти данные, обращаясь к таблице синусов и косинусов, хранящейся в его памяти.

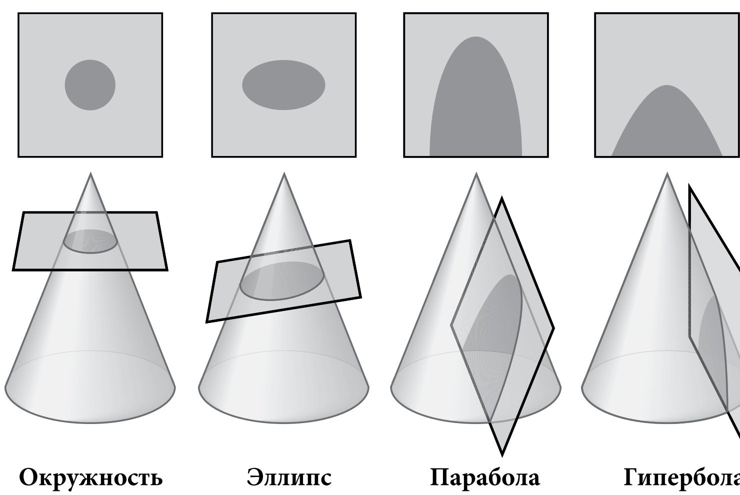
Ученые пользовались таблицами тригонометрических функций на протяжении двух тысяч лет. В настоящее время мы носим их в карманах. Принцип, который гласит, что стороны треугольников с одинаковыми углами пропорциональны, был положен в основу первого математического доказательства и сохраняет свою важность в информационную эпоху.

4

Конусоголовые

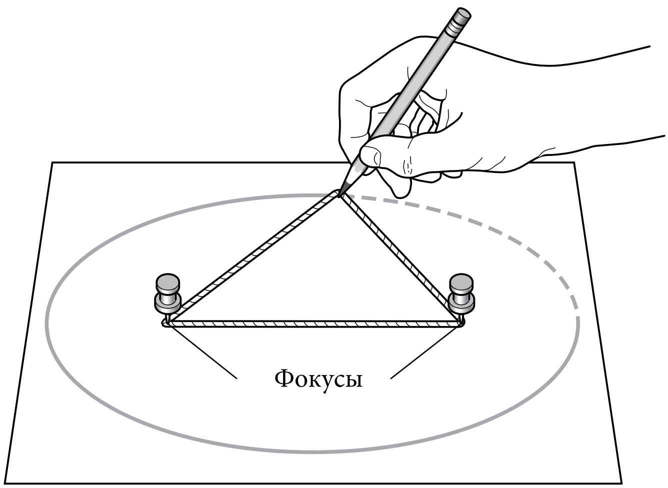
Давайте возьмем прямоугольный треугольник и модифицируем его, вращая вокруг одной из меньших сторон. Полученный трехмерный объект — это конус: геометрическое тело с основой в виде круга и острой вершиной. Такие объемные фигуры не очень практичны: их нельзя катать как шары или складывать друг на друга как кубики. Тем не менее в прошлом конус активно использовался в моделях головных уборов. Вьетнамские крестьяне, работающие на рисовых полях, волшебники, отстающие ученики — все они носили остроконечные шляпы. У древних греков среди ремесленников и простого люда был популярен конусообразный головной убор из войлока или кожи — *пилос*. Однако в целом интерес к конусу имел скорее интеллектуальный, чем портняжный характер, поскольку конус — это настоящий математический клад.

Разрежьте конус ножом — и полу́чите сечение в виде одной из четырех кривых: окружность, эллипс, парабола или гипербола. Форма конического сечения зависит от угла наклона лезвия ножа. Горизонтальный разрез образует окружность; наклонный разрез, пересекающий боковую поверхность конуса, — эллипс; разрез, параллельный образующей конуса, — параболу, а более глубокие разрезы — гиперболу, как показано на рисунке ниже. Анализ конических сечений стал высшим достижением древнегреческой геометрии и представляет собой яркий пример того, как некий объект исследований изучался исключительно ради удовольствия и лишь тысячелетие спустя нашел важнейшее применение. Оказалось, что обычный конус содержит ответы на фундаментальные вопросы об устройстве Вселенной.



Конические сечения

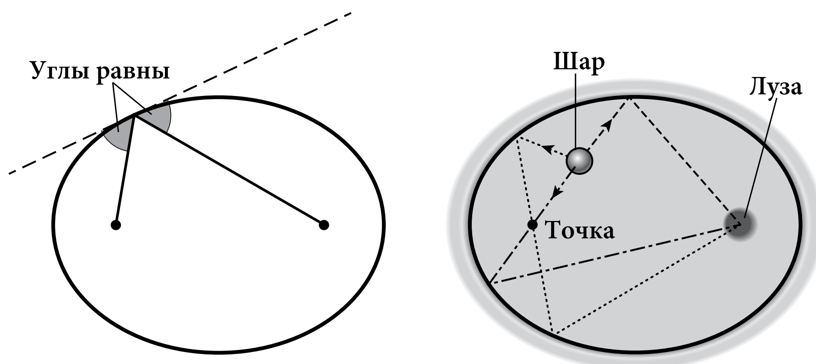
Окружность — это замкнутая плоская кривая, все точки которой равноудалены от центра. Привяжите нить к карандашу и воткнутой в бумагу булавке, натяните нить — и сможете нарисовать окружность. А теперь сделайте из нити петлю и зафиксируйте ее на двух булавках, как показано на рисунке ниже. Путь, который пройдет карандаш, туго натягивающий нить, — это эллипс. Все окружности имеют одинаковую форму, а это значит, что при их уменьшении или увеличении полученная в итоге окружность будет идентична любой другой окружности. Эллипсы, напротив, бывают разной формы, зависящей от положения булавок, или фокусов. Чем ближе фокусы друг к другу, тем больше эллипс напоминает окружность. Когда фокусы совпадают, эллипс превращается в окружность. На самом деле в математике окружность считается частным случаем эллипса с совпадающими фокусами.



Как нарисовать эллипс

При взгляде на окружность под углом мы видим эллипс. Колеса, монеты, часы, обручи, кольца и диски всегда выглядят как эллипсы, если только они не находятся параллельно лицу, что бывает нечасто. Кроме того, для любого эллипса есть такой угол зрения, под которым он похож на окружность. (Отодвиньте эту книгу в сторону и поверните ее от себя, чтобы увидеть любой из эллипсов на этих страницах как окружность.)

Эллипс обладает одним геометрическим свойством, представляющим исторический интерес для любителей игр в закрытых помещениях. Если стол для игры в американский бильярд сконструирован в виде эллипса, то шар, посланный из одного фокуса, всегда отскакивает от борта и направляется ко второму фокусу, независимо от того, в каком направлении сделан удар по шару. Эта интересная особенность обусловлена следующим свойством эллипса: прямая линия, проведенная от одного фокуса к точке на эллипсе, образует с касательной такой же угол, что и линия, проведенная из этой точки к другому фокусу, как показано на рисунке слева. Когда вы наносите удар по шару, отбивая его на край стола, угол движения шара в момент его приближения к борту равен углу в тот момент, когда шар отскакивает от борта, — это известно любому, кто когда-либо натирал мелом конец кия [1]. Следовательно, если ударить по шару в одной точке фокуса, он обязательно отскочит в направлении другого фокуса.



Линии, проведенные от точки на эллипсе к двум его фокусам, образуют с касательной одинаковые углы, что обеспечивает бильярдистам три способа загнать шар в лузу непрямым ударом

В начале 1960-х годов ученик средней школы из Коннектикута Арт Фриго-младший сделал эллиптический стол для игры в американский бильярд, после того как узнал о конических сечениях в школьном математическом кружке. На столе Арта была черная точка на месте одного фокуса и луза — на месте другого; больше луз у этого стола не было. Если на столе находился только один шар, как показано на рисунке справа, существовало три способа загнать его в лузу, нацеливаясь не на саму лузу, а на черную точку. В таком случае, если сделать удар по шару в направлении черной точки, шар пройдет через нее, ударится о борт и попадет в лузу; если сделать удар по шару в направлении, противоположном направлению на черную точку, шар также отскочит от борта и попадет в лузу; если сделать удар по шару в направлении, противоположном лузе, то шар отскочит от борта один раз, пройдет через черную точку, ударится о борт еще раз, отскочит и снова попадет в лузу. Этот стол был настоящей машиной по забиванию шаров в лузу! Арт предложил начинать игру, которую он назвал «эллиптипул», с одного белого и шести цветных шаров на столе. Оригинальная форма стола открывала уникальные возможности для создания новых схем игры.

Арт сделал прототип своего стола и взял его с собой, когда поступил в Колледж Союза в городе Скенектади. В студенческом клубе стол пользовался такой популярностью, что о нем даже рассказывали в теленовостях. Впоследствии Арт запатентовал стол, и одна из компаний по производству игрушек предложила парню сделку. «У них были заказы на 80 000 столов. Мне тогда исполнился 21 год, и я подумал: “Я стану миллионером!”» — вспоминал он. Компания наняла Пола Ньюмана, который как раз снялся в главной роли в драме о бильярде The Hustler («Мошенник»), для съемок в рекламе стола. Однако возникли непредвиденные трудности. В результате понадобился почти год, чтобы столы поступили в продажу, но к тому времени дерево, из которого они были сделаны, деформировалось. После этого была разработана новая версия более прочного стола с монетоприемником, и такие столы установили в сотнях баров крупных городов. Но и это не помогло.

Когда Арт побывал в одном из таких мест, чтобы понаблюдать за игрой, он очень расстроился из-за того, что за его столом никто не играл. «Мне было больно, когда я увидел, что люди не понимают эту игру, — сетовал он. — Люди воспринимали мой стол просто как стол, который чем-то отличается от остальных. Если вы не знаете о фокальных точках, мяч не полетит туда, куда надо. Люди не могли загнать шар в лузу, потому что не понимали сути игры». Тем не менее, по словам Арта, этот опыт научил его тому, как не *нужно* начинать выпуск продукта. Впоследствии он стал успешным предпринимателем, занимаясь бриллиантами и губковыми швабрами. В настоящее время Арт живет во Флориде и импортирует оливковое масло.

Возможно, математической зависимости между фокусами эллипса и не удалось совершить переворот в американской барной культуре, но зато она нашла прекрасное применение в индустрии осветительных приборов. Подобно тому как бильярдный шар, посланный из одного фокуса эллипса, отскакивает от борта в направлении другого фокуса, все лучи источника света, если его разместить в фокусе эллипса, сделанного из отражающего материала, будут направлены в сторону другого фокуса. Вращая эллипс вокруг невидимой линии, соединяющей две фокальные точки, вы получите трехмерную фигуру под названием «эллипсоид». Если разместить лампочку у одного из фокусов эллипсоида с зеркальной внутренней поверхностью, это и будет основной элемент театрального прожектора. Речь идет о самом эффективном способе получения узконаправленного луча света. Излучаемый лампочкой свет отражается поверхностью эллипсоида и собирается во втором фокусе, образуя концентрированный пучок света, который преломляется затем через линзу. На самом деле оптическое применение конических сечений объясняет происхождение слова «фокус»: на латыни оно означает «очаг». В немецком языке происхождение этого слова еще более очевидно: «фокус» на немецком — *brennpunkt*, что значит «точка воспламенения».

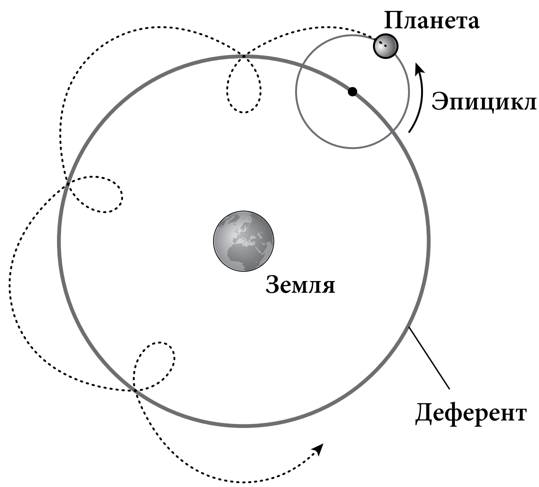
Здания с эллиптическими крышами обладают удивительными свойствами, поскольку звук, созданный в одном из фокусов, будет отражаться из любой точки на поверхности крыши в другой фокус. Например, гигантский купол мормонского Табернакля (молитвенного дома) в Солт-Лейк-Сити был специально построен в форме половины эллипсоида [2]. Если вы уроните булавку у кафедры проповедника, которая находится в одном из фокусов, звук от ее падения будет отчетливо слышен у другого фокуса, расположенного более чем в пятидесяти метрах от первого.

Развитие древнегреческой математики длилось почти тысячу лет, от Фалеса, который жил в VII–VI веках до нашей эры, до последней значимой фигуры — Паппа, предположительно жившего на рубеже IV–III веков до нашей эры [3]. Самое почетное место занимают три мыслителя: Евклид, Архимед и Аполлоний, великая троица классических математиков. Все они жили в III столетии до нашей эры. С Евклидом и Архимедом мы встретимся немного позже. Аполлоний же, самый младший из них, учился и преподавал в Александрии. Кроме того, он проживал в городе Пергам (территория современной Турции), в котором находилась вторая по величине библиотека Греческой империи. В наше время из этих троих гигантов мысли Древней Греции Аполлоний наименее известен, хотя в свое время его называли *Megas Geometris* — Великим Геометром. Из всех его книг до нас дошел только трактат о конусах Conics («Конические сечения»).

В трактате «Конические сечения» Аполлоний показал, как рассечение конуса позволяет получить три типа сечений, и дал им имена. Термин «эллипс» происходит от греческого слова *leipein* («опустить, пропустить»), «парабола» — от *para* («рядом, около»), а «гипербола» — от *hyper* («сверх, по ту сторону»). (Суффикс *-bola* означает «бросать» [4].) Названия, выбранные Аполлонием, основаны на свойствах областей этих кривых, достаточно сложных для того, чтобы их здесь объяснять. Однако мы можем выяснить, что он имел в виду, воспользовавшись понятием угла наклона секущей плоскости и той аналогией с рассечением конуса, о которой шла речь выше. Когда угол наклона секущей плоскости равен углу наклона боковой поверхности конуса, полученное сечение называется параболой; когда этот угол больше — гиперболой. В трактате «Конические сечения» содержится 387 тезисов; читать этот труд нелегко, отчасти потому, что Аполлоний использует громоздкую систему обозначений, уже вышедшую из употребления. Тем не менее он проделал колоссальную работу, которая считается высшим достижением древнегреческой геометрии. Тщательно изучив свойства конуса, Аполлоний создал формальную основу для крупных научных открытий, сделанных спустя два тысячелетия.

В «Конических сечениях» Аполлоний самонадеянно заявил, что тему этого трактата стоит изучать исключительно ради удовольствия. И все же он разработал математические концепции, нашедшие применение на практике. Древние звездочеты видели, что планеты перемещаются не по прямым линиям, а блуждают по небу и зачастую даже возвращаются обратно, образуя петли. (Слово «планета» происходит от греческого *planetes* — «странник».) В свое время Платон заявил, что планеты двигаются по идеальной окружности, которая представляет собой самую простую и изящную форму. Это утверждение основывалось на уверенности Платона в том, что мир построен с геометрической простотой и элегантностью, даже если факты говорят об обратном. Данным заявлением Платон бросил мыслителям вызов: доказать блуждающее движение небесных тел, используя определенное сочетание круговых движений. Аполлоний принял вызов и разработал систему, которая стала стандартной моделью на почти две тысячи лет.

Согласно предложенному Аполлонием описанию движения планет Земля находится в центре мироздания. Каждая планета движется по малой окружности — эпициклу, который, в свою очередь, перемещается вокруг Земли по большой окружности — деференту, как показано на рисунке ниже. Эта похожая на кружево орбитальная траектория напоминает рисунок, полученный с помощью спирографа — игрушки, в которой маленькое зубчатое колесо с ручкой в одном из отверстий вращается вокруг зубчатого колеса большего диаметра. Бывают моменты, когда орбита планеты, которая движется по эпициклу, перемещающемуся по деференту, образует петли, что объясняет, почему время от времени планеты как будто движутся в обратную сторону. Система Аполлония полностью соответствовала фактическим данным при совсем незначительных погрешностях, легко устраняемых посредством введения дополнительного эпицикла. Это означало, что орбита планеты формируется под влиянием совокупности трех круговых движений, другими словами — движется по окружности, которая перемещается по второй окружности, которая, в свою очередь, движется по третьей окружности с Землей в центре.



В труде «Альмагест», написанном во II веке нашей эры*, греческий астроном Птолемей описал систему эпициклов и деферентов, которая оставалась общепризнанной моделью устройства мира вплоть до XVI столетия. Никто не подвергал ее сомнению, даже когда более точные измерения требовали включения все большего количества эпициклов. Последняя версия этой мо-

* *Клавдий Птолемей.* Альмагест. Математическое сочинение в 13 книгах. М. : Наука. Физматлит, 1998.

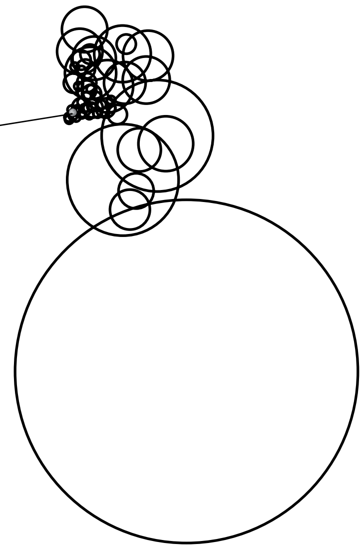
дели, включавшая в себя 39 циклов и эпициклов, описывала движение пяти планет, Солнца и Луны [5]. Мечта Платона о геометрической элегантности привела к созданию чрезвычайно запутанной схемы, которую даже церковь критиковала за нерациональность. «Если бы Всемогущий Бог посоветовался со мной перед творением, я бы порекомендовал что-нибудь попроще», — сказал в XIII веке о системе Птолемея король Альфонсо X Кастильский, которого еще называли *El Sabio* — Мудрый.

Сейчас мы знаем, что Аполлоний был неправ. Более простая модель планетных орбит все же *существует*, о чем мы поговорим чуть позже. На самом деле пренебрежительная фраза «прибавлять эпициклы» употребляется в наше время по отношению к плохой науке, бесконечному совершенствованию ошибочной теории в надежде на то, что в конце концов она сработает. Тем не менее система эпициклов господствовала так долго потому, что она как нельзя лучше справлялась со своей задачей. В большинстве случаев теория опровергается тогда, когда доказана ее несостоятельность. Но теорию эпициклов так никто и не опроверг, поскольку это невозможно в принципе. Интересно то, что циклы и эпициклы можно использовать для описания любой замкнутой непрерывной орбиты [6]. Идея Аполлония оказалась настолько действенной, что никому даже в голову не приходило искать что-то другое.

В 2005 году аргентинцы Кристиан Карман и Рамиро Серра решили описать невероятно сложную орбиту, а затем найти эпициклы, образующие ее [7]. Они выбрали для этого изображение Гомера Симпсона, поскольку оно вовсе не похоже на орбиту, а еще потому, что это ведь Гомер Симпсон!* Представленный ниже рисунок с немалым количеством завитушек — это модель гомеровской орбиты. Большая окружность — деферент, а переплетение окружностей поменьше содержит 9999 эпициклов разных размеров. Планета вращается вокруг 9999-го эпицикла, который движется вокруг 9998-го эпицикла и так далее до самого первого эпицикла, вращающегося вокруг деферента. К тому времени, когда планета завершит один оборот вокруг деферента (и два оборота вокруг первого эпицикла, три вокруг второго и т. д., в том числе 10 000 оборотов вокруг 9999-го эпицикла), она пройдет весь путь по этому рисунку. Карман и Серра были, по их собственным словам, «поистине взволнованы и очень довольны», когда их модель заработала. Пожалуй, Платон тоже оценил бы присущую Гомеру поэтичность.

---

* Гомер Джей Симпсон — один из главных героев мультсериала «Симпсоны». Отец семейства, где кроме него и его жены Мардж еще трое детей. *Прим. ред.*



Похоже на Мардж, но это Гомер: путь, пройденный планетой, орбита которой представляет собой совокупность 10 000 окружностей, — это портрет главы семейства Симпсонов

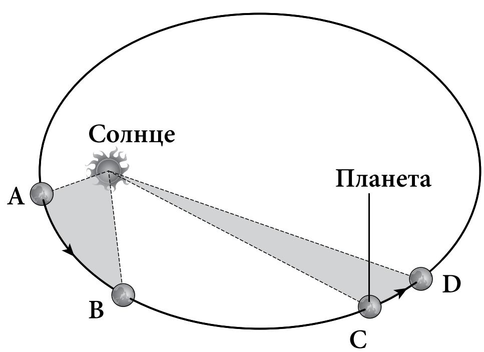
Шестнадцатого мая 1571 года в 4:37 утра в небольшом немецком городке Вайль-дер-Штадт был зачат Иоганн Кеплер [8]. Он родился через 224 дня, 9 часов и 53 минуты, в 14:30 27 декабря. Эти детали известны нам благодаря гороскопу, который Кеплер составил для себя в возрасте 26 лет. В нем он рассказывает также о том, что едва не умер от оспы, что его руки были сильно изуродованы, что он часто страдал от болезней кожи и что когда в возрасте 21 года он потерял невинность, то это далось ему «с невероятным трудом и сопровождалось острой болью в мочевом пузыре». Исходя из всего этого, мы можем сделать вывод о наличии у Кеплера качеств, определивших всю его жизнь: мнительность, склонность к самоанализу, одержимость звездами и любовь к числам.

К тому времени, когда Кеплер составил этот гороскоп, он уже опубликовал свою первую книгу The Mystery of the Cosmos («Тайна мироздания»), в которой представил модель планетарной системы, основанную на предложенной на полстолетия раньше революционной теории Николая Коперника о том, что планеты вращаются вокруг Солнца. Хотя Коперник отвергал геоцентризм, он все же считал, что планеты перемещаются по эпициклам. Кеплер усовершенствовал эти воззрения посредством модели, в которой орбиты планет образуют суперструктуру из геометрических объектов, так называемых платоновых тел, таких как куб, тетраэдр, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Все эти фигуры были разного размера, но в центре структуры находилось Солнце. Безусловно, это была неправильная модель, тем не менее книга «Тайна мироздания» сделала Кеплеру имя в ученых кругах, и, когда знаменитый датский астроном Тихо Браге начал строить новую обсерваторию возле Праги, он взял амбициозного молодого немца к себе в помощники.

Браге был эпатажным аристократом. Он носил протез носа из сплава золота и серебра, после того как кузен отсек нос ему во время дуэли, состоявшейся из-за одной математической формулы. Кроме того, у Браге был домашний лось, который упал замертво, выпив слишком много пива за ужином. Однако этот датчанин гораздо бережнее обращался со своими астрономическими данными — самыми точными и полными на то время, о чем знала вся Европа. Тихо Браге поручил Кеплеру разобраться с орбитой Марса — планеты, путь которой больше всего отклонялся от круговой орбиты. Это была изнурительная, кропотливая работа, требующая построения возможных орбит, расчета прогнозируемых позиций и проверки данных наблюдения. «Если этот утомительный метод внушает вам отвращение, — объяснял Кеплер впоследствии, — он должен внушить вам и сострадание ко мне, поскольку я проделал это не менее семидесяти раз».

В период «боев с Марсом» Кеплер сделал перерыв, во время которого изобрел современную оптику. В книге The Optical Part of Astronomy («Оптика в астрономии») есть раздел о зеркалах, сделанных в форме конических сечений: эллипса, параболы и гиперболы. В действительности именно в этом труде Кеплер ввел слово «фокус», означавшее точку пересечения отраженных лучей света. Когда Кеплер вернулся к Марсу, его так вывела из себя неспособность найти систему круговых движений, которая согласовывалась бы с данными наблюдения, что в конце концов он решил отказаться от теории эпициклов. Новое направление исследований вряд ли внушало Кеплеру оптимизм. «Я очистил авгиевы конюшни астрономии от окружностей и спиралей, — сетовал он, — и остался с одной телегой навоза». На протяжении года Кеплер экспериментировал с яйцевидной орбитой — овалом, сплюснутым у одного края и более острым у другого, хотя сам ученый испытывал отвращение к такой форме орбиты и не считал ее ни симметричной, ни гармоничной. Для того чтобы аппроксимировать этот овал в своих вычислениях, он использовал эллипс — геометрическую фигуру, которую знал по работе с применением конических сечений в оптике. И тут его осенило: эта фигура с ее свойствами сама может все объяснить. «*O me ridiculum!* Каким же глупцом я был! — воскликнул Кеплер. — Идеальный эллипс — это единственно возможная форма орбиты планет».

Поначалу Кеплер отбрасывал идею об эллиптической орбите Марса, потому что считал ее слишком простой для того, чтобы ее не заметили другие ученые. Кроме того, он знал, что у эллипса два фокуса, а это противоречило теории об уникальности Солнца, предполагающей, что оно должно быть в центре системы, а не в одной из одинаково важных точек. Однако затем Кеплер понял, что, несмотря на кажущееся противоречие, Солнце *действительно* находится в одном из фокусов и что именно его влияние определяет скорость движения планеты по орбите. (В другом фокусе нет ничего.) Чем ближе планета к Солнцу, тем быстрее она движется по эллиптической орбите, но охватывает при этом равную площадь за равные промежутки времени, как показано на рисунке ниже. Философ Норвуд Рассел Хэнсон писал, что величайшее достижение Кеплера было самым смелым актом воображения за всю историю науки [9]. «Даже концептуальные потрясения [двадцатого столетия] не требовали такого разрыва с прошлым». Модель эпициклов Аполлония была в конце концов вытеснена эллипсом — кривой, которой Великий Геометр сам дал имя и свойства которой знал лучше, чем кто-либо другой.



Для того чтобы добраться из точки A в точку B, требуется столько же времени, сколько из точки C в точку D, поскольку заштрихованные сегменты имеют одинаковую площадь. Следовательно, по мере отдаления от Солнца планета движется медленнее

В 1610 году Кеплер получил послание от Галилео Галилея, выдающегося астронома, жившего за Альпами, в Италии. Оно гласило:

smaismrmilmepoetalevmibunenugttaviras

Новость Галилея была слишком захватывающей, чтобы держать ее в себе, но и слишком ценной, чтобы рассказывать о ней всем подряд, тем самым помогая кому-то в его научных изысканиях. Поэтому ученый написал ее в виде анаграммы, что устанавливало приоритетность открытия, а также позволяло сохранить детали в тайне и избежать чрезмерной ответственности в случае, если он окажется неправ.

Эта загадка сводила Кеплера с ума. В конце концов ему показалось, что он у цели, когда он переставил буквы и получил вместо бессмысленного набора символов предложение, имевшее смысл: «*Salve umbistineum geminatum Martia proles*» — «Привет вам, близнецы, порождение Марса» (хотя он и использовал здесь латинизацию немецкого слова *umbeistehen*). Кеплер был убежден, что его соперник обнаружил у Марса два спутника. Впоследствии Галилей расшифровал эту анаграмму так: «*Altissimum planetam tergeminum observavi*» — «Высочайшую планету тройную наблюдал». Открытие касалось вовсе не Марса, а Сатурна: Галилей выявил у этой планеты выпуклости по бокам, которые образуют кольца Сатурна. Но самое интересное, что Кеплер таки оказался прав! У Марса действительно есть два спутника, Фобос и Деймос, которые были открыты два столетия спустя.

Чуть позже Галилей поддразнил Кеплера еще одной анаграммой, но на этот раз она имела смысл и носила намеренно провокативный характер: «*Haec immatura a me iam frustra leguntur — oy*», или «Эта ущербность разбирается мною пока безуспешно». В данном случае Кеплер тоже нашел решение со смыслом: «*Macula rufa in Jove est gyratur mathem etc*» — «Ибо Юпитер, увы, говорят, вертится, испачканный красным пятном». На самом деле Галилей хотел передать такое послание: «*Cynthiae figuras aemulatur Mater Amorum*» — «Мать любви [Венера] подражает фигурам Цинтии [Луны]» (это означало, что у Венеры тоже есть фазы, напоминающие фазы Луны). Тем не менее ошибочный перевод Кеплера снова оказался пророческим. Через пятьдесят лет астрономы увидели, что у Юпитера действительно есть красное пятно — гигантский атмосферный вихрь, известный как Большое красное пятно.

Галилей и Кеплер изменили представление об ученых, превратившись из пассивных исследователей в героев-первооткрывателей. Имея перед собой единственную Вселенную, каждый из них хотел получить признание как человек, определивший ее строение. После Галилея многие ученые, в том числе Роберт Хук, Христиан Гюйгенс и Исаак Ньютон, использовали не поддающиеся расшифровке анаграммы, для того чтобы защитить свою интеллектуальную собственность. Так продолжалось до тех пор, пока публикация в журнале не стала в XVIII столетии стандартным способом объявить о последних научных достижениях.

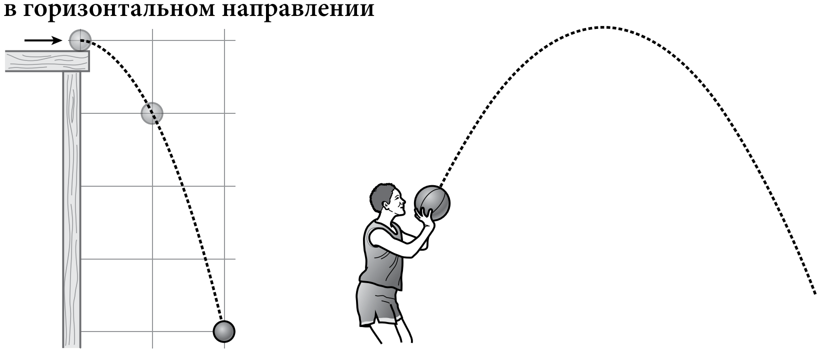
Галилей принял теорию Коперника о том, что Земля вращается вокруг Солнца, но опровергал гипотезу Кеплера об эллиптической форме орбит планет [10]. Несмотря на это, Галилей добился серьезных успехов в изучении движения сферических объектов другого типа. Летом 1592 года в качестве молодого профессора математики он посетил своего друга и покровителя, маркиза Гвидобальдо дель Монте в его замке в Урбино. Маркиз был назначен генеральным инспектором укреплений Тосканского герцогства, а это означало, что для него особый интерес представляла траектория движения пушечных ядер. Они летят по прямой линии, а затем падают вниз, как предполагала традиционная аристотелевская механика, или двигаются по какой-то кривой, прежде чем долетят до цели?

Для того чтобы выяснить это, друзья провели эксперимент, который оказался настолько простым, что трудно было поверить, как никто не додумался до этого раньше. Они взяли два небольших металлических шара, окунули их в чернила и запустили по диагонали по наклонной плоскости. След, оставленный каждым из шаров, представлял собой симметричную дугу. Галилей видел, что шары поднимаются вверх точно так же, как и опускаются вниз: траектория движения вверх представляет собой зеркальное отображение траектории падения. Эта симметрия навела Галилея на мысль о том, что движение можно разделить на горизонтальные и вертикальные элементы. В свободном полете характер движения объекта по горизонтали отличается от характера вертикального движения. Впоследствии Галилей провел и другие эксперименты с шарами, покрытыми чернилами, продемонстрировав, что если тело брошено со стола горизонтально, то:

1) горизонтальное смещение пропорционально затраченному времени. Так, если тело проходит 1 единицу расстояния за 1 секунду, оно пройдет 2 единицы за 2 секунды, 3 единицы за 3 секунды и т. д.;
2) вертикальное смещение пропорционально квадрату затраченного времени. Так, если тело падает на 1 единицу расстояния за 1 секунду, оно упадет на 4 единицы за 2 секунды, на 9 единиц за 3 секунды и т. д.

На основании знаний о свойствах конических сечений, открытых Аполлонием, Галилей смог сделать вывод, что траектория движения шара, запущенного со стола, представляет собой параболу, как показано на рисунке слева [11]. Когда какое-либо тело, например баскетбольный мяч, запускается под углом (рисунок справа), оно тоже движется по параболе, но сначала мяч должен подняться по одной ее стороне, а затем опуститься по другой ее стороне. Такая парабола является траекторией движения объекта, свободно движущегося под воздействием силы тяжести. Это может быть струя фонтана, полет стрелы или движение мяча, брошенного в воздух. Писатель Томас Пинчон назвал свой выдающийся роман Gravity's Rainbow* в соответствии с описанием оставленного немецкой ракетой «Фау-2» параболического следа, представляющего собой метафору расцвета и падения культур.

Мяч, запущенный в горизонтальном направлении



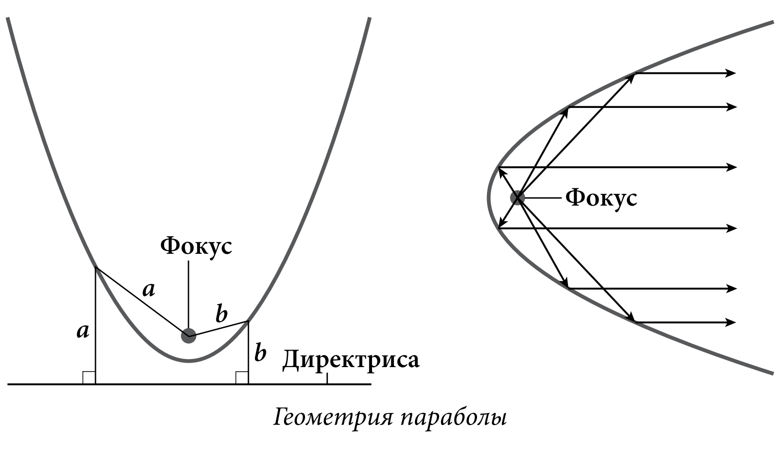
На протяжении почти двух тысяч лет конические сечения считались вершиной древнегреческой математической мысли, красивыми кривыми без какой-либо практической функции. Затем были открыты сразу две области их применения, которые, как оказалось, «скрывались» у всех на виду: планеты перемещаются по эллиптическим орбитам, а брошенные тела — по

* *Пинчон Т.* Радуга тяготения. М. : Эксмо, 2012.

параболам. В конце XVII века Исаак Ньютон продемонстрировал, как оба эти следствия вытекают из его законов движения и всемирного тяготения. Галилей и Кеплер изучали одну и ту же проблему в разных масштабах. (Строго говоря, брошенный в воздух камень на самом деле начинает двигаться по эллиптической орбите вокруг Земли, и он бы завершил процесс, если бы масса Земли была сосредоточена в ее центре. Однако, с точки зрения наблюдателя, мы можем предположить, что брошенный камень движется по параболе.)

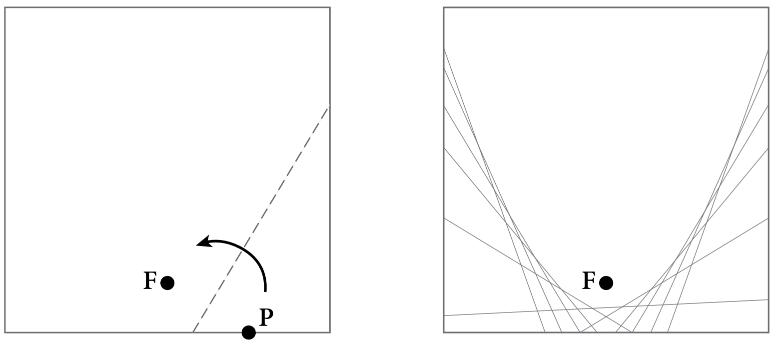
У парабол есть одно важное, удивительное свойство: все они имеют одну и ту же форму. Как параболу ни уменьшай или ни увеличивай, она останется подобной другим параболам, точно так же как окружность не меняет своей формы при изменении диаметра. Это вытекает из нашего первоначального определения конических сечений, согласно которому каждый угол наклона секущей плоскости образует уникальную фигуру. Окружность и парабола могут быть образованы только под одним углом: в случае окружности секущая поверхность должна быть параллельной основанию конуса, а в случае параболы — боковой поверхности конуса. Эллипс и гипербола могут быть получены под разными углами наклона секущей поверхности, а значит, они могут иметь разную форму.

Для описания параболы существуют два определения: 1) это геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки и заданной линии, известных как фокус и директриса (см. рисунок слева); и 2) это кривая, которая, будучи сделанной из отражающего материала, отражает все лучи света, исходящего из фокуса, параллельно друг другу (см. рисунок справа).



Геометрия параболы

Первое определение предоставляет оригамистам легкий способ построения параболы. Обозначьте точку F на листе бумаги, как продемонстрировано на левом рисунке ниже. Возьмите произвольную точку P на нижней кромке листа и сложите лист так, чтобы совместить эти точки друг с другом, как показано стрелкой. Полученную линию сгиба отметьте пунктиром. Повторите данную процедуру для множества точек, расположенных на нижней кромке листа бумаги. Полученная в итоге кривая — это парабола. (Подсказка: каждый сгиб образует линию, точки которой равноудалены от фокуса и произвольной точки.)



Построение параболы посредством сгибания листа бумаги

Второе определение объясняет, почему парабола — самая распространенная кривая в магазине осветительных приборов. Если лампочка установлена в фокусе параболического зеркала, лучи света отражаются параллельно. Вращение параболы вокруг ее центральной оси образует параболоид, в форме которого и сделаны отражающие зеркала в фонариках, прожекторах и автомобильных фарах.

Этот процесс работает и в обратном направлении. Параллельные лучи света, поступающие в параболоид, отражаются его поверхностью в фокус. Следовательно, если задача рефлектора — собрать в пучок солнечные лучи (которые можно считать параллельными, поскольку Солнце находится очень далеко), понадобится параболическая поверхность. Параболоиды широко применяются в технологии использования солнечной энергии. Например, отражатель Шеффлера, параболическая металлическая чаша, повсеместно используется в развивающихся странах для приготовления пищи. Он направлен на Солнце и медленно поворачивается вслед за его движением, для того чтобы поймать как можно больше солнечных лучей, отражая их в одну и ту же точку (фокус), в которой находится плита. Самая мощная солнечная печь представляет собой параболическое зеркало высотой 45 метров, расположенное во французских Пиренеях, неподалеку от Одейо. Из-за огромных размеров само зеркало не двигается, а принимает отраженный солнечный свет от 63 маленьких плоских вращающихся зеркал. В фокусе зеркала находится круглый щит, который в солнечные дни нагревается до 3500 °C — достаточно высокая температура, для того чтобы варить свинец, плавить вольфрам или превратить дикого кабана в пепел.

Солнечная печь в Одейо, Франция

Параболические антенны служат также для приема электромагнитных и звуковых волн, поступающих в фокус от удаленных объектов. Такие антенны уже стали привычным элементом городского пейзажа: чаще всего они устанавливаются на крышах домов тех людей, которые смотрят спутниковое телевидение, но их можно встретить и на командно-диспетчерских пунктах и военных объектах. Шпионы, инженеры звукозаписи на телевидении и орнитологи используют параболические микрофоны для улавливания тихих звуков с большого расстояния. Принцип во всех случаях один и тот же. Параболоид — единственная геометрическая фигура, отражающая параллельные волны в определенную точку.

В 1668 году Исаак Ньютон построил первый «отражающий» телескоп, ключевыми элементами которого были зеркала, а не линзы, использовавшиеся в телескопах до этого. Ньютон понял, что для основного зеркала самая оптимальная форма — параболоид, но не смог изготовить такое зеркало, поэтому ему пришлось довольствоваться сферическим. Однако даже при наличии подобного дефекта отражающий телескоп был гораздо лучше, чем предыдущие модели, поэтому, начиная с XVII века, большинство телескопов были зеркальными.

Кроме того, Ньютон сделал в отношении парабол одно открытие, которое представляло в то время сугубо теоретический интерес, а сейчас успешно применяется в промышленном производстве телескопов. Если вращать цилиндрический сосуд, наполненный жидкостью, ее поверхность принимает форму параболоида. Под воздействием вращения жидкость поднимается выше у стенок сосуда и образует углубление в центре, создавая поперечное сечение в форме параболы. На этом свойстве построен один из способов изготовления параболических зеркал — вращать сосуд с расплавленным стеклом и дать этому стеклу застыть в таком положении. Большой бинокулярный телескоп, один из самых мощных телескопов в мире, был сделан именно так. Телескоп состоит из двух параболических зеркал диаметром 8,4 метра, изготовленных в огромной вращающейся печи в подземной лаборатории, расположенной под футбольным полем Аризонского университета в Тусоне. Хотя лаборатория может выпускать в год всего по одному зеркалу ценой в десятки миллионов долларов, это все равно более дешевый и быстрый метод, чем изготовление аналогичного зеркала посредством шлифовки стекла.

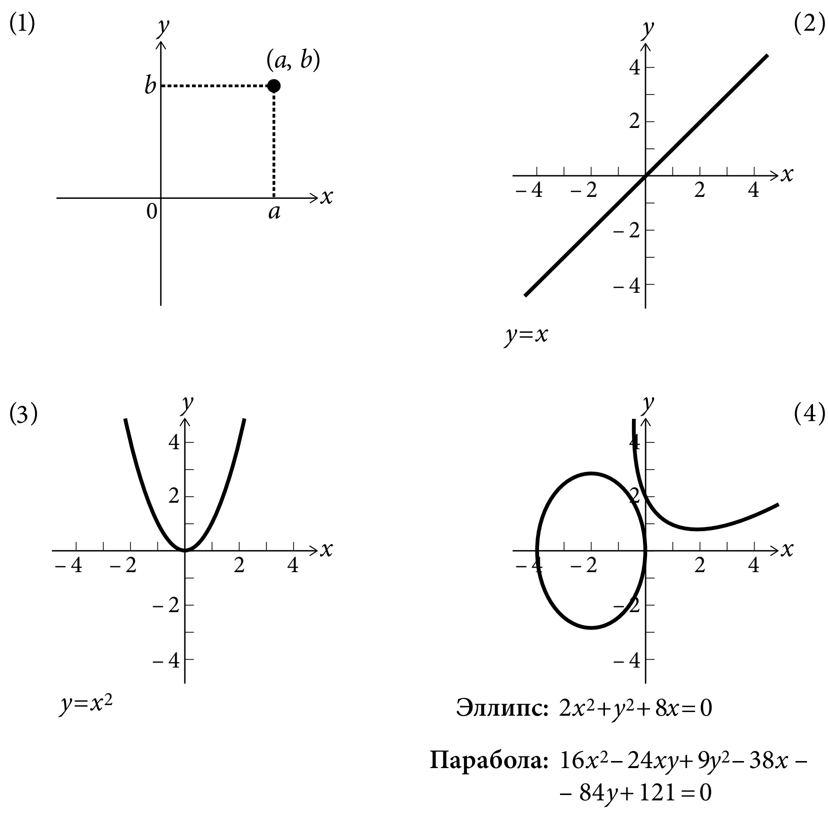
Еще дешевле телескоп с жидким зеркалом — в нем используется вращающийся цилиндр, наполненный отражающей жидкостью. Большой зенитный телескоп возле Ванкувера представляет собой чашу, наполненную ртутью, которая во время вращения принимает форму параболоида. На настоящий момент это самый дешевый из крупных телескопов мира, но у него есть один серьезный недостаток: чаша вращается в горизонтальной плоскости, а значит, телескоп может быть направлен только прямо вверх, в зенит.

В 1637 году французский математик Рене Декарт изобрел систему координат, что стало самым значительным прорывом в понимании конических сечений со времен Аполлония. Декартова система координат определяет положение точки на плоскости по ее расстоянию от вертикальной и горизонтальной оси [12]. Каждая точка имеет уникальные координаты (a, b), где a — это позиция на горизонтальной оси, а b — на вертикальной (см. рисунок 1 ниже). Данная система позволяла математикам описывать кривые посредством уравнений и представлять уравнения в виде кривых. Следовательно, она создала мост между геометрией, изучающей фигуры, и алгеброй, изучающей уравнения, которые были до этого разными математическими дисциплинами.

По сложившейся традиции мы записываем уравнения с помощью переменных x и y, отображающих позицию на горизонтальной и вертикальной оси, другими словами — координаты (x, y). Например, график уравнения $x = y$ представляет собой совокупность всех точек с координатами (x, y), где $x = y$. Как показано на рисунке 2, это точки с координатами (1, 1), (2, 2), (3, 3) и т. д. С другой стороны, график уравнения $y = x^2$ — это совокупность всех точек, у которых $y = x^2$. Это точки с координатами (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9) и т. д. Такая кривая, представленная на рисунке 3, представляет собой параболу, касающуюся горизонтальной оси в начале системы координат или в точке с координатами (0, 0). Но, поскольку школьная программа больше ориентирована на алгебру, чем на геометрию, наша первая встреча с параболой происходит в момент построения графика уравнения $y = x^2$. Возможно, вы узнаете ее как старого друга, первую U-образную кривую, которая встретилась вам в процессе изучения элементарной математики.

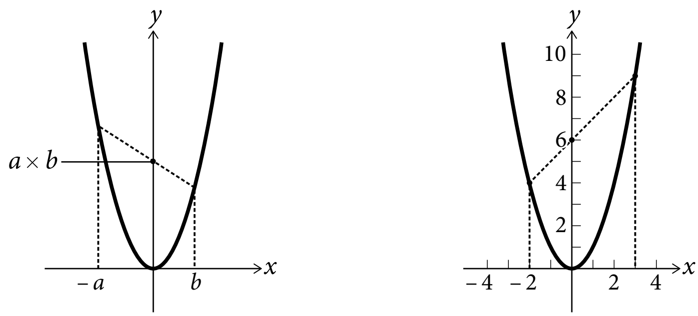
Корни алгебры лежат в решении практических задач. Например, какова формула площади квадрата? Если предположить, что x — это сторона квадрата, а y — его площадь, то эта формула выглядит так: $y = x^2$. Когда в уравнении есть x^2 или y^2, но не более высокая степень x или y, оно называется квадратным уравнением. Вавилоняне изобрели собственные методы решения квадратных уравнений, в частности для задач, связанных с расчетом площадей. К началу эпохи Возрождения решение квадратных уравнений уже было хорошо изученной областью. Что же еще оставалось о них неузнанным?

Благодаря прямоугольной системе координат было установлено, что квадратные уравнения — это не что иное, как конические сечения. Другими словами, каждое квадратное уравнение описывает определенное коническое сечение, и каждое коническое сечение может быть описано квадратным уравнением. Два тщательно изученных раздела математики оказались альтернативным представлением друг друга. Общее квадратное уравнение Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, где A, B, C, D, E и F — это константы и хотя бы одна из констант A, B и C отлична от нуля, всегда отображается на графике в виде конического сечения, и наоборот: любое коническое сечение, отображенное на графике, может быть выражено в виде приведенного выше уравнения. На рисунке 4 уравнение эллипса будет таким: $2x^2 + y^2 + 8x = 0$, а уравнение параболы — таким: $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 84y + 121 = 0$. В середине XIX века немецкий математик Август Фердинанд Мебиус открыл поразительное свойство параболы $y = x^2$: эта кривая представляет собой *Multiplikationsmaschine* — «машину умножения» [13].



Декартова система координат

Мебиус хорошо разбирался в геометрических изгибах: в буквальном смысле слова, как в случае ленты Мебиуса (скрученной полоски бумаги со склеенными концами), и в более абстрактном смысле — при вычислениях с помощью параболы. Этот метод представлен ниже на рисунке слева. Для того чтобы выполнить операцию $a \times b$, достаточно нарисовать прямую линию между точками на параболе, где $x = -a$ и $x = b$. Точка, в которой эта линия пересекает ось y, — и есть ответ! Все, что нужно, — это нарисовать линию и отметить точку пересечения. На рисунке справа — пример выполнения операции 2 × 3. Требуемая линия проходит через точки на параболе, в которых $x = -2$ и $x = 3$, и пересекает ось y в точке 6. Данный метод применим к любым двум числам (доказательство можно найти в Приложении 4).

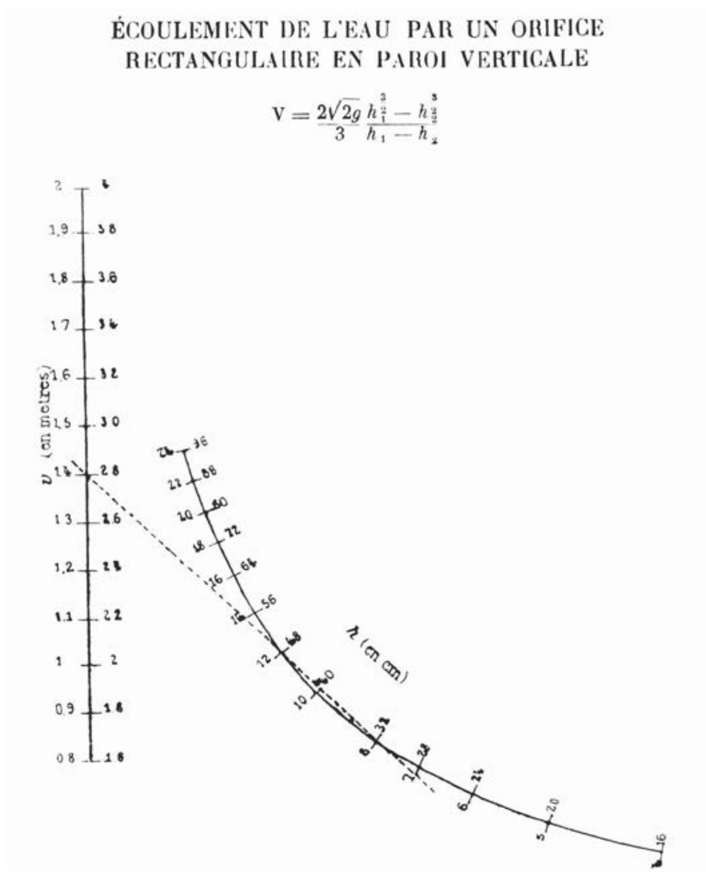


Как умножить два числа с помощью параболы

Мебиус представил свою оригинальную машину умножения в 1841 году в ссылке к статье, опубликованной в августовском номере журнала Journal für die reine und angewandte Mathematik («Журнал чистой и прикладной математики»), и больше никогда не упоминал об этом методе. Однако идею решения арифметических задач с помощью геометрии впоследствии переосмыслил молодой французский математик Морис д'Окань [14]. Он обнаружил, что кроме операции умножения можно, построив прямую линию между двумя точками на графике и записав ответ, выполнять и многие другие операции. В 1891 году д'Окань ввел термин «номограмма» для обозначения любой таблицы, которую можно использовать для таких вычислений, и сам составил множество таких таблиц. Каждая номограмма подходит для вычислений лишь по одной формуле. На представленном ниже рисунке изображена составленная в 1921 году номограмма для формулы расчета скорости перемещения потока воды через прямоугольное отверстие в плотине, где

V — это скорость потока, h_1 и h_2 — высота верхнего и нижнего края отверстия. Прямая линия, проведенная через точки h_1 и h_2, пересечется с вертикальной линией в точке, соответствующей искомому значению V. Все, что необходимо для решения этого громоздкого уравнения, — линейка и твердая рука. Номограммы помогли избавиться от трудоемких вычислений, затратных по времени. Они широко применялись в инженерном и военном деле до 1970-х годов, когда электронный калькулятор в одночасье сделал их устаревшими. Гениальные, практические и зачастую красивые номограммы вышли из употребления, а номография стала забытым искусством.

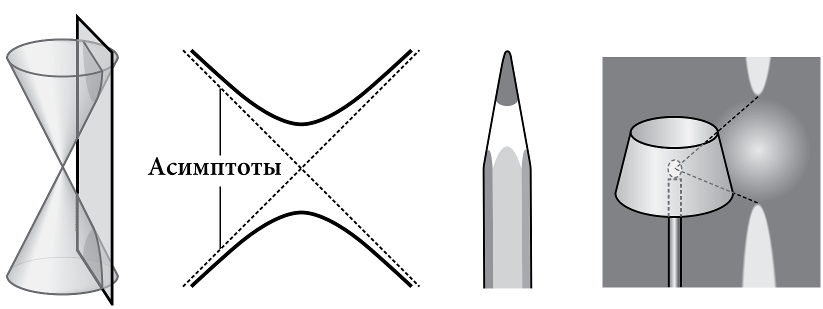
—



До изобретения карманного калькулятора широко использовались вспомогательные вычислительные инструменты под названием «номограммы». Эта номограмма, составленная в 1921 году, вычисляет скорость потока воды в водосливе плотины

Гипербола выделяется на фоне остальных конических сечений, поскольку состоит из двух частей. Для того чтобы понять, почему так происходит, мы должны вернуться к первоначальному определению конических сечений. Если нарисовать рисунок, отображающий весь процесс построения гиперболы, то на нем было бы видно, что на самом деле наш нож рассекает двойной конус, когда один конус расположен в перевернутом виде над другим идентичным конусом [15]. В случае эллипса и параболы угол наклона секущей плоскости указывает, что эта плоскость никогда не достигнет верхнего конуса. Хотя, как показано на рисунке 1 ниже, в случае гипербол секущие плоскости всегда пересекают как верхний, так и нижний конусы, образуя при этом две симметричные U-образные ветви.

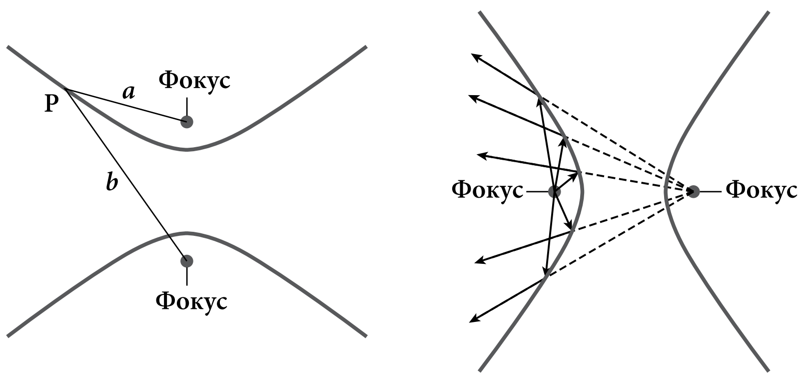
Благодаря гиперболе в геометрии появилась совершенно новая концепция — асимптота (еще один термин, введенный Аполлонием), прямая линия, к которой другая кривая приближается бесконечно близко, но никогда с ней не соприкасается. Как показано на рисунке 2, гипербола ограничена двумя пересекающимися асимптотами. Каждый незамкнутый фрагмент кривой постоянно приближается к асимптоте, но никогда не пересекается с ней. «Я уверен, что если бы геометр сознавал безнадежное и отчаянное стремление гиперболы соединиться со своими асимптотами, — писал испанский философ Мигель де Унамуно, — то он охарактеризовал бы гиперболу как живое и трагическое существо!» Гиперболы часто встречаются в быту. Как показано на рисунках 3 и 4, это могут быть дугообразные волны на заточенном карандаше (кончик — это конус, а плоская боковая сторона — секущая плоскость), а также тень, отбрасываемая лампой (пучок лучей света — это конус, а стена — секущая плоскость).



(1) (2) (3) (4)

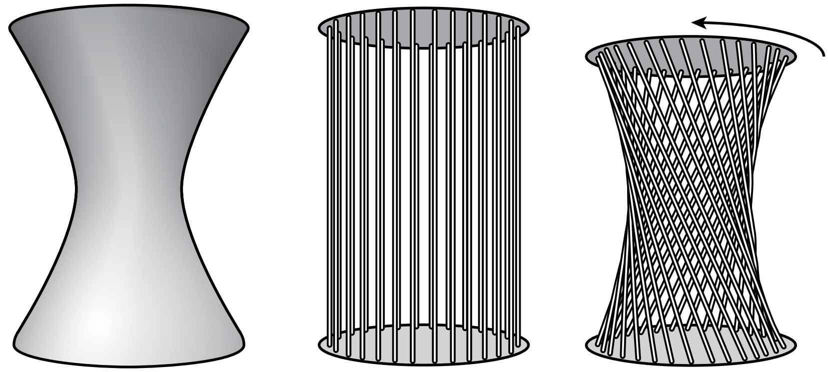
Гиперболы *Асимптоты*

У гиперболы два фокуса, как и у эллипса. Ее можно представить себе как эллипс, вытянутый до бесконечности в одном направлении, а затем развернутый в обратном направлении. Кроме того, гиперболу можно определить по свойствам двух ее фокусов, как это было сделано и в отношении эллипса. Гипербола — это путь, пройденный точкой, расстояния от которой до двух фокусов образуют постоянную разность, тогда как в случае эллипса они образуют постоянную сумму. На рисунке слева *a* — это расстояние от произвольной точки P до одного фокуса, а *b* — расстояние от точки P до другого фокуса. Гипербола — это геометрическое место точки P, для которой разность ($a - b$) имеет постоянное значение. Кроме того, гиперболу можно определить и через поведение лучей света. Лучи света от источника, находящегося в одном из фокусов, отражаются вовне гиперболического зеркала в направлении, противоположном другому фокусу, как показано на рисунке справа. Телескоп Ричи-Кретьена, наиболее распространенный тип больших астрономических телескопов, содержит именно гиперболические зеркала.



Геометрия гиперболы

Выше я уже предложил вам способы построения эллипса и параболы, поэтому считаю своим долгом сделать это и для гиперболы. На этот раз нам предстоит создать трехмерную модель. Мы сделаем гиперболоид — фигуру, напоминающую популярный в 1970-х годах пластиковый табурет, имеющий форму, которую можно получить посредством вращения гиперболы вокруг своей оси, как показано ниже на рисунке слева. Для создания данной конструкции нам понадобятся два круга из картона и несколько кусков проволочной нити (струны). На первом этапе, как показано на среднем рисунке, необходимо протянуть нить от одного круга к другому таким образом, чтобы образовать фигуру в форме цилиндра. На втором этапе (рисунок справа) нужно повернуть один из кругов. Полученная в итоге фигура и есть гиперболоид.



Гиперболоид и способ его построения с помощью проволочной нити

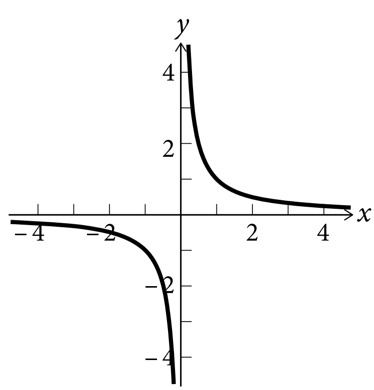
В XVII веке молодой английский профессор астрономии Кристофер Рен увидел в витрине магазина плетеную корзину, напоминающую своими очертаниями ту модель, которая показана на рисунке выше [16]. Эта корзина навела его на мысль об одном поразительном свойстве гиперболоида: имея гладкую изогнутую поверхность, он состоит исключительно из прямых линий. Рен сразу же понял, как можно использовать это свойство для создания гиперболоидов из твердого материала с помощью прямой лопатки. Представьте себе, что на гончарном круге находится кусок глины цилиндрической формы. Разместите лопатку по диагонали к цилиндру таким образом, чтобы она немного погрузилась в глину. Удерживая лопатку в одном положении, сделайте один оборот гончарного круга — и цилиндр из глины превратится в гиперболоид. Рен заинтересовался изготовлением гиперболоидных линз для телескопов. Он даже не подозревал, что спустя столетия его открытие данного свойства гиперболоида найдет свое применение в архитектуре — области, в которой сам Рен получит впоследствии гораздо бóльшую известность.

В XIX веке французский преподаватель математики Теодор Оливье создал несколько моделей гиперболоидов и других трехмерных конических фигур для использования в качестве учебных пособий [17]. Сделанные из каркасов из дерева и металла, а также цветных проволочных нитей (струн), они стали весьма популярны в университетах. Некоторые из моделей Оливье были выставлены в лондонском Музее истории науки. В 1930-х годах британский художник Генри Мур посетил этот музей и пришел в такой восторг от увиденных моделей, что начал использовать проволочные нити в своих скульптурах. «Меня взволновало не научное назначение моделей, а возможность посмотреть сквозь эти струны, как через птичью клетку, и увидеть одну форму внутри другой», — объяснил он. Струнные модели Оливье — прекрасные объекты, завораживающие подобно оптической иллюзии, представляя кривые поверхности, образованные, как становится очевидным при ближайшем рассмотрении, прямыми линиями. (В конце XIX столетия личную коллекцию моделей Оливье выкупил Колледж Союза в городе Скенектади, в котором много лет спустя Арт Фриго создал свою игру «эллиптипул».)

В представленной выше проволочной модели верхний круг вращается по часовой стрелке, поэтому на передней наклонной плоскости куски проволочной нити наклонены следующим образом: \. Если повернуть этот круг на аналогичный угол в противоположном направлении, получится идентичный

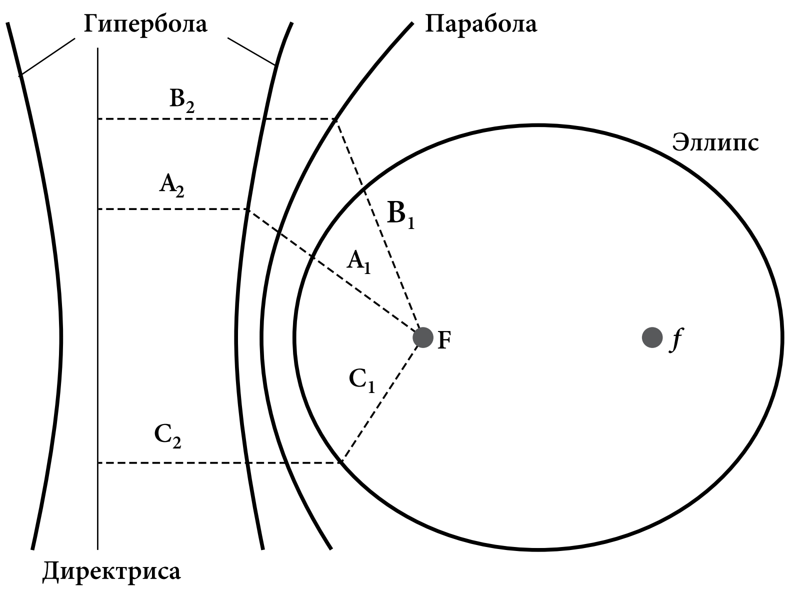
Охлаждающие башни в виде гиперболоидов гиперболоид, но наклон проволочной нити будет таким: /. Для того чтобы плетеная корзина в форме гиперболоида была прочной, ее следует изготовлять из прутьев лозы, переплетенных в обоих направлениях. Более крупные гиперболоидные конструкции, выполненные в виде решетки из стальных балок, невероятно устойчивы. Это и есть способ создания больших криволинейных конструкций с использованием только прямых балок. Первым гиперболоидным сооружением в архитектуре была 37-метровая водонапорная башня в Нижнем Новгороде, построенная в 1896 году; впоследствии появилось много сооружений подобного типа. Бетонные охлаждающие башни электростанций имеют форму гиперболоида, как и телебашня Гуанчжоу высотой 600 метров — четвертое по высоте автономное сооружение в мире.

Я рассказал о гиперболе в последнюю очередь, хотя это именно то коническое сечение, с которым мы уже встречались. Когда две величины обратно пропорциональны друг другу, как было с частотностью употребления слов в романе Джеймса Джойса «Улисс» и их порядковым номером в списке, их математическую зависимость можно представить в таком виде: $y = \frac{k}{x}$, где k — это константа. Данное уравнение описывает гиперболу, в которой в качестве асимптот выступают горизонтальная и вертикальная оси. Многие законы природы включают в себя обратно пропорциональные величины — например закон Бойля—Мариотта, который гласит, что давление газа обратно пропорционально его объему. Следовательно, гиперболы широко распространены в науке. Даже такой общеизвестный статистический термин, как «длинный хвост», используется во многих случаях как эвфемизм для замещения гиперболы и ее асимптоты.



Кривая $y = \frac{1}{x}$ *— это гипербола*

Мы начали эту главу с определения конических сечений как фигур, образующихся в результате рассечения конуса секущей плоскостью, а затем проанализировали свойства каждой фигуры в отдельности. А завершим последним, всеобъемлющим определением: конические сечения — это кривые, для которых отношение расстояний до точки (фокуса) и до прямой (директрисы) представляет собой постоянную величину. Если отношение расстояния от кривой до точки к расстоянию от кривой до прямой линии больше 1 (а это значит, что кривая всегда пропорционально ближе к директрисе, чем к фокусу), мы имеем гиперболу, как показано на рисунке ниже. Когда это соотношение равно 1 — параболу, а когда оно меньше 1 — речь идет об эллипсе. Данные соотношения известны как эксцентриситеты каждой кривой, поскольку они показывают степень их отклонения от окружности. На представленном ниже рисунке изображены три кривые с общим фокусом F и общей директрисой. Эксцентриситет эллипса составляет 0,75, гиперболы — 1,25.



Коническое сечение	Гипербола	Парабола	Эллипс	Окружность
Эксцентриситет	$A_1/A_2 = k > 1$	$B_1/B_2 = 1$	$C_1/C_2 = k < 1$	0

Конические сечения: семейство эксцентриков

А теперь представьте, что вы — астроном, а размещенный выше рисунок — модель Солнечной системы. Пусть F — это Солнце. Конические сечения с фокусом в точке F и есть совокупность всех возможных орбит небесных тел.

Планеты вращаются вокруг Солнца по эллипсам: у орбиты Земли эксцентриситет 0,0167, что очень близко к окружности. Чем быстрее объект перемещается по своей орбите, тем больше ее эксцентриситет. Например, орбитальная скорость кометы Галлея в два раза больше орбитальной скорости Земли. Орбита кометы напоминает доску для серфинга, на одном конце которой находится Солнце; именно поэтому на протяжении всех 75 лет, требующихся комете Галлея для прохождения орбиты, она находится слишком далеко, чтобы увидеть ее невооруженным глазом. Эксцентриситет орбиты кометы Галлея — 0,967, что близко к параболе. Когда эксцентриситет орбиты кометы равен 1, она представляет собой параболу, а это значит, что комета пройдет рядом с Солнцем только один раз за время своего существования, после чего покинет Солнечную систему навсегда. Если эксцентриситет орбиты кометы больше 1, эта орбита является гиперболой. Однако такие кометы — крайне редкие явления, а орбитальная скорость тех, которые обнаружены, незначительно превышает скорость, необходимую для того, чтобы отклониться от эллиптической орбиты. Комета C/1980 E1, замеченная в 1980 году, перемещается по орбите с эксцентриситетом 1,057 — это самый большой эксцентриситет из всех когда-либо зарегистрированных.

Представьте, что директриса и фокус F на рисунке зафиксированы. Посмотрим, что произойдет с коническими сечениями в случае изменения эксцентриситета. Когда он равен нулю, кривая представляет собой окружность с центром в фокусе F. Теперь медленно увеличим эксцентриситет от 0 до 1. Появляется эллипс, который становится все больше и больше. Поскольку точка F зафиксирована, другой фокус, обозначенный как *f*, начнет медленно смещаться вправо по мере увеличения эллипса. Как только эксцентриситет достигнет значения 1, эллипс превратится в параболу, а точка *f* станет бесконечно удаленной. Если сделать эксцентриситет больше 1, кривая превратится в гиперболу, а в левой части рисунка появится второй фокус *f*. По мере дальнейшего роста эксцентриситета все полученные кривые будут гиперболами, а фокус *f* будет смещаться все дальше вправо. В своем труде The Optical Part of Astronomy («Оптика в астрономии») Иоганн Кеплер впервые высказал идею о том, что конические сечения могут превращаться друг в друга так, как это показано выше. Подобно многим другим идеям Кеплера, эта имела переломное значение, поскольку позволила по-новому взглянуть на две концепции, над которыми веками бились философы: непрерывность и бесконечность. Это был важный шаг на пути к новому способу выполнения математических вычислений. Мы вернемся к великому немцу и его пониманию данных концепций чуть позже, при обсуждении исчислений бесконечно малых величин.

Конические сечения — одно из величайших наследий древнегреческой математики: простые в описании, поддающиеся наблюдению повсюду, они положены в основу прекрасных теорий и нашли неподвластное времени применение во многих областях. Возможно, у вас создалось впечатление, что окружность — наименее интересная разновидность эллипса. Но это далеко не так. Окружность сама по себе заслуживает отдельной главы.

5 Движение по замкнутому кругу

Окружность, простейшая из всех двумерных фигур, представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от центра. Она — воплощение геометрического совершенства: сглаженная со всех сторон, гармоничная и симметричная. Однако если мы разделим расстояние *вокруг* окружности (длину окружности) на расстояние *поперек* окружности (длину диаметра), то получим нечто поразительное:

3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208…

Это число, равное отношению длины окружности к ее диаметру, является постоянной величиной для всех окружностей, а его десятичные цифры образуют бесконечный ряд без какой-либо закономерности. В XIX веке это число получило собственное имя — «пи», а также символ — π и стало межкультурной иконой, самой знаменитой константой в науке и метафорой для обозначения непостижимости Вселенной. Все изучают его в школе, а для многих это единственное, что они помнят из математики.

Но вот что я вам скажу.

Пи — неправильное число.

Безусловно, оно рассчитано верно. Очевидно, что отношение длины окружности к длине ее диаметра — это и есть представленное выше число, которое начинается с 3,14. Пи — неправильное число потому, что оно совершенно не подходит для описания окружности. Пи — это самозванец, ложный идол, не заслуживающий международного признания.

Во всяком случае, так считал американский математик Боб Пале в 2001 году [1]. Он заявил, что куда более подходящей константой для описания окружности было бы отношение длины окружности к радиусу, поскольку радиус, или расстояние от центра окружности до любой ее точки, — гораздо более фундаментальная концепция, чем диаметр. Многие с ним согласны, в том числе и я [2]. Посмотрите на определение окружности. Окружность — это фигура, образованная путем вращения фиксированного отрезка (радиуса) вокруг центра. Диаметр — это производная концепция. Математике свойственно неизменное стремление к элегантности, ясности и корректности, именно поэтому так неуместно то, что самое знаменитое число в математике не отражает истину об окружностях самым понятным, изящным и корректным способом. (В школе нам объясняют, что такое диаметр, исключительно для того, чтобы мы поняли концепцию числа π, однако, усвоив ее, мы больше не возвращаемся к диаметру. Математики считают само собой разумеющимся, что диаметр — это радиус, умноженный на два.)

В 2010 году предприниматель из Кремниевой долины Майкл Хартл усилил настроения против числа π, окрестив отношение длины окружности к радиусу греческой буквой τ («тау»). Тау равно двум пи, поскольку диаметр окружности в два раза больше радиуса. Другими словами, число τ равно:

$$\tau = 2\pi = 6{,}28318530717958647692528676\ldots$$

Как и в случае π, количество десятичных цифр в этом числе бесконечно и не подчиняется ни одной известной закономерности.

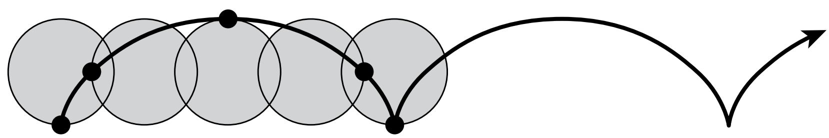
В «Манифесте о числе тау» (Tau Manifesto) Хартл призывает молодых математиков заменить π на τ в своей работе [3]. Для начала во всех научных трудах можно было бы делать такое вступление: «Для удобства примем, что τ = 2π». Хартл предупреждает, что борьба будет долгой, поскольку противник достаточно силен благодаря столетиям пропаганды. «Хотя некоторые условные обозначения неуместны, отменить их фактически невозможно, — пишет он. — [Однако] переход от π к τ может… произойти постепенно; в отличие от переопределения, это не должно происходить сразу».

Символ τ уместен втройне [4]. Он похож на π с одной ногой, так что если рассматривать эти символы в качестве дробей, в которых количество ног — это знаменатель (число под линией дроби), то τ действительно равно двойному π, поскольку величина, деленная на 1, равна удвоенной величине, деленной на два. При этом τ можно рассматривать как сокращение от turn («поворот, перемена»), точно так же как «пи» первоначально было сокращением от слова periphery (греч. «окружность»). А еще подобно тому как обозначение «пи» вызывает вкусные ассоциации со словом pie («пирог» — блюдо, которое чаще всего готовят в форме круга), «тау» ассоциируется со словом «Тао» («Дао») — духовный путь, один из важнейших элементов китайской философии, обозначаемый символом ☯ и выражающий гармонию и движение в пределах круга.

В «Манифесте о числе тау» в непринужденной форме говорится о серьезных вещах. Сущность окружности состоит в повороте радиуса, а не в ее ширине. На самом деле динамические свойства окружности, примером которых служит колесо, — это базовые механические принципы, лежащие в основе цивилизации. В этой главе вы узнаете, что три самых важных свойства окружности — это вращение, вращение и еще раз вращение.

Так давайте начнем.

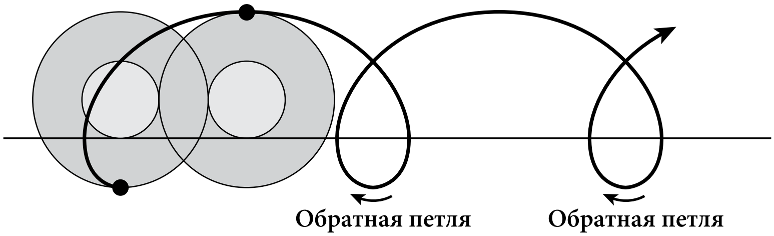
Траектория движения точки на катящемся колесе не похожа, пожалуй, ни на одну кривую из увиденных нами ранее. Во всяком случае, так воспринял эту кривую Галилей, который назвал ее циклоидой и был первым, кто тщательно ее изучил. Вполне естественно, что Галилея, отца современной математики, очень интересовали кривые, образующиеся в результате механического движения. Хоть колесо катится и плавно, но все же создает кривую с острыми выступами (перегибами) в тех местах, где меняет направление. Каждая арка такой кривой соответствует одному полному обороту колеса, представляющему собой завершенный цикл. Циклоида напоминает скорее не кривую, а череду спящих черепах.



Циклоида

На представленном выше рисунке обозначены позиции точки на каждой четверти оборота колеса; здесь отчетливо видно, что точка проходит большее расстояние, находясь в верхней половине колеса. В процессе перемещения колесо совершает два типа движений: горизонтальное движение по поверхности земли и вращательное движение вокруг центра колеса, причем движения обоих типов по-разному сочетаются друг с другом на протяжении цикла. Если колесо вращается с постоянной скоростью, точка на нем достигает максимальной скорости по отношению к земле на вершине циклоиды, а минимальной — в точке перегиба, где скорость становится равной нулю и сразу же снова начинает увеличиваться. Поразительно то, что у любого движущегося колеса (даже колеса автомобиля, мчащегося со скоростью 200 миль в час) точка контакта с землей неподвижна. Художники знают, что верхняя половина движущегося колеса перемещается быстрее, чем нижняя, поэтому рисуют верхнюю часть расплывчатой, а нижнюю — более четкой. Точно так же спицы колеса движущегося велосипеда видны ближе к земле, где они вращаются достаточно медленно, чтобы их можно было заметить.

Колесо поезда состоит из двух частей: диска, который опирается на рельсы, и реборды, или обода, провисающего сбоку. Точка на ободе описывает кривую, образующую обратную петлю, находясь ниже уровня рельсов, как показано на рисунке. Следовательно, у колес всех поездов есть момент, когда колесо движется в направлении, противоположном движению поезда.



Траектория движения точки на колесе поезда

За всю историю математики ни одна кривая не была объектом столь пристального внимания, как циклоида в XVII столетии. Ее форма была так изящна, а споры между ее поклонниками — настолько ожесточенными, что она заслужила репутацию «Елены Прекрасной геометров» [5]. Галилей, самый главный поклонник этой кривой, использовал прикладные методы в процессе ее изучения. Он вырезал пластину в виде циклоиды из куска материала и вычислил, что она в π раз тяжелее, чем пластина из того же материала, вырезанная в форме образующей окружности. Из этого Галилей сделал вывод, что площадь под кривой в π раз больше площади круга. Он получил очень близкий, но все же неправильный результат. Эта площадь больше ровно в три раза, что доказал впоследствии французский математик Жиль Персонн Роберваль.

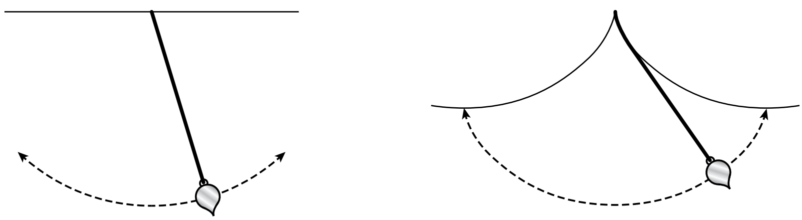
Роберваль (1602–1675) доказал много теорем о циклоиде, но не опубликовал ни одной из них. Для того чтобы сохранить место профессора математики в самом престижном учебном заведении страны Коллеж де Франс, он должен был предоставлять лучшее решение задачи, которая публично объявлялась один раз в три года. Поэтому у Роберваля не было стимула делиться своими результатами, поскольку ими могли бы воспользоваться потенциальные соперники, внимательно следившие за его работой. Должность Роберваля обеспечивала ему престиж и деньги, но лишила собственного научного наследия. Его можно отнести к числу великих французских математиков, о которых помнят меньше всего. Известно, что Роберваль был очень вспыльчив и расстраивался, когда другие ученые обнародовали результаты, которые он уже давно получил. Когда в 1644 году друг Роберваля, итальянец Эванджелиста

Торричелли, опубликовал свой первый труд о циклоиде, разъяренный Роберваль отправил ему письмо с обвинениями в плагиате. Торричелли умер три года спустя от тифа, но ходили слухи, что его смерть связана с измучившими его угрызениями совести из-за обвинений в подобном бесчестии.

Однажды вечером в Париже в 1658 году Блез Паскаль лежал без сна в своей постели, терзаемый жестокой зубной болью. Будучи в прошлом знаменитым математиком, к тому времени он отказался от занятий этой наукой, чтобы сосредоточиться на теологии и философии. Пытаясь отвлечься от зубной боли, Паскаль решил поразмышлять о циклоиде. Боль прошла как по волшебству. Разумеется, он подумал, что это сам Бог призывает его продолжить изучение этой божественной кривой. Паскаль усердно работал над ней целых восемь дней, доказав за данный период много новых теорем. Однако, вместо того чтобы опубликовать, он сделал их темой международного состязания. Паскаль призвал своих коллег найти доказательство некоторых из полученных им результатов, пообещав сорок испанских золотых монет в качестве награды за первое место и двадцать — за второе. Вызов Паскаля приняли только два математика — Джон Уоллис в Англии и Антуан де Лалубер во Франции. Однако в представленных ими доказательствах были ошибки, поэтому Паскаль не присудил премию никому и опубликовал собственные результаты в виде небольшой книги, что привело обоих ученых в ярость. Кроме того, Паскаль получил письмо от Кристофера Рена, в котором шла речь об одном неизвестном Паскалю факте. Рен нашел ответ на, пожалуй, самый главный вопрос, касающийся циклоиды: какова ее длина? Рен доказал, что длина циклоиды ровно в восемь раз больше радиуса образующей окружности. Разумеется, когда Роберваль узнал об этом, он был возмущен и настаивал на том, что именно он это доказал много лет назад.

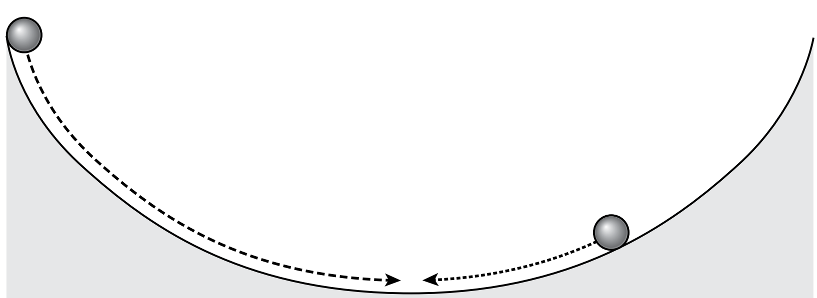
Интерес к циклоиде возрос еще больше, когда Христиан Гюйгенс открыл одно ее удивительное механическое свойство. В рамках работы над созданием часов нового типа голландский ученый экспериментировал с маятниками. Обычный маятник — это кусок нити с шаром у одного конца, как показано на рисунке ниже. Траектория движения шара представляет собой фрагмент окружности, причем чем дальше маятник отклоняется от вертикального положения, тем больше времени занимает одно полное колебание. Однако, для того чтобы использовать маятник для отсчета времени, Гюйгенсу было нужно, чтобы шар совершал колебания за одинаковые промежутки времени, независимо от амплитуды. Размышляя над задачей, поставленной его другом

Паскалем, Гюйгенс понял, что для этого траектория движения шара должна представлять собой не что иное, как перевернутую циклоиду (см. рисунок справа), и что этого можно добиться, разместив две «щеки» в форме циклоиды у вершины маятника [6]. Когда маятник совершает колебание, его нить огибает каждую из «щек», меняя первоначальную круговую траекторию движения шара на траекторию в форме циклоиды. Как бы далеко от центра ни отклонялся шар циклоидального маятника, время его возвращения в начальную точку останется неизменным.



Обычный маятник и маятник, совершающий колебания между двумя циклоидами

Поражает еще один аспект данного свойства циклоиды. Представьте себе два шара, движущихся по совершенно гладкой, не создающей трения кривой в форме перевернутой циклоиды, как показано на рисунке ниже. Для того чтобы достичь нижней точки циклоиды, обоим шарам требуется одинаковое время, независимо от исходных позиций. Шар, находящийся выше, начал двигаться по более крутому склону, чем шар, расположенный ниже на кривой, что придало первому шару большее ускорение, а значит, и более высокую скорость. Эти два шара столкнутся в самой нижней точке кривой. Когда циклоиду объявили «кривой равных времен» (таутохроной, от греч. *tautochrone*: *tauto* — «тот же» и *chrone* — «время»), ученые пришли от нее в неописуемый восторг.

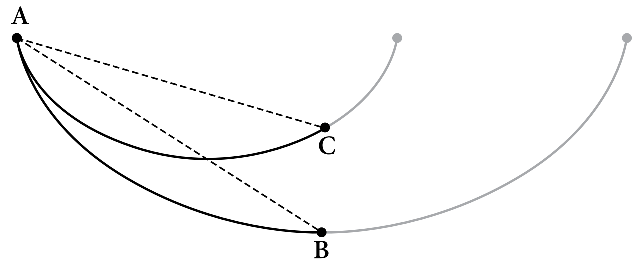


Траектория спуска шаров за равное время

История с циклоидой достигла своего апогея в конце XVII столетия. В новом научном журнале Acta Eruditorum, выходившем в Лейпциге, была опубликована статья, провозглашавшая следующее:

> *Я, Иоганн Бернулли, обращаюсь к самым выдающимся математикам в мире. Ничто так не привлекает интерес умных людей, как подлинная сложная задача, вероятное решение которой может принести славу и остаться вечным памятником… Если кто-то предоставит мне решение предложенной задачи, я публично объявлю его достойным всяческих похвал.*

Задача, о которой говорил Бернулли и на которую он уже знал ответ, сводилась к поиску *траектории наискорейшего спуска.* Другими словами, какой формы должна быть горка, не создающая трения, для того чтобы объект прошел путь от одной точки к другой за кратчайшее время? Искомую кривую обозначили термином «брахистохрона» (греч. *brachistochrone*, от *brachistos* — «кратчайший» и *chronos* — «время»). Бернулли утверждал, что эта траектория не является прямой линией и представляет собой хорошо известную кривую. Если вы еще не догадались, вот вам ответ: эта кривая — циклоида. На представленном ниже рисунке показана траектория наискорейшего спуска из точки A в точки B и C. Поскольку циклоида имеет лишь одну форму, масштаб этой кривой необходимо изменить в зависимости от относительного положения начальной и конечной точек. Кривая либо только опускается (как в случае перемещения из точки A в точку B), либо сначала опускается, а затем поднимается (как при перемещении из точки A в точку C). Когда траектория опускается и поднимается, преимущества более крутого и длинного спуска компенсируют эффект замедления на повышающемся участке кривой в конце пути. Если сделать модель перевернутой циклоиды и пустить по ней шар, скажем из точки A в точку B, одновременно запустив шар и по прямой линии (обозначенной на рисунке пунктиром), ведущей из точки A в точку B, эффект будет просто поразительным, даже если вы заранее знаете, какой шар станет победителем в этой гонке. По сравнению с шаром, стремительно спускающимся по циклоиде, шар на наклонной прямой как будто катится по грязной дороге. Начиная с XVIII века для демонстрации *брахистохроны* в университетах и музеях начали сооружать деревянные циклоиды. С их помощью можно было демонстрировать и *таутохрону*. Для этого достаточно было разместить по одному шару с каждой стороны перевернутой циклоиды, и, независимо от того, с какой точки начнется движение этих шаров, они столкнутся друг с другом в самой нижней точке кривой.



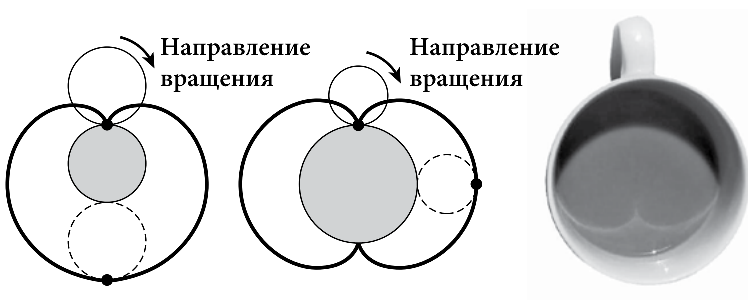
Траектория наискорейшего спуска

Спустя полгода Бернулли получил всего один правильный ответ на свою задачу, который дал его немецкий друг Готфрид Лейбниц. Поэтому Бернулли опубликовал в журнале Acta Eruditorum еще один призыв к ученым предложить решение поставленной задачи, отметив неспособность сделать это даже со стороны тех, кто «заявляет, будто посредством особых методов… не только постиг самые сокровенные тайны геометрии, но и необъяснимым образом расширил ее границы». Это была колкость в адрес Исаака Ньютона и его метода флюксий — нового, очень мощного математического инструмента, который обеспечивал решение таких задач, как задача о *брахистохроне* (мы поговорим об этом методе в одной из следующих глав). Бернулли отправил Ньютону экземпляр журнала Acta Eruditorum, чтобы тот непременно прочитал статью и получил сообщение. В то время Ньютону было больше пятидесяти лет; он уже не преподавал в Кембриджском университете, а управлял Королевским монетным двором, расположенным в Лондонском Тауэре. Ньютон прочитал письмо Бернулли по возвращенни с работы домой и, несмотря на усталость, не ложился спать до тех пор, пока в 4 часа утра не нашел решение. «Я не люблю… когда иностранцы поддразнивают меня тем, что связано с математикой», — проворчал он. Ньютон отправил свой вариант решения задачи, не назвавшись. Говорят, что, прочитав письмо Ньютона, Бернулли произнес фразу: «*Ex ungue leonem*» («Узнаю льва по когтям его»).

Так циклоида, уже ставшая к тому времени предметом жарких споров, оказалась причиной первого столкновения в величайшем противостоянии, разгоревшемся в научных кругах в эпоху Просвещения. С математической точки зрения флюксии Ньютона были эквивалентом исчисления бесконечно малых величин Лейбница. Как мы с вами увидим, между этими двумя учеными возник жесткий конфликт по поводу первенства, на целое столетие настроивший научные круги Англии и остальной части Европы друг против друга. Однако эго этих двух ученых не смогло лишить циклоиду присущего ей шарма. На титульной странице собрания сочинений Бернулли размещен рисунок, на котором пес ласково смотрит на изображение знаменитой кривой, а надпись в верхней части рисунка гласит: *Supra invidiam* («Выше зависти»).

Поскольку циклоида — это путь наискорейшего спуска, можно предположить, что именно такой должна быть форма рампы для скейтбординга. Тем не менее, насколько мне известно, существует всего одна такая рампа, построенная французским художником Рафаэлем Заркой в 2011 году в Нью-Йорке, в рамках проекта, объединившего в себе физику, скульптуру и городское пространство. Однако скейтбордистам она не понравилась, так как вызывала непривычные ощущения. «Если бы я был абсолютно круглым шарикоподшипником, брошенным с верхнего края рампы в форме циклоиды, вероятно, я смог бы лучше оценить подъем и спуск, — сказал автор книги о скейтбординге Тед Барроу. — Но, поскольку я скейтбордист, приложивший немало усилий к выработке навыков, которые целиком и полностью сводятся к попыткам сохранить равновесие и НЕ упасть с доски в момент увеличения скорости, весь мой опыт больше связан с корректировкой скорости и выполнением движений в соответствии с причудливыми изгибами стен, а не поисками пути наискорейшего спуска». Барроу прибавил, что рампа для скейтбординга в форме циклоиды вряд ли приживется.

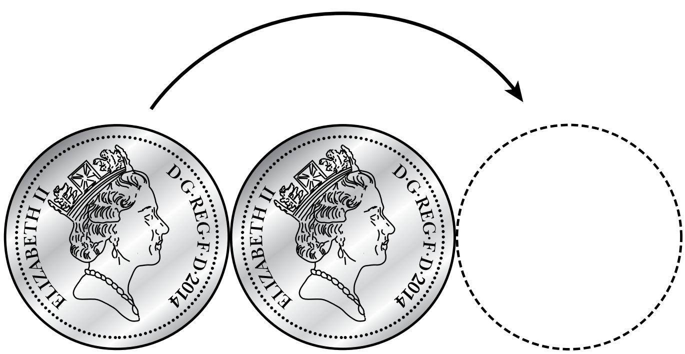
Циклоида относится к семейству кривых, называемых рулеттами, образованных путем перемещения точки, расположенной на движущемся колесе. Рулетты бывают самых разных форм. Траектория точки на колесе, перемещающемся по окружности с таким же радиусом, называется кардиоидой, поскольку она похожа на сердце (рисунок слева). Нефроида (напоминает пару почек (рисунок в центре)) — это траектория точки на колесе, перемещающемся по окружности с радиусом в два раза больше радиуса колеса. Фигура в форме контура ягодиц в чашке чая, поставленной возле ярко освещенного окна, образуется в результате отражения горизонтальных лучей света от внутренней стороны круглой чашки (рисунок справа).



Кардиоида *Нефроида* *Чашка чая*

Первое устройство — «геометрическое перо», изобретенное итальянцем Джиамбаттистой Суарди в XVIII веке, — создавало кривые как в эстетических, так и в научных целях и рисовало именно рулетты. Оно состояло из штатива с вращающимся рычагом и установленным на нем зубчатым колесом, в котором было закреплено перо. «Пожалуй, нет ни одного инструмента, способного начертить так много кривых, как геометрическое перо», — с восторгом сказал Джордж Адамс-младший, специализирующийся на изготовлениии инструментов при дворе короля Георга II. Рисунки, выполненные с помощью такого устройства, получались причудливыми и магическими. В XIX столетии Петер Губерт Девинь из Вены разработал устройство для рисования рулетт и назвал его спирографом; оно позволяло чертить такие кривые на медной гравировальной доске посредством алмазного резца. Спирограф использовался для создания сложных рисунков, которые наносились на банкноты с целью предотвращения их подделки. В 1965 году на рынке появилась игрушка «спирограф», представлявшая собой пластмассовую пластину с вырезанными в ней кругами и набором зубчатых колес меньшего диаметра с отверстиями внутри. Спирограф до сих пор остается для многих детей элементом обряда посвящения в умники.

Одна из моих любимых математических головоломок сводится к перекатыванию одной монеты вокруг другой [7]. Положите две одинаковые монеты с изображением королевы рядом друг с другом на стол, разместив их короной вверх, как показано на рисунке ниже. Прокрутите левую монету вокруг правой. В какую сторону будет направлена корона, когда монета окажется с правой стороны?



Перекатывание монет

Когда мне задали этот вопрос впервые, я предположил, что монета окажется в перевернутом положении, поскольку она прошла только половину пути вокруг неподвижной монеты. Но я ошибался. Королева делает полный оборот, что на первый взгляд противоречит здравому смыслу. Монета с королевской скоростью перемещается вокруг другой монеты, как будто отчаянно пытаясь сохранить достоинство, снова заняв строго вертикальное положение. Дело в том, что траектория движения монеты формируется благодаря свойству, присущему всем рулеттам: они представляют собой результат движения в двух независимых направлениях. В данном примере монета вращается вокруг себя и вокруг другой монеты. На каждый градус перемещения левой монеты вокруг правой приходится два градуса ее вращения вокруг себя.

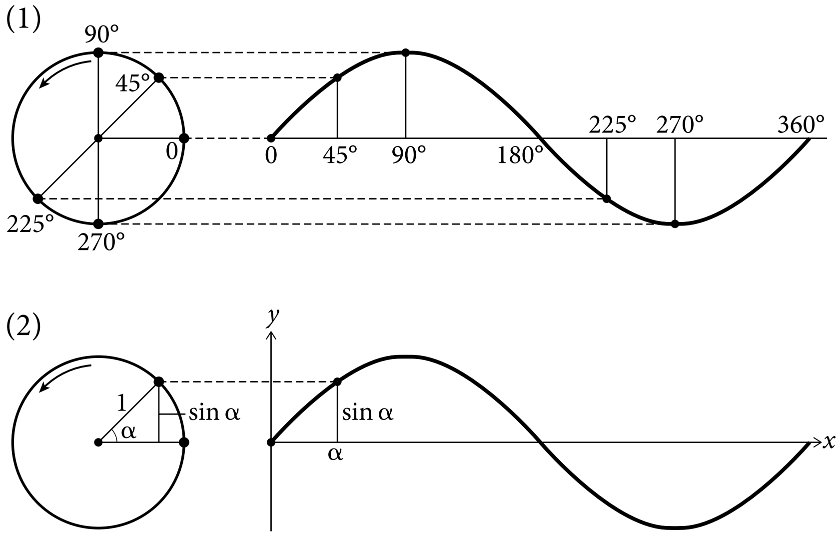
Рулетты образуются в случае подвижного колеса. Однако кривые можно получить и посредством *вращения* колеса вокруг неподвижного центра. Такие кривые проще рулетт, поскольку формируются благодаря движению только в одном направлении — вокруг центра.

Возьмем точку на ободе колеса, вращающегося против часовой стрелки, как показано на рисунке 1 ниже. Если нанести на график высоту этой точки в зависимости от угла поворота, отмеченного на горизонтальной оси, получится кривая под названием синусоида, или синусоидальная волна. Я указал на рисунке положение точки при угле поворота 0, 45, 90, 225 и 270 градусов. Синусоида достигает максимума, когда угол поворота составляет 90 градусов, затем возвращается к горизонтальной оси при 180 градусах, после чего опускается ниже горизонтальной оси, а когда точка совершает полный оборот, возвращается в исходное положение. Если колесо продолжит вращаться, кривая будет повторяться с каждым новым оборотом, создавая симметричные волнообразные колебания до бесконечности.

Наверное, вам интересно знать, почему у названия этой волнистой линии один корень со словом «синус», которым обозначается соотношение между двумя сторонами прямоугольного треугольника, ведь между волнами и треугольниками нет ничего общего. Однако все это обретает смысл, если мы вспомним, что концепция синуса связана, прежде всего, с окружностью: это не что иное, как полухорда, что прекрасно видно на рисунке 2, где в окружности размещен прямоугольный треугольник. Предположим, длина гипотенузы равна 1, тогда синус угла α рассчитывается по формуле:

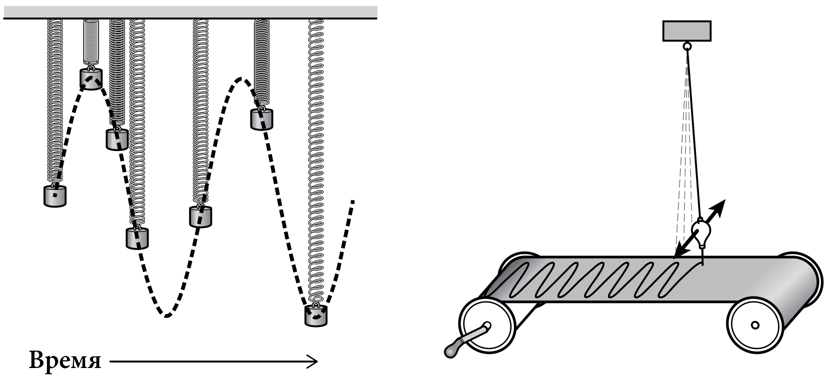
$$\text{синус } \alpha = \frac{\text{противолежащая сторона}}{\text{гипотенуза}} = \frac{\text{высота точки}}{1} = \text{высота точки}$$

Первым синусоиду нарисовал Жиль де Роберваль в XVII столетии и назвал ее «кривой, сопутствующей циклоиде» [8]. Эта «спутница» займет впоследствии исключительное место в сердцах (и мыслях) ученых и математиков.



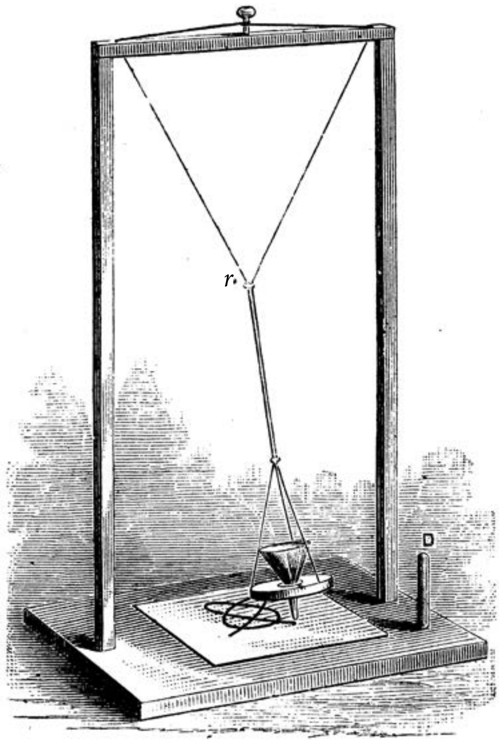
Изменение высоты вращающейся точки по отношению к углу поворота порождает синусоидальную волну

Синусоида — это кривая, которую называют периодической волной, поскольку она повторяется вдоль горизонтальной оси снова и снова. Синусоида — простой тип периодических волн, так как образующая ее окружность является простейшей геометрической фигурой. Однако, несмотря на то что синусоида представляет собой базовую концепцию, она моделирует множество физических явлений. Мир — настоящий карнавал синусоид. Изменяющееся во времени вертикальное положение груза, перемещающегося вместе с пружиной вверх и вниз, — это синусоида, как показано на левом рисунке ниже [9]. Груз движется с максимальной скоростью в середине периода колебания и замедляет движение в момент достижения верхней и нижней точек, что создает легко узнаваемую кривую (на рисунке отображено небольшое количество колебаний, ввиду того что горизонтальная ось здесь ограничена). Изменяющееся во времени горизонтальное положение маятника, колеблющегося из стороны в сторону с небольшой амплитудой, тоже образует синусоиду. Представьте себе, что шар маятника наполнен мелким песком и он просачивается через отверстие в нижней точке шара, как показано на рисунке справа. Маятник, качающийся с севера на юг, оставит след в виде синусоидальной волны на ленте конвейера, движущейся с востока на запад. Говорят, что такие объекты, как пружина и маятник, колебания которых изменяются с течением времени по синусоидальному закону, совершают простое гармоническое колебание.



Подвешенный на пружине груз и колеблющийся маятник совершают простое гармоническое колебание

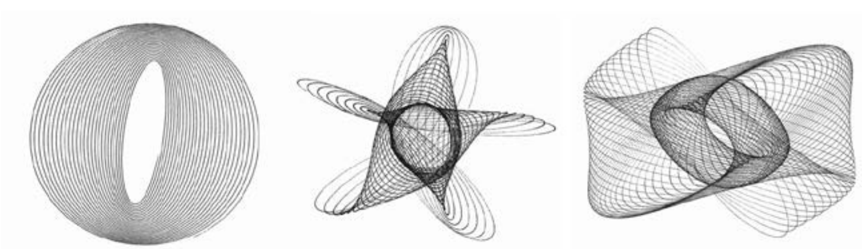
Мы уже видели, какие красивые рисунки образуют рулетты. То же самое можно сказать и о синусоидах. В 1840-х годах шотландский математик Хью Блэкберн экспериментировал с маятником, шар которого был наполнен песком. Он решил подвесить этот шар на двух шнурах, свисающих в форме буквы Y и прикрепленных друг к другу кольцом в точке *r*, как показано на рисунке ниже. Удерживая кольцо в неподвижном состоянии, Блэкберн качнул маятник слева направо. Затем он отпустил кольцо и толкнул его вперед, тем самым создав колебание вперед-назад. Таким образом, шар маятника двигался под воздействием двух перпендикулярных колебаний, что давало весьма впечатляющий результат. Эти два конкурирующих синусоидальных колебания отталкивали и притягивали друг друга, совершая своего рода математическое *па-де-де*, вычерчивающее под маятником удивительно замысловатый рисунок из песка. Через какое-то время предприимчивые производители инструментов начали выпускать устройства под названием «гармонографы», в которых два маятника совершают колебания пишущим пером в двух направлениях одновременно. Пользователь гармонографа мог скорректировать длину маятников, установить амплитуду их колебаний, а затем отпустить, разместив перо над листом бумаги. Перо начинало вращаться и делать петли, воспроизводя прекрасные геометрические формы, которые, несмотря на механическую природу, почему-то казались живыми.



Y-образный маятник Блэкберна. Рисунок взят из научно-популярного издания 1879 года

Гармонограф викторианской эпохи представлял собой нечто среднее между ящиком письменного стола и старинными часами [10]. Как результат, так и сам процесс движения пера, создававшего все эти изображения, оказывал гипнотическое воздействие. Затухание колебаний, обусловленное потерей энергии из-за трения, образовывало кривые, которые закручивались по спирали внутрь по мере их приближения к неподвижной точке равновесия. Некоторые более крупные устройства могли поддерживать колебания на протяжении часа и даже больше, прежде чем маятники останавливались.

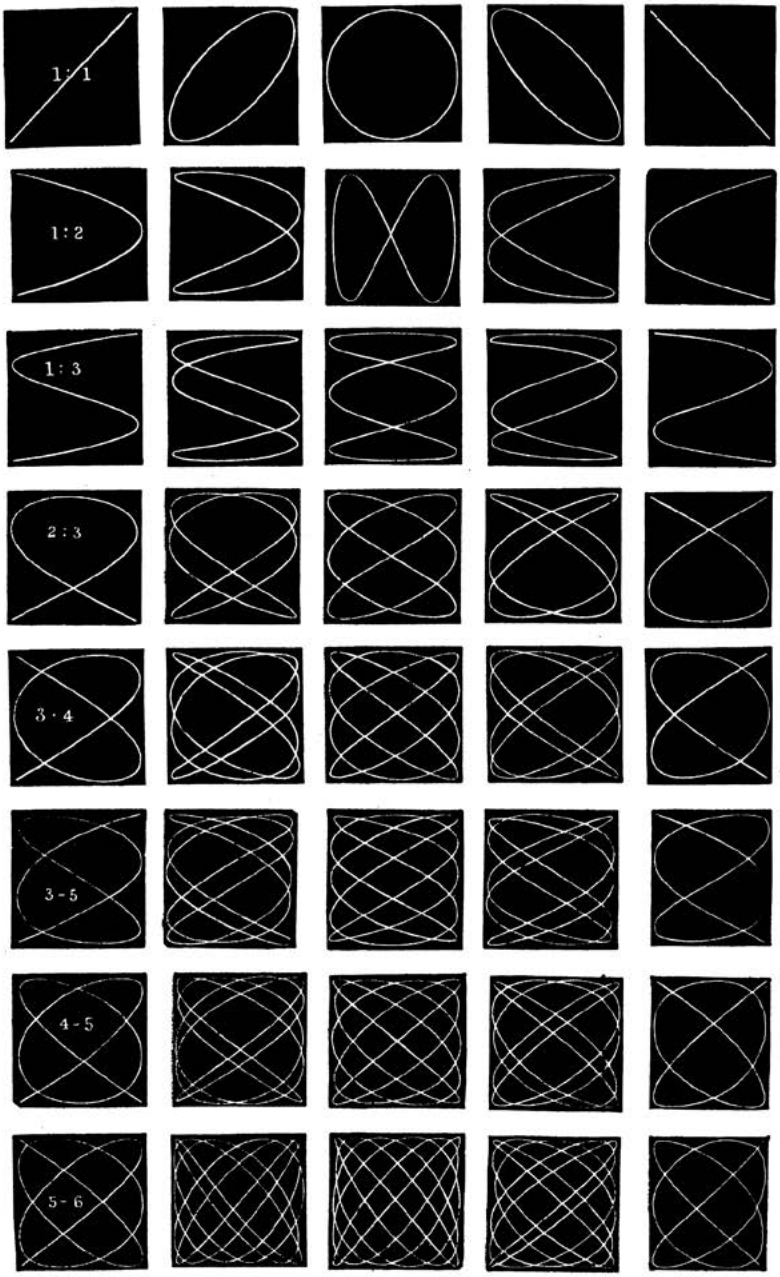
Гармонографы стали настолько популярны, что обусловили появление и других устройств, работающих по тому же принципу: симпалмограф, пендулограф, двойной маятник и маятник, совершающий гармонические колебания в четырех направлениях. В начале XX века был создан генератор сложных гармонических колебаний Крейтона и фоторатиограф, чертивший кривые на фотобумаге с помощью движущегося светового пучка. В 1950-х годах художник Джон Уитни собрал гармонограф из военного утиля, оставшегося после Второй мировой войны. Он купил блок управления зенитной артиллерийской батареей M5 (большой металлический ящик со множеством ручек и рычагов, представлявший собой первый аналоговый компьютер, который использовался для расчета направления выстрелов по вражеским самолетам) и переделал его так, чтобы вращающиеся детали могли передвигать пишущий элемент по закону простого гармонического колебания в двух направлениях. Уитни мог корректировать скорость и размах колебаний синусоиды в электронном режиме, что позволяло ему в гораздо большей степени контролировать процесс и устраняло последствия затухания колебаний. С помощью этого устройства Уитни создавал удивительные изображения, которые стали одними из самых известных за всю историю математического искусства, поскольку были использованы в заставке и на постерах к фильму Альфреда Хичкока Vertigo («Головокружение»), снятому в 1958 году. Закручивающиеся в водоворот, вызывающие головокружение концентрические петли являлись прекрасной визуальной метафорой для истерзанного внутреннего мира главного героя киноленты. Однако Уитни знаменит не только этими изображениями, а и тем, что его электронный гармонограф был также первым устройством для создания компьютерной анимации.



Красивые вибрации: фигуры, созданные гармонографами

Примерно в тот период, когда гармонографы вошли в моду в викторианских салонах, один парижский физик понял, что можно создавать аналогичные фигуры с помощью двух камертонов и пучка света [11]. Демонстрации, устраиваемые Жюлем Антуаном Лиссажу, относятся к числу самых красивых экспериментов XIX столетия. Когда камертон издает звук, его металлические зубцы колеблются согласно закону простого гармонического движения. Лиссажу прикрепил к одному камертону небольшое зеркальце и направил на него луч света таким образом, чтобы он отражался на экране в виде светового пятна. Когда камертон начинал вибрировать, пятно вытягивалось в горизонтальную линию. Пятно света очень быстро перемещалось то в одну, то в другую сторону, однако наблюдатели воспринимали это движение как линию, поскольку изображение каждого пятна сохраняется в нашей зрительной системе на долю секунды дольше, чем находится там на самом деле. Затем Лиссажу добавил еще один камертон, к которому тоже было прикреплено зеркало. Второй камертон размещался перпендикулярно первому с тем, чтобы луч света отражался зеркалом первого камертона, колеблющегося в одном направлении, на зеркало второго камертона, колеблющегося в перпендикулярном направлении, после чего попадал на экран. Другими словами, камертоны вели себя так же, как и маятники в гармонографе, перемещая луч света под воздействием двух конкурирующих гармонических колебаний. Однако вместо колебаний один раз в секунду или что-то около этого камертоны колебались с частотой сотни раз в секунду. Публика видела на экране поразительные изображения, известные в наше время как фигуры Лиссажу.

Разные системы расположения камертонов образуют разные кривые. Если два одинаковых камертона издают звук одной и той же высоты, то их синусоиды идентичны, а полученная кривая представляет собой одну из кривых в первом ряду на рисунке ниже: эллипс, прямую линию или окружность. Форма кривой зависит от того, в какой момент начинается каждое колебание по отношению к другому колебанию. Лиссажу корректировал данный процесс, меняя расстояние между камертонами. Если частота колебания одного камертона в два раза больше частоты колебаний другого, полученная кривая относится ко второму ряду изображений — это может быть парабола или кривая в форме восьмерки. В оставшихся рядах представленного ниже рисунка показаны фигуры Лиссажу для других целых значений соотношения между частотами синусоид. Если соотношение частот нельзя описать двумя целыми числами, луч света не вернется в исходную позицию, и полученное изображение будет нечетким.



Фигуры Лиссажу — иллюстрация из книги, опубликованной в 1875 году. В левом столбце изображений для каждого ряда указано соотношение частот синусоид

От частоты колебания камертона зависит, какую ноту он издает. Например, при частоте 262 колебания в секунду он издает ноту «до» третьей октавы. Таким образом, благодаря экспериментам Лиссажу у музыкантов появился новый, более эффективный способ калибровки камертонов: вместо того чтобы определять их настройку на слух — использовать зрение. Квалифицированные специалисты применяют пучки света в своих мастерских. Если у двух камертонов отличается высота звука, значит, частота колебаний у них тоже разная, поэтому двойное отражение луча света дает размытую картинку. Специалисты выбирают один камертон в качестве эталона, а второй обрабатывают до тех пор, пока рисунок на стене не превратится в эллипс — это подтверждает, что оба камертона звучат на одной ноте.

Фигуры Лиссажу — результат сложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Можно ли суммировать синусоиды, колеблющиеся вдоль одной и той же оси?

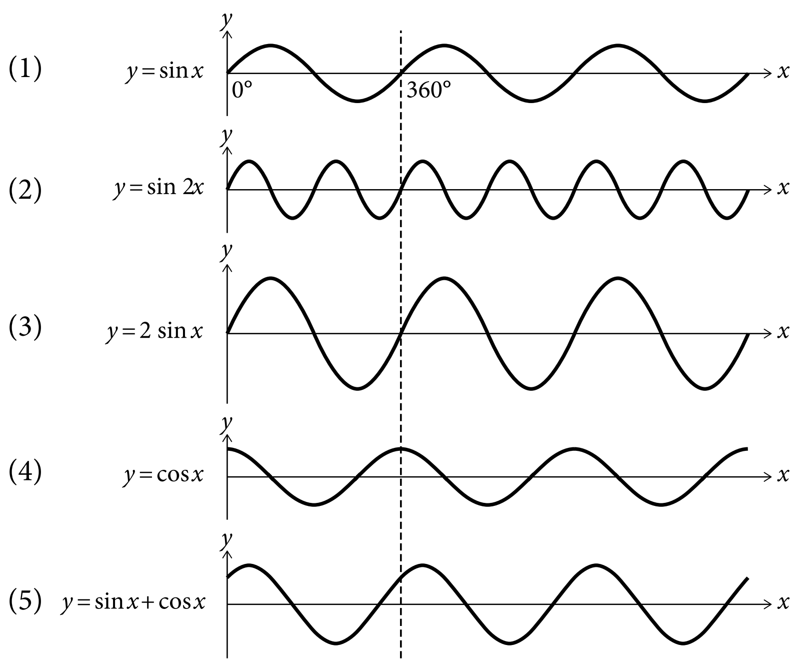
Разумеется, можно! И это приводит нас к одной из самых красивых и полезных теорем в математике. Для того чтобы вам было легче воспринимать дальнейший материал, позвольте мне объяснить три концепции, неразрывно связанные с изучением волн: частота, амплитуда и фаза. Частота — это количество колебаний, которые совершает волна за определенный промежуток времени; амплитуда — расстояние по вертикали между вершиной и впадиной волны; фаза — показатель позиции волны по горизонтали.

Вооружившись данными концепциями, мы можем дать математическое описание синусоид, которые представлены на рисунке ниже:

1) это уже знакомая нам синусоида, описываемая уравнением $y = \sin x$;
2) если увеличить частоту в два раза (а это значит, что волна повторяется дважды за тот же период, за который исходная волна образуется только один раз), уравнение кривой будет выглядеть так: $y = \sin 2x$;
3) если удвоить амплитуду (то есть высота волны увеличивается в два раза), уравнение становится следующим: $y = 2\sin x$;
4) если изменить фазу, сместив волну влево на четверть ее длины, получим косинусоиду, которой соответствует уравнение $y = \cos x$.

   Все волны, образованные в результате изменения частоты, амплитуды и фазы синусоиды, тоже являются синусоидами. Частоту, амплитуду и фазу легче себе представить, вспомнив о том, что синусоиду создает перемещение точки по окружности: частота зависит от скорости перемещения точки, амплитуда — от радиуса окружности, а фаза — от исходной позиции точки;

5) здесь я сложил синусоиду с косинусоидой. Складывая две волны, мы просто суммируем значения по вертикали в каждой точке горизонтальной оси. При этом происходит настоящее волшебство: результат сложения синусоидальной и косинусоидальной волны — это тоже синусоида, хотя и с другой фазой и амплитудой, равной корню из двух. В действительности сложение двух синусоид с одинаковой частотой всегда в результате дает синусоиду, независимо от значений их амплитуды и фазы.



Иными словами, если синусоиду прибавить к любому количеству синусоид с такой же частотой, но другими амплитудой и фазой, полученная кривая останется синусоидой — как фантастический монстр, всегда возвращающийся в свое первоначальное обличье. В ближайшее время мы вернемся к математике точек, перемещающихся по окружности, а пока давайте сделаем небольшое отступление и поговорим о перевороте иного типа — французской революции.

В 1798 году тридцатилетний профессор Политехнической школы в Париже Жозеф Фурье получил от министра внутренних дел срочное сообщение, в котором говорилось, что страна нуждается в его услугах и он «должен быть готов отправиться в путь по первому приказу» [12]. Через два месяца Фурье отплыл из Тулона в составе военной флотилии из 25 000 моряков под командованием генерала Наполеона Бонапарта, необъявленной целью которого было завоевание Египта.

Фурье был одним из 167 выдающихся ученых, входивших в состав египетской экспедиции. Их присутствие отображало идеологию научного прогресса, исповедуемую Великой французской революцией. Кроме того, Наполеон, будучи сам страстным поклонником математики, любил окружать себя людьми, разделявшими его взгляды. Говорят, что, когда французские войска добрались до Великой пирамиды в Гизе, Наполеон сел в тени у ее подножия, быстро что-то записал в своем блокноте и заявил, что в пирамиде достаточно камня для того, чтобы построить стену высотой три метра и толщиной один метр, которая окружила бы всю Францию [13]. Главный математик Наполеона Гаспар Монж подтвердил правильность сделанных генералом расчетов*.

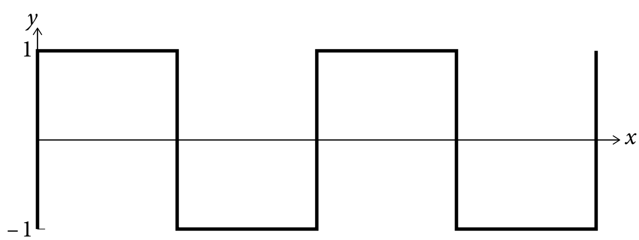
В Египте Фурье выполнял много разных административных функций, в том числе постоянного секретаря Каирского института — центра культурного наследия, созданного по аналогии с Французским институтом в Париже. В институте было принято решение упорядочить информацию обо всех научных и археологических открытиях; впоследствии собранные материалы вышли в виде 37-томного издания Description de L'Égypte («Описание Египта»), предисловие к которому написал Фурье. По сути, Жозеф Фурье был отцом египтологии.

По возвращении Фурье из Египта Наполеон назначил его префектом расположенного в Альпах департамента Изер со столицей Гренобль. Фурье всегда отличался слабым здоровьем и очень сильной чувствительностью к холоду, поэтому никогда не выходил из дома без пальто даже летом и часто приказывал прислуге носить за ним еще одно пальто про запас. Фурье постоянно поддерживал в комнатах очень высокую температуру. В Гренобле его

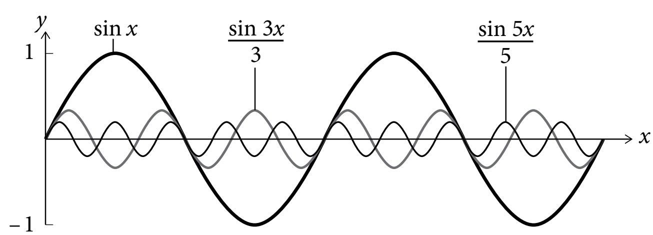
* Длина бокового ребра Великой пирамиды — 229 метров, а ее высота — 146 метров. Территория Франции представляет собой прямоугольник со сторонами 770 километров с севера на юг и 700 километров с востока на запад. Сделанные с учетом этих данных расчеты показывают, что оценка Наполеона отличалась от правильной всего на 3 процента.

научные исследования тоже были связаны с теплом. В 1807 году он опубликовал труд под названием On the Propagation of Heat in Solid Bodies («О распространении тепла в твердых телах»), в котором рассказал об одном удивительном открытии, касающемся синусоид.

Знаменитая теорема Фурье гласит: любую периодическую волну можно построить посредством сложения синусоид. На это несколько неожиданное утверждение современники ученого отреагировали с большим недоверием. Многие волны совершенно не похожи на синусоиды — например, прямоугольная волна (см. рисунок ниже), которая напоминает зубцы ограды замка и состоит из прямых линий, тогда как синусоида представляет собой непрерывную кривую. И все же Фурье оказался прав: прямоугольную волну можно построить из одних только синусоид.



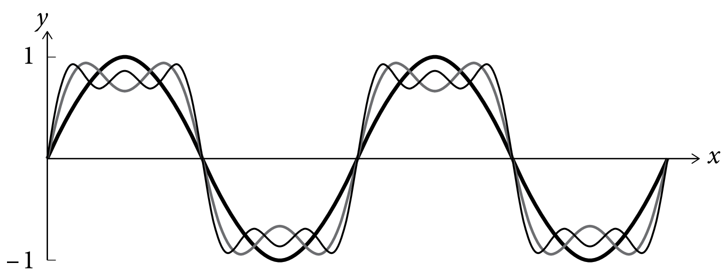
Вот как это сделать. На рисунке ниже размещены три синусоиды: элементарная синусоида, волна поменьше с частотой в три раза больше и третью амплитуды и еще более мелкая волна с частотой в пять раз больше и амплитудой в пять раз меньше. Эти три волны можно описать следующими уравнениями: $\sin x$, $\frac{\sin 3x}{3}$ и $\frac{\sin 5x}{5}$.



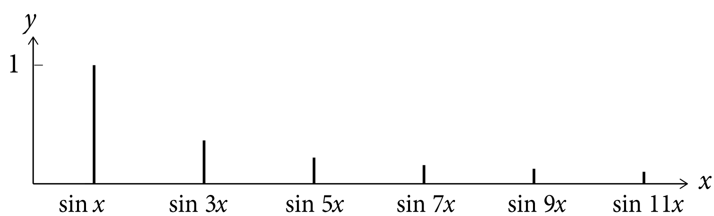
Я начал суммировать волны, представленные на рисунке. Сначала элементарную синусоиду, $\sin x$. Сумма $\sin x + \frac{\sin 3x}{3}$ являет собой волну, которая похожа на ряд коренных зубов. Сумма $\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}$ — это волна, напоминающая нить лампы накаливания. Прибавляя к данной последовательности следующие члены ряда, мы будем все больше приближаться к прямоугольной волне:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots$$

В пределе, прибавив бесконечное множество членов ряда, мы получим прямоугольную кривую. Просто поразительно, что кривую столь строгой формы можно построить с использованием исключительно волнообразных колебаний. Любую периодическую волну, состоящую из зубчатых линий, сглаженных кривых или даже их сочетания, можно создать с помощью синусоид.



Сумма синусоид, образующих эту волну, называется рядом Фурье [14]. Это чрезвычайно полезная концепция, поскольку она позволяет интерпретировать непрерывную волну в категориях дискретных сигналов. Например, члены ряда для прямоугольной волны могут быть представлены в виде гистограммы, как показано на рисунке ниже.

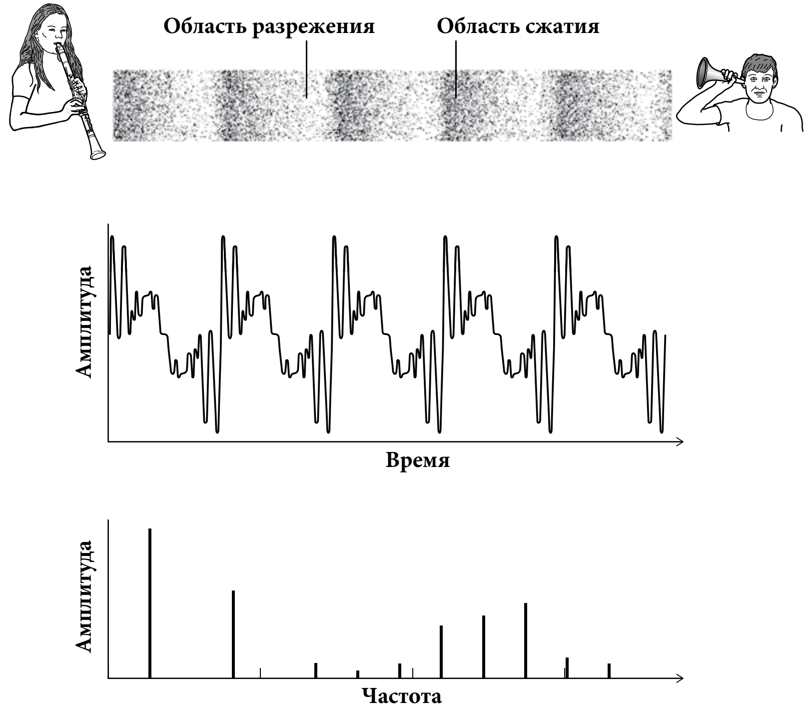


На горизонтальной оси отложены частоты составляющих синусоид, а на вертикальной — их амплитуды. Каждый столбик представляет синусоиду, причем самый левый — это синусоида, имеющая основную («фундаментальную») частоту. График такого типа обозначается термином «частотный спектр волны», или «преобразование Фурье».

Теорема Фурье стала одним из самых важных математических открытий, сделанных в XIX веке, поскольку позволила моделировать явления из многих областей (от оптики до квантовой механики и от сейсмологии до электротехники) в виде периодических волн. В большинстве случаев лучший способ изучения подобных волн сводится к их разбиению на простые синусоиды. В частности, такая область естествознания, как акустика, целиком и полностью построена на практическом применении открытий Фурье.

Звук — это вибрация молекул воздуха. Они вибрируют в направлении распространения звука, как показано на рисунке ниже на примере кларнета, поочередно образующего области сжатия и разрежения. Изменение давления воздуха в любой точке с течением времени представляет собой периодическую волну.

Как видите, звуковая волна, создаваемая кларнетом, имеет сложную зубчатую форму. Однако, согласно теореме Фурье, ее можно разложить на сумму синусоид, частота которых кратна основной частоте первого члена ряда. Другими словами, волну можно представить в виде спектра частот с разной амплитудой. На рисунке частотный спектр кларнета отображен в виде гистограммы.



Звуковая волна и частотный спектр кларнета

Помните: зубчатая волна и гистограмма представляют один и тот же звук, просто эта информация закодирована разными способами. На графике волны на горизонтальной оси отложено время, тогда как на гистограмме — частота. Инженеры-звукотехники говорят, что звуковая волна находится во временнóй области, а результат ее преобразования — в частотной.

Частотная область предоставляет нам всю информацию, которая необходима для воссоздания звука кларнета с помощью камертона. Каждый столбик гистограммы обозначает синусоиду, колеблющуюся с определенной частотой. Вспомните об экспериментах Лиссажу с камертонами, о которых шла речь выше. Создаваемая камертоном звуковая волна — это синусоида. Следовательно, для воспроизведения звука кларнета нужно сделать так, чтобы специально подобранные камертоны издавали звук, частота и амплитуда которого описываются соответствующим элементом гистограммы. Точно так же частотный спектр скрипки представляет собой подробную инструкцию по использованию камертонов для воссоздания звука скрипки. Различие между тембром ноты «до» третьей октавы кларнета и скрипки обеспечивается колебанием одной группы камертонов с разными относительными амплитудами. Таким образом, исходя из теоремы Фурье, теоретически возможно сыграть все сочинения Бетховена с помощью камертонов так, что их звучание будет неотличимо от исполнения тех же произведений симфоническим оркестром.

Когда мимо Dolby Laboratories в Сан-Франциско проезжает пожарная машина, все сотрудники компании (особенно «золотые уши», то есть те, кто обладает исключительным слухом) закрывают руками уши, пытаясь защитить свой слух от вредного шума. Компания Dolby завоевала хорошую репутацию благодаря выпуску систем шумопонижения для киноиндустрии, а сейчас разрабатывает программы для обеспечения высокого качества звучания бытовых электронных устройств, целиком и полностью основанные на синусоидах.

Возможность перевести звуковую волну из временнóй в частотную область дает следующее преимущество: многие задачи, которые трудно выполнить в одной области, гораздо проще решить в другой. Любой звук, воспроизводимый цифровыми устройствами (телевизором, телефоном или компьютером), хранится в виде данных в частотной, а не временнóй области.

«Звуковая волна похожа на макаронину, — сказал мне старший директор отдела по разработке звуковых технологий Бретт Крокетт. — Ее невозможно ухватить». Данные о частотах гораздо легче сохранить, поскольку они представляют собой совокупность дискретных значений. Помогает также и то, что наш слух воспринимает не все частоты. «[Слух] не нуждается в полной картине», — добавил Крокетт. Программное обеспечение Dolby превращает звуковые волны в синусоиды, а затем отбрасывает несущественные синусоиды, чтобы записать максимально качественный звук и сохранить его в виде как можно меньшего количества информации. Когда она воспроизводится в виде звука, диапазон оставшихся частот конвертируется в звуковую волну во временно́й области.

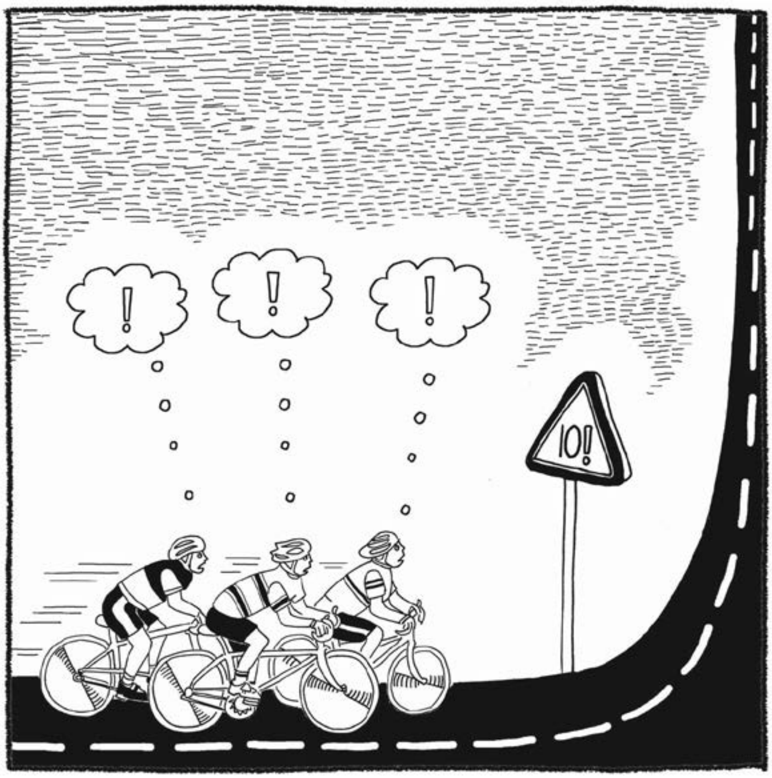
Хоть все это звучит достаточно просто, на практике фильтрация синусоид из частотного спектра — чрезвычайно сложная задача. Во-первых, в основе этого процесса лежит так называемое быстрое преобразование Фурье — компьютерный алгоритм, конвертирующий волны в их частоты в режиме реального времени. Во-вторых, разные инструменты, музыкальные стили и голоса требуют разных решений. Труднее всего правильно воспроизвести звукоряд, содержащий гармоники, поскольку его частотный спектр напоминает частокол: амплитуды разных частот имеют одинаковую высоту, что приводит к удалению даже тех частот, которые можно услышать. В компании Dolby используют самые современные технологии, для того чтобы точно воспроизвести невероятно прекрасную песню Moon River («Лунная река»), написанную Генри Манчини в 1961 году. «Золотые уши» Бретта Крокетта оценивают новую технологию Dolby по тому, насколько правдиво она воссоздает гармонический рифф, записанный более чем полстолетия назад.

Жозеф Фурье был первым человеком, преобразовавшим периодическую волну в диапазон частот. Гораздо позже биологи выяснили, как именно работает ухо. Отдел внутреннего уха, отвечающий за восприятие и распознавание звуков, называется улиткой и представляет собой свернутый спиралью, заполненный жидкостью канал, мембрана которого покрыта волосковыми клетками. Волоски вибрируют в соответствии с частотой входящей звуковой волны, причем волоски, вибрирующие на самых низких частотах, находятся у одного конца улитки, а на самых высоких частотах — у другого конца. Если развернуть спираль улитки в прямую линию, она выглядела бы как горизонтальная ось результата преобразования Фурье. Природа выделяет частоты звуковых волн с тех самых пор, как у живых существ появились уши, чтобы слышать.

В этой главе шла речь о математических аспектах хождения по замкнутому кругу. Но давайте разорвем его и посмотрим, что происходит с вещами, которых становится все больше, больше и больше?

Все о числе *e*

6



В Боулдере я навестил автора лекции, с которой он выступил, пожалуй, наибольшее количество раз за всю историю науки [1]. Альберт Бартлетт, почетный профессор физики Колорадского университета, впервые прочел лекцию Arithmetic, Population and Energy («Арифметика, население и энергия») в 1969 году [2]. К тому времени, когда я с ним встретился, он выступил с ней уже 1712 раз и, несмотря на то что ему почти 90 лет, продолжал читать ее примерно по 20 раз в год. Бартлетт был высоким мужчиной крепкого телосложения с величественной осанкой, носившим галстук «боло» в стиле Дикого Запада с пряжкой, украшенной звездами и планетами. В своей знаменитой лекции Бартлетт не предвещающим ничего хорошего тоном заявляет о том, что величайший недостаток рода человеческого состоит в его неспособности понять суть экспоненциального роста. За последние годы это простое, но мощное послание сделало Бартлетта звездой интернета: видео его лекции под названием The Most IMPORTANT Video You'll Ever See («Самое важное видео, которое вы когда-либо увидите»), выложенное на YouTube, получило более 5 миллионов просмотров.

Экспоненциальный (или пропорциональный) рост имеет место в случае, если какая-то величина постоянно увеличивается пропорционально ее значению, например путем удвоения:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64…

Или посредством умножения на три:

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729…

Или даже посредством увеличения всего лишь на один процент:

1; 1,01; 1,0201; 1,0303; 1,0406; 1,05101; 1,06152…

Все эти числа можно представить и в таком виде:

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6…$
$3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6…$
$1{,}01^0; 1{,}01^1; 1{,}01^2; 1{,}01^3; 1{,}01^4; 1{,}01^5; 1{,}01^6…$

Маленькое число, расположенное вверху справа от числа нормального размера, называется показателем степени (экспонентой) и указывает, сколько раз необходимо умножить нормальное число на себя. Последовательности, в которых величина растет со скоростью, пропорциональной ее значению, демонстрируют экспоненциальный рост, так как у каждого очередного члена ряда показатель степени увеличивается на единицу.

Когда величина растет по экспоненциальному закону, то чем больше она становится, тем быстрее увеличивается, поэтому всего после нескольких шагов она может достичь ошеломляющего значения. Давайте посмотрим, что произойдет с листом бумаги, если складывать его вдвое. В результате каждого очередного сгибания лист становится толще в два раза. Поскольку толщина листа бумаги составляет примерно 0,1 миллиметра, вследствие каждого сгибания она будет увеличиваться так:

0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; 3,2; 6,4…

Это та же последовательность, что и размещенная выше, каждый член которой в два раза больше предыдущего, но со смещением десятичного знака на одну позицию. Поскольку стопка бумаги все время утолщается, каждое очередное сгибание требует бóльших усилий, и к седьмому разу согнуть бумагу уже практически невозможно. В этот момент толщина бумаги в 128 раз больше одного листа, что эквивалентно толщине 256-страничной книги.

Но продолжим процесс, чтобы увидеть (по крайней мере, теоретически), насколько увеличится толщина стопки бумаги в сложенном состоянии. Сложив бумагу еще шесть раз, мы получим стопку высотой в один метр. Еще шесть сгибаний дадут нам стопку высотой с Триумфальную арку, а после очередных шести она поднимется в небо на 3 километра. Какой бы обычной ни казалась процедура удвоения, ее многократное применение дает невероятный результат. После 42 сгибаний наша бумага оставит позади Луну, а всего после 92 достигнет края обозримой Вселенной.

Но Альберта Бартлетта интересуют не столько другие планеты, сколько планета, на которой мы живем. В своей лекции он объяснил суть экспоненциального роста с помощью невероятно убедительной аналогии. Представьте себе бутылку с бактериями, численность которых увеличивается в два раза каждую минуту. В 11 часов утра в бутылке находится всего одна бактерия, а через час, к полудню, бутылка будет полностью заполнена бактериями.

Анализ данного процесса в обратном порядке показывает, что в 11:59 бутылка заполнена бактериями наполовину, в 11:58 — на четверть и т. д. «Если бы вы были обычной бактерией, живущей в этой бутылке, — спрашивает Бартлетт, — в какой момент времени вы поняли бы, что свободного пространства вот-вот не останется?» В 11:55 бутылка кажется почти пустой: она заполнена всего на $\frac{1}{32}$, или около 3 процентов, что оставляет 97 процентов свободного места для роста популяции. Осознают ли бактерии, что они всего в пяти минутах от стопроцентной заполненности бутылки? Бутылка Бартлетта — это предостережение жителям Земли. Если население планеты будет увеличиваться по экспоненте, свободного места на ней не останется гораздо быстрее, чем кажется.

Возьмем в качестве примера историю города Боулдер. За период с 1950 года (когда туда переехал Бартлетт) по 1970 год численность его населения в среднем ежегодно увеличивалась на шесть процентов. Для того чтобы определить численность населения к концу первого года, необходимо первоначальное значение умножить на 1,06, к концу второго года — на $(1{,}06)^2$, к концу третьего года — на $(1{,}06)^3$ и т. д., а значит, здесь мы имеем экспоненциальную последовательность.

На первый взгляд кажется, что сами по себе шесть процентов — не так много, но за два десятилетия это привело к увеличению численности населения города более чем в три раза, с 20 000 до 67 000 человек. «Это ужасающий рост, — сказал Бартлетт, — и с тех пор мы делаем все возможное, чтобы замедлить его» (в настоящее время население города составляет почти 100 000 жителей). Страстное желание Бартлетта объяснить людям суть экспоненциального роста обусловлено его решимостью сохранить качество жизни в родном городе, расположенном в горах.

Важно помнить, что если процентный рост за единицу времени представляет собой постоянную величину, то он подчиняется экспоненциальному закону. Следовательно, если даже рассматриваемая величина начинает расти достаточно медленно, этот рост резко ускорится, и в ближайшее время значение величины станет настолько большим, что поначалу это покажется противоречащим здравому смыслу. Практически все экономические, финансовые и политические показатели (такие как объем продаж, прибыль, курс акций, ВВП и численность населения) рассчитываются в виде относительного изменения за единицу времени, а значит, экспоненциальный рост очень важен для понимания того, как устроен наш мир.

Так было и полтысячелетия назад, когда озабоченность проблемой экспоненциального роста привела к использованию арифметического эмпирического «правила 72», впервые упомянутого в трактате Луки Пачоли Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità («Сумма арифметики, геометрии, дробей, пропорций и пропорциональности»), который стал математической библией эпохи Возрождения. Если рост той или иной величины подчиняется экспоненциальному закону, значит, существует определенный промежуток времени, за который ее значение удвоится (этот период обозначается термином «период удвоения»). «Правило 72» гласит, что величина, растущая на X процентов каждый период времени, увеличится в два раза примерно за $\frac{72}{X}$ периода. (В Приложении 5 я объясню, как работает это правило.) Следовательно, если численность населения растет на 1 процент в год, она удвоится за $\frac{72}{1}$, или 72 года. Если город растет на 2 процента в год, количество его жителей увеличится в два раза за $\frac{72}{2}$, или 36 лет; если на 6 процентов (как в случае Боулдера), на это уйдет $\frac{72}{6}$, или 12 лет.

Период удвоения — это полезная концепция, поскольку она позволяет легко заглянуть в будущее и прошлое. Если численность населения Боулдера увеличится в два раза через 12 лет, значит, она вырастет в четыре раза через 24 года, а через 36 лет будет уже в восемь раз больше. (Разумеется, при условии сохранения темпов роста на одном уровне.) Точно так же можно рассчитать и темпы роста численности населения, имевшие место ранее: при шести процентах роста этот показатель составил бы половину текущего значения 12 лет назад, четверть текущего значения — 24 года назад и восьмую часть — 36 лет назад.

Преобразование процентного изменения в период удвоения позволяет лучше понять, насколько быстро увеличивается значение того или иного показателя. Это делает правило 72 просто незаменимым для понимания сути экспоненциального роста. Я помню, как отец объяснял мне это правило, когда я был совсем юным, а ему рассказывал о нем его отец, который, будучи торговцем одеждой в лондонском Ист-Энде в те времена, когда еще не было калькулятора, полагался на это правило в своей трудовой жизни. Согласно ему, если вы возьмете кредит под 10 процентов годовых, ваш долг увеличится в два раза примерно через семь лет и в четыре раза — через четырнадцать.

Интерес Альберта Бартлетта к экспоненциальным процессам вскоре вышел за рамки проблем перенаселенности, загрязнения и транспортных заторов в Боулдере, поскольку те аргументы, которые он приводил в муниципалитете, были в равной степени применимы и ко всему миру. Земля не выдержит количества населения, численность которого растет по экспоненте каждый год, — во всяком случае, ее ресурсов не хватит надолго. Взгляды Бартлетта сделали его современным Томасом Мальтусом. Томас Мальтус — английский священник, еще две сотни лет назад утверждавший, что увеличение численности населения повлечет за собой голод и болезни, поскольку экспоненциальный рост количества людей не может быть уравновешен соответствующим ростом производства продуктов питания. «Мальтус прав! — убежден Бартлетт. — Он ничего не знал о нефти и механизации, но его идеи абсолютно верны. Он понимал, чем экспоненциальный рост отличается от линейного роста. Население способно увеличиваться быстрее, чем объем ресурсов, необходимых для выживания». А еще он добавил следующее: «Из каких бы предположений вы ни исходили, численность населения достигнет катастрофической отметки уже в середине текущего столетия, через 40 лет от нынешнего момента».

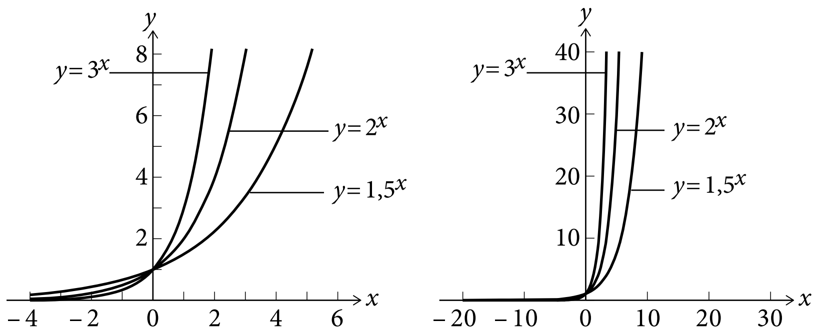
Бартлетт относится к числу лекторов, способных завладеть вниманием аудитории. Он мастерски превращает то головокружение, которое вы испытываете при попытках понять суть экспоненциального роста, в страх неотвратимого апокалипсического будущего. Выступления Бартлетта весьма занимательны еще и потому, что он использует различные инструменты из области физики (такие как выделение сущности проблемы, локализация универсального закона) в дискуссиях, в которых доминируют, как правило, экономисты и социологи. Больше всего Бартлетта возмущают экономисты; их он обвиняет в коллективном отрицании проблемы. «Они создали общество, в котором рост численности населения необходим для обеспечения роста занятости. Однако такой рост не оправдывает себя и приведет в итоге к катастрофе». По мнению Бартлетта, единственно приемлемое для общества решение — избавиться от пагубного пристрастия к экспоненциальным процессам.

Оппоненты Бартлетта утверждают, что наука найдет способ и дальше увеличивать производство продуктов питания и энергии, как это удавалось до сих пор, а также что уровень рождаемости и без того падает во всем мире. Но Бартлетт считает, что они не осознают главного. «Чаще всего экономисты заявляют, что я не понимаю сути проблемы и что все гораздо сложнее тех простых вещей, о которых я говорю. Но я отвечаю на это так: если вы не понимаете простых аспектов, вы не сможете понять и более сложных!» А затем он, ухмыльнувшись, сказал: «Но меня им не переубедить. Рост численности населения или рост потребления ресурсов выдержать невозможно, точка. Конец дискуссий. Это неоспоримый факт, если только вы не намерены оспаривать законы математики».

Бартлетт называет нашу неспособность понять суть экспоненциального роста самым большим недостатком человечества. Но почему нам так трудно это понять? В 1980 году психолог Гидеон Керен из Института восприятия в Голландии провел исследование, в ходе которого попытался выяснить, есть ли какие-либо культурные различия в ошибочных представлениях об экспоненциальном росте [3]. Он предложил группе канадцев составить прогноз стоимости стейка, растущей на 13 процентов в год. Участникам эксперимента сообщили данные о цене в 1977, 1978, 1979 и 1980 годах, когда она составляла 3 доллара, и попросили определить, какой она будет через 13 лет, в 1993 году. Средняя оценка составила 7,7 доллара, примерно половину от правильного ответа — 14,7 доллара, что было существенно меньше реального значения. Затем Керен поставил тот же вопрос группе израильтян, назвав цену в местной валюте — израильских фунтах: в 1980 году один стейк стоил 25 израильских фунтов. Средняя оценка цены стейка в 1993 году составила в этом случае 106,4 фунта, что снова было ниже правильного ответа в размере 122,4 фунта, но все же гораздо ближе к нему. По мнению Керена, израильтяне лучше справились с поставленной задачей, потому что их страна переживала период, когда годовой темп инфляции равнялся почти 100 процентам по сравнению с 10 процентами в Канаде. Исследователь пришел к выводу, что, столкнувшись с более высоким экспоненциальным ростом, израильтяне стали гораздо чувствительнее к нему, хотя их оценки тоже оказались занижены.

В 1973 году Дэниел Канеман и Амос Тверски продемонстрировали, что люди называют намного меньшие числа, оценивая результат умножения $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$, чем результат умножения $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, хотя на самом деле эти произведения идентичны. Это позволило сделать следующий вывод: наши суждения зависят от порядка прочтения чисел [4]. (Медианный ответ по возрастающей последовательности был 512, а убывающей — 2250. На самом деле обе оценки существенно меньше правильного ответа — 40 320.) Результаты исследований Канемана и Тверски позволяют понять, почему мы всегда будем недооценивать экспоненциальный рост: первые члены любой последовательности как будто привязывают нас к себе, «ставят на якорь», причем этот эффект наиболее заметен в случае возрастающей последовательности.

Экспоненциальный рост может быть либо пошаговым, либо непрерывным. В аналогии с бактериями, использованной в своей лекции Бартлеттом, одна бактерия превращается в две, две бактерии превращаются в четыре, четыре — в восемь и т. д. Население также увеличивается на целые числа за фиксированные промежутки времени. Однако на представленном ниже рисунке кривые растут экспоненциально и непрерывно. В каждой точке кривая повышается со скоростью, пропорциональной ее высоте.

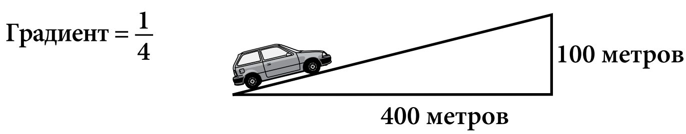


Экспоненциальные кривые

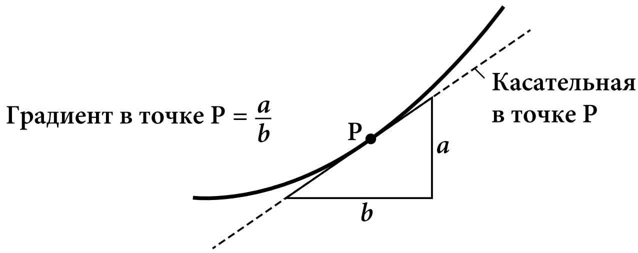
Когда уравнение представлено в виде $y = a^x$, где a — положительное число, кривая демонстрирует непрерывный экспоненциальный рост. Кривые на рисунке описаны уравнениями $y = 3^x$, $y = 2^x$ и $y = 1{,}5^x$; другими словами, эти кривые отображают последовательности, в которых каждый очередной член в три, два и полтора раза больше предыдущего. Например, в случае уравнения $y = 2^x$, если x равно 1, 2, 3, 4, 5…, тогда y равно 2, 4, 8, 16, 32…

На графике меньшего масштаба (см. рисунок слева) кривые напоминают ленты, приколотые к вертикальной оси в точке 1. На графике более крупного масштаба (рисунок справа) можно увидеть, что все кривые разделяют одну судьбу: приближаются к вертикальной оси всего через несколько единиц по горизонтальной оси. Совсем не похоже на то, что эти кривые покроют когда-либо всю плоскость по горизонтали, хотя на самом деле это обязательно произойдет. Если бы я захотел показать на графике кривую $y = 3^x$, где $x = 30$, страницу нужно было бы растянуть на сто миллионов километров по вертикали.

Когда кривая растет по экспоненциальному закону, то чем выше она поднимается, тем круче становится. Чем дальше мы перемещаемся по такой кривой, тем быстрее она растет. Однако прежде, чем продолжить, давайте познакомимся с новым понятием — понятием градиента, математического показателя крутизны подъема. Градиент наклона равен отношению изменения высоты к изменению расстояния по горизонтали — это должно быть хорошо знакомо каждому, кто когда-либо ехал на автомобиле или велосипеде по горной дороге. Если дорога поднимается на 100 метров за 400 метров пути по горизонтали, как показано на рисунке ниже, то градиент составляет $\frac{100}{400}$, или $\frac{1}{4}$, что записывают на дорожных знаках как 25%. Это определение интуитивно понятно, поскольку оно означает, что чем круче дорога, чем выше градиент. Однако здесь нужно быть внимательным. Дорога, у которой градиент равен 100%, — это дорога, высота подъема которой равна пройденному расстоянию, то есть она повышается под углом всего 45 градусов. Теоретически у дороги может быть градиент и больше 100 процентов; на самом деле он может быть бесконечным, если она направлена вертикально вверх.



Дорога, показанная на рисунке выше, имеет постоянный градиент. Однако в действительности градиент большинства дорог представляет собой переменную величину. Такие дороги то набирают крутизну, то выравниваются, то снова устремляются вверх. Для того чтобы найти на них градиент любой точки (другими словами, кривой), необходимо провести в этой точке касательную и определить *ее* градиент. Касательная — линия, которая соприкасается с кривой в этой точке, но не пересекает ее (слово *tangent* («касательная») происходит от латинского *tangere* («касаться»)). На представленном ниже рисунке кривой с переменным градиентом я обозначил точку P и провел в ней касательную. Для того чтобы найти ее градиент, нужно нарисовать прямоугольный треугольник, который покажет нам изменение высоты a при смещении по горизонтали, равном b, а затем рассчитать отношение a/b. Размер треугольника не имеет значения, поскольку соотношение высоты и ширины останется неизменным. Градиент в точке P — это градиент касательной в точке P, равный a/b.

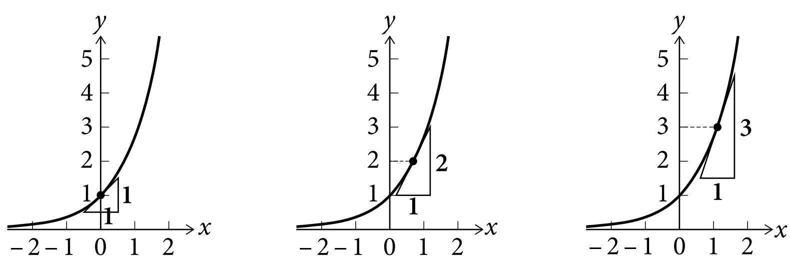


Вернемся к описанию экспоненциальных кривых: чем дальше мы перемещаемся по ним, тем круче они становятся. Другими словами, чем выше по кривой вы пройдете, тем больше будет градиент. В действительности мы можем сделать еще более смелое заявление: для всех экспоненциальных кривых *градиент неизменно представляет собой определенный процент от высоты*. Но здесь возникает очевидный вопрос: что такое «кривая Златовласки», для которой значения градиента и высоты всегда равны?

Оказывается, такая «правильная» кривая описывается уравнением:

$$y = (2{,}7182818284\ldots)^x$$

Как показано на рисунке ниже, когда высота равна 1, градиент тоже равен 1, когда высота равна 2, градиент равен 2, когда высота равна 3, градиент равен 3 и т. д. Следовательно, когда высота равна числу π, градиент равен π; когда высота равна миллиону, градиент тоже равен миллиону. В любой точке кривой два ее фундаментальных свойства, высота и градиент, равны друг другу и повышаются вместе, как взлетающие в небо возлюбленные на картине Шагала.



Кривая $y = e^x$: высота точки на кривой всегда равна градиенту в этой точке

Однако геометрическая красота этой кривой вступает в противоречие с ее уродливым порождением — хаотичной совокупностью цифр десятичного числа, начинающейся с 2,718 и продолжающейся до бесконечности без повторений. Для удобства обозначим это число буквой *e* и назовем его *экспоненциальной константой*. Это вторая самая известная математическая константа после π. Однако, в отличие от числа π, которое изучают уже на протяжении тысячи лет, число *e* появилось сравнительно недавно.

Говорят, что, когда Альберта Эйнштейна спросили, что он считает величайшим открытием всех времен, он с иронией ответил: «Сложный процент». Возможно, на самом деле этого диалога никогда не было, но он вошел в городскую мифологию, поскольку именно такой шутливый ответ мы хотели бы услышать. Процент — это денежный сбор, который вы платите, когда берете деньги в долг, или получаете, когда даете их взаймы. Как правило, размер данного сбора составляет определенный процент от суммы, взятой или предоставленной в долг. Простой процент — это конкретная сумма денег, которая выплачивается на первоначальную сумму и остается неизменной при каждом очередном периоде выплаты процентов. Так, если банк назначает простой процент в размере 20 процентов годовых по кредиту в объеме 100 фунтов стерлингов, то через год долг составит 120 фунтов, через два года — 140 фунтов, через три года — 160 фунтов и т. д. Однако в случае сложного процента сумма процентных платежей рассчитывается за каждый очередной период с учетом начисленных процентов, другими словами — на *накопленную* сумму долга. То есть если банк назначает сложный процент в размере 20 процентов годовых, кредит в объеме 100 фунтов превратится через год в 120 фунтов, через два года это будет уже 144 фунта, через три — 172,8 фунта и т. д. Эти суммы рассчитаны следующим образом.

Первый год:

долг + проценты $= £100 + (£100 \times \frac{20}{100}) = £120$

Второй год:

накопленный долг + проценты $= £120 + (£120 \times \frac{20}{100}) = £144$

Третий год:

накопленный долг + проценты $= £144 + (£144 \times \frac{20}{100}) = £172{,}8$

И так далее.

Сложный процент растет гораздо быстрее, чем простой, поскольку он увеличивается по экспоненте. Прибавление X процентов к основной сумме долга равносильно умножению на $1 + \frac{x}{100}$, а значит, представленные выше расчеты можно записать и в такой форме.

Первый год:

$$£100 + \left(1 + \frac{20}{100}\right)$$

Второй год:

$$£100 \left(1 + \frac{20}{100}\right) \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = £100 \left(1+ \frac{20}{100}\right)^2$$

Третий год:

$$£100 \left(1 + \frac{20}{100}\right)^2 \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = £100 \left(1 + \frac{20}{100}\right)^3$$

Это и есть последовательность, подчиняющаяся экспоненциальному закону.

Кредиторы издавна отдают предпочтение сложному проценту перед простым. Действительно, в одной из самых первых задач в математической литературе, записанной на месопотамской глиняной табличке, датируемой 1700 годом до н. э., спрашивается, сколько времени уйдет на удвоение суммы, если проценты накапливаются при ставке 20 процентов годовых. Одна из причин привлекательности банковского дела состоит в том, что сложный процент увеличивает долг или ссуду в геометрической прогрессии, а это значит, что вскоре вы должны будете либо выплатить, либо, наоборот, заработать баснословную сумму. Римляне осуждали начисление сложного процента как худшую форму ростовщичества. В Коране это считается грехом. Тем не менее глобальная финансовая система полагается в своей деятельности на эту практику. Именно так рассчитываются остатки на наших банковских счетах, проценты по кредитным картам и платежи по ипотечным кредитам. Сложный процент был главным катализатором экономического роста с самого начала развития нашей цивилизации.

В конце XVII столетия швейцарский математик Якоб Бернулли задал достаточно простой вопрос по поводу сложного процента. Какова зависимость между интервалом его начисления и стоимостью кредита? (Якоб был старшим братом Иоганна, с которым мы познакомились в предыдущей главе, когда он призвал самых блестящих математиков мира найти путь наискорейшего спуска.) Что лучше: начислять полную годовую процентную ставку один раз в год, или половину годовой процентной ставки каждые полгода, или двенадцатую часть ставки один раз в месяц, или даже $\frac{1}{365}$ часть ставки каждый день? Интуиция подсказывает, что чем чаще мы начисляем проценты, тем больше процентной прибыли заработаем, что действительно так, поскольку в данном случае деньги работают на нас дольше. Однако я хочу объяснить вам эти расчеты шаг за шагом, поскольку они раскрывают одну интересную математическую закономерность.

Для того чтобы максимально упростить расчеты, давайте исходить из предположения, что сумма депозита составляет 1 фунт стерлингов и что банк выплачивает на него проценты по ставке 100 процентов годовых. Через год стоимость депозита удвоится и будет равна 2 фунтам.

Если же мы сократим вдвое процентную ставку и интервал начисления процентов, то получим ставку 50 процентов, которая начисляется за год дважды.

Следовательно, через шесть месяцев наш депозит вырастет до такой суммы:

$$£1\ (1 + \frac{50}{100}) = £1{,}50$$

Через год сумма депозита составит:

$$£1\ (1+ \frac{50}{100}) \times (1+ \frac{50}{100}) = £1\ (1 + \frac{50}{100})^2 = £2{,}25$$

Следовательно, начисляя проценты каждые полгода, мы заработаем на 25 пенсов больше.

Аналогично, если процентная ставка составляет 12-ю часть от 100 процентов и есть двенадцать ежемесячных платежей, депозит вырастет до следующей суммы:

$$£1\ (1 + \frac{1}{12})^{12} = £2{,}613$$

То есть при ежемесячном начислении процентов мы дополнительно получим 61 пенс.

А если процентная ставка составляет 365-ю часть от 100 процентов при наличии 365 ежедневных платежей, то сумма депозита будет:

$$£1\ (1 + \frac{1}{365})^{365} = £2{,}7146$$

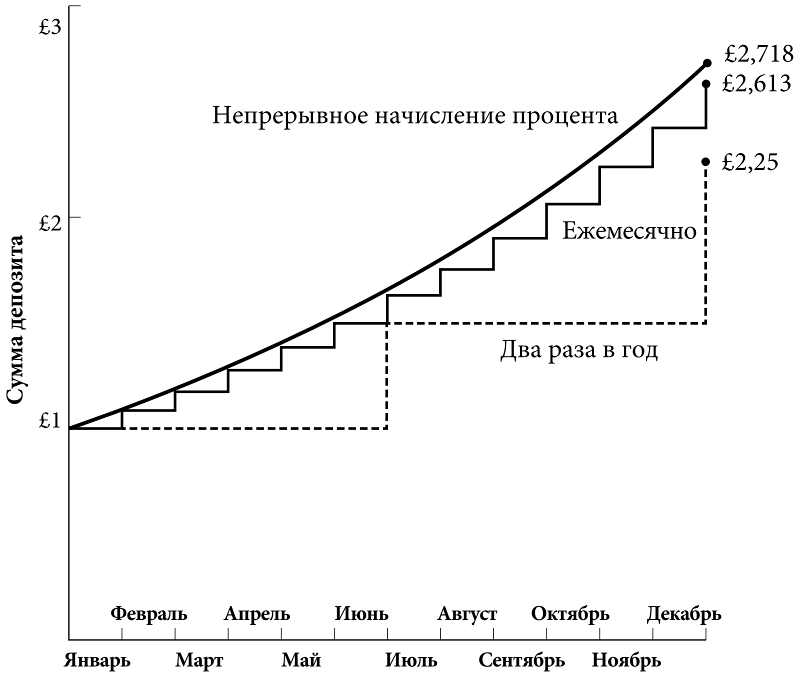
В этом случае мы зарабатываем дополнительно 71 пенс.

Закономерность очевидна. Чем больше интервалов начисления процентов, тем больше дохода приносят вложенные деньги. Но насколько далеко мы можем продвигать этот процесс? Якоб Бернулли хотел знать, есть ли какой-либо предел увеличения суммы, если интервалы начисления процентов будут становиться все меньше и меньше.

Как мы уже видели, если разделить годовую процентную ставку на n и начислять ее n раз, баланс на конец года в фунтах составит:

$$(1 + \frac{1}{n})^n$$

Если сформулировать вопрос Бернулли в алгебраической форме, то он прозвучит так: что произойдет со значением этого выражения, если n будет стремиться к бесконечности? Оно тоже будет увеличиваться до бесконечности или приблизится к конечному пределу? Мне нравится визуализировать эту задачу в виде своего рода «перетягивания каната» по горизонтальной оси графика. Чем больше значение n, тем меньше значение $(1 + \frac{1}{n})$, что перетягивает все выражение в левую сторону. С другой стороны, показатель степени n тянет все выражение вправо, поскольку чем больше раз вы умножаете то, что находится в скобках, тем больше итог. В начале соревнования побеждает показатель степени, так как мы уже видели, что когда n равно 1, 2, 12 и 365, значение $(1 + \frac{1}{n})^n$ увеличивается от 2 до 2,25, затем до 2,613 и 2,7146. По всей вероятности, вы уже понимаете, к чему мы идем. Когда значение n стремится к бесконечности, в «перетягивании каната» наступает момент равновесия. Бернулли случайно нашел экспоненциальную константу, поскольку при n, приближающемся к бесконечности, значение $(1 + \frac{1}{n})^n$ стремится к числу e.



Сумма депозита в размере 1 фунт стерлингов через год при условии, что ставка 100 процентов годовых начисляется два раза в год, ежемесячно и непрерывно

Проанализируем этот процесс визуально. На представленном выше рисунке отображены три сценария того, что произойдет за год с депозитом в размере 1 фунт стерлингов при годовой ставке 100 процентов, начисляемой пропорционально за разные периоды. Пунктирная линия соответствует начислению процента два раза в год, тонкая линия — один раз в месяц. Чем больше шагов, тем выше поднимаются линии. Когда шаги становятся бесконечно малы, линия превращается в кривую $y = e^x$ — эталон экспоненциального роста.

Когда мы говорим, что кривая отображает непрерывное начисление процента, это значит, что сумма нашего депозита увеличивается в каждый момент времени на протяжении года и в конце года составит 2,718 фунта, или число *e*.

Бернулли открыл число *e* во время изучения сложного процента [5]. Безусловно, он был бы рад узнать, что его открытие стало краеугольным камнем современной банковской системы (разумеется, с более реалистичными процентными ставками). Причина в том, что британские финансовые учреждения по закону обязаны указывать непрерывно начисляемую процентную ставку по всем продуктам, которые они продают, независимо от того, с какой периодичностью они предпочитают выплачивать проценты — один раз в месяц, два раза в год, один раз в год или как-то еще.

Предположим, банк предлагает депозит под 15 процентов годовых при условии их выплаты один раз в год. Это означает, что через год депозит в размере 100 фунтов стерлингов вырастет до 115 фунтов. Если эти 15 процентов начислять непрерывно, то согласно формуле, полученной на основании свойств числа e, через год наш депозит вырастет до £100 × $e^{15/100}$, что дает 116,18 фунтов, или годовую процентную ставку 16,18 процента. По закону банк обязан объявить, что по этому депозиту проценты выплачиваются по ставке 16,18 процентов. На первый взгляд может показаться странным, что банкам приходится называть цифры, которые они не используют на практике, однако это правило было введено для того, чтобы клиенты могли сравнить похожие банковские продукты. Как депозит, по которому проценты выплачиваются ежемесячно, так и депозит с выплатой процентов один раз в год, можно оценить по соответствующим ставкам непрерывно начисляемого процента. Практически каждый финансовый продукт включает в себя сложный процент, а каждый расчет непрерывно начисляемого процента содержит число e. Следовательно, экспоненциальная константа — это ключевое число, от которого зависит вся финансовая система.

Но хватит о деньгах. Экспоненциальный рост демонстрируют и многие другие явления, такие как распространение болезни, размножение микроорганизмов, скорость ядерной цепной реакции, увеличение интернет-трафика и фидбэк на электрогитаре. Во всех этих случаях ученые моделируют рост с помощью числа e.

Выше уже шла речь о том, что уравнение $y = a^x$, где a — положительное число, описывает кривую экспоненциального роста. Мы можем представить его так, чтобы в нем присутствовало число e. Математические свойства показателя степени таковы, что член уравнения a^x можно записать в виде e^{kx}, где k — некоторое положительное число. Например, кривая последовательности, каждый член которой в два раза больше предыдущего, описывается уравнением $y = 2^x$, но его можно записать и по-другому: $y = e^{0,69x}$. Аналогичным образом кривая последовательности, каждый член которой втрое больше предыдущего, представлена уравнением $y = 3x$, что эквивалентно $y = e^{1,099x}$. Математики предпочитают записывать уравнение $y = a^x$ в виде $y = e^{kx}$, поскольку число *e* олицетворяет экспоненциальный рост в его чистом виде. Это число упрощает уравнение, делает его элегантнее и облегчает расчеты. Экспоненциальная константа *e* — важнейший элемент математики роста.

π — первая константа, с которой мы знакомимся в школе; число *e* изучают гораздо позже, причем только те, кто специализируется на математике. Однако на уровне университетского образования число *e* занимает доминирующее положение. По чистой случайности вышло так, что *e* — это также самая распространенная буква в английском языке. Математическая роль числа *e* имеет свою аналогию в лингвистике. Когда в уравнении присутствует число *e*, это свидетельствует о расцвете экспоненциального роста, а цветение — признак зарождения жизни. Точно так же буква *e* привносит жизнь в письменный язык, превращая слова со смежными согласными в удобопроизносимое сочетание звуков.

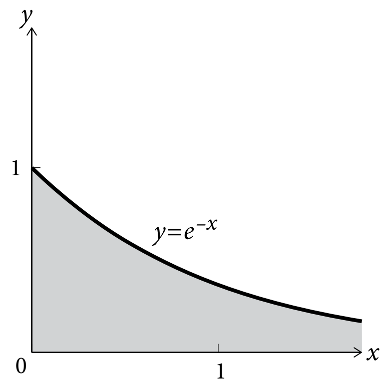
У экспоненциального роста есть свой антипод — экспоненциальный спад. В его ходе величина многократно уменьшается в одной и той же пропорции. Например, экспоненциальный спад демонстрирует последовательность, каждый член которой в два раза меньше предыдущего:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

В случае экспоненциального спада эквивалент концепции периода удвоения — это фиксированный промежуток времени, необходимого для того, чтобы величина уменьшилась в два раза. В частности, в физике этот промежуток обозначается термином «период полураспада». Количество радиоактивных частиц в радиоактивном веществе сокращается по экспоненциальному закону, причем тоже с огромными различиями: период полураспада водорода-7 составляет 0,00000000000000000000023 секунды, тогда как кальция-48 — 40 000 000 000 000 000 000 лет.

Если говорить о примерах из повседневной жизни, то разность между температурой горячего чая и температурой чашки, в которую вы его только что налили, уменьшается по экспоненциальному закону. То же самое можно сказать и о снижении атмосферного давления по мере восхождения на гору.

Кривая чистого экспоненциального спада, показанная на рисунке ниже, описывается уравнением $y = \frac{1}{e^x}$, которое можно представить и в такой форме: $y = e^{-x}$. В случае экспоненциального спада градиент всегда имеет отрицательное значение и является величиной, обратной высоте. Кривая спада — это та же экспоненциальная кривая $y = e^x$, отраженная вертикальной осью. У этой кривой есть одно интересное свойство: конечная площадь заштрихованной на рисунке области, ограниченной кривой и вертикальной и горизонтальной осями, равна 1, хотя длина этой области бесконечна, поскольку кривая никогда не достигнет горизонтальной оси.



Кривая экспоненциального спада $y = \frac{1}{e^x}$

В майском выпуске журнала Acta Eruditorum 1690 года первооткрыватель числа *e* Якоб Бернулли снова вернулся к рассмотрению вопроса, над которым математики ломали голову уже целое столетие. Какую геометрическую форму образует кусок шпагата, закрепленный в обоих концах и провисающий под собственной тяжестью? Эта кривая (названная цепной линией — *catenary*, от латинского слова *catena*, «цепь») образуется в случае, когда тот или иной материал провисает под действием силы тяжести, как показано на рисунке ниже. Это может быть провисание электрического кабеля, ожерелья, скакалки или бархатного шнура. Поперечное сечение вздымающегося паруса — тоже цепная линия, развернутая на 90 градусов, поскольку ветер дует горизонтально, тогда как сила тяжести действует вертикально. Однако в отличие от многих других сложных математических задач, которые ученые ставили в XVII столетии, Якоб не знал ответа на этот вопрос до того, как поставил его. Год спустя ответ все еще ускользал от него. А через какое-то время решение задачи нашел младший брат Якоба Иоганн. Вы, наверное, подумали, что это стало поводом для большой радости в доме Бернулли, но на самом деле все было далеко не так. Семья Бернулли считалась одной из самых неблагополучных в математике.

Математическое украшение: цепная кривая

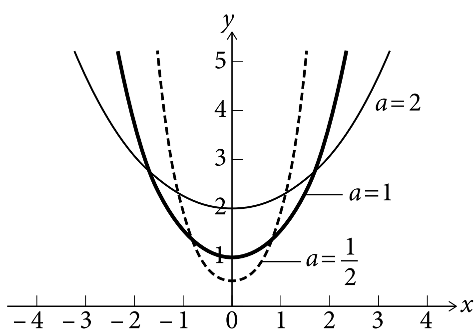
Семья Бернулли, первоначально обитавшая в Антверпене, скрывалась от преследований протестантов испанскими католическими властями. В начале XVII века торговцы специями Бернулли обосновались в швейцарском городе Базеле. Якоб, родившийся в 1654 году, был первым математиком в семье, которой предстояло стать великой династией ученых в разных областях науки. За три поколения восемь представителей семьи Бернулли заслужили звание выдающихся математиков, причем каждый сделал открытие, названное его именем. Якобу, изучавшему сложный процент, наибольшую известность принесла первая крупная работа по теории вероятности. По словам одного историка, он был «своевольным, упрямым, агрессивным, мстительным, одолеваемым чувством неполноценности, но все же твердо убежденным в своей уникальности» [6]. Из-за этого у него часто возникали конфликты с Иоганном, который был на тринадцать лет младше, но имел такой же скверный характер. Иоганн очень гордился тем, что ему удалось решить задачу о цепной кривой, и впоследствии с удовольствием вспоминал этот эпизод: «Усилия моего брата оказались тщетными; мне же повезло больше, поскольку у меня хватило способностей (я говорю это без хвастовства — с какой стати мне скрывать правду?), чтобы решить эту задачу» [7]. А еще он прибавил: «Надо признать, это стоило мне поисков, которые отняли всю ночь…» Всего *одна* ночь на решение задачи, с которой его брат не смог справиться за год? Вот это да! Со своими сыновьями Иоганн соперничал не меньше, чем с братом. Когда Французская академия наук присудила Иоганну премию вместе с его средним сыном Даниилом, он так болезненно воспринял это, что запретил сыну появляться в фамильном доме.

Как оказалось, у кривой, сущность которой так страстно стремился определить Якоб Бернулли, есть тайный ингредиент — *e*, число, открытое Якобом в другом контексте.

В современной системе обозначений уравнение цепной кривой выглядит так:

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a},$$

где a — это константа, от которой зависит масштаб кривой. Как показано на рисунке ниже, чем больше значение a, тем дальше друг от друга находятся концы кривой.



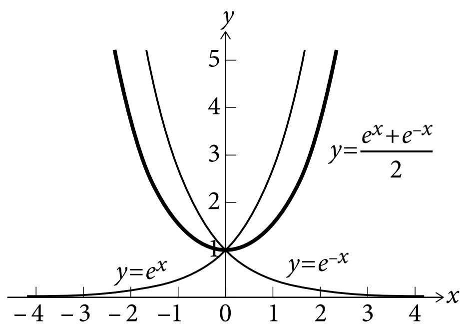
Графики цепной линии $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$ *с разными значениями a*

Если в уравнении цепной линии $a = 1$, то кривая имеет следующий вид:

$$y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Посмотрите внимательно на это уравнение: его член e^x отображает чистый экспоненциальный рост, а член e^{-x} — чистый экспоненциальный спад. Уравнение суммирует эти два члена и делит полученный результат на два, а это хорошо всем знакомая арифметическая операция — именно так мы должны сделать, чтобы найти среднее арифметическое этих двух значений. Другими словами, цепная линия — это среднее кривых экспоненциального роста и экспоненциального спада, как показано на рисунке ниже. Каждая точка такой U-образной кривой находится ровно посредине между двумя экспоненциальными кривыми.

Каждый раз, глядя на окружность, мы видим число π — отношение длины окружности к диаметру. Каждый раз, смотря на висящую цепь, свободно провисшую паутину или прогиб пустой бельевой веревки, мы видим число *e*.



Цепная линия — это среднее кривых экспоненциального роста и спада

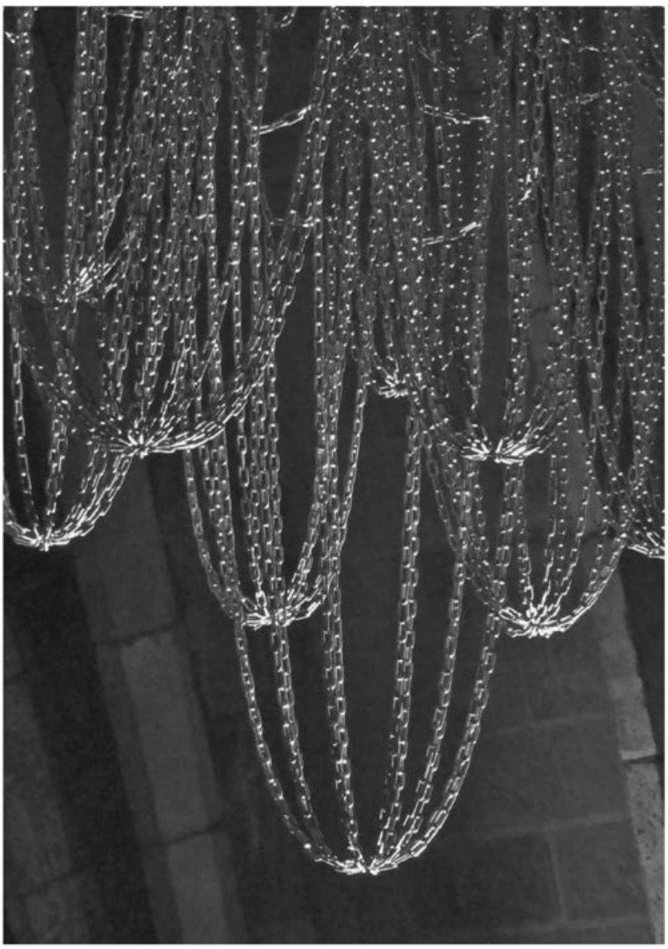
В XVII столетии английский физик Роберт Гук открыл одно удивительное механическое свойство цепной линии: в перевернутом виде она представляет собой самую устойчивую форму для отдельно стоящих арок. Провисающая цепь находится в положении, в котором ее внутренние силы растягивают ее вдоль линии кривой. В перевернутом виде все эти растягивающие силы превращаются в силы сжатия, делая цепную линию идеальной аркой, в которой все силы сжатия тоже действуют вдоль линии кривой. В арке, имеющей форму цепной линии, нет изгибающих сил: она поддерживает себя собственным весом, не нуждаясь ни в каких скобах или опорах. Такая арка будет очень устойчивой при минимальном количестве кирпичной кладки. Для того чтобы арка стояла прочно, кирпичи даже не нужно скреплять цементным раствором, поскольку они прижимают друг друга по всей ее высоте. Гук был весьма доволен своим открытием, заявив, что «еще ни один зодчий не пытался сделать нечто подобное». Однако вскоре после этого инженеры начали использовать цепные линии в работе. До наступления компьютерной эры самый быстрый способ создать их сводился к тому, чтобы повесить цепь, начертить кривую, построить модель из жесткого материала и поставить ее в перевернутом положении.

Цепная линия — это своего рода опора природы, идеальный способ стоять на двух ногах. Арка в форме перевернутой цепной линии является отличительной чертой творчества Антонио Гауди, каталонского архитектора, построившего ряд самых замечательных зданий XX века, в частности храм Святого семейства в Барселоне [8]. Гауди привлекала не только эстетическая красота цепной линии, но и ее математические свойства. Благодаря тому что он использовал цепные линии в своей практике, строительная механика стала главным элементом проектирования зданий.

Однако в зданиях арки редко стоят отдельно. Как правило, они образуют колонны или своды, присоединенные к стенам, полам и крышам. Гауди понял, что весь архитектурный проект здания можно разработать, применив модель из свисающих цепей. Именно так он и поступил. Например, когда Гауди поручили создать проект церкви для Колонии Гуэля возле Барселоны, он сделал перевернутый вверх дном каркас проектируемого строения. Вместо металлических цепей Гауди использовал веревки с подвешенными к ним сотнями мешочков, наполненных свинцовой дробью. Под весом мешочков, закрепленных на веревках, образовалась сеть видоизмененных цепных линий, в форме которых арки представляли собой самую устойчивую конструкцию для поддержания соответствующего веса (такого как крыша или строительные материалы). Для того чтобы посмотреть, как будет выглядеть церковь в законченном виде, Гауди сфотографировал свою модель и перевернул снимок наоборот. Хотя церковь Колонии Гуэля так и не была закончена, Гауди применил эту методику в своей дальнейшей работе.

Самое известное сооружение в форме цепной линии — это, пожалуй, арка в Сент-Луисе под названием «Врата на запад». Ее высота — 192 метра, но она немного более плоская по сравнению с идеальной кривой, поскольку у ее вершины чуть тоньше кирпичная кладка. В 2011 году в лондонской архитектурной компании Foster and Partners было принято решение использовать принцип цепной линии в рамках особенно сложного проекта — мега-аэропорта в Кувейте, одном из самых негостеприимных, но густонаселенных мест на Земле. Ведущий архитектор проекта Николай Мальш объяснил мне, что для крыши здания терминала длиной 1,2 километра самая лучшая конструкция — это раковина, поперечное сечение которой имеет форму цепной линии. Хотя это гигантское сооружение (45 метров в ширину у основания и 39 метров в высоту посредине), его вес распределен настолько эффективно, что толщина может быть всего 16 сантиметров. «Проект, основанный не на принципе цепной линии, тоже вполне осуществим, но на него уйдет гораздо больше материалов, в нем будет больше профильных балок, и вообще его намного сложнее реализовать, — утверждает Николай. — Что же касается здания, построенного с использованием цепной линии, то, даже если отпадет его внешняя облицовка, а внутри все разрушится и превратится в пыль, песок и битый камень, оно все равно будет стоять».

В офисе Foster and Partners находятся точные модели самых знаменитых проектов компании, таких как лондонский «Огурец», Рейхстаг в Берлине



Репродукция цепной модели Гауди в музее Дома Мила в Барселоне. Чтобы увидеть форму будущего здания, переверните страницу вверх ногами и подвесной мост в Мийо (Франция). Но все же на столе Николая Мальша подвешена велосипедная цепь. «Мы любим цепную линию, — объясняет он, — потому что она говорит нам, как удержать крышу».

Цепная линия выполняет еще одну, менее известную функцию в архитектуре, которую вряд ли можно было бы применить в проектировании церквей и аэропортов. Бугристая дорожка в форме перевернутых цепных линий — прекрасная поверхность для плавной езды велосипеда с квадратными колесами или перекатывания кубов вместо шаров в боулинге.

Математик Стэн Вэген едет на своем трехколесном велосипеде в Колледже Макалестера (Сент-Пол, штат Миннесота)

Хотя семья Бернулли подарила миру больше знаменитых математиков, чем любое другое семейство за всю историю, величайший математик, родившийся в Базеле примерно в то же время, к ней не принадлежал. Леонард Эйлер (правильное произношение — «Ойлер»), сын местного пастора, был не по годам умным ребенком. Мальчик обладал математическим талантом, который открыл, а затем и воспитал его наставник Иоганн Бернулли. Когда в 1727 году Эйлеру исполнилось 19 лет, он переехал в Россию, чтобы занять должность в только что открывшейся Петербургской академии наук, где сын Иоганна Даниил возглавлял кафедру математики. Петр Великий предлагал королевское жалование, чтобы привлечь в Россию самые талантливые умы Европы. Кроме того, в Санкт-Петербурге была гораздо более интеллектуальная среда, чем в Базеле. Вскоре Эйлер стал одним из самых выдающихся петербургских ученых.

Леонард Эйлер был спокойным человеком и хорошим семьянином, что опровергало распространенное представление о гениальных математиках как о людях, испытывающих трудности в общении. Он имел поистине феноменальную память: говорят, он мог вспомнить все десять тысяч строк «Энеиды» Вергилия. Еще более феноменальной была его работоспособность. Ни один математик так и не смог сравниться с Эйлером по количеству научных работ; ученый писал в среднем по 800 страниц в год. Когда он умер в 1783 году, в возрасте 76 лет, на его рабочем столе осталось столько материалов, что его статьи публиковались в научных журналах еще полстолетия. У Эйлера всегда было плохое зрение; к тридцати годам он перестал видеть левым глазом, а к шестидесяти — правым. Некоторые самые важные труды Эйлер диктовал, уже будучи слепым, целой группе секретарей, пытавшихся изо всех сил за ним поспевать. По их словам, Эйлер творил математику быстрее, чем это можно было записывать.

Однако Эйлера на фоне других математиков выделяет не только количество, но еще и качество, и разнообразие исследований. «Читайте, читайте Эйлера, — призывал французский математик Пьер-Симон Лаплас. — Он — наш общий учитель». Эйлер внес значительный вклад практически во все области науки того времени, от теории чисел до механики, от геометрии до теории вероятностей. Кроме того, он открыл и совершенно новые области. Работы Эйлера оказались настолько преобразующими, что его словарь символов был принят в математическом сообществе. Например, именно благодаря Эйлеру мы используем символы π и e для обозначения констант окружности и экспоненциального роста. Он не первым применил символ π (это сделал малоизвестный валлийский математик Уильям Джонс), но этот символ получил широкое распространение как раз благодаря Эйлеру. А вот что касается использования символа e в качестве экспоненциальной константы, то здесь пальма первенства принадлежит Эйлеру: он применил его в труде, посвященном баллистике пушечных ядер. Считается, что он выбрал букву «е», поскольку она оказалась первой из еще неиспользованных (в математических текстах уже было много обозначений *a, b, c, d*), а не потому, что с нее начиналось слово «экспоненциальный» или его фамилия. Несмотря на все свои достижения, Эйлер оставался скромным человеком.

Эйлер сделал одно неожиданное открытие в отношении числа *e*, но мы к нему вернемся после того, как я расскажу вам о новом символе — восклицательном знаке (не принадлежащем к числу изобретений Эйлера). Когда сразу же после целого числа пишется знак «!», это означает, что данное число необходимо умножить на все целые числа, которые меньше него. Операция «!» называется факториалом, а число *n*! читается как «*n*-факториал».

Факториалы начинаются так:
(0! = 1 по соглашению)
1! = 1
2! = 2 × 1 = 2
3! = 3 × 2 × 1 = 6
4! = 4 × 3 × 2 × 1 = 24
…
10! = 10 × 9 × 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 3 628 800
…

Факториалы растут очень быстро. К тому времени, когда мы получим 20!, значение будет исчисляться квинтиллионами. Возможно, немецкие математики XIX века решили использовать для этой операции восклицательный знак потому, что именно так хотели продемонстрировать феноменальную скорость роста факториала. В некоторых английских текстах того времени предлагалось даже обозначать *n*! как «*n*-изумление», а не «*n*-факториал». Безусловно, восходящая траектория восклицательного знака действительно способна вызывать сплошное изумление: факториал опережает даже экспоненциальный рост.

Факториалы чаще всего применяются в процессе расчета комбинаций и перестановок. Например, сколько существует способов рассадить определенное количество людей на таком же количестве стульев? Разумеется, один человек может сесть на одном стуле только одним способом. Когда есть два человека и два стула, появляется два варианта выбора, две перестановки — AB и BA. В случае трех человек и трех стульев таких способов уже шесть: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB и CBA. Однако вместо перечисления всех возможных перестановок можно использовать общий метод поиска результата. У первого человека есть три варианта выбора стульев, у второго — два, у третьего — один; следовательно, общее количество вариантов равно $3 \times 2 \times 1 = 6$. Применив этот же метод к четырем людям и четырем стульям, мы найдем общее число вариантов так: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$. Другими словами, при наличии n людей и n стульев количество перестановок составляет n! Поражает то, что если вы устроите ужин для десяти человек, вы сможете рассадить их за столом более чем тремя с половиной миллионами способов.

Но давайте вернемся к числу *e*. Эту экспоненциальную константу можно записать с помощью целой кучи восклицательных знаков. Боже мой!!! Вот это да!!! Оказывается, если вычислить значение $\frac{1}{n!}$ для каждого числа, начиная с 0, а затем подсчитать сумму всех членов этого ряда, то в результате получится число *e*.

В виде равенства это можно записать так:

$$1 + \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

Что эквивалентно следующему:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$$

Начнем подсчитывать сумму член за членом:

1

2

2,5

2,6666…

2,7083…

2,7166…

Этот ряд приближается к истинному значению числа *e* со сверхзвуковой скоростью. Всего после десяти членов ряда значения совпадают с точностью до шести десятичных знаков, что весьма неплохо практически для всех научных целей.

Почему число *e* так красиво выражается в виде факториалов? Как мы видели в случае со сложным процентом, оно представляет собой предел $(1 + \frac{1}{n})^n$, когда *n* приближается к бесконечности. Я избавлю вас от деталей доказательства, но выражение $(1 + \frac{1}{n})^n$ можно записать в виде огромной суммы дробей с единицей в числителе и факториалом в знаменателе.

Эйлер был большим поклонником занимательной математики и с интересом изучал математические игры и головоломки. Например, когда один любитель шахмат спросил, может ли конь пересечь доску так, чтобы попасть на каждую клетку только один раз, прежде чем вернуться в исходную позицию, Эйлер отыскал способ, как это сделать, что избавило от решения подобных вопросов до настоящего времени. Внимание Эйлера привлекала также французская карточная игра *jeu de rencontre* — игра в совпадения (разновидность одной из моих любимых детских игр под названием Snap!).

Суть игры в совпадения состоит в том, что два игрока (А и Б) тасуют каждый свою колоду карт, а затем одновременно переворачивают первую карту в своих колодах и продолжают делать это до тех пор, пока не закончатся карты. Если в ходе переворачиваний появляются одинаковые карты, выигрывает игрок А. (И я кричу: «Snap!») Если совпадений до самого конца нет, побеждает игрок Б. Эйлера интересовала вероятность того, что победителем окажется игрок А, другими словами, что за 52 раза встретится хотя бы одно совпадение.

За долгие годы этот вопрос возникал неоднократно, хотя и в разных ситуациях. Например, представьте себе, что гардеробщик не выдает номерки на те вещи, которые люди сдают в гардероб в течение вечера. Какова вероятность того, что хотя бы один человек получит свое пальто назад? Или возьмем такой пример. Кинотеатр продает билеты с указанием мест, но затем публике разрешают занимать любое свободное место. Если зал кинотеатра заполнен, какова вероятность того, что хотя бы одно место займет человек, на билете которого указан номер этого места?

Эйлер начал с самого начала [9]. Если в игре в совпадения колода карт каждого из игроков состоит из одной карты, то вероятность совпадения будет 100 процентов. Если в колоде два карты, вероятность равна 50 процентам. Эйлер составил таблицы перестановок для игр с колодами из трех и четырех карт и только после этого вывел закономерность. Вероятность совпадения карт при *n* картах в колоде рассчитывается по такой формуле:

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} - \ldots \pm \frac{1}{n!}$$

Но посмотрите внимательно: эта закономерность напоминает представленный выше ряд для числа *e*.

Я опущу детали доказательства, но этот ряд действительно приближается к $(1 - \frac{1}{e})$, или около 0,63. Сумма ряда в точности равна $(1 - \frac{1}{e})$ только в случае, если n стремится к бесконечности, но приближение очень хорошее уже после нескольких членов ряда. Когда $n = 52$, то есть количеству карт в колоде, сумма этого ряда равна $(1 - \frac{1}{e})$ с точностью до 70 десятичных знаков.

Следовательно, в этой игре вероятность совпадения составляет около 63 процентов. Другими словами, вероятность того, что совпадение будет, почти в два раза больше того, что его не будет. Точно так же вероятность того, что хотя бы один гость получит назад свое пальто, а посетитель кинотеатра сядет на правильное место, тоже составляет 63 процента. Интересно, что количество карт в колоде, гостей, сдающих пальто в гардероб, или мест в зале кинотеатра практически не влияет на вероятность хотя бы одного совпадения при условии, что карт, гостей или мест больше шести или семи. Каждый раз, когда вы увеличиваете число карт, гостей или мест, вы прибавляете еще один член в представленный выше ряд, определяющий возможность совпадения. Например, восьмая карта дает восьмой член ряда — 1/8!, или 0,0000248, что меняет вероятность менее чем на четверть сотой одного процента. Девятая карта еще меньше влият на значение вероятности. То есть получается, что вероятность совпадения почти не меняется, играете ли вы полной колодой карт или картами одной масти. Точно так же не имеет значения, сколько гостей сдадут свои пальто в гардероб, десяток или сотня, или о зале какого кинотеатра идет речь — о местном мультиплексе или о кинотеатре Empire на Лестер-сквер.

Сделанное Эйлером открытие относительно присутствия числа *e* в математике карточных игр — один из первых примеров появления этой константы в области, не имеющей очевидной связи с экспоненциальным ростом. Впоследствии эта константа появится и в не менее конкурентной сфере — в математике выбора жены.

Давайте вернемся ненадолго к Иоганну Кеплеру. После того как в 1611 году выдающийся астроном овдовел, он провел собеседование с одиннадцатью женщинами-кандидатами на место следующей фрау К. [10]. Как писал сам Кеплер, процесс реализации этой задачи начался не совсем удачно: у первой кандидатки «плохо пахло изо рта», вторая «была воспитана в чрезмерной роскоши», а третья помолвлена с человеком, зачавшим ребенка с проституткой. Кеплер взял бы в жены четвертую, «высокую женщину атлетического телосложения», если бы не увидел пятую, которая казалась «скромной, бережливой и способной полюбить приемных детей». Но Кеплер вел себя настолько нерешительно, что обе женщины потеряли к нему интерес — и он встретился с шестой женщиной, но от брака с ней тоже отказался, потому что его «пугали расходы на роскошную свадьбу», и с седьмой, которая, несмотря на «внешность, заслуживающую того, чтобы ее любили», отвергла Кеплера, поскольку он снова медлил с решением. Восьмой женщине «нечего было предложить, [хотя] ее мать была весьма достойной женщиной»; у девятой были больные легкие; десятая оказалась «слишком уродливой даже для мужчины с простыми вкусами… низенькая и толстая, и воспитывалась в семье, известной чрезмерной тучностью»; последняя кандидатка была еще недостаточно взрослой. В конце концов Кеплер задал себе вопрос: «Что это — промысел Божий или моя собственная моральная вина два с лишним года разрывает меня в разных направлениях и вынуждает рассматривать возможность столь разных союзов?» Такой мучительный самоанализ характерен для построения близких личных отношений и в наше время. Великому немецкому астроному требовалась стратегия.

Рассмотрим следующую игру, которую, по данным автора книг о математике Мартина Гарднера, изобрели в 1958 году два друга — Джон Г. Фокс и Л. Джеральд Марни [11]. Попросите кого-либо взять сколько угодно листов бумаги и написать на каждом из них разные положительные числа — любые, от крохотных дробей до невероятно огромного числа, скажем 1 с сотней нулей. Затем листы бумаги следует положить на стол числами вниз и перемешать. Теперь начинается игра. Вы переворачиваете листы один за другим. Ваша задача — остановиться в тот момент, когда перевернете лист с самым крупным числом. Не разрешается возвращаться и выбирать число на листе, который вы уже перевернули. Если вы продолжаете переворачивать листы до самого конца, то сможете выбрать только число на последнем из них.

Поскольку игрок, переворачивающий листы бумаги, не знает, какие числа на них написаны, на первый взгляд может показаться, что его шансы выиграть невелики. Однако что поразительно, в эту игру можно выиграть более чем в трети случаев, независимо от того, сколько листов бумаги в ней задействовано. Вся хитрость — в умелом использовании информации об уже увиденных числах, для того чтобы сделать определенный вывод о числах на листах, которые еще не перевернуты. Стратегия состоит вот в чем: переверните определенное количество листов бумаги, выберите в качестве критерия сравнения максимальное число из уже открытых, а затем остановитесь на первом же числе, превышающем это значение. На самом деле оптимальное решение — перевернуть $\frac{1}{e}$ (0,368, или 36,8 процента) от общего количества листов бумаги, а затем выбрать первое число, которое больше любого другого числа среди уже перевернутых листов. В этом случае вероятность того, что вы найдете максимальное число, составляет $\frac{1}{e}$, или 36,8 процента.

В 1960-х годах эта головоломка получила известность под названием «задача о выборе секретаря», или «задача о браке», поскольку она аналогична ситуации, когда босс просматривает список кандидатов на должность секретаря или мужчина анализирует список потенциальных жен, решая, как определить самую лучшую из имеющихся кандидатур [12]. (А еще причина такого названия, по всей вероятности, связана с тем, что большинство математиков — мужчины.)

Представьте себе, что вы проводите собеседования с двадцатью претендентами на должность вашего секретаря, причем решение относительно каждого кандидата должны принимать сразу. Если вы предложите это место первому же соискателю, то не поговорите со всеми остальными, а если никого не выберете до самого последнего претендента, то вам придется отдать эту работу именно ему. Или представьте, что вы намерены назначить свидание двадцати женщинам, зная, что на каждом очередном свидании вам предстоит решать, ваша ли это избранница, прежде чем назначать свидание следующей женщине. (Приношу свои извинения читательницам. Данная аналогия основана на предположении о том, что мужчина делает предложение женщине, а женщина обязательно отвечает согласием.) Если вы сделаете предложение на первом свидании, вы не сможете встретиться со всеми остальными женщинами, а если побываете на свидании с каждой из них, вам придется сделать предложение последней женщине, с которой вы встретитесь. В обоих случаях лучший способ увеличить вероятность выбора самой подходящей кандидатуры — провести собеседования с 36,8 процента кандидатов, а затем предложить работу или руку и сердце тому из них, кто окажется лучшим из тех, с кем вы уже пообщались. Этот метод не *гарантирует*, что вы найдете наиболее оптимальный вариант (вероятность всего 36,8 процента), но это все равно лучшая стратегия.

Если бы Кеплер знал в свое время, что ему предстоит общение с одиннадцатью женщинами, и применил эту стратегию, он встретился бы с 36,8 процента из них (четырьмя), а затем сделал бы предложение той из оставшихся кандидаток, которая понравилась бы ему больше тех, кого он уже видел. Другими словами, он выбрал бы пятую женщину, что он действительно сделал, но только после того, как встретился со всеми одиннадцатью претендентками (и этот брак оказался счастливым). Если бы Кеплер знал решение задачи о браке, он избавил бы себя от шести неудачных свиданий.

Задача о выборе секретаря (или задача о браке) стала одной из самых знаменитых в занимательной математике, хотя она и не отображает реальность, поскольку боссы могут вызывать кандидатов повторно, а мужчины — возвращаться к тем женщинам, с которыми встречались ранее (как и сделал Кеплер). Тем не менее в основе ее решения лежит невероятно полезная теория, получившая название «оптимальная остановка», другими словами — математическое обоснование того, когда лучше всего остановиться. Решение задачи об оптимальной остановке играет важную роль в сфере финансов, позволяя, например, определить, когда пора ограничить убытки по инвестициям или исполнить фондовый опцион. А еще оно может пригодиться в таких областях, как медицина (скажем, чтобы рассчитать оптимальное время для прекращения того или иного курса лечения), энергетика (чтобы составить прогноз, когда не стоит полагаться на углеводородное топливо), зоология (чтобы установить, когда закончить исследование большой популяции животных в поисках новых видов, которых там, похоже, нет, тем самым избежав напрасной траты средств).

Российский олигарх Борис Березовский был в прошлом профессором математики Академии наук СССР, которая стала преемницей альма-матер Эйлера [13]. В 1980-х годах в соавторстве с другим ученым Березовский написал книгу, посвященную задаче о выборе секретаря. В 2003 году он переехал в Великобританию. Я несколько раз обращался к Борису Березовскому с просьбой о встрече, но всякий раз он просил меня перезвонить через пару месяцев. Через год безуспешных попыток я понял, что пора остановиться.

В основе решения задачи об оптимальной остановке лежит предположение о том, что взвешенные решения относительно случайных событий можно принимать исходя из накопленных знаний. Рассмотрим игру, в которой существует фантастически изобретательный способ использовать малейшие крохи информации [14]. (Эта игра не имеет отношения к числу *e*, но вы уж простите меня за небольшое отклонение от темы экспонент.) Результат настолько противоречит здравому смыслу, что поначалу многие математики просто отказываются в него верить.

Это достаточно простая игра. Вы записываете два разных числа на отдельных листах бумаги и кладете эти листы числами вниз. Я переворачиваю один из листов и говорю вам, больше на нем число, чем то, которое остается скрытым, или нет. Каким бы удивительным это ни казалось, но я дам правильный ответ более чем в половине случаев.

На первый взгляд это похоже на магию, но на самом деле здесь нет никаких трюков. Мой выбор не зависит от человеческого фактора, в частности от того, какие вы указали числа или как разместили листы на столе. Именно математика, а не психология позволяет мне выигрывать чаще, чем проигрывать.

Предположим, что мне нельзя переворачивать ни один из листов бумаги. В таком случае вероятность того, что я угадаю, на каком листе число больше, составляет 50 на 50. Есть два варианта выбора, один из которых будет правильным. Мои шансы угадать правильный ответ те же, что и в случае подбрасывания монеты.

Однако, когда я увижу хотя бы одно число, мои шансы повысятся, если я сделаю следующее:

1) сам выберу произвольное число — пусть это будет число k;
2) если k окажется меньше числа на перевернутом листе, я скажу, что перевернутое число самое большое;
3) если k будет больше числа на перевернутом листе, я назову самым большим числом то, которое скрыто, то есть указано на неперевернутом листе.

Другими словами, моя стратегия состоит в том, чтобы выбирать число, которое я вижу, пока произвольное число k не окажется больше. В таком случае я выбираю то число, которого еще не видел.

Для того чтобы понять, почему моя стратегия дает мне преимущество, необходимо проанализировать значение числа k с учетом двух чисел, написанных на листах бумаги. Существует три возможности: 1) k меньше обоих чисел; 2) k больше обоих чисел; 3) k находится между двумя числами.

В первом случае, какое бы число я ни увидел, я выбираю именно его. Вероятность того, что я окажусь прав, составляет 50 на 50. Во втором случае, какое бы число я ни увидел, я выбираю другое число. Мои шансы снова 50 на 50. Наиболее интересна третья ситуация, в ней я выигрываю в 100 процентах вариантов. Если я вижу меньшее число, то выбираю другое, а если вижу большее число, то выбираю его. Если по счастливому стечению обстоятельств мое произвольное число попадает между двумя числами, которые написаны на листиках бумаги, я выиграю в любом случае!

(Здесь нужно подробнее объяснить, как именно я выбираю число *k*, поскольку у него всегда должен быть шанс оказаться между любыми двумя заданными числами. В противном случае у меня не будет преимущества. Например, если вы всегда записываете отрицательные числа, а мое произвольное число положительное, то оно никогда не окажется между вашими двумя числами, а мои шансы на выигрыш остаются 50 на 50. Мое решение состоит в том, чтобы выбирать число по закону нормального распределения, поскольку это позволяет найти наиболее вероятное значение из всех положительных и отрицательных чисел. О нормальном распределении вам нужно знать только то, что оно обеспечивает способ выбора случайного числа, имеющего шанс попасть между двумя любыми другими числами.)

Вероятность того, что число *k* попадет между написанными вами числами, честно говоря, небольшая. Но поскольку шанс все же есть, то, если мы будем играть достаточное количество раз, вероятность моего выигрыша превысит 50 процентов. Я не могу знать заранее, когда выиграю, а когда проиграю. Но я и не говорил, что это возможно. Я сказал лишь то, что смогу выиграть в более чем половине случаев. Если вы хотите сделать так, чтобы мои шансы оставались как можно ближе к 50 на 50, вам необходимо указывать числа, которые максимально близки друг к другу. Тем не менее, если эти числа не равны, всегда существует шанс того, что я выберу число, попадающее между ними, и до тех пор, пока этот шанс математически возможен, я буду выигрывать в эту игру чаще, чем проигрывать.

В предыдущей главе я ввел понятие числа π, которое начинается с 3,14159 и показывает, сколько раз диаметр помещается на окружности. В данной главе мы познакомились с числом *e*, которое начинается с 2,71828 и представляет собой числовую сущность экспоненциального роста. Эти числа — наиболее часто используемые математические константы, о которых часто упоминают одновременно, хотя они появились в результате разных исследований и у них разные математические свойства. Любопытно, что эти два числа очень близки друг к другу и отличаются всего на 0,5. В 1859 году американский математик Бенджамин Пирс предложил обозначить число π символом Ⴖ, а число *e* — символом Ⴖ, для того чтобы показать, что эти два числа в какой-то мере подобны друг другу. Однако это невразумительное обозначение так и не прижилось.

Обе константы — это иррациональные числа, другими словами, числа, десятичная часть которых содержит бесконечное количество никогда не повторяющихся цифр. Попытки найти особо элегантную арифметическую комбинацию этих двух чисел стали своего рода математическим состязанием. Мы никогда не найдем уравнения со строгим равенством, но:

$$\pi^4+\pi^5=e^6,$$

что верно до семи значимых цифр;

$$e^\pi - \pi = 19{,}999099979\ldots$$

что очень близко к 20.

И самое впечатляющее уравнение:

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743{,}99999999999925007\ldots$$

что всего на одну триллионную меньше целого числа!

В 1730 году шотландский математик Джеймс Стирлинг открыл следующую формулу:

$$n! \approx \sqrt{(2\pi n)}\ n^n\ \mathrm{e}^{-n}$$

Эта формула позволяет рассчитать приближенное значение $n!$ — факториала числа n, который, как мы уже видели, представляет собой результат умножения $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n$.

Факториал — это простая операция, сводящаяся к умножению целых чисел друг на друга, поэтому несколько неожиданно видеть в правой части формулы квадратный корень, π и e.

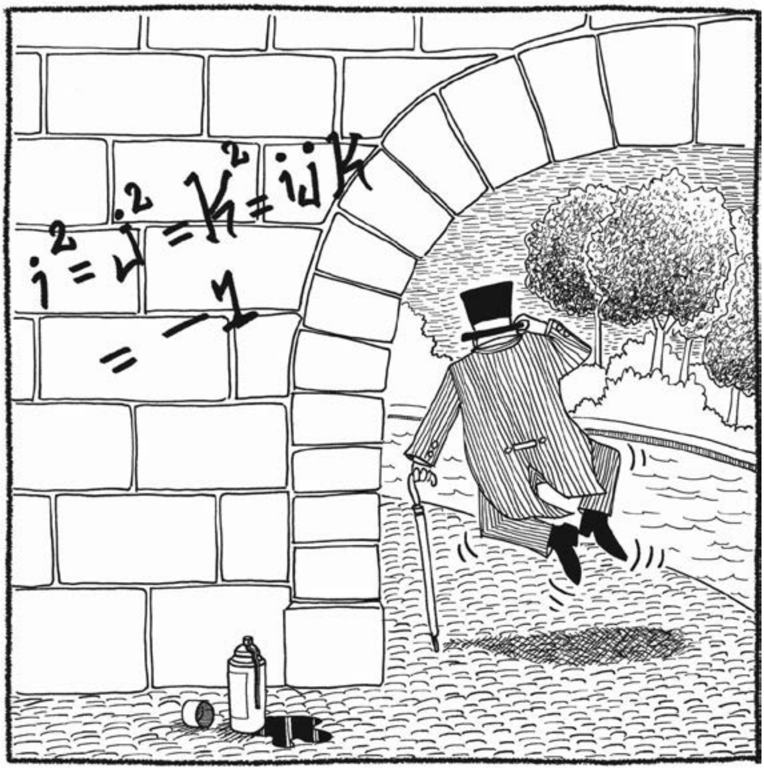
Когда $n = 10$, приближенное значение менее чем на 1 процент отличается от истинного значения 10!, и чем больше число n, тем точнее становится приближенное значение в процентах. Поскольку факториалы — огромные числа (10! — это 3 628 800), представленная выше формула — это нечто потрясающее.

Между π и e явно что-то происходит.

Леонард Эйлер раскрыл еще одну связь между этими двумя константами, даже более неожиданную и поразительную, чем формула Стирлинга. Но, прежде чем переходить к данной теме, нам необходимо познакомиться с очередной гласной, которую Эйлер ввел в наш математический алфавит.

Приготовьтесь к встрече с числом i.

Позитивная сила негативного мышления 7



Зимой 2007 года Национальная лотерея Великобритании ввела новые билеты. На них размещалось два числа, и люди выигрывали приз, если число слева оказывалось больше числа справа. Вы можете подумать, что все это предельно просто. Однако, поскольку эти билеты были оформлены в зимнем стиле, числа представляли собой температуру ниже нуля. Задача, таким образом, сводилась к сравнению *отрицательных* чисел, а для некоторых людей это оказалось весьма не просто. Многие игроки вообще не могли, например, понять, что −8 меньше, чем −6. После десятков жалоб такие билеты были сняты с продажи. «Они пытались обмануть меня рассказами о том, что −6 больше, а не меньше −8, но я этому не верю», — заявил один возмущенный игрок [1].

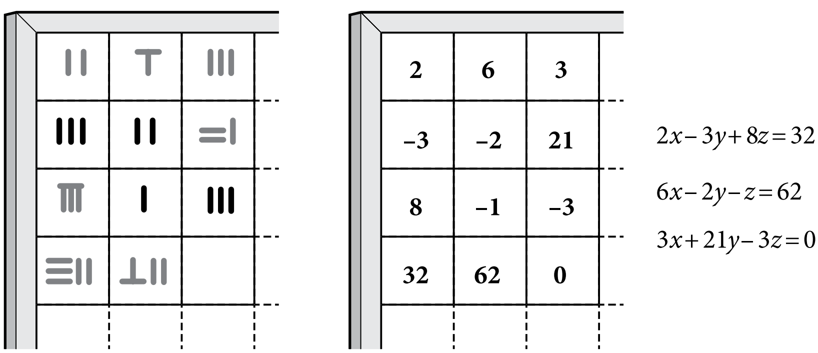
Проще всего посмеяться над людьми, не понимающими основ арифметики, однако не стоит с этим спешить. Отрицательные числа мучили наш разум столетиями и делают это до сих пор. Именно поэтому подземные этажи зданий принято обозначать буквами (например, LG — lower ground («подземный этаж») и B — basement («подвальный этаж»)) или алфавитно-цифровыми знаками (скажем, B1, B2 и B3), а не отрицательными числами (−1, −2 и −3). Когда мы датируем события, произошедшие до рождения Христа, например, когда Евклид написал свой труд Elements*, мы предпочитаем говорить «в 300 году до нашей эры», а не «в −300 году нашей эры». А у бухгалтеров вообще множество способов избегать знака «минус»: записывать долги красным, прибавлять аббревиатуру DR (от debtor — «должник») или заключать неприятную сумму в скобки.

Ни древнегреческие, ни египетские, ни вавилонские математики не создали концепцию отрицательных чисел. В древние времена числа использовались для подсчета и измерения, а как можно подсчитать или измерить то, что меньше, чем ничего? Давайте попытаемся встать на место обитателей античного мира, чтобы понять, какой интеллектуальный прорыв им нужно было совершить. Мы знаем, что $2 + 3 = 5$, потому что, когда у нас есть две буханки хлеба и нам дают еще три, у нас будет пять буханок. Мы знаем, что $2 - 1 = 1$, потому что, когда, имея две буханки хлеба, мы отдаем одну, у нас остается еще одна. Но что значит $2 - 3$? Если у меня есть только две буханки хлеба, я не могу отдать три. Однако предположим, что я все же могу это сделать — тогда у меня останется минус одна буханка. Что же значит «минус одна буханка»? Это не обычная буханка хлеба. Это, скорее, ее отсутствие,

* *Евклид.* Начала. М. : Либроком, 2014.

причем такое, что если к нему прибавить буханку хлеба, то будет получено «ничто». Неудивительно, что древние считали эту концепцию абсурдной.

Однако в древней Азии допускали существование отрицательных величин — правда, в определенной степени [2]. Ко временам Евклида у китайцев уже была система вычислений, в которой использовались бамбуковые палочки. Обычные палочки представляли положительные числа, их китайцы называли «истинными», а палочки, покрашенные в черный цвет, олицетворяли отрицательные числа, их называли «ложными». Как показано ниже, китайцы размещали палочки на разграфленной доске таким образом, чтобы каждое число занимало отдельную ячейку, а каждая колонка соответствовала одному уравнению. Опытный вычислитель решал уравнения, передвигая бамбуковые палочки. Если решение состояло из обычных палочек, это было истинное число, которое принималось. Если решение состояло из черных палочек, это было ложное число, и оно отбрасывалось. Тот факт, что китайцы использовали физические объекты для представления отрицательных величин, свидетельствовал о существовании этих чисел, хотя они и были всего лишь инструментами для вычисления положительных величин. Китайцы поняли одну очень важную истину: если математические объекты приносят пользу, не имеет значения, что они не согласуются с повседневным опытом. Пусть этой проблемой занимаются философы.



Китайцы раскладывали бамбуковые палочки на разграфленной доске; обычные палочки символизировали положительные числа, черные — отрицательные, что позволяло записывать и решать уравнения

Через несколько столетий в Индии математики нашли для отрицательных чисел материальный контекст — деньги. Если я одалживаю у вас пять рупий, у меня получается долг в пять рупий — отрицательная величина, которая станет нулевой только после того, как я верну вам эту сумму. Астроном VII века Брахмагупта установил правила арифметических операций с положительными и отрицательными числами, которые назвал «имуществом» и «долгом». Кроме того, он ввел число ноль в его современном понимании.

Долг минус ноль — это долг.
Имущество минус ноль — это имущество.
Ноль минус ноль — это ноль.
Долг, вычтенный из нуля, — это имущество.
Имущество, вычтенное из нуля, — это долг.
И так далее…

Брахмагупта описывал точное значение имущества и долга с помощью нуля и других девяти цифр, которые легли в основу десятичного представления чисел, используемого в настоящее время. Индийские числительные распространились на территории Ближнего Востока, Северной Африки, а к концу X века — и в Испании. Тем не менее понадобилось еще три столетия, прежде чем отрицательные числа получили широкое признание в Европе. Такая задержка была обусловлена тремя причинами: историческая связь с долгами, а значит, и с порочной практикой ростовщичества; всеобщая подозрительность в отношении новых методов, приходящих из мусульманских земель; продолжительное влияние древнегреческой философии, согласно которой величина не может быть меньше, чем ничто.

Со временем счетоводы привыкли к использованию отрицательных чисел в своей профессии, математики же очень долго остерегались их. В XV и XVI веках отрицательные величины были известны как абсурдные числа (*numeri absurdi*) [3], и даже в XVII столетии многие считали их бессмысленными. В XVIII веке преобладал следующий аргумент против отрицательных чисел [4]. Рассмотрим такое уравнение:

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

С арифметической точки зрения это правильное утверждение. Тем не менее оно парадоксально, поскольку гласит, что отношение меньшего числа (−1) к большему (1) эквивалентно отношению большего числа (1) к меньшему (−1). Этот парадокс стал предметом множества дискуссий, но никто так и не смог его объяснить. В попытках понять смысл отрицательных чисел многие математики, в том числе и Леонард Эйлер, пришли к невероятному выводу, что эти числа больше бесконечности [4]. Данная концепция вытекает из анализа такой последовательности:

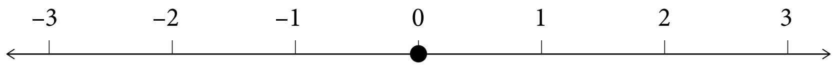
$$\frac{10}{3}, \frac{10}{2}, \frac{10}{1}, \frac{10}{½} \ldots$$

Что эквивалентно ряду:

3,3; 5; 10; 20…

По мере уменьшения числа в нижней части дроби (знаменателя) от 3 до 2, а затем до 1 и 1/2, абсолютное значение дроби становится больше, а когда значения знаменателя приближается к нулю, значение дроби стремится к бесконечности. Была выдвинута гипотеза, что, когда знаменатель равен нулю, значение дроби бесконечно, а когда он меньше нуля (другими словами, когда это отрицательное число), дробь должна быть больше бесконечности. В настоящее время мы избегаем этой парадоксальной ситуации, утверждая, что бессмысленно делить число на ноль. Дробь 10/0 не бесконечна; она «не определена».

В этом смешении разных мнений прозвучала одна четкая и понятная концепция, принадлежавшая английскому математику Джону Уоллису, который придумал эффективный способ визуальной интерпретации отрицательных чисел. В написанном в 1685 году труде A Treatise of Algebra («Трактат по алгебре») Уоллис впервые представил числовую ось (см. рисунок ниже), на которой положительные и отрицательные числа отображают расстояния от ноля в противоположных направлениях. Уоллис писал, что если человек отойдет от ноля вперед на пять ярдов, а затем вернется назад на восемь ярдов, то он «переместится на позицию, которая на 3 ярда дальше, чем ничто… А значит, −3 — это та же точка на линии, что и +3, но не вперед, как должно быть, а назад». Заменив концепцию количества концепцией позиции, Уоллис показал, что отрицательные числа нельзя считать «ни бесполезными, ни абсурдными». Как оказалось, это было явное преуменьшение. Понадобилось несколько лет на то, чтобы идея Уоллиса получила широкое распространение, но теперь, по прошествии времени, очевидно, что цифровая ось — самая успешная разъяснительная схема всех времен. У нее множество разных областей применения, от графиков до термометров. Теперь, когда мы можем увидеть отрицательные числа на числовой оси, у нас больше нет концептуальных трудностей с тем, чтобы представить себе, что это такое.



Числовая ось

Немецкий философ Иммануил Кант тоже вступил в полемику по поводу отрицательных чисел, заявив в своем труде Attempt to Introduce the Concept of Negative Quantities into World-Wisdom («Опыт введения в философию понятия отрицательных величин»), что бессмысленно использовать против них метафизические аргументы [5]. Он доказал, что в реальном мире многое может иметь как положительное, так и отрицательное значение, подобно двум противонаправленным силам, воздействующим на объект. Отрицательное число представляет собой не отрицание числа, а скорее, сопоставимое противоположное.

Тем не менее даже в конце XVIII столетия еще оставались математики, глубоко убежденные в том, что отрицательные числа — это «специальный термин, лишенный здравого смысла; но, будучи однажды введенным в оборот, подобно многим другим выдумкам, находит своих самых рьяных сторонников среди тех, кто любит принимать все на веру и не терпит тяжелый труд серьезных размышлений» [6]. Уильям Френд, второй среди лучших студентов, изучавших математику в Кембридже, написал эти слова в 1796 году в книге, которая стала уникальной в математической литературе: это было введение в алгебру, не содержащее ни единого отрицательного числа.

Когда мы изучаем отрицательные числа в школе, нам не рассказывают всю эту предысторию. Мы принимаем отрицательные числа по аналогии с числовой осью, а затем узнаем поразительную новость:

Минус, умноженный на минус, дает плюс.

Вот это да! Числовая ось прекрасно справляется с визуальной репрезентацией отрицательных чисел, но она не дает представления о том, что происходит, когда мы умножаем их друг на друга. Математика становится еще сложнее.

Почему произведение двух отрицательных чисел равно положительному числу? Потому что это вытекает из правил умножения положительных чисел. Мы принимаем, что два отрицательных числа образуют положительное, поскольку это обеспечивает связность арифметических операций, а не потому, что в основе данной системы лежит какой-то смысл. Это необходимый структурный элемент того основания, которое не дает зданию чисел разрушиться. Рассмотрим числовую ось. Если я сделаю два шага вперед от 0, я попаду в позицию 2. Если я повторю эти два шага, я доберусь до 4, а если сделаю это еще раз, то достигну точки 6. Точно так же, если я перемещусь на две единицы назад от ноля, я попаду в точку –2, а если повторю эти шаги еще два раза, то выйду на –6.

Все эти операции можно записать в виде таких выражений:

$2 + 2 + 2 = 6$
$-2 -2 -2 = -6$

Что эквивалентно следующим произведениям:

$3 \times 2 = 6$
$3 \times -2 = -6$

Эти выражения говорят нам о том, что если положительное число умножить на положительное, получится положительный результат, а если положительное число умножить на отрицательное, результат будет отрицательный. Для того чтобы выяснить, что произойдет в случае перемножения двух отрицательных чисел, давайте в последнем выражении подставим вместо числа 3 разность (4 – 1), что даст нам следующее уравнение:

$(4 - 1) \times -2 = -6$

Это уравнение можно записать так:

$(4 \times -2) + (-1 \times -2) = -6$

Мы знаем, что согласно правилам выполнения арифметических операций с положительными числами, когда два члена выражения, взятые в скобки, умножаются на одно число, необходимо умножить каждый член выражения в скобках на это число отдельно. (Это правило известно как закон дистрибутивности.) Получается следующее уравнение:

$$-8 + (-1 \times -2) = -6$$

Следовательно:

$$(-1 \times -2) = 2$$

Вот мы и пришли к тому, что искали. *Минус, умноженный на минус, дает плюс.*

Одна из причин того, почему нам так трудно понять принцип умножения отрицательных чисел на концептуальном уровне, состоит в том, что в жизни существует множество ситуаций, в которых арифметика создает неправильную модель. Не успел учитель объяснить нам эту идею, как нам рассказывают, что два заблуждения — еще не правда. В лингвистике двойное отрицание может быть либо отрицанием, либо утверждением, в зависимости от контекста и языка. Когда я изучал португальский, мне пришлось привыкать к тому, что на этом языке фразу I know nothing (одно отрицание) необходимо говорить так: *não sei nada*, или I don't know nothing (двойное отрицание»). В данном случае два отрицания усиливают отрицание, а не нейтрализуют друг друга.

Безусловно, в английском языке двойное отрицание равносильно утверждению. Лингвист Джон Лэнгшо Остин однажды на конференции сказал, что ни в одном языке дважды повторенное утверждение не дает отрицания. Говорят, что сидевший в зале философ Сидни Мордженбессер произнес в ответ: «*Да-да*».

Одним из первых приверженцев индийской системы счисления, включавшей в себя ноль и отрицательные числа, был Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми (около 750–850). Впоследствии латинские версии имени аль-Хорезми использовались для описания арифметических методов, которые он популяризировал; именно от его имен происходит и слово «алгоритм». Кроме того, аль-Хорезми разработал новый раздел математики — алгебру, название которой происходит от арабского слова *al-jabr*, что означает «восстановление». Алгебра — это язык уравнений, в котором для представления чисел используются такие символы, как x и y. В алгебре вопрос «Какое число, прибавленное к двум, дает ноль?» может быть выражен в виде задачи — найти x, когда:

$$x + 2 = 0$$

Ответ такой: $x = -2$. Независимо от того, считаете вы отрицательные числа имеющими смысл или нет, значение -2 — решение этого уравнения. Именно благодаря алгебре европейские математики эпохи Возрождения в конце концов включили отрицательные числа в определение числа. Какими бы абсурдными они ни казались, это все же были числа.

Вскоре алгебраисты столкнулись с еще одной проблемой. Пользуясь только положительными и отрицательными числами, а также четырьмя арифметическими операциями, такими как сложение, вычитание, умножение и деление, они обнаружили концепцию, которую не могли понять. Это было решение уравнения:

$$x^2 = -1$$

Ответ — квадратный корень из минус единицы, или $x = \sqrt{-1}$. Однако вот в чем проблема: какое число, умноженное само на себя, может быть отрицательным? Это точно не положительное число, поскольку произведение двух положительных чисел — положительное число. Это и не отрицательное число, так как произведение двух отрицательных чисел — тоже положительное число. Первым отрицательные корни уравнений использовал Джероламо Кардано в 1545 году [7]. По его собственным словам, размышления о них приносили ему «умственные мучения», что неизбежно произойдет с каждым, кто еще не сталкивался с данным понятием. В итоге он просто проигнорировал его, заявив, что если решение уравнения — квадратный корень из отрицательного числа, то это «изящно не в меньшей степени, чем бессмысленно». Кардано открыл дверь в новый мир математики, а затем снова захлопнул ее.

Через несколько десятилетий соотечественник Кардано Рафаэль Бомбелли снова открыл эту дверь и робко вошел в нее. Квадратные корни из отрицательных чисел появлялись в алгебраических вычислениях все чаще и чаще, поэтому Бомбелли решил обращаться с ними как с положительными и отрицательными числами, складывая их, вычитая, умножая и деля при каждом их появлении. «Многие считали, что это безумная мысль, — писал он. — Создавалось впечатление, что вся эта область опирается на софистику, а не на истину». И все же квадратные корни из отрицательных чисел были не просто удобны, а давали возможность решать уравнения, которые раньше считались нерешаемыми. Если не задумываться о том, что значат квадратные корни из отрицательных чисел, они вполне могли вписаться в общую систему.

В 1637 году Рене Декарт назвал квадратные корни из отрицательных чисел «мнимыми», а столетие спустя Леонард Эйлер закрепил это понятие: «Все выражения типа $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ и т. д. — это невозможные, или мнимые числа, поскольку они представляют собой корни из отрицательных чисел. В отношении таких чисел мы можем, в сущности, утверждать, что они не являются ни ничем, ни больше чем ничто, ни меньше чем ничто, а это неизбежно делает их мнимыми или невозможными». Эйлер обозначил число $\sqrt{-1}$ специальным символом i (от англ. *imaginary* — «мнимый») и доказал, что квадратный корень из любого отрицательного числа может быть выражен в виде величины, кратной i [8]. Например, $\sqrt{-4}$ равно $2i$, поскольку $\sqrt{-4} = (\sqrt{4} \times -1) = \sqrt{4} \times \sqrt{-1} = 2 \times i = 2i$. В общем виде это можно записать так: $\sqrt{-n} = (\sqrt{n})i$. Квадратные корни из отрицательных чисел (которые представляют собой величины, кратные i) известны под общим названием «мнимые числа».

Числа, не относящиеся к категории мнимых, называются действительными числами. Они действительные потому, что находятся на числовой оси, а значит, мы можем увидеть, что они и правда там есть. Числа 2, 3, 5, – 4 и π — действительные числа, а $2i$, $3i$, $5i$, $-4i$ и πi — мнимые. На самом деле множество мнимых чисел — это своего рода зеркальное отражение действительных чисел. Каждому действительному числу m соответствует мнимое число mi.

Когда действительное число прибавляется к мнимому, такая гибридная форма, как $3 + 2i$, называется комплексным числом. Все комплексные числа имеют форму $a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — это $\sqrt{-1}$*. Поскольку прибавить действительное число к мнимому в общепринятом смысле нельзя, знак плюс используется исключительно для разделения двух частей числа. Считается, что комплексное число — это одно число, состоящее из двух частей — действительной и мнимой. Если действительная часть равна нулю, тогда все число мнимое; если мнимая часть равна нулю, тогда число действительное.

* Строго говоря, это неверно, поскольку квадратный корень из отрицательного числа не определен. Математически строгое определение числа i: это такое число, квадрат которого равен –1. *Прим. ред.*

Значение концепции числа, используемой поначалу для подсчета физических объектов, было расширено посредством введения понятия отрицательных, а затем и мнимых чисел. В связи с этим возник закономерный вопрос о том, создаст ли алгебра еще более абстрактную категорию чисел. Например, что представляет собой квадратный корень квадратного корня из минус единицы? Если всерьез задуматься об этой концепции, сперва она перевернет ваш разум вверх дном, а затем вывернет наизнанку. Речь идет о решении уравнения:

$$x = \sqrt{(\sqrt{-1})}$$

или:

$$x^2 = \sqrt{-1}$$

что эквивалентно:

$$x^2 = i$$

Поражает тот факт, что решение этого уравнения представляет собой комплексное число* [9]:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) i$$

В XVIII веке математики поняли, что применение мнимых чисел позволяет решить любое уравнение. Это вывод оказался настолько важным, что его стали позиционировать как основную теорему алгебры. Уравнение, записанное с помощью комплексных чисел, всегда имеет решение в виде комплексных чисел. Дверь, в которую вошел Рафаэль Бомбелли, для того чтобы изучить квадратные корни отрицательных чисел, оказалась дверью в изолированную комнату. Но что это была за комната! Болезненные чувства,

* Умножение комплексных чисел выполняется по обычным арифметическим правилам. Я не буду приводить здесь доказательство, но мы можем предположить, что для любых чисел a и b, действительных или мнимых, выполняется равенство: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Следовательно, если $x = \frac{1}{\sqrt{2}} + (\frac{1}{\sqrt{2}})i$, то $x^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}} + (\frac{1}{\sqrt{2}})i)^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}i) + (\frac{1}{\sqrt{2}}i)^2 = \frac{1}{2} + i + (-\frac{1}{2}) = i$.

испытываемые математиками по отношению к мнимым числам, уступили место радости. В настоящее время концепция числа i считается вполне естественным и эффективным расширением числовой системы. Благодаря введению единственного символа математики получили изысканно самодостаточную абстрактную вселенную. Это была выгодная сделка!

Мнимые числа — главные герои двух самых известных примеров математической красоты. Один из них — картина (о которой мы поговорим немного позже), а другой — уравнение, известное как тождество Эйлера. В 2003 году, во время атаки экотеррористов на автосалон в Лос-Анджелесе, эту формулу нанесли спреем на бок внедорожника. Характер данного рисунка привел к аресту студента, изучавшего физику в Калифорнийском технологическом институте [10]. «Все должны знать тождество Эйлера», — объяснил он судье. Безусловно, студент был совершенно прав, но от разрисовывания автомобилей все же следует воздержаться. Тождество Эйлера — это «быть или не быть» математики, самая знаменитая формула и фрагмент культурного наследия, находящий отклик и за пределами своей области:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Это поразительное равенство. Оно объединяет пять самых важных чисел в математике: 1 — первое натуральное число; 0 — абстрактное представление понятия «ничего»; π — отношение длины окружности к диаметру; e — экспоненциальная константа; i — квадратный корень из минус единицы. Все эти числа возникли в отдельных областях исследований и при этом образуют идеальное сочетание. Невозможно было даже представить себе столь безукоризненный синтез математической мысли. В математике красота — это изысканность формулировок и установление неожиданных связей. Не существует другого уравнения, которое было бы столь же кратким и в то же время столь же глубоким.

Но что же все-таки значит то, что у действительного числа (числа e) мнимый показатель степени ($i\pi$)? В XIX столетии профессор математики Гарвардского университета Бенджамин Пирс ответил на этот вопрос так: «Мы не можем понять и не знаем, что это значит. Но мы доказали это, следовательно, оно должно соответствовать истине». Пирс был совершенно прав. Математика начинается с исходных предположений и приводит туда, куда они ведут. Именно поэтому она столь увлекательна. На самом деле Эйлер открыл эту формулу, позабыв о смысле. Поскольку тождество Эйлера — самое известное уравнение в математике, я бы оказал вам плохую услугу, если бы хотя бы кратко не рассказал эту историю.

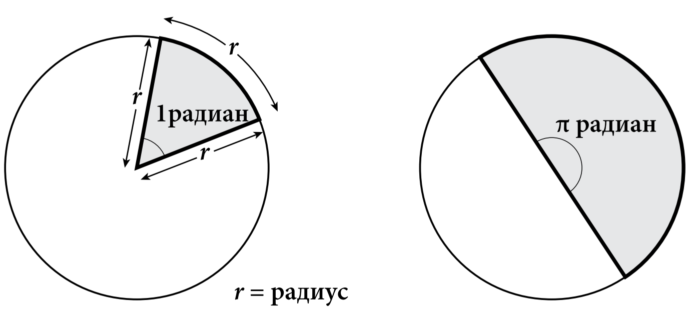
Единственное, что вам понадобится в качестве подготовки, — принять без доказательства три следующих уравнения. Многоточия в конце означают, что правая сторона уравнения продолжается до бесконечности:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$$

Если x равно 1, то первый ряд дает нам формулу расчета экспоненциальной константы e, о которой шла речь в предыдущей главе. (Помните, что факториал числа n, записываемый как $n!$, означает, что это число умножается на все числа от 1 до n.) Следующие два бесконечных ряда — это синус и косинус x, тригонометрические функции, которые тоже должны быть знакомы вам по предыдущим главам. Однако, для того чтобы ряды синуса и косинуса пригодились нам здесь, необходимо использовать специальную единицу измерения — радиан, а не традиционную единицу — градус. Полный круг, или 360 градусов, — это 2π радиан, а половина круга, или 180 градусов, — π радиан. (Радиан называется именно так, поскольку 1 радиан — это угол в центре круга, образующий дугу окружности, длина которой равна ее радиусу, как показано ниже. Радиан — более естественный способ измерения угла, чем градусная система, известная со времен Вавилона. Начиная с XVIII века математики отдают предпочтение измерению углов в радианах [11].)



Радиан

На интуитивном уровне невозможно понять, что означает возвести число (например, число e) в мнимую степень. Однако Эйлер понял, что это можно сделать алгебраическим способом, воспользовавшись представленным выше бесконечным рядом для ex. Например, если мы подставим ix вместо x, получится следующее уравнение:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} - \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \ldots$$

Убрав скобки, получим такое уравнение:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} - \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \ldots$$

Мы можем еще больше упростить это уравнение, поскольку по определению $i^2 = -1$:

$$i^3 = i \times i \times i = i^2 \times i = -1 \times i = -i,$$
$$i^4 = i^2 \times i^2 = -1 \times -1 = 1,$$
$$i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i,$$
$$i^6 = -1$$

И так далее.

Другими словами, вместо членов ряда i^2, i^4, i^6, i^8 … мы можем подставить значения −1, 1, −1, 1 …, а вместо i^3, i^5, i^7, i^9 … — $-i$, i, $-i$, i … Следовательно, уравнение можно записать так:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots$$

Закономерность легче увидеть, если выделить мнимые члены жирным шрифтом:

$$e^{ix} = 1 + \boldsymbol{ix} - \frac{x^2}{2!} - \frac{\boldsymbol{ix^3}}{\mathbf{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\boldsymbol{ix^5}}{\mathbf{5!}} - \ldots$$

Этот ряд можно преобразовать так:

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^6}{6!} + \ldots + \boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x^3}}{\mathbf{3!}} + \frac{\boldsymbol{x^5}}{\mathbf{5!}} - \frac{\boldsymbol{x^7}}{\mathbf{7!}} + \ldots)$$

Но ведь это в точности те же члены, что и в представленных выше уравнениях для косинуса и синуса x:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Возведение числа e в мнимую степень позволило Эйлеру найти тригонометрические функции. Другими словами, он взял две знакомые, но не связанные друг с другом концепции, перемешал их — и как по мановению волшебной палочки появилось нечто неожиданное: две еще более привычные концепции из области, которая считалась совершенно не имеющей отношения к данной ситуации. Занимаясь математикой, порой испытываешь ощущение, будто это алхимия.

В завершение Эйлер сказал: пусть $x = \pi$, что в радианной мере эквивалентно 180 градусам. Поскольку $\cos \pi = \cos 180° = -1$, а $\sin \pi = \sin 180° = 0$, мнимый член ряда исчезает.

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

Это сокращается до следующей формулы:

$$e^{i\pi} = -1$$

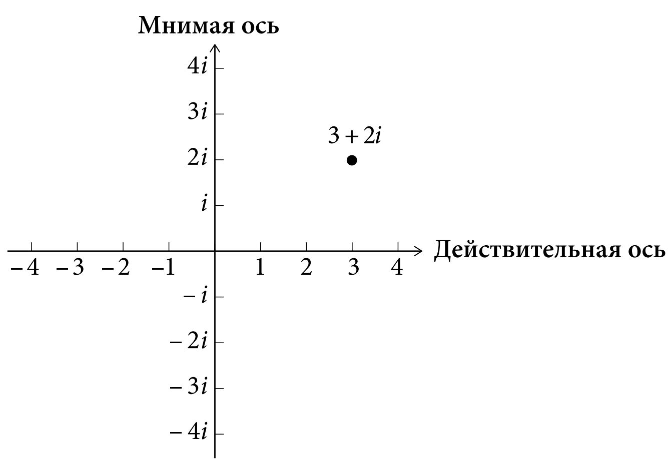
Или:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

По всей вероятности, именно благодаря революционной работе Эйлера с мнимыми числами они оказались в центре математики, где с тех самых пор и остаются. Но, несмотря на это, для Эйлера и его современников мнимые числа по-прежнему были экзотическими, непостижимыми чудовищами. Само их название, которое подразумевало, что они не существуют, являлось серьезным препятствием, мешавшим их полному принятию. В начале XVIII века Готфрид Лейбниц сказал, что $\sqrt{-1}$ — это «почти что амфибия между бытием и небытием». Возможно, математика развивалась бы быстрее, если бы вместо термина «мнимые числа» в словарь вошло название «числа-амфибии».

Мы с вами уже знаем, что математики полностью освоились с концепцией отрицательных чисел лишь тогда, когда смогли увидеть их на бумаге в виде точек, отображенных на числовой оси. То же самое произошло и с мнимыми числами. Философские опасения по поводу комплексных чисел исчезли только после изобретения простого способа визуальной интерпретации этой концепции.

Представленная на рисунке ниже комплексная плоскость образована вертикальной числовой осью, на которой откладываются мнимые числа, и горизонтальной числовой осью, на которой откладываются действительные числа (как оси x и y в обычной системе координат). Комплексное число $a + bi$ — это точка на комплексной плоскости с координатами (a, b) — a по горизонтальной оси, b — по вертикальной. На рисунке я отметил число $3 + 2i$, другими словами — точку с координатами (3, 2). Комплексная плоскость — достаточно простая идея, но тем не менее все три ее автора независимо друг от друга работали где-то на периферии сообщества самых влиятельных математиков того времени: Каспер Вессель, землемер из Копенгагена; Жан Робер Арган, счетовод из Парижа, и аббат Эдриан-Кантен Буэ, французский священник, который сбежал от революции и поселился в городе Бат. Тот факт, что ни один из великих математиков той эпохи не предложил идею комплексной плоскости, говорит об их зависимости от доктрины о том, что мнимые числа существуют только в воображении.



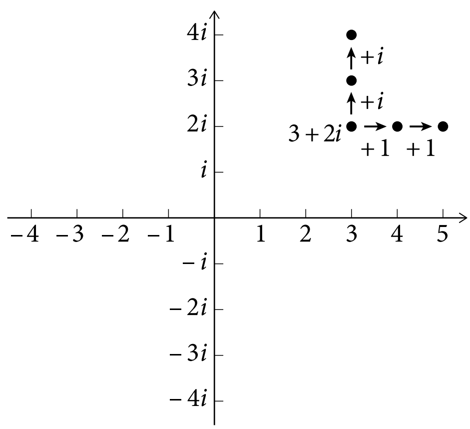
Комплексная плоскость

Комплексная плоскость стала блестящим открытием. Она не только представляет собой схему, на которой может быть отмечено местоположение комплексных чисел, но и углубляет наше понимание того, как ведут себя эти числа.

Возьмем какую-либо элементарную сумму, скажем 1 плюс $3 + 2i$. Ответ: $4 + 2i$.

Или прибавим i к числу $3 + 2i$. Ответ: $3 + 3i$.

А теперь посмотрите на рисунок ниже. Прибавление 1 к точке $3 + 2i$ перемещает нас на одну единицу по горизонтальной оси, а прибавление i — на одну единицу вверх по вертикальной.

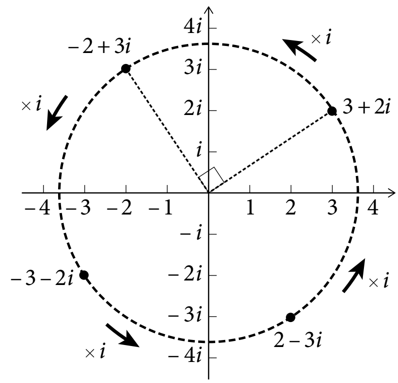


Чем больше единиц я прибавляю, тем дальше продвигаюсь по горизонтали, а чем больше i — по вертикали. На самом деле сложение комплексного числа $a + bi$ эквивалентно перемещению на a единиц вдоль действительной оси и на b единиц вверх по мнимой оси. Такое геометрическое передвижение обозначается термином «*параллельный перенос*».

А теперь давайте перейдем к умножению комплексных чисел. Если мы возьмем число $3 + 2i$ и умножим его на 1, получится то же самое, $3 + 2i$. Иначе и быть не может, ведь так всегда происходит с умножением на 1. Но когда мы умножим это число на i, произойдет нечто интересное. Давайте умножим $3 + 2i$ на i:

$$(3 + 2i) \times i = 3i + 2i^2 = 3i - 2 = -2 + 3i$$

Посмотрите на представленный ниже рисунок. Точка $3 + 2i$ сместилась на 90 градусов относительно 0 против часовой стрелки.



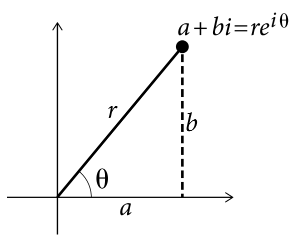
Если мы умножим новую точку $-2 + 3i$ на i, точка на комплексной плоскости, которую описывает это число, повернется на четверть оборота вокруг начала координат. Если мы умножим на $i^2 = -1$, точка повернется на 180 градусов, если на $i^3 = -i$, точка повернется на 270 градусов, а если на $i^4 = 1$, точка вернется в исходную позицию.

Теперь давайте возьмем произвольное положительное число a. Оно находится на действительной оси комплексной плоскости. Умножив a на -1, получим ответ: $-a$. Это число тоже размещено на действительной оси, но с противоположной стороны от 0. Умножим его на -1 еще раз, и оно вернется к значению a. Однако если мы умножим a на i, ответ будет ai. Число повернулось на 90 градусов и теперь расположено на мнимой оси. Если мы снова умножим на i, число переместится в позицию $-a$, снова вернувшись на действительную ось. Таким образом, комплексная плоскость обеспечивает возможность представить умножение на отрицательные числа, которое сводится к перемещению *вперед-назад*, в виде умножения мнимых чисел посредством последовательности перемещений *по кругу*. Этот процесс не только позволяет глубже постичь сущность чисел, но и предоставляет в наше распоряжение мощный язык для описания вращающихся объектов.

Во многих областях науки, в том числе в физике элементарных частиц, электротехнике и радиолокации, комплексная плоскость используется для описания процесса вращения. В действительности волновое уравнение Шредингера (основное уравнение квантовой механики) содержит мнимое число i [12]. Это уравнение описывает вероятность обнаружения субатомной частицы в определенном месте. Разумеется, вероятность любого события должна находиться в пределах от 0 до 1, или от 0 до 100 процентов. Однако лучший способ понять зависимость между вероятностями частиц сводится к тому, чтобы считать эти вероятности числами на комплексной плоскости. В данном случае вместо сложения вероятностей как действительных чисел эти вероятности усиливают или нейтрализуют друг друга в зависимости от их относительного положения в процессе вращения.

Благодаря таким уравнениям, как уравнение Шредингера, физики теперь используют мнимые числа для описания природы самой материи. В итоге математикам больше не нужно терзаться по поводу того, есть ли у мнимых чисел какой-либо внешний смысл или нет. В наше время говорить, что число $2 + 3i$ находится на комплексной плоскости, так же естественно, как и то, что число -2 расположено на числовой оси.

Комплексная плоскость позволяет по-новому взглянуть на тождество Эйлера, но для этого я должен познакомить вас с альтернативной системой координат для комплексных чисел. Как мы уже видели, в стандартной системе комплексному числу $a + bi$ соответствует точка на плоскости с координатами (a, b), где a — это расстояние от ноля вдоль горизонтальной оси, а b — расстояние от ноля вверх. Вторая система, в которой используются «полярные» координаты, описывает точку с координатами (a, b) как точку, которая находится под углом θ на расстоянии r от начала координат. Это похоже на то, как в боевике командир подводной лодки объявляет, что вражеский корабль замечен в r милях, азимут θ (разве что за исключением того, что мы измеряем углы в радианах, причем против часовой стрелки начиная с востока, а не по часовой стрелке с севера). На представленном ниже рисунке точка отображает комплексное число $a + bi$. Я отметил угол θ от горизонтали и расстояние r от начала координат, что образует прямоугольный треугольник с углом θ, гипотенузой r, прилежащей стороной a и противолежащей стороной b.



SOH-CAH-TOA!

Это мнемоническое правило для запоминания тригонометрических функций напоминает нам о том, что синус — это отношение противолежащей стороны к гипотенузе, а косинус — прилежащей стороны к гипотенузе. В данном случае это значит, что

$$\sin\theta = \frac{b}{r};\ \cos\theta = \frac{a}{r}$$

Эти формулы можно записать так:

$$b = r\sin\theta;\ a = r\cos\theta$$

Следовательно, наше комплексное число может быть выражено через r и θ:

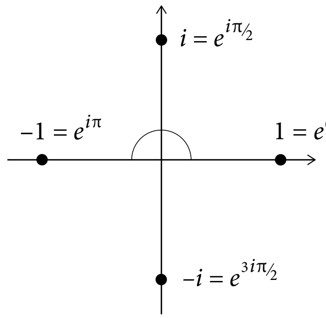
$$a + bi = r\cos\theta + (r\sin\theta)\,i$$
$$a + bi = r\cos\theta + ri\sin\theta$$
$$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Но постойте! Мы ведь знаем, что $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$. Следовательно, мы можем заменить те члены уравнения, которые стоят в скобках, и получить такую формулу:

$$a + bi = re^{i\theta}$$

Попытайтесь прочувствовать это уравнение. Комплексное число, которое находится на расстоянии r от начала координат, под углом θ радиан по отношению к горизонтальной оси, имеет форму $re^{i\theta}$. Немного выше в этой главе я задал вопрос, что значит число e в мнимой степени, но тогда это казалось непонятным. Сейчас мы нашли на него ответ. Когда число e имеет мнимую степень, такой член представляет собой невероятно эффективное обозначение позиции на комплексной плоскости.

Теперь давайте рассмотрим точку на комплексной плоскости с координатами $(-1, 0)$, которая представляет комплексное число $-1 + 0i$, или просто -1. Как показано на рисунке ниже, эта точка находится на расстоянии в 1 единицу от начала координат под углом в π радиан, а значит, мы можем записать ее как $e^{i\pi}$.



Мы с вами заново открыли тождество Эйлера! Формула, описывающая позицию точки -1 на комплексной плоскости, выглядит следующим образом:

$$-1 = e^{i\pi}$$

Это уравнение можно преобразовать в такую форму:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Кроме того, поскольку точка i расположена на расстоянии в 1 единицу от начала координат под углом $\pi/2$ радиан к горизонтали, мы можем сделать вывод, что $i = e^{i\pi/2}$, а так как $-i$ находится на расстоянии в 1 единицу от начала координат под углом $3\pi/2$ радиан, напрашивается вывод, что $-i = e^{3i\pi/2}$.

Сделайте глубокий вдох. Сейчас мы используем эту информацию, чтобы ответить на потрясающий вопрос, который еще несколько страниц назад мог бы показаться полным бредом, граничащим с безумием: что представляет собой i^i, или квадратный корень из минус единицы в степени квадратный корень из минус единицы?

Поскольку мы знаем, что $e^{i\pi/2} = i$, мы знаем также, что:

$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\,\pi/2} = e^{-\pi/2} = \frac{1}{e^{\pi/2}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\pi}}} = 0{,}20787\ldots$$

Здесь i исчезает, оставляя после себя такое число, которое поняли бы даже древние греки. Только представьте себе!

Комплексная плоскость позволяет забыть беспокойную мысль о том, что i — это квадратный корень из отрицательного числа. Мы должны помнить только то, что комплексное число $a + bi$ представляет собой точку на плоскости с координатами (a, b), где a и b — действительные числа, а также что сложение или умножение этих координат подчиняется определенным правилам. (Разумеется, эти правила основаны на свойствах квадратного корня из минус единицы, но сейчас нас должно интересовать не то, как они появились, а в чем их суть.) Вскоре математики задумались над тем, можно ли создать такие же правила для трехмерной системы координат, что позволило бы описывать вращения в пространстве подобно тому, как правила для комплексных чисел описывают вращения в двумерной системе координат. Больше всех проникся этой идеей ирландский математик Уильям Роуэн Гамильтон, но ему не удавалось найти ответ. И вот однажды в 1843 году, когда Гамильтон прогуливался с женой вдоль Королевского канала в Дублине, на него снизошло озарение, которое вылилось в знаменитый математический акт вандализма: Гамильтон нацарапал на стене моста Брумбридж такую формулу: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Сейчас на этом месте установлена памятная табличка.

Гамильтон понял, что невозможно найти математически допустимые правила для координат с тремя числами, но их можно применить для четырех чисел. Он назвал свое открытие «кватернионы». Подобно тому как комплексное число $a + bi$ (где a и b — действительные числа, а i — $\sqrt{-1}$) можно представить в виде точки на плоскости с координатами (a, b), кватернион $a + bi + cj + dk$, где a, b, c и d — действительные числа, а i, j и k равны $\sqrt{-1}$, можно записать с помощью координат (a, b, c, d). Хотя каждая из мнимых единиц i, j и k равна $\sqrt{-1}$, все же они разные, как следует из уравнения, записанного Гамильтоном на кирпичной кладке моста. Для того чтобы кватернионы работали, Гамильтону понадобилось еще одно странное правило, которое гласит, что порядок умножения мнимых единиц имеет значение. Например, $i \times j = k$, но $j \times i = -k$.

Кватернионы Гамильтона представляли собой весьма необычную концепцию, но все же позволили ему создать модель вращений в трехмерном пространстве. В кватернионе (a, b, c, d) числа (b, c, d) — это три координаты для трех размерностей пространства, тогда как число a отображает время. Эти новые числа так взволновали Гамильтона, что он посвятил их изучению бóльшую часть оставшейся жизни.

Если концепция кватернионов кажется вам несколько странной, вы в этом не одиноки. Современники Гамильтона высмеяли его, и особенно Чарльз

Доджсон, математик из Оксфордского университета, больше известный как Льюис Кэрролл. Его книги для детей «Алиса в Стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье» славятся своими логическими головоломками и математическими играми. Однако совсем недавно один критик заявил, что в основе сюрреалистического юмора этих книг лежит не богатое воображение Доджсона, а его желание поглумиться над изменениями в математике викторианской эпохи, которых он не одобрял, что больше всего касалось тенденции к повышению уровня абстракции в алгебре. Мелани Бейли написала в своей статье, что глава A Mad Tea Party («Безумное чаепитие») — это сатира на кватернионы Гамильтона, и даже само название представляет собой игру слов, поскольку его можно интерпретировать как mad *t*-party, где *t* — научный символ для обозначения времени [13]. За чаепитием Безумный Шляпник, Мартовский Заяц и Мышь Соня вращаются вокруг стола, подобно мнимым числам *i*, *j* и *k* в кватернионе. Четвертый гость по имени Время отсутствует, поэтому на мытье посуды времени нет. Когда Мартовский Заяц сказал Алисе, чтобы она говорила то, что думает, Алиса ответила: «…Во всяком случае… что я думаю, то и говорю. В общем, это ведь одно и то же!» Но порядок слов в предложении все же меняет смысл, точно так же как порядок умножения *i* и *j* меняет результат.

Однако история показала, что Доджсон был неправ. Гамильтон расширил концепцию числа, включив в нее кватернионы, что разорвало связующую нить между числами и смыслом, существовавшую до этого. Теперь математики считают само собой разумеющимся создание новых типов чисел исключительно на основании формальных определений. Смысл может быть найден (как это произошло с комплексными числами, которые оказались точками на комплексной плоскости) или нет. Задача состоит в том, чтобы исследовать закономерность и структуру и понять, к чему это вас приведет.

К концу XIX века другие математические теории вытеснили кватернионы, но Гамильтон был бы безумно счастлив узнать, что на протяжении последних нескольких десятилетий они снова широко используются. Кватернионы применяются в процессе компьютерных расчетов трех осей вращения объектов, находящихся в полете, — продольной, поперечной и вертикальной. Различные организации и компании, работающие в таких отраслях, как аэронавтика и компьютерная графика, от NASA до Pixar, используют кватернионы в своем программном обеспечении.

Невозможно создать дееспособную систему счисления с пятью, шестью или семью упорядоченными действительными числами, но для восьми чисел такая система существует — она обозначается термином «октонион» и записывается как (*a, b, c, d, e, f, g, h*). Октонион — это идея, ждущая воплощения, и, скорее всего, ждать осталось недолго. Один из основных претендентов на роль «теории всего», объединяющей квантовую механику и Общую теорию относительности, — это М-теория, один из вариантов теории струн, в которой элементарные частицы атома считаются струнами [14]. М-теория оперирует 11 измерениями, состоящими, по мнению ряда ученых, из восьми измерений октониона и трех пространственных измерений. Гамильтон записал свои идеи на кладке ирландского моста, но они, возможно, изначально вплетены в ткань мироздания.

Бертран Рассел, единственный математик, получивший Нобелевскую премию по литературе, описывал красоту математики так: «Математика, при правильном на нее взгляде, обладает не только истиной, но и высшей красотой — красотой холодной и суровой, подобно скульптуре, не обращенной ни к какой стороне нашей слабой натуры, лишенной украшений живописи и музыки и тем не менее утонченно чистой и способной к строгому совершенству, свойственному лишь величайшему искусству» [15]. Тождество Эйлера, совершенное и глубокое, полностью соответствует этому описанию. Математическая красота может быть и эстетичной, хотя Рассел не дожил до того дня, когда мог бы увидеть это воочию. В 1980 году, через десять лет после его смерти, на комплексной плоскости была открыта фигура, оказавшаяся настолько поразительной и неординарной, что это изменило ход наших мыслей не только в отношении математики, но и науки в целом.

Прежде чем рассказать об этом, я должен познакомить вас с концепцией итерации, которая представляет собой процесс многократного повторения одной и той же операции. Мы затронули эту тему в предыдущей главе, когда говорили о последовательности, каждый член которой в два раза больше предыдущего:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128…

Вместо того чтобы записывать все члены последовательности, я мог бы определить ее как итерацию $x \to 2x$, в которой первый член равен 1:

$1 \to 2$

$2 \to 4$

$4 \to 8$

И так далее.

Итеративность этого процесса обусловлена тем, что результаты каждого действия (в данном случае удвоения) используются в качестве исходных данных для следующего действия. Итерация — это система с обратной связью: число, полученное на выходе, снова подается на вход, обеспечивая получение нового числа, и т. д.

А теперь давайте рассмотрим простую итерацию $x \to x^2$.

Если мы начнем с 1, то получим следующие значения:

$1 \to 1^2 = 1$

$1 \to 1$

$1 \to 1$

Другими словами, эта последовательность состоит из бесконечного количества единиц.

Если начнем с 2, последовательность будет такой:

$2 \to 2^2 = 4$

$4 \to 16$

$16 \to 256$

$256 \to 65536 \to \ldots$

Эта последовательность стремится к бесконечности.

Если же последовательность начинается со значения 0,1, тогда мы получим:

$0{,}1 \to (0{,}1)^2 = 0{,}01$

$0{,}01 \to 0{,}0001$

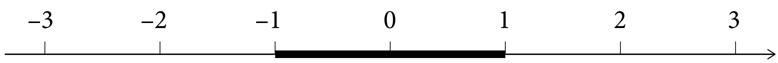
$0{,}0001 \to 0{,}00000001 \to \ldots$

Эта последовательность стремится к нулю.

Мы можем обобщить поведение всех чисел, принимающих участие в этой итерации. Если положительное число n больше 1, его квадрат n^2 больше n, а значит, числа, полученные посредством итерации, становятся все больше.

Если положительное число n меньше 1, тогда n^2 составляет долю от n, то есть числа, полученные посредством итерации, все время уменьшаются и стремятся к нулю. Поскольку квадрат отрицательного числа — это положительное число, все числа меньше -1 стремятся к бесконечности, а все отрицательные числа от -1 до 0 — к нулю.

Назовем числа, которые стремятся к бесконечности, словом «беглецы», а числа, которые не делают этого, — словом «узники». В случае итерации $x \to x^2$ мы видели, что число 2 — это беглец, а числа 1 и 0,1 — узники. В оставшейся части главы мы будем искать узников любой итерации, которых обозначим как «множество узников». В итерации $x \to x^2$ множество узников — это числа от -1 до 1; на представленном ниже рисунке они отмечены жирной линией.



Множество узников итерации $x \to x^2$

Рассмотрим новую итерацию $x \to x^2 + c$, где c — исходное значение итерации. Другими словами, наша система с обратной связью поглощает немного больше информации, чем обычно. Она начинает с числа c, возводит его в квадрат и прибавляет c, возводит результат в квадрат и прибавляет c, возводит результат в квадрат и прибавляет c и т. д. Это небольшое изменение правил влечет за собой серьезные последствия в плане определения того, какие исходные значения относятся к узникам, а какие — к беглецам.

Начнем с числа 1, которое, как мы выдели выше, является узником в итерации $x \to x^2$. В случае итерации $x \to x^2 + c$ оно становится беглецом (обратите внимание, что мы начинаем с 1, а значит, $c = 1$):

$1 \to 1^2 + 1 = 2$
$2 \to 2^2 + 1 = 5$
$5 \to 26$
$26 \to 677 \to 458330 \to \ldots$

А теперь давайте посмотрим, что произойдет с числом -2, которое является беглецом в итерации $x \to x^2$. В случае итерации $x \to x^2 + c$ оно превращается в узника (обратите внимание, что мы начинаем с -2, значит, $c = -2$):

$-2 \to -2^2 - 2 = 2$

$2 \to 2^2 - 2 = 2$

$2 \to 2$

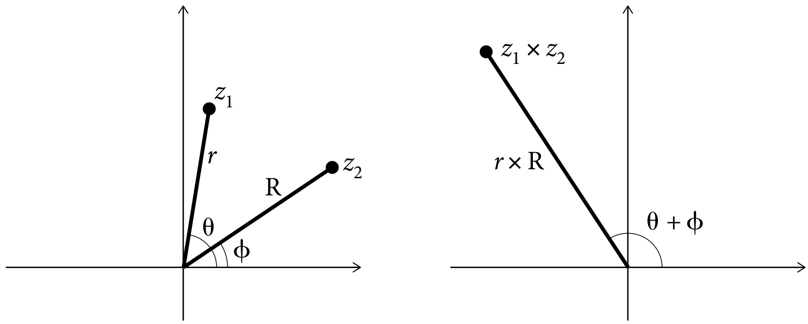
$2 \to 2$

…

Оказывается, в итерации $x \to x^2 + c$ множество узников содержат числа от −2 до 0,25, как показано на рисунке ниже.

Множество узников итерации $x \to x^2 + c$

Теперь поиграем в игру «узники против беглецов» на комплексной плоскости — системе координат, в которой каждая точка определяется комплексным числом. Для начала давайте вспомним, как на комплексной плоскости выполняется операция умножения: умножение на число i эквивалентно повороту против часовой стрелки на 90 градусов. В более общем виде, когда два комплексных числа умножаются друг на друга, углы, которые образуют соответствующие точки с горизонтальной осью, необходимо сложить, а расстояния от начала координат — умножить. (Обозначим комплексные числа символом z, а не $a + bi$.) На представленном ниже рисунке комплексное число z_1 находится под углом θ градусов к горизонтали, на расстоянии r, а число z_2 — под углом ϕ градусов к горизонтали, на расстоянии R. Таким образом, комплексное число $z_1 \times z_2$ расположено под углом $\theta + \phi$ градусов по отношению к горизонтальной оси, на расстоянии $r \times R$. Теперь становится понятно, почему умножение на i — это четверть оборота. Число i — это точка на комплексной плоскости с координатами (0, 1), одна единица вверх по мнимой оси, под прямым углом к горизонтали. Следовательно, умножение комплексного числа, представленного соответствующей точкой на комплексной плоскости, на число i, сводится к повороту на 90 градусов против часовой стрелки и умножению расстояния этой точки от начала координат на 1, значит, расстояние остается прежним — это и есть математическое описание четверти оборота.



Умножение на комплексной плоскости

Что происходит с комплексными числами в итерации $z \to z_2$?

Начнем с мнимого числа i:

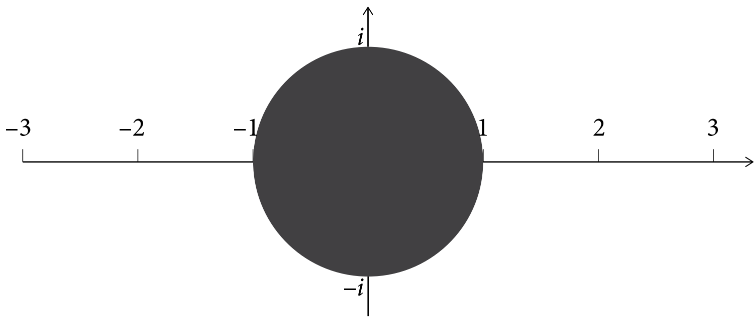
$i \to i^2 = -1$

$-1 \to 1$

$1 \to 1$

Следовательно, i принадлежит множеству узников.

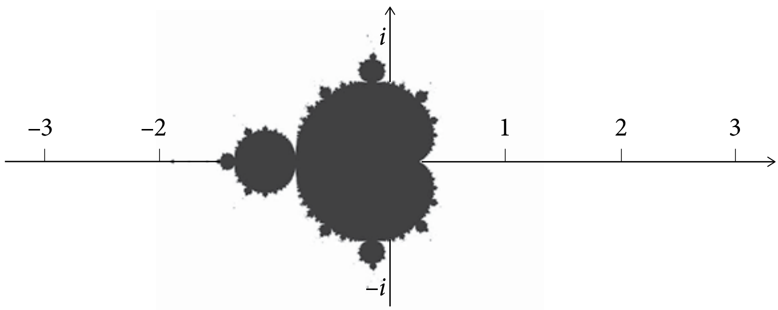
Существует более быстрый способ обнаружить множество узников на комплексной плоскости с использованием информации об умножении комплексных чисел. При умножении двух комплексных чисел мы суммируем углы и умножаем расстояния. Следовательно, для возведения комплексного числа в квадрат необходимо удвоить его угол и возвести в квадрат расстояние. Рассмотрим единичную окружность — с радиусом 1 и центром в начале координат. Все точки такой окружности находятся на расстоянии 1 от начала координат, а это значит, что квадрат любой из этих точек расположен на расстоянии $1^2 = 1$ от начала координат. Другими словами, квадрат числа, соответствующего точке на единичной окружности, остается на единичной окружности. Тогда в случае итерации $z \to z^2$ все точки на окружности должны принадлежать к множеству узников. Аналогичным образом, если расстояние от точки до начала координат меньше 1, квадрат числа, соответствующего этой точке, находится ближе к началу координат и в процессе итерации будет приближаться к нему все больше. Следовательно, все точки, которые расположены внутри единичной окружности, тоже принадлежат к множеству узников. С другой стороны, если расстояние от точки до начала координат больше 1, квадрат числа, соответствующего этой точке, находится дальше от начала координат и в процессе итерации будет отдаляться от него все больше и больше. Таким образом, в случае итерации $z \to z^2$ множество узников представляет собой единичный круг, показанный на рисунке ниже.



Множество узников в итерации $z \to z^2$

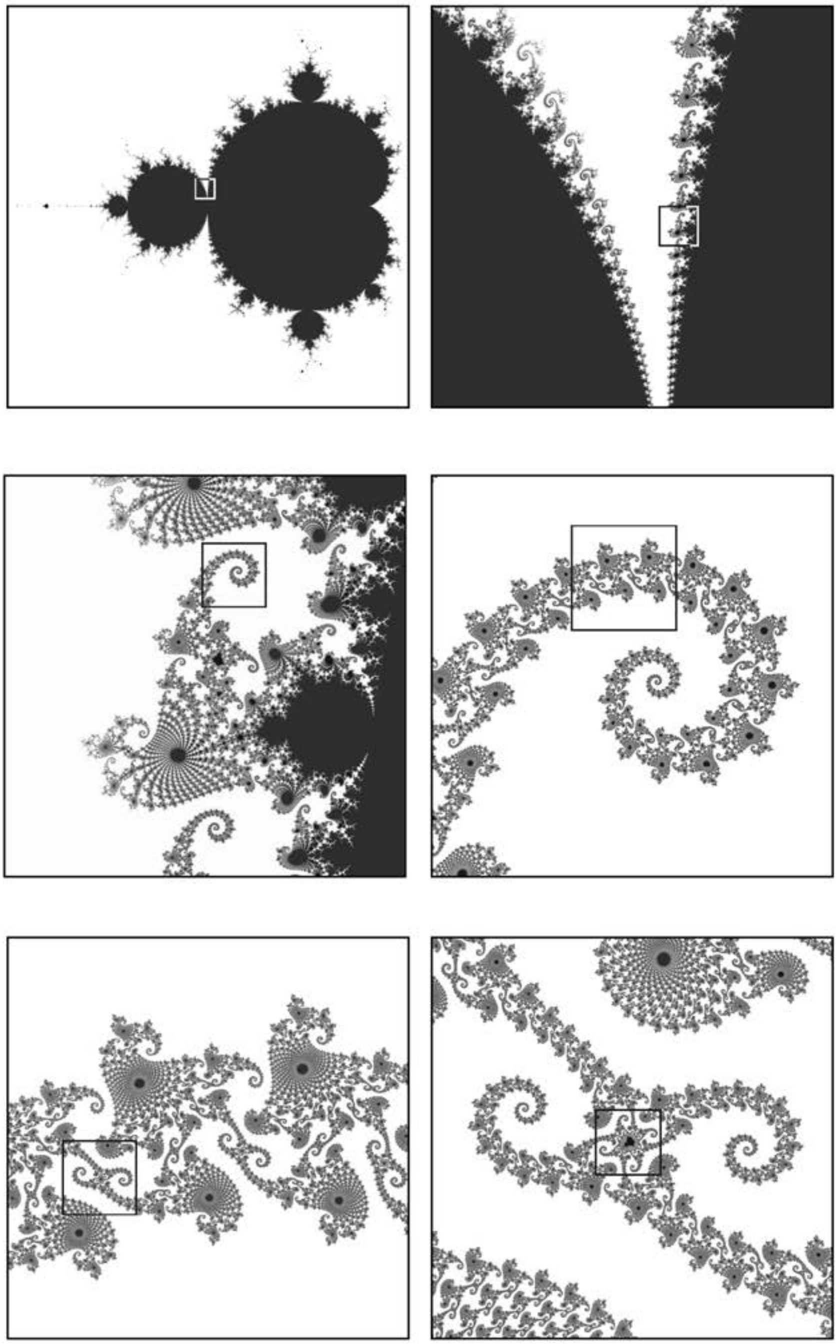
Теперь приготовьтесь к самому интересному. Нам необходимо определить множество узников в итерации $z \to z^2 + c$, где c — начальное значение итерации. Давайте подумаем, что означает эта итерация на комплексной плоскости. Мы берем точку c, затем возводим ее в квадрат, что поворачивает ее вокруг начала координат и возводит в квадрат ее расстояние от начала координат. Затем мы *прибавляем c*, что смещает эту точку на комплексной плоскости на расстояние c. После этого новая точка поворачивается, а ее расстояние от начала координат возводится в квадрат, прежде чем она будет снова смещена на расстояние c. Таким образом, данная итерация представляет собой бесконечное чередование таких операций, как вращение, смещение и перенос в каждой точке на комплексной плоскости. Посредством логических умозаключений невозможно определить, как будет выглядеть множество узников в данном случае. Единственный способ — выполнить итерации для огромного количества точек, что до появления компьютеров было неосуществимо.

В 1979 году работавший в компании IBM французский математик Бенуа Мандельброт заинтересовался итерацией $z \to z^2 + c$. Его первые распечатки показали множество узников в форме капли с крохотными разводами, напоминающими маленькие брызги, отделившиеся от основной капли. Мандельброт оставил своим ассистентам записку, в которой предупреждал, что эти дефекты появились не из-за ошибки компьютера, и просил не удалять их с распечаток. Увеличив степень детализации этих участков, Мандельброт увидел, что они состоят из удивительных узоров, соединенных с множеством узников крохотными ответвлениями. Постепенно сформировалась полная картина множества узников. Она напоминала жука-долгоносика с игольчатым панцирем и не походила ни на одну известную геометрическую фигуру.

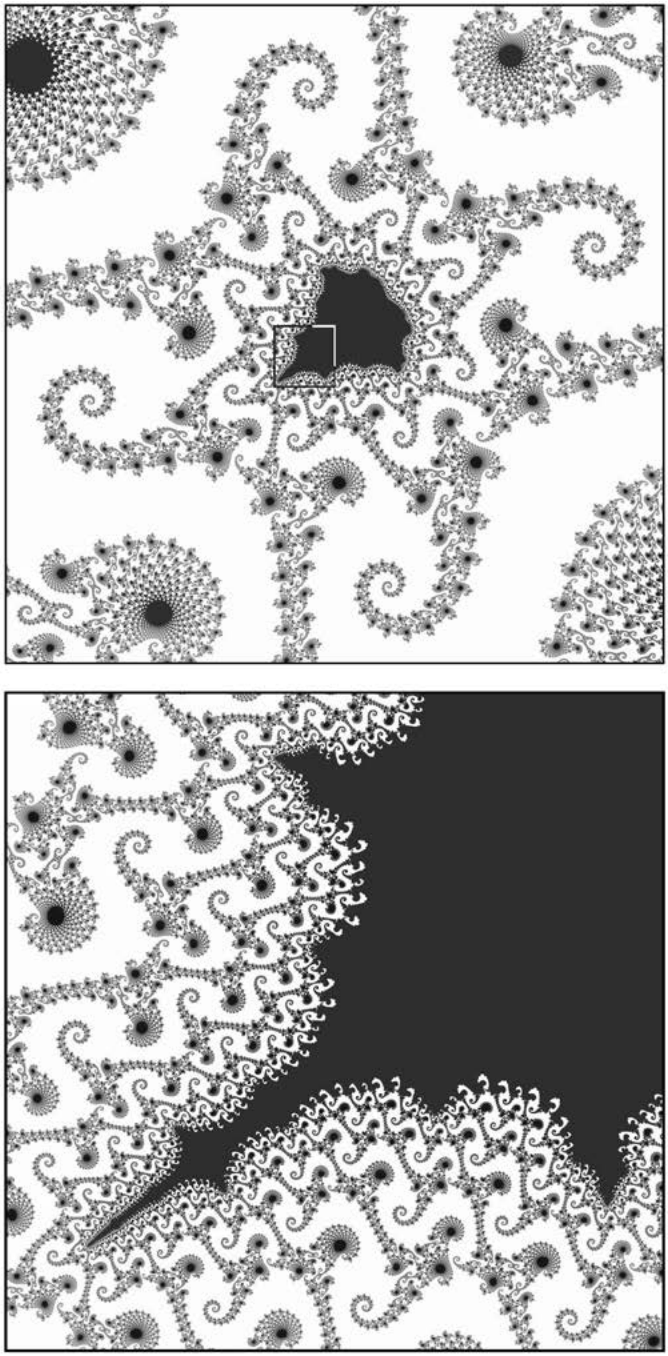


Множество узников в итерации $z \to z^2 + c$*: множество Мандельброта*

На первый взгляд множество Мандельброта (именно так назвали эту фигуру) выглядит уродливо и даже пугающе. Но если присмотреться к нему поближе, то можно увидеть его замысловатую красоту. На представленных ниже рисунках показаны детализированные изображения «Долины морского конька» — так называется фрагмент множества Мандельброта между головой и телом «жука». Расположенные по периметру бугорчатые выступы образуют ажурный «огуречный» орнамент со спиралями, напоминающими хвост морского конька. Внутри этих спиралей еще больше спиралей, затем еще спирали внутри спиралей — и так до тех пор, пока не появится миниатюрное множество Мандельброта, запечатленное в этой фигуре как насекомое в капле янтаря. «Он [фрактал] не оставляет места для скуки, поскольку все время появляется что-то новое, но и не дает нам заблудиться, так как нечто знакомое возвращается снова и снова», — писал Мандельброт. Процесс изменений носит безмерно глубокий и широкий характер: на какой бы фрагмент границы множества вы ни посмотрели, увеличение уровня детализации раскроет бесконечно меняющийся ландшафт. Битва между узниками и беглецами так идеально сбалансирована, что вихри схваток между ними можно обнаружить в каждой точке, в любом масштабе.



Путешествие в Долину морского конька



Множество Мандельброта — это фрактал. Термин «фрактал» ввел сам Мандельброт для обозначения любой фигуры, содержащей уменьшенные версии самой себя. (Ходила шутка, что буква «Б» в имени «Бенуа Б. Мандельброт» означает «Бенуа Б. Мандельброт».) Фракталы часто встречаются в природе — например, цветок головки цветной капусты имеет ту же форму, что и вся головка, а один фрагмент ветки папоротника напоминает всю ветку. Именно фрактальные свойства множества Мандельброта делают его бесконечно раскрывающиеся узоры столь органичными. Открытие Мандельброта — это тот редкий случай, когда серьезное достижение в области чистой математики стало столь же значимым событием в массовой культуре. Изображения фрактала появились на обложках журналов и на стенах спален; он стал такой же иконой 1980-х, как Адам Ант или подплечники. У фрактала до сих пор масса приверженцев. По мере увеличения мощности компьютеров исследователи проникают в структуру фрактала все глубже и глубже, и каждое такое путешествие отражает не только научные, но художественные и духовные поиски.

Множество Мандельброта можно сделать еще красивее, если раскрасить беглецов в разные цвета в зависимости от того, с какой скоростью они стремятся к бесконечности. Кроме того, анимация таких изображений создает эффект падения сквозь окружающий мир. Автомобильный инженер из Детройта Орсон Ванг купил три компьютера, чтобы воспроизвести изображение фрактала с большей степенью детализации, чем когда-либо удавалось последователям Мандельброта. Он потратил три месяца на выбор самой лучшей исходной позиции и в итоге остановился на точке, расположенной рядом с комплексным числом $-1{,}7 + 0{,}2i$ на выступающей части мини-множества Мандельброта. На протяжении шести месяцев компьютеры Ванга создавали изображение с глубиной детализации 10275, что более-менее эквивалентно шестикратному уменьшению обозримой Вселенной до размера протона. В результате было получено завораживающее изображение. Острый шипастый выступ превращается в горизонтальную нить, потом в крест, в восьмиконечную звезду, беспорядочное скопление узловатых стеблей, а затем посредине неожиданно взрывается целый вихрь концентрических кругов. Это зрелище захватывает дух. «Для меня множество Мандельброта олицетворяет как непостижимую сложность, так и надежду», — объясняет Орсон.

Открытие множества Мандельброта стало важной победой компьютеров, показавшей, что они могут помочь в создании новой математики. До этого считалось, что чем ближе вы присматриваетесь к чему-то, тем проще оно становится. Целью научных исследований было разбиение изучаемых объектов на базовые элементы. Но вот появилась фигура, которая становилась сложнее по мере увеличения глубины детализации. Более того, она доказывала, что одно простое правило способно создать бесконечно сложную структуру. Самое удивительное свойство множества Мандельброта состоит в том, что оно образуется всего лишь посредством умножения и сложения — двух элементарных арифметических операций, знакомых даже семилетнему ребенку.

У основания «Долины морского конька» есть точка −0,75. В 1991 году математик Дэйв Болл пытался доказать, что непосредственно над ней нет узников, поэтому стал выполнять итерацию точек, которые находились все ближе и ближе к этой точке [16]. Болл начал с точки −0,75 + 0,1i, осуществив столько итераций, сколько было необходимо, чтобы комплексное число оказалось больше чем за две единицы от начала координат, поскольку как только исходная точка достигает двух единиц от начала координат, она гарантированно становится беглецом. Затем он сделал то же самое с точкой −0,75 + 0,01i и т. д., после чего составил такую таблицу.

Мнимая часть	**Количество итераций**	**Мнимая часть × количество итераций**
0,1	33	3,3
0,01	315	3,15
0,001	3143	3,143
0,0001	31417	3,1417
0,00001	314160	3,14160

Вы видите, к чему стремится последнее значение? Все ближе и ближе к числу π.

В связи с множеством Мандельброта появилась масса вопросов, на которые пока нет ответов. Специалисты по занимательной математике долгие годы пытались понять, можно ли создать такое множество в трех измерениях. Поскольку трехмерной модели комплексной плоскости не существует, очевидного решения этой задачи нет. Тем не менее в 2009 году Дэниел Уайт, 31-летний учитель игры на фортепиано из Бедфорда, нашел вариант ответа, перенеся принципы умножения комплексных чисел с двумерной в трехмерную систему координат.

Точка на комплексной плоскости может быть определена ее расстоянием от начала координат и углом к горизонтальной оси.

Точно так же точка в пространстве может быть определена ее расстоянием от начала координат и двумя углами, один к горизонтальной оси, а второй — к вертикальной, подобно тому как точка на земном шаре определяется широтой (вертикальным углом) и долготой (горизонтальным углом).

Когда вы умножаете два комплексных числа, вы суммируете их углы и умножаете расстояния. Дэн представил умножение двух точек в пространстве как сумму двух горизонтальных углов, сумму двух вертикальных углов и умножение расстояний.

Вооружившись этим определением, Дэн Уайт построил трехмерное множество узников итерации $z \to z^2 + c$. Результат был неутешительным. «Это напоминало взбитые сливки», — сказал он. Бесконечная живость, присущая множеству Мандельброта, ослабла, и Дэн пожаловался на это участникам интернет-форума для любителей фракталов. Прорыв произошел после того, как инженер-механик их Лос-Анджелеса Пол Ниландер предложил Дэну использовать итерацию $z \to z^8 + c$. Это небольшое изменение превратило взбитые сливки в обросшую ракушками фрактальную планету с пещерами, как будто кружащими в водовороте горами и напоминающими звезды расщелинами. Объект получил название «оболочка Мандельброта». «Меня охватило благоговение, — признался Дэн. — Было ощущение, что открыта новая вселенная».

Благоговение — единственно верная реакция на оболочку Мандельброта. Этот объект мог бы быть космическим кораблем, обитателем морских глубин, инопланетным вирусом… — всем, чем захотите. Его поверхность более детальна и причудлива, чем все, что может создать человеческое воображение. Тем не менее всю эту структуру абсолютно точно определяет одна строка: $z \to z^8 + c$.

Открытие множества Мандельброта восстановило связь между математикой и естественными науками. Фрактальная геометрия стала новым подходом к пониманию сложных форм в природных явлениях, от метеосистем до береговых линий, от живых организмов до кристаллов. Но за три столетия до этого другое крупное математическое открытие оказало еще большее влияние на то, как мы видим окружающий мир.

Профессор Калькулус

8

Французский математик Седрик Виллани совсем не похож на обычного университетского профессора. Красивый и худощавый, с мальчишеским лицом и волнистыми волосами до шеи, он скорее напоминает денди «Прекрасной эпохи» или участника претенциозной студенческой рок-группы. Виллани всегда одет в костюм-тройку с накрахмаленным белым воротником, галстук *лавальер* (галстук, завязанный в большой вычурный бант) и сверкающую брошь в форме тарантула. «Мне же нужно было что-то с этим сделать, — сказал он по поводу своей внешности. — Это произошло инстинктивно».

Я впервые встретился с Виллани в 2010 году в индийском городе Хайдарабаде, на Международном конгрессе математиков, который проводится один раз в четыре года. Из трех тысяч его участников именно Виллани был в центре внимания — и не из-за изысканного внешнего вида, а потому что на церемонии открытия ему вручили медаль Филдса. Филдсовская премия и медаль — это высший знак отличия в области математики. Виллани вел образ жизни поп-звезды: где бы ни появился, его просили дать автограф и сфотографироваться. Однажды мне удалось поговорить с ним, и я спросил, есть ли у знаменитых математиков поклонницы. «Знаете, в мире математики они несколько стеснительны, так что вряд ли будут мне досаждать, — засмеялся он. — К сожалению».

Медаль Филдса вручается на каждом Международном конгрессе математиков двум, трем или четырем ученым не старше 40 лет. (В Хайдарабаде эту премию получили также Элон Линденштраусс из Израиля, Станислав Смирнов из России и Нго Бао Тяу из Вьетнама.) Ограничение по возрасту объясняет первоначальную мотивацию, лежавшую в основе создания премии, идею которой предложил канадский математик Джон Филдс. Однако Филдсовская премия приносила такую известность и признание, что, начиная с присуждения первых двух премий в 1936 году, стал формироваться культ молодости, подразумевающий, что, если вам исполнилось 40 лет, вы уже не можете рассчитывать на получение столь высокой награды. Это несправедливо, поскольку многие математики добиваются самых больших успехов после сорока. С другой стороны, обладателям Филдсовской премии приходится прилагать много усилий к тому, чтобы снова сосредоточиться на работе, так как слава влечет за собой и другие обязанности. Математическое сообщество не воздает должное за достижения всей жизни так, как это делает физическое и химическое сообщество посредством Нобелевской премии [1].

Первый Международный конгресс математиков прошел в 1897 году в Цюрихе. На втором конгрессе, состоявшемся в 1900 году в Париже, немецкий математик Давид Гильберт сделал доклад, в котором перечислил 23 нерешенные математические задачи, тем самым определив направление развития этой дисциплины на ближайшую сотню лет. Математики приезжают на Международный конгресс, чтобы оценить и осмыслить свои достижения, а объявления о присуждении Филдсовской премии содержат краткое описание самых интересных работ. Например, Линденштраусс получил медаль Филдса «за результаты по жесткости относительно мер в эргодической теории и за их применение в теории чисел», Смирнов — «за доказательство конформной инвариантности двумерной перколяции и модели Изинга в статистической физике», а Тяу — «за доказательство фундаментальной леммы в теории автоморфных форм новыми алгебро-геометрическими методами». Возможно, эти формулировки поразили вас не меньше, чем меня, когда я услышал их на конгрессе. На самом деле многим его участникам тоже было трудно понять все это даже после того, как они выслушали разъяснительные доклады. Британский математик Тимоти Гауэрс, лауреат Филдсовской премии за 1998 год, написал в своем блоге: «Если хотите произвести впечатление на друзей, постарайтесь сделать вид, что понимаете [работу Нго]. Если кто-то спросит вас, в чем основная идея его работы, вы можете ответить так: “Ну, самая глубокая его идея состояла в том, что расслоение анизотропной частицы Хитчина в формуле следа — это стек Делиня-Мамфорда”. Если это не произведет должного эффекта, тогда упомяните в разговоре об “искаженных пучках” — они здесь будут явно к месту» [2]. Передовые достижения в области математики настолько сложны в концептуальном плане, что во всем мире найдется не более нескольких сотен человек, способных понять, что именно сделал каждый из обладателей медали Филдса. Что касается работы Нго, математика, специализирующегося на самых абстрактных концепциях, таких людей еще меньше.

Однако краткое описание работы Виллани оказалось более доступным для понимания, чем остальные. Он был удостоен Филдсовской премии «за доказательство нелинейности затухания Ландау и сходимости к равновесию в уравнении Больцмана». Здесь, по крайней мере, было нечто понятное даже для неспециалиста в данной области. Уравнение Больцмана, которое австрийский физик Людвиг Больцман вывел в 1872 году, описывает поведение частиц газа и является одним из самых известных в классической физике. Как оказалось, Виллани — не только ценитель галстуков XIX столетия, но и поклонник ученого мирового уровня тех времен.

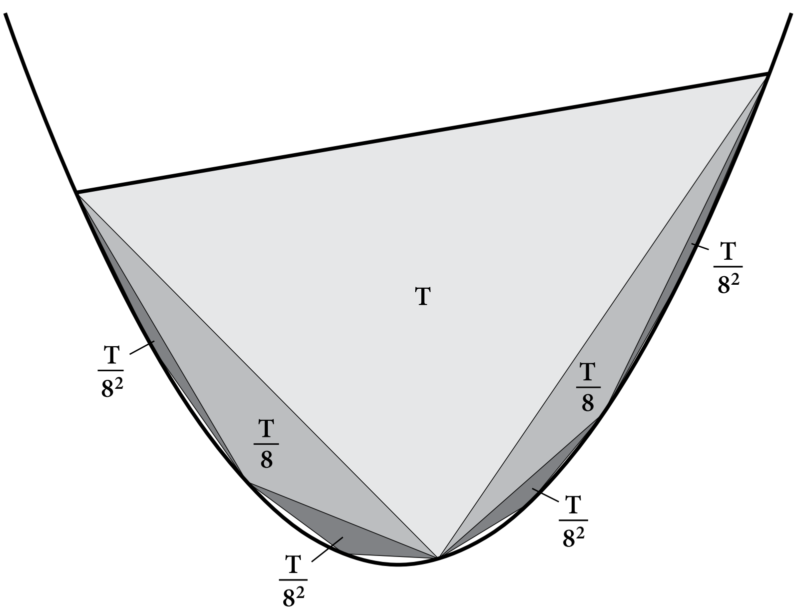
Уравнение Больцмана, известное под названием «дифференциальное уравнение с частными производными», выглядит так:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} \left| v - v_* \right| \left[f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*) \right] dv_* \, d\sigma$$

Если вы изучали исчисление в школе, вы увидите в этой формуле ряд знакомых символов, особенно таких, как вытянутый символ ∫ или изогнутый символ ∂. Если вы не изучали этот предмет, не волнуйтесь — немного позже я вам объясню, что значат все эти символы. Исчисление — это важнейшее интеллектуальное достижение эпохи Просвещения, и присуждение Филдсовской премии Седрику Виллани свидетельствует о том, что в данной области до сих пор осуществляются передовые математические исследования. Мы с вами еще вернемся к этому вычурно одетому французскому математику и его уравнению, но для того, чтобы вооружиться необходимыми концептуальными и терминологическими инструментами, нам понадобится сначала перенестись с юга Индии на Сицилию, примерно в III столетие до нашей эры.

На лицевой стороне медали Филдса находится портрет бородатого Архимеда, заслужившего репутацию самого выдающегося математика Античности. Однако Архимеда чаще всего вспоминают в связи с его вкладом в физику. Например, когда он выскочил из ванной с возгласом «Эврика!», это было не математическое открытие, а прорыв в области гидростатики, получивший название «закон выталкивающей силы», или «закон Архимеда». К числу наиболее известных изобретений Архимеда относится гигантский крюк, с помощью которого древние греки топили корабли римлян, пытавшихся захватить его родной город Сиракузы, а также винт, вращая который вручную можно было поднимать воду. Историк Плутарх писал, что сам Архимед считал сооружение машин «низменным и грубым» и был «околдован геометрией». Когда Архимед принимал ванну и его не одолевали мысли о физике, «он продолжал чертить геометрические фигуры на золе очага и даже на собственном теле, натертом маслом и благовониями, проводил пальцем какие-то линии, отдавшись во власть великого наслаждения, которое испытывал от изучения геометрии» [3].

Изначальная задача геометрии состояла в расчете площади. (Термин «геометрия», или «измерение земли», впервые использовал историк Геродот, описывая метод, который изобрели египетские сборщики налогов для расчета площади земель, затопленных ежегодными разливами Нила.) Как мы знаем, площадь прямоугольника равна произведению его ширины на высоту; исходя из этого, можно сделать вывод, что площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Древние греки нашли различные методы вычисления площади более сложных фигур. Среди них самым значительным достижением была «квадратура параболы» Архимеда, или метод вычисления площади фигуры, ограниченной параболой и прямой. Как показано на рисунке ниже, Архимед сначала нарисовал большой треугольник, вписанный в параболу, а затем на его сторонах построил новые треугольники [4]. На каждой из двух сторон треугольников меньшего размера он построил еще меньшие треугольники, и так далее, придерживаясь условия, что три вершины каждого треугольника должны находиться на параболе. Чем больше треугольников рисовал Архимед, тем сильнее их совокупная площадь приближалась к площади параболического сегмента. Если бы этот процесс продолжался и дальше, бесконечное количество треугольников полностью покрыло бы требуемую площадь.



Квадратура параболы

Далее Архимед доказал, что если площадь большого треугольника равна T, то площадь каждого из двух треугольников меньшего размера составляет $\frac{T}{8}$, а площадь каждого из четырех треугольников, построенных на их сторонах, равна $\frac{T}{8^2}$ и т. д. Другими словами, площадь параболического сектора, представляющая собой сумму всех треугольников, — это бесконечный ряд:

$$T + \frac{2T}{8} + \frac{4T}{8^2} + \frac{8T}{8^3} + \dots$$

или

$$T\,(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots)$$

или

$$T\,(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots)$$

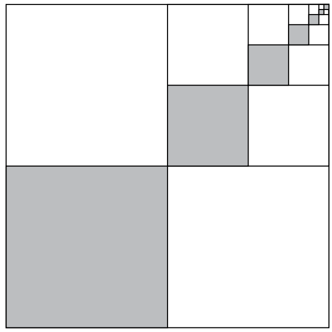
В заключение Архимед доказал, что сумма этого ряда равна $\frac{4T}{3}$. Следовательно, чтобы вычислить площадь между прямой и параболой, достаточно начертить треугольник, измерить длину его основания и высоту, рассчитать площадь и умножить полученный результат на $\frac{4}{3}$. Я не буду приводить здесь доказательство Архимеда, а вместо этого покажу рисунок, который содержит в себе это доказательство. Математические схемы такого типа называются доказательством без слов. Приведенный ниже рисунок — пожалуй, мой самый любимый в этой книге, и он гласит, что

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

Посмотрите на этот рисунок и попытайтесь понять почему. (А если не сможете, откройте Приложение 6.) Если это уравнение верно, тогда общая площадь равна:

$$T\,(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots) = T\,(1 + \frac{1}{3}) = \frac{4T}{3}$$

Что и требовалось доказать.

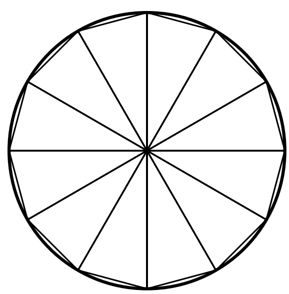


Квадратура параболы Архимеда — самый наглядный пример применения *метода последовательных исчерпываний*: суммирование последовательности площадей малых фигур, приближающихся к площади большой фигуры. Доказательство этого метода считается наиболее значительным достижением Архимеда, поскольку отображает первую «современную» трактовку математической бесконечности. За две сотни лет до Архимеда философ Зенон предостерегал против использования такого понятия, как бесконечность, в серии парадоксов. В самом знаменитом из них, «Ахиллес и черепаха», демонстрировалось, что сложение бесконечного количества величин приводит к абсурдному результату.

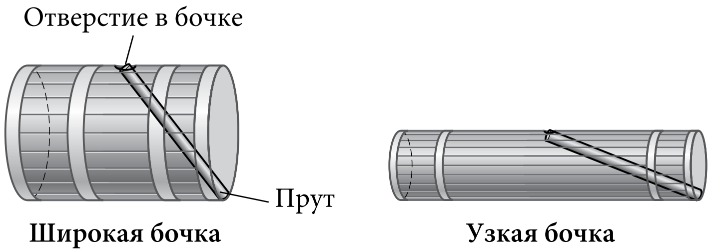
Представьте себе, говорил Зенон, что Ахиллес пытается догнать черепаху. Когда атлет достигнет того места, где она была, когда он начал свой бег, черепаха проползет немного дальше. Когда он доберется до второй позиции, черепаха снова продвинется дальше. Ахиллес может продолжать свой бег сколько угодно, но каждый раз, когда он будет достигать того места, где находилась черепаха, она уже будет немного впереди. Зенон утверждал, что если рассматривать движение как бесконечное количество рывков на протяжении бесконечного количества интервалов, то быстроногий Ахиллес никогда не догонит неповоротливую черепаху. Древние греки так и не смогли развязать логические узлы Зенона, поэтому математики всячески избегали концепции бесконечности в своей работе. Даже Архимед, использовавший метод последовательных исчерпываний, никогда не называл всеобъемлющую сущность именем «бесконечный ряд» так прямо, как это делаю я. Но различия касались исключительно терминологии, а не самой идеи. Архимед был первым мыслителем, создавшим аппарат для работы с бесконечным рядом, имеющим конечный предел. Это было важно не только для покорения площадей гораздо более сложных фигур, чем парабола, но и для начала концептуального пути к исчислению. Архимед стал первым из тех атлантов, на плечи которых обопрется в свое время Исаак Ньютон.

Если бесконечность — это самое большое число, тогда какое число самое маленькое? В XVII столетии математики ввели новую концепцию под названием «бесконечно малая величина» — величина, которая меньше любой другой действительной величины, но все же больше ноля.

Бесконечно малая величина была и чем-то, и ничем: достаточно большая для применения в математике, но и достаточно малая, чтобы исчезнуть, когда вам это необходимо. Рассмотрим в качестве иллюстрации окружность, изображенную на рисунке ниже. В нее вписан двенадцатиугольник — фигура с 12 сторонами, состоящая из 12 идентичных треугольников с общей вершиной, совокупная площадь которых примерно равна площади круга. Если я построю в этой окружности многоугольник с бóльшим числом сторон, содержащий большее количество более узких треугольников, их совокупная площадь еще сильнее приблизится к площади круга. Если я продолжу увеличивать количество сторон, в предельном случае я получу многоугольник с бесконечным количеством сторон, содержащих бесконечное количество бесконечно узких треугольников. Площадь каждого такого треугольника представляет собой бесконечно малую величину, но их совокупная площадь равна площади круга.



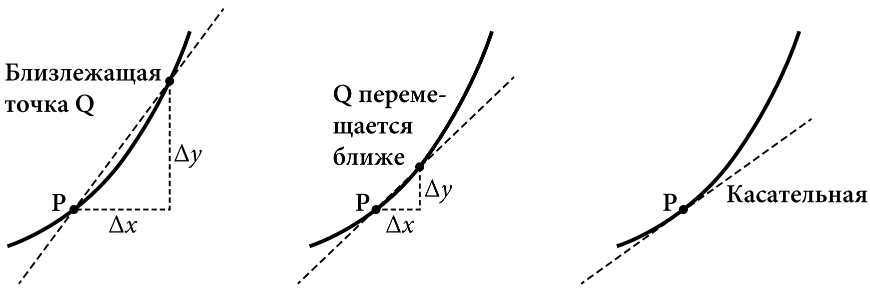
В предыдущих главах мы уже дважды встречались с немецким астрономом Иоганном Кеплером. Это именно он понял, что планеты движутся по эллиптическим орбитам, и это он побывал на одиннадцати свиданиях, прежде чем нашел вторую жену. Когда Кеплер сделал предложение будущей фрау К., оставался такой пустяк, как организация свадебной церемонии. Покупая вино, ученый увидел, что виноторговцы определяют объем полной бочки вина, вставляя в нее по диагонали прут через наливное отверстие, расположенное посредине боковой стороны бочки. Это был грубый, приближенный метод, и он совсем не понравился Кеплеру, поскольку прут одной и той же длины подходил для бочек разных размеров, как показано на рисунке ниже.



Измерение объема винных бочек

Кеплер начал размышлять над тем, как точнее вычислить объем бочки, для того чтобы определить, в бочке какой формы было бы больше всего вина при фиксированной длине прута [5]. Вдохновленный идеями Архимеда, Кеплер разработал метод, в соответствии с которым разделил каждую бочку на бесконечное количество бесконечно малых фигур, объем которых можно было рассчитать. Затем он доказал, что для прута длиной l, проходящего от наливного отверстия до дальнего угла бочки, бочка будет иметь максимальный объем, если ее ширина равна $\frac{2l}{\sqrt{3}}$. Кеплер оказался первым представителем целого поколения математиков, использовавших бесконечно малые величины в процессе вычисления площадей и объемов. Среди математиков разных стран, от Англии до Италии, начался бурный рост активности в этой области, что отображало самый значительный сдвиг в математической культуре со времен древних греков — ярых приверженцев концепций, имеющих логический смысл. Теперь же логическая строгость была отброшена, уступив место тому, что давало результаты. Бесконечно малые величины представляли собой нечто неопределенное, что существовало и не существовало одновременно. Но никто не собирался отказываться от них.

Бесконечно малые величины позволили разработать чрезвычайно эффективный метод определения касательной — линии, которая касается кривой в определенной точке, но не пересекает ее. Представьте, что нам необходимо найти касательную в точке P к кривой, изображенной на рисунке ниже. Стратегия построения касательной состоит в том, чтобы провести приближенную прямую в соответствующей точке, а затем улучшать приближение до тех пор, пока она не совпадет с искомой прямой. Мы можем сделать это, нарисовав линию, проходящую через точку P и пересекающую кривую в расположенной рядом точке Q, а затем смещать эту точку все ближе и ближе к точке P. Когда точка Q совпадет с точкой P, полученная линия будет касательной к данной кривой в точке P.



Аппроксимация касательной

Как мы уже знаем, градиент прямой линии — это отношение расстояния, покрытого прямой по вертикали, к расстоянию по горизонтали, а градиент кривой в определенной точке — это градиент касательной в этой точке. Касательные интересовали математиков только из-за градиентов. На представленном выше рисунке градиент линии, проходящей через точки P и Q, равен $\Delta y/\Delta x$. (Греческая буква Δ («дельта») — это математический символ, которым обозначаются малые приращения.) По мере приближения точки Q к точке P значение $\Delta y/\Delta x$ приближается к градиенту касательной в точке P. Но здесь возникает одна проблема. Если точка Q действительно совпадет с точкой P, тогда $\Delta y = 0$ и $\Delta x = 0$, а это значит, что градиент кривой в точке P равен 0/0. Но ведь это некорректная математическая операция! Арифметические правила запрещают деление на ноль! Проблему можно решить, удерживая точку Q на бесконечно малом расстоянии от точки P. Сделав это, мы сможем сказать, что, когда точка Q приближается к точке P на *бесконечно малое* расстояние, значение $\Delta y/\Delta x$ становится *бесконечно близким* к градиенту кривой в точке P.

В 1665 году Исаак Ньютон, недавно окончивший Кембридж, вернулся в дом своей матери в Линкольншире [6]. «Черная смерть» уничтожала город за городом по всей Британии. Университет закрыли, чтобы защитить его персонал и студентов. В доме матери Ньютон устроил себе небольшой кабинет и начал записывать свои математические идеи в огромный дневник, который назвал «черновиком». На протяжении следующих двух лет Ньютон вел образ жизни отшельника и, ни на что не отвлекаясь, вывел новые теоремы, которые легли в основу Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* — опубликованного в 1687 году трактата, изменившего наше понимание физической Вселенной в большей степени, чем любая другая работа до или после этой книги. В ней Ньютон описал систему законов природы, объясняющую, почему различные объекты, от падающих с дерева яблок до планет, вращающихся вокруг Солнца, двигаются именно так, а не иначе. Однако открытия, сделанные Ньютоном в физике, требовали столь же фундаментального прорыва в математике. Он формализовал работу по бесконечно малым величинам, выполненную за предыдущие полстолетия, объединив ее результаты в общую систему с унифицированными обозначениями. Ньютон назвал ее *методом флюксий*, но она получила известность под названием «исчисление бесконечно малых величин», а сейчас ее часто называют просто исчислением.

Движущееся тело меняет свое положение в пространстве, а его скорость представляет собой изменение этого положения во времени [7]. Если тело перемещается с фиксированной скоростью, оно меняет свое положение на фиксированную величину за каждый промежуток времени. Движущийся с постоянной скоростью автомобиль, покрывающий 60 миль с 16 до 17 часов, движется со скоростью 60 миль в час. Ньютон хотел решить другую задачу: как вычислить скорость тела, перемещающегося не с постоянной скоростью? Предположим, тот же автомобиль движется не с постоянной скоростью 60 миль в час, а то ускоряет, то замедляет движение из-за транспортного потока. Один из методов расчета скорости этого автомобиля, например в 16:30, сводится к измерению отрезка пути, который он проедет с 16:30 до 16:31, что позволит определить расстояние, пройденное за минуту. (Для того чтобы получить скорость в милях в час, нам останется просто умножить это расстояние на 60.) Однако это значение представляет собой среднюю скорость за эту минуту, а не мгновенное значение скорости в 16:30. Мы можем взять еще более короткий промежуток, скажем путь, который проедет автомобиль с 16:30 до 16:30 и одна секунда, что даст нам расстояние за секунду. (Для того чтобы получить скорость в милях в час, необходимо умножить это расстояние на 3600.) Но это тоже всего лишь средняя скорость в данную секунду. Мы можем и дальше сокращать промежутки, но так и не получим

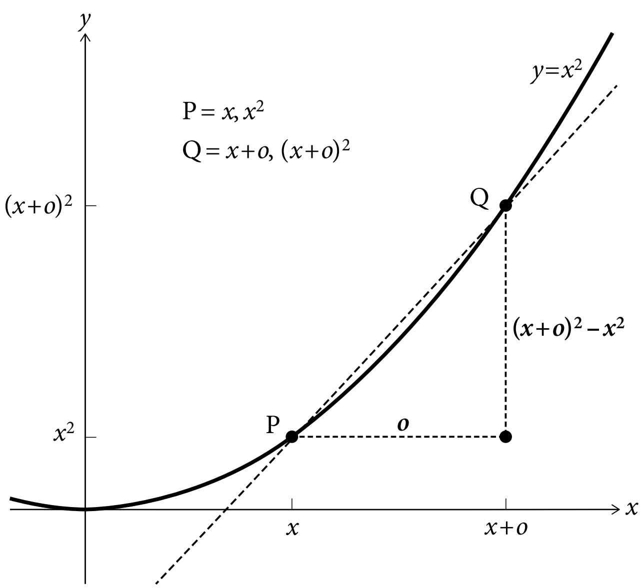
---

* *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. М. : ЛКИ, 2014.

мгновенное значение скорости до тех пор, пока этот промежуток не окажется меньше любого другого — другими словами, пока он не станем равным нулю. Но если промежуток равен нулю, автомобиль не движется!

Эта цепочка рассуждений должна показаться вам знакомой, поскольку я уже использовал ее выше, когда объяснял, как вычислить градиент точки на кривой. Для того чтобы определить градиент, мы делим бесконечно малую величину (длину) на другую бесконечно малую величину (еще одну длину). Для того чтобы вычислить мгновенное значение скорости, мы также должны разделить бесконечно малую величину (расстояние) на другую бесконечно малую величину (время). С математической точки зрения эти две задачи идентичны. Метод флюксий Ньютона был методом вычисления градиентов, который позволил рассчитывать мгновенное значение скорости движущихся объектов.

Посмотрим, как Ньютон применил этот метод для вычисления градиента кривой $y = x^2$ — давно знакомой нам параболы. Изложенные ниже объяснения носят специальный характер, но, если вы будете читать медленно, вам не трудно будет их понять. К концу вы увидите, как Ньютон использовал бесконечно малые величины для выведения формулы градиента каждой точки на этой прямой.



Вычисление градиента кривой $y = x^2$

Для начала выполним те же действия, что и немного выше, в процессе построения касательной: возьмем произвольную точку P, построим в ней приближенную касательную, которая проходит через другую точку Q, расположенную недалеко от P вдоль кривой. Затем приблизим точку Q на бесконечно малое расстояние от P. Градиент касательной в точке P — и есть градиент кривой в этой точке. Давайте введем новый символ o и обозначим им расстояние по горизонтали между точками P и Q, как показано на рисунке выше. Если координаты точки P — (x, x^2), то координаты точки Q — $(x + o, (x + o)^2)$. Следовательно, вертикальное расстояние между точками P и Q составляет $(x + o)^2 - x^2$, стало быть, градиент прямой равен отношению расстояния по вертикали к расстоянию, покрытому по горизонтали:

$$\frac{(x + o)^2 - x^2}{o}$$

В этом выражении можно раскрыть скобки:

$$\frac{x^2 + 2xo + o^2 - x^2}{o}$$

И свести к такому уравнению:

$$\frac{2xo + o^2}{o}$$

Что равно:

$$2x + o$$

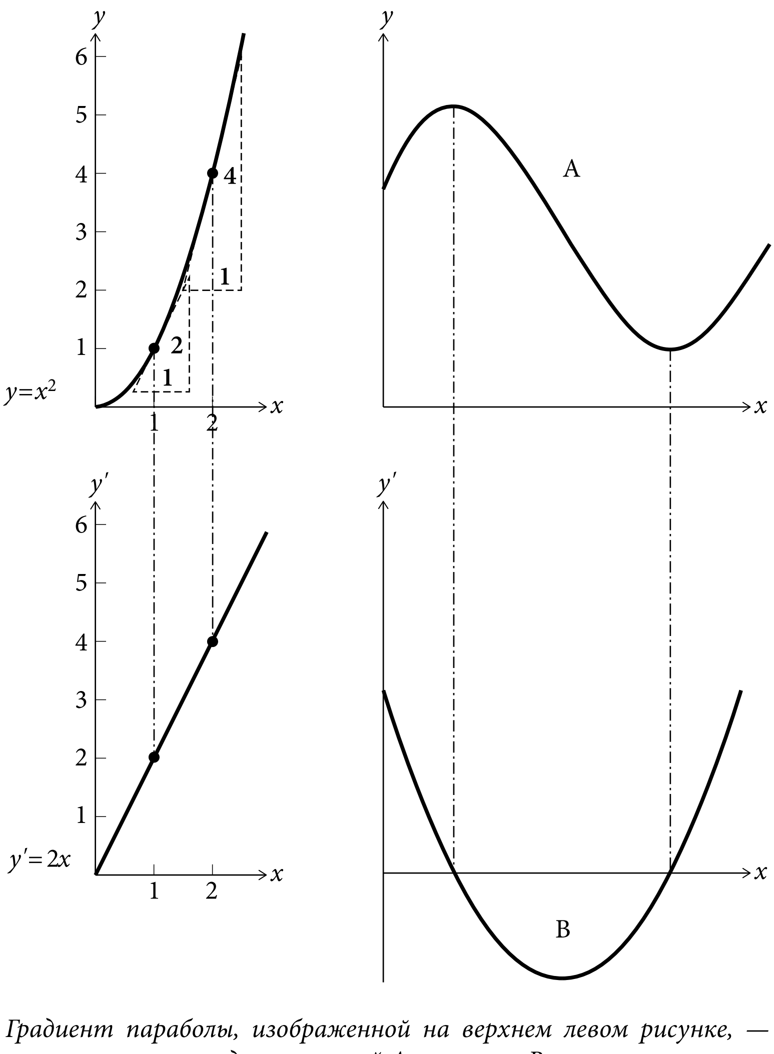
Когда точка Q приближается к точке P на бесконечно малое расстояние, значение o становится бесконечно малым, а значит, градиент — бесконечно близким к $2x$. Ньютон утверждал, что мы можем позволить точке Q совпасть с точкой P и что, когда это действительно произойдет, мы можем отбросить бесконечно малое значение o и с уверенностью заявить, что градиент в точке P равен $2x$. Как только бесконечно малая величина выполнит свою работу, она может уйти со сцены.

Другими словами, градиент кривой $y = x^2$ в точке с координатой x на горизонтали равен $2x$.

Если вся эта алгебра показалась вам слишком сложной, вы все равно можете оценить значимость достижений Ньютона. Он выделил самое важное свойство кривой (ее градиент) и вывел формулу $2x$, позволяющую вычислять градиент в любой точке кривой. Обозначив градиент символом y', мы можем записать новое уравнение: $y' = 2x$, которое еще известно как производная исходной кривой.

Верхний левый график на представленном ниже рисунке — это кривая $y = x^2$, а непосредственно под ним — ее градиент, $y' = 2x$, являющийся прямой линией. Когда x равен 1, кривая имеет значение 1, а градиент равен 2. Когда x равен 2, кривая имеет значение 4 и градиент равен 4. Эта кривая повышается в форме параболы, а градиент — в форме прямой линии. А теперь забудьте о геометрии и подумайте о математике. Оба графика описывают поведение движущегося объекта. Если исходная кривая отображает положение объекта во времени, то производная — мгновенное значение скорости. Эти графики показывают, что за 1 единицу времени объект проходит 1 единицу расстояния, а его скорость — 2. За 2 единицы времени объект проходит 4 единицы расстояния, а его скорость равна 4 и т. д. По сути, верхняя кривая моделирует позицию объекта в момент его падения под воздействием силы тяжести: пройденное расстояние пропорционально квадрату истекшего времени. Воспользовавшись методом исчисления, Ньютон показал, что мгновенное значение скорости падающего объекта увеличивается по линейному закону.

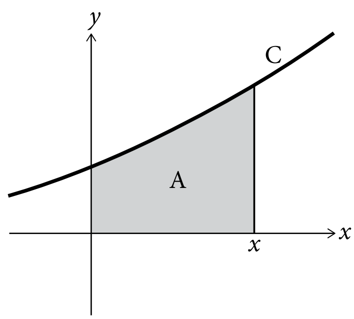
Я выбрал кривую $y = x^2$, потому что ее производная вычисляется достаточно просто, но метод Ньютона применим ко всем гладким кривым при условии наличия уравнения, описывающего соответствующую кривую. На верхнем рисунке справа показана еще одна кривая, а ниже — кривая ее градиента, или производной. Но здесь я опустил уравнения этих кривых и просто назвал их A и B — мне хотелось бы, чтобы вы прочувствовали всю красоту данной трансформации. Градиент кривой A в каждой ее точке изображен на нижнем графике в виде кривой B. Давайте совершим путешествие по кривой A слева направо. Эта кривая повышается, достигает вершины, опускается, доходит до нижней точки, а затем снова поднимается. Другими словами, градиент имеет положительное значение, достигает нуля в тот момент, когда кривая на мгновение становится горизонтальной, затем принимает отрицательное значение, повышается до нуля и снова становится положительным. Но ведь именно это и происходит с кривой B! Сначала она проходит в области положительных значений, затем пересекает горизонтальную ось, переходит в область отрицательных значений, а потом снова врывается в положительную плоскость. (Пунктирные вертикальные линии показывают соответствие между важными точками верхней кривой и нулевыми значениями градиента.) Когда я впервые увидел такую кривую вместе с кривой градиента, я был поражен. Мне казалось настоящим волшебством то, что изменение величины, заданное одной кривой, идеально отображается другой кривой.



Градиент параболы, изображенной на верхнем левом рисунке, — прямая линия, а градиент кривой A — кривая B

Концепция бесконечно малых величин позволила разработать метод определения градиентов, а также найти способ вычисления площадей. Мы уже видели, как Архимед рассчитывал площадь, ограниченную параболой и прямой, суммируя площадь треугольников все меньшего размера, а также как математики эпохи Возрождения усовершенствовали эту методику, разделив площадь на бесконечно малые сегменты. Метод флюксий Ньютона делает возможным определение площади под кривой посредством разделения этой площади на бесконечное количество бесконечно малых вертикальных полос.

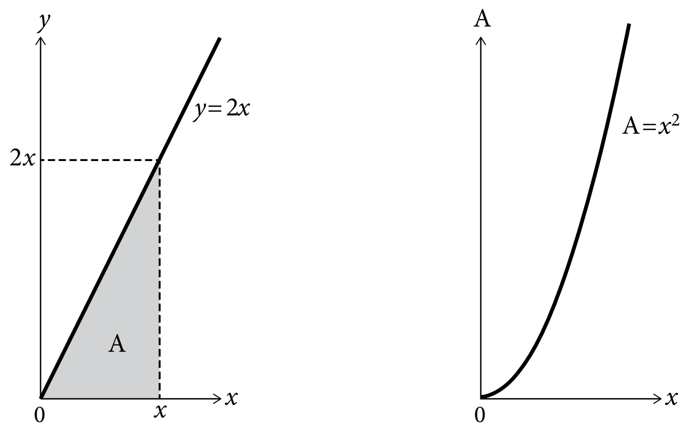
Например, зная уравнение кривой C, изображенной на рисунке ниже, с помощью исчисления мы можем вывести уравнение заштрихованной области A между началом координат и точкой *x* на горизонтальной оси.



Следовательно, при наличии той или иной кривой исчисление предоставляет нам две возможности: вывести уравнение ее градиента или уравнение площади под ней. Но вот что интересно: эти две процедуры носят взаимно обратный характер! Градиент и площадь — это, по сути, одно и то же явление, рассматриваемое под разными углами. Такой поворот сюжета достоин мультсериала «Скуби-Ду»: в последнем акте этой математической драмы оказывается, что два разных персонажа на самом деле представляют собой один и тот же объект. Этот результат, получивший название «основная теорема исчисления», стал одним из самых неожиданных открытий XVII столетия.

Если не вдаваться в детали, эта теорема гласит, что если площадь под кривой C равна A, то градиент кривой A равен C. Чтобы было понятнее, вспомните о том, что кривые, площади и градиенты записываются в виде уравнений. C — это кривая, которая также имеет свое уравнение. С помощью исчисления мы можем вывести уравнение A для площади, лежащей под этой кривой. Основная теорема исчисления гласит, что производная (или градиент) уравнения A равна C.

Давайте посмотрим, как это работает, когда C — это прямая $y = 2x$, представленная на рисунке ниже. Площадь треугольника равна произведению половины основания на высоту. (Мы могли бы вывести эту формулу с помощью бесконечно малых величин, но нам не нужно этого делать, поскольку она уже известна.) Следовательно, площадь A под линией от 0 до x равна $x/2 \times 2x$, или x^2, что дает уравнение площади под линией $A = x^2$. Но это же уравнение описывает и кривую на рисунке справа — параболу. Вспомните размещенный немного выше график, на котором показано, как определение градиента кривой дает возможность перейти от кривой к прямой линии. На рисунках ниже показано, как вычисление площади под кривой позволяет перейти от прямой к параболе. Следовательно, градиент и площадь — это две стороны одной медали.



Вычисление площади под прямой y = 2x и ее отображение в виде кривой

Исчисление позволяло Ньютону взять уравнение, определяющее положение объекта, и вывести из него другое уравнение, описывающее мгновенное значение скорости этого объекта. Кроме того, благодаря исчислению он мог взять уравнение мгновенного значения скорости объекта и вывести из него другое уравнение, описывающее его положение. Исчисление предоставляло в распоряжение Ньютона те математические инструменты, с помощью которых он разработал законы динамики. Ньютон называл переменные своих уравнений флюентами, а градиенты — флюксиями и обозначал их буквами $\dot{x}$ и $\dot{y}$ с точками сверху.

Когда после двух лет пребывания в Линкольншире Ньютон вернулся в Кембридж, он никому не рассказал о методе флюксий, о чем впоследствии очень сожалел. На континенте над созданием аналогичной системы работал Готфрид Лейбниц, немец по рождению, являющийся человеком вне границ — юристом, дипломатом, алхимиком, инженером и философом. Кроме того, еще и математиком, который придавал большое значение системе обозначений. Символы, введенные им для своей системы, были более понятны, чем символы Ньютона, — именно их мы и используем до сих пор.

Лейбниц ввел обозначения *dx* и *dy* для бесконечно малой разности между значениями *x* и *y*. Градиент, который представляет собой отношение одной бесконечно малой разности к другой, он записывал как *dx/dy*. Поскольку Лейбниц употреблял слово difference («разность»), вычисление градиента было обозначено термином «дифференцирование». Кроме того, Лейбниц ввел напоминающий вытянутую букву s символ ∫ для обозначения расчета площади. S — это сокращение от слова *summa* («сумма»), поскольку, как мы уже видели, площадь рассчитывается как сумма бесконечно большого количества бесконечно малых величин. По рекомендации своего друга Иоганна Бернулли Лейбниц назвал этот метод *calculus integralis* — интегральное исчисление, а расчет площади стал известен как интегрирование. Преимущество такого длинного (и поддающегося расширению) символа состоит в том, что рядом с ним можно указать значения на горизонтальной оси, ограничивающие рассчитываемую площадь. В таком случае площадь A, показанная на рисунке с кривой C, записывается так:

$$\int_0^x C,$$

что читается как «интеграл по C от 0 до *x*». Введенный Лейбницем символ ∫ — самый величественный символ в математике, напоминающий форму резонаторного отверстия в виолончели или скрипке.

Более двух десятилетий Лейбниц и Ньютон вели уважительную дружескую переписку по поводу бесконечно малых величин [8]. Когда Лейбниц первым опубликовал детали своей системы исчисления, все предположили, что он изобрел ее самостоятельно. Но в 1699 году, через несколько лет после того, как Ньютон обнародовал свой метод флюксий, молодой швейцарский математик, живший в Англии, обвинил Лейбница в краже идей Ньютона. Через пять лет появилась реакция на это заявление: в журнале Acta Eruditorum вышла статья (по всей вероятности, написанная Лейбницем) с предположением о том, что это Ньютон совершил плагиат. Такие перепалки между британским и континентальным научным сообществом становились все ожесточеннее, и эта вражда заполнила все последующие годы жизни Лейбница и Ньютона. Споры по поводу приоритета были в то время далеко не редкостью, но ни в один из них не были вовлечены ученые такого масштаба, и ни один не стал столь гневным и продолжительным. Эта вражда не закончилась даже после их смерти. Великобритания, где из чувства национальной гордости использовали флюксии Ньютона вместо дифференциалов, оказалась изолированной от европейских научных достижений на протяжении лучшей части столетия. Только когда англичане приняли систему обозначений Лейбница и перешли, как писал Огастес де Морган, «от эпохи флюксий с точечными обозначениями к эпохе исчисления с его деизмами», Британия восстановила свой статус в математике [9].

В 1891 году немецкая компания Bahlsen начала выпускать прямоугольное масляное печенье с зубчатыми краями под названием Leibniz — по имени самого известного выходца из Ганновера. По случайному совпадению в тот же год один булочник из Филадельфии сделал свое первое пирожное Fig Newton — рулет с инжирным кремом, названный в честь города Ньютона в штате Массачусетс. Так что в наши дни спор «Ньютон против Лейбница» протекает разве что во время чаепития.

Как мы уже знаем, исчисление состоит из двух процедур: дифференцирование (вычисление градиента) и интегрирование (вычисление площади). Если говорить в общих чертах, то градиент — это скорость изменения одной переменной величины по отношению к другой, а площадь — мера того, в каком количестве накапливается одна переменная величина в зависимости от другой. Таким образом, исчисление предоставляет ученым возможность моделировать поведение величин, меняющихся в зависимости друг от друга. Этот удивительный инструмент позволяет объяснить физический мир, поскольку во Вселенной все, от крохотных атомов до самых больших галактик, находится в постоянном движении.

Зная зависимость между двумя переменными величинами, мы можем описать их с помощью уравнения, воспользовавшись символами для обозначения дифференцирования и интегрирования. Уравнение с переменными x и y, в котором присутствует выражение dx/dy, называется простейшим дифференциальным уравнением. Если в уравнении присутствует больше двух переменных, скажем *x*, *y* и *t*, скорость изменения записывается как $\partial x/\partial y$ или $\partial x/\partial t$. Это уравнение называется дифференциальным уравнением с частными производными, поскольку такие его члены, как $\partial x/\partial y$, говорят нам о том, как одна переменная меняется в зависимости от другой, но не от всех переменных. Дифференциальные уравнения с частными производными наиболее распространены в прикладной математике, поскольку позволяют ученым делать прогнозы. Зная, как две величины меняются с течением времени, мы можем предсказать их состояние в любой момент в будущем. Уравнения Максвелла, объясняющие поведение магнитных и электрических полей; уравнение Шредингера, лежащее в основе квантовой механики; уравнения поля Эйнштейна, представляющие собой основу Общей теории относительности, — все это дифференциальные уравнения с частными производными.

Первое уравнение такого типа описывало поведение скрипичной струны в момент ее поперечного колебания — задача, которая десятилетиями не давала ученым покоя. Это уравнение открыл в 1746 году Жан Лерон Д'Аламбер, известный математик своего времени. Д'Аламбера, появившегося на свет в результате непродолжительной связи артиллерийского генерала с бывшей монахиней, сразу же после рождения подбросили на ступеньки расположенной рядом с собором Парижской Богоматери Круглой церкви святого Иоанна в Париже (Saint Jean Le Rond), в честь которой ему и дали имя Жан Лерон. Воспитанный в семье стекольщика, Д'Аламбер смог наперекор всему стать постоянным секретарем Французской академии. Он был не только серьезным математиком, но и ярым защитником ценностей эпохи Просвещения, кроме того, общественным деятелем, желанным гостем аристократических салонов и одним из редакторов «Энциклопедии», для которой написал вступление и более тысячи статей.

Д'Аламбер был прообразом французского ученого-интеллектуала, роль которого в наше время с удовольствием играет Седрик Виллани.

Во второй раз я встретился с Виллани в Париже. С 2009 года он возглавляет Институт Анри Пуанкаре — элитный французский математический институт, расположенный среди университетских зданий в Латинском квартале Парижа. В кабинете ученого царит уютный беспорядок из книг, бумаг, кофейных чашек, наград, головоломок и геометрических фигур. Внешность

Виллани совсем не изменилась со времени нашей первой встречи на Международном конгрессе математиков два года тому назад: бордовый галстук, синий костюм-тройка и металлический паук, сверкающий на отвороте пиджака. Седрик сказал, что этот образ сформировался еще тогда, когда ему было двадцать с лишним лет. Сначала он носил рубашки с широкими рукавами, затем с кружевами, после чего пришел черед цилиндра… «Это был своего рода научный эксперимент, в ходе которого постепенно возникло ощущение “это и есть я”». А что насчет паука? Виллани нравится его неоднозначность. «Одни считают, что паук — это материнский символ. По мнению других, паутина — это символ Вселенной, или паук — великий архитектор мироздания, своего рода способ персонифицировать Бога. Пауки не оставляют людей безразличными. Реакция наступает мгновенно». «Паук — это архетип, имеющий множество разных интерпретаций, — подумал я, — подобно тому как математика — абстрактный язык, имеющий множество областей применения».

Дифференциальные уравнения с частными производными — и есть область научных интересов Виллани. Он утверждает, что, хотя этим уравнениям уже почти триста лет, их «по-прежнему понимают достаточно плохо. Создается впечатление, что за каждым уравнением с частными производными стоит своя теория. Существует множество подразделов таких уравнений при совсем небольшой общей базе и полном отсутствии общей классификации. Многие пытались их классифицировать, но даже лучшие специалисты потерпели неудачу». Дифференциальное уравнение с частными производными, которому Виллани посвящает бóльшую часть своего времени, — это уравнение Больцмана, ставшее темой его докторской диссертации, а впоследствии — частью той работы, за которую он получил Филдсовскую премию. Виллани и сейчас относится к этому уравнению с любовью и нежностью. «Это как первая любовь, — признаётся он. — Это первое уравнение, на которое смотришь и думаешь, что оно самое прекрасное в мире». Полюбуйтесь им еще раз:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{S}^2} |v-v_*| \left[f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*)\right] dv_*\, d\sigma$$

Уравнение Больцмана относится к области статистической механики — раздела математической физики, изучающего зависимость между микроскопическим поведением отдельных молекул и макроскопическими свойствами, такими как температура и давление. Это уравнение описывает, как рассеивается облако газа, посредством анализа вероятности нахождения его молекул в определенной точке, при определенной скорости и в определенное время [10]. Данная модель исходит из предположения о том, что частицы газа движутся по законам Ньютона, но в случайных направлениях, и описывает последствия их столкновений посредством теории вероятностей. Виллани показал на левую часть уравнения: «Это частицы, двигающиеся по прямой». Затем на правую часть: «А здесь описаны их столкновения. Бац! Бац!» Он несколько раз стукнул кулаками друг о друга. «В уравнениях такого типа часто бывают напряженные отношения между их разными членами. Уравнение Больцмана — идеальный случай для изучения, поскольку разные его члены описывают разные феномены и обитают в совершенно разных математических мирах».

Если бы вы сняли на видео, как одна частица газа отталкивается от другой, и показали его кому-то из своих друзей, он не смог бы определить, в прямом или обратном порядке вы прокручиваете отснятый материал, так как законы Ньютона обратимы во времени. Но если вы снимете газ, распространяющийся из лабораторного стакана в окружающую среду, зритель сразу же сможет сказать, в каком направлении проигрывается видео, поскольку газ не способен снова втянуться в стакан. Больцман нашел математическое обоснование кажущегося противоречия между макро- и микроскопическим поведением частиц газа посредством введения новой концепции — концепции энтропии. Энтропия — это мера хаоса, в более формальном смысле — количество вероятных позиций и скоростей частиц в любой момент времени. Больцман доказал, что энтропия всегда увеличивается. Виллани открыл, с какой скоростью она увеличивается, прежде чем достичь совершенно неупорядоченного состояния.

Уравнение Больцмана имеет ряд достаточно простых областей применения, таких как самолетостроение, где оно помогает определить, что происходит с самолетами, когда они пролетают сквозь скопления газов. Именно практическая полезность уравнения Больцмана заинтересовала Виллани, когда он приступил к написанию докторской диссертации. Но по мере углубления в изучение уравнения Больцмана его красота все больше пленяла Виллани. Он сравнивает уравнение со скульптурой Микеланджело: «Небезупречное, утонченное и элегантное, но очень человечное, многое испытавшее, пронизанное силой энергии мироздания. В этом уравнении можно услышать рев частиц, наполненных яростью». Виллани добавил, что предпочитает потратить годы на анализ хорошо известных уравнений, пытаясь найти в них нечто новое, чем изобретать новые концепции. «Именно это мне нравится, и именно это — одна из составляющих общей позиции, которая гласит: "Послушайте! Физика высоких энергий, бозон Хиггса, теория струн или что-то в этом роде — все это очень увлекательно, но не забывайте, что мы до сих пор не до конца понимаем ньютоновскую механику". Остается еще много, очень много нерешенных задач». Он показал мне дифференциальное уравнение с частными производными в какой-то книге. «У этого уравнения есть гладкие решения? Никто, черт возьми, не знает этого!» Он пожал плечами и нахмурил лоб.

На стене позади Виллани висит портрет его любимой певицы Катрин Рибейро, исполняющей песни в стиле «прогрессивный рок», — руки вытянуты в стороны, кулаки сжаты. На столе стоит бюст французского математика Анри Пуанкаре, бородатого и мрачного. «Именно в этом состоит принцип двойственности, приводящий все в движение, заставляет думать», — объясняет Виллани. У Пуанкаре, который жил на рубеже XIX и XX веков, была репутация последнего математика, в совершенстве владеющего всеми разделами своей дисциплины, — это одна из причин того, почему в его честь назван институт, возглавляемый Виллани. В наше время, по утверждению ученого, один человек способен понять лишь треть областей математики, да и то в самом общем смысле. В совершенстве никто не может овладеть более чем пятью процентами знаний о математике. По мере расширения сферы, которую охватывает эта наука, башни ее знаний становятся все выше и шире, а это значит, что каждый математик должен выбрать область специализации как можно раньше. В итоге математика становится дисциплиной, где чрезвычайно большую роль играет сотрудничество. Стереотипное представление о математиках как об эксцентричных отшельниках больше не соответствует действительности, если когда-либо вообще так было на самом деле. «Математика часто оказывается на стыке разных областей, а в этом случае лучше брать двух специалистов, по одному с каждой стороны». Виллани убежден, что сейчас в математике наступил период активного перекрестного обогащения. «Сначала у вас есть одна область, затем она делится на две, каждая из них проходит процесс специализации, после чего вы получаете ряд различных подобластей и т. д. Затем они снова пересекаются. Когда происходит такое скрещивание после специализации, это очень интересно. Мы живем во времена, когда разные области математики объединяются между собой, а также пересекаются с другими научными областями, причем сейчас этот процесс проходит гораздо эффективнее, чем в прошлом».

Анри Пуанкаре чаще всего вспоминают в связи со сформулированной им в 1904 году и известной под названием «гипотеза Пуанкаре» гипотезой о топологических свойствах сферы. (Она слишком сложна для того, чтобы объяснить ее на доступном для понимания языке одним или даже несколькими предложениями.) Почти целое столетие эта гипотеза была одной из самых знаменитых нерешенных задач в математике, и только в 2002 году 36-летний россиянин разместил ее доказательство в одном из интернет-архивов. К тому времени, когда другие математики проверили правильность его расчетов, Григорий Перельман прекратил заниматься математикой. Он стал затворником, жил с матерью в квартире на окраине Петербурга — и вернул к жизни стереотип эксцентричного отшельника. В 2006 году все математическое сообщество было потрясено отказом Перельмана от Филдсовской премии под предлогом, что он не нуждается ни в каком признании, кроме одного: чтобы люди поняли, что его доказательство правильно. Этот поступок повлек за собой самую горячую полемику за все время, прошедшее с момента учреждения премии в 1936 году. В 2010 году Математический институт Клэя присудил Перельману премию в размере 1 миллион долларов за доказательство гипотезы Пуанкаре, но он отказался и от нее. Невостребованная награда Перельмана, стеклянная табличка на каменной основе, стоит сейчас на полке в кабинете Виллани, а призовые деньги направлены на финансирование новой кафедры в Институте Анри Пуанкаре.

«Перельман — настоящая загадка», — сказал Виллани. Я спросил, читал ли он доказательство Перельмана. «Приложив немного усилий, я смог в нем разобраться. Это не так уж далеко от моей области, — ответил Виллани. — Многие считают, что, если в математике есть доказательство, мы должны быть готовы сразу же определить его правильность или ошибочность. Но это совсем не так». По словам Виллани, для того чтобы понять ход мыслей Перельмана, требуется много времени.

Перельман — один из шести россиян — лауреатов Филдсовской премии начиная с 1994 года. За этот период в России было больше ее обладателей, чем в любой другой стране. Франция занимает второе место — у нее пять обладателей премии. Однако если включить в этот список бельгийца, который работал во Франции, а также вьетнамца и русского, имеющих французское гражданство, то Франция выйдет в лидеры по количеству математиков, получивших Филдсовскую премию, — 8 из 18. Кроме того, все французские обладатели премии работают в Париже. В этом городе больше профессиональных математиков, чем в любом другом. «Около тысячи [математиков] живут здесь, — сказал Виллани. — Потрясающая цифра!» Одна из причин того, почему во Франции столько лауреатов премии, — первоклассная система образования: все эти математики, кроме одного, учились в престижнейшем учебном заведении — Высшей нормальной школе, в которой на курс математики принимают всего 41 или 42 студентов в год. Однако история также играет в этом свою роль. Великая (или последняя) теорема Ферма, декартова система координат, треугольник Паскаля, преобразования Фурье — вся история математики испещрена именами французов, являющихся предметом национальной гордости Франции. Но ни один из обладателей Филдсовской премии не стал в своей стране такой публичной фигурой, как Седрик Виллани во Франции.

Недавно Виллани вступил в дискуссию с несколькими физиками по поводу Николя Карно (1796–1832), который первым сформулировал теоретические основы работы паровой машины. «У Карно ни на секунду не возникало желания построить такую машину. Ему не было до этого дела! — воскликнул Виллани. — Да, он был французом! Англичане стремятся *построить* машину, а французы хотят *понять* ее на теоретическом уровне. И так было всегда!» Так будет и впредь. Да здравствуют различия!

Интегрирование — это раздел исчисления, связанный с расчетом площади, поэтому, когда в 1876 году шотландский инженер Джеймс Томас изобрел устройство для ее измерения, он назвал его «интегратором». Это устройство было усовершенствованной версией планиметра — научного инструмента XIX столетия, которым чаще всего пользовались геодезисты для вычисления площадей фрагментов карты, имеющих неправильную форму. Планиметр состоял из механизма с колесом и диском, закрепленного на рычаге таким образом, чтобы после перемещения иглы по периметру измеряемой области механизм давал точное значение ее площади.

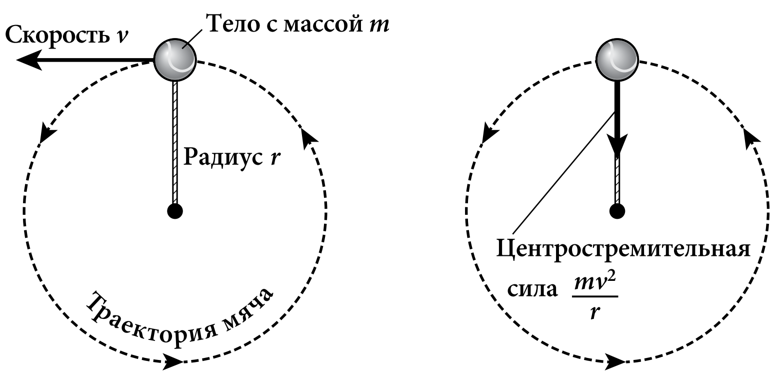
Томпсон показал схему интегратора младшему брату Уильяму, впоследствии ставшему лордом Кельвином, и тот сразу же разглядел потенциал устройства в плане механизации вычислений. Поскольку интегрирование — одна из составляющих дифференциального уравнения, Кельвин понял, что интеграторы можно использовать и в качестве одного из элементов устройства для решения дифференциальных уравнений. Кельвин стразу же применил интеграторы в своем «гармоническом анализаторе приливов» — изобретенном им аппарате для расчета времени наступления приливов.

В 1927 году на основании идей Кельвина по применению ряда интеграторов для решения дифференциальных уравнений Вэнивар Буш из Массачусетского технологического института сконструировал так называемый дифференциальный анализатор — вычислительный прибор, предназначенный исключительно для решения дифференциальных уравнений. Это огромное устройство весом 100 тонн состояло из восьми механических интеграторов, установленных на платформе величиной с комнату, и стало первым, способным делать сложные математические расчеты, опередив первые цифровые электронные компьютеры на целое десятилетие.

Дифференциальный анализатор представлял собой аналоговое вычислительное устройство, поскольку его механические составляющие были функционально подобны взаимодействиям в той физической системе, которую он моделировал. Устройство Буша служило основой многих аналоговых компьютеров вплоть до 70-х годов XX столетия, когда в результате наступления цифровой эры и аналоговые вычислительные устройства, и логарифмические линейки вышли из употребления.

Мы с вами уже знаем, что исчисление было рабочим инструментом Ньютона при открытии законов движения и всемирного тяготения. Математические нововведения позволили ему создать логически связную совокупность формул, описывающих зависимость между силами, действующими на объект, и его положением, скоростью и ускорением. В книге «Математические начала натуральной философии» Ньютон ввел новую концепцию — центростремительной силы, «под действием которой тела притягиваются, или продвигаются, или любым другим способом стремятся к определенной точке как к центру». Именно эта сила заставляет тела двигаться по кругу. Представьте себе теннисный мяч, привязанный к шнуру. Возьмите конец шнура в руку, поднимите над головой и начинайте вращать мяч так, чтобы он описывал в воздухе круги. Шнур тянет мяч к центру под действием центростремительной силы.

Центростремительная сила рассчитывается по формуле $\frac{mv^2}{r}$, где m — это масса тела, v — его скорость, r — радиус окружности (см. рисунок ниже). В каждый момент времени скорость мяча перпендикулярна шнуру, а центростремительная сила воздействует на шнур, притягивая его к центру. В «Началах» Ньютон уделял особое внимание центростремительным силам, воздействующим на планеты. Однако в XVIII веке эта сила вызывала большую обеспокоенность у транспортных инженеров.

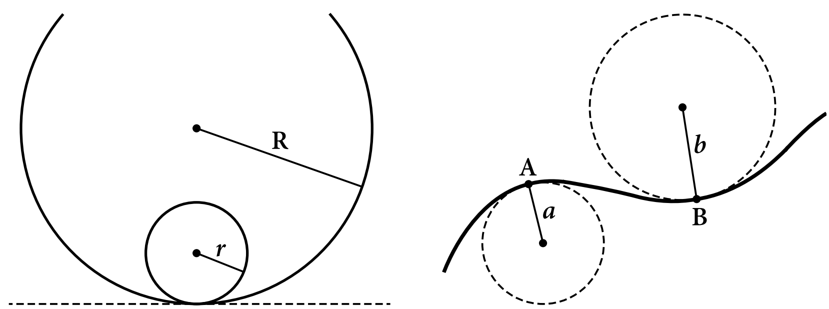


Теннисный мяч движется по кругу под действием центростремительной силы

На первых железнодорожных линиях использовались только прямые и круговые участки пути. Такое сочетание создавало определенные проблемы, поскольку, когда поезд переходил с прямого на круговой участок, пассажиры испытывали неприятные ощущения — их начинало резко клонить в сторону. На поезд, движущийся по прямому участку с постоянной скоростью, не воздействуют никакие силы. Но, когда он переходит на круговой участок, он подвергается действию центростремительной силы. Так как она направлена внутрь, это и вызывало у пассажиров ощущение, будто их выталкивает наружу. (На самом деле пассажиров наружу ничто не выталкивает. Они переходят с прямой траектории на круговую, а поскольку система ориентиров в вагоне остается прежней, возникает иллюзия, будто какая-то сила выталкивает их наружу.)

«После полувека железнодорожных перевозок мы все еще используем на путях только прямые линии и круги, — писал американский инженер Эллис Холбрук в 1880 году. — Создается впечатление, что железнодорожники принимают такое варварское сочетание как должное, даже не задавая вопросов по поводу того, что здесь не так» [11]. Холбрук нашел следующее решение: делать между прямым и круговым участками переходную кривую, на которой поезд, двигающийся с постоянной скоростью, находится под воздействием центростремительной силы, линейно увеличивающейся на протяжении определенного периода. Поскольку центростремительная сила рассчитывается по формуле $\frac{mv^2}{r}$, где m и v — это константы, для того чтобы эта сила росла по линейному закону, переходная кривая должна иметь кривизну $\frac{1}{r}$.

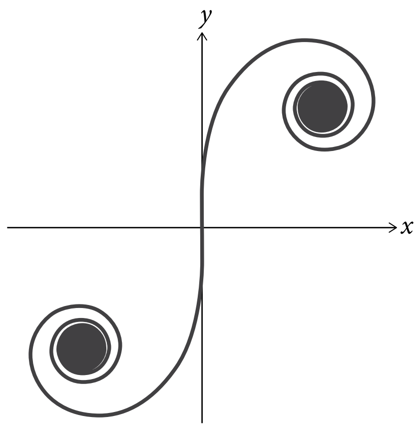
Прежде чем вернуться к кривой Холбрука, давайте более внимательно рассмотрим концепцию $\frac{1}{r}$. Математики называют эту величину кривизной окружности с радиусом r, которая представляет собой меру отклонения окружности от прямой линии. На рисунке ниже изображены две окружности: маленькая окружность с радиусом r и большая с радиусом R; обе касаются пунктирной линии в одной точке. Кривизна малой окружности *больше* кривизны большой окружности, поскольку она сильнее отклоняется от прямой. Для того чтобы понять концепцию кривизны окружности, можно представить ее себе как меру «стянутости»: чем меньше радиус окружности, тем сильнее она стянута, а значит, ее кривизна больше.



Чем меньше радиус окружности, тем больше ее кривизна

Кривизна окружности с радиусом r равна $\frac{1}{r}$ в любой точке окружности. С другой стороны, кривизна кривой (такой как на рисунке справа) постоянно меняется по мере перемещения по ней. Для того чтобы вычислить кривизну кривой в любой ее точке, необходимо построить «наиболее подходящую» окружность, которая касается кривой и максимально приближена к ней в этой точке. Я нарисовал максимально приближенные окружности в точках A и B. Поскольку радиусы этих окружностей — a и b, кривизна кривой в точке A равна $\frac{1}{a}$, в точке B — $\frac{1}{b}$. Чтобы понять концепцию максимально приближенной окружности, можно представить себе, что кривая — это дорога. Вы едете по ней на автомобиле, и у вас заклинивает руль, скажем, в точке A. Если вы продолжите движение, его траектория и будет представлять собой максимально приближенную окружность в точке A.

Таким образом, идея Холбрука состояла в том, чтобы делать часть дороги в форме кривой, кривизна которой увеличивается линейно по мере перемещения по этому участку, поскольку именно на такой кривой объект находится под воздействием центростремительной силы, растущей по линейному закону [12]. Возможно, Холбрук даже не знал о том, что, по сути, описывает знаменитую кривую, впервые изученную Леонардом Эйлером в XVIII столетии. Речь идет о кривой под названием «клотоида»*, которая изображена на рисунке ниже.



Клотоида

Начиная с конца XIX века клотоида (или, скорее, ее центральный фрагмент) стала стандартной переходной кривой на железных дорогах. Представьте себе, что участок прямой дороги трансформируется в такую кривую в точке 0 и далее следует вдоль нее. Кривизна постепенно увеличивается до тех пор, пока не сравняется с кривизной кругового участка. Когда в XX столетии на доминирующие позиции вместо поезда вышел автомобиль, клотоида по той же причине превратилась в основной элемент проектирования дорог [13]. Это самая подходящая кривая для езды на автомобиле между прямым и круговым участками дороги. Сеть автомагистралей — живой музей клотоид. Эти характерные кривые до сих пор используются в качестве

* Эта кривая также известна под названием «спираль Корню». *Прим. ред.*

формы поворотов на автомагистралях, скользких дорогах и особенно часто — на многоуровневых дорожных развязках с множеством переходов от прямых к круговым участкам. Если бы вы были инопланетянином, пролетающим на низкой высоте над сельской местностью, испещренной автомобильными дорогами и железнодорожными путями, вы вполне могли бы прийти к выводу, что клотоида — любимая кривая человечества.

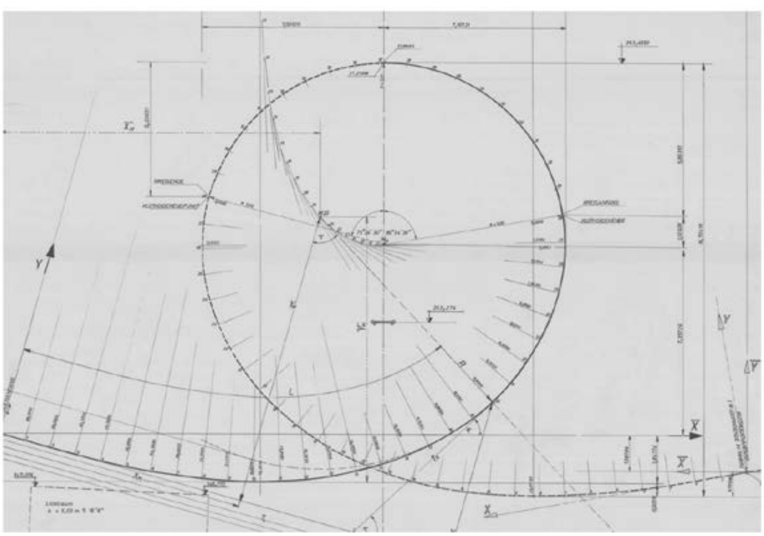
Клотоида также решила проблему проектирования аттракционов, позволив найти ответ на вопрос, какова самая безопасная форма американских горок с мертвой петлей. В середине XIX века парижский инженер М. Клавьер сконструировал аттракцион, на котором одна вагонетка съезжала вниз по прямому участку, а затем делала резкий кувырок вдоль петли высотой почти четыре метра, прежде чем выйти на прямой участок поменьше, ведущий вверх к конечной остановке [14]. Во Франции было построено несколько таких «подвесных железных дорог», но вскоре все их закрыли из-за большого количества травм шеи, полученных людьми в момент перехода с прямого на круговой участок. После этого более ста лет организаторы аттракционов считали, что сделать безопасную мертвую петлю невозможно.

Аттракцион с мертвой петлей. Гавр, 1846 год

Так продолжалось до тех пор, пока в 1970-х годах немецкий инженер Вернер Штенгель не проанализировал проблему и не пришел к выводу, что ее может решить клотоида. Штенгель сконструировал первый современный аттракцион с мертвой петлей под названием Great American Revolution, который начал функционировать в 1976 году в парке аттракционов Six Flags Magic Mountain.

Вагонетка спускается вниз по слегка наклоненному прямому участку трассы, после чего переходит на участок клотоиды и движется по нему до тех пор, пока радиус кривой не достигнет значения 7 метров; в этот момент вагонетка начинает делать петлю, как показано на рисунке ниже. Вагонетка находится на круговом участке с радиусом 7 метров примерно до половины полного оборота, а затем зеркальная версия первой клотоиды подхватывает вагонетку и возвращает на прямой участок. «Это очень мягкий переход, — сказал Штенгель. — Изменение силы позволяет сделать эффектную американскую горку, но оно должно быть приемлемым для организма».

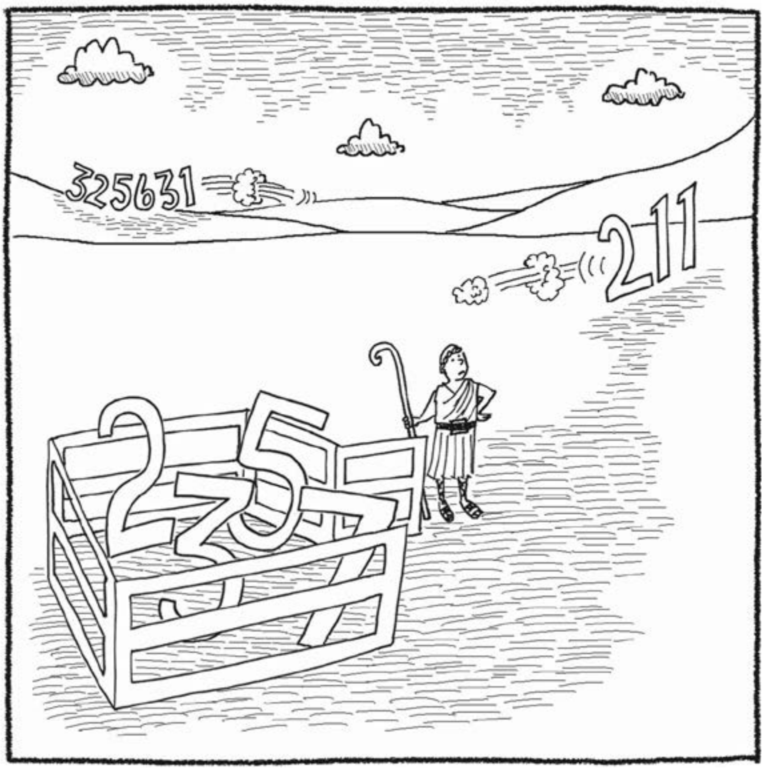
Аттракцион Great American Revolution сразу же обрел такую популярность, что даже получил дань уважения в стиле семидесятых, став темой фильма-катастрофы *Rollercoaster* (в русском прокате — «Русские горы»), в котором преступники планируют взорвать бомбу в день открытия аттракциона. С тех пор во всем мире было открыто около двухсот аттракционов такого типа, построенных по тому же принципу, что и аттракцион Штенгеля. Аттракцион в форме перевернутой капли, сконструированный с применением клотоиды, — это и современный символ нашей ненасытной жажды захватывающих приключений, и памятник математике Исаака Ньютона. Клотоида — механическая кривая, получившая второе воплощение в виде стального монстра, поражающего воображение.



Оригинальный чертеж аттракциона Great American Revolution, выполненный Вернером Штенгелем

Физические законы Ньютона проросли из крохотного зерна бесконечно малых величин — величин, которые меньше всего остального, но больше нуля. Однако, несмотря на их плодотворную роль в создании новой науки, концепцию малых величин подвергали критике за внутреннюю противоречивость. «Что это за… крохотные приращения? — упорствовал философ и епископ Джордж Беркли. — Это и не конечные величины, и не бесконечно малые величины, и даже не ничто. Почему бы нам не называть их призраками величин, ушедших в мир иной?» [15]. Резкие замечания Беркли вызывали ропот среди ученых, вполне справедливо считавших исчисление величайшим математическим достижением эпохи Просвещения. Но все же священник был в какой-то мере прав. Хотя концепция бесконечно малых величин и обеспечивала получение правильных ответов, она не была до конца продуманной с научной точки зрения. Полемика, которую спровоцировал Беркли, поставила математиков на путь переоценки ценностей и самокритики. Какие концепции приемлемы, а какие — нет? В какой мере математика должна соответствовать здравому смыслу?

Назвние етой главы содержит три ошбки 9



Предлагаю вам решить головоломку. Однажды я поднялся на гору, переночевал на вершине, а на следующий день спустился вниз по тому же маршруту. Есть ли такая точка, в которой я был в одно и то же время в разные дни?

Подумайте об этом секунду.

Или две.

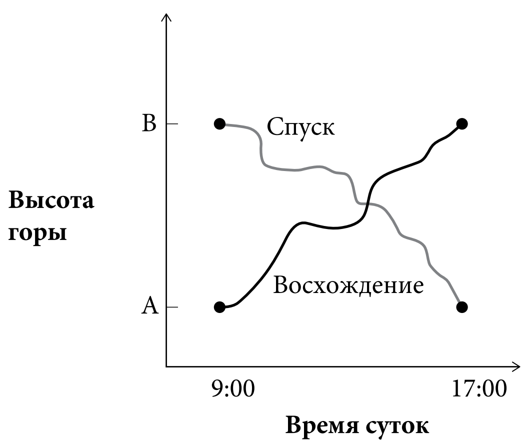
Мне нравится эта задача, потому что у нее простая формулировка и простое решение.

Ответ: да. Представьте себе, что оба путешествия происходят в один день. Если я одновременно поднимаюсь вверх и спускаюсь вниз, неизбежно наступит момент, когда я столкнусь с самим собой, и тогда значения времени и высоты совпадут.

Если вы примете аргумент о том, что в оба дня должен быть момент времени, когда я находился на одной высоте, я доволен: мое доказательство сделало свое дело. Математическое доказательство — это всего лишь инструмент, используемый одним человеком для того, чтобы убедить другого человека в истинности математического утверждения — а я вас убедил [1].

Однако более требовательного математика могут не удовлетворить мои доводы. Он может отбросить их по причине недостаточной строгости. Где доказательство того, что я столкнусь сам с собой? Давайте нарисуем график, отображающий мое восхождение от подножия горы на высоте A к ее вершине на высоте B, а также наложим на него маршрут моего спуска на следующий день, как показано на рисунке ниже. Теперь вопрос стоит по-другому: существует ли точка, в которой эти две линии пересекутся? Большинство читателей ответят: конечно же, есть! Но придирчивого математика мне так и не удалось убедить.

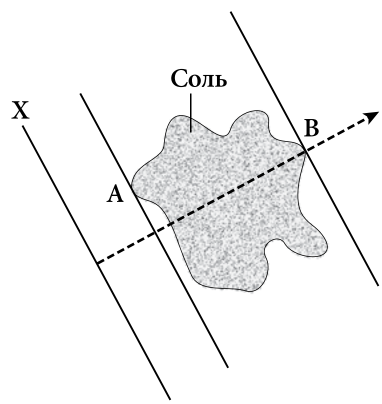
До конца XVIII века считалось, что если кривая поднимается от высоты A до высоты B, то она обязательно должна пройти каждую точку между A и B. На интуитивном уровне это утверждение кажется очевидным. В действительности оно согласуется с тем, как определялась тогда непрерывная кривая. Однако, когда математики внимательнее проанализировали свойства непрерывности, они пришли к выводу о необходимости более четких определений. Утверждения, которые воспринимались раньше как нечто само собой разумеющееся, были переведены в категорию теорем, требующих доказательства на основании еще большего количества исходных предположений. К их числу относилось и приведенное выше утверждение о том, что непрерывная кривая с минимальным значением A и максимальным значением B обязательно должна пройти все промежуточные значения; сейчас оно известно как теорема о промежуточном значении. Но ее доказательство настолько сложное, что его изучают только в университетах, хотя его будет достаточно, чтобы убедить нашего дотошного друга. В итоге он согласится с тем, что две кривые на представленном выше графике пересекаются в определенной точке, поскольку это утверждение вытекает из доказательства за несколько шагов.



Маршрут восхождения на вершину горы и спуска к ее подножию

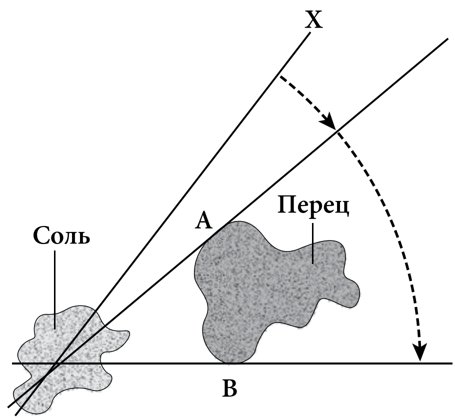
Эксперименты — движущая сила науки. Доказательства — движущая сила математики. Существует множество способов проведения экспериментов, так же как и множество методов доказательств математических утверждений. В этой главе мы рассмотрим некоторые из них. Кроме того, проанализируем, как изменилось отношение к доказательствам, и пообщаемся с анонимным членом тайного общества, исповедующего математическую строгость. Но сначала давайте перекусим.

Теорема о промежуточном значении может показаться очевидной, но у нее есть ряд интересных следствий. Одно из них — теорема о блинах, которую я предпочитаю описывать в менее сладких выражениях. Если вы рассыплете на столе соль (или подадите блины), мы можем доказать наличие прямой, которая делит соль (или блинчик) на две части равной площади, причем прямая может быть проведена под каким угодно углом [2]. Метод, с помощью которого это делается, представлен на рисунке ниже. Сначала нарисуйте за пределами пятна соли прямую под любым углом и назовите ее X, а затем перемещайте ее в направлении соли, параллельно к исходному положению. Прямая пересечет пятно соли в точке A, когда она еще не покрывает площадь пятна, и оставит соль позади в точке B, когда все пятно пройдено. Пересеченная площадь пятна соли меняется непрерывно по мере того, как прямая проходит это пятно, перемещаясь из точки A в точку B. Согласно теореме промежуточного значения, эта прямая обязательно попадет в позицию, в которой пройденная площадь составляет ровно половину общей площади. Наше доказательство не указывает, где именно проходит линия раздела, а только говорит о том, что она однозначно существует.



Теорема о соли

А теперь давайте рассыплем на столе соль *и* перец. Здесь мы тоже можем доказать наличие прямой, разделяющей их на две части равной площади. Начнем с определения прямой X, которая делит пополам пятно соли и не касается перца, как показано на рисунке ниже. Затем повернем прямую по часовой стрелке, не забывая следить за тем, чтобы она постоянно разбивала пятно соли на две равные части. Мы знаем, что это можно сделать, поскольку, как было показано выше, деление пятна соли пополам происходит под любым углом. Наша прямая касается пятна перца в точке A и выходит за его пределы в точке B. Покрытая площадь пятна перца увеличивается непрерывно от ноля до максимума, а значит, прямая обязательно пройдет ту точку, в которой она тоже делит пятно перца на две равные части. На рисунке пятна соли и перца расположены отдельно, но, даже если бы они пересекались, всегда найдется прямая, которая разделит их на две части равной площади.



Теорема о соли и перце

В период между Первой и Второй мировыми войнами математики из Львова (тогда Польша) регулярно встречались в Шотландском кафе и обсуждали там такие математические «лакомства», как теорема о блинах [3]. Один из членов группы Гуго Штейнгауз как-то задал вопрос о том, можно ли расширить эту теорему на три измерения. «Можем ли мы положить кусок окорока под нож мясорезки так, чтобы мясо, жир и кости были разрезаны ровно пополам?» — спросил он. Его друг Стефан Банах доказал, что это возможно, воспользовавшись теоремой, названной именами двух других участников группы — Станислава Улама и Кароля Барсука. Впоследствии вывод Банаха получил известность под названием «теорема о бутерброде с ветчиной», поскольку он эквивалентен утверждению о том, что можно разрезать бутерброд с ветчиной поровну одним движением ножа таким образом, что каждый слой хлеба и ветчины будет разделен поровну независимо от их исходного положения и формы.

Математики, которые собирались в Шотландском кафе, записывали в толстую тетрадь все обсуждаемые во время встреч вопросы, а когда уходили домой, отдавали ее на хранение метрдотелю. Эта тетрадь, впоследствии получившая название «Шотландская книга», представляет собой уникальный продукт совместной работы, и не только из-за того, как она написана. (Эта тетрадь так и не была издана в виде книги, но некоторые из записанных в ней задач были опубликованы впоследствии в журналах.) Штейнгауз, Банах и Улам были выдающимися математиками, образовавшими самую талантливую троицу ученых, когда-либо существовавшую где бы то ни было. В 1941 году, через несколько дней после того, как Штейнгауз записал в этой тетради, как оказалось, последнюю задачу, немецкие войска оккупировали Львов. Штейнгауз, который был евреем, скрылся и пережил войну в небольшом городке возле Кракова под именем умершего лесника. В эти годы он восстановил по памяти большинство известных ему математических задач и работал над новыми, в том числе и еще над одной, связанной с едой.

Штейнгауз хотел найти самый справедливый способ разделить пирог между людьми, когда каждый стремится получить как можно больший кусок. Когда на пирог претендует всего два человека, с давних времен используется следующий подход: один режет, другой выбирает. При таком подходе тот, кто режет пирог, заинтересован разделить его на максимально равные части, поскольку если между двумя частями будет заметная разница, ему достанется меньшая часть. Штейнгауз первым решил задачу о том, как справедливо разделить пирог между *тремя* людьми. (Описание ее решения можно найти в Приложении 7.) После Штейнгауза математические методы разрезания пирога легли в основу целой области знаний, имеющей практическое применение в экономике и политике. Существует много разных вариантов решения этой задачи, в зависимости от того, сколько людей принимает участие в дележе пирога и как они оценивают его разные фрагменты. Один оригинальный способ, найденный в 1960-х годах, подразумевает использование движущегося ножа. Нож размещается рядом с пирогом, а затем медленно передвигается над ним. Когда кто-то выкрикнет «Стоп!», нож разрезает пирог в этом положении, а отрезанный кусок получает тот, кто первым крикнул «Стоп!». Затем нож продолжает движение, отрезая куски оставшимся претендентам.

Гуго Штейнгауза помнят за две самые распространенные пищевые метафоры в математике: теорему о бутерброде с ветчиной и справедливое разрезание пирога. Он постоянно думал о еде. К сожалению, именно еды ему не хватало на протяжении всей жизни.

Один из самых распространенных методов доказательства — *доказательство от противного*, когда истинность утверждения подкрепляется доводами, что в случае, если оно ложное, это приводит к противоречию. Например:

Теорема. *Все числа интересны* [4].
Доказательство. Предположим, это утверждение ошибочно, а значит, есть очень скучные числа. Если бы это действительно было так, существовало бы самое малое скучное число. Однако сам факт наличия такого числа делает его интересным. Другими словами, термин «самое малое скучное число» противоречит сам себе. В этом и состоит несоответствие. Это утверждение не может быть ложным, стало быть, оно должно быть истинным.

Древнегреческий мыслитель Аристотель одним из первых изучил сущность доказательства. Он разработал систему логических рассуждений, призванную определить, приводят ли истинные предпосылки к истинным выводам. Аристотель занимался философией, но все же идея о том, что истина переходит от предпосылок к выводам посредством логической дедукции, оказала значительное влияние на математику. В действительности, начиная со времен Древней Греции, математика изучает именно то, как истинные предпосылки приводят к истинным выводам через доказательства.

В III столетии до нашей эры Евклид написал «Начала», основополагающий трактат по геометрии, отличающийся характерным литературным стилем и построенный в соответствии с принципиально новой концептуальной схемой. Евклид начал с небольшого набора предполагаемых истин, или аксиом, и вывел из них все остальные истины, или теоремы. Его способ систематизации знаний обозначается термином «аксиоматический метод».

Для начинающих геометров трактат «Начала» был своего рода кулинарной книгой. В нем указан список ингредиентов: определения 26 терминов и 10 предположений, которые разрешается считать истинными, — например, о том, что между двумя точками можно провести прямую линию. Затем Евклид рассказывает о блюдах, которые намерен приготовить (теоремы), и приводит пошаговые инструкции относительно того, как это сделать (доказательства). Первая теорема касается построения «равностороннего треугольника на заданной конечной прямой», вторая — «как от данной точки провести прямую, равную данной прямой». В каждом доказательстве Евклид использует только перечисленные в начале книги предположения, и каждый очередной шаг логически вытекает из предыдущего. Метод, сводящийся к формулировке исходных предположений, после которой следует постепенное построение знаний посредством теорем и доказательств, стал стандартной схемой для всех последующих математических трудов.

В одной из самых известных теорем, изложенных в трактате «Начала», используется доказательство от противного.

Теорема. *Существует бесконечно много простых чисел.*

Доказательство. Во-первых, обратите внимание на следующее. Доказательство нельзя читать так же бегло, как прозу. Вполне нормально, если понадобится его перечитать несколько раз, прежде чем оно станет понятным. Во-вторых, давайте разберемся, что именно пытается сделать Евклид. Простые числа (2, 3, 5, 7, 11, 13 …) — это числа, которые больше единицы и делятся только на себя и 1. Евклид покажет нам, что, если эта теорема ошибочна, мы получим противоречие. Точнее говоря, он докажет, что при существовании конечного количества простых чисел можно создать еще одно простое число, что противоречит утверждению о том, что количество таких чисел конечно. Эта теорема не может быть ошибочной, значит, она должна быть верной.

Шаг 1. Пусть $a, b, c \ldots k$ — фиксированное множество простых чисел.

Шаг 2. Умножим все числа этого множества, чтобы получить число $a \times b \times c \times \ldots \times k$. Назовем это число M.

Шаг 3. Увеличим его на единицу, чтобы получить M + 1.

Шаг 4. Является ли M + 1 простым числом?

(1) Если M + 1 — простое число, то мы добились своей цели найти простое число, не входящее в исходное множество.

(2) Если M + 1 — не простое число, то должно существовать простое число p, на которое оно делится. В таком случае p — это либо одно из простых чисел исходного множества, либо нет. Если нет, у нас есть новое простое число. Если да, нам известно, что M делится на p, поскольку M делится на все числа исходного множества. Но теперь у нас возникла ситуация, когда на p делится и число M, и число M + 1, что невозможно, поскольку эти два числа разделяет только одно число — 1, которое не является простым.

Отсюда следует вывод: либо M + 1 — это новое простое число, либо M + 1 делится на новое простое число. В любом случае задача Евклида выполнена. Он доказал, что конечное множество не покрывает всю совокупность простых чисел.

В доказательстве Евклида применен принцип, который обозначается термином *reductio ad absurdum* — «приведение к абсурду», когда абсурдный вывод демонстрирует ошибочность предпосылки. На шаге 4 (2) абсурдный вывод состоит в том, что на *p* должно делиться как число M, так и число M + 1, а ошибочная предпосылка в том, что число *p* принадлежит конечному множеству простых чисел. В книге A Mathematician's Apology* преподаватель Оксфордского университета Годфри Гарольд Харди писал, что доказательство Евклида «остается таким же актуальным и значимым, как и тогда, когда оно было открыто — две тысячи лет не оставили на нем никаких следов». Это короткое и точное доказательство, не требующее никаких дополнительных концепций, кроме сложения, умножения и деления. «Приведение к абсурду, которое так любил Евклид, — один из лучших инструментов математика, — добавил Харди. — Это гораздо более эффективный прием, чем любой шахматный гамбит. Шахматист может пожертвовать пешкой или даже более значимой фигурой, а математик ставит на кон *игру*».

Приведение к абсурду — это также один из любимых приемов комедиантов. Ирония используется для того, чтобы добиваться все более и более абсурдных выводов, тем самым все сильнее подчеркивая нелепость исходного предположения, — этот прием известен как сатира.

На самом деле я считаю, что сформулированное Евклидом доказательство бесконечности множества простых чисел комично само по себе. Для того чтобы найти новое простое число, Евклид должен сначала создать число M, которое не только до нелепости большое, но и представляет собой точную противоположность того, что он ищет, поскольку число M делится на каждое известное простое число. Затем, прибавив наименьшее число 1, Евклид переворачивает ситуацию с ног на голову. Мельчайший дополнительный элемент расшатывает почву под ногами огромного, мегаделимого монстра M и составляющих его простых чисел, беспощадно раскрывая их ограниченность. Подобно саркастической фразе, прозвучавшей в фильме Wayne's World («Мир Уэйна»), Евклид говорит: «Эта группа простых чисел включает в себя все числа… *нет!*»

В математике много шутников.

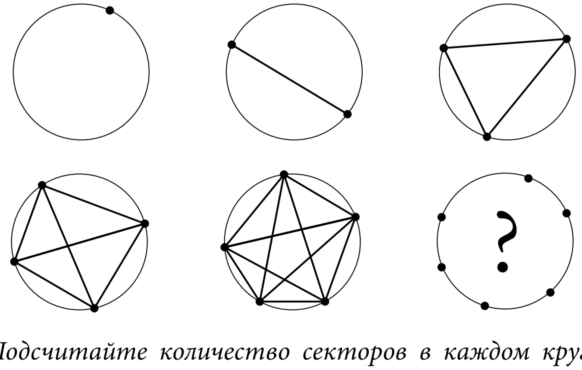
---

* *Харди Г.Г.* Апология математика. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.

Как только мы, люди, обретаем способность держать ручку в руках, мы начинаем машинально рисовать что-то на бумаге. Самый распространенный способ — в случайном порядке начертить на листе бумаги продольные и поперечные линии и заштриховывать образовавшиеся сегменты. Этот способ особенно хорош тем, что позволяет разместить рисунок так, чтобы заштрихованные сегменты имели общие стороны только с незаштрихованными, и наоборот. Подобный тип рисунка называется двухцветным, поскольку содержит всего два цвета. Чтобы доказать, почему мы можем выполнить такой рисунок в двух цветах, необходимо ввести еще один распространенный математический инструмент — *доказательство методом индукции*.

В философии и эмпирической науке индукция — это принцип, который гласит, что если событие наблюдалось много раз в прошлом, то можно предположить, что оно снова произойдет в будущем. Например, Солнце восходит каждое утро с незапамятных времен. Следовательно, было бы логично предположить, что оно взойдет и завтра. Мы не можем доказать, что Солнце завтра взойдет, но можем быть уверены в этом. Однако в математике мы не можем делать какие-то предположения исключительно на основании прошлого опыта.

Рассмотрим пять кругов, представленных на рисунке ниже. В первом случае на линии окружности есть только одна точка, во втором две, в третьем три, в четвертом четыре и в пятом пять. Давайте соединим точки прямыми линиями и посчитаем, сколько секторов получилось в каждом круге. Эти круги разделены на 1, 2, 4, 8 и 16 секторов. Закономерность поразительна: это ведь последовательность, в которой каждое число в два раза больше предыдущего! Можно ли сделать предположение, что если соединить шесть точек на окружности, то количество секторов составит 32?



Подсчитайте количество секторов в каждом круге и попробуйте догадаться, что будет дальше

Категорическое НЕТ! В случае шести точек будет 31 сектор, а по мере дальнейшего увеличения количества точек на линии окружности — 57, 99, 163, 256, 386... Закономерность здесь есть, но это не последовательность, в которой каждое число в два раза больше предыдущего [5]. Ни в коем случае не следует делать выводы на основании ограниченного количества наблюдений, какими бы многообещающими эти выводы ни казались.

В математике доказательство методом индукции — это способ выяснить, когда закономерность будет продолжаться до бесконечности. Если у нас есть последовательность таких утверждений:

1) первое утверждение верно;

И

2) если n-е утверждение верно, то утверждение $n + 1$ тоже верно;

то мы можем сделать вывод, что *все* эти утверждения верны.

Доказательство методом индукции аналогично падению костяшек домино. Если их поставить в ряд и n-я костяшка упадет, она толкнет костяшку $n + 1$, а значит, для того чтобы упали все костяшки, достаточно всего лишь опрокинуть первую костяшку.

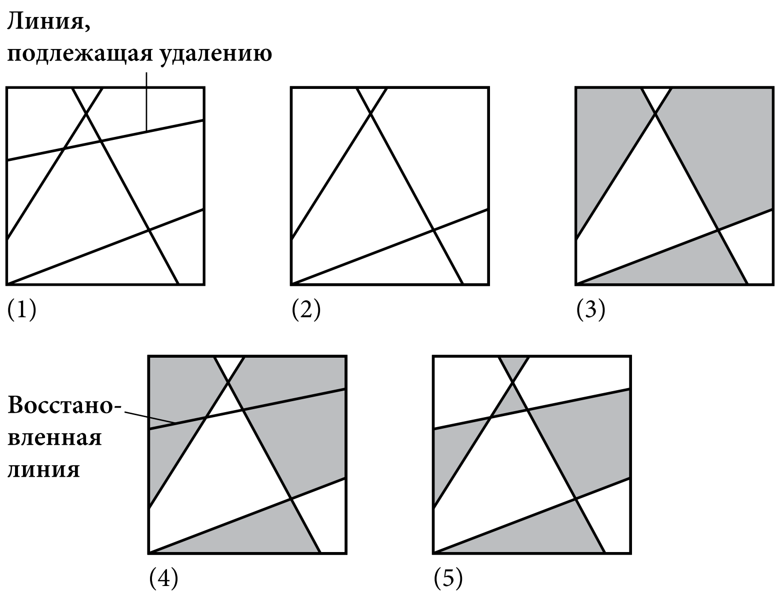
Но вернемся к исходной задаче. Для того чтобы доказать, что машинальный рисунок может быть двухцветным, нам необходимо доказать, что:

1) рисунок, состоящий из одного ряда, может быть двухцветным;
2) если рисунок, состоящий из n рядов, может быть двухцветным, то и рисунок с количеством $n + 1$ рядов тоже будет двухцветным.

Доказать истинность первого утверждения очень просто: достаточно провести через всю страницу прямую линию и заштриховать область с одной стороны. А вот для того, чтобы доказать истинность второго утверждения, понадобится немного поразмышлять.

Начнем доказательство с рассмотрения $n + 1$ линий, как показано на схеме 1 ниже. (Очевидно, что для иллюстрации данного примера для числа n нужно выбрать какое-то значение, поэтому мы должны проследить за тем, чтобы наше доказательство было применимо к любому числу n.)

Если удалить одну линию, у нас получится рисунок с количеством линий n, показанный на схеме 2. Предположим, рисунок с количеством линий n можно сделать двухцветным, как на схеме 3. Теперь давайте восстановим линию, убранную на первом шаге (схема 4), и с одной ее стороны поменяем цвет на противоположный, другими словами — белые фрагменты сделаем заштрихованными, а заштрихованные — белыми. В результате каждый сектор над линией расположен рядом с сектором под линией, имеющим другой цвет. Следовательно, у нас пролучился двухцветный рисунок с количеством линий $n + 1$ (схема 5).



Доказательство теоремы о двухцветном рисунке методом индукции

Иными словами, мы продемонстрировали, что второе утверждение истинно. Процесс доказательства методом индукции завершен: все рисунки могут быть двухцветными. (Это доказательство распространяется только на рисунки, образованные посредством вычерчивания линий на квадратном листе. То же самое касается и любого фигурного рисунка с «завитушками», когда перо начинает и прекращает двигаться в одной и той же точке, но по мере перемещения может рисовать петли, спирали и пересечения любой сложности. Однако это утверждение требует более сложного доказательства.)

Труд Евклида «Начала» стал самым важным текстом в истории математики, и не только потому, что он раскрыл информацию о простых числах, треугольниках и т. д., но и благодаря тому, как именно это было сделано. Красота этого текста состоит в его строгости. Евклид весьма скрупулезен. Он ничего не упрощает, не дает никаких оценок и не делает заявлений, которые не может доказать. Если вы согласитесь с тем, что десять исходных предположений Евклида верны, то вы должны принять и истинность всех 465 теорем, сформулированных в книге. «Начала» — это образец применения аксиоматического метода, свидетельство силы дедуктивного мышления.

Говорят, что «Начала» Евклида переиздавались на протяжении большего периода и в большем количестве экземпляров, чем любая другая книга, за исключением Библии. Это очень уместное сравнение, поскольку более двух тысячелетий труд Евклида считался священным текстом, а аксиоматический метод принимался в качестве догмы. Однако в XVII веке появились первые признаки «нечестивости». Евклид полагался на аксиомы и определения, которые по самой своей сути не требовали доказательств и, разумеется, не содержали внутренних противоречий. Но, как мы видели в предыдущей главе, бесконечно малой величине, или величине, которая представляет собой одновременно и нечто, и ничто, свойственна именно такая внутренняя противоречивость. Ньютон и его современники использовали концепцию бесконечно малых величин, поскольку она позволила им доказать множество новых теорем, хотя им и приходилось закрывать глаза на противоречие с догматами Евклида, которые это за собой влекло.

Однако со временем математики поняли: для того чтобы исчисление было свободно от внутренних противоречий, оно должно опираться на более прочный фундамент. Было решено положить в основу исчисления не бесконечно малые величины, а нечто более надежное — концепцию предела. После упрощения исходных предположений и уточнения определений родился новый раздел математики — математический анализ. Сейчас этим термином обозначаются все области, связанные с исчислением, непрерывностью и бесконечными процессами. Одним из первых знаковых достижений математического анализа стала теорема о промежуточном значении, о которой шла речь в начале главы, гласящая, что непрерывная кривая покрывает все точки, расположенные между ее минимумом и максимумом.

Присущая XIX столетию склонность к научной строгости нашла свое отражение не только в математическом анализе, но и в других областях, в частности в евклидовой геометрии. Внимательно проанализировав «Начала», немецкий математик Мориц Паш сделал невероятное открытие: в рассуждениях Евклида есть прорехи, которые до сих пор никто не заметил, несмотря на то что «Начала» — наиболее изученный учебник по математике за всю историю. Евклид считал само собой разумеющимся, что, если три разные точки лежат на одной прямой, значит, одна из них находится между двумя другими. Однако если бы Евклид придерживался собственных стандартов, ему следовало бы сформулировать это утверждение в виде аксиомы. Евклид совершил неосмотрительную ошибку, позволив своим глазам воздействовать на дедуктивный процесс. В 1899 году Давид Гильберт предложил новую, усовершенствованную евклидову систему, содержащую 21 постулат.

Числа тоже были тщательно проанализированы по-новому. Числа — это ядро всей математики, по сути — всей науки. Но что такое число и почему $1 + 1 = 2$?

В 1879 году немецкий математик Готлоб Фреге опубликовал свой труд Begriffsschrift («Исчисление понятий»), в котором представил тщательно проработанную, имеющую собственные обозначения систему исчисления, позволяющую определить истинность и ложность утверждений. Это было рождение математической логики — использования математических рассуждений для анализа других математических рассуждений.

Фреге хотел дать четкий ответ на вопрос «Что такое число?». Для решения этой задачи он позаимствовал у своего современника Георга Кантора концепцию множества. В математике часто бывает так, что на первый взгляд простое слово означает нечто сложное. Но только не в случае с множеством. Множество — это всего лишь совокупность объектов, обладающих одним и тем же свойством. Множеством может быть ящик яблок, пелотон (лидирующая группа) велосипедистов или звездная галактика.

Фреге разработал систему, в которой числа определяются как множества, аксиомы записываются с использованием его системы исчисления понятий, а истинность арифметических законов может быть доказана. Он планировал свести арифметику к системе не допускающих двойного толкования логических операций, в основу которой положены исходные предположения, лишенные внутренних противоречий, — например «отрицание отрицания утверждения А означает утверждение А» [6]. Работа с такими концепциями, как числа и сложение, не вызывает никаких трудностей, поэтому вы можете подумать, что задача Фреге была не особо сложной. Но на самом деле она потребовала огромных умственных усилий. В отличие от всех своих предшественников, использовавших числа и арифметические операции в качестве кирпичей для строительства здания математики, Фреге сделал подкоп непосредственно под ее фундамент.

Готлоб Фреге опубликовал свою теорию в книге The Basic Laws of Arithmetic («Основные законы арифметики»), первый том которой вышел в 1893 году. Однако, когда второй том уже находился в типографии, Фреге узнал весьма неприятную новость. Профессор философии Кембриджского университета Бертран Рассел прислал ему письмо, в котором указывал на одно противоречие. Поскольку задача сведения арифметики к логике состояла в создании системы, полностью лишенной противоречий, найти хотя бы одно несоответствие было равносильно катастрофе. Фреге быстро написал к книге дополнение: «Вряд ли ученый может столкнуться с чем-либо более нежелательным, чем разрушение основ в тот момент, когда работа уже завершена». С тех пор слово «нежелательный», которое использовал тогда Фреге, называют величайшим преуменьшением в истории математики.

Рассел открыл проклятие самореференции (самоотносимости).

Ниже приведены некоторые из моих любимых утверждений, ссылающихся на самих себя [7].

предложение должно начинаться с большой буквы.
В вопросе «быть или не быть» скомбинированы два предложения.
В этом предложении !!! преждевременно поставлен знак препинания

Однако самое древнее самоотносимое предложение приписывают критянину Эпимениду, который сказал: «Все критяне лжецы». Эпименид не только ссылается сам на себя, но и сам себе противоречит. Если он говорит правду, значит, он лжет, а если лжет, тогда говорит правду. Высказывание Эпименида (которое назвали «парадоксом лжеца») получило множество новых интерпретаций. Дайте ответ «да» или «нет» на такой вопрос: «Будет ли следующее слово, которое вы скажете, словом “нет”?»

Бертран Рассел понял, что парадокс самореференции нанесет серьезный удар по проекту Фреге и, возможно, даже погубит его. Преимущество использования множеств в качестве основы арифметики состоит в том, что эту концепцию легко понять: множество — это просто совокупность объектов. Однако Рассел изобрел такое множество:

Множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента.

Большинство множеств не содержат себя в качестве своего элемента. Множество туфель не является туфлей. Но некоторые множества все же являются исключениями. Например, множество концепций — это тоже концепция. А теперь посмотрим на множество Рассела. Содержит ли оно себя? Если предположить, что да, мы придем к выводу, что не содержит, а если предположить, что нет, то мы сделаем вывод, что содержит! Это множество имеет противоречие. Рассел провел аналогию с брадобреем одной деревни, на стене дома которого висела табличка: «Я брею всякого, кто сам не бреется». Кто же бреет брадобрея? Если он сам бреется, значит, он не побреет себя, а если он сам не бреется, значит, он себя побреет. Мы имеем бесконечный цикл рассуждений, противоречащих друг другу.

Парадокс Рассела демонстрирует, что множества в том виде, как их представлял себе Фреге, нельзя использовать в качестве прочной основы для арифметики. Самореференция со свойственной ей внутренней противоречивостью способна испортить всю систему. Однако, вместо того чтобы отбросить проект Фреге как ошибочный, Рассел стал его величайшим сторонником. Мечта о том, чтобы поставить математику на надежную логическую основу, была слишком заманчивой, чтобы от нее отказываться. На протяжении следующих десяти лет Рассел вместе с Альфредом Нортом Уайтхедом работал над усовершенствованием этой системы. Рассел и Уайтхед согласились с предположением Фреге о том, что множество может стать подходящей основой для чисел. Но, чтобы избавиться от парадоксов самореференции, они создали строгую иерархию множеств. На ее первом уровне находятся объекты, такие как книги или кошки. На втором — множества объектов первого уровня, такие как книги на моей полке или кошки на моей улице. На третьем — множества объектов второго уровня, такие как полки с книгами по математике или лондонские кошки, сгруппированные по улицам. Парадокс Рассела не может возникнуть, поскольку то или иное множество может быть только членом множества верхнего уровня, а значит, не может содержать само себя.

Рассел и Уайтхед ввели систему обозначений, определения и аксиомы, чрезвычайно строго и тщательно сформулированные. Стремление ученых к простоте и понятности разъяснений привело к написанию одного из самых сложных и неудобочитаемых текстов за всю историю математики. Только на 379-й странице авторы смогли доказать, что 1 + 1 = 2. Когда они предложили опубликовать книгу Principia Mathematica («Принципы математики»), издатель отказался это делать, поскольку не смог найти читателей, способных ее понять. Написание этой книги потребовало таких огромных умственных усилий, что Рассел больше никогда ничего не писал по математике или логике.

Польский специалист в области логики Альфред Тарский предложил иерархию языка (во многом напоминающую иерархию множеств Рассела), которая позволяет решить парадокс лжеца [8]. В соответствии с ней существует язык уровня 1 и метаязык уровня 2 для описания утверждений на языке уровня 1, а также метаязык уровня 3 для описания утверждений на языке уровня 2 и т. д. Истинность или ложность утверждений можно описывать только на метаязыке следующего уровня, поэтому утверждение не может приписывать истинность или ложность самому себе. Как объяснил однажды Рассел, если бы Эпименид заявил: «Я говорю неправду уровня n», это действительно была бы ложь, но ложь уровня $n + 1$.

Комедианты используют метаязык так же, как и логики [9]. Если шутка не удалась, всегда можно выйти из ситуации с юмором, отпустив шутку по поводу неудавшейся шутки.

Книга Principia Mathematica так и остается непрочитанной. Тем не менее предпринятая в ней попытка создать свободную от парадоксов аксиоматическую основу арифметики была с энтузиазмом подхвачена другими учеными. Аксиоматическая теория множеств считается величайшим интеллектуальным достижением начала XX столетия [10], приведшим к появлению замечательных работ в области математики, логики и философии. Стандартная система аксиом получила название ZFC (сокр. от имен математиков Эрнста Цермело (Ernst Zermelo) и Авраама Френкеля (Abraham Fraenkel)) с аксиомой выбора. Аксиома выбора гласит, что при наличии бесконечного количества множеств, каждое из которых содержит не менее одного элемента, можно создать новое множество, включающее по одному элементу из каждого множества. На первый взгляд эта аксиома кажется вполне справедливой, хотя на самом деле она крайне противоречива. Одна из самых горячих дискуссий в теории множеств касалась именно того, стоит ли включать эту аксиому в систему, потому что из-за этого начнут происходить весьма странные вещи.

Стефан Банах, польский математик, который доказал теорему о бутерброде с ветчиной в Шотландском кафе, а также Альфред Тарский, специалист в области логики, предложивший расселовскую иерархию языка, доказали, что если считать аксиому выбора истинной, то истинной будет и следующая теорема:

Шар можно разделить на конечное количество фрагментов, из которых можно собрать две идентичные копии исходного шара.

Эта теорема более известна как «парадокс Банаха — Тарского». Слово «парадокс» используется здесь потому, что на первый взгляд теорема противоречит законам физики, хотя в ее доказательстве нет логических противоречий. В физическом смысле собрать два шара из фрагментов одного невозможно, поскольку эти фрагменты представляют собой не цельную структуру, а совокупность бесконечного количества точек. Тем не менее теорема поражает воображение. Из нее следует, что любой шар можно разделить на части и составить из них любой другой объект, а значит, из горошины можно сделать солнце. (Несмотря на столь невероятные выводы, сейчас большинство математиков принимают аксиому выбора.)

Если суть шутки состоит в неожиданных выводах, то парадокс Банаха — Тарского — самая смешная теорема в математике.

В конце 1970-х, когда мне было около восьми лет, мы перешли на уроках математики от чисел к множествам. Я хорошо помню, как это происходило. Овал с несколькими точками олицетворял собой одно множество, а второй овал с несколькими точками — другое множество. Нам следовало соединить точки одного множества с точками другого, что показывало, в каком множестве больше точек. Я так и не понял, в чем смысл этих упражнений, и мне кажется, учителя тоже не понимали. Примерно через год на уроках перестали говорить о множествах, и я снова встретился с ними уже на втором курсе университета. Если вы учились в школе в 60-х, 70-х или 80-х годах XX века, вполне вероятно, что вас тоже кратко знакомили с теорией множеств.

Присутствие этой дисциплины в учебной программе связано с именем Николя Бурбаки, самого плодовитого математика XX столетия.

В 1939 году Бурбаки опубликовал свою первую книгу из масштабной серии под названием Éléments de Mathématique («Начала математики»). «В прошлом считалось, что каждый раздел математики зависит от интуитивных знаний в этой области, на которых основаны концепции и истины, — писал он. — Однако в наши дни, как известно, можно, логически говоря, вывести практически всю человеческую математику из одного источника — теории множеств» [11]. Название этой серии содержало отсылку к Евклиду. Подобно тому как труд Евклида «Начала» формализовал математические знания древних греков в рамках системы аксиом, основанной на свойствах точек и линий, «Начала математики» Бурбаки формализовали современные математические знания в рамках аксиоматической системы, построенной на свойствах множеств. Выбор слова *mathématique* (в единственном числе, в отличие от английского mathematics) подчеркивал убежденность Бурбаки в единстве этой области знаний. Серия «Начала математики» состояла из десятков книг общим объемом около 7000 страниц, причем не только по теории множеств, но и по таким дисциплинам, как алгебра, математический анализ и топология. Кроме того, Бурбаки была свойственна одна отличительная особенность, которая делала его уникальным среди современников. Такого человека не существовало.

В начале 30-х годов XX века несколько молодых французских математиков пришли к выводу, что университетские учебники устарели, и решили вместе написать новые. Они взяли для своей группы псевдоним Николя Бурбаки, по имени Шарля Дени Бурбаки — французского генерала, который в 1862 году отказался от греческого престола, а после унизительного поражения во Франко-прусской войне пытался застрелиться, но промахнулся. Ученые, вошедшие в состав этой группы, заявили о том, что Николя Бурбаки родом из Полдавии — страны, которая упоминается в книге о приключениях Тинтина The Blue Lotus* [12]. Группа приняла кодекс секретности и ввела возрастное ограничение 50 лет. Подобно польским математикам, собиравшимся в Шотландском кафе во Львове примерно в тот же период, входившие в группу Бурбаки ученые получали удовольствие, смешивая веселье и науку. Во время одной из регулярных встреч в сельской местности несколько чле-

* *Реми Ж.* Приключения Тинтина. Голубой лотос. СПб. : Азбука-Аттикус, 2013.

нов группы отправились к местному озеру и, раздевшись донага, прыгали в воду с криками «Бурбаки!» [13].

Однако подход Бурбаки к математике был совершенно серьезным. Группа разработала метод написания книг, согласно которому на создание одной книги требовалось несколько лет. После долгих дискуссий по поводу содержания каждого тома кто-то из членов группы составлял черновой вариант текста книги. На следующем собрании текст вычитывался буквально построчно, причем каждую строку должны были одобрить все члены группы. Стиль изложения материала тоже был уникальным. Цель всей серии книг состояла в том, чтобы вывести все из исходных принципов, не прибегая к каким бы то ни было физическим или геометрическим интуитивным данным. Иллюстрации не использовались, поскольку члены группы считали, что они могут вводить в заблуждение. «Строгость для математика — то же самое, что мораль для человека», — сказал один из основателей группы Андре Вейль. В книгах серии не было аналогий, отступлений, опущений, рисунков или упражнений для читателей. Требование об аксиоматической чистоте было настолько жестким, что в первой книге понадобилось две сотни страниц на определение числа 1, да и то в сокращенной форме. (В книге говорится, что на представление числа 1 в расширенной форме понадобилось бы много тысяч символов. В 1999 году британский специалист по теории множеств А. Р. Д. Матиас заявил, что на самом деле метод Бурбаки требует 4 523 659 424 929 символов и 1 179 618 517 981 связей между ними [14].)

У серии книг «Начала математики» была хорошо продуманная структура. Каждая книга могла содержать ссылки только на материал предыдущих книг и не должна была ссылаться на книги других авторов, что позволяло построить огромную логическую систему на основании лишь одной теории множеств. Хотя члены группы были очень молоды, все они уже добились значительных успехов в математике и самостоятельно опубликовали ряд работ. Андре Вейль, брат философа и общественного деятеля Симона Вейля, был, пожалуй, самым талантливым членом группы. В 1939 году, когда вышла первая книга серии «Начала математики», разразилась война, и Вейль уехал в Финляндию. Полиция произвела обыск в его квартире в Хельсинки и нашла там письмо, написанное по-русски (в котором шла речь исключительно о математике), и стопку визитных карточек, принадлежащих Николя Бурбаки, члену Королевской академии наук Полдавии. После этого Вейль был депортирован по обвинению в шпионаже. По возвращении во Францию его посадили в тюрьму за то, что он не явился для прохождения службы в армии. Но Вейлю понравилось сидеть в тюрьме. «Моя математическая работа продвигается лучше, чем в самых смелых мечтах, что меня немного беспокоит, — писал он жене. — Если я могу так хорошо трудиться только в тюрьме, не придется ли мне устраивать так, чтобы каждый год попадать сюда на два-три месяца?»

Вторая книга серии «Начала математики» вышла в свет в 1940 году, а третья — в 1942-м. После перерыва по причине войны в конце десятилетия было опубликовано еще несколько томов. Поскольку прежние члены группы достигли возрастного предела, в состав группы были включены новые члены. К 1950-м годам книги Бурбаки заняли доминирующие позиции в университетской математике во Франции и сохраняли за собой этот статус на протяжении следующих двух десятилетий. Эта математическая «секта» начала напоминать мафию, поскольку ее действующие и бывшие члены (в том числе ряд самых блестящих французских математиков) занимали высшие должности в университетах. После перевода книг Бурбаки на английский язык они оказали существенное влияние и на англоязычный мир.

Лучшее время для группы Бурбаки наступило в период эскалации холодной войны. Правительства стран Запада осознали, что им необходимо полностью изменить систему преподавания естественно-научных дисциплин, для того чтобы не отставать от Советского Союза, только что запустившего в космос первый спутник [15]. Идеология бурбакизма, гласившая, что абстрактные формальные системы важнее интуиции и решения задач, просочилась из университетов в школы. Политики и представители системы образования решили, что ответом на красную угрозу станет включение теории множеств в учебную программу. Преподавание математики было реорганизовано, в результате чего поколение школьников 1960-х и 1970-х годов изучало «новую математику» в лице теории множеств.

Со временем влияние Бурбаки в университетских аудиториях и школьных классах ослабло. Например, такие области исследований, как фракталы, полностью зависят от компьютеров и визуального отображения, поэтому пристрастие Бурбаки к структуре устарело. За последние десятилетия математика развивалась благодаря взаимодействию с другими науками, а не за счет самоизоляции от них. В итоге школьникам больше не преподают теорию множеств. Однако вопреки сообщениям о кончине Николя Бурбаки, которому скоро исполнится восемьдесят лет, он живет и здравствует.

Сейчас ядро группы состоит из пяти математиков. Я встретился с одним из них в кафе у Люксембургского сада в Париже. Кодекс секретности по-прежнему действует, поэтому мне разрешили рассказать только о том, что этот член группы носит бороду и был одет в рубашку пурпурного цвета и соломенную шляпу. Кроме того, он выдающийся ученый, известный профессор. Я спросил, сколько людей знают о его участии в группе Бурбаки. «Большинству моих коллег это хорошо известно, но я не признал бы этого. Многие не принимают наши идеи, — сказал он. — Некоторые заявляют, что группа Бурбаки бесполезна и должна прекратить свою деятельность».

Последняя книга из серии «Начала математики», посвященная алгебре, вышла в свет в 2012 году, а новая (о топологии) готовится к публикации в настоящее время. Группу Бурбаки обвиняют в том, что ее пристрастие к строгости фактически нанесло ущерб французской математике. Книги, публикуемые группой, трудны для восприятия, а значит, их нельзя эффективно использовать в качестве учебных пособий. Кроме того, они не оставляют места для творчества и интуиции. «Даже мои ближайшие коллеги убеждены в том, что это не те книги, которые нужны нынешним математикам», — признался мне человек в пурпурной рубашке. Я спросил его, согласен ли он с этим мнением. «Ответ неочевиден. Очевидно лишь то, что такая работа — когда мы собираемся все вместе, вычитываем строку за строкой и каждый имеет возможность высказать свои возражения и исправить ошибки — позволяет получить в итоге нечто особенное и, будем надеяться, сто́ящее. Идеи, изложенные в этих книгах, — это совокупный продукт многих людей. Математики не могут делать все исключительно своими силами».

Я спросил, не считает ли он устаревшим тот уровень строгости, которого придерживаются бурбакисты. «Думаю, такая строгость уместна сейчас даже в большей мере, чем раньше, — ответил он. — Существует разница между строгостью и сухостью. Мы стараемся быть строгими, но не сухими». В действительности этот член группы уверен в том, что современные университетские учебники кое-чем обязаны Бурбаки. «Сейчас признание того, что доказательство не является достаточно строгим по стандартам книги, — общепринятая практика. В каком-то смысле тот уровень строгости, которого придерживаются математики, именно такой [как у Бурбаки]». В то же время этот член группы согласен с критическими замечаниями в адрес первой книги. «Некоторые книги Бурбаки — просто хорошие. Некоторые чрезвычайно хорошие. Но теория множеств — полная ерунда». Когда я напомнил ему о том, как группа Бурбаки определяет единицу, было заметно, что ему неприятно об этом говорить. «Эта часть не выдерживает критики. Не нужно знать, что такое единица. Нужно знать, что можно делать с единицей».

Тем не менее мой собеседник сказал, что очень гордится членством в группе Бурбаки. Ему тридцать лет, и он как раз стал профессором, когда получил первое приглашение от Николя Бурбаки присутствовать на следующем собрании, которое предполагалось провести в шато у Луары. Он объяснил, что большинство математиков принимают такие приглашения, хотя немногочисленные женщины, получившие его, ответили отказом. Сейчас, будучи полноправным членом группы, этот человек считает своим историческим долгом помочь ей завершить ту работу, ради которой она была создана, — довести до конца публикацию книг серии «Начала математики». Запланировано выпустить четыре последние книги серии. Мой собеседник понимает, что эти книги вряд ли увидят свет до того, как ему исполнится пятьдесят лет и он выйдет из состава группы. Но он считает, что возрастное ограничение — это хорошо, поскольку поддерживает жизнеспособность группы.

Теория множеств — это один из подходов к построению основы для математики. Другой подход находится сейчас в процессе формирования и подразумевает использование компьютеров. Система для проверки доказательств — это элемент программного обеспечения, проверяющий правильность логических выводов, имеющихся в доказательстве [16]. Хотелось бы верить, что когда-нибудь компьютеры смогут доказать любое математическое утверждение [17]. Если вы захотите убедиться в том, что теорема верна, вам будет достаточно просто нажать кнопку.

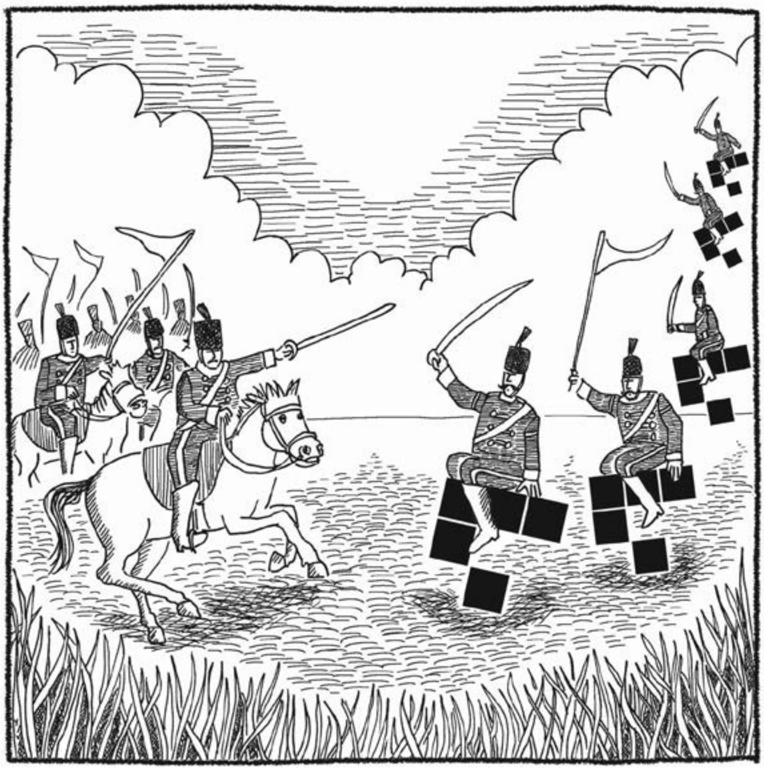
Первой крупной теоремой, доказанной с помощью компьютера, стала теорема о четырехцветной карте, или теорема о четырех красках. Мы с вами уже удостоверились, что любой машинальный рисунок может быть двухцветным, другими словами, что мы можем заштриховать его фрагменты так, чтобы две смежные области всегда были разных цветов. В 1852 году проживающий в Лондоне выходец из Южной Африки Френсис Гатри раскрашивал карту графств Англии. Он обнаружил, что для раскраски карты таким образом, чтобы соседние графства имели разные цвета, достаточно четырех красок. Эксперименты показали, что четырех цветов хватает и для того, чтобы раскрасить так любую карту. Однако больше столетия никто не мог это доказать, пока в 1976 году Кеннет Аппел и Вольфганг Хакен из Иллинойского университета не сделали это, воспользовавшись суперкомпьютером для проверки всех вероятных конфигураций карт. Математики отреагировали неоднозначно [18]. В принципе должна существовать возможность проверить каждую строку доказательства. Но компьютер выполнил слишком большой объем вычислений, для того чтобы можно было их все проверить, а это противоречило эталону доказательства теорем, использовавшемуся со времен Евклида. Однако помимо сугубо философских возражений против такого метода доказательства теорем существовали и другие претензии практического плана. В программах всегда есть ошибки. Разве могли Аппел и Хакен быть полностью уверены в том, что в их программе их нет? Нет, не могли. На самом деле в их доказательстве до сих пор находят новые компьютерные ошибки, хотя все обнаруженные ошибки были исправлены. В 1995 году группа исследователей Принстонского университета составила усовершенствованное компьютерное доказательство теоремы о четырехцветной карте. А в 2004 году Джордж Гонтье из исследовательской лаборатории компании Microsoft в Кембридже (Англия) проверил его с помощью специальной программы, определяющей корректность доказательств, хотя для этого ему пришлось перевести все концепции на специальный язык программирования, который понимала эта программа. Но тогда возникает следующий вопрос: разве можно быть уверенным в том, что такая программа-помощник не содержит ошибок? Нет, полной уверенности в этом нет, однако ее уровень все же выше, чем в случае исходных доказательств, поскольку эта программа была многократно протестирована при выполнении многих других задач. В настоящее время доказательство теоремы о четырех красках — одно из наиболее тщательно проверенных в математике.

После первоначального сопротивления автоматизированным доказательствам теорем со временем большинство математиков все же приняли их. Некоторые даже мечтают о том, что однажды все теоремы будут переведены на универсальный компьютерный язык для проверки доказательств, что позволит создать гигантскую формализованную систему, содержащую все доказуемые математические знания, в которой каждое утверждение строго выводится из совокупности базовых строк компьютерного кода. Когда это произойдет, мы все должны, раздевшись донага, прыгнуть в озеро с криками «Бурбаки!».

Компьютеры изменили ход доказательства теорем. Кроме того, они стали катализатором для формирования новой, захватывающей области математики.

Соседи по клеткам

10



В промозглый лондонский день я отправился на встречу с одним человеком, чтобы поговорить о космических кораблях. Пол Чэпмен сидел на террасе итальянского ресторана в темном пальто, а его панама сияла оранжевым цветом под излучением инфракрасного обогревателя. Темные брови нависали над большими очками без оправы, а лицо заросло взлохмаченной седой бородой. Пол принадлежит к единственной в своем роде группе людей, увлекающихся математической игрой под названием Game of Life («Жизнь»). Ему не терпелось рассказать мне о своем последнем открытии.

«Новость, достойная газетной статьи, — заявил Пол, вынимая из кармана черную записную книжку и разворачивая истрепанный лист бумаги. — Я ношу это с собой повсюду». Игру «Жизнь» изобрел сорок лет назад молодой преподаватель Кембриджского университета Джон Конвей, разработавший законы вымышленной вселенной, согласно которым конфигурации клеток квадратной решетки эволюционируют и мутируют самыми завораживающими и непредсказуемыми способами. Сейчас в этой вселенной существуют такие фигуры, как «фитили», «ружья», «паровозы» и «космические корабли». На листике Пола было изображение космического корабля «Джемини», состоящего почти из миллиона крохотных клеток и представляющего собой одну из самых крупных и сложных фигур, когда-либо построенных в игре «Жизнь». «Джемини» напоминал ромбовидный алмаз, образованный из нескольких «елочных» шаблонов. Пол нетерпеливо показывал на разные фрагменты этого корабля, объясняя, почему он такой особенный. «Джемини» — это первая самовоспроизводящаяся фигура, которая способна построить свою точную копию. Этот космический корабль *живой*. В конце концов жизнь породила жизнь. «Это удивительно, — воскликнул Пол. — За сорок лет мы еще не видели ничего подобного».

Мысль о том, что математическая квадратная решетка позволяет создать конфигурацию, достойную серьезных размышлений, восходит как минимум к так называемому решету Эратосфена, названному так по имени древнегреческого ученого-энциклопедиста, который, как мы с вами знаем, сделал первую достаточно точную оценку размеров Земли. Решето Эратосфена — это алгоритм поиска простых чисел. Мы начинаем отсчет по возрастанию с 1 и, достигнув первого подходящего числа, удаляем из списка все числа, кратные данному числу. (Этот метод очень похож на подход Джерри Ньюпорта, человека с синдромом гения, о котором шла речь в главе 1.) Первое простое число — 2, поэтому мы должны вычеркнуть из списка все четные числа. Второе простое число — 3, поэтому нам необходимо вычеркнуть все числа, кратные трем. Число четыре уже было вычеркнуто, поскольку оно четное, а значит, следующее простое число — 5 и т. д.

Решето Эратосфена для чисел от 1 до 100 можно представить в виде сетки с шестью рядами, как показано на рисунке ниже. Горизонтальные линии, проведенные по ряду после числа 2, а также по рядам, начинающимся с чисел 4 и 6, вычеркивают все четные числа, а линия после числа 3 — числа, кратные 3. Два набора диагональных линий вычеркивают числа, кратные 5 и 7. Больше никаких линий не нужно, поскольку, если в поисках простых чисел вы просматриваете список до числа n, вам нужно искать числа, кратные простым числам, которые не превосходят значения $\sqrt{n}$ [1]. В данном случае $n = 100$, поэтому мы можем прекратить поиск чисел, кратных простым, как только доберемся до числа 10.

1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97
2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98
3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	

Решето Эратосфена

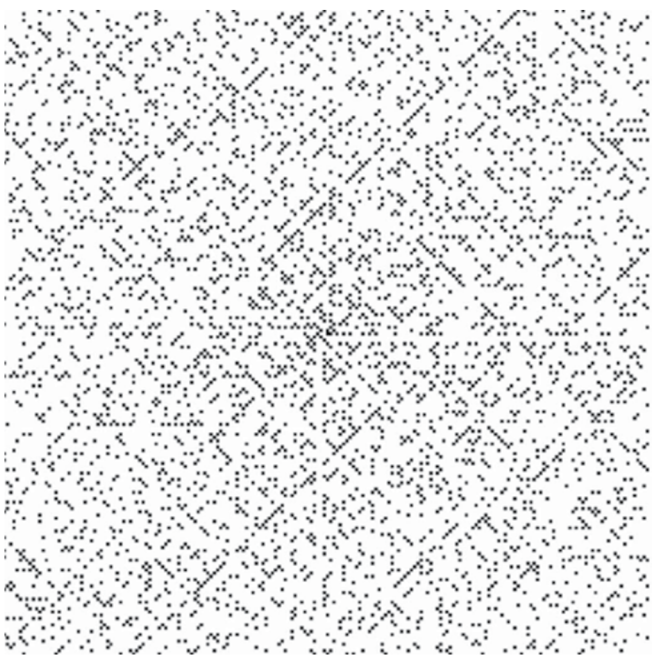
Это очень красивая и наглядная решетка, так как она сразу же говорит вам, что все простые числа должны находиться в первом и пятом рядах, а значит, они все либо на единицу больше, либо на единицу меньше числа, кратного 6. Однако самый важный момент, на который необходимо обратить внимание, — это причина, вынуждающая нас отсеивать числа: простые числа не появляются в каком-либо предсказуемом порядке. Если бы мы продолжили строить эту решетку до бесконечности, они были бы разбросаны в случайном порядке по первому и пятому рядам. Тот факт, что простые числа настолько легко найти, но их распределение столь непредсказуемо, — одна из самых ранних и наиболее непостижимых неожиданностей в математике.

В 1963 году 54-летний Станислав Улам отвлекся от лекции, на которой присутствовал, и принялся машинально чертить что-то на листе бумаги. Он нарисовал сетку из горизонтальных и вертикальных линий и стал нумеровать образованные путем их пересечения клетки, начав с единицы в центре и двигаясь по спирали. Наверное, ему было действительно скучно, потому что после этого он отметил все простые числа кружочками. Мы знаем, что простые числа не подчиняются очевидной закономерности, так что такого там увидел Улам? Как ни странно, он заметил нечто весьма неожиданное. Простые числа выстраивались вдоль диагональных линий (см. рисунок ниже), создавая рисунок, известный сегодня как спираль Улама. Когда Улам запрограммировал компьютер на построение такой спирали от 1 до 65 000, там тоже образовались диагонали, а также горизонтальные и вертикальные теневые области. Спираль Улама позволяет сделать волнующее предположение о том, что за беспорядочным шумом можно обнаружить музыку.

Улам был одним из польских математиков, которые в 1930-х годах во Львове принимали участие в создании «Шотландской книги». В 1935 году Джон фон Нейман, математик венгерского происхождения из Института перспективных исследований в Принстоне, пригласил Улама в США, куда тот и переехал навсегда в 1939 году. Четыре года спустя фон Нейман сделал Уламу, работавшему тогда в Висконсинском университете, более интригующее предложение: перебраться в Нью-Мексико и присоединиться к нему в работе над неизвестным проектом. Улам взял в университетской библиотеке путеводитель по штату Нью-Мексико и увидел, что до него путеводитель брали его коллеги, которые исчезли куда-то без всяких объяснений. Выяснив, в каких областях они работали, он понял, что именно его просят сделать.

Так Улам присоединился к Манхэттенскому проекту в Лос-Аламосе, где сыграл ключевую роль в разработке термоядерного оружия, а также создал новый раздел математики. Он понял, что если поведение физической системы является слишком сложным, то для того, чтобы его прогнозировать, нужно предоставить компьютеру возможность сделать множество случайных оценок, а затем получить более точные показатели с помощью статистических методов. Во время одной из поездок на автомобиле Улам объяснил этот метод фон Нейману; тогда и было придумано для него название — «метод Монте-Карло». Например, для того чтобы определить вероятность того, что

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82



Спирали Улама: числа от 1 до 100 (вверху) и от 1 до 65 000 (внизу) шарик рулетки остановится на черном, игроку не нужно решать уравнение — он может просто подсчитать, сколько раз шарик выпадает на черное после сотен случайных бросков. В настоящее время метод Монте-Карло является ключевым инструментом во многих областях науки. Но когда в Лос-Аламосе у Станислава Улама появлялось свободное время, он отдыхал, изобретая игры с одним участником, основанные на создании шаблонов из ячеек решетки. Изменение правил создания таких шаблонов позволяло строить фигуры, которые могли разрастаться и меняться весьма необычными способами.

Улам и фон Нейман были близкими друзьями, эмигрантами из Восточной Европы, выходцами из верхушки среднего класса с еврейскими корнями. Оба очутились в одинаковой политической ситуации, и оба обладали выдающимся интеллектом. Фон Неймана принято считать математиком, оказавшим заметное влияние на формирование облика современного мира: он один из создателей компьютеров, ядерной бомбы и теории игр (математики принятия решений). Личностные качества фон Неймана соответствовали его математическим достижениям. В Принстоне он славился как устроитель крупных вечеринок, во время которых часто удалялся в свой кабинет, потому что любил работать под шум таких гуляний.

Фон Нейман был очарован и одновременно напуган потенциальными последствиями, которые могли повлечь за собой создаваемые им машины. В период, наступивший после Второй мировой войны, в фантастических романах и голливудских фильмах изображалось будущее, где роботы захватили мир. Фон Нейман хотел выяснить, что понадобится машине, чтобы воспроизвести себя. Он провел мысленный эксперимент с участием плавающего в озере робота с глазом и механической рукой, умеющей брать необходимые комплектующие и строить новую версию себя. Однако этот эксперимент застопорился из-за механических осложнений. Улам выдвинул предположение, что, для того чтобы сосредоточиться исключительно на логических аспектах самовоспроизведения, вместо работы с реальной машиной фон Нейману следует проанализировать фигуры, образующиеся на решетке ячеек, как в пасьянсах, которые он раскладывал в Лос-Аламосе. В процессе обсуждения этой задачи двое ученых изобрели новую математическую концепцию — «клеточный автомат». По сути, это разграфленная на клетки поверхность, в которой поведение каждой клетки зависит только от состояния соседних клеток. Фон Нейман разработал клеточный автомат, в котором каждая клетка находилась в одном из 29 состояний, и придумал правила, призванные обеспечить самовоспроизведение исходного шаблона, состоящего из 200 000 клеток. Клеточные автоматы не привлекали к себе особого академического интереса до тех пор, пока на них не обратил внимание британский математик с еще более игривым разумом, чем у Улама.

В 1960-х годах комната отдыха математического факультета Кембриджского университета напоминала группу продленного дня в школе. Преподаватели и студенты постоянно играли там в настольные игры и придумывали новые. Идей было так много, что один преподаватель даже вел файл под названием Games Without Names («Игры без названий») и сопутствующий файл — Names Without Games («Названия без игр») [2]. В этой среде процветал Джон Конвей, ливерпульский фанатик игры в нарды и восходящая звезда математики. Одним из изобретений Конвея был клеточный автомат на квадратной сетке, которому он дал имя Game of Life («Игра “Жизнь”»). Однако слово «игра» не совсем соответствовало его сути, поскольку там не было победителей, проигравших и даже игроков. Игра «Жизнь» представляла собой двумерную вселенную, подчиняющуюся четырем законам. Смысл игры состоял в том, чтобы построить исходную конфигурацию, или первоначальный шаблон, а затем наблюдать за тем, как он эволюционирует.

В игре «Жизнь» клетка является либо живой, либо мертвой и подчиняется следующим правилам.

Рождение: мертвая клетка, имеющая *ровно три* живые соседние клетки, становится живой.
Выживание: живая клетка, имеющая *две или три* живые соседние клетки, продолжает жить.
Смерть от одиночества: живая клетка, у которой *нет* по соседству живых клеток или есть *только одна* такая клетка, умирает.
Смерть от перенаселенности: живая клетка с *четырьмя или более* соседними клетками умирает.

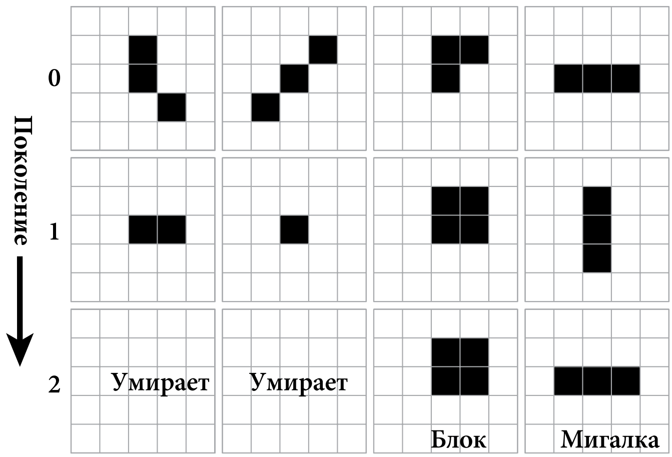
Примечание. У каждой клетки есть восемь соседей; к их числу относятся четыре смежные клетки и четыре клетки, с которыми она соприкасается по диагоналям в углах. Перечисленные выше законы применяются по отношению ко всем клеткам одновременно, и каждый раз, когда это происходит, появляется новое поколение клеток.

Вот и все. Больше в игре «Жизнь» делать нечего.

Конвей сформулировал правила рождения, смерти и выживания таким образом, чтобы шаблоны не погибали и не эволюционировали слишком быстро, но чтобы их поведение было как можно интереснее. Представьте себе одну живую клетку. Она умирает от одиночества в следующем поколении. Точно так же шаблон, состоящий из двух соседних клеток, погибает после смены поколения. Однако, когда мы начнем рассматривать фигуры, состоящие из трех живых клеток, эти организмы окажутся достаточно жизнеспособными, чтобы выжить — во всяком случае, на какое-то время. На представленном ниже рисунке показано, что происходит с конфигурацией клеток в виде шеврона, состоящей из трех живых клеток. (Живые клетки черные, мертвые — белые.) У двух живых клеток в основании шеврона есть только по одной живой соседней клетке, а значит, они умрут, когда мы применим к ним перечисленные выше законы. У живой клетки на вершине есть две живые соседние клетки, поэтому она выживает, а у мертвой клетки посредине три живые клетки по соседству, поэтому она становится живой. То есть в следующем поколении шеврон превращается в столбец из двух живых клеток, а еще в одном погибает.

Как эволюционирует шеврон

Судьба еще четырех исходных конфигураций из трех клеток (триплетов) показана на рисунке ниже. (На этом рисунке каждое новое поколение отображается ниже предыдущего. В действительности каждое новое поколение занимает те же клетки.) Ко второму поколению два триплета погибают. Однако квадрат из четырех клеток, который Конвей назвал «блоком», продолжает жить, оставаясь в неизменном виде во всех последующих поколениях. Конфигурация из выстроившихся в линию трех клеток, расположенная то вертикально, то горизонтально, известна как «мигалка». Фигуры, которые не меняются (подобные блоку) или находятся то в одном, то в другом фиксированном состоянии, называются устойчивыми конфигурациями.

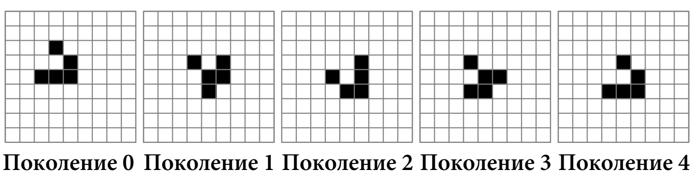


Судьба триплетов
Как эволюционирует шеврон

Настоящее волшебство мы увидим при анализе эволюции пяти тетрамино (фигур, положенных в основу компьютерной игры «Тетрис»), состоящих из четырех живых клеток, примыкающих друг к другу. Блок, как мы уже заметили, остается в неизменном состоянии. Четыре другие фигуры представлены на рисунке ниже. Тетрамино в форме букв I и S превращаются через два поколения в устойчивую конфигурацию, получившую название «улей», а L-образное тетрамино трансформируется в улей через три поколения. С другой стороны, тетрамино в форме буквы T обладает взрывной энергией и через девять поколений эволюционирует в окончательную конфигурацию, состоящую из четырех мигалок, — «светофор».

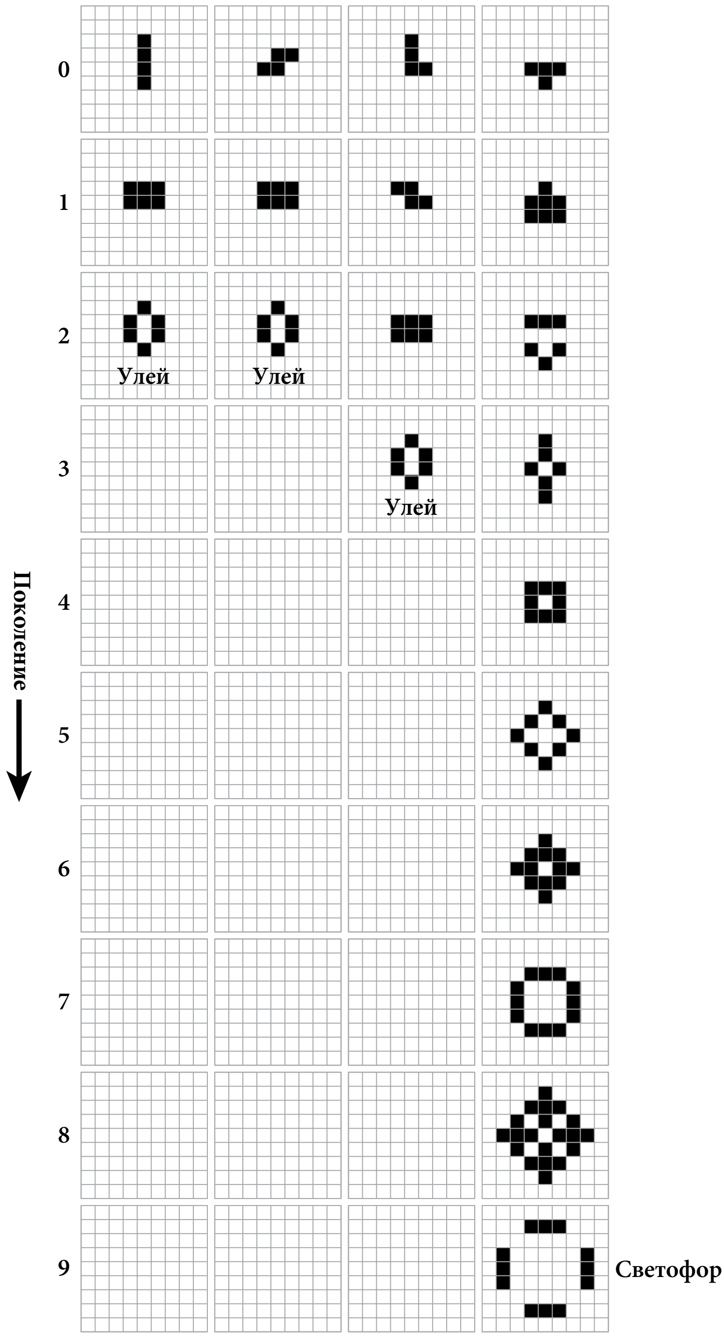
Самой увлекательной особенностью игры «Жизнь» была ее непредсказуемость. Не было другого способа узнать, что произойдет даже с самыми простыми фигурами, кроме отслеживания их жизни на протяжении многих поколений, что Конвей и его коллеги делали вручную. Живые клетки были фишками, которые размещались на доске для игры го с разметкой 19 × 19 линий. Когда для шаблона требовалось больше места, на полу укладывали дополнительные доски. Были найдены новые устойчивые конфигурации, получившие такие названия, как «батон», «корабль», «лодка» и «змея». Иногда исходный шаблон погибал или быстро менялся, превращаясь в одну из известных устойчивых конфигураций, а иногда начинал жить своей жизнью, что приводило всех в сильное волнение. Например, пентамино в форме буквы R состояло всего из пяти клеток, но продолжало эволюционировать на протяжении десятков поколений, пока на 69-м поколении не произошло исключительное событие. Эта конфигурация произвела на свет фигуру из пяти клеток, скользившую по доске.

Новая фигура получила имя «глайдер» (ее поведение проиллюстрировано на рисунке ниже). Через два поколения конфигурация переворачивается на другую сторону, а еще через два снова поворачивается таким образом, что оказывается на одну клетку ниже и на одну дальше от исходной позиции. Глайдер продолжает смещаться на одну клетку вниз и одну вперед каждые четыре поколения. Он будет двигаться в одном и том же направлении по диагонали до бесконечности, если ничто не преградит ему путь. «Главный систематик» Конвей выделил в игре «Жизнь» новый вид фигур, подобных глайдеру, которые перемещаются по прямым линиям, и назвал их космическими кораблями.



Глайдер

В 1970 году журналист Мартин Гарднер написал об игре «Жизнь» в своей многолетней рубрике в журнале Scientific American, что способствовало превращению математической игры Конвея в одно из первых компьютерных увлечений, охвативших весь мир [3]. Отслеживание эволюции фигур в игре «Жизнь» на доске для го требовало больших временны́х затрат и не было защищено от ошибок. Компьютеры позволяли отслеживать конфигурации гораздо дольше; кроме того, когда сменяющие друг друга поколения клеток мелькали на экране, фигуры как будто оживали [4]. Решетка с разбросанными по ней живыми клетками представляла собой первичную среду обитания изменчивых, постоянно преобразующихся конфигураций. Например, R-образное пентамино искрилось и пенилось на протяжении целых



Судьба тетрамино

1103 поколений, оставляя после себя обломки в виде корабля, лодки, батона, четырех ульев, четырех мигалок, шести глайдеров и восьми блоков. Запрограммировать игру «Жизнь» не составляло труда, поскольку в ней было всего четыре правила; тем не менее эта игра демонстрировала слишком сложное поведение, и его еще не удавалось добиться на компьютерах. Создание шаблонов и наблюдение за их дальнейшей жизнью вызывали такую зависимость, что, по оценкам Гарднера, это обошлось американской экономике в миллионы долларов компьютерного времени. Один читатель рассказал Гарднеру, что установил под своим рабочим столом секретную кнопку, для того чтобы переключать компьютер на игру «Жизнь», когда коллеги выходят из кабинета.

В Массачусетском технологическом институте (МТИ) игра «Жизнь» стала *образом жизни*. Одна сплоченная группа склонных к анархии и веселью, но очень умных студентов поставила перед собой цель изучить эту игрушечную вселенную глубже, чем кто-либо другой [5]. Это были первые компьютерные хакеры, настоящие техногики*. Общинная, антиавторитарная позиция хакеров оказала огромное влияние на формирование зарождающейся компьютерной культуры Америки, задавая тон новаторам более позднего периода, таким как Стив Джобс и Билл Гейтс. «План состоял в том, чтобы просто собрать всю эту дичь и одомашнить ее», — объяснил Билл Госпер, король хакеров, который преподает сейчас математику в Лос-Альтосе. Госпер проводил целые ночи в компьютерном зале MIT, играя в «Жизнь», и так продолжалось почти два года.

Конвей опубликовал на страницах журнала Scientific American задачу и предложил за ее решение приз в размере 50 долларов. Существует ли конфигурация, которая продолжает расти и у которой общее количество живых клеток увеличивается бесконечно? Госпер нашел такую конфигурацию и получил приз. «Глайдерное ружье» — это фигура из 36 живых клеток, пульсирующая как бьющееся сердце, порождая новый глайдер через каждые 30 поколений. Эти глайдеры один за другим отдаляются от исходной фигуры по диагонали, подобно бесконечному потоку пуль, выстреливаемых из ружья.

---

* Слово hack («рубить», «кромсать») впервые было использовано в клубе любителей моделей железных дорог, функционировавшем в МТИ, для обозначения переделки моделей исключительно ради удовольствия, однако впоследствии так начали называть любые действия по усовершенствованию компьютерных программ. Только много лет спустя слово «хакер» приобрело современное значение — компьютерный злоумышленник.

Открытие глайдерного ружья сместило фокус изучения игры «Жизнь» с зоологии на физику. Госпер и его друзья-натуралисты больше не занимались пассивным исследованием флоры и фауны, переключившись на баллистику и изобретение фигур, в состав которых входят глайдерные ружья, стреляющие в другие фигуры. Можно было выстрелить двумя глайдерами друг в друга таким образом, что оба исчезали, не оставив после себя никаких обломков, как будто каким-то волшебным образом растворяясь в воздухе. «Мы пытались найти способ создавать что-то новое, сталкивая глайдеры между собой и наблюдая, что из этого выйдет, — объяснял Госпер. — А затем возникал другой вопрос: что произойдет, если ударить глайдерами по фигурам, полученным в результате столкновения глайдеров?» В ходе поиска ответа на этот вопрос Госпер открыл новую устойчивую конфигурацию из семи клеток под названием «пожиратель». Когда глайдер сталкивается с пожирателем, первый исчезает, а второй восстанавливается до исходного состояния, что создает впечатление, будто он поглотил глайдер. Кроме того, пожиратель поглощает другие устойчивые фигуры, расположенные рядом с ним, всегда восстанавливаясь после первоначального взаимодействия.

Пожиратель был первым признаком того, что игре «Жизнь» можно найти применение в реальном мире, например в проектировании объектов, которые способны к самовосстановлению. Нельзя сказать, что Госпера интересовало именно это. Для него было важно то, что глайдерное ружье и пожиратель позволяют вывести игру «Жизнь» на новый уровень — уровень разработки *больших проектов*, в рамках которых огромные конфигурации можно было бы создавать из сотен глайдеров, скачущих между разными элементами, а пожирателей разместить таким образом, чтобы они подбирали ненужные обломки. Первой конфигурацией подобного типа, которую Госперу удалось составить, был так называемый размножитель — фигура, порождающая глайдеры. Он начинает где-то с 50 глайдеров и ускоряет их воспроизведение так быстро, что примерно на 6500-м поколении количество глайдеров превышает количество поколений.

По мере увеличения банка знаний любители игры «Жизнь» выстраивали все более удивительные конфигурации. Одна из моих любимых представляет собой имитацию решета Эратосфена — метода поиска простых чисел, используемого древними греками. Решето, смоделированное в игре «Жизнь», состоит в основном из ружей, глайдеров и пожирателей. Его исходная конфигурация включает 5169 живых клеток [6]. Основной элемент решета — ружье, выстреливающее фигуру из 9 клеток под названием «легкий космический корабль» в горизонтальном направлении, через равные промежутки времени. Глайдеры обстреливают космические корабли, из которых выживают только второй, третий, пятый, седьмой, одиннадцатый и т. д. — другими словами, корабли, порядковый номер которых — простое число. (Подробное разъяснение того, как это работает, можно найти в Приложении 8.)

Мне нравится решето, смоделированное в игре «Жизнь», поскольку из древнегреческого математического инструмента оно превратилось в межгалактическую перестрелку между флотилиями глайдеров и космических кораблей. Наблюдать за данной конфигурацией — это как будто смотреть батальную сцену в фантастической эпопее или, возможно, отслеживать эволюцию колонии муравьев, поведение которых носит сугубо математический характер. Не забывайте: как только вы построите исходную конфигурацию, вам не нужно вмешиваться в дальнейший процесс. Эта фигура может продолжать свою жизнь до бесконечности, отстреливая космические корабли и оставляя в живых лишь те из них, порядковый номер которых представляет собой простое число.

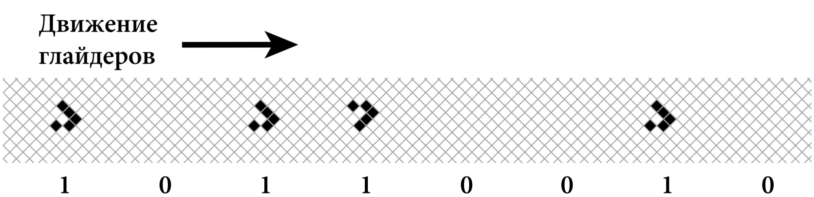
«Уровень мастерства реально поражает, — сказал Госпер о самых лучших конфигурациях. — Люди, которые пытаются [создавать фигуры], быстро осознают, насколько это сложно, а удачные образцы приводят их в неописуемый восторг. Для того чтобы сосредоточиться на игре в достаточной степени, нужно находиться почти в состоянии невменяемости». За период с семидесятых годов до наших дней построены сотни удивительных конфигураций, в том числе и вычисляющая значение числа π, которую изобрел британский подросток по имени Адам Гаучер. К чему еще стремиться? «Жизнь — неистощимый источник вопросов и задач», — резюмировал Госпер.

Игра «Жизнь» подвергает сомнению наши предвзятые представления о том, как работает этот мир, поскольку она показывает, как простой набор локальных правил может генерировать невероятно сложное общее поведение. При взгляде на такую идеально интегрированную систему, как решето Эратосфена, удивляет то, что каждая клетка взаимодействует всего с восемью соседними клетками.

Игра «Жизнь» демонстрирует также существование разных реальностей на разных уровнях игры. Решето Эратосфена — это конфигурация, разработанная на основе физических свойств глайдерных ружей с использованием технологии столкновений и космических кораблей. Однако на более детальном уровне таких вещей, как «столкновение» или «космический корабль», нет. Есть лишь неподвижные клетки, которые могут быть либо «живыми», либо «мертвыми».

По мере создания все более сложных фигур возникает вопрос: каков предел того, что может сделать конфигурация в игре «Жизнь»? Да буквально все, на что способен ваш ПК, планшет или смартфон. Если задача выполнима с помощью компьютера, тогда это можно сделать и посредством конфигурации в игре «Жизнь».

Конвей доказал истинность этого утверждения, продемонстрировав, что можно создать компьютер «Жизни», другими словами — исходную конфигурацию живых клеток, имитирующую внутреннюю схему компьютера. Вам придется поверить мне на слово (или прочитать книгу по информатике), но внутренняя схема компьютера на базовом уровне состоит из следующих компонентов: проводники, логические элементы и регистр памяти. Генератор тактовых импульсов порождает электронные импульсы, представляющие двоичные числа. Наличие импульса — это 1, а его отсутствие — 0. Конвей понял, что глайдеры могут выполнять функции импульсов, передающихся по проводникам. Следовательно, поток глайдеров может представить любое число, состоящее из нолей и единиц, как показано на рисунке ниже. Поскольку глайдеры двигаются по диагонали, я разместил сетку под углом 45 градусов.

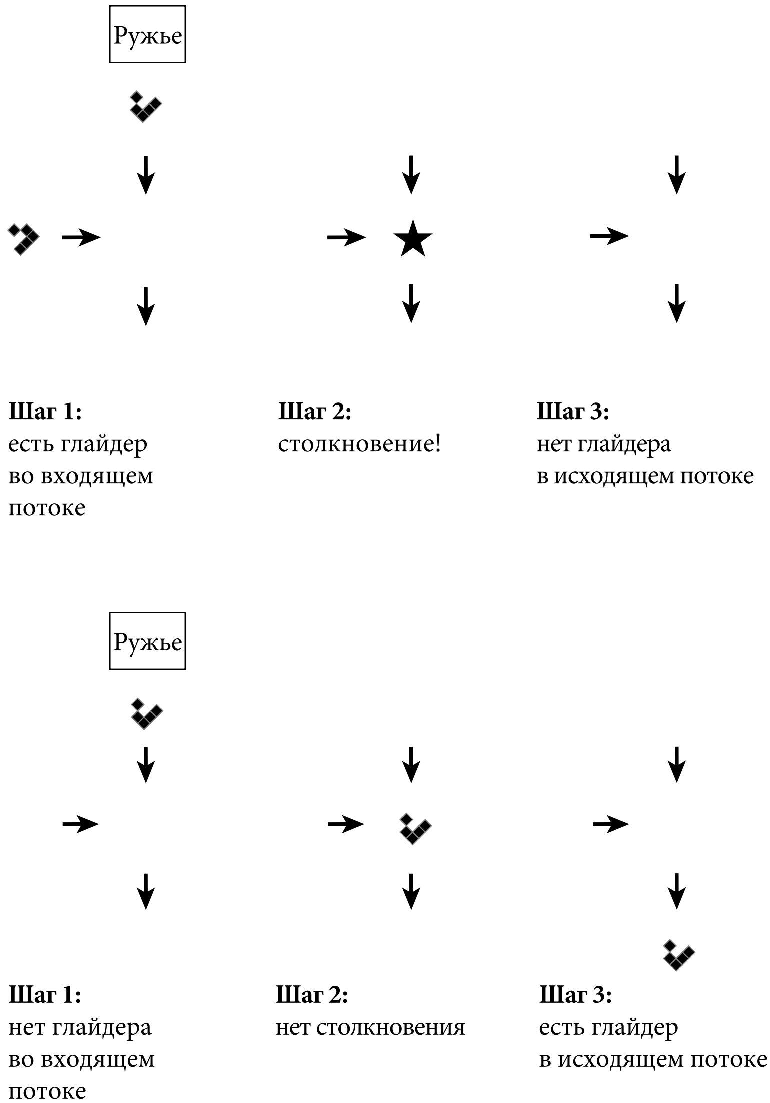


Поток глайдеров

Конвей разработал логический элемент простейшего типа, выполняющий операцию НЕ (операцию отрицания) [7]. Логический элемент — это устройство, имеющее несколько входов и выходов. У логического элемента, выполняющего операцию НЕ, только один вход и один выход. Сигнал на выходе противоположен сигналу на входе: он меняется с 1 на 0 и с 0 на 1. Следовательно, логический элемент отрицания в игре «Жизнь» должен превратить наличие глайдера во входящем потоке в его отсутствие в исходящем потоке и наоборот. Конвей понял, что эту функцию может выполнить стратегически правильно размещенное глайдерное ружье, как показано на рисунке ниже. Входящий поток перемещается горизонтально, слева направо. Глайдерное ружье стреляет по глайдерам вертикально вниз. Если во входящем потоке появляется глайдер, его уничтожает глайдер, порожденный ружьем. Но если во входящем потоке глайдера нет, глайдер из ружья проходит невредимым, поскольку ему не с чем сталкиваться. Таким образом, исходящий поток содержит 1, если входящий поток содержит 0, и 0 — если 1. Это и есть логический элемент, выполняющий операцию НЕ. Исходящий поток находится под прямым углом к входящему потоку, но это не имеет значения, так как мы можем изменить направление потока в дальнейшем в случае необходимости.

Все логические элементы выполняют операции трех базовых типов: НЕ, И и ИЛИ. Конвей сконструировал также состоящие из ружей и пожирателей конфигурации, имитирующие логические элементы для операций И и ИЛИ. Он показал, что можно сделать так, чтобы потоки глайдеров меняли направление движения, что моделировало изгибы проводников. Конвей также продемонстрировал, как сделать потоки глайдеров разреженными, чтобы два потока могли пересечься, избежав при этом столкновения глайдеров, что изображало пересечение проводников. Кроме того, он показал, как сделать регистр памяти из блоков. Каждый блок представляет собой какое-то число в зависимости от его расстояния от определенной точки. Глайдеры, которые врезаются в блок, перемещают его ближе к этой точке или дальше от нее, меняя значение блока. Это подтвердило правильность выдвинутой Конвеем гипотезы: построив в игре «Жизнь» проводники, логические элементы и регистр памяти, он доказал, что игра, ставшая его математическим хобби, теоретически способна (при наличии достаточно большой сетки) имитировать любой существующий в нашем мире компьютер.

Получив приведенное выше доказательство, Джон Конвей потерял интерес к игре «Жизнь». (В 1986 году он переехал в Принстон, чтобы возглавить кафедру математики вместо Джона фон Неймана.) Однако многие ее поклонники были настолько ею увлечены, что у них появилась зависимость, которая со временем лишь усиливалась. Международное сообщество любителей игры «Жизнь» насчитывает около сотни членов; к их числу относился и Пол Чэпмен, решивший на рубеже столетий построить компьютер в игре «Жизнь». «Знать, что что-то можно сделать, и сделать это — совершенно разные вещи», — заявил он.



Логический элемент отрицания содержит ружье, которое выстреливает в глайдеры, движущиеся перпендикулярно входящему потоку

Подобно многим любителям игры «Жизнь», Пол не был научным сотрудником. В 1970-х он изучал математику в Кембридже (и слушал лекции Конвея), а затем стал консультантом по информационным технологиям. В настоящее время Пол живет в центре Лондона, неподалеку от ресторана, в котором мы с ним встретились. Он предпочел столик на улице, несмотря на плохую погоду, поскольку ему не нравился запрет на курение внутри заведения. Когда мы разговаривали, Пол скручивал собственные сигареты. «Я люблю “Жизнь” потому, что она полна сюрпризов, — признался он. — Каждый раз, когда вы ищете способ сделать что-то лучше, вы найдете десятки таких способов».

У обычного компьютера есть аппаратное и программное обеспечение; точно так же и созданная в игре «Жизнь» конфигурация, имитирующая работу ПК, имела «железо» и «программы». Первое моделировало кабели машины, а второе — программу, которую она должна читать. В своем прототипе компьютера в игре «Жизнь» Пол использовал не созданную Конвеем сеть из ружей, глайдеров и пожирателей, а более современную и эффективную технологию, основанную на исходном шаблоне из семи клеток под названием «Гершель». Его конфигурация состояла из нескольких миллионов живых клеток и программы, содержащей инструкции по поводу того, как вычислить сумму 1 + 2. «Для поиска суммы 2 + 3 понадобилось бы слишком много времени», — объяснил Пол. Конфигурация начиналась с космического корабля, поражающего устойчивую фигуру, которая порождала сигнал о столкновении с разными элементами, а те, в свою очередь, порождали другие сигналы, и маршрут перемещения сигналов по всей системе напоминал гигантскую игру в одну из разновидностей бильярда. В конце концов блок в регистре вывода показывал число 3. «Я был в восторге, — сказал Пол. — Если я могу сложить один и два, это говорит о том, что эта же машина может рассчитать миллионную цифру числа π, управлять системой Windows или, если ввести правильные параметры, смоделировать жизненный цикл звезды!»

Безусловно, компьютер, построенный Полом в игре «Жизнь», был неприменим на практике для выполнения всех этих задач. Но он вернул «Жизнь» к ее истокам. Джон фон Нейман выдвинул идею клеточного автомата во время изучения процесса самовоспроизведения. Конфигурация Пола открыла заманчивую возможность создания самовоспроизводящихся сущностей в игре «Жизнь».

На первый взгляд фигуры, эволюционирующие на решетке игры «Жизнь», кажутся живыми, так как по мере смены поколений они трансформируются и меняют направление. Однако для того, чтобы некий объект действительно был живым, он должен обладать способностью к самовоспроизведению.

Но что это такое? Глайдер, например, воспроизводит себя достаточно просто. Это состоящая из пяти клеток фигура, которая каждые четыре поколения возвращается в исходную форму, сместившись на одну клетку вниз и одну в сторону. Фон Нейман хотел знать, как машина может *построить* точную копию самой себя. Для того чтобы это понять, ему предстояло решить математическую головоломку, поскольку механическая сторона процесса самовоспроизведения содержит один логический парадокс.

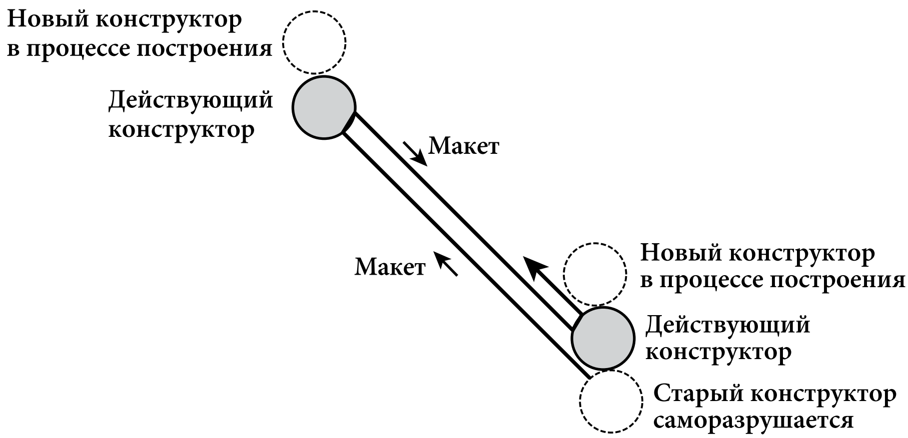
Мы с вами уже говорили о том, что компьютеры состоят из аппаратного и программного обеспечения. Давайте назовем аппаратное обеспечение «конструктором», а программу, которую мы вводим в конструктор, чтобы он построил копию себя, — «макетом». Мы рассчитываем на то, что после ввода макета конструктор воспроизведет новый конструктор вместе с новым макетом, по сути, создав копии двух исходных элементов. Но здесь возникает вопрос: *содержит ли макет инструкции относительно создания нового макета?* Если да, тогда они должны также содержать инструкции по поводу создания нового макета, который, в свою очередь, должен содержать инструкции по поводу того, как создать инструкции в отношении построения нового макета — и так далее до бесконечности. В итоге мы получаем бесконечную регрессию инструкций, содержащихся в данном макете, что недопустимо, поскольку макет должен быть конечным. С другой стороны, если макет не включает никакую информацию о себе, машина не сможет себя полностью воссоздать, поскольку в новой машине нет макета. Прежде чем думать о технической стороне дела, фон Нейману следовало разобраться с математикой.

В итоге фон Нейман пришел к такому выводу: для того чтобы машина могла воспроизвести себя, необходимо ввести в систему новый элемент, который бы воссоздавал макет, другими словами — устройство для копирования макета. Таким образом, когда конструктор считывает макет, он строит новую машину, совершенную во всех отношениях, кроме одного — в ней нет макета. На последнем этапе устройство копирования должно создать копию макета и отправить ее в новую машину. Следовательно, самовоспроизводящаяся машина фон Неймана использует макет двумя разными способами: конструктор *читает* его как набор инструкций, а копировальное устройство *создает его копию*. Только применение макета один раз в качестве программы, а другой — в качестве объекта позволило решить чрезвычайно трудную проблему бесконечной регрессии.

Конфигурация, созданная фон Нейманом для своего первого клеточного автомата, состояла из конструктора, устройства копирования и макета. Теоретически он показал, что она способна к самовоспроизведению, но не продемонстрировал этого на практике, поскольку компьютеры тогда еще не были достаточно мощными для этого. Тем не менее работа фон Неймана оказала заметное влияние на целое поколение специалистов в области вычислительных машин и систем, философов и даже биологов, которые изучали в 1950-х годах механизм репродукции живых клеток. Когда на протяжении этого и следующего десятилетия им все же удалось раскрыть специфику данного механизма, они обнаружили, что фон Нейман прав! В свое время он создал абсолютно точную модель самовоспроизведения живых организмов. В каждой клетке есть макет (ее ДНК), содержащий закодированные инструкции по репродукции новых клеток. Однако в ДНК нет описания самой ДНК — та ДНК, которая появляется в новой клетке, представляет собой результат копирования (двойная спираль ДНК делится на две части, а ферменты создают две точные копии исходной ДНК). Подобно тому как машина фон Неймана прочитывает макет двумя способами, ДНК также ведет себя по-разному в процессе воспроизводства живой клетки.

Пол Чэпмен попытался построить самовоспроизводящуюся конфигурацию клеток, но не смог найти способ копирования макета. И вот в 2010 году канадский программист Эндрю Уэйд объявил о создании космического корабля «Джемини». «Когда я впервые увидел его, я пришел в восторг! — воскликнул Пол. — “Джемини” — это самая важная фигура за все сорок лет. И никто даже не знал, кто такой Эндрю Уэйд! Он просто написал об этом на доске объявлений!»

«Джемини» — первая самовоспроизводящаяся конфигурация в игре «Жизнь». Как показано на рисунке ниже, эта фигура имеет форму очень длинной и тонкой гантели, на концах которой находятся идентичные конструкторы (отсюда название «Джемини» — «близнецы»), а между ними на решетке размером 4 миллиона × 4 миллиона клеток расположен макет, состоящий из глайдеров. Оригинальная идея Уэйда заключалась в том, чтобы вместо создания копий макета обеспечить его быстрое перемещение между двумя конструкторами. Когда макет достигает одного из конструкторов, он дает ему указание построить свою новую версию на 5120 клеток вверх и 1024 клетки в сторону и одновременно уничтожить себя. После этого макет отправляется в обратном направлении, где через миллионы клеток достигает противоположного конструктора и тоже дает ему указание построить свою новую версию на 5120 клеток вверх и 1024 клетки в сторону, а затем саморазрушиться. Этот цикл, после которого вся конфигурация смещается на 5120 клеток вверх и 1024 клетки в сторону, повторяется каждые 33,7 миллиона поколений. Поскольку конфигурация «Джемини» двигается, ее считают космическим кораблем, но она двигается не посредством кувырков, как это делает глайдер, а с помощью процесса самовоспроизведения. «Самое блестящее, что сделал Эндрю Уэйд, — сказал Пол, — это устранил этап создания копии [макета] и сделал так, что [макет] просто появляется как гром среди ясного неба, причем в самый подходящий момент для того, чтобы дать инструкции».



«Джемини» — это первый космический корабль, движение которого основано на самовоспроизведении

С «Джемини» связано еще одно важное достижение: это первый космический корабль, который перемещается наискось, то есть не в горизонтальном и не в вертикальном направлении и не под углом 45 градусов к сетке.

Пол показал мне лист бумаги с изображением одного из конструкторов «Джемини». Он с гордостью упомянул о том, что в его основу положен компьютер, созданный им в игре «Жизнь». Изображение конструктора напоминало кляксу, состоящую из группы серых шевронов в окружении крохотных точек. Я спросил Пола, есть ли у него изображение всего корабля «Джемини». Он ответил, что в этом нет смысла, поскольку в таком масштабе эта фигура была бы настолько разреженной, что оказалась бы практически невидимой. Почти вся конфигурация представляет собой поток глайдеров. Как ни странно, макет занимает намного больше места, чем конструктор. В клеточном автомате фон Неймана тоже присутствовал подобный дисбаланс: его конструктор помещается в сетку 97 × 170, тогда как макет имеет длину 145 315 клеток. Крупные конфигурации состоят в основном из пустого пространства. «Возможно, в игре “Жизнь” так много пустого пространства по той же причине, почему его так много в нашем мире, — пояснил Пол. — У атомов должно быть достаточно места для того, чтобы они выполняли свою работу».

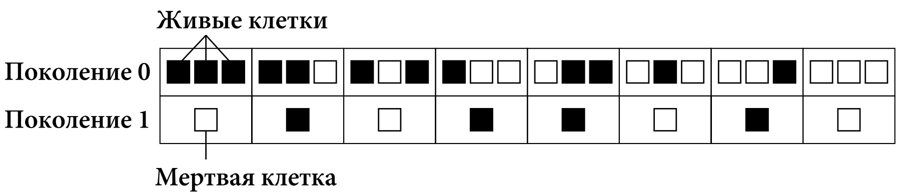
Появление «Джемини» усилило ожидания в отношении следующего этапа исследования игры «Жизнь» [8]. Если исходная конфигурация порождает копии, в которых есть небольшие отличия от оригинала, это может обусловить дарвиновский естественный отбор. В 1982 году Джон Конвей выдвинул предположение о том, что если бы решетка игры «Жизнь» была достаточно большой и в исходном состоянии клетки располагались на ней в случайном порядке, то «через приличный промежуток времени появились бы разумные существа, способные к воспроизводству». Три десятилетия спустя эта гипотеза Конвея по-прежнему будоражит кровь любителям игры «Жизнь». Самую интересную работу выполняет Ник Готтс, специалист по комплексным системам из Абердина (Шотландия), который ищет новые конфигурации, заполняя сетку игры «Жизнь» живыми клетками в произвольном порядке. Он называет свой проект «рассеянной Жизнью», поскольку относительная доля живых клеток должна быть довольно низкой по сравнению с количеством мертвых клеток, иначе это приведет к слишком большому числу неконтролируемых взаимодействий. «В некоторых конфигурациях присутствует нечто, напоминающее естественный отбор, — объясняет Ник. — Есть конфигурации, регулирующие появление других конфигураций аналогичного типа. Я убежден, что, если бы моя программа выполнялась достаточно долго, вступил бы в действие закон естественного отбора».

Клеточные автоматы с более простой структурой, чем игра «Жизнь», могут демонстрировать столь же сложное поведение. Рассмотрим в качестве примера *одномерный* клеточный автомат: ряд клеток, в котором каждая клетка имеет только двух соседей. Кроме того, каждая клетка может быть либо живой, либо мертвой.

Возьмем следующее правило:

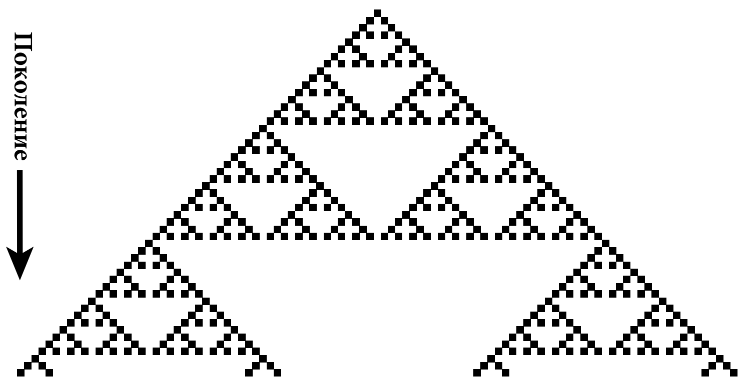
Если оба соседа клетки пребывают в том же состоянии, что и она сама, то клетка умирает в следующем поколении. В противном случае в следующем поколении она остается живой.

Это правило проиллюстрировано ниже. На рисунке показаны восемь возможных комбинаций клетки и двух ее соседей. Под каждой комбинацией изображено состояние клетки после смены поколения. В первой комбинации живая клетка находится в окружении двух живых соседних клеток. Значит, в следующем поколении она умрет. Вторая комбинация содержит живую клетку слева и мертвую справа, стало быть, средняя клетка останется в следующем поколении в живых. Если две соседние клетки одинакового цвета, внизу будет получена белая клетка. Если разного, нижняя клетка будет черной.



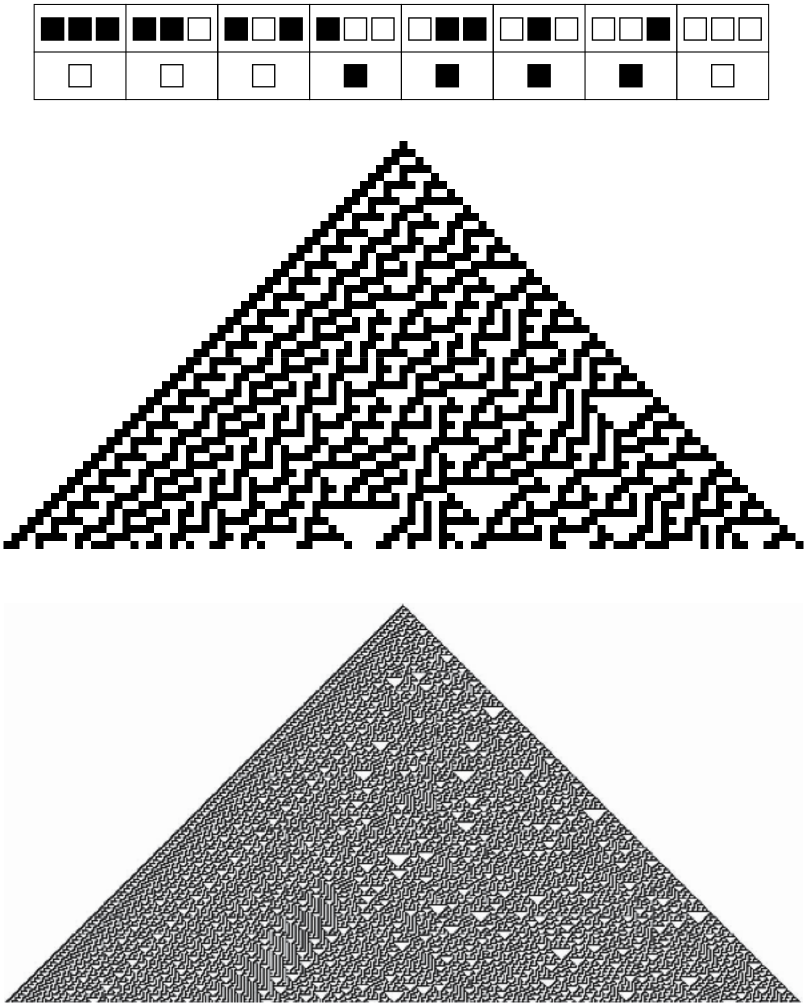
Чтобы понять суть этого правила, представьте себе группу людей, стоящих каждое утро в очереди на автобусной остановке, причем в одном и том же порядке. У каждого человека два соседа, по одному с каждой стороны. Пусть наше правило касается шляп: если оба ваши соседа носят шляпу, то шляпы — это слишком типичное явление, поэтому на следующий день вы шляпу не наденете. Если ни у одного из соседей шляпы нет, значит, они не в моде, поэтому на следующий день вы тоже шляпу не наденете. Однако если шляпу носит только один ваш сосед, то она еще не вышла из моды и не говорит о плохом вкусе. Данный клеточный автомат представляет собой модель изменения ежедневных предпочтений в ношении головных уборов.

Для того чтобы проиллюстрировать поведение одномерного клеточного автомата, давайте нарисуем ряд с одной живой клеткой (поколение 0), а затем применим указанное выше правило к каждой клетке для создания нового ряда, расположенного ниже (поколение 1). Затем применим это правило к каждой клетке данного ряда, чтобы получить следующий новый ряд (поколение 2), и т. д. На представленном рисунке показано, что при этом произойдет. (Обратите внимание, что вершина треугольника — это живая клетка первого ряда, а каждый новый ряд — следующее поколение, в отличие от игры «Жизнь», где вся сетка образует одно поколение. Я опустил на рисунке саму сетку, чтобы полученная конфигурация была видна более четко.) В итоге мы получим прекрасный математический зиккурат, известный как «треугольник Серпинского», — фрактальную структуру, состоящую из вложенных треугольников.



Существует 8 комбинаций клетки и ее соседей, а также два возможных состояния (живая или мертвая клетка), а значит, есть $2^8 = 256$ разных наборов «генетических правил» для одномерных клеточных автоматов. Эти правила пронумерованы от 1 до 256. На представленном выше рисунке показано правило 90, порождающее упорядоченные фигуры. Другие правила, такие как правило 30, более причудливы. Это правило, а также конфигурация, которую оно порождает, начиная с одной живой клетки, проиллюстрировано на рисунке ниже. Данная конфигурация представляет собой совокупность упорядоченных и хаотичных фрагментов. Зигзагообразная корка на левой боковой поверхности демонстрирует упорядоченность. Однако по мере передвижения направо мы видим неупорядоченную бугристую поверхность, состоящую из треугольников самых разных форм и размеров.

На визитных карточках Стивена Вольфрама изображен рисунок фигуры, которую порождает правило 30. Когда я встретился с ним, он вынул такую визитку из бумажника и дал мне. Мы расположились в главном офисе его компании Wolfram Research, находящемся в городе Шампейн. У Вольфрама



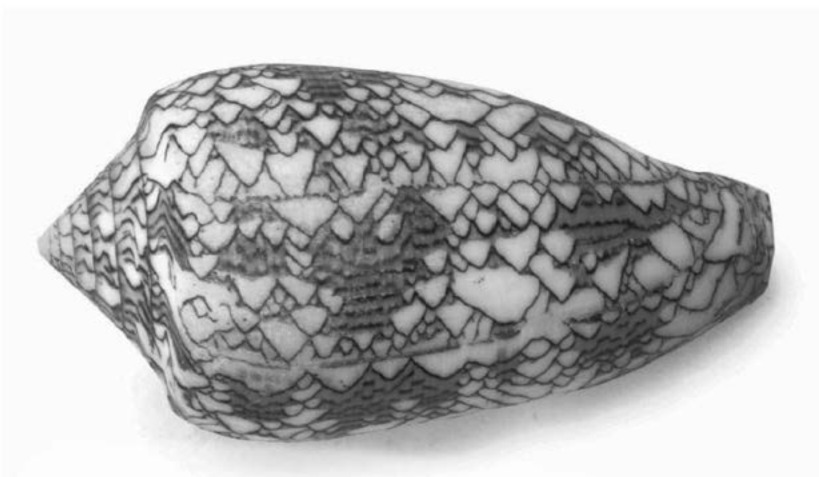
Правило 30: его генетические законы, его эволюция после 50 поколений и эволюция после более 200 поколений

лицо обладающего необыкновенными математическими способностями ребенка, достигшего средних лет: круглое и бледное, с хохолками волос вокруг типичной профессорской макушки. Во время разговора он пристально всматривался куда-то, думая о чем-то своем, а его глаза за стеклами очков мерцали, подобно электронному дисплею, демонстрируя неустанную работу мозга. Вольфрам рано начал научную карьеру, опубликовав свою первую исследовательскую работу еще во время учебы в Итоне в 1970-х. Когда ему исполнилось немногим более двадцати лет, он уже работал в Институте перспективных исследований в Принстоне. Став одним из первых новообращенных в компьютерную веру, он разработал язык программирования, который лег в основу системы компьютерной алгебры *Mathematica* — пакета программ, позволяющих чертить кривые и решать уравнения. В настоящее время она широко используется в сфере образования и разных отраслях экономики. С 1987 года Вольфрам возглавляет компанию Wolfram Research, которая благодаря успеху системы *Mathematica* дала ему возможность проводить собственные научные исследования независимо от университетов.

Вольфрам первым в восьмидесятых годах достаточно глубоко изучил одномерные клеточные автоматы; нумерация правил от 1 до 256 берет свое начало именно в его работе. Когда Вольфрам увидел правило 30, это было подобно удару молнии в его научной интуиции. «Это самое удивительное, с чем я когда-либо встречался в науке», — сказал он. Вольфрам был поражен тем, что такое простое правило способно сгенерировать столь сложную конфигурацию. Он внимательно проанализировал колонку, расположенную под исходной живой клеткой в первом ряду. Если взять за основу то, что живая клетка — это 1, а мертвая — 0, то эта колонка состояла из таких клеток: 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0… В этом не было никакой закономерности. К большому удивлению Вольфрама, стандартные статистические тесты показали, что это абсолютно произвольная последовательность. Правило 30 полностью детерминировано, однако конфигурация ячеек в центральном столбце настолько непредсказуема, что ее невозможно отличить от последовательного подбрасывания монеты. (Вольфрам запатентовал правило 30 как генератор случайных чисел и применил его в системе *Mathematica*.)

Внимание Вольфрама привлекло еще одно правило — правило 110. Оно формировало сетку ячеек, которая тоже представляла собой совокупность регулярных и случайных фигур. Вольфрам предположил, что данного уровня сложности достаточно для такой же имитации работы компьютера, на которую способна игра «Жизнь». В 2004 году Мэтью Кук доказал истинность предположения Вольфрама. Следовательно, теоретически единственный ряд клеток может сделать все, что и компьютер, используя всего один набор правил, определяющих, является ли клетка живой или мертвой, только на основании информации о состоянии двух ее соседей. Точно так же один ряд людей может сделать все, на что способен компьютер, воспользовавшись всего одним набором правил, определяющих, следует ли надевать шляпу или нет.

Клеточные автоматы — это дискретные математические модели, в которых фиксированные локальные правила генерируют неожиданно сложное поведение в более крупном масштабе. Вольфрам — один из главных сторонников той точки зрения, что клеточные автоматы — не только увлекательная математическая игра, но и способ объяснить сложность физического мира. Мысли Вольфрама по этому поводу изложены в книге A New Kind of Science («Новый вид науки»), которую он опубликовал за свой счет в 2002 году [9]. В частности, в ней Вольфрам утверждает, что информация, полученная благодаря анализу правила 30, открывает новую научную парадигму. Возьмем в качестве примера раковину ядовитой парчовой улитки, изображенную на рисунке ниже. Общепринятое представление об эволюции объясняет такой рисунок как результат естественного отбора. Но посмотрите на иллюстрацию правила 30! «Я считаю, что это просто удивительно, — говорит Вольфрам. — Достаточно всего лишь наугад выбрать эти простые [правила клеточных автоматов] — и вы получите нечто подобное [рисунку на этой раковине]».



Раковина парчовой улитки, или текстильного конуса

Однако Вольфрам на этом не останавливается, поскольку убежден, что на базовом уровне Вселенная представляет собой клеточный автомат. Другими словами, он считает, что структура Вселенной аналогична решетке в игре «Жизнь», но существует вне пространства и времени. Следовательно, то, что происходит с вами сейчас, когда вы читаете эту книгу, — это *энное* поколение исходной конфигурации клеток, прошедших процесс эволюции в соответствии с небольшим набором локальных правил. Вольфрам поставил перед собой цель найти эти правила. «Если окажется, что они сводятся к трем строкам программы, а мы так и не начнем искать их в текущем столетии, это будет весьма досадно», — сетует он.

Вольфрам — не единственный ученый, который считает, что Вселенная может быть клеточным автоматом, но только он потратил массу времени и денег на попытки это доказать. Он систематически проводит испытания разных наборов правил, для того чтобы увидеть, какие вселенные они порождают. «Какое-то время у меня получалось нечто столь оригинальное, что я смог сказать: компьютер у меня в подвале ведет поиски Вселенной».

Вольфрам так описал свою стратегию: «Когда анализируешь разные наборы очень простых правил, становится очевидным, что некоторые из них безнадежны. Как будто вселенная погибает через два шага или же бесконечно расширяется таким образом, что ни один ее участок не имеет никакой связи с любым другим участком той же вселенной. Все это своего рода патология. И ты продолжаешь одолевать эти вселенные, а когда добираешься до тысячной, начинаешь находить такие, одолеть которые не так уж легко». Вольфрам добавил, что он находил вселенные, в чьем отношении «не было очевидно, что это не наша Вселенная», но отвлекался на выполнение задач, связанных с управлением компанией, и на другие проекты. Тем не менее он планирует возобновить охоту на вселенные в будущем. «Я надеюсь, что однажды на обороте моей визитной карточки будут написаны законы Вселенной, — смеется он. — *Вот это* была бы неплохая бизнес-услуга».

Является ли Вселенная клеточным автоматом или нет, но эта концепция все чаще используется в науке для моделирования самых разных феноменов, таких как транспортный поток, разрастание ряски на озере и рост городов. При этом в роли клетки может выступать отрезок дороги, фрагмент озера или участок земли. Существует еще одна область применения таких одномерных клеточных автоматов, ее открыл Крейг Лент из Университета Нотр-Дам, — квантово-точечные клеточные автоматы, в которых крохотные «квантовые точки» меняют свой электрический заряд исходя из конфигурации соседних точек. Лент надеется, что со временем эта нанотехнология займет место транзистора, поскольку транзистор, сделанный из квантовых точек, будет иметь гораздо меньшие размеры и выделять меньше тепла, чем обычный транзистор. Если квантово-точечная технология будет успешно разработана, то однажды клеточный автомат может появиться во всех электронных устройствах.

Джон фон Нейман и Станислав Улам разработали клеточный автомат для решения задачи, возникшей под влиянием реального мира: что понадобится машине для того, чтобы построить точную копию самой себя. От перспективы будущего, в котором есть самовоспроизводящиеся машины, кровь стынет в жилах. Однако Джон Конвей подхватил эту идею и превратил в причудливое и захватывающее математическое развлечение. Впоследствии идея клеточных автоматов была переосмыслена и нашла применение, не связанное с самовоспроизведением. Это хорошо знакомый процесс: математики живут задачами, существующими в реальном мире; играют с различными концепциями ради удовольствия, а затем для этих концепций (может, годы, столетия или даже тысячелетия спустя) обнаруживаются новые области применения. Дальнейшее развитие технологий невозможно без свежих математических идей, а наука обретает все бóльшую способность объяснить суть того мира, в котором мы живем. В начале книги я говорил, что математика сродни шутке. Я хотел бы изменить эту формулировку. Математика — это игра и всегда ею была.

Математика — это игра жизни.

Глоссарий

Аксиома (axiom): утверждение, которое считается истинным и из которого выводятся другие утверждения.

Алгебраическое (полиномиальное) уравнение (polynomial equation): уравнение, содержащее постоянные и переменные, в котором используются только операции сложения, вычитания и умножения, а также возведения в степень. Все уравнения, изучаемые в школе, относятся к категории алгебраических уравнений.

Биссектриса (bisector): прямая, проходящая через вершину угла и делящая его пополам.

Быстрое преобразование Фурье (Fast Fourier Transform, FFT): алгоритм, позволяющий быстро рассчитать ряд Фурье.

Вершина (vertex): одна из угловых точек треугольника или любой другой фигуры, образованной прямыми линиями.

Гармонограф (harmonograph): чертежное устройство, в котором пишущий элемент совершает простые гармонические колебания минимум в двух непараллельных направлениях.

Геометрическое место точек (locus): кривая, состоящая из точек, удовлетворяющих определенному математическому условию.

Гипотеза (conjecture): недоказанное утверждение, которое предполагается истинным.

Гипотенуза (hypotenuse): сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла.

Градиент (gradient): степень наклона, или скорость изменения расстояния по вертикали в зависимости от расстояния по горизонтали.

Двойной логарифмический масштаб (log-log scales): система координат, в которой обе оси размечены в логарифмическом масштабе.

Действительное число (real number): точки на числовой оси, которым соответствуют целые числа, простые дроби или такие числа, как π и e, которые не могут быть записаны в виде простых дробей.

Дифференциальное уравнение (differential equation): уравнение, включающее в себя производные или интегралы.

Дифференцирование (differentiation): процесс преобразования функции в ее производную.

Доказательство (proof): логическое обоснование истинности теоремы.

***e*:** константа экспоненциального роста, значение которой начинается с 2,718.

Закон Бенфорда (Benford's law): явление, при котором во многих массивах данных, формирующихся естественным образом, вероятность цифры 1 на первом месте составляет 30,1 процента, цифры 2 — 17,6 процента и т. д.

Закон дистрибутивности (distributive law): основной закон арифметики, который гласит, что для любых чисел a, b и c верно равенство $(a + b)\,c = ac + bc$.

Закон масштабирования (scaling law): равенство, в котором одна переменная представляет собой размер объекта, а другая меняется в зависимости от этого размера.

***i*:** символ для обозначения $\sqrt{-1}$.

Интеграл (integral): формула вычисления площади под кривой, или скорости нарастания переменной величины.

Интегрирование (integration): процесс преобразования функции в интеграл.

Исчисление (calculus): обобщающий термин, которым обозначаются дифференцирование и интегрирование — математические инструменты, применяемые для анализа величин, меняющихся в зависимости друг от друга.

Касательная (tangent): прямая линия, прикасающаяся к кривой в одной точке.

Клеточный автомат (cellular automaton): математическая модель, состоящая из дискретных клеток, состояние которых меняется каждую единицу времени в зависимости от состояния соседних клеток.

Комплексное число (complex number): число, которое записывается в форме $a + bi$, где a и b — действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$.

Комплексная плоскость (complex plane): геометрическая интерпретация комплексных чисел, аналогичная декартовой системе координат, в которой на горизонтальной оси представлены действительные числа, а на вертикальной — мнимые.

Коническое сечение (conic section): одна из кривых, образованных путем пересечения секущей плоскости с конусом, — окружность, эллипс, парабола или гипербола.

Константа, постоянная (constant): величина с неизменным значением, в отличие от переменной, которая может принимать множество разных значений. См. также *математическая константа*.

Константа окружности (circle constant): другой термин для обозначения числа π — отношения длины окружности к ее диаметру.

Константа экспоненциального роста (exponential constant): число, значение которого начинается с 2,718 и обозначается символом *e*.

Кривизна (curvature): показатель отклонения кривой от окружности.

Логарифм (logarithm): математическое определение логарифма и логарифмического масштаба содержится в Приложении 1.

Математическая константа (mathematical constant): фиксированное число, возникающее в математике естественным образом, например число π или *e*.

Мнимое число (imaginary number): любое число, кратное *i*.

Многоугольник (polygon): двумерная фигура, контур которой представляет собой замкнутую ломаную линию.

Множество (set): совокупность тех или иных объектов.

Начало координат (origin): точка с координатами (0, 0) на координатной плоскости.

Непрерывность (continuity): свойство таких математических понятий, как прямая и кривая линия.

Номограмма (nomogram): диаграмма, позволяющая выполнять вычисления, начертив прямую линию и определив точку, в которой она пересекает шкалу значений.

Основная теорема исчисления (Fundamental Theorem of Calculus): теорема, которая гласит, что интегрирование — это процесс, обратный дифференцированию, и наоборот.

Основная теорема алгебры (Fundamental Theorem of Algebra): теорема, гласящая, что любое алгебраическое уравнение может быть решено и это решение представляет собой комплексное число.

Основная теорема арифметики (Fundamental Theorem of Arithmetic): теорема, которая гласит, что любое целое число больше 1 либо является простым, либо представляет собой произведение единственного набора простых чисел.

Переменная (variable): величина, которая может принимать разные значения.

Периодическая волна (periodic wave): волна, повторяющаяся с определенной периодичностью.

Пи (pi): отношение длины окружности к ее диаметру, которое начинается с 3,14 и обозначается символом π.

Подобный (similar): термин, используемый для описания двух объектов, имеющих одинаковую форму, но не обязательно одинаковый размер.

Полярная система координат (polar coordinates): схема координатной плоскости, в которой каждая точка на плоскости определяется ее расстоянием от фиксированной точки (полюса) и углом от заданной оси.

Показатель степени (power): когда число n умножается само на себя a раз, мы записываем это как n^a, где a — показатель степени.

Предел (limit): если последовательность значений все сильнее приближается к постоянной величине, так, что становится настолько близкой к этой величине, насколько это необходимо, то эта постоянная величина является пределом данной последовательности.

Преобразование Фурье (Fourier transform): процесс преобразования периодической волны в ряд Фурье, а также название этого ряда.

Производная (derivative): формула расчета градиента кривой, или скорость изменения переменной величины.

Простая дробь (common fraction): дробь, которая записывается в виде числителя и знаменателя, например $\frac{1}{2}$ или $\frac{457}{3}$.

Простое гармоническое колебание (simple harmonic motion): колебание, при котором физическая величина изменяется с течением времени по синусоидальному закону.

Простое число (prime number): целое число больше 1, которое делится только на себя и на 1 (например, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17…).

Прямой угол (right angle): четверть оборота, или 90 градусов.

Прямоугольная система координат (cartesian coordinates): схема координатной плоскости, в которой каждая точка определяется ее положением по горизонтали и вертикали. Как правило, прямоугольная система координат изображается в виде двух взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке (0, 0).

Равносторонний треугольник (equilateral triangle): треугольник с тремя равными сторонами.

Рулетта (roulette): кривая, которую образует точка на катящемся колесе.

Ряд Фурье (Fourier series): сумма (возможно, бесконечного количества) синусоид, сложение которых образует рассматриваемую волну.

Самоподобие (self-similarity): свойство объекта, в точности или приближенно совпадающего с частью самого себя.

Синус (sine): тригонометрическая функция, выражающая отношение противоположной стороны прямоугольного треугольника к гипотенузе.

Синусоида (sinusoid): кривая, имеющая форму синусоидальной волны.

Синусоидальная волна (sine wave): кривая, образованная посредством вертикального смещения точки, вращающейся по кругу.

Степенная зависимость (power law): две переменные находятся в степенной зависимости, если одна из них прямо или обратно пропорциональна степени другой.

Тангенс (tangent): тригонометрическая функция, выражающая отношение противоположной стороны прямоугольного треугольника к прилежащей стороне.

Теорема (theotrem): утверждение, которое не является самоочевидным, но доказано методом дедукции.

Теория множеств (set theory): раздел математики, который изучает свойства множеств и их способность стать основой для арифметики.

Триангуляция (triangulation): измерение расстояний с помощью тригонометрических функций.

Тригонометрия (trigonometry): раздел математики, изучающий тригонометрические функции и их использование.

Факториал (factorial): факториал целого числа — это произведение всех целых чисел от 1 до этого числа включительно. Например, факториал числа 5, который записывается как 5!, равен $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Фокус (focus): основная точка, которая используется при построении конических сечений.

Форма (shape): внешняя геометрическая конфигурация объекта, не зависящая от его размера и положения в пространстве.

Фрактал (fractal): объект, который обладает свойством самоподобия.

Хорда (chord): отрезок, соединяющий две точки окружности.

Числовая ось (number line): геометрическая интерпретация чисел, расположенных по порядку на непрерывной прямой, простирающейся до минус бесконечности слева и до плюс бесконечности справа от ноля, находящегося посредине.

Целое число (whole number): в контексте данной книги — любое положительное число 1, 2, 3…

Циклоида (cycloid): траектория движения точки, находящейся на ободе колеса, которое перемещается по прямой.

Экспонента (exponent): см. *показатель степени.*

Экспоненциальный рост/спад (exponential growth/decay): возрастание или убывание величины, при котором скорость роста (спада) пропорциональна значению самой величины.

Эксцентриситет (eccentricity): степень отклонения конического сечения от окружности.

Приложение 1

Логарифм можно определить следующим образом.

Если $a = 10^b$, то логарифм числа a равен b и записывается в таком виде*:

$$\log a = b$$

Другими словами, если число a выражено в виде степени 10, то логарифм числа a — это показатель степени. Вот некоторые простые значения логарифмов:

$\log 10 = 1$, поскольку $10 = 10^1$
$\log 100 = 2$, поскольку $100 = 10^2$
$\log 1000 = 3$, поскольку $1000 = 10^3$

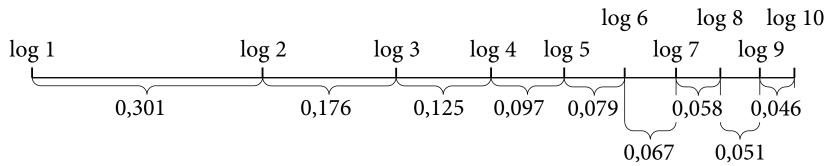
А вот таблица логарифмов чисел от 1 до 10:

$\log 1 = 0$
$\log 2 = 0{,}301$
$\log 3 = 0{,}477$
$\log 4 = 0{,}602$
$\log 5 = 0{,}699$
$\log 6 = 0{,}778$
$\log 7 = 0{,}845$
$\log 8 = 0{,}903$
$\log 9 = 0{,}954$
$\log 10 = 1$

Если мы отметим логарифмы чисел от 1 до 10 на числовой оси, разместив их в соответствии с их значениями, то получим логарифмическую шкалу от 0 до 1. Чем дальше по оси находятся логарифмы, тем плотнее они расположены.

---

* Вообще-то в математической литературе десятичный логарифм обозначается как lg. Но оставим обозначение автора без изменений. *Прим. ред.*



На этой шкале я также отметил расстояние между логарифмами. Вы узнаете в них проценты из закона Бенфорда. Иными словами, если я случайным образом выберу на этой шкале точку от 0 до 1, вероятность того, что она попадет в интервал от log 1 до log 2, составляет 30,1 процента, в интервал от log 2 до log 3 — 17,6 процента и т. д.

Точно так же длина первого интервала равна log 2 – log 1, второго log 3 – – log 2, а интервала d — log $(d + 1)$ – log d. Это означает, что эти вероятности можно более точно выразить как log $(d + 1)$ – log d для каждого значения d.

Приложение 2

Здесь я покажу вам, что в двойном логарифмическом масштабе любое уравнение вида $y = \frac{k}{x^a}$ всегда представлено прямой линией с наклоном влево, и наоборот: в двойном логарифмическом масштабе прямую с наклоном влево всегда можно описать представленным выше уравнением. Если на координатных осях откладываются логарифмы ранга и частотности, то прямая с наклоном влево отображает закон Ципфа:

$$\text{частота} = \frac{k}{\text{ранг}^a}$$

Для того чтобы понять изложенные ниже разъяснения, мы должны иметь определенное представление о координатной геометрии (о концепции градиента, например), а также об основных свойствах логарифмов. Кроме того, нам необходимо принять как истинное следующее утверждение.

(1) На координатной плоскости, где горизонтальная и вертикальная оси обозначаются как x и y, все прямые линии могут быть описаны уравнением $y = mx + c$, где m — это градиент прямой, а c — точка, в которой эта прямая пересекает вертикальную ось.

Итак, начнем с уравнения:

$$y = \frac{k}{x^a}$$

Возьмем логарифм от обеих его частей:

$$\log y = \log \left(\frac{k}{x^a}\right)$$

Согласно свойствам логарифмов, мы можем записать это уравнение в таком виде:

$$\log y = \log k - \log x^a$$

Или так:

$$\log y = \log k - a \log x$$

Если $\log y = \mathrm{Y}$, а $\log x = \mathrm{X}$, то это уравнение можно записать следующим образом:

$$\mathrm{Y} = -a\mathrm{X} + \log k$$

Исходя из представленного выше предположения (1), мы знаем, что на координатной плоскости, где X — это горизонтальная ось, а Y — вертикальная, это прямая с градиентом $-a$, пересекающая вертикальную ось в точке $\log k$.

Поскольку $X = \log x$, а $Y = \log y$, этот график отображен в двойном логарифмическом масштабе, а так как градиент отрицательный, можно сделать вывод, что прямая должна быть наклонена влево.

Аналогичным образом представьте себе прямую с уклоном влево в двойном логарифмическом масштабе. Согласно предположению (1), ее можно описать таким уравнением:

$$\log y = -\log x + c$$

(Поскольку прямая наклонена влево, можно сказать, что она имеет отрицательный градиент.)

Если $c = \log k$, это дает уравнение:

$$\log y = -a \log x + \log k$$

или

$$\log y = \log k - a \log x$$

Воспользовавшись свойствами логарифма, это уравнение можно преобразовать так:

$$\log y = \log k - \log x^a$$

Или так:

$$\log y = \log \left(\frac{k}{x^a}\right)$$

Что означает следующее:

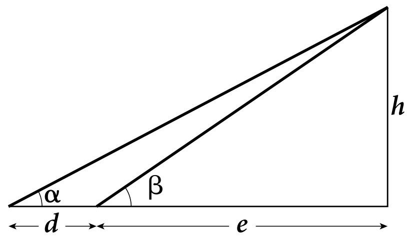
$$y = \left(\frac{k}{x^a}\right)$$

Что и требовалось доказать.

Дополнительный вывод состоит в том, что уравнение $y = kx^a$ описывает прямую с уклоном вправо в логарифмическом масштабе, а любая такая прямая может быть представлена данным уравнением.

Приложение 3

ВЫСОТА ГОРЫ



На рисунке изображены треугольники из главы 3. Наша задача — вычислить высоту горы h, зная только значения α, β и d. Пусть e — это расстояние от точки, находящейся непосредственно под вершиной, до ближайшей точки наблюдения.

Нам известно, что $\tan \beta = \frac{h}{e}$, а также что $\tan \alpha = \frac{h}{(d+e)}$. Преобразуем эти уравнения так:

$h = (d + e) \tan \alpha$

$h = e \tan \beta$

Следовательно:

$(d + e) \tan \alpha = e \tan \beta$

Что можно записать в таком виде:

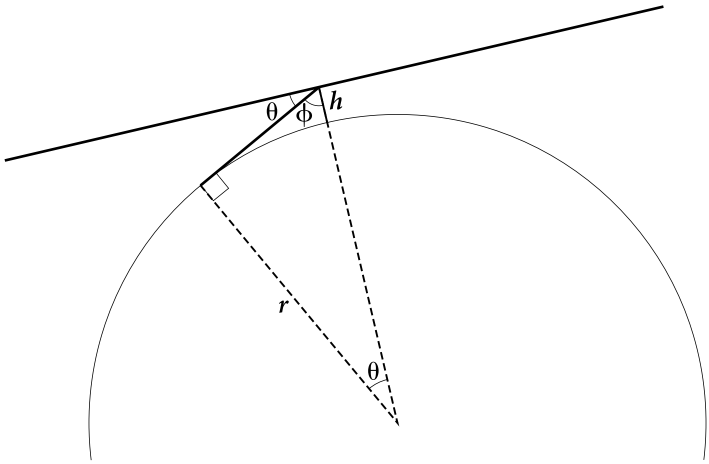
$$e = \frac{d \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

Исходя из равенства $h = e \tan \beta$, мы можем утверждать, что:

$$h = \frac{d \tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

В этом уравнении высота рассчитывается только с использованием значений α, β и d.

РАДИУС ЗЕМЛИ



На этом рисунке представлен тот же треугольник, что и на соответствующем рисунке в главе 3. Нам известен угол между горизонталью и горизонтом θ и высота горы *h*. Наша задача — вычислить радиус Земли *r*.

Сначала надо показать, что угол, исходящий из центра Земли, равен θ. На рисунке видно, что угол ϕ равен 90° – θ. Поскольку сумма углов в треугольнике составляет 180°, то искомый угол равен θ.

Мы знаем, что $\cos\theta = \dfrac{r}{(r+h)}$

Следовательно:

$(r + h)\cos\theta = r$

$r\cos\theta + h\cos\theta = r$

Эти равенства можно преобразовать так:

$r - r\cos\theta = h\cos\theta$

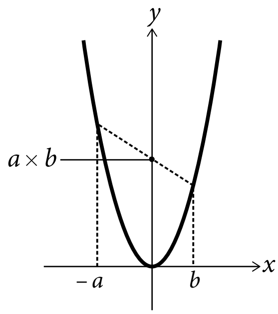
$r(1 - \cos\theta) = h\cos\theta$

Тогда

$r = \dfrac{h\cos\theta}{1 - \cos\theta}$

Приложение 4

МАШИНА УМНОЖЕНИЯ



Утверждение. Для того чтобы умножить $a \times b$, необходимо построить на параболе $y = x^2$ прямую из точки $x = -a$ до точки $x = b$, как показано на рисунке. Прямая линия, соединяющая эти две точки, пересекает ось y в точке $a \times b$.

Доказательство. Примем за истинное следующее утверждение: уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (p, q), имеет вид $y - q = (x - p)m$, где m — градиент.

Прямая на графике проходит через точки с координатами $(-a, a^2)$ и (b, b^2).

Градиент этой прямой, который представляет собой отношение расстояния по вертикали к расстоянию по горизонтали, рассчитывается по формуле $\frac{b^2 - a^2}{b + a}$, которую можно преобразовать к виду $\frac{(b + a)\,(b - a)}{b + a}$, затем это выражение можно сократить до $(b - a)$.

Следовательно, уравнение прямой выглядит так:

$y - a^2 = (x + a)\,(b - a)$

Его можно преобразовать следующим образом:

$y - a^2 = xb - xa + ab - a^2$

Члены $-a^2$ можно сократить, после чего останется такое уравнение:

$y = xb - xa + ab$

Если прямая пересекает вертикальную ось, тогда $x = 0$, а значит,

$y = ab$

Другими словами, прямая пересекает ось в точке ab, что равно $a \times b$.

Приложение 5

Если сумма S наращивается со скоростью r, то после t периодов начисления сложных процентов значение этой суммы равно

$S\,(1 + r)^t$

Сумма удвоится, когда $(1 + r)^t = 2$. Чтобы решить это уравнение, необходимо взять натуральный логарифм обеих его частей. Натуральный логарифм — это логарифм с основанием e, который обозначается как ln. Таким образом

$$\ln\,(1 + r)^t = \ln 2$$

Что сводится к

$$t \ln\,(1 + r) = \ln 2$$

Следовательно,

$$t = \frac{\ln 2}{\ln\,(1 + r)}$$

Когда r имеет небольшое значение, то $\ln\,(1 + r) \approx r$, стало быть, это уравнение можно записать так:

$$t \approx \frac{\ln 2}{r}$$

Что эквивалентно

$$t \approx \frac{0{,}69}{r}$$

Если r — скорость, выраженная в дробном виде, то обозначим через R скорость в процентном выражении. В таком случае необходимо умножить числитель и знаменатель в дроби t на 100

$$t \approx \frac{69}{\mathrm{R}}$$

Следовательно, количество периодов начисления сложных процентов t, необходимых для удвоения суммы, составляет 69 разделить на темпы роста в процентах R.

Поскольку число 72 легче делится на другие числа, чем 69, в правиле 72 чаще всего используется именно это число, хотя значение 69 было бы точнее*.

---

* Это связано также с тем, что второй член в разложении $\ln(1 + r)$ равен $-x^2/2$ и поэтому $\ln 2/\ln(1 + r) > \ln 2/r = 69/\mathrm{R}$. *Прим. ред.*

Приложение 6

Площадь самого большого заштрихованного квадрата составляет $\frac{1}{4}$. Второй по величине заштрихованный квадрат имеет площадь, равную четверти самого большого квадрата, то есть $\frac{1}{16}$. Площадь третьего по величине квадрата составляет четверть этой площади и т. д. Следовательно, общая площадь заштрихованных квадратов равна

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

Однако каждому заштрихованному квадрату соответствует ровно по два незаштрихованных квадрата одинакового размера. Таким образом, площадь заштрихованных квадратов должна также составлять $\frac{1}{3}$ общей площади. Стало быть,

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$$

Приложение 7

КАК СПРАВЕДЛИВО РАЗДЕЛИТЬ ПИРОГ НА ТРОИХ

Назовем этих троих Гуго, Стефан и Станислав — по именам математиков, внесших самый большой вклад в создание «Шотландской книги».

Шаг 1. Гуго делает первый разрез. Его задача — отрезать $\frac{1}{3}$ пирога.

Шаг 2. Гуго передает свой кусок Стефану, который должен оценить, равен ли он $\frac{1}{3}$ пирога или нет. Если, по его мнению, кусок слишком большой, он отрезает от него немного.

Шаг 3. Кусок передается Станиславу, который решает, брать его или нет. Если Станислав берет кусок, Гуго и Стефану предстоит разделить оставшийся большой кусок, а также небольшой кусочек, отрезанный Стефаном. Один из них делит оба куска надвое, а другой выбирает.

Шаг 4. Если Станислав не берет кусок пирога, существуют две возможности в зависимости от того, обрезал ли Стефан кусок Гуго.

1. Если Стефан обрезал кусок, он должен его взять. Двое других делят оставшийся кусок пирога, как в шаге 3.
2. Если Стефан не обрезал кусок, тогда его берет Гуго, а двое других делят остаток.

С точки зрения логики это правильный подход, но в случае его применения на практике можно запутаться.

Приложение 8

На рисунке 1 ниже показано решето Эратосфена на уровне поколения 0. На рисунке 2 это решето изображено на уровне поколения 650, на котором простые числа 2, 3, 5, 7 и 11 уже благополучно прошли процедуру отбора, а на рисунке 3 представлен более детальный план зоны обстрела глайдерами, изображенной на рисунке 2.

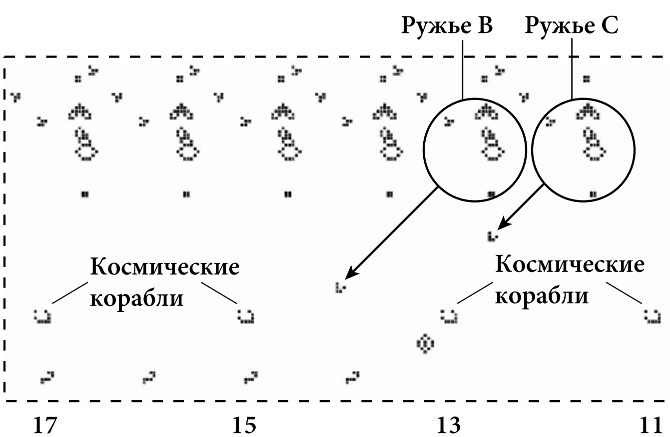
Весь процесс выглядит следующим образом. Фигура, выделенная на рисунке 2 и обозначенная как «ружье А», выстреливает космические корабли, движущиеся слева направо (каждый корабль представляет нечетное число). Эти корабли покинут основную конфигурацию, если им удастся уйти из-под огня ружей, выстроившихся вверху.

Давайте внимательнее рассмотрим эти ружья. Перемещаясь справа налево (именно в таком порядке создаются ружья), первое ружье (ружье B) выстреливает глайдер по диагонали вниз и налево через каждые три интервала. Это ружье уничтожит все космические корабли, которые представляют числа, кратные трем. Второе ружье (ружье C) выстреливает глайдеры через каждые пять интервалов, уничтожая все корабли, представляющие числа, кратные пяти. Следующее ружье уничтожит все корабли, представляющие числа, кратные семи, и т. д. В общем виде это выглядит так: когда ружье A порождает космический корабль, представляющий нечетное число n, зона обстрела расширяется влево, для того чтобы создать пространство для ружья, выстреливающего глайдеры через каждые n интервалов. Совокупный эффект сводится к тому, что пройти эту зону смогут лишь корабли, соответствующие простым числам. Если число n не является простым, то у него есть минимум два делителя, поэтому космический корабль, находящийся в позиции n, в конце концов будет уничтожен ружьем, выстреливающим глайдеры с интервалом, равным самому большому делителю числа n.

Для того чтобы максимально упростить процесс, ружье A выстреливает космические корабли только на позициях, соответствующих нечетным числам. После числа 2 все простые числа являются нечетными, а значит, нет необходимости конструировать космические корабли четных чисел, поскольку они все равно будут уничтожены. Четное число 2 представляет лишь первый корабль потока.

(1) Поколение 0

(2) Поколение 650



(3) Детали поколения 650

Благодарности

Выражаю искреннюю признательность сотрудникам издательства Bloomsbury в Лондоне: Биллу Свейнсону, Элисон Глоссоп, Лоре Брук, Хелен Флад, Аманде Шипп, Грегу Хайнеманну, Дэвиду Манну, Ричарду Аткинсону и особенно Гза Шоу Стюарт, которая кропотливо проверила каждую дробь и экспоненту. В нью-йоркском издательстве Simon & Schuster я получил неоценимую помощь от таких сотрудников, как Бен Лонен, Эмили Луз и Брит Гвиде, а в издательстве Doubleday в Торонто — от Тима Рострона.

Бен Самнер был невероятно энергичным выпускающим редактором книги, а Эдмунд Харрис, Инь Фун О, Джун Барроу-Грин, Эрика Джарнс и Гарет Робертс дали бесценные комментарии по поводу ее текста. Благодарю также Саймона Линдо за иллюстрации, The Surreal McCoy — за комиксы и Сьюзен Уайтмен из Libanus Press за верстку.

В этой книге я использовал информацию, полученную во время бесед и переписки со многими людьми. Я искренне признателен им за то, что уделили мне время.

Глава 1: Джерри Ньюпорт, Грег Роуленд, Маной Томас, Теренс Хайнс, Джим Уилки, Хусам Садиг, Сэффи Хейнс, Дэн Кинг, Том Диарден, Жер Торп, Франческа Ставракопулу, Франческа Рохберг, Ричард Вайзмен, Дэвид Маркс, Софи Скотт, Стивен Мэкник, Питер Линн, Ютака Нишияма, Роберт Шиндлер.

Глава 2: Уилл Ренни, Джайлан Ванг, Тед Хилл, Эрика Роджерс, Даррелл Доррелл, Альберт-Ласло Барабаши, Дэвид Хэнд, Уолтер Мибейн, Кристиан Фельбаум, Юре Лесковец, Джеффри Уэст, Пит Уайтлок.

Глава 3: Микалис Сиаларос, Апостолос Доксиадис, Марк Гривз, Роберт Вудолл, Джон Ки, Даррен Шеперд.

Глава 4: Рамиро Серра, Рон Дофлер, Иэн Дикерсон, Сильвия Пеццана, Арт Фриго-младший.

Глава 5: Боб Уитакер, Иван Москович, Том Армстронг, Бретт Крокетт, Джон Уитни-младший, Карл Симс.

Глава 6: Эндрю Смит, Роджер Ридсдилл Смит, Николай Мальш, Альберт Бартлетт, Тим Харфорд, Стэн Вэген.

Глава 7: Джон Баез, Дэвид Тонг, Дэйв Макин, Брайан Поллок, Клифф Пиковер, Дэниел Уайт, Орсон Ванг, Роберт Девани.

Глава 8: Питер Хопп, Билл Такер, Джон Уордли, Вернер Штенгель, Седрик Виллани, Фрэнки Диллен, Хартош Бол.

Глава 9: Алекс Пасо, Джим Холт, Норман Мегилл, Лоуренс Полсон, Натаниэль Джонстон.

Глава 10: Том Рокики, Адам Гаучер, Тим Хаттон, Пол Чэпмен, Дэйв Грин, Адам Рутерфорд, Стефани Пратер, Джин Бак, Стивен Вольфрам, Билл Госпер, Энди Адамацки, Ник Готтс, Джон Конвей, Крейг Лент, Даг Тауго.

Я считаю огромной удачей, что мои интересы представляет агентство Janklow & Nesbit. Я признателен своему агенту Ребекке Картер и ее коллегам Ребекке Фолланд, Кирсти Гордон, Линн Несбит и Клер Патерсон.

Каждый раз, когда возникала необходимость, мои друзья и члены семьи оказывали мне всяческую помощь, от моральной поддержки и уточнения математических моментов до возможности воспользоваться парижской квартирой. Хотелось бы поблагодарить в связи с этим таких людей, как Гэвин Претор-Пинней, Хью Морисон, Клифф Пиковер, Грэм Фармело, Джеймс Грайм, Колин Райт, Корделия Дженкинс, Франческа Сигал, Роджер Хайфилд и Саймон Купер. Я благодарен своим родителям Дэвиду Беллосу и Илоне Морисон за неизменную поддержку и веру. Больше всего я признателен своей жене Натали за огромный вклад в эту книгу и за счастье, которое она мне приносит.

В книге «Алекс в стране чисел. Необычайное путешествие в мир математики» в конце раздела с благодарностями я похвалил свою племянницу за прекрасную сдачу экзамена по математике в средней школе. Сейчас я хочу упомянуть ее имя в связи с тем, что она решила изучать математику и психологию в университете. Успехов тебе, Зара!

Предположения, уточнения, ссылки и примечания

ГЛАВА 1

1. Каждое целое число можно разложить на единственную совокупность простых чисел. Например, число 2763 раскладывается на 3 × 3 × 307, причем только такое сочетание простых чисел дает при умножении 2763. Утверждение о том, что каждое натуральное число можно разложить на простые делители, известно как основная теорема арифметики.
2. Самый показательный случай демонстрации арифметических вычислений человеком с синдромом гения (этим термином обозначают человека, страдающего расстройством аутического спектра и обладающего феноменальными способностями в какой-либо области) также связан с простыми числами. В книге «Человек, который принял жену за шляпу» Оливер Сакс рассказывает историю об американских близнецах Джоне и Майкле, любивших играть с шестизначными числами. Сакс пишет, что, когда близнецы обдумывали числа, они «напоминали двух знатоков вин, обнаруживших во время дегустации редкий букет и смаковавших его». Когда Сакс проверил эти числа, он увидел, что все они простые, — и решил поднять планку, предложив близнецам восьмизначное простое число. Это вдохновило близнецов, и они начали придумывать все бóльшие простые числа. Через час они дошли до двадцатизначных чисел — но к тому времени у Сакса уже не было возможности проверить, действительно ли эти числа простые. Алан Снайдер из Сиднейского университета убежден, что у всех людей есть ментальный механизм для выполнения вычислений, которые делают люди с синдромом гения, но из-за специфики устройства нашего мозга доступ к этому механизму при обычных условиях затруднен. С помощью экспериментов Снайдер продемонстрировал, что математическое мышление человека поддается улучшению, если воздействовать на мозг слабым электрическим током (этот метод получил название «транскраниальная микрополяризация»). Снайдер считает, что электрический ток угнетает активность нейронной системы, что, в свою очередь, высвобождает гения, живущего в каждом из нас. Хотя исследования Снайдера носят спорный характер, аналогичные результаты были получены и в других университетах.

3. Georges Ifrah, The Universal History of Numbers, John Wiley & Sons, 2000.
4. *Винсент Хоппер*. Числовая символика Средневековья. Тайный смысл и форма выражения. М. : Центрполиграф, 2014.
5. Кроме слова odd в значении «необычный, чудаковатый», математика стала источником еще одного обозначения для человека со странностями — eccentric («эксцентричный»). Первоначально под этим словом имелась в виду орбита вокруг Земли, центр которой расположен не в той же точке, что и сама Земля.
6. Слово odd происходит от скандинавского oddr — «острие копья». От формы копья произошло и древнеисландское слово oddi — треугольник, или полуостров. («Одди» — это также название церковной школы на севере Исландии, в которой жил в XII веке великий исландский поэт и историк Снорри Стурлусон и которая в наше время стала туристической достопримечательностью.) Именно из-за треугольника у слова odd появилось такое значение, как непарный член группы из трех человек, а затем и член любой группы. (Источники: Oxford English Dictionary, а также Анатолий Либерман, Oxford University Press, blog.oup.com/category/language-words/oxford_etymologist/.)
7. Yutaka Nishiyama, Odd and Even Number Cultures, Mathematics for Scientists, 2005.
8. Yutaka Nishiyama, Why ¥2000 notes are unpopular, Osaka Keidai Ronshu, vol. 62, No. 5, 2012.
9. Lee C. Simmons and Robert M. Schindler, Cultural Superstitions and the Price Endings Used in Chinese Advertising, Journal of International Marketing, 2003.
10. Terence M. Hines, An odd effect: Lengthened reaction times for judgements about odd digits, Memory & Cognition, 1990.
11. James E. B. Wilkie and Galen V. Bodenhausen, Are numbers gendered?, Journal of Experimental Psychology: General, 2012.
12. Дальнейшие исследования Джеймса Уилки, результаты которых еще не опубликованы, показывают, что женщины воспринимают ассоциации с числами более выраженно, чем мужчины.
13. *Винсент Хоппер*. Числовая символика Средневековья. Тайный смысл и форма выражения. М. : Центрполиграф, 2014.
14. Dan Dan King and Chris Janiszewski, The Sources and Consequences of the Fluent Processing of Numbers, Journal of Marketing Research, 2011.

15. Manoj Thomas, Daniel H. Simon, and Vrinda Kadiyali, The Price Precision Effect: Evidence from Laboratory and Market Data, Marketing Science, 2010.
16. Nicolas Gueguen et al., Nine-ending prices and consumers behavior: A field study in a restaurant, International Journal of Hospitality Management, 2009.
17. William Poundstone, Priceless, Oneworld, 2010.
18. Sybil S. Yang, Sheryl E. Kimes, and Mauro M. Sessarego, $ or Dollars: Effects of Menu-price Formats on Restaurant Checks, Cornell Hospitality Report, 2009.
19. В ресторанах самый распространенный пример того, как столбцы чисел стимулируют покупку на основании цены, а не качества продукта, — это склонность клиентов заказывать предпоследнюю по цене бутылку вина, указанную в списке. Покупка самого дешевого вина свидетельствовала бы о скупости клиента, особенно в случае романтического ужина. Поэтому многие рестораны делают самую большую наценку именно на предпоследнюю по цене бутылку вина.
20. Birte Englich, Thomas Mussweiler and Fritz Strack, Playing Dice With Criminal Sentences: The Influence of Irrelevant Anchors on Experts Judicial Decision Making, Personality and Social Psychology Bulletin, 2006.
21. Мой интернет-опрос (сайт favouritenumber.net) начался в 2011 году. На титульной странице сайта было его описание, после которого следовало два предложения: «Мое любимое число — …» и «Я выбираю его, потому что…» Респонденты могли сформулировать свои ответы словами или просто назвать цифры. Результаты, о которых идет речь на страницах этой книги, получены в ходе обработки 33 516 ответов; из них 3491 ответ был неопределенным или вообще отсутствовал. К моменту сдачи книги в печать в опросе приняли участие уже 42 000 респондентов.
22. Eviatar Zerubavel, The Seven Day Circle, Free Press, 1985.
23. Georges Ifrah, The Universal History of Numbers, John Wiley & Sons, 2000.
24. Michael Kubovy and Joseph Psotka, The predominance of seven and the apparent spontaneity of numerical choices, Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 1976.
25. Существует всего восемь двузначных нечетных чисел от 1 до 50, состоящих из разных цифр, причем число 15 упомянуто в описании задачи, поэтому респондент вряд ли назовет его. Авторы книги The Psychology of the Psychic (Prometheus Books, 1980) Дэвид Маркс и Ричард Кэмменн

разыграли этот трюк на занятии по психологии — и больше трети студентов выбрали число 37. Результаты были такими: число 37 (35 процентов), 35 (23), 17 (10), 39 (10), 19 (9), 31 (5), 13 (5), другие числа (3).

26. Dan King and Chris Janiszewski, The Sources and Consequences of the Fluent Processing of Numbers, Journal of Marketing Research, 2011.
27. Marisca Milikowski, Knowledge of numbers: A study of the psychological representation of the numbers 1–100, PhD thesis at the University of Amsterdam, 1995.

ГЛАВА 2

1. Domesday Book: A Complete Translation, Penguin Classics, 2003.
2. Simon Newcomb, Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers, American Journal of Mathematics, 1881.
3. Frank Benford, The law of anomalous numbers, Proceedings of the American Philosophical Society, 1938.

4.

Число	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Закон Бенфорда	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6
Население округов	30,2	18,8	12,2	9,9	7,1	6,3	5,7	4,8	5,0
Доходы компаний	30,2	17,7	12,5	9,8	7,9	6,7	5,7	5,1	4,5

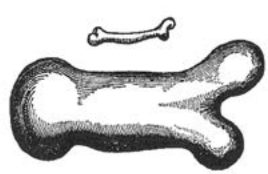
Сведения о населении округов США взяты из отчетов о результатах опроса американского общества (American Community Survey) за 2007–2011 годы. Финансовые данные — итог анализа 1,4 миллиона единиц информации из системы Compustat, выполненного Джайлан Ванг.

5. Scott de Marchi and James T. Hamilton, Assessing the accuracy of self-reported data: an evaluation of the toxics release inventory, Journal of Risk and Uncertainty, 2006; Walter R. Mebane Jr., Fraud in the 2009 Presidential Election in Iran?, Chance, 2010; Malcolm Sambridge et al., Benford's law in the natural sciences, Geophysical Research Letters, 2010.
6. Miles L. Hanley, Word Index to James Joyce's Ulysses, University of Wisconsin Press, 1953.
7. George Kingsley Zipf, Human Behavior and the Principle of Least Effort, Addison-Wesley, 1949.

8. Слово, которое появляется в тексте только один раз, обозначается термином «гапакс легоменон» (от древнегреческого *hapax legomenon* —

«названный только раз»). Этот термин звучит как имя персонажа одной из историй об Астериксе или название скандинавской группы в стиле Death Metal. В издании данной книги на английском языке есть только одно такое слово.

9. *Ричард Кох*. Принцип 80/20. М. : Эксмо, 2012.
10. Fredrik Liljeros et al., The web of human sexual contacts, Nature, 2001.
11. N. Johnson et al., From old wars to new wars and global terrorism, arXiv:physics/0506213, 2005.
12. Joao Gama Oliveira and Albert-Laszlo Barabasi, Human dynamics: Darwin and Einstein correspondence patterns, Nature, 2005.
13. Takashi Iba et al., Power-Law Distribution in Japanese Book Sales Market, Fourth Joint Japan-North America Mathematical Sociology Conference, 2008.
14. Mark Buchanan, Ubiquity, Weidenfeld & Nicolson, 2000.
15. Albert-Laszlo Barabasi, Linked, Perseus, 2002; Albert-Laszlo Barabasi, Bursts, Penguin, 2010.
16. Michael P. H. Stumpf and Mason A. Porter, Critical Truths About Power Laws, Science, 2012; Aaron Clauset, Cosma Rohilla Shalizi, and M. E. J. Newman, Power-Law Distributions in Empirical Data, SIAM Review, 2009.
17. В книге Discourses and Mathematical Demonstrations Relating to Two New Sciences («Беседы и математические доказательства двух новых наук») Галилей сделал следующий набросок двух костей — маленькой и тонкой, а также большой и толстой. Он писал, что у большого животного большая кость «выполняла бы ту же функцию, что и маленькая кость у маленького животного».
Компания по выпуску игрушек для собак Nylabone продает нейлоновые жевательные кости, имеющие точно такую же форму, как на представленном ниже рисунке. В компании утверждают, что эти кости (получившие название Galileo) — «самые прочные жевательные кости для собак».



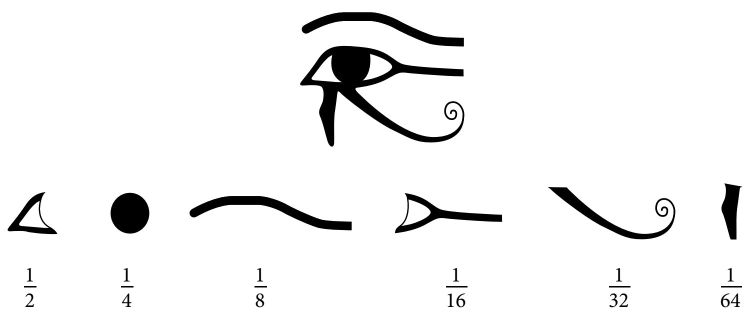
18. Melanie Mitchell, Complexity: A Guided Tour, Oxford University Press, 2009.
19. Geoffrey B. West, James H. Brown, and Brian J. Enquist, A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology, Science, 1997.

20. Luis M. A. Bettencourt et al., Growth, innovation, scaling, and the pace of life in cities, PNAS, 2007.

ГЛАВА 3

1. Роб посетил 6177 геодезических знаков, расположенных в Великобритании, в том числе 45 полуразрушенных и 100 опрокинутых. Большинство геодезических столбов, которые Роб еще не видел, находятся на островах. Он издали видел два геодезических знака, размещенных на земле Министерства обороны, в том числе знак, установленный на территории базы обслуживания атомных подводных лодок в Кулпорте (Шотландия). Однако Робу не разрешили приблизиться к ним. Еще только четыре коллекционера смогли пройти 3000 геодезических знаков.
2. Практические аспекты предложенного Фалесом метода измерения высоты пирамид рассматриваются в статье: Thales' Shadow' by Lothar Redlin, Ngo Viet and Saleem Watson, in Mathematics Magazine, 2000. В частности, авторы демонстрируют, что солнечные лучи направлены перпендикулярно грани пирамиды два раза в день только весной и летом: один раз утром и один раз вечером.
3. Не исключено, что египтяне обладали гораздо более обширными знаниями в области математики, чем принято считать, но установить это невозможно, поскольку об этом сохранилось слишком мало информации.
4. Carl B. Boyer, A History of Mathematics, John Wiley & Sons, 1968.
5. В прошлом «две другие стороны» обозначались термином catheti (единственное число — cathetus), но в настоящее время в английском языке этот термин вышел из употребления. Однако в других языках он используется до сих пор: Kathete — в немецком языке, cateto — в испанском и португальском, катеты — в русском языке.
6. Florian Cajori, A History of Mathematical Notations, Dover, 1993.
7. Georges Ifrah, The Universal History of Numbers, John Wiley & Sons, 2000.
8. Самая гибкая система с использованием единичных дробей — бинарная система, в которой дроби образуются так: половина, половина половины, половина половины половины и т. д., или $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots$ В этой системе любая дробь может быть записана в виде комбинации единичных дробей. В 1911 году египтолог Георг Мюллер написал, что в ходе исследований открыл невероятно живописное древнее изображение первых шести единичных дробей бинарной системы. На представленном ниже рисунке изображен символ «око Гора», каждый

элемент которого соответствует одной из этих дробей: левая часть роговицы — $\frac{1}{2}$, зрачок — $\frac{1}{4}$, бровь — $\frac{1}{8}$ и т. д.; остальные фрагменты представляют дроби $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ и $\frac{1}{64}$. Шестьдесят три возможные комбинации фрагментов «ока Гора», отличных от нуля, позволяют выразить любую дробь от $\frac{1}{64}$ до $\frac{63}{64}$. Помимо волнующего изображения «око Гора» имеет и не менее волнующую историю: это мистический символ Гора — бога с головой сокола, глаз которого был разделен на шесть частей его дядей и впоследствии снова собран воедино. К сожалению, после целого столетия принятия в 2002 году миф о глазе Гора был развенчан Джимом Риттером, который заявил об отсутствии каких бы то ни было доказательств того, что фрагменты «ока Гора» символизируют единичные дроби. Jim Ritter, Closing the Eye of Horus: the Rise and Fall of Horus-Eye Fractions, Under One Sky: Astronomy and Mathematics in the ancient Near East, 2002.



9. В полном виде греческая система обозначения чисел выглядела так:

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	q
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

10. Eli Maor, Trigonometric Delights, Princeton University Press, 1998.
11. John Keay, The Great Arc, HarperCollins, 2000.

ГЛАВА 4

1. При условии, что шар не начнет вращаться.
2. www.lds.org/locations/temple-square-salt-lake-city-tabernacle.
3. Carl B. Boyer, A History of Mathematics, John Wiley & Sons, 1968.
4. Помимо сугубо математического, слово «парабола» имеет и другое значение, поскольку древнегреческое слово parabola означает не только «бросить рядом»*, но и «сравнить». В литературе парабола — это простой короткий рассказ иносказательного характера, в котором присутствует сравнение с более сложным сюжетом. От этого значения происходит французское слово parler («разговаривать») и многие английские слова, от parliament («парламент») до parole («пароль»).
5. Arthur Koestler, The Sleepwalkers, Hutchinson, 1959.
6. Математическое объяснение того, почему циклы и эпициклы позволяют описать любую замкнутую непрерывную орбиту, основано на двух концепциях, о которых я часто упоминаю в этой книге: комплексные числа и ряды Фурье. Подобно тому как волну можно разложить на синусоиды, путь в комплексной плоскости можно разложить на ряд круговых вращений.
7. Santiago Ginnobili and Christian C. Carman, Deferentes, Epiciclos y Adaptaciones, Filosofia e historia da ciencia no Cone Sul, 2008.
8. Arthur Koestler, The Sleepwalkers, Hutchinson, 1959.
9. Norwood Russell Hanson, Patterns of Discovery, CUP, 1961. Хэнсон начинал в качестве трубача, а во время Второй мировой войны стал летчиком-истребителем. Получив прозвище Летающий Профессор, он продолжал летать в мирное время и прославился выполнением фигур высшего пилотажа. Хэнсон погиб в возрасте 42 лет, когда его самолет разбился в штате Нью-Йорк из-за густого тумана.
10. David Wootton, Galileo, Watcher of the Skies, Yale University Press, 2010.
11. Stillman Drake and James MacLachlan, Galileo's Discovery of the Parabolic Trajectory, Scientific American, 1975.
12. Декарт использовал косоугольную систему координат, а «декартова» система координат в современном понимании (с перпендикулярными осями) была предложена впоследствии другими учеными, уточнившими его систему.

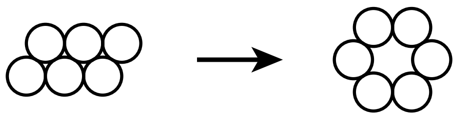
* Точнее, здесь больше подходит значение «приближать», а не «бросить рядом» (это перевод авторского «to throw alongside»). *Прим. ред.*

13. A. F. Mobius, Geometrische Eigenschaften einer Factorentafel, Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 1841.
14. Rodolphe Soreau, Nomographie; ou, Traite des abaques, Chiron, 1921; Ron Doerfler, The Lost Art of Nomography, The UMAP Journal, 2009; H. A. Evesham, Origins and Development of Nomography, Annals of the History of Computing, 1986.
15. Martin Gardner, Mathematical Games: The Entire Collection of His Scientific American Columns, CD, 2005.
16. J. A. Bennett, The Mathematical Science of Christopher Wren, CUP, 1982.
17. Henry Moore and Stringed Surfaces, exhibition at the Royal Society, 2012.

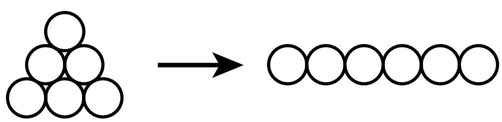
ГЛАВА 5

1. Bob Palais, π is Wrong!, The Mathematical Intelligencer, 2001.
2. Среди исторических личностей, которые отдавали предпочтение отношению длины окружности к радиусу, был аль-Каши. Считается, что в XV столетии в Самарканде он рассчитал число π до 14 десятичных знаков, получив более точный результат, чем кто-либо еще до него. На самом деле аль-Каши вообще не рассчитывал число пи; он вычислил отношение длины окружности к радиусу до 14 десятичных знаков. В 1698 году Абрахам де Муавр использовал символ c/r для обозначения отношения длины окружности к радиусу, но оно так и не прижилось.
3. tauday.com.
4. Я бы даже сказал, что это четырежды уместно. Символ τ — это еще и дань уважения лауреату премии Филдса Теренсу Тао — профессору Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе.
5. John Martin, The Helen of Geometry, The College Mathematics Journal, 2010; E. A. Whitman, Some Historical Notes on the Cycloid, American Mathematical Monthly, 1943; Martin Gardner, Mathematical Games: The Entire Collection of His Scientific American Columns, CD, 2005.
6. Гюйгенс создал несколько маятников с циклоидными «щеками», но из-за наличия проблем (таких как трение) они работали не лучше обычного маятника. Гюйгенс нашел следующее решение: использовать обычный маятник, но с совсем небольшим размахом, поскольку при малой амплитуде полное колебание маятника остается практически неизменным.
7. Да, у меня действительно есть и другие любимые математические головоломки, в том числе и с монетами. Вот одна из них. Возьмите шесть

монет и разместите их так, как показано на рисунке слева. Ваша задача — расположить монеты по-новому в виде шестиугольника, перемещая их по одной. Кроме того, каждую монету можно передвигать только на такую позицию, в которой она будет соприкасаться с двумя другими. Не разрешается поднимать монету со стола, перемещать ее над другой монетой или убирать монеты с ее пути. Можете ли вы расположить монеты по-новому за три перемещения?



Если вы справились с задачей, попытайтесь разместить в один ряд выложенные треугольником монеты за семь движений, снова придерживаясь того правила, что монету можно передвигать только на такую позицию, в которой она будет соприкасаться с двумя другими.



В следующий раз, когда будете ждать заказ в баре и у вас под рукой окажется несколько свободных монет, попробуйте решить эту головоломку!

8. Роберваль нарисовал синусоиду на чертеже, объясняющем, как найти площадь под циклоидой. Вряд ли он знал, что эта кривая имеет какое-то отношение к тригонометрической функции синусу.
9. При отсутствии потерь энергии из-за трения.
10. Robert J. Whitaker, Harmonographs. I. Pendulum design, American Journal of Physics, 2001; Robert J. Whitaker, Harmonographs. II. Circular design, American Journal of Physics, 2001.
11. Eli Maor, Trigonometric Delights, Princeton University Press, 1998.
12. John Herivel, Joseph Fourier: The Man and the Physicist, Clarendon Press, 1975.
13. I. B. Cohen, The Triumph of Numbers, W. W. Norton & Company, 2005.
14. Ряд Фурье для любой волны записывается в виде следующей формулы:
$k + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + a_4 \sin 4x \ldots$
$+ b_1 \cos x + \mathrm{b}_2 \cos 2x + \mathrm{b}_3 \cos 3x + 4 \cos 4x + \ldots$
где k — константа, a и b — амплитуды соответствующих синусоид.

ГЛАВА 6

1. youtube.com/watch?v=F-QA2rkpBSY.
2. Альберт Бартлетт умер 7 сентября 2013 года в возрасте 90 лет. Он прочитал свою лекцию 1742 раза.
3. Gideon Keren, Cultural differences in the misperception of exponential growth, Perception & Psychophysics, 1983.
4. Daniel Kahneman and Amos Tversky, Availability: A heuristic for judging frequency and probability, Cognitive Psychology, 1973.
5. Eli Maor, e: The Story of a Number, Princeton University Press, 1994.
6. J. E. Hofmann, from the biography of Jakob Bernoulli in the Dictionary of Scientific Biography, Scribner, 1970.
7. William Dunham, Journey Through Genius, Penguin, 1991.
8. Santiago Huerta, Structural Design in the Work of Gaudi, Architectural Science Review, 2006.
9. Ed Sandifer, How Euler Did It', MAA Online, 2004.
10. Arthur Koestler, The Sleepwalkers, Hutchinson, 1959.
11. Martin Gardner, Mathematical Games: The Entire Collection of His Scientific American Columns, CD, 2005.
12. Было изучено много разных вариантов этой задачи, в частности как изменится вероятность в случае, если человек, проводящий собеседование, сможет повторно назначать его некоторым кандидатам, или как наем первого же кандидата позволит сэкономить деньги. Даррен Гласс проанализировал задачу о выборе секретаря с точки зрения кандидата на должность (см. статью Darren Glass examined The Secretary Problem from the Applicant's Point of View, in The College Mathematics Journal, 2012). Если количество кандидатов не менее девяти, то лучше всего приходить на собеседование последним. Но в этом случае не остается возможности исправить ошибку. «Приход на собеседование последним обеспечивает максимальный шанс получить работу, но если вы окажетесь предпоследним, то такая вероятность становится самой низкой, — пишет Гласс. — Студентам, выходящим на рынок труда, следует вкладывать всю свою энергию в улучшение резюме, а не в создание стратегии выбора оптимального момента для собеседования».
13. Борис Березовский умер 23 марта 2013 года в возрасте 67 лет.
14. Theodore Hill, Knowing When to Stop, American Scientist, 2009.

ГЛАВА 7

1. «Cool Cash» card confusion, Manchester Evening News, 2007.
2. Georges Ifrah, The Universal History of Numbers, John Wiley & Sons, 2000.
3. Абсурдное число (*numeri absurdi*) не следует путать с термином surd, обозначающим иррациональное число, то есть число, которое не может быть представлено в виде отношения двух целых чисел. Древние греки использовали для обозначения иррациональных чисел слово *alogos*, что означало «нет соотношения». Однако это слово означало также «не говорящий», что арабы перевели как *assam*, или «глухой». В латинских текстах употреблялось слово *surdus*, прямой перевод слова «глухой» с арабского. Вот так получилось, что иррациональные числа стали «глухими» числами, или *surds*.
4. Martin Gardner, Mathematical Games: The Entire Collection of His Scientific American Columns, CD, 2005.
5. Alberto A. Martínez, Negative Math, Princeton University Press, 2006.
6. William Frend, The Principles of Algebra, G. G. and J. Robinson, 1796. В книге был разрешен знак минус, но запрещалось, чтобы неизвестные величины (которые могли обозначать нечто реальное) принимали отрицательные значения.

   Френда больше всего помнят как социального реформатора и радикала. После получившего широкую огласку разбирательства его исключили из Кембриджа за обвинения в адрес англиканской церкви. Среди последователей Френда был Сэмюел Тэйлор Кольридж. Дочь Френда София (которая вышла замуж за выдающегося математика Огастеса де Моргана) писала о своем отце, что «возможно, именно ясность и прямота мышления повлекли за собой его математическую ересь, отказ от использования отрицательных величин в алгебраических операциях», прибавив, что «по всей вероятности, этим он лишил себя того инструмента работы, применение которого могло привести его к значительным достижениям в более высоких областях науки».
7. Paul J. Nahin, An Imaginary Tale, Princeton University Press, 1998.
8. Эйлер первым обозначил $\sqrt{-1}$ символом *i*, но он использовал его всего один раз, в научной статье, которая была опубликована через 11 лет после его смерти. Другие ученые начали систематически использовать символ *i* только после того, как в 1801 году его принял Гаусс.

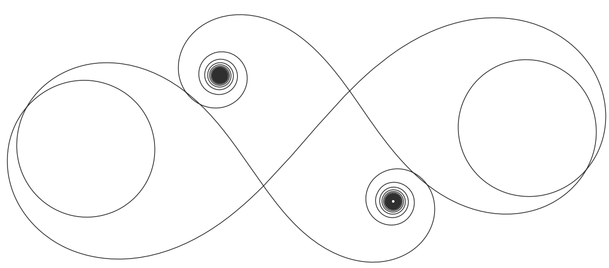
9. Еще одно решение уравнения $x^2 = i$ выглядит так:
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} - (\frac{1}{\sqrt{2}})i,$$
что обратно решению, приведенному в тексте.
10. Ed Leibowitz, The Accidental Ecoterrorist, Los Angeles Magazine, 2005.
11. Джеймс Томсон, с которым мы встретимся в главе 8, ввел термин «радиан» в 1873 году, хотя сама концепция была известна к тому времени уже полтора столетия.
12. Волновое уравнение Шредингера выглядит так:
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H}\Psi$$
где $i = \sqrt{-1}$, $\hbar$ — приведенная константа Планка, Ψ — волновая функция квантовой системы, $\hat{H}$ — оператор Гамильтона.
13. Melanie Bayley, Algebra in Wonderland, The New York Times, 2010.
14. John C. Baez and John Huerta, The Strangest Numbers in String Theory, Scientific American, 2011.
15. Bertrand Russell, The Study of Mathematics, Mysticism and Logic: And Other Essays, Longman, 1919. Бертран Рассел — единственный математик *мирового уровня*, получивший Нобелевскую премию по литературе. Однако диплом по математике был и у Александра Солженицына (Нобелевская премия за 1970 год), и у Джона Максвелла Кутси (2003 год).
16. Дэйв Болл публиковал свои статьи не в журнале, а на форуме, посвященном фракталам: groups.google.com/forum/?hl=en#!topic/sci.math/jHYDf-Tm0-8.

ГЛАВА 8

1. В 2001 году правительство Норвегии учредило ежегодную Абелевскую премию, названную в честь норвежского математика Нильса Хенрика Абеля (1802–1829). Ее денежный размер составляет около 1 миллиона долларов. Хотя эта премия аналогична Нобелевской по размеру и скандинавскому происхождению, она пока не заслужила такой репутации, как Филдсовская премия.
2. gowers.wordpress.com.
3. Plutarch, Life of Marcellus, цитируется по материалам онлайнового архива истории математики MacTutor.
4. Carl B. Boyer, The History of the Calculus and Its Conceptual Development, Dover, 1959.

Большой треугольник строится таким образом, чтобы касательная, проведенная в его нижней вершине, была параллельна исходной прямой. Точно так же при построении каждого нового треугольника его вершина размещается так, чтобы касательная в этой точке была параллельна противоположной стороне.

5. Ernst Sondheimer and Alan Rogerson, Numbers and Infinity, Dover, 2006.
6. James Gleick, Isaac Newton, Harper Perennial, 2003.
7. Ian Stewart, 17 Equations that Changed the World, Profile Books, 2012; Charles Seife, Zero, Souvenir Press, 2000.
8. A. Rupert Hall, Philosophers at War, Cambridge University Press, 2002.
9. Augustus De Morgan, A Budget of Paradoxes, 1872.
10. Функция $f(t, x, v)$ — это функция плотности вероятностей, которая определяет вероятность того, что частица окажется рядом с x при скорости v в момент времени t. Символом ∇ обозначается градиент, но применительно к нескольким переменным. Cédric Villani, Théorème vivant, Grasset, 2012.
11. The Railroad Gazette (now Railway Age), 1880, цитируется по изданию: Halsey G. Brown, The History of the Derivation of the AREMA Spiral, arema.org.
12. Клотоида — это кривая, кривизна которой пропорциональна длине. В алгебраической форме это можно записать так: кривизна = ks, где k — произвольная константа, s — расстояние вдоль кривой от начала координат. Бельгийский математик Фрэнки Диллен создал целый новый класс спиралей, рассчитывая их кривизну по формуле, представляющей собой многочлен с переменной s. (Многочлен, или полином, — это выражение, состоящее из переменных и степеней переменных, в котором используются только операции сложения, вычитания и умножения.) Диллен назвал эти кривые «полиномными спиралями». Они очень красивы; одна из любимых кривых Диллена — так называемая спираль Пикассо.



Кривизна $= 10\,(-45 + 51s - 18s^2 + 2s^3)$

13. Joe Moran, On Roads, Profile Books, 2009.
14. Robert Cartmell, The Incredible Scream Machine, Amusement Park Books, 1987; Chemin de Fer Aerien, La Nature, 1903. Прежде чем открыть для публики аттракцион с мертвой петлей, было проведено три испытания: первое — с обезьянами в качестве пассажиров, второе — с грузом тяжелее веса крупного человека и третье — с участием акробата.
15. George Berkeley, The Analyst: Or, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician, 1734.

ГЛАВА 9

1. Steven G. Krantz, The Proof is in the Pudding, Springer, 2011.
2. Martin Gardner, Mathematical Games: The Entire Collection of His Scientific American Columns, CD, 2005.
3. Львов (укр. Львів) находится сейчас на территории Украины.
4. В период написания книги лучшими кандидатами на звание самого скучного числа было число 224, которое являлось в то время наименьшим числом, не имеющим своей страницы в «Википедии», и 14 228, наименьшее число, которого не было в онлайновой Энциклопедии целочисленных последовательностей (Encyclopedia of Integer Sequences). Но поскольку об этих числах написано здесь, они стали интересными.
5. Если количество точек на линии окружности равно n, то количество секторов рассчитывается по формуле
$\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$.
6. В отличие от Фреге, некоторые специалисты по философии математики считают, что утверждение «отрицание отрицания утверждения A есть утверждение A» содержит глубокое противоречие.
7. Douglas R. Hofstadter, Metamagical Themas, Basic Books, 1996.
8. Martin Gardner, Logical Paradoxes, The Antioch Review, 1963.
9. John Allen Paulos, I Think, Therefore I Laugh, Penguin, 2000.
10. Одна из главных целей теории множеств состояла в том, чтобы доказать полноту математики. Другими словами, чтобы доказать, что, если теорема истинна, значит, она доказуема в рамках данной системы. Однако в 1931 году Курт Гёдель доказал, что на самом деле это не так: в любой системе, достаточно мощной, чтобы включать в себя арифметику, обязательно найдутся утверждения, которые невозможно ни доказать, ни опровергнуть. Работа Гёделя оказала существенное

влияние на математическую философию, поскольку ограничила сферу действия логики в качестве основы для математики.

11. *Николя Бурбаки*. Теория множеств. М. : Либроком, 2010. Интересно то, что Бурбаки ни разу не упоминает имя Курта Гёделя (см. предыдущее примечание).
12. Полдавия (фр. *Poldèvie*) — это шуточная страна, придуманная в 1929 году одним французским журналистом с правыми убеждениями и упомянутая в письме членам парламента левого крыла, в котором он от имени угнетенного народа Полдавии просит их вмешаться. После того как группа Бурбаки сделала Полдавию своей родиной, эта шутка начала часто появляться в работе нескольких французских писателей послевоенного периода. Профессор французского языка и литературы Принстонского университета и отец автора этой книги Дэвид Беллос сказал, что это «редкий пример того, как математический юмор стал темой литературных произведений».
13. Maurice Mashaal, Bourbaki, American Mathematical Society, 2006.
14. A. R. D. Mathias, A term of length 4,523,659,424,929, Synthese, 2002.
15. Bob Moon, Who Controls the Curriculum? The story of New Maths 1960–1980, International Perspectives in Curriculum History, 1987.
16. В настоящее время насчитывается более десятка систем для проверки доказательств; самые известные — Coq, HOL Light, Isabelle и Mizar. Систему Mizar в 1970-х годах начали разрабатывать в Польше; ее пользователи утверждают, что она содержит самую крупную логически связную базу формализованных доказательств.
17. Имеется в виду, что можно доказать все математические утверждения, которые в принципе доказуемы (см. примечание о Геделе).
18. Steven G. Krantz, The Proof is in the Pudding, Springer, 2011.

ГЛАВА 10

1. **Теорема.** Если для нахождения простых чисел просеиваются n чисел, то в этом случае достаточно проанализировать на наличие простых чисел числа, не превышающие $\sqrt{n}$.

   Доказательство. Представьте, что вы перебрали все простые числа до $\sqrt{n}$ включительно, но осталось незачеркнутым непростое число m, которое находится между $\sqrt{n}$ и n. Число m не является простым, тогда у него должны быть простые множители, причем больше $\sqrt{n}$. (Иначе это число было бы вычеркнуто на предыдущих этапах.) Однако произведение двух или более чисел, больших $\sqrt{n}$, — это число, которое больше n, а значит, число m не может быть меньше n, что и требовалось доказать*.

2. Одним из его любимых названий было: «Не звоните нам, мы сами вам позвоним!»
3. Martin Gardner, Mathematical Games: The Entire Collection of His Scientific American Columns, CD, 2005.
4. Если кто-то захочет сыграть в игру «Жизнь» (а я настоятельно рекомендую сделать это), лучше всего воспользоваться программой Golly, которую можно скачать здесь: golly.sourceforge.net.
5. Steven Levy, Hackers, O'Reilly Media, 2010.
6. Первое решето Эратосфена создал Дин Хикерсон в 1991 году. Решето, которое упомянуто здесь, — это усовершенствованная версия, разработанная Джейсоном Саммерсом в 2005 году.
7. William Poundstone, The Recursive Universe, Oxford University Press, 2005.
8. Когда эта книга уже ушла в печать, американский «жизнелюб» (любитель игры «Жизнь») Дэйв Грин объявил о получении новой самовоспроизводящейся фигуры, в которой количество живых клеток конструктора сократилось с 16 229 (как у «Джемини») до 256. Он назвал эту конфигурацию «репликатор Джеминоид», поскольку в нем используется ряд элементов той же технологии, что и у «Джемини». Однако, в отличие от «Джемини», у этой фигуры всего один конструктор, который выживает после создания копии, а не два, которые разрушаются, выполнив свою функцию. Репликатор «Джеминоид» порождает точную копию, которая порождает очередную точную копию и так далее до бесконечности, создавая линию потомков, распространяющуюся по всей сетке. Учитывая, что конструктор состоит из такого малого количества живых клеток, это облегчает построение новых конфигураций. Дэйв надеется на то, что технология «Джеминоида» приведет к появлению множества репликаторов новых типов.
9. Stephen Wolfram, A New Kind of Science, Wolfram Media, 2002.

---

* Эта теорема говорит о том, что на интервале от $\sqrt{n}$ до n остались только простые числа. *Прим. ред.*

ИНТЕРНЕТ

В сети интернет много сайтов, посвященных математике. В процессе написания книги я часто пользовался материалами таких сайтов, как Wolfram MathWorld, MacTutor History of Mathematics, и, безусловно, «Википедией».

Источники фотографий и рисунков

С. 24 Фото из личного архива Дэна Кинга.
С. 94 Science Museum/Science & Society Picture Library.
С. 114 © Иэн Фрейзер/Shutterstock.com.
С. 119 Из книги : Rodolphe Soreau, Nomographie, Chiron, 1921.
С. 123 © Kletr/Shutterstock.com.
С. 138 © The British Library Board, 48.d.13.16, vol. 2, title page.
С. 139 © Алекс Беллос.
С. 144 Из книги: Alfred Marshall Mayer, Soundby, Macmillan and Co., 1879.
С. 145 © Карл Симс, www.karlsims.com.
С. 147 Из книги: John Tyndall, Sound (Third Edition), Longmans, Green and Co., 1875.
С. 179 Фотография Натали Беллос.
С. 180 © Стэн Вэген.
С. 222–224 © Брайан Поллок.
С. 258 Из журнала: L'Illustration, 1846.
С. 259 © Вернер Штенгель.
С. 311 © iStock.com/busypix.

Предметно-именной указатель

А
Аксиома 315
Аксиома выбора 277
Алгебра 200
Аль-Бируни 88
Альмагест 104
Аль-Хорезми 200
Англосаксонские хроники 42
Андерсон Эрик 26
Аполлоний 102, 105
Аристотель 267
Архимед 102, 232
Асимптота 120

Б
Банах Стефан 265
Барабаши Альберт-Ласло 65
Барсук Кароль 265
Бартлетт Альберт 158
Бенфорд Фрэнк 45
Беркли Джордж 260
Бернулли Иоганн 136, 175
Бернулли Якоб 168, 174
Бесконечно малые величины 237
Биссектриса 315
Блэкберн Хью 143
Боденхаузен Гален 19
Болл Дэйв 226
Браге Тихо 107
Брахистохрона 136
Брахмагупта 196
Бурбаки 279, 281, 353

В
Вавилоняне 82
Ванг Орсон 225
Вейль Андре 280
Виллани Седрик 230, 248
Вольфрам Стивен 308
Вудолл Роб 74

Г
Галилей 68, 109, 132
Гамильтон Джеймс 47
Гамильтон Уильям 214
Гарднер Мартин 186, 294
Гармонограф 143, 315
Гауди Антонио 178
Геодезические знаки 74
Гильберт Давид 231, 274
Гипербола 120
 определение 121
 уравнение 124
 эксцентриситет 125
Гиперболоид 121
Гипотенуза 315
Гиппарх 83
Глобальная система позиционирования 95
Градиент 165, 238, 246, 315, 323
 касательной 241
Графики цепной линии 176
Гук Роберт 177
Гюйгенс Христиан 134

Д
Д'Аламбер Жан Лерон 248
Дарвин Чарльз 62
Двойной логарифмический масштаб 315, 323
Декарт Рене 116, 202
Деферент 104
Директриса 125
Дифференциальное уравнение 248, 315
Дифференцирование 246, 315
ДНК 304
Доджсон Чарльз 215
Д'Окань Морис 118
Доррелл Даррел 46
Древние греки 81, 98

Е
Евклид 102, 194, 267, 273
Египтяне 80

З
Закон
  80/20 61
  Архимеда 232
  Бенфорда 45, 48, 54, 316, 322
  Бойля—Мариотта 124
  дистрибутивности 200, 316
  масштабирования 69, 316
  Парето 60
  степенной 62, 65
  Ципфа 56, 60, 323
  экспоненциальный 159
Зенон 235

И
Ибн-Юнус 89
Игра «Жизнь» 286, 291, 298, 306, 311, 331, 354
Измерение
  высоты горы 87, 325
  высоты дерева 86
  высоты пирамиды 75, 343
  окружности Земли 77
  радиуса Земли 88, 326
Интегрирование 246, 253, 316
Итерации 216

К
Канеман Дэниел 163
Кант Иммануил 198
Кардано Джераламо 201
Карман Кристиан 105
Касательная 165, 316
Квадратура параболы 233
Кватернионы 214, 215
Кельвин 254
Кеплер Иоганн 106, 126, 185, 236
Клайбер Макс 69
Клеточный автомат 290, 306, 311, 316
Клотоида 257, 258, 351
Комета Галлея 126
Комплексная плоскость 208, 213, 219, 316
Конвей Джон 291
Конические сечения 98, 125, 127, 316
  гипербола 98
  окружность 98
  парабола 98
  трактат Аполлония 103
  эллипс 98
Конус 98
Коперник Николай 106
Косинус 85, 212
  формула вычисления 205
Кох Ричард 61
Кривизна 317
Кэрролл Льюис 215

Л
Лейбниц Готфрид 137, 207, 246
Лиссажу Жюль Антуан 145
Логарифм 91, 317, 321
  Непера 91

М
Мальтус Томас 162
Мандельброт Бенуа 221
Маной Томас 24
Математический анализ 273
Машина умножения 117, 327
Мебиус Август Фердинант 117
Медалисты Филдса 230
Метаязык 277
Метод
  доказательства от противного 267
  индукции 270
  Монте-Карло 288
  последовательных исчерпываний 235
  простаферезис 91
  флюксий 239
Мибейн Уолтер 47
Миликовски Маришка 37
Множество 317
  аксиоматическая теория 277
  Мандельброта 222
  определение 276
  самореференция 275

Н
Нейман Джон 288, 304
Непер Джон 91
Номограмма 118, 317
Ньюком Саймон 44
Ньюпорт Джерри 14
Ньютон Исаак 110, 115, 137, 238, 254

О
Оболочка Мандельброта 227
Окружность 99
  определение 130
Октонион 216
Оливье Теодор 122
Орбитальная траектория 104

П
Пале Боб 130
Парабола 345
  определение 112
  траектория шара 111
  уравнение 116
  эксцентриситет 125
Параболоид 113
Парадокс
  Банаха-Тарского 278
  Зенона 235
  лжеца 275
  Рассела 276
Парето Вильфредо 60
Паскаль Блез 134
Перельман Григорий 252
Перестановки 183
Период удвоения 161
Пикар Жан 92
Пифагор 16
Платоновы тела 107
Полярная система координат 211, 318
Правило 72 161
Преобразование Фурье 152, 318
  быстрое 155, 315
Принцип 80/20 342
Принцип Парето 61
Производная 242, 318
Простой процент 167
Прямоугольная система координат 318, 345
Птолемей 83, 104
Пуанкаре Анри 251

Р
Радиан 205, 350
Рассел Бертран 216, 275, 350
Рен Кристофер 122
Решето Эратосфена 286, 297, 331, 354
Роберваль Жиль Персонн 133
Роуленд Грег 20
Рулетты 139, 318
Ряд Фурье 152, 318

С
Сен-Викторский Гуго 20
Серра Рамиро 105
Симестер Данкан 26
Синдром Аспергера 14
Синус 85, 86, 212, 319
  формула вычисления 205
Синусоида 141, 319
  уравнение 148
Сложные проценты 167, 328
Спираль Пикассо 351
Спираль Улама 288
Стирлинг Джеймс 191

Т
Тангенс 85, 319
Тарский Альфред 277
Тверски Амос 163
Теорема
  алгебры основная 203, 317
  арифметики основная 317
  исчисления основная 244, 317
  о промежуточном значении 263
  о четырех красках 283
  Пифагора 79, 89
  Теда Хилла 52
  Фалеса 76
  Фурье 151, 153
Теория множеств 283, 319
Тождество Эйлера 204
Треугольник 79
  прямоугольный 79
  Серпинского 308

Тригонометрические функции 85
Тригонометрическое тождество 89
Тригонометрия 88, 319

У

Уилки Джеймс 19
Уитни Джон 145
Улам Станислав 265, 288
Умножения мнимых чисел 210
Уоллис Джон 197
Уравнение
  алгебраическое 315
  Больцмана 232, 249
  квадратное 117
  синусоиды 148
  степенного закона 67
  цепной линии 176
  Шредингера 210, 350
  экспоненциального роста 172
Уэст Джеффри 71

Ф

Факториал 182, 192, 319
Фалес 75, 84, 343
Фигуры Лиссажу 146
Филдсовская премия 230, 252
Фокус 125, 319
Формула ибн-Юнуса 90
Фрактал 222, 319
Фреге Готлоб 274
Фриго Арт 100
Фризиус Гемма 91
Фурье Жозеф 150, 155

Х

Хайнс Теренс 18
Хартл Майкл 131
Хилл Тед 51

Ц

Центростремительная сила 255
Цепная линия 174, 178
Циклоида 132, 136, 139, 319
Ципф Джордж Кингсли 55
Цифры ведущие 43

Ч

Числа
  абсурдные 196, 349
  беглецы и узники 218
  действительные 202, 315
  иррациональные 191
  комплексные 202, 316
  круглые 24
  любимые 28
  мнимые 202, 317
  нечетные 16, 19
  отрицательные 194
  простые 14, 318, 338, 353
  Фибоначчи 54
  целые 319, 338
  четные 16, 19
Число
  i 202, 316, 349
  e 167, 173, 190, 316
  пи 130, 190, 226, 317
  тау 131
Чэпмен Пол 286, 300

Ш

Шагун 21
Шестидесятеричная система
    счисления 82
Штейнгауз Гуго 265
Шумеры 15

Э

Эверест Джордж 93
Эйлер Леонард 180, 184, 192, 202, 257
Эйнштейн Альберт 167
Экспонента 159, 320
Эксцентриситет 125, 320
Эллипс 99
  фокусы 99
  эксцентриситет 125
Эпицикл 104, 345
Эратосфен 76

Я

Янишевски Крис 22, 36

Об авторе

Алекс Беллос — автор бестселлера Alex's Adventures in Numberland («Алекс в стране чисел. Необычайное путешествие в мир математики»), попавшего в шорт-лист премии Сэмюеля Джонсона. Он ведет блог по математике для Guardian и работал на эту газету в Лондоне и в Рио-де-Жанейро, где был иностранным корреспондентом, на редкость хорошо разбирающимся в математике. Алекс Беллос курирует Музей науки и имеет диплом Оксфордского университета по математике и философии. Проживает в Лондоне.

Максимально полезные книги от издательства «Манн, Иванов и Фербер»

Научно-популярное издание

Алекс **Беллос**

Красота в квадрате

Как цифры отражают жизнь и жизнь отражает цифры

Главный редактор *Артем Степанов*
Ответственный редактор *Наталья Шульпина*
Арт-директор *Алексей Богомолов*
Литературный редактор *Татьяна Сковородникова*
Дизайнер *Владимир Мачинский*
Верстка *Лариса Чернокозинская*
Корректоры *Наталья Витько, Екатерина Лебедева*