Ж.-П Серр

Jean-Pierre Serre

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES
DES GROUPES FINIS

Collection Méthodes
HERMANN, PARIS 1967

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Перевод с французского
В. А. Исковских

Под редакцией
Ю. И. Манина

Издательство „МИР"
МОСКВА 1970

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ж.-П. Серр

Линейные представления конечных групп

Редактор *Г. Цукерман*

Художественный редактор *В. Шаповалов*
Технический редактор *Т. Чечик*
Корректор *Е. Литвак*

Сдано в производство 5/XI 1969 г. Подписано к печати 13/V 1970 г.
Бумага № 2 $84\times108^1/_{32}$=2,06 бум. л. 6,93 печ. л. Уч.-изд. л. 5,52.
Изд. № 1/5448. Цена 38 коп. Зак. 377.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.

УДК 519.4

Автор — выдающийся французский математик, знакомый советскому читателю по русскому переводу его монографий «Алгебраические группы и поля классов», «Когомологии Галуа» («Мир», 1968) и «Группы Ли и алгебры Ли» («Мир», 1969). С присущим ему мастерством он излагает классическую теорию представлений конечных групп над полем комплексных чисел и теорию Брауэра (теорию модулярных характеров).

Книга представляет интерес для математиков различных специальностей, в первую очередь для специалистов по алгебре и функциональному анализу. Основная ее часть доступна студентам и аспирантам-математикам, а также физикам и химикам-теоретикам.

Редакция литературы по математическим вопросам

Индекс $\frac{2\text{-}2\text{-}3}{13\text{-}70}$

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга состоит из трех частей, различающихся между собой как по уровню, так и по своей цели.

Первая часть написана для химиков-теоретиков. В ней описано принадлежащее Фробениусу соответствие между линейными представлениями и их характерами. Речь идет о фундаментальных результатах, которые постоянно используются не только в математике, но и в квантовой химии и физике. Я пытался давать по возможности элементарные доказательства, используя только определение группы и начала линейной алгебры. Примеры (§ 5) подобраны таким образом, чтобы они были полезны химикам.

Вторая часть представляет собой запись курса, прочитанного мною в 1966 году для студентов 2-го курса Эколь нормаль. Она дополняет первую следующими пунктами:

а) степени представлений и свойства целозначности характеров (§ 6);

б) индуцированные представления, теоремы Артина и Брауэра и их применения (§ 7, 11);

в) представления над полем характеристики нуль (§ 12).

При этом используются средства линейной алгебры в несколько бóльшем объеме, чем в первой части, а именно групповые алгебры, модули, некоммутативные тензорные произведения, полупростые алгебры.

Третья часть — это текст моего доклада на семинаре Гротендика о теории Брауэра: переход из характеристики 0 в характеристику p (и обратно). Здесь я свободно пользуюсь языком абелевых категорий (проективными объектами, группой Гротендика), очень удобным в такого рода вопросах.

Основные результаты:

а) устанавливается (следуя Брауэру), что гомоморфизм разложения сюръективен: каждое неприводимое представление в характеристике p может быть поднято «виртуально» (т. е. в надлежащей группе Гротендика) в характеристику 0;

б) доказывается теорема Фонга — Суона, позволяющая отбросить слово «виртуально» в предыдущем утверждении, если рассматриваемая группа p-разрешима.

Кроме того, указываются некоторые приложения этих результатов к представлениям Артина.

Мне приятно поблагодарить Гастона Вертье и Жозьян Серр, которые позволили мне воспроизвести здесь текст части I, предназначенный для приложения к их книге «Квантовая химия», Ива Валоско, который восстановил текст II части по лекционным заметкам, Александра Гротендика, который позволил мне поместить здесь изложение одного из докладов на его семинаре по алгебраической геометрии в Институте высших научных исследований (IHES) 1965/66г.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ХАРАКТЕРЫ

Первые три параграфа этой части посвящены основным свойствам линейных представлений конечных групп и особенно теории характеров. Распространение этих результатов на компактные группы составляет содержание § 4. В § 5 приведены различные примеры.

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

1.1. Определения

Пусть V — векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ и $GL(V)$ — группа его автоморфизмов над тем же полем. Каждый элемент группы $GL(V)$ есть по определению такое линейное отображение a пространства V в себя, для которого существует обратное отображение a^{-1}, также являющееся линейным. В случае когда пространство V имеет конечный базис из n элементов (e_i), любое линейное отображение a: $V \to V$ задается квадратной матрицей (a_{ij}) порядка n. Коэффициенты a_{ij} являются здесь комплексными числами, они возникают как коэффициенты в разложении векторов $a(e_j)$ по базису (e_i):

$$a(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i.$$

При этом отображение a тогда и только тогда является изоморфизмом, когда определитель $\det(a) = \det(a_{ij})$ отличен от нуля. Группа $GL(V)$ отождествляется в таком случае с группой *обратимых квадратных матриц порядка n.*

Пусть теперь G — некоторая конечная группа. *Линейным представлением* группы G в пространстве V называется произвольный гомоморфизм ρ группы G в группу $GL(V)$. Другими словами, это такое сопоставление каждому элементу $s \in G$ элемента $\rho(s)$ группы $GL(V)$, при котором выполняется равенство

$$\rho(st) = \rho(s)\rho(t) \quad \text{для всех } s, t \in G.$$

[Часто мы будем писать также ρ_s вместо $\rho(s)$.] Заметим, что из предыдущего равенства вытекают следующие соотношения:

$$\rho(1) = 1, \quad \rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}.$$

При заданном ρ пространство V называется *пространством представления* группы G (или, для краткости, просто *представлением* группы G). Всюду в дальнейшем мы ограничиваемся случаем, когда пространство V имеет *конечную размерность*. Это не очень стеснительное ограничение. В самом деле, в большинстве приложений интересно, как правило, поведение только *конечного числа элементов* x_i пространства V (например, некоторых волновых функций), и всегда можно найти некоторое *подпредставление* (в смысле определения п. 1.3) конечной размерности, содержащее элементы x_i: достаточно взять подпространство пространства V, порожденное образами $\rho_s(x_i)$ элементов x_i.

Будем предполагать, следовательно, что пространство V конечномерно, и пусть n — его размерность. Число n мы будем называть также *степенью* рассматриваемого представления. Пусть (e_i) — некоторый базис пространства V и R_s — матрица автоморфизма ρ_s относительно этого базиса. Тогда

$$\det(R_s) \neq 0, \quad R_{st} = R_s R_t, \quad s, t \in G.$$

Если через $r_{ij}(s)$ обозначить коэффициенты матрицы R_s, то вторая формула перепишется в виде

$$r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s) r_{jk}(t).$$

Обратно, задание обратимых матриц $R_s = (r_{ij}(s))$, удовлетворяющих предыдущим тождествам, определяет некоторое линейное представление ρ группы G в пространстве V: это так называемое задание представления «в матричной форме».

Пусть ρ и ρ' — два линейных представления группы G в пространствах V и V' соответственно. Говорят, что представления ρ и ρ' *подобны* (*эквивалентны* или *изоморфны*), если существует такой линейный изоморфизм $\tau\colon V \to V'$, который «переводит» представление ρ в ρ', иначе говоря, который удовлетворяет следующему условию:

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau$$

для любого $s \in G$. В случае когда представления ρ и ρ' заданы в матричной форме R_s и R'_s соответственно, это эквивалентно существованию такой обратимой матрицы T, что

$$TR_s = R'_s T \quad \text{или} \quad R'_s = TR_sT^{-1}$$

для всех $s \in G$.

Ничто не мешает *отождествлять* подобные представления (сопоставляя каждому элементу $x \in V$ элемент $\tau(x) \in V'$); в частности, они имеют *одну и ту же степень*.

1.2. Первые примеры

(а) Предположим, что группа G задана как группа подстановок некоторого множества X. Обозначим через $x \mapsto sx$ подстановку, соответствующую элементу $s \in G$. В качестве V возьмем векторное пространство комплекснозначных *функций* на X и для каждой функции $f \in V$ и каждого элемента $s \in G$ определим функцию $\rho_s f$ формулой

$$\rho_s f(x) = f(s^{-1}x)$$

(функция $\rho_s f$ является в очевидном смысле образом функции f при подстановке s). Ясно, что $\rho_s f$ линейно зависит от f, т. е. ρ_s является некоторым автоморфизмом пространства V и, кроме того, $\rho_{st} = \rho_s \circ \rho_t$. Таким образом, мы получаем некоторое линейное представление группы G в пространстве V.

(б) Каждое представление *степени* 1 — это гомоморфизм $\rho\colon G \to \mathbf{C}^*$ группы G в мультипликативную группу комплексных чисел $\mathbf{C}^*$. Поскольку каждый элемент (конечной) группы G имеет конечный порядок, значения $\rho(s)$ представления ρ являются *корнями из единицы*; в частности, $|\rho(s)| = 1$.

Если положить $\rho(s) = 1$ для каждого элемента $s \in G$, то мы получим некоторое представление группы G, называемое *единичным представлением*.

(в) Пусть g обозначает порядок группы G и V — векторное пространство размерности g с базисом $(e_t)_{t\in G}$, перенумерованным элементами t группы G. Для каждого $s \in G$ определим тогда линейное отображение $\rho(s)$ пространства V в себя, сопоставляя элементу e_t элемент e_{st}. Легко проверить, что таким образом мы получаем некоторое линейное представление, которое называется *регулярным представлением группы* G. Его степень равна порядку группы G. Заметим, что $e_s = \rho_s(e_1)$ и, следовательно, образы элемента e_1 составляют базис пространства V. Обратно, если пространство представления W некоторого представления ρ группы G содержит такой вектор w, что элементы $\rho_s(w)$, $s \in G$, образуют базис пространства W, то это представление *изоморфно регулярному представлению* (изоморфизм $\tau\colon V \to W$ задается формулой $\tau(e_s) = \rho_s(w)$).

1.3. Подпредставления

Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ — некоторое линейное представление и W — векторное подпространство пространства V. Предположим, что подпространство W *инвариантно* относительно действия группы G в представлении ρ, т. е. для каждого элемента $x \in W$ все элементы вида $\rho_s(x)$, $s \in G$, также принадлежат подпространству W. Тогда ограничение ρ_s^W автоморфизма ρ_s на W является автоморфизмом этого подпространства и, очевидно, $\rho_{st}^W = \rho_s^W \circ \rho_t^W$. Таким образом, $\rho^W\colon G \to GL(W)$ является линейным представлением группы G в пространстве W. Мы будем называть его *подпредставлением* представления ρ.

Пример. Рассмотрим регулярное представление группы G в пространстве V (см. п. 1.2 (в)), и возьмем в качестве W одномерное подпространство пространства V, порожденное элементом $x = \sum_{s\in G} e_s$. Тогда $\rho_s(x) = x$, откуда следует, что W определяет подпредставление представления ρ, которое изоморфно единичному представлению. (В п. 2.4 будут перечислены все подпредставления регулярного представления.)

Прежде чем двигаться дальше, напомним некоторые понятия, относящиеся к векторным пространствам. Пусть V — векторное пространство и W, W' — подпространства пространства V. Говорят, что V есть *прямая сумма* подпространств W и W', если для каждого вектора $x \in V$ существует однозначное разложение вида $x = w + w'$, где $w \in W$ и $w' \in W'$; это равносильно тому, что пересечение $W \cap W'$ равно нулю и $\dim V = \dim W + \dim W'$. Будем писать тогда $V = W \oplus W'$ и называть подпространство W' *дополнением* к подпространству $W \subset V$. Отображение p, сопоставляющее каждому вектору $x \in V$ его компоненту w из подпространства W, называется *проектором* пространства V на пространство W (ассоциированным с прямым разложением $V = W \oplus W'$). Образом проектора p является все подпространство W и $p(x) = x$ для каждого вектора $x \in W$. Обратно, если некоторое линейное отображение p обладает этими свойствами, то пространство V, как легко видеть, представляется в виде прямой суммы образа W и *ядра* W' (т. е. множества тех векторов $x \in V$, для которых $p(x) = 0$) отображения p; при этом p является проектором. Этим способом устанавливается взаимно однозначное соответствие между *проекторами пространства V на подпространство W и дополнениями W' к подпространству $W \subset V$.*

Возвратимся снова к подпредставлениям.

Теорема 1. *Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ — линейное представление группы G в пространстве V и W — некоторое* *подпространство векторного пространства V, инвариантное относительно G. Тогда существует дополнение W^0 к подпространству W в V, которое также инвариантно относительно G.*

Доказательство. Пусть W' — какое-нибудь дополнение к подпространству W в V и p: $V \to W$ — соответствующий проектор. Рассмотрим усреднение p^0 образов проектора p при действии элементов группы G,

$$p^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_t p \rho_t^{-1}$$

(где g — порядок группы G). Поскольку p отображает V на W и ρ_t переводит подпространство W в себя, то p^0 также отображает V в W. С другой стороны, если $x \in W$, то $\rho_t^{-1}(x) \in W$, откуда $p\rho_t^{-1}(x) = \rho_t^{-1}(x)$, $\rho_t p \rho_t^{-1}(x) = x$ и $p^0(x) = x$. Таким образом, p^0 является проектором, соответствующим некоторому дополнению W^0 к подпространству W в V. При этом $\rho_s p^0 = p^0 \rho_s$ для каждого элемента $s \in G$. В самом деле,

$$\rho_s p^0 \rho_s^{-1} = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_s \rho_t p \rho_t^{-1} \rho_s^{-1} = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_{st} p \rho_{st}^{-1} = p^0.$$

Если же $x \in W^0$ и $s \in G$, то $p^0(x) = 0$, откуда $p^0 \rho_s(x) = \rho_s p^0(x) = 0$, т. е. $\rho_s(x) \in W^0$. Это означает, что подпространство W^0 инвариантно относительно G. Теорема доказана.

Замечание. Предположим, что пространство V снабжено некоторым *скалярным произведением* $\langle x, y \rangle$, удовлетворяющим обычным условиям: линейность по y, полулинейность по x и $\langle x, x \rangle > 0$ при $x \neq 0$. Предположим, кроме того, что это скалярное произведение *инвариантно* относительно действия группы G, иначе говоря, справедливо равенство $\langle \rho_s(x), \rho_s(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ для всех $x, y \in V$ и $s \in G$. Этого мы всегда можем добиться, заменяя в случае необходимости $\langle x, y \rangle$ на $\sum_{t \in G} \langle \rho_t(x), \rho_t(y) \rangle$. При этих предположениях *ортогональное дополнение* W^0 к инвариантному подпространству W в V будет, очевидно, *инвариантным относительно G дополнением к W*, и мы получаем другое доказательство теоремы 1. Отметим, что инвариантность скалярного произведения $\langle x, y \rangle$ означает, что в ортонормальном базисе (e_i) пространства V все матрицы ρ_s, $s \in G$, являются *унитарными*.

Сохраним обозначения и предположения теоремы 1. Пусть $x \in V$ — произвольный вектор и w, w^0 — его проекции на подпространства W и W^0 соответственно. Тогда $x = w + w^0$, откуда $\rho_s(x) = \rho_s(w) + \rho_s(w^0)$, и поскольку подпространства W и W^0 инвариантны относительно группы G, то $\rho_s(w) \in W$ и $\rho_s(w^0) \in W^0$. Следовательно, $\rho_s(w)$ и $\rho_s(w^0)$ являются проекциями вектора $\rho_s(x)$ на подпространства W и W^0. Из этого следует, что знание представлений W и W^0 позволяет восстановить представление V. В таком случае говорят, что представление V есть *прямая сумма* представлений W и W^0 и обозначают это так: $V = W \oplus W^0$. Каждый элемент пространства V отождествляется при этом с парой (w, w^0), где $w \in W$ и $w^0 \in W^0$. Если представления W и W^0 заданы в матричной форме R_s и R_s^0, то представление $W \oplus W^0$ задается матрицами вида

$$\begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_s^0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется прямая сумма любого конечного семейства представлений.

1.4. Неприводимые представления

Пусть ρ: $G \to GL(V)$ — некоторое линейное представление группы G. Представление ρ называется *неприводимым*, если пространство V отлично от нуля и не имеет G-инвариантных подпространств, кроме 0 и V, разумеется. В силу теоремы 1 это эквивалентно утверждению, что V *не разлагается в прямую сумму двух представлений* (кроме тривиального разложения $V = 0 \oplus V$). Очевидно, каждое представление степени 1 неприводимо. В дальнейшем мы покажем, что каждая некоммутативная группа обладает по крайней мере одним неприводимым представлением степени $n \geqslant 2$. Из неприводимых представлений с помощью прямых сумм можно составить любое другое представление. Точнее, имеет место

Теорема 2. *Каждое представление является прямой суммой неприводимых представлений.*

Доказательство. Пусть V — произвольное линейное представление группы G. Воспользуемся индукцией по размерности V. Если $\dim V = 0$, то утверждение теоремы тривиально (так как 0 есть прямая сумма *пустого множества* неприводимых представлений). Предположим, следовательно, что $\dim V \geqslant 1$. Если представление V неприводимо, то нечего доказывать. В противном случае по теореме 1 мы можем разложить V в прямую сумму $V' \oplus V''$, где $\dim V' < \dim V$ и $\dim V'' < \dim V$. Тогда по предположению индукции представления V' и V'' являются прямыми суммами неприводимых представлений, а, значит, то же самое верно и для V. Теорема доказана.

Замечание. Пусть V — некоторое представление и $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ — его разложение в прямую сумму неприводимых представлений. Возникает вопрос: *однозначно* ли это разложение? Легко убедиться, что в случае, когда все ρ_s равны 1, это разложение, вообще говоря, не однозначно (в этом случае все подпространства W_i будут одномерными и пространство V можно разложить, разумеется, различными способами в прямую сумму одномерных подпространств). Однако в п. 2.3 мы покажем, что *число* представлений W_i, изоморфных данному неприводимому представлению W, не зависит от выбора разложения.

1.5. Тензорное произведение двух представлений

Наряду с операцией прямой суммы (обладающей формальными свойствами сложения) для представлений можно определить и «умножение» — *тензорное произведение*, иногда называемое *кронекеровским произведением*. Оно определяется следующим образом.

Прежде всего напомним, что тензорным произведением двух векторных пространств V_1 и V_2 называется такое векторное пространство W, для которого существует отображение $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ прямого произведения $V_1 \times V_2$ в W, удовлетворяющее следующим двум условиям:

(1) отображение $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ линейно по каждому из переменных x_1 и x_2;

(2) если (e_{i_1}) — некоторый базис пространства V_1, а (e_{i_2}) — некоторый базис пространства V_2, то семейство произведений $e_{i_1} \cdot e_{i_2}$ является базисом пространства W.

Легко видеть, что такое пространство W существует и единственно (с точностью до изоморфизма); оно обозначается через $V_1 \otimes V_2$. Из условия (2) следует, что

$$\dim (V_1 \otimes V_2) = \dim V_1 \dim V_2.$$

Пусть теперь $\rho^1\colon G \to GL(V_1)$ и $\rho^2\colon G \to GL(V_2)$ — два линейных представления группы G. Сопоставим каждому элементу $s \in G$ элемент ρ_s группы $GL(V_1 \otimes V_2)$, удовлетворяющий условию

$$\rho_s(x_1 \cdot x_2) = \rho_s^1(x_1) \cdot \rho_s^2(x_2)$$

$$\text{для каждого } x_1 \in V_1 \text{ и } x_2 \in V_2.$$

Существование и единственность элемента ρ_s легко следует из условий (1) и (2). Мы будем писать в этом случае

$$\rho_s = \rho_s^1 \otimes \rho_s^2.$$

Ясно, что ρ_s определяет некоторое линейное представление группы G в пространстве $V_1 \otimes V_2$, которое и называется *тензорным произведением* заданных представлений ρ^1 и ρ^2.

Переформулировка этого определения в матричной форме очевидна: пусть (e_{i_1}) — некоторый базис пространства V_1 и $r_{i_1 j_1}(s)$ — матрицы линейных преобразований ρ_s^1 в этом базисе, аналогичный смысл имеют обозначения (e_{i_2}) и $r_{i_2 j_2}(s)$ для пространства V_2. Тогда из формул

$$\rho_s^1(e_{j_1}) = \sum_{i_1} r_{i_1 j_1}(s) \cdot e_{i_1}, \quad \rho_s^2(e_{j_2}) = \sum_{i_2} r_{i_2 j_2}(s) \cdot e_{i_2}$$

мы получаем

$$\rho_s(e_{j_1} \cdot e_{j_2}) = \sum_{i_1, i_2} r_{i_1 j_1}(s) \cdot r_{i_2 j_2}(s) \cdot e_{i_1} \cdot e_{i_2}.$$

Следовательно, матрица линейного преобразования ρ_s имеет вид $(r_{i_1 j_1}(s)) \cdot (r_{i_2 j_2}(s))$, в котором мы узнаем *тензорное произведение матриц автоморфизмов* ρ_s^1 и ρ_s^2.

Тензорное произведение двух неприводимых представлений не является, вообще говоря, неприводимым. Оно разлагается в прямую сумму неприводимых представлений, которые могут быть определены с помощью теории характеров (см. п. 2.3).

Замечание. В практических приложениях тензорное произведение представлений появляется следующим образом: если V_1 и V_2 — векторные пространства функций, инвариантные относительно группы G, с базисами (φ_{i_1}) и (ψ_{i_2}) соответственно, то в качестве $V_1 \otimes V_2$ выступает пространство, порожденное произведениями $\varphi_{i_1}\psi_{i_2}$ в предположении, что все эти произведения *линейно независимы*. Это последнее условие существенно. Укажем два частных случая, где оно автоматически выполнено:

1. Функции φ_i зависят от переменных $(x, x', \ldots)$, а функции ψ_i — от переменных $(y, y', \ldots)$, не зависящих от первых.

2. Пространство V_1 (или V_2) порождено одной функцией φ, не обращающейся тождественно в нуль ни в какой области пространства; пространство V_1 в этом случае имеет размерность 1.

§ 2. ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРОВ

2.1. Характер представления

Пусть V — векторное пространство с базисом (e_i) из n элементов и a — некоторое линейное отображение пространства V в себя с матрицей (a_{ij}). *Следом* ото-

бражения a называется скаляр

$$\mathrm{Tr}\,(a) = \sum_i a_{ii}.$$

Известно, что след равен *сумме собственных значений* отображения a (с учетом их кратностей) и не зависит от выбора базиса (e_i).

Пусть теперь ρ: $G \to GL(V)$ — некоторое линейное представление конечной группы G в векторном пространстве V.

Для каждого элемента $s \in G$ положим

$$\chi_\rho(s) = \mathrm{Tr}\,(\rho_s).$$

Мы получаем, таким образом, некоторую функцию χ_ρ на группе G с комплексными значениями, которая называется *характером* представления ρ. Важность этой функции определяется тем, что она характеризует рассматриваемое представление (см. п. 2.3).

Предложение 1. *Пусть* χ — *характер некоторого представления* ρ *степени* n, *тогда*

(1) $\chi(1) = n$;

(2) $\chi(s^{-1}) = \chi(s)^*$ *для любого* $s \in G$;

(3) $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$ *для любых* s, $t \in G$.

[Если x — комплексное число, то через x^* обозначается его комплексно сопряженное.]

Доказательство. Так как пространство V имеет размерность n, то $\rho(1) = 1$ и $\mathrm{Tr}(1) = n$, откуда следует утверждение (1).

Для доказательства утверждения (2) заметим, что каждый элемент ρ_s имеет конечный порядок, следовательно, этим же свойством обладают и все его собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и, значит, они по абсолютной величине равны 1 (это следует также и из того, что ρ_s могут быть представлены в виде унитарных матриц, см. п. 1.3). Следовательно,

$$\chi(s)^* = \mathrm{Tr}\,(\rho_s)^* = \sum \lambda_i^* = \sum \lambda_i^{-1} = \mathrm{Tr}\left(\rho_s^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(\rho_{s^{-1}}) = \chi\left(s^{-1}\right).$$

Формулу (3) можно переписать в виде $\chi(vu) = \chi(uv)$, полагая $u = ts$, $v = t^{-1}$. В таком виде она следует из известной формулы

$$\operatorname{Tr}(ab)=\operatorname{Tr}(ba),$$

справедливой для произвольных линейных отображений a и b пространства V в себя. Доказательство закончено.

З а м е ч а н и е. Функция f на группе G, удовлетворяющая тождеству $f(uv)=f(vu)$, называется *центральной функцией*. В п. 2.5 мы покажем, что каждая центральная функция является линейной комбинацией характеров.

Предложение 2. *Пусть* ρ^1: $G\to GL(V_1)$, ρ^2: $G\to GL(V_2)$ — *линейные представления группы* G *и* χ_1, χ_2 — *их характеры. Тогда*

(1) *характер* χ *прямой суммы представлений* $V_1\oplus V_2$ *равен* $\chi_1+\chi_2$;

2) *характер* ψ *тензорного произведения представлений* $V_1\otimes V_2$ *равен* $\chi_1\chi_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим ρ^1 и ρ^2 в матричной форме R_s^1 и R_s^2. Тогда представление $V_1\oplus V_2$ в матричной форме имеет вид

$$R_s=\begin{pmatrix} R_s^1 & 0\\ 0 & R_s^2\end{pmatrix},$$

откуда $\operatorname{Tr}(R_s)=\operatorname{Tr}(R_s^1)+\operatorname{Tr}(R_s^2)$, т. е. $\chi(s)=\chi_1(s)+\chi_2(s)$.

Аналогично доказывается и утверждение (2). В обозначениях п. 1.5 имеем

$$\chi_1(s)=\sum_{i_1} r_{i_1i_1}(s),\qquad \chi_2(s)=\sum_{i_2} r_{i_2i_2}(s),$$

$$\psi(s)=\sum_{i_1,\,i_2} r_{i_1i_1}(s)\,r_{i_2i_2}(s)=\chi_1(s)\,\chi_2(s),$$

что и требовалось доказать.

2.2. Лемма Шура — первые приложения

Предложение 3 («лемма Шура»). *Пусть* ρ^1: $G\to GL(V_1)$, ρ^2: $G\to GL(V_1)$ — *неприводимые представления группы* G, *и пусть* f — *такое линейное отображение пространства* V_1 *в пространство* V_2, *что* $\rho_s^2\circ f=f\circ\rho_s^1$ *для каждого* $s\in G$. *Тогда*

(1) *если* ρ^1 *и* ρ^2 *не изоморфны, то* $f=0$;

(2) *если* $V_1=V_2$, $\rho^1=\rho^2$, *то* f *является гомотетией (т. е. умножением на некоторое число).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $f=0$ тривиален. Будем предполагать, следовательно, что $f\neq 0$, и пусть W_1 — *ядро* f (т. е. множество таких элементов $x\in V_1$, что $f(x)=0$). Если $x\in W_1$, то $f\circ\rho_s^1(x)=\rho_s^2\circ f(x)=0$, откуда $\rho_s^1(x)\in W_1$, и, значит, подпространство W_1 инвариантно относительно G. Но так как представление ρ^1 неприводимо, то либо W_1 совпадает со всем пространством V_1, либо равно нулю. Первый случай исключается (он соответствует $f=0$). Следовательно, $W_1=0$. Точно так же доказывается, что *образ* W_2 отображения f (т. е. множество элементов $f(x)$, где $x\in V_1$) совпадает со всем пространством V_2. Отсюда следует, что f является *изоморфизмом пространства* V_1 *на пространство* V_2, что доказывает утверждение (1).

Предположим теперь, что $V_1=V_2$, $\rho^1=\rho^2$, и пусть λ — некоторое *собственное значение* отображения f. По крайней мере одно такое существует, поскольку поле скаляров является полем комплексных чисел. Положим $f'=f-\lambda$. Так как λ — собственное значение отображения f, то ядро отображения f' отлично от нуля. С другой стороны, $\rho_s^2\circ f'=f'\circ\rho_s^1$. Первая часть доказательства показывает тогда, что это возможно только в том случае, когда $f'=0$, т. е. $f=\lambda$, что и требовалось доказать.

Сохраним предположение, что V_1 и V_2 неприводимы, и обозначим через g *порядок* группы G.

Следствие 1. *Пусть* h — *некоторое линейное отображение пространства* V_1 *в пространство* V_2. *Положим*

$$h^0=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}(\rho_t^2)^{-1}h\rho_t^1.$$

Тогда

(1) *если* ρ^1 *и* ρ^2 *не изоморфны, то* $h^0=0$;

(2) *если $V_1 = V_2$, $\rho^1=\rho^2$, то h^0 является гомотетией с множителем $\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(h)$, где $n=\dim V_1$.*

Доказательство. Имеем $\rho_s^2\circ h^0 = h^0\circ\rho_s^1$. В самом деле,

$$(\rho_s^2)^{-1}h^0\rho_s^1 = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}(\rho_s^2)^{-1}(\rho_t^2)^{-1}h\rho_t^1\rho_s^1 = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}(\rho_{ts}^2)^{-1}h\rho_{ts}^1 = h^0.$$

Применяя предложение 3 к $f=h^0$, мы видим, что в случае (1) $h^0=0$, а в случае (2) h^0 совпадает с умножением на скаляр λ. Более того, в последнем случае мы имеем

$$\operatorname{Tr}(h^0) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\operatorname{Tr}\left((\rho_t^1)^{-1}h\rho_t^1\right) = \operatorname{Tr}(h),$$

и так как $\operatorname{Tr}(\lambda)=n\lambda$, то $\lambda=\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(h)$. Следствие доказано.

Выпишем явно результат следствия 1, предполагая, что представления ρ^1 и ρ^2 заданы в *матричной форме*

$$\rho_t^1 = \left(r_{i_1j_1}(t)\right),\quad \rho_t^2=\left(r_{i_2j_2}(t)\right).$$

Пусть линейное отображение h задается матрицей $(x_{i_2i_1})$ и h^0 — матрицей $(x^0_{i_2i_1})$. Тогда по определению h^0

$$x^0_{i_2i_1} = \frac{1}{g}\sum_{t,j_1,j_2} r_{i_2j_2}(t^{-1})\,x_{j_2j_1}r_{j_1i_1}(t).$$

Правая сторона этого равенства является линейной формой относительно $x_{j_2j_1}$. В случае (1) эта форма обращается в нуль для каждой системы значений $x_{j_2j_1}$. Следовательно, все ее коэффициенты равны нулю. Отсюда получаем

Следствие 2. *В случае (1) имеет место равенство*

$$\frac{1}{g}\sum_{t\in G} r_{i_2j_2}(t^{-1})\,r_{j_1i_1}(t)=0$$

при всех i_1, i_2, j_1, j_2.

Точно так же в случае (2) мы имеем $h^0=\lambda$, т. е. $x^0_{i_2i_1}=\lambda\delta_{i_2i_1}$ (здесь $\delta_{i_2i_1}$ — символ Кронекера) с $\lambda=\frac{1}{n}\operatorname{Tr}(h)$ или, что то же самое, $\lambda=\frac{1}{n}\sum\delta_{j_2j_1}x_{j_2j_1}$. Отсюда получаем равенство

$$\frac{1}{g}\sum_{t,j_1,j_2} r_{i_2j_2}(t^{-1})\,x_{j_2j_1}r_{j_1i_1}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j_1,j_2}\delta_{i_2i_1}\delta_{j_2j_1}x_{j_2j_1}.$$

Приравнивая коэффициенты при $x_{j_2j_1}$, мы получаем, как и выше,

Следствие 3. *В случае (2) имеет место равенство*

$$\frac{1}{g}\sum_{t\in G}r_{i_2j_2}(t^{-1})\,r_{j_1i_1}(t) =$$

$$= \frac{1}{n}\delta_{i_2i_1}\delta_{j_2j_1} = \begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{если } i_1=i_2,\ j_1=j_2,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Замечание. Предположим, что матрицы $(r_{i_2j_2}(t))$ *унитарны* (этого всегда можно добиться подходящим выбором базиса (e_{i_2}), см. п. 1.3). Тогда $r_{i_2j_2}(t^{-1})=r_{j_2i_2}(t)^*$ и следствия 2 и 3 представляют собой *соотношения ортогональности* (относительно скалярного произведения, которое будет определено в следующем пункте).

2.3. Соотношения ортогональности для характеров

Начнем с введения одного обозначения. Пусть φ и ψ — две комплекснозначные функции на группе G. Положим

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\varphi(t)^*\psi(t),$$

где g — порядок группы G. Определенное таким образом спаривание $\langle\varphi,\psi\rangle$ удовлетворяет всем аксиомам *скалярного произведения*: оно полулинейно по φ, линейно по ψ и $\langle\varphi,\varphi\rangle > 0$ для каждой функции $\varphi\neq 0$. Оно называется *скалярным произведением функций, определенных на группе*.

Теорема 3. (1) *Пусть χ — характер некоторого неприводимого представления. Тогда $\langle\chi, \chi\rangle = 1$ (иначе говоря, χ имеет «длину 1»).*

(2) *Пусть χ и χ' — характеры неизоморфных неприводимых представлений, тогда $\langle\chi, \chi'\rangle = 0$ (иначе говоря, χ и χ' ортогональны).*

Доказательство. Пусть $\rho\colon G \to GL(V)$ — неприводимое представление с характером χ, и пусть n — его степень, тогда

$$\langle\chi, \chi\rangle = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\chi(t)^*\chi(t) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G}\chi(t^{-1})\chi(t)$$

(см. предложение 1). Если же представление ρ задано в матричной форме $\rho_t = (r_{ij}(t))$, то $\chi(t) = \sum_i r_{ii}(t)$, откуда

$$\langle\chi, \chi\rangle = \frac{1}{g}\sum_{t, i, j} r_{ii}(t^{-1})r_{jj}(t).$$

Применяя следствие 3 предложения 3, видим, что $\frac{1}{g}\sum_{t\in G} r_{ii}(t^{-1})r_{jj}(t)$ равно 0 при $i \neq j$ и равно $\frac{1}{n}$ при $i = j$. Но поскольку индекс i принимает n значений, то мы получаем отсюда, что $\langle\chi, \chi\rangle = 1$.

Утверждение (2) доказывается аналогично с использованием следствия 2 вместо следствия 3.

Теорема 4. *Пусть V — линейное представление группы G с характером φ; предположим, что V разлагается в прямую сумму неприводимых представлений,*

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k.$$

Тогда если W — некоторое неприводимое представление с характером χ, то число слагаемых W_i, изоморфных представлению W, равно скалярному произведению $\langle\varphi, \chi\rangle$.

Доказательство. Пусть χ_i — характер представления W_i. Тогда на основании предложения 2 мы

имеем

$$\varphi = \chi_1 + \ldots + \chi_k,$$

откуда $\langle\varphi, \chi\rangle = \langle\chi_1, \chi\rangle + \ldots + \langle\chi_k, \chi\rangle$. Но по предыдущей теореме $\langle\chi_i, \chi\rangle$ равно 1 или 0 в зависимости от того, изоморфно ли W_i представлению W или нет. Это доказывает теорему.

Следствие 1. *Число представлений W_i, изоморфных данному представлению W, не зависит от выбора разложения.*

(Это число называется *кратностью вхождения* W в представление V.)

Доказательство. Действительно, скалярное произведение $\langle\varphi, \chi\rangle$ не зависит, очевидно, от выбора разложения.

Замечание. В этом смысле можно говорить о «единственности» разложения данного представления на неприводимые. К этому вопросу мы возвратимся ниже, см. п. 2.6.

Следствие 2. *Два представления, имеющие один и тот же характер, изоморфны.*

Доказательство В самом деле, согласно следствию 1, они содержат одинаковое число раз любое заданное неприводимое представление.

Предыдущие результаты сводят изучение представлений к изучению их характеров. Пусть $\chi_1, \ldots, \chi_h$ — все различные характеры неприводимых представлений группы G и $W_1, \ldots, W_h$ — соответствующие им неприводимые представления, тогда каждое представление V изоморфно прямой сумме вида

$$V = m_1W_1 \oplus \ldots \oplus m_hW_h,$$

где $m_i \geqslant 0$ — целые числа. В таком случае характер φ представления V равен сумме $m_1\chi_1 + \ldots + m_h\chi_h$ и $m_i = \langle\varphi, \chi_i\rangle$. [В частности, эти соображения можно применить к тензорному произведению $W_i \otimes W_j$ двух неприводимых представлений W_i и W_j и показать, что произведение $\chi_i\chi_j$ допускает разложение вида

$$\chi_i\chi_j = \sum_k m_{ij}^k \chi_k,$$

где все m_{ij}^k — целые числа, большие либо равные нулю.] Из соотношений ортогональности между χ_i следует, кроме того, что

$$\langle\varphi, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{k} m_i^2.$$

Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Если φ — характер некоторого представления V, то $\langle\varphi, \varphi\rangle$ является целым числом и $\langle\varphi, \varphi\rangle = 1$ тогда и только тогда, когда V неприводимо.*

В самом деле, $\sum m_i^2$ — целое число, которое равно 1 тогда и только тогда, когда одно из m_i равно 1, а остальные нулю, т. е. V изоморфно одному из W_i.

Мы получаем, таким образом, очень удобный критерий неприводимости представления.

2.4. Разложение регулярного представления

Обозначения. До конца § 2 мы обозначаем через $\chi_1, \ldots, \chi_h$ различные характеры всех неприводимых представлений группы G и через $n_1, \ldots, n_h$ — их степени, $n_i = \chi_i(1)$ (см. предложение 1).

Пусть R — *регулярное представление* группы G. Напомним (см. п. 1.2), что оно обладает базисом $(e_t)_{t\in G}$, для которого $\rho_s(e_t) = e_{st}$. Если $s \neq 1$, то $st \neq t$ для каждого элемента t, а это показывает, что все диагональные элементы матрицы ρ_s равны нулю. В частности, $\mathrm{Tr}(\rho_s) = 0$. Кроме того, для $s = 1$ имеем $\mathrm{Tr}(\rho_s) = \mathrm{Tr}(1) = \dim R = g$. Отсюда следует

Предложение 4. *Характер φ регулярного представления определяется формулами:*

$\varphi(1) = g$, где g — порядок группы G,

$\varphi(s) = 0$, если $s \neq 1$.

Следствие 1. *Каждое неприводимое представление W_i содержится в регулярном с кратностью, равной своей степени n_i.*

Доказательство. По теореме 4 эта кратность равна $\langle\varphi, \chi_i\rangle$ или

$$\langle\varphi, \chi_i\rangle = \frac{1}{g}\sum_{s\in G}\varphi(s)^*\chi_i(s) = \frac{1}{g}g\chi_i(1) = \chi_i(1) = n_i.$$

Следствие 2. *Степени n_i удовлетворяют соотношению $\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = g$.*

В самом деле, согласно следствию 1, $\varphi = \sum_i n_i\chi_i$. Вычисляя степень обеих частей этого равенства, получаем $g = \sum n_i^2$.

Замечания. 1) Предыдущий результат может быть использован при отыскании всех неприводимых представлений данной группы G. Предположим, что уже построены k попарно неизоморфных представлений степеней $n_1, \ldots, n_k$; тогда для того, чтобы это были *все* неприводимые представления группы G, необходимо и достаточно выполнение условия $n_1^2 + \ldots + n_k^2 = g$.

2) В дальнейшем (часть II, п. 6.4) мы установим еще одно свойство степеней n_i; все они являются *делителями* порядка g группы G.

2.5. Число неприводимых представлений

Напомним (см. п. 2.1), что функция f на группе G называется *центральной*, если $f(tst^{-1}) = f(s)$ для всех $s, t \in G$.

Предложение 5. *Пусть f — центральная функция на группе G и ρ: $G \to GL(V)$ — некоторое линейное представление группы G. Пусть ρ_f — линейное отображение пространства V в себя, определенное формулой*

$$\rho_f = \sum_{t\in G} f(t)\rho_t.$$

Тогда если представление V неприводимо и имеет характер χ и степень n, то ρ_f является гомотетией с константой

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t) = \frac{g}{n}\langle f^*, \chi\rangle.$$

Доказательство. Вычислим $\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s$. Имеем

$$\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s = \sum_{t\in G} f(t)\rho_s^{-1}\rho_t\rho_s = \sum_{t\in G} f(t)\rho_{s^{-1}ts}.$$

Полагая $u = s^{-1}ts$, перепишем это равенство в виде

$$\rho_s^{-1}\rho_f\rho_s = \sum_{u\in G} f(sus^{-1})\rho_u = \sum_{u\in G} f(u)\rho_u = \rho_f.$$

Следовательно, $\rho_f\rho_s = \rho_s\rho_f$. Тогда из второй части предложения 3 следует, что ρ_f является гомотетией с некоторой константой λ. След такой гомотетии равен, очевидно, $n\lambda$, а след ρ_f имеет вид

$$\sum_{t\in G} f(t)\,\mathrm{Tr}(\rho_t) = \sum_{t\in G} f(t)\chi(t).$$

Отсюда $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{t\in G} f(t)\chi(t) = \frac{g}{n}\langle f^*, \chi\rangle$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь векторное пространство H *всех центральных функций* на группе G. Характеры $\chi_1, \ldots, \chi_h$ всех различных неприводимых представлений группы G принадлежат, как мы знаем, этому пространству.

Теорема 6. *Характеры $\chi_1, \ldots, \chi_h$ составляют ортонормальный базис пространства H.*

Доказательство. По теореме 3 $\chi_1, \ldots, \chi_h$ образуют ортонормальную систему функций в пространстве H. Осталось показать, что эта система *полна*, иначе говоря, что любой элемент из H, ортогональный ко всем χ_i, равен нулю. Пусть f — такой элемент. Для каждого представления ρ: $G \to GL(V)$ положим $\rho_{f^*} = \sum_{t\in G} f(t)^*\rho_t$. Поскольку элемент f ортогонален ко всем χ_i, то, согласно предложению 5, ρ_{f^*} равен нулю в случае, когда представление V неприводимо. С помощью разложения в прямую сумму убеждаемся, что он равен нулю и для произвольного представления. Применив это к регулярному представлению R и вычислив образ базисного вектора e_1 относительно действия ρ_{f^*}, получим

$$\rho_{f^*}(e_1) = \sum_{t\in G} f(t)^*\rho_t(e_1) = \sum_{t\in G} f(t)^* e_t.$$

Так как $\rho_{f^*} = 0$, то $f(t)^* = 0$ при всех $t \in G$, откуда $f = 0$. Это завершает доказательство.

Напомним, что элементы t и t' группы G называются *сопряженными*, если существует такой элемент $s \in G$, что $t' = sts^{-1}$. Сопряженность — отношение эквивалентности, разбивающее группу G на *классы* сопряженных элементов.

Теорема 7. *Число неприводимых представлений (с точностью до изоморфизма) группы G равно числу классов сопряженных элементов этой группы.*

Доказательство. Пусть $C_1, \ldots, C_k$ — все различные классы сопряженных элементов группы G. Тот факт, что функция f является центральной на группе G, эквивалентен, очевидно, утверждению, что она постоянна на каждом классе $C_1, \ldots, C_k$. Следовательно, она определяется конечным числом своих значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, которые могут быть выбраны совершенно произвольно. Из этого следует, что размерность пространства H всех центральных функций на G равна k. С другой стороны, по теореме 6 эта размерность равна числу неприводимых представлений (с точностью до изоморфизма) группы G. Отсюда мы получаем требуемый результат.

Сразу же укажем еще одно следствие теоремы 6. Пусть $s \in G$, c_s — число элементов в классе элемента s и f_s — функция, равная 1 на классе элемента s и 0 на остальных классах. Так как эта функция f_s центральна, то по теореме 6 мы может представить ее в виде

$$f_s = \sum_{i=1}^{h} x_i \chi_i,$$

где $x_i = \langle \chi_i, f_s \rangle = \frac{c_s}{g} \chi_i(s)^*$. Следовательно, для каждого элемента $t \in G$ мы имеем

$$f_s(t) = \frac{c_s}{g} \sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^* \chi_i(t).$$

Расписывая, получаем

$$\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^* \chi_i(s) = \frac{g}{c_s}, \quad \text{если} \quad t = s,$$

$\sum_{i=1}^{h} \chi_i(s)^* \chi_i(t) = 0$, если элементы s и t не сопряжены.

2.6. Каноническое разложение представления

Пусть $\rho: G \to GL(V)$ — линейное представление группы G. Определим некоторое разложение V в прямую сумму представлений, более грубое, чем разложение на неприводимые представления, но зато *однозначно определенное*. Это разложение получается следующим образом.

Пусть, прежде всего, $\chi_1, \ldots, \chi_h$ — все различные характеры неприводимых представлений $W_1, \ldots, W_h$ группы G и $n_1, \ldots, n_h$ — их степени. Пусть, с другой стороны, $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ — некоторое разложение V в прямую сумму неприводимых представлений. Для каждого $i = 1, \ldots, h$ обозначим через V_i прямую сумму тех $U_1, \ldots, U_m$, которые изоморфны W_i. Ясно, что

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_h.$$

(Другими словами, мы разложили V в прямую сумму неприводимых представлений и *сгруппировали* изоморфные представления вместе.) Это и есть то *каноническое разложение*, которое мы имели в виду. Оно обладает следующими свойствами.

Теорема 8. (1) *Разложение $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_h$ не зависит от первоначально выбранного разложения V на неприводимые представления.*

(2) *Проектор p_i пространства V на V_i, ассоциированный с этим разложением, задается формулой*

$$p_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \chi_i(t)^* \rho_t.$$

Доказательство. Мы будем доказывать утверждение (2). Утверждение (1) следует из того, что проекторы p_i однозначно определяют V_i. Положим

$$q_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \chi_i(t)^* \rho_t.$$

Из предложения 5 следует, что ограничение q_i на неприводимое представление W с характером χ степени n является гомотетией с константой $\frac{n_i}{n} \langle \chi_i, \chi \rangle$. Следовательно, это либо 0, если $\chi \neq \chi_i$, либо 1, если $\chi = \chi_i$. Другими словами, отображение q_i является тождественным на неприводимом представлении, изоморфном W_i, и нулевым на остальных. В силу определения представления V_i из этого следует, что отображение q_i тождественно на V_i и равно нулю на всех V_j, $j \neq i$. Пусть $x = x_1 + \ldots + x_h$ — разложение произвольного элемента $x \in V$ на компоненты $x_i \in V_i$; тогда, следовательно,

$$q_i(x) = q_i(x_1) + \ldots + q_i(x_h) = x_i.$$

Это означает, что q_i совпадает с проектором p_i пространства V на V_i, что и требовалось доказать.

Таким образом, разложение представления V на неприводимые представления можно провести в два этапа: сначала определить каноническое разложение $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_h$, что делается без труда с помощью формулы для проекторов p_i, затем, если есть необходимость, разложить каждое V_i в прямую сумму неприводимых представлений, каждое из которых изоморфно представлению W_i:

$$V_i = W_i \oplus \ldots \oplus W_i.$$

Это последнее разложение можно осуществить, вообще говоря, бесконечным множеством способов (здесь мы имеем произвол такого же порядка, как и при выборе базиса в векторном пространстве; см. замечание 2 ниже).

Следующий пример хорошо иллюстрирует эту ситуацию. Возьмем в качестве G группу из двух элементов $\{1, s\}$, где $s^2 = 1$. Она имеет два неприводимых представления степени 1, W^+ и W^-, соответствующие отображения — это $\rho_s = +1$ и $\rho_s = -1$. Каноническое разложение произвольного представления V тогда имеет вид $V = V^+ \oplus V^-$, где компонента V^+ состоит из тех элементов $x \in V$, которые симметричны относительно G $(\rho_s(x) = x)$, а компонента V^- — из тех, которые антисимметричны $(\rho_s(x) = -x)$. Соответствующие проекторы задаются формулами

$$p^+(x) = \frac{x + \rho_s(x)}{2}, \quad p^-(x) = \frac{x - \rho_s(x)}{2}.$$

В свою очередь, разложение представления V^+ или V^- на неприводимые компоненты просто равносильно разложению их в *прямую* сумму прямых.

Замечания. 1) Пусть $x \in V_i$ и $V(x)$ — подпространство пространства V, порожденное элементами $\rho_s(x)$, $s \in G$. Очевидно, что $V(x)$ — подпредставление представления V. В его разложение на неприводимые представления входит некоторое число раз (скажем, m раз) представление W_i. Целое число m (которое зависит от x) *не обязательно равно* 1 (иначе говоря, не всегда верно, что x «преобразуется так же, как W_i»). Можно доказать лишь, что m не превосходит размерности n_i представления W_i.

2) Пусть H_i — векторное пространство линейных отображений h пространства W_i в V_i (или в V, как угодно), удовлетворяющих условию $\rho_s h = h\rho_s$. Обозначим через $h_1, \ldots, h_k$ базис этого пространства и составим прямую сумму $W_i \oplus \ldots \oplus W_i$ из k экземпляров W_i. Система $(h_1, \ldots, h_k)$ задает очевидным образом некоторое линейное отображение h пространства $W_i \oplus \ldots \oplus W_i$ в V_i. Можно показать, что оно является

изоморфизмом (представлений) и что каждый изоморфизм получается таким способом. Другими словами, *разложения представления V_i в прямую сумму неприводимых представлений* (что эквивалентно заданию изоморфизма $W_i \oplus \ldots \oplus W_i \to V_i$) соответствуют *всевозможным выборам базиса в векторном пространстве H_i*.

изоморфизмом (представлений) и что каждый изоморфизм получается таким способом. Другими словами, *разложения представления V_i в прямую сумму неприводимых представлений* (что эквивалентно заданию изоморфизма $W_i \oplus \ldots \oplus W_i \to V_i$) соответствуют *всевозможным выборам базиса в векторном пространстве H_i*.

§ 3. ДОПОЛНЕНИЯ

3.1. Коммутативные группы

Группа G называется *коммутативной*, если $st = ts$ для всех $s, t \in G$. Линейные представления таких групп устроены особенно просто.

Теорема 9. *Пусть G — коммутативная группа. Тогда каждое ее неприводимое представление имеет степень* 1.

Доказательство. Пусть ρ: $G \to GL(V)$ — некоторое неприводимое представление группы G и $t \in G$. Поскольку $st = ts$ для каждого $s \in G$, то также

$$\rho_s\rho_t = \rho_t\rho_s.$$

Согласно предложению 3 (лемма Шура), отсюда следует, что ρ_t — некоторая гомотетия. Так как это рассуждение применимо к любому элементу $t \in G$, то мы видим, что каждое векторное подпространство пространства V инвариантно относительно действия группы G. В силу неприводимости V отсюда следует, что $\dim V = 1$, что и требовалось доказать.

Замечание. Верна также и обратная к теореме 9 теорема. Если каждое неприводимое представление группы G имеет степень 1, то группа G коммутативна. Действительно, пусть g — порядок группы G. Тогда $g = \sum n_i^2$, где n_i — степени всех неприводимых представлений (см. п. 2.4). Но так как в данном случае все $n_i = 1$, то число неприводимых представлений равно g, порядку группы. С другой стороны, известно (см. п. 2.5), что это число совпадает с числом классов сопряженных элементов h. Следовательно, $h = g$, что возможно только в том случае, когда каждый класс состоит из одного элемента, т. е. группа G коммутативна.

3.2. Произведение двух групп

Пусть G_1 и G_2 — две группы и $G_1 \times G_2$ — их *прямое произведение*, т. е. множество всевозможных пар (s_1, s_2), $s_1 \in G_1$, $s_2 \in G_2$. Снабдим произведение $G_1 \times G_2$ структурой группы, полагая

$$(s_1, s_2)\cdot(t_1, t_2) = (s_1t_1, s_2t_2).$$

Группа $G_1 \times G_2$ называется *произведением* групп G_1 и G_2. Если g_1 — порядок группы G_1, а g_2 — порядок группы G_2, то порядок $G_1 \times G_2$ равен $g = g_1g_2$. Далее, группу G_1 можно отождествить с подгруппой в $G_1 \times G_2$, порожденной элементами вида $(s_1, 1)$, $s_1 \in G_1$, и, аналогично, G_2 — с подгруппой, порожденной элементами $(1, s_2)$, $s_2 \in G_2$. При таком отождествлении каждый элемент из G_1 коммутирует с каждым элементом из G_2.

Обратно, пусть некоторая группа G содержит G_1 и G_2 в качестве подгрупп, и предположим, что выполнены следующие условия:

(1) *каждый элемент $s \in G$ однозначно записывается в виде $s = s_1s_2$, $s_1 \in G_1$, $s_2 \in G_2$;*

(2) *если $s_1 \in G_1$ и $s_2 \in G_2$, то $s_1s_2 = s_2s_1$.*

Тогда произведение любых двух элементов $s = s_1s_2$ и $t = t_1t_2$ можно представить в виде $st = s_1s_2t_1t_2 = (s_1t_1)(s_2t_2)$. Отсюда следует, что соответствие $(s_1, s_2) \longmapsto s_1s_2$ осуществляет *изоморфизм* групп $G_1 \times G_2$ и G. В этом случае мы говорим также, что G является *произведением* (или *прямым произведением*) своих подгрупп G_1 и G_2.

Пусть теперь $\rho^1\colon G_1 \to GL(V_1)$ и $\rho^2\colon G \to GL(V_2)$ — линейные представления групп G_1 и G_2 соответственно. Определим линейное представление $\rho^1 \otimes \rho^2$ группы $G_1 \times G_2$ в пространстве $V_1 \otimes V_2$ аналогично тому, как

это делалось в п. 1.5, полагая

$$(\rho^1 \otimes \rho^2)(s_1, s_2) = \rho^1(s_1) \otimes \rho^2(s_2).$$

Это представление называется *тензорным произведением* представлений ρ^1 и ρ^2. Если χ_i — характер представления ρ^i, $i = 1, 2$, то характер χ представления $\rho^1 \otimes \rho^2$ задается формулой

$$\chi(s_1, s_2) = \chi_1(s_1)\chi_2(s_2).$$

Теорема 10. (1) *Если представления ρ^1 и ρ^2 неприводимы, то их тензорное произведение $\rho^1 \otimes \rho^2$ также неприводимо.*

(2) *Каждое неприводимое представление группы $G_1 \times G_2$ изоморфно представлению вида $\rho^1 \otimes \rho^2$, где ρ^i — неприводимое представление группы G_i, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Пусть представления ρ^1 и ρ^2 неприводимы, тогда (см. п. 2.3)

$$\frac{1}{g_1} \sum_{s_1 \in G} |\chi_1(s_1)|^2 = 1, \quad \frac{1}{g_2} \sum_{s_2 \in G_2} |\chi_2(s_2)|^2 = 1.$$

Перемножая, получаем

$$\frac{1}{g} \sum_{s_1, s_2} |\chi(s_1, s_2)|^2 = 1,$$

что показывает, разумеется, неприводимость представления $\rho^1 \otimes \rho^2$ (теорема 5). Для доказательства утверждения (2) достаточно установить, что каждая центральная функция f на $G_1 \times G_2$, ортогональная к характерам вида $\chi_1(s_1)\chi_2(s_2)$, равна нулю. Предположим, следовательно, что

$$\sum_{s_1, s_2} f(s_1, s_2)^* \chi_1(s_1)\chi_2(s_2) = 0.$$

Полагая $g(s_1) = \sum_{s_2} f(s_1, s_1)^* \chi_2(s_2)$, мы можем переписать это равенство в виде

$$\sum_{s_1} g(s_1)\chi_1(s_1) = 0$$

для каждого χ_1. Но так как функция g центральна, то из этого следует, что $g = 0$, и поскольку это верно для каждого χ_2, то из аналогичных рассуждений мы получаем, что $f(s_1, s_2) = 0$. Теорема доказана.

[Утверждение (2) можно было бы доказать также, вычисляя сумму квадратов степеней представлений ρ^1, ρ^2, $\rho^1 \otimes \rho^2$ и используя п. 2.4.]

Предыдущая теорема полностью сводит изучение представлений группы $G_1 \times G_2$ к изучению представлений групп G_1 и G_2.

§ 4. ОБОБЩЕНИЕ НА КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ

4.1. Компактные группы

Топологическая группа G — это группа, снабженная *топологией*, в которой произведение st и взятие обратного s^{-1} являются непрерывными операциями. Такая группа называется *компактной*, если она компактна как топологическое пространство, т. е. для нее справедлива теорема Бореля — Лебега. Например, группа вращений вокруг одной точки в евклидовом пространстве размерности 2 (или 3, ...) обладает естественной топологией, в которой эта группа компактна; все ее *замкнутые подгруппы* также являются компактными группами.

[В качестве примера *некомпактных* групп укажем группу *сдвигов* $x \mapsto x + a$ и группу линейных отображений, сохраняющих квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ (группу Лоренца). Линейные представления этих групп во многом отличаются от представлений компактных групп.]

4.2. Инвариантная мера на компактной группе

При изучении линейных представлений конечной группы G (порядка g) мы часто пользовались операцией *усреднения* по группе G. Эта операция сопоставляет функции f на G функцию $f^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} f(t)$ (функция f может принимать значения как в поле

комплексных чисел, так и, более общо, в некотором векторном пространстве). Аналогичная операция существует и на компактных группах. Разумеется, вместо конечной суммы здесь приходится иметь дело уже с интегралом $\int_G f(t)\,dt$ по некоторой мере dt на группе G. Точнее, доказывается *существование* и *единственность* меры dt, удовлетворяющей следующим двум свойствам:

(1) $\int_G f(t)\,dt = \int_G f(ts)\,dt$ для каждой функции f и для каждого $s \in G$ (*инвариантность меры* dt *относительно правых сдвигов*);

(2) $\int_G dt = 1$ (*полная мера равна* 1).

Доказывается, кроме того, что мера dt *инвариантна также и относительно левых сдвигов*, т. е.

(1′) $\int_G f(t)\,dt = \int_G f(st)\,dt$.

Мера dt, удовлетворяющая условиям (1) и (2), называется *инвариантной мерой* (или *мерой Хаара*) на группе G. Приведем два примера (другие примеры будут указаны в § 5).

1. Пусть группа G конечна и имеет порядок g; тогда dt определяется тем, что каждому элементу $t \in G$ приписывается мера $\frac{1}{g}$.

2. Пусть $G = C_\infty$ — группа вращений плоскости. Каждый элемент $t \in G$ можно представить в виде $t = e^{i\alpha}$ (α берется по $\operatorname{mod} 2\pi$). Тогда мера $\frac{1}{2\pi}\,d\alpha$ инвариантна на G (множитель $\frac{1}{2\pi}$ добавлен для того, чтобы выполнялось условие (2)).

4.3. Линейные представления компактных групп

Пусть G — компактная группа и V — некоторое векторное пространство конечной размерности над полем комплексных чисел. Линейное представление группы G в векторном пространстве V — это *непрерывный* гомоморфизм ρ: $G \to GL(V)$. Непрерывность гомоморфизма ρ: $G \to GL(V)$ эквивалентна непрерывности функции $\rho_s(x)$ как функции двух переменных $s \in G$, $x \in V$. Точно так же определяется и (более общее) представление группы G в *гильбертовом пространстве*. Немедленно доказывается, что каждое такое представление является *прямой суммой конечномерных представлений*, и мы позволим себе ограничиться изучением последних.

[На практике непрерывность представления ρ всегда тривиально проверяется; труднее построить не непрерывное представление.]

Большая часть свойств представлений конечных групп переносится на компактные группы: нужно просто заменять выражения „$\frac{1}{g}\sum_{t \in G} \ldots$“ на „$\int_G \ldots dt$“. Например, *скалярное произведение* функций φ и ψ запишется теперь в виде

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_G \varphi(t)^* \psi(t)\, dt.$$

Точнее:

(а) Теоремы 1—5 остаются без изменений, так же, как и их доказательства. То же самое относится и к предложениям 1—3.

(б) В п. 2.4 нужно определить регулярное представление R как гильбертово пространство функций, суммируемых с квадратом, на группе G, на которые группа G действует по формуле

$$(\rho_s f)(t) = f(s^{-1}t).$$

Если группа G бесконечна, то это представление бесконечномерно и мы не можем говорить о его характере, следовательно, предложение 4 не имеет смысла. Однако остается верным, что каждое неприводимое представление W_i содержится в R столько раз, какова его степень.

(в) Предложение 5 и теорема 6 остаются без изменений (в теореме 6 за H надо взять гильбертово пространство центральных функций, интегрируемых с квадратом на G).

(г) Теорема 7 верна (но бесполезна) и в случае бесконечной группы G: имеется бесконечно много классов сопряженных элементов, так же, как и бесконечно много неприводимых представлений.

(д) Теорема 8 переносится без изменений вместе с доказательством. В частности, каждый вектор $x \in V$ допускает разложение $x = \sum p_i x$, где компоненты $p_i x$ задаются формулами

$$p_i x = n_i \int_G \chi_i(t)^* \rho_t(x)\, dt.$$

(е) Теоремы 9 и 10 остаются без изменений вместе с их доказательствами. Отметим, кстати, что инвариантная мера на произведении групп $G_1 \times G_2$ совпадает с произведением $ds_1 \cdot ds_2$ инвариантных мер на группах G_1 и G_2.

§ 5. ПРИМЕРЫ

5.1. Циклическая группа C_n

Порядок этой группы равен n, она состоит из степеней $1, r, \ldots, r^{n-1}$ одного элемента r, для которого $r^n = 1$. Ее можно реализовать как группу вращений на угол $2k\pi/n$ вокруг некоторой оси. Эта группа коммутативна.

По теореме 9 неприводимые представления группы C_n имеют степень 1. Каждое такое представление сопоставляет элементу r комплексное число $\chi(r) = w$, а элементу r^k — число $\chi(r^k) = w^k$. Поскольку $r^n = 1$, то $w^n = 1$, т. е. $w = e^{2\pi i h/n}$, где $h = 0, 1, \ldots, n-1$. Отсюда видно, что все n *неприводимых представлений группы* C_n обладают характерами $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$, которые определены формулами

$$\chi_h(r^k) = e^{2\pi i hk/n}.$$

Например, при $n = 3$ мы имеем следующую таблицу неприводимых характеров:

	1	r	r^2
χ_0	1	1	1
χ_1	1	w	w^2
χ_2	1	w^2	w

где $w = e^{2\pi i/3}$.

5.2. Группа C_∞

Это группа *вращений* плоскости. Если обозначить через r_α поворот на угол α (определенный по mod 2π), то *инвариантная мера* на C_∞ будет иметь вид $\frac{1}{2\pi} d\alpha$ (см. п. 4.2). Все неприводимые представления группы C_∞ имеют степень 1. Легко видеть, что они задаются формулами

$$\chi_n(r_\alpha) = e^{in\alpha},$$

где n — целое число произвольного знака. Соотношения ортогональности характеров сводятся здесь к хорошо известным формулам

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\alpha} e^{im\alpha}\, d\alpha = \delta_{nm},$$

а теорема 6 приводит к разложению периодической функции в ряд Фурье.

5.3. Группа двугранника D_n

Это группа вращений и симметрий плоскости, сохраняющих правильный многоугольник с n сторонами. Она содержит n вращений, которые образуют подгруппу, изоморфную C_n, и n симметрий. Порядок ее равен $2n$. Если обозначить через r вращение на угол

$2\pi/n$ и через s какую-нибудь симметрию, то имеют место такие соотношения: $r^n = 1$, $s^2 = 1$, $srs = r^{-1}$. Каждый элемент группы D_n однозначно записывается либо в виде r^k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ (если он принадлежит C_n), либо в виде sr^k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ (если он не принадлежит C_n). Заметим, что соотношение $srs = r^{-1}$ влечет за собой соотношение $sr^k s = r^{-k}$, откуда $(sr^k)^2 = 1$.

Реализация D_n в виде группы движений трехмерного пространства.

Существует несколько реализаций.

1. Обычная реализация (традиционное обозначение D_n, см., например, Еринг [1]). Вращения реализуются как вращения вокруг оси $0z$, а симметрии — как симметрии относительно n прямых в плоскости $0xy$. Эти прямые образуют между собой углы, равные π/n.

2. Реализация посредством группы C_{nv} (в обозначениях Еринга [1]). Здесь вместо симметрий относительно *прямых* в плоскости $0xy$ берутся симметрии относительно *плоскостей*, проходящих через ось $0z$.

3. Группа D_{2n} может быть реализована как группа D_{nh} (в обозначениях Еринга [1]).

Неприводимые представления группы D_n ($n \geqslant 1$ четное).

Прежде всего имеется 4 представления степени 1, которые сопоставляют элементам r и s числа ± 1 всеми возможными способами. Их характеры ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 задаются следующей таблицей:

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
ψ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

Перейдем к описанию представлений степени 2. Положим $w = e^{2\pi i/n}$, и пусть h — произвольное целое число. Определим представление ρ^h группы D_n, полагая

$$\rho^h(r^k) = \begin{pmatrix} w^{hk} & 0 \\ 0 & w^{-hk} \end{pmatrix}, \qquad \rho^h(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & w^{-hk} \\ w^{hk} & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что это действительно *представление*. Оно зависит только от класса h по модулю n. Более того, представления ρ^h и ρ^{n-h} изоморфны. Следовательно, можно предполагать, что $0 \leqslant h \leqslant n/2$. Случаи $h = 0$ и $h = n/2$ нам не интересны, так как им соответствуют приводимые представления. Напротив, при $0 < h < n/2$ представление ρ^h *неприводимо*: действительно, поскольку $w^h \neq w^{-h}$, единственными инвариантными прямыми относительно $\rho^h(r)$ будут оси координат, но они не инвариантны относительно $\rho^h(s)$. Аналогичные рассуждения показывают, что все эти представления попарно неизоморфны. Соответствующие им характеры задаются формулами

$$\chi_h(r^k) = w^{hk} + w^{-hk} = 2\cos\frac{2\pi hk}{n},$$

$$\chi_h(sr^k) = 0.$$

Неприводимые представления степени 1 и 2, построенные выше, исчерпывают *все неприводимые представления* группы D_n (с точностью до изоморфизма). В самом деле, сумма квадратов их степеней равна $4\times1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\times 4 = 2n$, а это, как известно, порядок группы D_n.

Пример. Группа D_6 имеет 4 представления степени 1 с характерами ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 и два неприводимых представления степени 2 с характерами χ_1 и χ_2.

Неприводимые представления группы D_n (n нечетное).

Имеется только 2 представления степени 1 с характерами ψ_1 и ψ_2, указанными в следующей таблице:

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

Представления же ρ^h степени 2 определяются теми же формулами, что и в случае четного n. При $0 < h < n/2$ они неприводимы и попарно неизоморфны (заметим, что условие $h < n/2$, поскольку n нечетно, можно записать также в виде $h \leqslant n - 1/2$). Формулы для характеров остаются теми же.

Указанными представлениями исчерпываются *все неприводимые представления* группы D_n, так как сумма квадратов их степеней равна $2\times 1 + \frac{n-1}{2}4 = 2n$, что равно порядку группы D_n.

5.4. Группа D_{nh}

Группа D_{nh} — это по определению произведение вида $D_n \times I$, где I — группа порядка 2, состоящая из элементов $\{1, i\}$ с $i^2 = 1$. Порядок группы D_{nh} равен $4n$. Если группу D_n реализовать обычным способом как группу вращений и симметрий трехмерного пространства (см. п. 5.3), то группа D_{nh} может быть реализована как группа, порожденная D_n и симметрией i относительно начала координат. В этой реализации группа D_{nh} интерпретируется как *группа движений трехмерного пространства, сохраняющих правильный многоугольник с n сторонами в плоскости $0xy$.*

По теореме 10 неприводимые представления группы D_{nh} являются тензорными произведениями неприводимых представлений групп D_n и I. Но группа I имеет только два неприводимых представления, каждое степени 1. Их характеры g и u задаются таблицей

	1	i
g	1	1
u	1	-1

Из этого следует, что группа D_{nh} обладает *в два раза большим числом неприводимых представлений, чем группа* D_n. Точнее, каждый характер χ неприводимого представления группы D_n определяет два неприводимых характера χ_g и χ_u группы D_{nh}, указанных в таблице

	x	ix
χ_g	$\chi(x)$	$\chi(x)$
χ_u	$\chi(x)$	$-\chi(x)$

где x — элемент группы D_n. Например, характер χ_1 группы D_n порождает следующие характеры χ_{1g} и χ_{1u} группы D_{nh}:

	r^k	sr^k	ir^k	isr^k
χ_{1g}	$2\cos\frac{2\pi k}{n}$	0	$2\cos\frac{2\pi k}{n}$	0
χ_{1u}	$2\cos\frac{2\pi k}{n}$	0	$-2\cos\frac{2\pi k}{n}$	0

То же происходит и с другими характерами группы D_n.

5.5. Группа D_∞

Это группа вращений и симметрий плоскости, сохраняющих начало координат. Она содержит группу C_∞ вращений r_α. Если через s обозначить некоторую симметрию, то мы имеем соотношения

$$s^2 = 1, \qquad sr_\alpha s = r_{-\alpha}.$$

Каждый элемент группы D_∞ однозначно записывается либо в виде r_α (если он принадлежит C_∞), либо в виде sr_α (если он не принадлежит C_∞). Как топологическое пространство группа D_∞ состоит из двух несвязных окружностей. *Инвариантная мера* на D_∞ имеет вид $\frac{1}{4\pi}d\alpha$. Это означает, что *усреднение* $\int_G f(t)\,dt$ функции f задается формулой

$$\int_G f(t)\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(r_\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(sr_\alpha)\,d\alpha.$$

В частности, проекторы p_i из п. 2.6 запишутся в виде

$$p_i x = \frac{n_i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\chi_i(r_\alpha)^*\,\rho r_\alpha(x)\,d\alpha + \frac{n_i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\chi_i(sr_\alpha)^*\,\rho sr_\alpha(x)\,d\alpha.$$

Реализация группы D_∞ как группы движений трехмерного пространства.

Их имеется две:

1. Обычная реализация (D_∞ в обозначениях Еринга [1]). Берутся вращения вокруг оси $0z$ и симметрии относительно прямых, лежащих в плоскости $0xy$ и проходящих через начало координат.

2. Реализация посредством группы $C_{\infty v}$ (в обозначениях Еринга [1]). Вместо симметрий относительно *прямых* берутся симметрии относительности *плоскостей*, проходящих через ось $0z$.

Неприводимые представления группы D_∞.

Эти представления строятся так же, как и представления группы D_n. Прежде всего имеются два представления степени 1 с характерами ψ_1 и ψ_2, указанными в таблице

	r_α	sr_α
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

Кроме того, существует последовательность неприводимых представлений ρ^h степени 2 ($h=1, 2, \ldots$), определяемых формулами

$$\rho^h(r_\alpha)=\begin{pmatrix} e^{ih\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-ih\alpha}\end{pmatrix}, \quad \rho^h(sr_\alpha)=\begin{pmatrix} 0 & e^{-ih\alpha} \\ e^{ih\alpha} & 0\end{pmatrix}.$$

Их характеры принимают следующие значения:

$$\chi_h(r_\alpha)=2\cos h\alpha, \quad \chi_h(sr_\alpha)=0.$$

Можно доказать, что это *все неприводимые представления* (с точностью до изоморфизма) группы D_∞.

5.6. Группа $D_{\infty h}$

По определению эта группа равна произведению $D_\infty \times I$. Ее можно реализовать как группу, порожденную D_∞ и симметрией i относительно начала координат. Все ее элементы однозначно представляются в одном из следующих четырех видов:

$$r_\alpha, \quad sr_\alpha, \quad ir_\alpha, \quad isr_\alpha.$$

Как топологическое пространство эта группа является несвязным объединением четырех окружностей. *Инвариантная мера* на $D_{\infty h}$ имеет вид $\frac{1}{8\pi}d\alpha$. Это означает, что, как и выше, усреднение $\int\limits_G f(t)\,dt$ функции f на $D_{\infty h}$ задается формулой

$$\int\limits_G f(t)\,dt=\frac{1}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r_\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(sr_\alpha)\,d\alpha+$$
$$+\frac{1}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(ir_\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(isr_\alpha)\,d\alpha.$$

Вывод явных формул для проекторов p_i из п. 2.6 мы оставляем читателю.

Так же как и для D_{nh}, неприводимые представления группы $D_{\infty h}$ получаются раздвоением неприводимых представлений группы D_∞. Каждый характер χ

группы D_∞ порождает два характера χ_g и χ_u группы $D_{\infty h}$. Например, характер χ_3 определяет характеры χ_{3g} и χ_{3u} следующим образом:

	r_α	sr_α	ir_α	isr_α
χ_{3g}	$2\cos 3\alpha$	0	$2\cos 3\alpha$	0
χ_{3u}	$2\cos 3\alpha$	0	$-2\cos 3\alpha$	0

БИБЛИОГРАФИЯ

ЧАСТЬ I

Теория представлений конечных групп изложена в очень большом числе работ. Мы цитируем только две из них:

Вейль Г. (Weyl H.)

[1] The theory of groups and quantum mechanics, Dover Publications, 1931.

[Классическая работа, весьма полная, содержит, в частности, главу о представлениях симметричных групп. Изложение несколько беспорядочно.]

Холл (Hall M.)

[1] The theory of groups, Macmillan Cy, New York, 1959. (Русский перевод: Холл М., Теория групп, ИЛ, М., 1962.)

[Это очень изящный учебник по теории групп. Глава о представлениях содержит теорию индуцированных представлений и много интересных примеров.]

По компактным группам см. Вейль Г. [1], а также

Вейль А. (Weil A.)

[1] L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, Hermann, 1940. (Русский перевод: Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, М., 1950.)

Люмис (Loomis L.)

[1] An introduction to abstract harmonic analysis, Van Nostrand Cy, New York, 1953. (Русский перевод: Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, М., 1956.)

[Эта книга более доступна и более алгебраична, чем предыдущая.]

С группами движений, их стандартными обозначениями и таблицами характеров можно ознакомиться по книге

Еринг, Вальтер, Кимбал (Eyring H., Walter J., Kimball G.)

[1] Quantum chemistry, John Wiley and Sons, New York, 1944.

[Упомянутые таблицы помещены в дополнении VII, стр. 376—388.]

ЧАСТЬ II

ДОПОЛНЕНИЯ

§ 6. СТЕПЕНИ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

6.1. Групповая алгебра

Определение. Пусть G — конечная группа и K — некоторое поле. *Групповой алгеброй* $K[G]$ *группы* G называется K-алгебра с базисом (e_s), перенумерованным элементами группы G, и с таблицей умножения

$$e_s \cdot e_t = e_{st}.$$

Каждый элемент $u \in K[G]$ может быть записан, следовательно, в виде формальной линейной комбинации элементов группы G с коэффициентами из поля K. Очевидно, что алгебра $K[G]$ изоморфна алгебре функций, определенных на G, принимающих значения в K и снабженных умножением типа свертки. В дальнейшем мы считаем, что $K = \mathbf{C}$.

Пусть ρ: $G \to GL(V)$ — некоторое представление группы G. Оно определяет гомоморфизм алгебр $\mathbf{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$, который также обозначается через ρ.

Теорема 11. (а) *Пусть* ρ_i: $G \to GL(V_i)$ — *попарно неизоморфные неприводимые представления группы* G. *Тогда определяемое ими отображение* ρ: $\mathbf{C}[G] \to \prod_i \mathrm{End}(V_i)$ *сюръективно.*

(б) *Если* ρ_i: $G \to GL(V_i)$ — *все неприводимые представления (с точностью до изоморфизма) группы* G, *то отображение* ρ *является изоморфизмом.*

Доказательство. (а) Если образ $\mathrm{Im}\,\rho$ содержится в некоторой гиперплоскости пространства $\prod_i \mathrm{End}(V_i)$, то существует ненулевая линейная форма φ, равная нулю на $\mathrm{Im}\,\rho$, т. е. такая, что $\varphi\left(\sum_i \rho_i(s)\right) = 0$ для всех $s \in G$. Это дает некоторое соотношение вида

$\sum_k \lambda_k m_k(s) = 0$ для каждого $s \in G$, где m_k пробегает множество матричных коэффициентов представлений ρ_i. Из формул ортогональности матричных коэффициентов следует тогда, что $\lambda_k = 0$ для всех k. Следовательно, $\varphi = 0$, что доказывает утверждение (а).

(б) Известно, что $\dim \mathbf{C}[G] = \mathrm{Ord}\, G = g$ и $\dim \prod_i \mathrm{End}(V_i) = \sum d_i^2 = g$. Следовательно, отображение ρ, будучи сюръективным, является изоморфизмом по соображениям размерности.

6.2. Сведения о целых элементах кольца

Определение. Пусть R — некоторое коммутативное кольцо. Говорят, что элемент $x \in R$ является *целым* (*над* $\mathbf{Z}$), если существуют целые рациональные числа $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, что $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$.

Например, числа $e^{2\pi i/n}$, $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ целы. Элемент $x \in \mathbf{Q}$ цел тогда и только тогда, когда $x \in \mathbf{Z}$.

Предложение 6. *Следующие свойства эквивалентны:*

(а) *Элемент $x \in R$ является целым.*

(б) *Кольцо $\mathbf{Z}[x]$ является $\mathbf{Z}$-модулем конечного типа.*

Доказательство. Из (а) следует, что $x^n = -a_1 x^{n-1} - \ldots - a_n$. Следовательно, кольцо $\mathbf{Z}[x]$ порождено как $\mathbf{Z}$-модуль элементами $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$, откуда следует (б). Обратно, если (б) выполнено, то $xe_i = \sum_j a_{ij} e_j$ [1]). Обозначим через A матрицу $(x\delta_{ij} - a_{ij})$, тогда $Ae_i = 0$ для каждого i. Из этого следует, что $(\det(A))e_i = 0$. Так как $1 = \sum_i \lambda_i e_i$, то $\det(A) = \sum \lambda_i (\det(A))\, e_i = 0$. Мы получили, таким образом, соотношение целой зависимости для элемента x, т. е. свойство (а). Предложение доказано.

[1]) (e_i) означает некоторую конечную систему образующих $\mathbf{Z}$-модуля $\mathbf{Z}[x]$. — *Прим. ред.*

Предложение 7. *Целые элементы кольца R образуют подкольцо в R.*

Доказательство. Пусть $x, y \in R$ — целые элементы. Тогда $\mathbf{Z}[x, y]$ является $\mathbf{Z}$-модулем конечного типа, откуда следует, что $\mathbf{Z}[x-y]$ и $\mathbf{Z}[xy]$ также будут $\mathbf{Z}$-модулями конечного типа. Следовательно, элементы $x - y$ и xy целые, что и требовалось доказать.

Предложение 8. *Если кольцо R является $\mathbf{Z}$-модулем конечного типа, то все элементы этого кольца целые.*

Это очевидное следствие предложения 6.

6.3. Свойства целозначности характеров

Предложение 9. *Пусть χ — характер представления ρ группы G; тогда $\chi(s)$ является целым элементом для каждого $s \in G$.*

Доказательство. По определению $\chi(s)$ — это след отображения $\rho(s)$, следовательно, он равен сумме собственных значений этого отображения. Но так как $\rho^g(s) = \rho(s^g) = 1$, где $g = \mathrm{Card}\, G$, то каждое собственное значение преобразования $\rho(s)$ является корнем из единицы, откуда следует доказательство предложения.

Предложение 10. *Пусть χ — характер неприводимого представления ρ степени d и K — некоторый класс сопряженных элементов группы G; тогда элемент $\frac{1}{d} \sum_{s \in K} \chi(s)$ является целым.*

Доказательство. Обозначим через $\mathrm{Cent}_{\mathbf{C}}(G)$ и $\mathrm{Cent}_{\mathbf{Z}}(G)$ центры алгебр $\mathbf{C}[G]$ и $\mathbf{Z}[G]$ соответственно. Ясно, что элементы $e_K = \sum_{s \in K} s$ образуют базис пространства $\mathrm{Cent}_{\mathbf{C}}(G)$. С другой стороны, e_K принадлежат подалгебре $\mathrm{Cent}_{\mathbf{Z}}(G)$, которая является $\mathbf{Z}$-модулем конечного типа. Следовательно, элементы e_K являются целыми. Мы знаем, что представление ρ определяет гомоморфизм ρ: $\mathbf{C}[G] \to \mathrm{End}(W)$. Образом ограничения этого гомоморфизма на $\mathrm{Cent}_{\mathbf{C}}(G)$ будут в силу леммы Шура некоторые гомотетии пространства W. Следовательно, $\rho(e_K) = \lambda \cdot 1$, где λ — целое. Вычисляя след, получаем

$$d\lambda = \sum_{s \in K} \chi(s),$$

откуда $\lambda = \frac{1}{d} \sum_{s \in K} \chi(s)$, что доказывает предложение.

6.4. Степени неприводимых представлений

Теорема 12. *Пусть G — группа порядка g и ρ — некоторое неприводимое представление группы G степени d. Тогда d делит g.*

Доказательство. Известно, что если χ — характер представления ρ, то $\langle \chi, \chi \rangle = 1$, или в явной форме

$$\frac{g}{d} = \sum_{s \in G} \chi(s^{-1}) \chi(s)/d,$$

откуда

$$\frac{g}{d} = \sum_{K} \chi(s^{-1}) \left(\sum_{s \in K} \chi(s)/d \right).$$

Но $\chi(s^{-1})$ и $\sum_{s \in K} \chi(s)/d$ являются целыми элементами на основании предложений 9 и 10. Следовательно, поскольку $g/d \in \mathbf{Q}$, то мы получаем, что g/d — целое число. Теорема доказана.

Теорема 13. *Пусть C — центр группы G, тогда, в обозначениях теоремы 12, d делит индекс $(G : C)$.*

Доказательство (по Дж. Тейту). Тензорное произведение $W \otimes \ldots \otimes W$ (n раз) определяет неприводимое представление группы $G \times \ldots \times G$ (n раз).

Центр произведения $G \times \ldots \times G$ равен произведению центров $C \times \ldots \times C$ и действует на $W \otimes \ldots \otimes W$

$$(x_1, \ldots, x_n) \to \rho(x_1) \otimes \ldots \otimes \rho(x_n)$$

умножением на число $\rho(x_1) \ldots \rho(x_n) = \rho(x_1 \ldots x_n)$. Пусть H — подгруппа группы $C \times \ldots \times C$, порожденная такими элементами $(x_1, \ldots, x_n)$, что $x_1 \ldots x_n = 1$. Порядок группы H равен c^{n-1}, где $c = \mathrm{Card}\, C$, и эта группа действует тривиально на $W \otimes \ldots \otimes W$. Мы получаем, таким образом, некоторое представление группы $G \times \ldots \times G/H$, определенное формулой $\rho(sH) = \rho(s)$. Оно неприводимо и, следовательно, по теореме 12 d^n делит g^n/c^{n-1}. Значит, $(g/cd)^n \in (1/c)\mathbf{Z}$ и порождает модуль конечного типа над $\mathbf{Z}$, поэтому g/cd — целое число, что доказывает теорему.

Эти результаты будут обобщены в п. 9.1.

§ 7. ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

7.1. Определение

Пусть H — подгруппа группы G и $W \subset V$ — такие векторные пространства, что H действует на W, а G — на V. Предположим, что выполняются, кроме того, следующие условия:

(а) W является подмодулем V, рассматриваемого как левый $\mathbf{C}[H]$-модуль;

(б) $V = \bigoplus_{s \in G/H} sW$.

Тогда мы говорим, что представление V группы G *индуцировано* представлением W подгруппы H.

Предложение 11. *Существует единственное (с точностью до изоморфизма) представление группы G, индуцированное заданным представлением подгруппы H.*

Доказательство. Представление группы H обозначим через W и рассмотрим модуль $V_0 = \mathbf{C}[G] \otimes_{\mathbf{C}[H]} W$. Группа G действует на V_0, если каждому элементу $s \in G$ поставить в соответствие эндоморфизм $s \otimes 1$ модуля V_0. При этом условие (а) определения тривиально выполнено. Далее, так как $\mathbf{C}[G]$ является свободным правым $\mathbf{C}[H]$-модулем с базисом, *состоящим* из представителей s классов смежности G/H, то $V_0 = \bigoplus\limits_{s \in S} sW$, где S — множество классов смежности. Следовательно, выполнено и условие (б) определения. Единственность очевидна.

Упражнение. Пусть V — пространство функций f на группе G со значениями в пространстве W, для которых $f(hx) = hf(x)$, $h \in H$, $x \in G$. Группа G действует на V по формуле $(sf)(x) = f(xs)$. Вложим W в V с помощью отображения $w \longmapsto f_w$, где

$$f_w(h) = \begin{cases} hw, & \text{если } h \in H \text{ и } w \in W, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Показать, что V — представление группы G, индуцированное представлением W подгруппы H.

Предложение 12. *Пусть V — такое представление группы G, что $V = \bigoplus\limits_i W_i$, где:*

(а) *G переставляет W_i;*

(б) *G переставляет W_i транзитивно.*

Обозначим через H подгруппу изотропии пространства W_{i_0} для фиксированного индекса i_0. Тогда подгруппа H действует на W_{i_0} и представление V группы G индуцировано этим представлением подгруппы H.

Это предложение немедленно вытекает из определения индуцированного представления.

Замечание. Если представление V неприводимо, то условие (б) предложения 12 следует из условия (а), так как $\sum\limits_{s \in G} sW_{i_0}$ является инвариантным подпространством пространства V и, следовательно, совпадает с ним.

Предложение 13. *Пусть V и W — представления групп G и H соответственно, причем V индуцировано представлением W. Обозначим через E некоторый $\mathbf{C}[G]$-модуль. Тогда*

$$\mathrm{Hom}^H(W, E) \approx \mathrm{Hom}^G(V, E).$$

Точнее, каждый G-гомоморфизм f: $V \to E$ определяет посредством ограничения на W некоторый H-гомоморфизм и отображение $f \longmapsto f|W$ биективно.

Доказательство. Действительно, если $f|W = 0$, то ограничение f на sW, $s \in G$ также равно нулю, следовательно, $f = 0$. Пусть теперь h: $W \to E$ — некоторый H-гомоморфизм; мы определим гомоморфизм f, полагая $f(sx) = sh(x)$ на sW, $s \in G$. Легко проверяется, что это определение не зависит от выбора элемента $s \in G$. По линейности гомоморфизм f продолжается до G-гомоморфизма $V \to E$. Предложение доказано.

Упражнение. Вывести предложение 13 из формулы

$$\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) = \mathrm{Hom}(A \otimes B, C).$$

Примеры. Пространство представления, индуцированного представлением степени 1, является прямой суммой прямых, переставляемых группой G. Такое представление иногда называют «мономиальным».

Представление степени 1 единичной подгруппы группы G индуцирует регулярное представление этой группы. Более общо, регулярное представление любой подгруппы $H \subset G$ индуцирует регулярное представление группы G. Единичное представление подгруппы H индуцирует представление перестановок классов смежности G/H.

Транзитивность индуцированных представлений.

Пусть $H_1 \subset H_2 \subset G$, тогда представление группы G, индуцированное представлением подгруппы H_1, эквивалентно представлению, полученному индуцированием сначала с H_1 на H_2, а затем с H_2 на G.

7.2. Характер индуцированного представления

Пусть H — подгруппа группы G, W — некоторое представление группы H с характером χ_W и V — представление группы G, индуцированное представлением W. Его характер обозначим через χ_V. Каждый элемент $x \in G$ определяет автоморфизм пространства V, переставляющий подпространства sW, $s \in G/H$, значит, его след равен сумме следов ограничений этого автоморфизма на те подпространства sW, которые остаются инвариантными, т. е. для которых $s^{-1}xs \in H$. Отсюда получаем

$$\chi_V(x) = \mathrm{Tr}_V(x) = \sum_{\substack{s \in G/H \\ s^{-1}xs \in H}} \mathrm{Tr}_{sW}(x).$$

Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "s^{-1}xs"] \arrow[d, "s"'] & W \arrow[d, "s"] \\ sW \arrow[r, "x"] & sW \end{tikzcd}$$

видно, что $\mathrm{Tr}_{sW}(x) = \mathrm{Tr}_W(s^{-1}xs)$, откуда следует, что

$$\chi_V(x) = \frac{1}{\mathrm{Card}\, H} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}xs \in H}} \chi_W(s^{-1}xs). \qquad (1)$$

По линейности мы можем распространить формулу (1) на произвольные центральные функции f:

$$f^*(x) = \frac{1}{\mathrm{Card}\, H} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}xs \in H}} f(s^{-1}xs). \qquad (1')$$

Говорят, что функция f^* *индуцирована* функцией f.

7.3. Формула взаимности Фробениуса

Пусть H — подгруппа группы G, φ и ψ — центральные функции на H и G соответственно. Обозначим через $\mathrm{Ind}\,\varphi$ функцию φ^* и через $\mathrm{Res}\,\psi$ — функцию $\psi \mid H$.

Теорема 14. *Скалярные произведения* $\langle \varphi, \mathrm{Res}\,\psi \rangle_H$ *и* $\langle \mathrm{Ind}\,\varphi, \psi \rangle_G$ *равны.*

Первое доказательство. Оно заключается в явном вычислении. Из определений $\langle \mathrm{Ind}\,\varphi, \psi \rangle_G$ и φ^* немедленно следует, что

$$\langle \mathrm{Ind}\,\varphi, \psi \rangle_G = \frac{1}{gh} \sum_{\substack{y \in G \\ z^{-1}y^{-1}z \in H}} \psi(y)\,\varphi(z^{-1}y^{-1}z),$$

где $g = \mathrm{Card}\, G$ и $h = \mathrm{Card}\, H$. Сделаем здесь замену переменной, полагая $z^{-1}y^{-1}z = x^{-1}$, $x \in H$. Искомое равенство становится тогда очевидным.

Второе доказательство. Пусть φ_1 и φ_2 — характеры представлений V_1 и V_2 группы G. Будем обозначать скалярное произведение $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_G$ через $\langle V_1, V_2 \rangle_G$. Тогда имеет место равенство

$$\langle V_1, V_2 \rangle_G = \dim \mathrm{Hom}^G(V_1, V_2).$$

Поскольку формулу Фробениуса достаточно проверить в случае, когда φ и ψ — характеры некоторых представлений, то нам надо показать, следовательно, что

$$\langle W, \mathrm{Res}\, V \rangle_H = \langle \mathrm{Ind}\, W, V \rangle_G,$$

где W — представление группы H, а V — представление группы G. Но это немедленно следует из предыдущего равенства и из предложения 13.

Интерпретация. Теорема 14 утверждает, что отображения Res и Ind *сопряжены.*

Укажем на следующую формулу, которая часто оказывается полезной:

$$\mathrm{Ind}(\varphi\, \mathrm{Res}\,\psi) = (\mathrm{Ind}\,\varphi)\,\psi.$$

Она легко проверяется непосредственным вычислением. Эта формула означает, что если W — некоторое представление группы H, $V = \mathrm{Ind}\, W$ и V_1 — некоторое другое представление группы G, то представление $\mathrm{Res}\, V_1 \otimes W$ индуцирует представление $V_1 \otimes V$.

Предложение 14. *Пусть W и V — неприводимые представления групп H и G соответственно. Тогда кратность вхождения W в $\operatorname{Res} V$ равна кратности вхождения V в $\operatorname{Ind} W$.*

Это частный случай теоремы 14.

7.4. Ограничение на подгруппы

Пусть H и K — подгруппы группы G, $\rho: H \to GL(W)$ — некоторое линейное представление группы H и $V = \operatorname{Ind}_H^G W$ — соответствующее индуцированное представление группы G. Мы вычислим *ограничение* $\operatorname{Res}_K V$ представления V на подгруппу K.

Для этого выберем множество представителей S двойных классов смежности $G \bmod (H, K)$. Это означает, что группа G представлена в виде несвязного объединения классов KsH, $s \in S$ (или, в других обозначениях, $s \in K \backslash G/H$). Для каждого элемента $s \in S$ положим $H_s = sHs^{-1} \cap K$ — это некоторая подгруппа группы K. Определим теперь гомоморфизм ρ_s: $H_s \to GL(W)$ по формуле

$$\rho_s(x) = \rho(s^{-1}xs),$$

где $x \in H_s$. Ясно, что это линейное представление группы H_s, которое мы будем обозначать через W_s. Далее, так как H_s — подгруппа группы K, то определено индуцированное представление $\operatorname{Ind}_{H_s}^K W_s$.

Предложение 15. *Представление $\operatorname{Res}_K \operatorname{Ind}_H^G W$ изоморфно прямой сумме представлений $\operatorname{Ind}_{H_s}^K W_s$ по всем $s \in K \backslash G/H$.*

Доказательство. Мы знаем, что V есть прямая сумма сдвигов xW, где $x \in G/H$. Далее, пусть $s \in S$ и $V(s)$ — подпространство пространства V, порожденное сдвигами xW, для которых $x \in KsH$. Тогда пространство V представляется в виде прямой суммы подпространств $V(s)$ и очевидно, что $V(s)$ инвариантно относительно K. Осталось доказать, следовательно, что $V(s)$ K-изоморфно представлению $\operatorname{Ind}_{H_s}^K W_s$. Для этого заметим, что подгруппа группы K, порожденная элементами x, для которых $x(sW) = sW$, совпадает, очевидно, с подгруппой H_s, так что $V(s)$ является прямой суммой подпространств вида $x(sW)$, где $x \in K/H_s$. Следовательно, $V(s) = \operatorname{Ind}_{H_s}^K (sW)$. Надо проверить теперь только то, что sW H_s-изоморфно W_s, но это очевидно, поскольку отображение s: $W_s \to sW$ осуществляет требуемый изоморфизм.

Замечание. Так как $V(s)$ зависит только от класса s в $K \backslash G/H$, то представление $\operatorname{Ind}_{H_s}^K W_s$ также зависит (с точностью до изоморфизма) только от двойного класса элемента s.

7.5. Критерий неприводимости Макки

Применим доказанные результаты к случаю $K = H$. Для элемента $s \in G$ обозначим через H_s подгруппу $sHs^{-1} \cap H$ группы H. Ограничение $\operatorname{Res}_s \rho$ представления ρ группы H на подгруппу H_s определяет некоторое представление группы H_s. Не следует смешивать его с представлением ρ_s, определенным в предыдущем пункте.

Предложение 16. *Для того чтобы индуцированное представление $V = \operatorname{Ind}_H^G W$ было неприводимо, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

(а) *представление W неприводимо;*

(б) *для каждого элемента $s \in G$, не содержащегося в H, представления ρ_s и $\operatorname{Res}_s \rho$ группы H_s разделены.*

[Представления V_1 и V_2 одной и той же группы K называются *разделенными*, если они не имеют общих неприводимых компонент, или, что то же самое, характеры их ортогональны.]

Доказательство. Положим $\langle V, V\rangle_G = \dim \operatorname{Hom}_G(V, V) = \langle \chi, \chi\rangle_G$, где χ — характер представления V. Для неприводимости V необходимо и достаточно, чтобы $\langle V, V\rangle_G = 1$. По формуле взаимности

Фробениуса

$$\langle V, V\rangle_G = \langle W, \mathrm{Res}_H V\rangle_H.$$

Но, согласно п. 7.4,

$$\mathrm{Res}_H V = \sum_{x \in H\backslash G/H} \mathrm{Ind}_{H_x}^H \rho_x.$$

Применяя еще раз формулу Фробениуса, получаем

$$\langle V, V\rangle_G = \sum_{x \in H\backslash G/H} d_x,$$

где $d_x = \langle \mathrm{Res}_x \rho, \rho_x\rangle_{H_x}$. При $x=1$ $d_x = \langle\rho, \rho\rangle \geqslant 1$. Следовательно, для того чтобы $\langle V, V\rangle_G = 1$, необходимо и достаточно, чтобы $d_1 = 1$ и $d_x = 0$ при $x \neq 1$ (в смысле двойных классов, т. е. $x \notin H$), а это и есть в точности свойства (а) и (б). Предложение доказано.

Следствие. *Предположим, что H является нормальным делителем группы G. Тогда для неприводимости представления $\mathrm{Ind}_H^G \rho$ необходимо и достаточно, чтобы представление ρ было неприводимо и не изоморфно ни одному из своих сопряженных представлений ρ_s для всех s, не принадлежащих H.*

Действительно, в этом случае $H_s = H$ и $\mathrm{Res}_s \rho = \rho$.

§ 8. ТЕОРЕМА АРТИНА

Мы докажем следующую теорему.

Теорема 15 (Артин). *Пусть X — некоторое семейство подгрупп группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *объединение подгрупп, сопряженных подгруппам семейства X, совпадает со всей группой G;*

(2) *образ отображения $\mathrm{Ind}\colon \bigoplus_{H \in X} R(H) \to R(G)$ имеет конечный индекс;*

(3) *для каждого характера χ группы G существуют такие элементы $(\psi_H)_{H \in X}$, $\psi_H \in R(H)$, и такое целое число $d \geqslant 1$, что*

$$d\chi = \sum \psi_H^*.$$

Отметим, что семейство всех *циклических* подгрупп группы G удовлетворяет, очевидно, условию (1). Отсюда вытекает

Следствие. *Каждый характер группы G является линейной комбинацией характеров представлений, индуцированных представлениями ее циклических подгрупп.*

8.1. Первое доказательство

Очевидно, что условия (2) и (3) эквивалентны. Покажем, что (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть S — объединение подгрупп, сопряженных подгруппам $H \in X$. Тогда каждая функция вида $\sum_{H \in X} \psi_H^*$, где $\psi_H \in R(H)$, равна нулю вне S. С другой стороны, если выполнено условие (2), то каждая центральная функция на G обращается в нуль вне S. Из этого следует, что $S = G$. Докажем обратную импликацию (1) $\Rightarrow$ (2). Если условие (1) выполнено, то отображение ограничения

$$\mathrm{Res}\colon \mathbf{C} \otimes R(G) \to \bigoplus_{H \in X} \mathbf{C} \otimes R(H)$$

инъективно. Следовательно, сопряженное ему отображение

$$\mathrm{Ind}\colon \bigoplus_{H \in X} (\mathbf{C} \otimes R(H)) \to \mathbf{C} \otimes R(G)$$

сюръективно и в силу элементарных свойств тензорного произведения сюръективно отображение

$$\mathrm{Ind}\colon \bigoplus_{H \in X} (\mathbf{Q} \otimes R(H)) \to \mathbf{Q} \otimes R(G).$$

Отсюда следует справедливость свойства (2).

8.2. Второе доказательство импликации (1) $\Rightarrow$ (2)

Пусть, прежде всего, A — циклическая группа и a — ее порядок. Определим функцию θ_A на A, полагая

$$\theta_A(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x \text{ порождает } A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Предложение 17. *Пусть G — конечная группа порядка g, тогда имеет место равенство*

$$g=\sum_{A\subset G}\theta_A^{\bullet},$$

где суммирование распространено на все циклические подгруппы $A\subset G$.

Доказательство. Для каждого элемента $x\in G$ имеем

$$\theta_A^{\bullet}(x)=\frac{1}{a}\sum_{\substack{x\in G\\ yxy^{-1}\in A}}\theta_A(yxy^{-1})=\frac{1}{a}\sum_{\substack{y\in G\\ yxy^{-1}\ \text{порожд.}\ A}}a=$$

$$=\sum_{\substack{y\in G\\ yxy^{-1}\ \text{порожд.}\ A}}1.$$

Но для каждого $y\in G$ элемент yxy^{-1} порождает циклическую подгруппу и только одну. Следовательно,

$$\sum_{A\subset G}\theta_A^{\bullet}(x)=\sum_{y\in G}1=g.$$

Предложение 18. *Пусть A — циклическая группа, тогда $\theta_A\in R(A)$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку a группы A. Случай $a=1$ тривиален. Далее, согласно предыдущему предложению,

$$a=\sum_{A'\subset A}\theta_{A'}^{\bullet}=\theta_A+\sum_{A'\neq A}\theta_{A'}^{\bullet}.$$

По предположению индукции $\theta_{A'}\in R(A')$, откуда $\theta_{A'}^{\bullet}\in R(A)$. С другой стороны, очевидно, что $a\in R(A)$. Отсюда следует, что θ_A принадлежит $R(A)$, что и требовалось доказать.

Применим теперь результаты предложений 17 и 18 к доказательству импликации $(1)\Rightarrow(2)$. Прежде всего мы ничего не теряем, предполагая, что семейство X состоит только из циклических подгрупп группы G. Из предложения 17 следует тогда, что

$$1=\frac{1}{g}\sum\theta_A^{\bullet},$$

где $\theta_A^{\bullet}\in R(G)$, согласно предложению 18. Умножая это равенство на произвольный элемент $\chi\in R(G)$, получаем, что

$$\chi=\frac{1}{g}\sum\chi\theta_A^{\bullet}=\frac{1}{g}\sum(\theta_A\,\mathrm{Res}_A\chi)^{\bullet}.$$

Так как $\theta_A\,\mathrm{Res}_A\chi$ принадлежит, очевидно, группе $R(A)$, отсюда следует утверждение (2) и даже больше, потому что указана явная формула для выражения элементов группы $R(G)$ через образы элементов группы $R(A)$, в частности дан явный знаменатель.

Замечания. 1) Последнее доказательство принадлежит Р. Брауэру.

2) Некоторые количественные уточнения результата можно найти в диссертации Лема, гл. II. (Колумбийский университет, 1967 г.)

§ 9. ПРИЛОЖЕНИЯ ИНДУЦИРОВАННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

9.1. Нормальные делители и приложения к степеням неприводимых представлений

Теорема 16. *Пусть A — нормальный делитель группы G и $\rho\colon G\to GL(V)$ — некоторое неприводимое представление группы G. Тогда*

(а) *либо существует собственная подгруппа $H\subset G$, содержащая подгруппу A, и такое неприводимое представление σ группы H, что ρ индуцировано представлением σ,*

(б) *либо ограничение представления ρ на подгруппу A является изотипичным.*

[Напомним, что представление называется *изотипичным*, если оно является некоторой кратностью неприводимого представления.]

Доказательство. Пусть $V = \sum V_i$ — каноническое разложение представления ρ (ограниченного на A) в прямую сумму изотипичных представлений (см. п. 2.6). Так как V неприводимо, то для каждого $s \in G$ автоморфизм $\rho(s)$ переставляет V_i, причем эти перестановки действуют транзитивно на ненулевых V_i. Пусть V_{i_0} — некоторый фиксированный элемент разложения $V = \sum V_i$. Если V_{i_0} совпадает с V, то имеет место случай (б). В противном случае пусть H — подгруппа группы G, порожденная теми элементами $s \in G$, для которых $\rho(s)(V_{i_0}) = V_{i_0}$. Тогда $A \subset H$, $H \neq G$ и представление ρ индуцировано естественным представлением σ группы H в пространстве V_{i_0}. Следовательно, мы имеем случай (а). Теорема полностью доказана.

Замечание. Если подгруппа A абелева, то условие (б) эквивалентно тому, что для каждого элемента $a \in A$ автоморфизм $\rho(a)$ является *гомотетией*.

Следствие. *Если A — абелев нормальный делитель группы G, то степень каждого неприводимого представления ρ группы G делит индекс $(G:A)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по порядку группы G. В случае (а) предыдущей теоремы по предположению индукции степень представления σ делит индекс $(H:A)$. Умножая это соотношение на $(G:H)$, мы получаем, что степень представления ρ делит индекс $(G:A)$. В случае (б) положим $G' = \rho(G)$ и $A' = \rho(A)$. Тогда каноническое отображение $G/A \to G'/A'$ сюръективно и индекс $(G':A')$ делит, следовательно, индекс $(G:A)$. С другой стороны, предыдущее замечание показывает, что все элементы группы A' являются гомотетиями, следовательно, лежат в *центре* группы G'. В силу теоремы 13 из этого следует, что степень представления ρ делит индекс $(G':A')$, а значит, тем более индекс $(G:A)$. Следствие доказано.

Замечание. Если A — произвольная *абелева подгруппа* группы G (не обязательно нормальный делитель), то $\deg(\rho)$, вообще говоря, не делит индекс $(G:A)$, но *во всяком случае*

$$\deg(\rho) \leqslant (G:A).$$

В самом деле, пусть W — некоторое неприводимое представление группы A, входящее в разложение представления $\rho|A$. Тогда из формулы взаимности Фробениуса следует, что ρ входит в индуцированное представление $\operatorname{Ind} W$, откуда

$$\deg(\rho) \leqslant \dim \operatorname{Ind} W = (G:A).$$

9.2. Полупрямое произведение

Напомним следующее определение (см. Бурбаки, Общая топология, гл. III, § 2, п. 10):

Определение. Пусть A и H — подгруппы группы G, причем A — нормальный делитель. Говорят, что группа G является *полупрямым произведением* подгрупп A и H, если $A \cap H = \{1\}$ и $A \cdot H = G$ или, что то же самое, каноническое отображение $H \to G/A$ является изоморфизмом.

Предположим, что группа G *конечна*, а ее нормальный делитель A *абелев*. Мы покажем, что неприводимые представления группы G могут быть построены тогда исходя из неприводимых представлений некоторых подгрупп группы H.

Обозначим, прежде всего, через $X = \operatorname{Hom}(A, \mathbf{C}^*)$ группу характеров неприводимых представлений группы A. Тогда H действует на X по формуле

$$(s\chi)(a) = \chi(s^{-1}as).$$

Пусть $(\chi_i)_{i \in X/H}$ — система представителей орбит группы H на группе X. Для каждого i обозначим через H_i подгруппу изотропии элемента χ_i, и пусть $G_i = A \cdot H_i$ — соответствующая подгруппа группы G. Продолжим функцию χ_i на G_i, полагая

$$\chi_i(ah) = \chi_i(a),$$

где $a \in A$, $h \in H_i$. Используя тот факт, что $h\chi_i = \chi_i$ для каждого элемента $h \in H_i$, мы получаем, что χ_i является *характером степени* 1 группы G_i. Пусть теперь ρ — некоторое неприводимое представление группы H_i. Композиция представления ρ с канонической проекцией $G_i \to H_i$ дает некоторое неприводимое представление $\bar{\rho}$ группы G_i. Обозначим через $\theta_{i,\rho}$ представление группы G, индуцированное неприводимым представлением $\chi_i \otimes \rho$ группы G_i. Тогда имеет место следующая

Теорема 17. *Представления $\theta_{i,\rho}$ неприводимы, попарно не изоморфны, и каждое неприводимое представление группы G имеет такой вид.*

Доказательство этой теоремы мы оставляем читателю в качестве упражнения.

9.3. Сведения о некоторых классах подгрупп

Разрешимые группы. Группа G называется разрешимой, если существует такая последовательность ее подгрупп

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G,$$

что G_{i-1}, $1 \leqslant i \leqslant n$, является нормальным делителем в группе G_i и факторгруппа G_i/G_{i-1} абелева.

Сверхразрешимые группы. Группа G называется сверхразрешимой, если существует такая последовательность ее подгрупп

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G,$$

что G_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, является нормальным делителем во всей группе G и факторгруппа G_i/G_{i-1} циклична.

Нильпотентные группы. Группа G называется нильпотентной, если существует такая последовательность ее подгрупп

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n = G,$$

что $(G_i, G) \subset G_{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. [Эквивалентное определение: каждая такая группа получается с помощью конечной последовательности *центральных расширений* абелевых групп.]

Ясно, что сверхразрешимая группа разрешима. Кроме того, легко видеть, что каждое центральное расширение сверхразрешимой группы сверхразрешимо. Следовательно, нильпотентная группа является сверхразрешимой.

Теорема 18. *Любая p-группа нильпотентна (следовательно, сверхразрешима).*

[Напомним, что конечная группа называется *p-группой*, если ее порядок равен некоторой степени простого числа p.]

Доказательство. В силу предыдущего достаточно показать, что каждая p-группа G, отличная от единичной, имеет нетривиальный центр. Но это легко вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Пусть p-группа G действует на некотором конечном множестве X и $X^G \subset X$ — подмножество инвариантных относительно G элементов, тогда* $\operatorname{Card} X \equiv \operatorname{Card} X^G \pmod p$.

Доказательство. Действительно, разложим множество X на орбиты относительно G: $X = X^G \cup$ {остальные орбиты}. Число элементов «остальных орбит» делится на p, что доказывает лемму.

Чтобы завершить доказательство теоремы, положим в условии леммы $X = G$, где G действует на себе внутренними автоморфизмами. Подмножество X^G совпадает тогда с центром группы G, следовательно, $\operatorname{Card} \operatorname{Cent}(G) \equiv 0 \pmod p$. Так как $1 \in \operatorname{Cent}(G)$, то p делит $\operatorname{Card} \operatorname{Cent}(G)$ и, значит, $\operatorname{Cent}(G)$ нетривиален. Теорема доказана.

Упражнение (пример разрешимой группы, не являющейся сверхразрешимой).

Пусть $A = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ и $H = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Группа H действует на A круговой перестановкой трех ненулевых элементов. Обозначим через G полупрямое произведение групп A и H, соответствующее этому действию (см. Бурбаки, цит. выше). Очевидно, что группа G разрешима. Показать, что A — единственный отличный от 1 нормальный делитель группы G, и вывести отсюда, что G не является сверхразрешимой.

Показать, что G изоморфна знакопеременной группе четвертой степени.

9.4. Теорема Силова

Определение. Пусть G — группа порядка $p^n m$, $(m, p) = 1$, где p — простое число. Тогда всякая подгруппа группы G порядка p^n называется *силовской p-подгруппой*.

Теорема 19. (а) *Силовские p-подгруппы существуют.*

(б) *Все они сопряжены относительно внутренних автоморфизмов.*

(в) *Каждая p-подгруппа группы G содержится в некоторой силовской p-подгруппе.*

Доказательство. (а) Если группа G абелева, это утверждение немедленно следует из структурной теоремы для конечных абелевых групп. Предположим теперь, что группа G не абелева, и пусть C — ее центр. Индукция по порядку группы G показывает, что если $\operatorname{Card} C$ делится на p, то существует силовская p-подгруппа C_p центра C, и по предположению индукции факторгруппа G/G_p обладает силовской p-подгруппой. Следовательно, полный прообраз ее в G также будет силовской p-подгруппой. Если же $\operatorname{Card} C$ не делится на p, рассмотрим разложение дополнения $G \setminus C$ на орбиты относительно действия группы G внутренними автоморфизмами. Каждая такая орбита изоморфна фактормножеству G/H_x, где H_x — подгруппа изотропии элемента $x \in G \setminus C$. Так как $\operatorname{Card}(G \setminus C) \not\equiv \not\equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, то существует такой элемент $x \in G \setminus C$,

что индекс $(G : H_x)$ не делится на p, следовательно, p^n делит порядок группы H_x и, так как $H_x \neq G$, индуктивное предположение устанавливает требуемый результат.

(б) и (в). Пусть P — силовская p-подгруппа группы G и H — некоторая p-подгруппа этой группы. Группа H действует на множестве классов смежности $X = G/P$ левыми сдвигами, и по лемме п. 9.3 $X^H \neq \varnothing$. Следовательно, существует такой элемент $x \in G$, что $HxP = xP$, откуда $x^{-1}Hx \subset P$. Это доказывает утверждение (в). Если в этом рассуждении взять в качестве H силовскую p-подгруппу, то мы получим утверждение (б). Доказательство теоремы закончено.

9.5. Представления сверхразрешимых групп

Лемма. *Пусть G — некоммутативная сверхразрешимая группа, тогда в ней существует абелев нормальный делитель, не содержащийся в центре $C = \operatorname{Cent}(G)$.*

Доказательство. Факторгруппа $H = G/C$, очевидно, сверхразрешима и обладает композиционным рядом. Пусть H_1 — первая нетривиальная подгруппа в этом ряду. По определению она циклична и является нормальным делителем в H. Следовательно, прообраз подгруппы $H_1 \subset H$ в G является искомой подгруппой. Лемма доказана.

Теорема 20. *Пусть G — сверхразрешимая группа; тогда каждое ее неприводимое представление ρ индуцировано представлением степени 1 некоторой ее подгруппы.*

Доказательство. Случай абелевой группы G тривиален. Предположим поэтому, что группа G не коммутативна и проведем индукцию по ее порядку. Достаточно рассматривать только *точные* представления ρ $(\operatorname{Ker} \rho = \{1\})$. По лемме существует не содержащийся в центре абелев нормальный делитель $A \subset G$. Применим теперь теорему 16. Тогда либо ρ индуцировано некоторым представлением подгруппы

$H \subset G$, где $H \neq G$, и мы можем воспользоваться предположением индукции, либо автоморфизм $\rho(a)$ является гомотетией для каждого элемента $a \in A$ и $\rho(A)$ содержится в центре группы $\rho(G)$. Но так как представление ρ точное, то из этого следует, что подгруппа A должна содержаться в центре группы G, в противоречие с ее выбором. Теорема доказана.

Упражнение. Пусть G — полупрямое произведение абелевой и сверхразрешимой групп. Тогда каждое ее неприводимое представление индуцировано представлением степени 1 некоторой ее подгруппы.

Группа $G = A_4$ в упражнении п. 9.3 тоже имеет такой тип. Следовательно, она не может служить примером *разрешимой группы, у которой есть неприводимое представление, не индуцированное представлением степени* 1 *никакой ее подгруппы*. В качестве такого примера мы укажем полупрямое произведение G кватернионной группы H и циклической группы C порядка 3. Группа C действует на H круговой перестановкой элементов (i, j, k). Существует каноническое вложение группы H в тело кватернионов $\mathbf{H}$. Так как $\mathbf{H} \otimes \mathbf{C} \approx M_2(\mathbf{C})$, то $\mathbf{H}$ вкладывается в свою очередь в $M_2(\mathbf{C})$. Композиция этих вложений определяет некоторое представление степени 2 группы H. Вложим теперь группу G в $\mathbf{H}^*$, отображая образующий элемент c группы C в элемент $c' = -\frac{1}{2} + \frac{i+j+k}{2}$, $c'^3 = 1$ и $c'ic'^{-1} = k$. Мы получим тогда некоторое неприводимое представление степени 2 группы G и, так как эта группа не имеет подгрупп индекса 2, то это представление не может быть индуцировано никаким представлением степени 1 ее подгруппы.

§ 10. ТЕОРЕМА БРАУЭРА

10.1. p-элементарные группы

Определение. Пусть p — простое число. Группа G называется *p-элементарной*, если она является прямым произведением циклической группы, порядок которой взаимно прост с p, и некоторой p-группы.

§ 10. ТЕОРЕМА БРАУЭРА

10.1. p-элементарные группы

Определение. Пусть p — простое число. Группа G называется *p-элементарной*, если она является прямым произведением циклической группы, порядок которой взаимно прост с p, и некоторой p-группы.

Ясно, что такое разложение в прямое произведение, если оно существует, единственно. Кроме того, всякая p-элементарная группа разрешима. Группа называется *элементарной*, если существует такое простое число p, для которого она является p-элементарной.

Теорема 21. *Пусть V_p — кольцо линейных комбинаций с целыми коэффициентами характеров, индуцированных характерами p-элементарных подгрупп группы G. Тогда индекс $(R(G): V_p)$ конечен и взаимно прост с p.*

Пусть A — подкольцо поля $\mathbf{C}$, порожденное корнями из единицы порядка $g = \operatorname{Card} G$. Оно является свободным $\mathbf{Z}$-модулем конечного типа. Покажем, что утверждение теоремы эквивалентно каждому из следующих утверждений:

(а) для любого $\chi \in R(G)$, существует $n \in \mathbf{N}$, $(n, p) = 1$, такое, что $n\chi \in V_p$;

(б) существует $n \in \mathbf{N}$, $(n, p) = 1$, такое, что $n \in V_p$;

(в) существует $n \in \mathbf{N}$, $(n, p) = 1$, такое, что $n \in V_p \otimes A$

Очевидно, что теорема эквивалентна утверждению (а) и что из (а) следует (б), а из (б) следует (в). Покажем, что (б) влечет за собой (а). В предположении (б) включение $n \in V_p$ означает, что $n = \sum \psi_H^*$, где $\psi_H \in R(H)$ и H есть p-элементарная подгруппа Тогда для любого элемента $\chi \in R(G)$

$$n\chi = \sum \chi\psi_H^* = \sum (\psi_H \operatorname{Res}_H \chi)^*,$$

откуда следует утверждение (а).

Покажем теперь, что (в) влечет за собой (б). Условие $n \in V_p \otimes A$ можно записать в виде $n = \sum \psi_H^*$, где $\psi_H \in R(H) \otimes A$. Но поскольку $\mathbf{Q} \cap A = \mathbf{Z}$, то модуль $A/\mathbf{Z}$ не имеет кручения, следовательно, он свободен и $\mathbf{Z}$ выделяется *прямым слагаемым* в A. Пусть π: $A \to \mathbf{Z}$ — проекция A на $\mathbf{Z}$ Она индуцирует отображения

$$\pi: \ R(H) \otimes A \to R(H) \quad \text{и} \quad \pi: \ R(G) \otimes A \to R(G),$$

коммутирующие с операцией Ind. Отсюда получаем, что

$$n = \pi(n) = \sum \pi(\psi_H^{\bullet}) = \sum \pi(\psi_H)^{\bullet}.$$

Это означает, разумеется, что $n \in V_p$.

Доказательство теоремы 21 будет относиться к утверждению (в). Нам потребуется несколько предварительных результатов, которым посвящены следующие два пункта.

10.2. p-регулярные элементы

Определение. Элемент $s \in G$ называется *p-регулярным*, если его порядок взаимно прост с p, и *p-унипотентным*, если его порядок равен некоторой степени числа p.

Рассмотрев циклическую подгруппу, порожденную произвольным элементом $x \in G$, легко убедиться, что x можно однозначно представить в виде $x = x_r x_u$, где x_r есть p-регулярный, а x_u — p-унипотентный элементы, коммутирующие между собой.

Пусть x — некоторый p-регулярный элемент, $Z(a)$ — его централизатор в группе G. Обозначим через C циклическую подгруппу, порожденную элементом x, и через P — некоторую силовскую p-подгруппу группы $Z(x)$. Положим $H = C \times P$. Группа H, очевидно, p-элементарна. Назовем ее p-элементарной подгруппой, *ассоциированной с элементом* x. Она определяется с точностью до сопряжения посредством элементов централизатора $Z(x)$. В силу теоремы Силова отсюда немедленно следует, что эти группы являются максимальными среди всех p-элементарных подгрупп группы G.

10.3. Конструкция некоторых характеров

Лемма 1. *Каждая центральная функция f на G с целыми значениями, делящимися на $g = \mathrm{Card}\, G$, является линейной комбинацией с коэффициентами из A характеров, индуцированных характерами циклических подгрупп группы G.*

Доказательство. На основании предложения 17 (и в его обозначениях) мы можем написать

$$g = \sum \theta_A^{\bullet},$$

следовательно, $fg = \sum (\theta_A \cdot f \mid A)^{\bullet}$. Так как $f = g\chi$, где χ — некоторая центральная функция на G с целыми значениями, отсюда следует, что $f = \sum (\theta_A \cdot \chi \mid A)^{\bullet}$, а это доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Пусть χ — некоторый элемент группы $R(G) \otimes A$ с целыми значениями и $x = x_r x_u$ — каноническое разложение элемента $x \in G$ на p-регулярную и p-унипотентную компоненты. Тогда имеем* $\chi(x) \equiv \chi(x_r) \pmod p$.

Доказательство. Ограничение χ на циклическую подгруппу C, порожденную элементом x, разлагается в линейную комбинацию с коэффициентами из A неприводимых характеров χ_i группы C. Так как для некоторого подходящего числа n $x^{p^n} = x_r^{p^n}$ и так как группа C абелева, ее характеры χ_i имеют степень 1. Из этого следует, что $\chi_i(x)^{p^n} = \chi_i(x_r)^{p^n}$ для каждого i и $\chi(x)^{p^n} \equiv \chi(x_r)^{p^n} \pmod{pA}$. Так как $pA \cap \mathbf{Z} = p\mathbf{Z}$, то предыдущее сравнение показывает, что

$$\chi(x)^{p^n} \equiv \chi(x_r)^{p^n} \pmod p,$$

откуда мы получаем сравнение

$$\chi(x) \equiv \chi(x_r) \pmod p,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть x — некоторый p-регулярный элемент группы G и H — p-элементарная подгруппа, ассоциированная с x. Тогда существует функция $\psi \in R(H) \otimes A$ с целыми значениями, для которой индуцированная функция ψ^* на G обладает следующими свойствами:*

(а) $\psi^*(x) \not\equiv 0 \pmod p$;

(б) $\psi^*(s) = 0$ *для каждого p-регулярного и не сопряженного с x элемента $s \in G$.*

Доказательство. В обозначениях п. 10.2 имеем $H = C \times P$, где C — циклическая группа, порожденная элементом x. Обозначим $c = \operatorname{Card} C$, $h = \operatorname{Card} H$ и $h = cp^n$, $n \in \mathbf{N}$. Определим теперь функции ψ_C и ψ_P на C и P соответственно, полагая $\psi_P = 1$, $\psi_C(x) = c$ и $\psi_C(y) = 0$, если $y \neq x$. Функция ψ_P является характером группы P, а ψ_C представляется в виде

$$\psi_C = \sum_{\chi \text{ непр.}} \langle \chi, \psi_C \rangle \chi = \sum_{\chi \text{ непр.}} \chi(x^{-1}) \chi,$$

и поскольку $\chi(x^{-1})$ принадлежит A, то $\psi_C \in R(C) \otimes A$. Определим теперь функцию ψ на группе $H = C \times P$, полагая

$$\psi(xy) = \psi_C(x) \psi_P(y), \quad x \in C, \quad y \in P.$$

Из предыдущего рассуждения следует, что функция ψ принадлежит пространству $P(H) \otimes A$. Далее, если элемент $s \in G$ p-регулярен, то сопряженный с ним элемент ysy^{-1}, $y \in G$, также p-регулярен. Следовательно, $\psi(ysy^{-1}) \neq 0$ только тогда, когда $ysy^{-1} = x$. Значит, индуцированная функция ψ^* удовлетворяет условию (б). Более того,

$$\psi^*(x) = \frac{1}{h} \sum_{yxy^{-1} \in H} \psi(yxy^{-1}) = \frac{1}{h} \sum_{yxy^{-1} = x} c = \frac{1}{p^n} (Z(x) : 1),$$

где $Z(x)$ — централизатор элемента x. Но поскольку P является силовской p-подгруппой в группе $Z(x)$, то $(Z(x) : 1) = p^n m$, $(p, m) = 1$, откуда $\psi^*(x) = m \not\equiv 0 \pmod p$, что доказывает свойство (а).

Лемма 4. *Существует такая функция* $\chi \in R(G) \otimes A$, *принимающая целые значения, что*

(а) $\chi(x) \not\equiv 0 \pmod p$ *для каждого* $x \in G$;

(б) *функция* χ *является линейной комбинацией с целыми коэффициентами индуцированных характеров* ψ_H^*, *где* H — p-*элементарная подгруппа группы* G *и* $\psi_H \in R(H) \otimes A$.

Доказательство. Пусть $(x_i)_{i \in I}$ — система представителей классов сопряженных p-регулярных элементов. На основании леммы 3 можно построить такие функции ψ_i с целыми значениями, что $\psi_i^*(x_i) \not\equiv 0 \pmod p$ и $\psi_i^*(x_j) = 0$ при $i \neq j$. Положим $\chi = \sum \psi_i^*$. Очевидно, что функция χ принимает целые значения и удовлетворяет условию (б). Далее, для каждого элемента $x \in G$ его p-регулярная компонента сопряжена одному из x_i и только одному. Следовательно, по лемме 2

$$\chi(x) \equiv \chi(x_i) \equiv \chi_i(x_i) \not\equiv 0 \pmod p,$$

т. е. χ удовлетворяет и условию (а). Лемма доказана.

Лемма 5. *Утверждается то же, что и в лемме 4, с заменой условия* (а) *условием*

(а′) $\chi(x) \equiv 1 \pmod{p^k}$ *для каждого* $x \in G$ *и заранее выбранного целого числа* $k \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Линейные комбинации индуцированных характеров образуют идеал в кольце функций $R(G) \otimes A$, следовательно, они выдерживают умножение на произвольные элементы кольца. Поэтому для доказательства леммы достаточно функцию, полученную в лемме 4, возвести в степень $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$.

10.4. Доказательство теоремы 21

Пусть $\operatorname{Card} G = g = p^k m$, где $(m, p) = 1$. По лемме 5 существует такая функция $\chi \in R(G) \otimes A$, что $\chi(x) \equiv 1 \pmod{p^k}$ для каждого $x \in G$, и она является линейной комбинацией с целыми коэффициентами характеров, индуцированных характерами p-элементарных подгрупп. Из этого следует, что функция $\psi = m(\chi - 1)$ принимает целые значения, делящиеся на g. Следовательно, по лемме 1 функция ψ также является линейной комбинацией с коэффициентами из A характеров, индуцированных характерами циклических подгрупп группы G. Так как все циклические подгруппы p-элементарны, то $m = m\chi - \psi$ принадлежит кольцу $V_p \otimes A$, что доказывает теорему 21 в форме (в).

10.5. Теорема Брауэра

Теорема 22. *Каждый характер является линейной комбинацией с целыми коэффициентами характеров, индуцированных характерами элементарных подгрупп.*

Доказательство. Применим теорему 21 к различным простым делителям p числа $g = \operatorname{Card} G$. Каждому p сопоставляется некоторое число $n_p \in \mathbf{N}$, также делящее g и такое, что $(p, n_p) = 1$. Так как НОД чисел n_p делит порядок группы G и не делится ни на один его простой делитель p, то он равен 1. Следовательно, существуют такие целые числа $a_p \in \mathbf{Z}$, что $1 = \sum a_p n_p$, и так как $n_p \in V_p$, мы получаем отсюда доказательство теоремы.

Теорема 23. *Каждый характер является линейной комбинацией с целыми коэффициентами характеров, индуцированных характерами степени 1.*

Это очевидным образом следует из теорем 22 и 20 и из транзитивности операции индуцирования.

§ 11. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ БРАУЭРА

11.1. Характеризация характеров

Теорема 24. *Пусть B — некоторое подкольцо поля $\mathbf{C}$ и φ — такая центральная функция на группе G, принимающая комплексные значения, что ее ограничение на любую элементарную подгруппу $H \subset G$ принадлежит кольцу $R(H) \otimes B$. Тогда φ принадлежит кольцу $R(G) \otimes B$.*

Доказательство. Как следует из теоремы Брауэра, 1 является линейной комбинацией с целыми коэффициентами индуцированных характеров ψ_H^*, где $H \subset G$ — элементарные подгруппы и $\psi_H \in R(H)$. Из этого вытекает, что

$$\varphi = \sum_H \varphi\psi_H^* = \sum_H ((\varphi|H) \cdot \psi_H)^*,$$

следовательно, $\varphi \in R(G) \otimes B$.

Теорема 25. *Пусть φ — такая центральная функция на G, что для каждой элементарной подгруппы $H \subset G$ и каждого гомоморфизма $\chi : H \to \mathbf{C}^*$ число*

$$\frac{1}{\operatorname{Card} H} \sum_{s \in H} \chi(s^{-1}) \psi(s)$$

принадлежит кольцу B. Тогда $\varphi \in R(G) \otimes B$.

Доказательство. Ограничение φ на каждую элементарную подгруппу $H \subset G$ следующим образом разлагается по неприводимым характерам ω группы H:

$$\varphi | H = \sum c_\omega \omega,$$

где $c_\omega = \langle \omega, \varphi | H \rangle_H$. По теореме 23 каждый характер ω индуцирован характером χ степени 1 некоторой подгруппы $H' \subset H$. Из формулы взаимности Фробениуса следует в таком случае, что $c_\omega = \langle \psi^*, \varphi | H \rangle_H = \langle \chi, \varphi | H' \rangle_{H'}$. Так как H' также является элементарной подгруппой группы G, то по предположению теоремы $c_\omega \in B$ и $\varphi | H \in R(H) \otimes B$. Осталось применить теорему 24.

Следствие 1. *Для того чтобы некоторая центральная функция на группе G являлась характером, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям теоремы 25 с $B = \mathbf{Z}$.*

Следствие 2. *Для того чтобы центральная функция φ на G являлась характером неприводимого представления, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:*

(а) *для каждой элементарной подгруппы $H \subset G$ и каждого гомоморфизма $\chi : H \to \mathbf{C}$ скалярное произведение $\langle \chi, \varphi | H \rangle_H$ является целым числом;*

(б) $\langle \varphi, \varphi \rangle_G = 1$;

(в) $\varphi(1) \geqslant 0$.

Доказательство. Очевидно, что эти условия необходимы. Обратно, пусть $\varphi = \sum n_\omega \omega$ — разложение центральной функции φ по неприводимым характерам группы G. Тогда из условия (а) следует, что n_ω должны быть целыми, из условия (б) — что $\sum n_\omega^2 = 1$, следовательно, $\varphi = \pm\omega$. Наконец, если $\varphi = -\omega$, то $\varphi(1) < 0$, что противоречит условию (в).

Замечание. Теорему 24 можно переформулировать следующим образом. Предположим, что каждой элементарной подгруппе $H \subset G$ сопоставлена функция $\varphi_H \in R(H)$, удовлетворяющая следующим условиям согласованности:

а) $\varphi_H | H' = \varphi_{H'} | H = \varphi_{H \cap H'} \in R(H \cap H')$,

б) $\varphi_{s^{-1}Hs} = \varphi \circ \operatorname{Int} s$ ($\operatorname{Int} s$: $x \mapsto sxs^{-1}$).

Тогда существует единственная функция $\varphi \in R(G)$, такая, что $\varphi | H = \varphi_H$.

Теорема 26. *Отображение* $\operatorname{Res}: R(G) \to \sum R(H)$ *является прямым вложением.*

[Пусть i: $A \to B$ — гомоморфизм абелевых групп. Будем называть его *прямым вложением*, если он отождествляет A с прямым слагаемым B.]

Доказательство. По теореме Брауэра отображение $\operatorname{Ind}: \sum R(H) \to R(G)$ сюръективно. С другой стороны, оно двойственно к отображению $\operatorname{Res}: R(G) \to \sum R(H)$. Это доказывает теорему.

11.2. Обращение теоремы Брауэра

Лемма. *Пусть x — некоторый p-регулярный элемент группы G, $C \times P$ — ассоциированная с ним элементарная подгруппа и $H \subset G$ — подгруппа, не содержащая сопряженных с $C \times P$ подгрупп. Тогда для каждой функции $\psi \in R(H)$ имеет место сравнение*

$$\psi^*(x) \equiv 0 \pmod p.$$

Доказательство. Пусть $S(x)$ — класс сопряженных с x элементов, а $Z(x)$ — централизатор элемента x в группе G. Тогда

$$\psi^*(x) = \frac{\operatorname{Card} Z(x)}{\operatorname{Card} H} \sum_{y \in S(x) \cap H} \psi(y).$$

Обозначим через $(H_i)_{i \in I}$ различные классы сопряженных элементов группы H, содержащиеся в пересечении $S(x) \cap H$, и выберем в каждом из этих классов по одному представителю y_i. Число элементов, сопряженных с y_i в группе H, равно, следовательно, $\operatorname{Card} H_i$. С другой стороны, оно равно индексу $(H : H \cap Z(y_i))$. Значит,

$$\psi^*(x) = \frac{\operatorname{Card} Z(x)}{\operatorname{Card} H} \sum_{i \in I} \operatorname{Card} H_i \psi(y_i) = \sum_{i \in I} n_i \psi(y_i),$$

где

$$n_i = \frac{\operatorname{Card} Z(y_i)}{\operatorname{Card}(H \cap Z(y_i))}.$$

Предположим, что для каждого $i \in I$, $n_i \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда $\operatorname{Card} Z(y_i)$ и $\operatorname{Card}(H \cap Z(y_i))$ будут делиться на одну и ту же степень числа p. Следовательно, силовская p-подгруппа P_i группы $H \cap Z(y_i)$ является и силовской p-подгруппой группы $Z(y_i)$. Обозначим через C_i циклическую подгруппу, порожденную элементом y_i, тогда произведение $C_i \times P_i$ содержится в группе H и является элементарной подгруппой, ассоциированной с y_i. Так как элементы y_i и x сопряжены, то сопряжены также и подгруппы $C_i \times P_i$ и $C \times P$. Но это противоречит предположению, сделанному относительно группы H. Следовательно, $n_i \equiv 0 \pmod p$ для каждого $i \in I$, откуда, очевидно, следует, что

$$\psi^*(x) \equiv 0 \pmod p.$$

Теорема 27 (Дж. Грин). *Пусть $(H_i)_{i \in I}$ — такое семейство подгрупп группы G, что $R(G) = \sum_{i \in I} \operatorname{Ind} R(H_i)$. Тогда каждая элементарная подгруппа этой группы содержится в некоторой подгруппе, сопряженной с какой-нибудь из подгрупп H_i.*

Доказательство. Пусть $C \times P$ — произвольная p-элементарная подгруппа группы G. Можно считать, что она *максимальна*, следовательно, ассоциирована с некоторым p-регулярным элементом $x \in G$. Если подгруппа $C \times P$ не содержится ни в какой сопряженной с H_i подгруппе, то из предыдущей леммы следует, что $\chi(x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ для каждого $\chi \in \in \sum \mathrm{Ind}\, R(H_i)$, в частности и для единичного характера группы G, что не так. Теорема доказана.

11.3. Спектр кольца $R(G) \otimes A$

Напомним, что *спектром* $\mathrm{Spec}\, A$ коммутативного кольца A называется *множество простых идеалов* этого кольца, снабженное топологией Зарисского.

Пусть A — кольцо, порожденное корнями из единицы порядка g в поле $\mathbf{C}$ и $A^{\mathrm{Cl}(G)}$ — алгебра центральных функций на группе G со значениями в кольце A. Последовательность канонических вложений

$$A \to R(G) \otimes A \to A^{\mathrm{Cl}(G)}$$

порождает следующую последовательность отображений спектров:

$$\mathrm{Spec}\, A \leftarrow \mathrm{Spec}\,(R(G) \otimes A) \leftarrow \mathrm{Spec}\, A^{\mathrm{Cl}(G)}.$$

Известно, что $\mathrm{Spec}\, A$ состоит из нулевого идеала $\{0\}$ и всех максимальных идеалов кольца A. Следовательно, каждому ненулевому элементу $M \in \mathrm{Spec}\, A$ соответствует поле A/M характеристики p, называемое полем вычетов точки M.

Определим идеал $P_{c, M}$ в кольце $A^{\mathrm{Cl}(G)}$, полагая $P_{c, M} = \{f \in A^{\mathrm{Cl}(G)} \mid f(c) \in M\}$, где $c \in \mathrm{Cl}(G)$ и $M \in \in \mathrm{Spec}\, A$.

Теорема 28. *Если сопоставить*

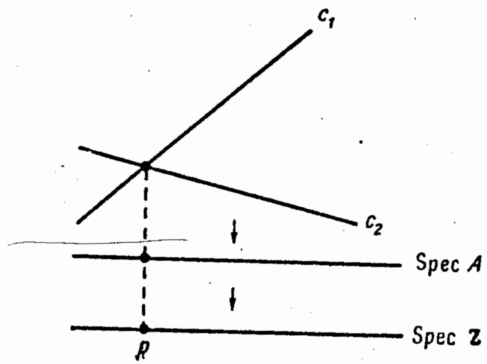
а) *каждому классу* $c \in \mathrm{Cl}(G)$ *идеал* $P_{c, 0}$,

б) *каждому максимальному идеалу* $M \subset A$ *с полем вычетов характеристики* p *и каждому* p*-регулярному классу* c *сопряженных элементов группы* G *идеал* $P_{c, M}$,

то получатся в точности все простые идеалы кольца $R(G) \otimes A$ *по одному разу.*

Доказательство. Известно, что $A^{\mathrm{Cl}(G)}$ является $\mathbf{Z}$-модулем конечного типа. Так как $R(G) \otimes A$ содержится в $A^{\mathrm{Cl}(G)}$, отсюда следует, что кольцо $A^{\mathrm{Cl}(G)}$ является целым над кольцом $R(G) \otimes A$ и простые идеалы кольца $R(G) \otimes A$ поднимаются в кольцо $A^{\mathrm{Cl}(G)}$. Но все простые идеалы кольца $A^{\mathrm{Cl}(G)}$ имеют вид $P_{c, M}$, где $M \in \mathrm{Spec}\, A$. Пусть теперь c — некоторый класс сопряженных элементов группы G и c_r — его p-регулярная компонента. Тогда рассуждения, аналогичные проведенным в доказательстве леммы 3 п. 10.3, показывают, что $P_{c, M} = P_{c_r, M}$. Пусть теперь c_1, c_2 — два различных класса p-регулярных элементов, и пусть в обозначениях леммы 4 $\chi(c_1) \not\equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p)$ и $\chi(c_2) = 0$. Эта лемма показывает тогда, что $P_{c_1, M} \neq \neq P_{c_2, M}$. Эти два факта доказывают теорему.

Замечание. Данное описание $\mathrm{Spec}\,(R(G) \otimes A)$ по существу эквивалентно теореме Брауэра. Его можно изобразить графически, сопоставляя каждому классу сопряженных элементов группы G как элементу кольца $R(G) \otimes A$ условную прямую. При этом два класса c_1 и c_2 будут иметь общую точку над некоторым максимальным идеалом кольца A с полем вычетов характеристики p в том и только том случае, когда совпадают их p-регулярные компоненты:



Предложение 19. *Спектр кольца* $R(G) \otimes A$ *связен.*

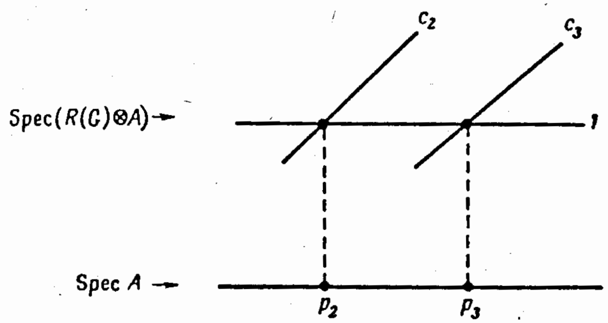
Доказательство. Пусть $x \in G$ — элемент порядка $p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$. Он разлагается в произведение вида

$x = x_{p_1} \ldots x_{p_k}$, где компонента x_{p_i} имеет порядок p^{n_i}. Тогда классы, ассоциированные с элементами x и $x_{p_2} \ldots x_{p_k}$, имеют одну и ту же p_1-регулярную компоненту. Следовательно, соответствующие им прямые в $\mathrm{Spec}(R(G) \otimes A)$ пересекаются. Действуя таким образом, мы доберемся в конце концов до единичного класса. Следовательно, $\mathrm{Spec}(R(G) \otimes A)$ связен.

Следствие. *Спектр кольца $R(G)$ связен.*

В самом деле, он является образом $\mathrm{Spec}(R(G) \otimes A)$ при непрерывном отображении[1]).

Пример. Пусть G — симметрическая группа S_3 перестановок трех элементов. Она имеет три класса сопряженных элементов: 1, c_2 (класс, содержащий элемент второго порядка) и c_3 (класс, содержащий элемент третьего порядка). В кольце A существует только один простой идеал p_2 с полем вычетов характеристики 2 и один простой идеал p_3 с полем вычетов характеристики 3. Тогда $\mathrm{Spec}(R(G) \otimes A)$ состоит из трех прямых, пересекающихся, как указано на чертеже:



§ 12. РАЦИОНАЛЬНОСТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

До сих пор мы изучали представления, определенные только над полем комплексных чисел **C**. В действительности все предыдущие результаты и доказательства остаются справедливыми и над произвольным алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, например над *алгебраическим замыканием* поля **Q**. Посмотрим теперь, что происходит над алгебраически незамкнутыми полями.

[1]) Это отображение индуцировано вложением $R(G) \to R(G) \otimes A$. — *Прим. ред.*

12.1. Кольца $R_K(G)$ и $\overline{R}_K(G)$

На всем протяжении этого параграфа через K обозначается произвольное поле характеристики нуль, а через C — алгебраически замкнутое поле, содержащее поле K. Пусть G — конечная группа. Линейное представление группы G над K — это гомоморфизм $\rho\colon G \to GL(V)$, где V — конечномерное векторное пространство над полем K. Иначе говоря, V является модулем (конечной размерности) над групповой алгеброй $K[G]$. Характер этого представления $\chi_V(s) = \mathrm{Tr}\,\rho(s)$ является центральной функцией на G со значениями в поле K. Обозначим через $R_K(G)$ группу, порожденную этими характерами (всех линейных представлений группы G над K). Она является подгруппой (и даже подкольцом) кольца $R(G) = R_C(G)$, которое рассматривалось в предыдущих параграфах.

Предложение 20. *Пусть (V_i, ρ_i) — все различные неприводимые линейные представления группы G над K (с точностью до изоморфизма) и χ_i — соответствующие им характеры. Тогда*

(а) *функции χ_i образуют базис группы $R_K(G)$;*

(б) *функции χ_i ортогональны между собой.*

[Как обычно, имеется в виду ортогональность относительно билинейной формы $\langle \varphi, \chi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} \varphi(s^{-1}) \chi(s)$.]

Доказательство. Очевидно, что характеры χ_i порождают всю группу $R_K(G)$. С другой стороны, если $i \neq j$, то $\mathrm{Hom}^G(V_i, V_j) = 0$. Но для произвольных представлений V и W с характерами χ_V и χ_W имеет место равенство

$$\dim_K \mathrm{Hom}^G(V, W) = \dim_C \mathrm{Hom}^G(C\otimes V, C\otimes W) = \langle \chi_V, \chi_W \rangle.$$

Отсюда следует, что $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = 0$ и $\langle \chi_i, \chi_i \rangle$ является целым числом, большим или равным 1 (равным 1, если представление V_i абсолютно неприводимо). В результате получаем, что χ_i линейно независимы и ортогональны. Предложение доказано.

Следствие. *Для того чтобы линейное представление группы G над C можно было реализовать над K (т. е. чтобы оно имело вид $C \otimes V$, где V — представление G над K), необходимо и достаточно, чтобы его характер принадлежал группе $R_K(G)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Обратно, пусть χ — характер соответствующего представления; так как $\chi \in R_K(G)$, то

$$\chi = \sum n_i \chi_i,$$

где $n_i \in \mathbf{Z}$. Отсюда для каждого i вытекает соотношение

$$\langle \chi, \chi_i \rangle = n_i \langle \chi_i, \chi_i \rangle.$$

Но так как χ является характером представления, определенного над полем C, то $\langle \chi, \chi_i \rangle \geqslant 0$. Отсюда следует, что все n_i — положительные целые числа и представление с характером χ может быть реализовано в виде прямой суммы представлений $V_i^{n_i}$.

Замечание. Группу $R_K(G)$ можно определить иначе — как *группу Гротендика* категории конечномерных $K[G]$-модулей.

Наряду с этой группой разумно ввести группу $\bar{R}_K(G)$, состоящую из всех тех функций кольца $R(G)$, значения которых *принадлежат полю* K. Очевидно, что $R_K(G) \subset \bar{R}_K(G)$. Более того, имеет место следующее

Предложение 21. *Группа $R_K(G)$ имеет конечный индекс в группе $\bar{R}_K(G)$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что любое неприводимое представление группы G над C может быть реализовано над алгебраическим замыканием поля K, а следовательно, и над некоторым конечным расширением этого поля (это расширение порождается коэффициентами матриц соответствующих матричных представлений). Отсюда следует, что существует такое *конечное* расширение L поля K, что $R_L(G) = R(G)$. Обозначим через $d = [L : K]$ степень этого расширения. Предложение вытекает тогда из следующей леммы.

Лемма. *Имеет место включение*

$$d\bar{R}_K(G) \subset R_K(G).$$

Доказательство. Пусть V — некоторое линейное представление группы G над полем L и χ — его характер. Пространство V можно рассматривать также как векторное пространство над полем K (в d раз большей размерности) и в то же время как некоторое линейное представление G *над* K. Ясно, что характер этого представления равен $\mathrm{Tr}_{L/K}(\chi)$, где $\mathrm{Tr}_{L/K}$ — след, соответствующий расширению L/K. По линейности мы заключаем, что для каждой функции $\chi \in R_L(G) = R(G)$ ее след $\mathrm{Tr}_{L/K}(\chi)$ принадлежит группе $R_K(G)$. В частности, это относится и к $\chi \in \bar{R}_K(G)$, т. е. к тем функциям, значения которых принадлежат полю K. Для них $\mathrm{Tr}_{L/K}(\chi) = d\chi$, откуда $d\chi \in R_K(G)$, что завершает доказательство леммы, а вместе с ней и предложения 21.

Следствие. *Имеет место изоморфизм*

$$\mathbf{Q} \otimes R_K(G) = \mathbf{Q} \otimes \bar{R}_K(G).$$

Замечание. Кольцо $\bar{R}_K(G)$ можно полностью явно описать. Воспользуемся обозначениями предложения 20. Пусть D_i — *централизатор* неприводимого представления V_i. Известно (лемма Шура), что D_i является телом. Обозначим через K_i его центр. Тогда степень $[D_i : K_i]$ является квадратом целого числа и равна, скажем, d_i^2. Можно показать тогда (Шур), что *группа $R_K(G)$ имеет в качестве базиса систему функций $\frac{1}{d_i}\chi_i$*. Этот результат, гораздо более точный, чем предложение 21, показывает, что $R_K(G) = \bar{R}_K(G)$ *тогда и только тогда, когда все D_i коммутативны* (например, в случае, когда коммутативна сама группа G).

12.2. Одна теорема Брауэра

Сохраним обозначения предыдущего пункта, и пусть m = НОК порядков элементов группы G.

Теорема 29 (Брауэр). *Если поле K содержит все корни m-й степени из единицы, то*

$$R_K(G) = R(G).$$

[В силу следствия предложения 20 п. 12.1 это эквивалентно тому, что все линейные представления группы G над C *могут быть реализованы над K*.]

Доказательство. Пусть $\chi \in R(G)$ — произвольный характер. Тогда в качестве легкого следствия теоремы Брауэра (см. п. 10.5, теорема 23) мы получаем, что

$$\chi = \sum n_i \operatorname{Ind} \varphi_i, \quad n_i \in \mathbf{Z},$$

где φ_i — характеры степени 1 подгрупп H_i группы G. Значениями φ_i будут корни m-й степени из единицы, которые принадлежат полю K по предположению. Значит, $\varphi_i \in R_K(H_i)$. С другой стороны, способ построения индуцированных представлений, данный в § 7, показывает, что

$$\operatorname{Ind} R_K(H) \subset R_K(G).$$

Следовательно, $\operatorname{Ind}\varphi_i \in R_K(G)$, откуда $\chi \in R_K(G)$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Каждое линейное представление группы G реализуется над полем $\mathbf{Q}(m)$, полученным присоединением к полю $\mathbf{Q}$ всех корней m-й степени из единицы.*

Этот результат был сформулирован в качестве гипотезы Шуром и доказан им в некоторых частных случаях.

12.3. Ранг группы $R_K(G)$

Возвратимся к случаю произвольного поля K характеристики нуль и вычислим ранг группы $R_K(G)$ или, что то же самое, *число неприводимых представлений группы G над K*.

Пусть число m имеет тот же смысл, что и раньше, и L — поле, полученное присоединением к полю K всех корней m-й степени из единицы. Известно (см., например, Бурбаки, Алгебра, гл. V), что L/K — расширение Галуа, группа Галуа которого является подгруппой мультипликативной группы $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$ кольца $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$. Точнее, для каждого элемента $\sigma \in \operatorname{Gal}(L/K)$ существует такой единственный элемент $t \in (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$ что

$$\sigma(w) = w^t,$$

где $w^m = 1$. Обозначим через Γ_K образ группы $\operatorname{Gal}(L/K)$ в группе $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$, причем для каждого $t \in \Gamma_K$ через σ_t мы будем обозначать соответствующий элемент группы Галуа. В предыдущем пункте рассматривался случай $\Gamma_K = \{1\}$.

Пусть $s \in G$ и n — некоторое целое число. Тогда элемент $s^n \in G$ зависит только от класса вычетов n по модулю порядка элемента s, следовательно, *тем более* по модулю m. В частности, для каждого $t \in \Gamma_K$ определен элемент s^t. Таким образом, группа Γ_K действует на множестве элементов группы G как *группа перестановок*. Два элемента $s, s' \in G$ мы будем называть *Γ_K-сопряженными*, если существует такой элемент $t \in \Gamma_K$, что s' и s^t сопряжены в G. Так определенное отношение является, очевидно, отношением эквивалентности. Оно разбивает группу G на классы Γ_K-эквивалентности.

Предложение 22. *Пусть* $\chi \in R(G)$ *и* $t \in \Gamma_K$, *тогда для каждого* $s \in G$ *имеет место равенство*

$$(*) \qquad \sigma_t(\chi(s)) = \chi(s^t).$$

[Оно имеет смысл, если *значения* χ *принадлежат полю* L.]

Доказательство. Достаточно установить равенство (*) в случае, когда χ — характер некоторого представления ρ группы G. В этом случае собственными значениями автоморфизма $\rho(s)$ будут корни m-й степени из единицы w_i, а собственными значениями автоморфизма $\rho(s^t)$ — их степени w_i^t. Поэтому

$$\sigma_t(\chi(s)) = \sigma_t\left(\sum w_i\right) = \sum \sigma_t(w_i) = \sum w_i^t = \chi(s^t),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Для того чтобы значения некоторой функции* $\chi \in R(G)$ *принадлежали полю* K, *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $t \in \Gamma_K$ *выполнялось равенство*

$$\chi(s^t) = \chi(s).$$

Действительно, утверждение о принадлежности значений $\chi(s)$ полю K равносильно, очевидно, утверждению об инвариантности $\chi(s)$ относительно всех σ_t, $t \in \Gamma_K$.

Теорема 30. *Пусть* χ_i — *характеры всех различных неприводимых представлений группы* G *над* K. *Когда* χ_i *составляют базис пространства функций на* G, *постоянных на классах* Γ_K*-эквивалентности.*

Доказательство. Пусть X — векторное пространство функций на группе G *со значениями в* L, которые постоянны на классах Γ_K-эквивалентности. Согласно предыдущему следствию, $\chi_i \in X$ для каждого i. Кроме того, мы знаем, что χ_i линейно независимы. Осталось показать только, что χ_i *порождают* пространство X. Для этого достаточно для каждого класса Γ_K-эквивалентности P найти такую линейную комбинацию характеров χ_i с коэффициентами из L (или из K, что одно и то же), которая была бы отлична от нуля на элементах из класса P и принимала нулевое значение на всех остальных классах.

Пусть $s \in P$ — некоторый элемент. Известно, что существует функция $\varphi \in L \otimes R(G)$, отличная от нуля на s и равная нулю на всех элементах, не сопряженных с s. Запишем ее в виде $\varphi = \sum c_j \varphi_j$, где $c_j \in L$ и $\varphi_j \in R(G) = R_L(G)$. Положим $\psi_j = \mathrm{Tr}_{L/K}(\varphi_j)$ и $\psi = \sum c_j \psi_j$. Тогда, согласно сказанному в п. 12.1, $\psi_j \in R_K(G)$, откуда следует, очевидно, что $\psi_i \in L \otimes R_K(G)$. Пусть $x \in G$, тогда

$$\psi(x) = \sum c_j \psi_j(x) = \sum c_j \sum_{t \in \Gamma_K} \sigma_t(\varphi_j(x)) =$$

$$= \sum c_j \sum_{t \in \Gamma_K} \varphi_j(x^t) = \sum_{t \in \Gamma_K} \psi(x^t).$$

Из этой формулы видно, что $\psi(x)$ отлична от нуля тогда и только тогда, когда x принадлежит классу Γ_K-эквивалентности P элемента s, что и требовалось доказать.

Следствие. *Число классов неприводимых представлений группы* G *над* K *равно числу классов* Γ_K*-эквивалентности этой группы.*

Доказательство очевидно.

12.4. Аналог теоремы Брауэра[1])

Сохраним обозначения предыдущего пункта. Пусть C — циклическая группа, порядок которой делит число m, и p — некоторое простое число, не делящее порядок G. Обозначим через E полупрямое произведение группы C на некоторую p-группу P, действие которой на C задается следующим условием:

---

[1]) Имеется в виду теорема из § 10, а не из п. 12.2. — *Прим. ред.*

($*_K$) *для каждого $y \in P$ существует такой элемент $t \in \Gamma_K$, что $yxy^{-1} = x^t$ для всех $x \in C$.*

[В случае когда $\Gamma_K = \{1\}$, это условие означает, что группы C и P *коммутируют*, т. е. E является прямым произведением $C \times P$.]

Всякую группу, изоморфную группе типа E, будем называть *Γ_K-элементарной*. Тогда имеет место следующая

Теорема 31. *Каждая функция из $R_K(G)$ представляется в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами функций вида $\operatorname{Ind}\psi$, где $\psi \in R_K(E)$ и E пробегает Γ_K-элементарные подгруппы группы G.*

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы Брауэра (соответствующей случаю $\Gamma_K = \{1\}$) и мы не будем его здесь приводить. [См., например, монографию Кэртиса и Райнера или статью Витта, *J. Crelle*, **190** (1952).]

12.5. Случай поля рациональных чисел

Предположим, что $K = \mathbf{Q}$, тогда $L = \mathbf{Q}(m)$ и известно (Гаусс), что $\Gamma_K = (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$. Понятие Γ_K-эквивалентности сводится в этом случае к следующему.

Элементы $s, s' \in G$ $\Gamma_\mathbf{Q}$-сопряжены тогда и только тогда, когда порожденные ими циклические подгруппы сопряжены в G.

Отсюда

Предложение 23. *Число классов неприводимых представлений группы G над $\mathbf{Q}$ равно числу классов сопряженных циклических подгрупп этой группы.*

Предложение 24. *Для того чтобы каждый характер на группе G принимал значения в поле $\mathbf{Q}$ (следовательно, в кольце $\mathbf{Z}$), необходимо и достаточно, чтобы группа G обладала следующим свойством:*

($**$) *для каждого $s \in G$ и целого числа $t \in \mathbf{Z}$, взаимно простого с порядком элемента s, элементы s и s^t сопряжены.*

Пример. Симметрическая группа S_n обладает свойством ($**$).

Замечание. Если группа G обладает свойством ($**$), то из предложения 24 следует, что $R(G) = \bar{R}_\mathbf{Q}(G)$. В то же время может случиться, что $R_\mathbf{Q}(G) \neq R(G)$. В частности, это так для «кватернионной» группы $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

Предложение 25. *Каждый элемент группы $R_\mathbf{Q}(G)$ является линейной комбинацией с коэффициентами из поля $\mathbf{Q}$ характеров вида $\operatorname{Ind} 1_C$, где C пробегает циклические подгруппы группы G, а 1_C — соответствующий единичный характер.*

[Индуцированный характер $\operatorname{Ind} 1_C$ соответствует в этом случае представлению группы G, действующему естественными перестановками на множестве смежных классов G/C.]

Доказательство. Надо показать, что пространство $\mathbf{Q} \otimes R_\mathbf{Q}(G)$ порождается характерами $\operatorname{Ind} 1_C$. Поскольку оно снабжено невырожденным скалярным произведением $\langle \varphi, \psi \rangle$, достаточно проверить, что каждая функция $\theta \in R_\mathbf{Q}(G)$, ортогональная ко всем $\operatorname{Ind} 1_C$, равна тождественно нулю. Но по теореме Фробениуса мы имеем

$$\langle \theta, \operatorname{Ind} 1_C \rangle = \langle \theta \mid C, 1_C \rangle = \frac{1}{c} \sum_{s \in C} \theta(s),$$

где $c = \operatorname{Card} C$. Тем самым предложение 25 эквивалентно следующему предложению:

Предложение 25. *Если функция $\theta \in R_\mathbf{Q}(G)$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{s \in C} \theta(s) = 0$$

для каждой циклической подгруппы $C \subset G$, то $\theta = 0$.

Доказательство. Проведем индукцию по порядку группы G. Пусть $s \in G$ и $C(s) \subset G$ — циклическая подгруппа, порожденная элементом s. Рассмотрим произвольный элемент $x \in C(s)$. Если x порождает $C(s)$, то $\theta(x) = \theta(s)$, поскольку элементы x и s $\Gamma_{\mathbf{Q}}$-сопряжены. Если же x порождает подгруппу группы $C(s)$, отличную от $C(s)$, то по предположению индукции (для ограничения θ на эту подгруппу) $\theta(x) = 0$. Отсюда мы заключаем, что

$$\sum_{x \in C(s)} \theta(x) = a\theta(s),$$

где a — число образующих группы $C(s)$. Но по предположению

$$\sum_{x \in C(s)} \theta(x) = 0,$$

значит, $\theta(s) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть V и V' — линейные представления группы G над $\mathbf{Q}$. Для того чтобы они были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы для каждой циклической подгруппы выполнялось равенство*

$$\dim V^C = \dim V'^C,$$

где V^C означает подпространство элементов пространства V, инвариантных относительно группы C.

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрим характеры χ и χ' представлений V и V' соответственно. Тогда

$$\dim V^C = \langle \chi \mid C,\ 1_C \rangle.$$

Из этого вытекает, что если положить $\theta = \chi - \chi'$, то $\langle \theta \mid C, 1_C \rangle = 0$ для каждой циклической подгруппы $C \subset G$. Следовательно, согласно предложению 25, $\theta = 0$. Это завершает доказательство.

Замечание. Вообще говоря, не каждый элемент группы $R_{\mathbf{Q}}(G)$ является линейной комбинацией *с целыми коэффициентами* характеров вида $\operatorname{Ind} 1_C$, даже если C пробегает не только циклические подгруппы.

В качестве контрпримера можно указать прямое произведение кватернионной группы на циклическую группу третьего порядка.

12.6. Случай поля вещественных чисел

Пусть V — некоторое представление группы G над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ и χ — его характер. Логически возможны следующие три случая (и каждый из них реализуется для некоторых групп G):

(1) По крайней мере одно из значений характера χ не вещественно. Через ограничение поля скаляров V определяет неприводимое представление группы G над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ с характером $\chi + \bar{\chi}$. Легко видеть, что централизатор этого представления равен $\mathbf{C}$.

(2) Все значения характера χ вещественны и представление V получается с помощью расширения поля скаляров из некоторого вещественного неприводимого представления V_0 с характером χ. Представление V_0 абсолютно неприводимо, его централизатор равен $\mathbf{R}$.

(3) Все значения характера χ вещественны, но V не происходит ни из какого вещественного расширения. Через ограничение поля скаляров V определяет тогда некоторое вещественное неприводимое представление с характером 2χ, его централизатор равен телу кватернионов $\mathbf{H}$.

Если все значения χ вещественны, то определить, какой из последних двух случаев имеет место, можно с помощью следующих соображений.

Тот факт, что χ принимает только вещественные значения, эквивалентен утверждению, что

$$\chi(s^{-1}) = \chi(s) \quad \text{для всех} \quad s \in G,$$

иначе говоря, *V изоморфно своему контраградиентному представлению.* В таком случае существует некоторая ненулевая билинейная форма B на пространстве V, инвариантная относительно группы G. Так как V неприводимо, то эта форма определена однозначно с точностью до скалярного множителя.

Если записать ее в виде $B = B_+ + B_-$, где форма B_+ симметрическая, а форма B_- кососимметрическая, то формы B_+ и B_- также будут инвариантны относительно G. В силу единственности B из этого следует, что либо $B_- = 0$ (и форма B симметрична), либо $B_+ = 0$ (и форма B кососимметрична).

Предложение 26. *В случае* (2) *форма B симметрична. В случае* (3) *она кососимметрична.*

Доказательство. Пусть имеет место случай (2). Тогда на вещественном пространстве V_0 существует невырожденная симметрическая положительно определенная форма B_0, инвариантная относительно G. С помощью расширения поля скаляров форма B_0 определяет на V искомую билинейную симметрическую невырожденную форму B, также инвариантную относительно G.

Предположим теперь, что имеет место случай (3). Тогда на пространстве V существует структура векторного $\mathbf{H}$-пространства, продолжающая заданную структуру $\mathbf{C}$-пространства, причем действие G на V будет $\mathbf{H}$-линейным. В этом случае пространство V можно снабдить $\mathbf{H}$-эрмитовой положительно определенной формой, которую можно предполагать G-инвариантной (воспользовавшись усреднением).

Обозначим эту форму через C. По предположению $C(hx, y) = hC(x, y)$, $h \in \mathbf{H}$, и $C(x, hy) = C(x, y)\bar{h}$. Представим форму C в виде

$$C(x, y) = A(x, y) + B(x, y)j,$$

где $A(x, y) \in \mathbf{C}$, $B(x, y) \in \mathbf{C}$ — некоторые билинейные формы. Непосредственные вычисления показывают, что форма B кососимметрична на $\mathbf{C}$-пространстве V и G-инвариантна. Это завершает доказательство.

Следствие. *В случае* (2) *имеет место соотношение*

$$\frac{1}{g}\sum_{s \in G} \chi(s^2) = 1,$$

где g — порядок группы G, а в случае (3) — *соотношение*

$$\frac{1}{g}\sum_{s \in G} \chi(s^2) = -1.$$

Доказательство. Пусть φ — характер представления $\wedge^2 V$. Если элемент $s \in G$ имеет собственные значения w_i на V, то его собственными значениями на $\wedge^2 V$ будут произведения $w_i w_j$, $i < j$. Отсюда следует, что

$$\varphi(s) = \sum_{i<j} w_i w_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum w_i\right)^2 - \sum w_i^2\right) = \frac{1}{2}\left(\chi(s)^2 - \chi(s^2)\right).$$

Следовательно,

$$\langle \varphi, 1 \rangle = \frac{1}{g}\sum_{s \in G} \varphi(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g}\sum_{s \in G} \chi(s)^2 - \frac{1}{g}\sum_{s \in G} \chi(s^2)\right).$$

Так как V неприводимо и χ принимает вещественные значения, то $\frac{1}{g}\sum_{s \in G} \chi(s)^2 = 1$. С другой стороны, из предложения 26 следует, что представление $\wedge^2 V$ содержит единичное представление с кратностью 0 в случае (2) и с кратностью 1 в случае (3). Таким образом, $\langle \varphi, 1 \rangle = 0$ в случае (2) и $\langle \varphi, 1 \rangle = 1$ в случае (3). Отсюда следуют требуемые утверждения.

Замечание. Легко видеть (например, исследуя структуру централизатора), что все неприводимые представления группы G над $\mathbf{R}$ принадлежат одному из типов (1), (2) и (3). При этом $R_{\mathbf{R}}(G) = \bar{R}_{\mathbf{R}}(G)$ тогда и только тогда, когда отсутствует тип (3).

Упражнения. 1. Показать, что число неприводимых характеров на G с вещественными значениями равно числу тех классов c сопряженных элементов группы G, для которых $c = c^{-1}$.

2. Показать, что для группы *нечетного порядка* существует только один класс сопряженных элементов, совпадающий со своим обратным, это класс единичного элемента.

Вывести из этого (Бернсайд), что такая группа не имеет неприводимых представлений (кроме единичного) с *вещественными* характерами.

БИБЛИОГРАФИЯ

ЧАСТЬ II

Бернсайд (Burnside W.)
[1] Theory of groups of finite order (2-е издание, Cambridge, 1911), переизд. Dover Publ., 1955.
[Этот классический труд содержит множество примеров и приложений теории характеров к изучению строения конечных групп.]
Кэртис, Райнер (Curtis C., Reiner J.)
[1] Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience Publ., New York, 1962. (Русский перевод: Кэртис К. и Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, М., 1969.) [Справочное издание, тяжеловесное, но очень полное.].
Ленг (Lang S.)
[1] Algebra (Гл. XVIII), Addison-Wesley, 1965. (Русский перевод: Ленг С., Алгебра, М., 1968.)
[Изложение сжатое, но удачное; все существенные результаты теории представлений занимают 35 страниц.]
По теории модулярных представлений см. часть III настоящей книги, гл. XII книги Кэртиса и Райнера [1], а также оригинальные статьи Брауэра (цитируемые там).
По группам Гротендика, связанным с конечными группами, см. также статьи Суона (Swan R.) в *Ann. of Math.*, **71** (1960) и **76** (1962) и в *Topology*, **2** (1963).

ЧАСТЬ III

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ БРАУЭРА

ВВЕДЕНИЕ

В этой части книги речь будет идти о сравнении представлений конечной группы G в характеристике p и в характеристике нуль. Оказывается, что все результаты (принадлежащие в сущности Брауэру [1]—[3]) формулируются очень удобно в терминах «групп Гротендика». Это выяснил Суон [1], [2], получивший, кроме того, многочисленные результаты, не упомянутые здесь (см. также Джоржутти [1] и Струкер [1]).

Параграфы 1 и 2 имеют подготовительный характер. В § 3 приведены формулировки основных теорем и дано их применение к представлениям Артина. Доказательства этих теорем составляют содержание § 4, я следовал здесь довольно близко изложению Суона [2] (кроме того, что относится к теореме Фонга — Суона).

В добавлении указано, как перевести эти результаты на язык модулярных характеров. В приложении помещены некоторые определения (группы Гротендика, проективных модулей и т. д.).

Настоящее изложение является только введением в теорию. Читатель, желающий углубить свои знания в этом направлении (блоки, их дефекты, дефектные группы, исключительные характеры), может обратиться к книге Кэртиса и Райнера [1] и к оригинальным статьям Брауэра, Фейта, Грина, Осимы, Судзуки, Томсона и др.

§ 1. ГРУППЫ $R_K(G)$, $R_k(G)$ И $P_k(G)$

1.1. Обозначения и соглашения

Все рассматриваемые группы предполагаются *конечными*, все модули — модулями *конечного типа*.

Обозначим через K поле, полное относительно некоторого дискретного нормирования v, через A —

кольцо его целых элементов, через $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал этого кольца и через $k = A_{\mathfrak{m}}$ — соответствующее поле вычетов. Предположим, что поле K имеет характеристику нуль, а поле k — характеристику p (теория становится тривиальной, если характеристика поля k также равна нулю).

Пусть G — конечная группа и m — наименьшее общее кратное порядков ее элементов. Поле K (соответственно k) будем называть *достаточно большим* (по отношению к G), если оно содержит все корни m-й степени из единицы.

1.2. Кольца $R_K(G)$ и $R_k(G)$

Пусть L — произвольное поле. Обозначим через $R_L(G)$ группу Гротендика категории $L[G]$-модулей. Операция внешнего тензорного произведения (т. е. тензорного произведения над L) превращает $R_L(G)$ в коммутативное кольцо с единицей (даже в «λ-кольцо» в смысле Гротендика).

Для каждого $L[G]$-модуля E обозначим через $[E]$ его образ в кольце $R_L(G)$. Множество элементов вида $[E]$ в кольце $R_L(G)$ будем обозначать через $R_L^+(G)$.

Пусть S_L — множество простых $L[G]$-модулей (с точностью до изоморфизма), тогда классы $[E]$, $E \in S_L$, образуют базис аддитивной группы кольца $R_L(G)$. Все элементы из $R_L^+(G)$ представляются в таком случае в виде линейных комбинаций элементов этого базиса с неотрицательными целыми коэффициентами. Мы будем пользоваться этим в случае $L = K$ и $L = k$.

Замечание. Группу Гротендика можно определить и для категории $A[G]$-модулей. Но она не понадобится в дальнейшем; кроме того, по теореме Суона ([2], теорема 3) она совпадает с группой $R_K(G)$.

1.3. Группы $P_k(G)$ и $P_A(G)$

Они определяются как группы Гротендика категорий *проективных* $k[G]$-модулей и *проективных* $A[G]$-модулей соответственно. Очевидным образом определяются также подмножества $P_k^+(G)$ и $P_A^+(G)$.

Легко видеть, что тензорное произведение $E \otimes_k F$ произвольного $k[G]$-модуля E на проективный модуль F снова является проективным $k[G]$-модулем (достаточно проверить это для свободного модуля F, произвольный случай легко сводится к этому). Это позволяет определить на $P_k(G)$ структуру $R_k(G)$-*модуля*.

1.4. Структура группы $P_k(G)$

Поскольку кольцо $k[G]$ *артиново*, то можно говорить *о проективном накрытии* произвольного $k[G]$-модуля M. Это по определению проективный $k[G]$-модуль P, снабженный сюръективным гомоморфизмом $f\colon P \to M$, который обладает следующим свойством: каждый подмодуль P' модуля P, для которого $f(P') = M$, совпадает со всем модулем P. Доказывается (см. Джорджутти [1], или Габриэль [1], что этим свойством проективное накрытие (P, f) определяется однозначно, с точностью до изоморфизма. Обратно, пусть P — проективный модуль и E — его наибольший полупростой фактормодуль (т. е. фактормодуль модуля P по его радикалу в смысле Бурбаки, Алгебра, гл. VIII, § 6), тогда P является проективным накрытием модуля E. Каждое разложение модуля E в произведение простых модулей задает соответствующее разложение и для модуля P. Из этого следует, что каждый проективный *неразложимый* модуль является проективным накрытием P_E некоторого простого модуля $E \in S_k$ и что любой проективный модуль является *произведением неразложимых* (это разложение в произведение определено однозначно, с точностью до изоморфизма). В частности, семейство $\{[P_E]\}$, $E \in S_k$, составляет базис группы $P_k(G)$, и более того, два проективных модуля P и P' изоморфны тогда и только тогда, когда равны их классы $[P]$ и $[P']$ в $P_k^+(G)$ (отметим, что аналогичное утверждение в группе $R_k(G)$ не верно: если два $k[G]$-модуля попадают в один и тот же класс в

$R_k(G)$, то можно утверждать только, что с точностью до порядка совпадают их факторы в ряде Жордана — Гёльдера).

1.5. Структура группы $P_A(G)$

Редукция $\bar{P} = P/\mathfrak{m}P$ проективного $A[G]$-модуля P является проективным $k[G]$-модулем. Из леммы Накаямы следует, что проективные модули P_1 и P_2 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их редукции $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$. Более того, всякий проективный $k[G]$-модуль Q можно «поднять» до некоторого проективного $A[G]$-модуля, т. е. он изоморфен модулю $\bar{P}$ для подходящего $A[G]$-модуля P. Это доказывается либо с помощью поднятия идемпотентов (что возможно благодаря тому, что кольцо A гензелево), либо последовательным построением модулей $P/\mathfrak{m}^nP$ как проективных накрытий модуля Q в категории $(A/\mathfrak{m}^n)[G]$-модулей.

Отсюда мы получаем, что гомоморфизм редукции

$$P_A(G) \to P_k(G)$$

является *изоморфизмом*. В дальнейшем эти две группы мы будем отождествлять.

1.6. Двойственность

a) Пусть E и F — два $k[G]$-модуля; положим

$$\langle E, F\rangle = \dim \operatorname{Hom}^G(E, F).$$

Отображение $(E, F) \mapsto \langle E, F\rangle$ «билинейно» (относительно точных последовательностей) и определяет, следовательно, билинейную форму

$$R_K(G) \times R_K(G) \to \mathbf{Z},$$

которую мы будем обозначать символом $\langle e, f\rangle$ или $\langle e, f\rangle_K$. Относительно этой формы классы простых модулей $[E]$, $E \in S_K$, ортогональны между собой и $\langle E, E\rangle$ совпадает с размерностью d_E тела эндоморфизмов модуля E. Значит, $\langle E, E\rangle = 1$ тогда и только тогда, когда модуль E абсолютно прост.

Предположим, что поле K достаточно большое (см. п. 1.1). Тогда по теореме Брауэра каждый простой $K[G]$-модуль абсолютно прост. Из этого мы выводим, что определенная выше билинейная форма *невырожденна* в том смысле, что она определяет изоморфизм группы $R_K(G)$ с двойственной ей группой.

б) Пусть E — проективный $k[G]$-модуль, а F — произвольный $k[G]$-модуль. Положим

$$\langle E, F\rangle = \dim \operatorname{Hom}^G(E, F).$$

Снова мы получаем билинейную функцию по E и по F (благодаря тому что модуль E предполагается проективным), которая определяет билинейную форму

$$P_k(G) \times P_k(G) \to \mathbf{Z}.$$

Обозначим ее также символом $\langle e, f\rangle$ или $\langle e, f\rangle_k$. Для каждых двух модулей E, $E' \in S_k$ имеем

$$\operatorname{Hom}^G(P_E, E') = \operatorname{Hom}^G(E, E'),$$

где P_E — проективное накрытие модуля E. Если $E \neq E'$, то отсюда следует, что классы $[P_E]$ и $[E']$ ортогональны; если $E = E'$, то $\langle P_E, E\rangle = d_E = \dim \operatorname{End}^G(E)$. Здесь опять $d_E = 1$ тогда и только тогда, когда модуль E абсолютно прост.

Предположим, что поле k достаточно большое. Тогда легко видеть, что $d_E = 1$ для каждого $E \in S_k$. Из этого следует, что билинейная форма $\langle\ ,\ \rangle_k$ *невырожденна* и базисы $\{[P_E]\}$ и $\{[E]\}$, $E \in S_k$, двойственны друг другу относительно этой формы.

1.7. Расширение поля скаляров

Пусть K' — некоторое расширение поля K, тогда каждый $K[G]$-модуль E определяет с помощью расширения поля скаляров некоторый $K'[G]$-модуль $E \otimes_K K'$. Мы получаем, таким образом, гомоморфизм групп

$$R_K(G) \to R_{K'}(G).$$

Он *инъективен*. В этом можно убедиться, указав явно образ канонического базиса $\{[E]\}$, $E \in S_k$, группы $R_K(G)$. В самом деле, пусть D_E — тело эндоморфизмов модуля E, тогда тензорное произведение $D_E \otimes K'$ разлагается в произведение алгебр матриц $M_{s_i}(D_i)$, где D_i — некоторые тела. Каждое из D_i соответствует простому $K'[G]$-модулю E'_i, и, следовательно, образ класса $[E]$ в группе $R_{K'}(G)$ равен сумме $\sum s_i[E'_i]$.

Более того, каждый простой $K'[G]$-модуль изоморфен одному и только одному из модулей вида E'_i. Из этого описания гомоморфизма $R_K(G) \to R_{K'}(G)$, принадлежащего Шуру [1] (с точностью до языка), вытекают, в частности, следующие факты.

Если каждое из D_E является *полем*, то $s_i = 1$ и гомоморфизм $R_K(G) \to R_{K'}(G)$ отождествляет группу $R_K(G)$ с прямым слагаемым группы $R_{K'}(G)$, т. е. является *прямым вложением*. Если все модули $E \in S_k$ абсолютно просты, то этот гомоморфизм является изоморфизмом.

Имеют место аналогичные результаты и для гомоморфизмов

$$R_k(G) \to R_{k'}(G), \quad P_k(G) \to P_{k'}(G),$$

определенных расширением k' поля скаляров k. Ситуация в этих случаях даже более проста. Тела эндоморфизмов простых $k[G]$-модулей всегда являются *полями, сепарабельными над* k (это очевидно для конечного поля k, общий случай выводится из этого с помощью расширения поля скаляров). Из этого мы заключаем, что гомоморфизм $R_k(G) \to R_{k'}(G)$ является *прямым вложением*. Аналогичный факт имеет место и для гомоморфизма $P_k(G) \to P_{k'}(G)$, для этого достаточно заметить, что функтор «расширение поля скаляров» переводит проективные накрытия также в проективные накрытия.

Предположим теперь, что K' является конечным расширением поля K. Обозначим через A' целое замыкание кольца A в поле K' и через k' — его поле вычетов. Тогда для каждого проективного $A[G]$-модуля E модуль $E' = E \otimes_A A'$ является проективным $A'[G]$-модулем. Более того, его ограничение $E' \otimes_{A'} k'$ изоморфно модулю $E \otimes_A k' = (E \otimes_A k) \otimes_k k'$. Следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_A(G) & \to & P_{A'}(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_k(G) & \to & P_{k'}(G). \end{array}$$

Так как вертикальные стрелки в этой диаграмме — изоморфизмы, то из сказанного выше следует, что гомоморфизм $P_A(G) \to P_{A'}(G)$ является *прямым вложением*.

Замечание. Вложения $R_K(G) \to R_{K'}(G)$, $R_k(G) \to R_{k'}(G)$ и т. д. согласованы с билинейными формами, определенными в предыдущем пункте. Более того, они *коммутируют* с гомоморфизмами c, d, e следующего параграфа.

§ 2. ТРЕУГОЛЬНИК cde

В этом параграфе мы определим некоторые гомоморфизмы c, d и e, составляющие следующий коммутативный треугольник:

$$\begin{tikzcd} P_k(G) \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "e"'] & & R_k(G) \\ & R_K(G) \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd}$$

2.1. Определение гомоморфизма $c: P_k(G) \to R_k(G)$

Сопоставим каждому проективному $k[G]$-модулю P его класс *в группе* $R_k(G)$. Ясно, что этот класс аддитивно зависит от P. Мы получаем, таким образом, гомоморфизм групп

$$c\colon\ P_k(G) \to R_k(G),$$

называемый *гомоморфизмом Картана*. В канонических базисах $\{[P_S]\}$ и $\{[S]\}$, $S \in S_k$, групп $P_k(G)$ и $R_k(G)$ соответственно он задается некоторой квадратной матрицей C типа $S_k \times S_k$, называемой *матрицей Картана* группы G (относительно поля k). Элемент c_{ST} матрицы C равен кратности, с которой простой модуль T входит в ряд Жордана — Гёльдера проективного накрытия P_S модуля S.

2.2. Определение гомоморфизма $d: R_K(G) \to R_k(G)$

Пусть E — некоторый $K[G]$-модуль. Выберем в нем решетку E_1 (т. е. A-подмодуль конечного типа модуля E, порождающий E). Заменяя в случае необходимости решетку E_1 объединением ее образов при действии элементов группы G, можно считать ее *инвариантной относительно* G. Редукция $\bar{E}_1 = E_1/\mathfrak{m}E_1$ решетки E_1 является в таком случае $k[G]$-модулем. Класс $[\bar{E}_1]$ в $R_k(G)$ *не зависит от выбора* E_1. В самом деле, если E_2 — некоторая другая G-инвариантная решетка модуля E, то легкие рассуждения типа «отвинчивания» (dévissage) позволяют считать, что $\mathfrak{m}E_1 \subset E_2 \subset E_1$. Пусть $T = E_1/E_2$ — соответствующая факторгруппа. Она является, очевидно, $k[G]$-модулем, и мы имеем тогда следующую точную последовательность:

$$0 \to T \to \bar{E}_2 \to \bar{E}_1 \to T \to 0,$$

где гомоморфизм $T \to \bar{E}_2$ индуцирован умножением на некоторый униформизирующий элемент π локального кольца A. Отсюда в группе $R_k(G)$ мы получаем равенство

$$[T] - [\bar{E}_2] + [\bar{E}_1] - [T] = 0,$$

т. е. $[\bar{E}_2] = [\bar{E}_1]$, что и требовалось проверить.

Раз это свойство доказано, то отображение $E \mapsto [\bar{E}_1]$ продолжается, очевидно, до гомоморфизма групп

$$d: R_K(G) \to R_k(G),$$

который называется *гомоморфизмом разложения*, а соответствующая матрица D (в канонических базисах групп $R_K(G)$ и $R_k(G)$) — *матрицей разложения*. Она указывает, какие фактормодули соответствуют ряду Жордана — Гёльдера редуцированного простого $K[G]$-модуля.

2.3. Определение гомоморфизма $e: P_k(G) \to R_K(G)$

Функтор тензорного умножения на K определяет гомоморфизм группы $P_A(G)$ в $R_K(G)$. Компонуя его с обратным изоморфизмом к каноническому изоморфизму $P_A(G) \to P_k(G)$ (см. п. 1.5), получаем гомоморфизм

$$e: P_k(G) \to R_K(G).$$

Соответствующую матрицу будем обозначать через E (надеемся, что это не будет вызывать недоразумений).

2.4. Простейшие свойства треугольника cde

а) Этот треугольник *коммутативен*, т. е. $c = de$ или, иначе, $C = DE$. Это очевидно.

б) Гомоморфизмы d и e *сопряжены* друг другу относительно билинейных форм п. 1.6. Иначе говоря,

$$\langle x, d(y)\rangle_k = \langle e(x), y\rangle_K, \quad x \in P_k(G), \quad y \in R_K(G).$$

Доказательство. Можно считать, что $x = [\bar{X}]$, где X — проективный $A[G]$-модуль, и что $y = [Y \otimes K]$, где Y есть $A[G]$-модуль, свободный над A. Тогда A-модуль $\mathrm{Hom}^G(X, Y)$ также свободен над A. Обозначим через r его ранг. Имеем следующие канонические изоморфизмы:

$$\mathrm{Hom}^G(X, Y) \otimes K = \mathrm{Hom}^G(X \otimes K, Y \otimes K)$$

и

$$\mathrm{Hom}^G(X, Y) \otimes k = \mathrm{Hom}^G(X \otimes k, Y \otimes k).$$

Отсюда заключаем, что $\langle e(x), y\rangle = r = \langle x, d(y)\rangle$, что и требовалось доказать.

в) Предположим, что поле K *достаточно большое*. В п. 1.6 было показано, что канонические базисы групп $P_k(G)$ (соответственно $P_K(G)$) и $R_k(G)$ (соответственно $R_K(G)$) *двойственны* друг другу относительно билинейной формы $\langle a, b\rangle_k$ (соответственно $\langle a, b\rangle_K$). Из этого следует, что гомоморфизм e совпадает с *транспонированным* гомоморфизмом к гомоморфизму d, $E = {}^tD$. Так как $C = DE = D\,{}^tD$, то это означает, что матрица C является симметрической.

2.5. Один тривиальный случай

Это случай, когда порядок группы G взаимно прост с характеристикой p. Все три гомоморфизма c, d, e являются тогда изоморфизмами. Точнее, операция редуцирования устанавливает биективное соответствие между множествами S_K и S_k. Если эти множества отождествить, то матрицы C, D и E будут единичными.

Эти факты легко проверить исходя из следующего результата, который можно доказать, например, с помощью операции *усреднения* по группе G: каждый $k[G]$-модуль (соответственно каждый $A[G]$-модуль, свободный над A) проективен.

2.6. Случай p-групп

Предположим теперь, что порядок группы G равен p^n, где p — характеристика поля k. В этом случае легко показать, что $k[G]$ является локальным кольцом с полем вычетов k. Из этого следует, что единственным простым $k[G]$ модулем (с точностью до изоморфизма) является поле k с тривиальным действием группы G. Проективное накрытие его совпадает с модулем $k[G]$ — регулярным представлением группы G. Группы $R_k(G)$ и $P_k(G)$ изоморфны группе $\mathbf{Z}$, гомоморфизм Картана

$$c\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$$

является *умножением на* p^n. Гомоморфизм $d\colon R_K(G) \to \mathbf{Z}$ сопоставляет каждому элементу его K-размерность, а гомоморфизм $e\colon \mathbf{Z} \to R_K(G)$ переводит канонический образующий группы $\mathbf{Z}$ в класс регулярного представления группы G.

§ 3. ТЕОРЕМЫ

3.1. Свойства треугольника cde

Теорема 1. *Имеют место следующие свойства:*

(1) *гомоморфизм c инъективен, порядок его коядра равен некоторой степени числа p;*

(2) *гомоморфизм e является прямым вложением;*

(3) *коядро гомоморфизма d конечно и имеет порядок, равный некоторой степени числа p;*

(4) *если поле K достаточно большое, то гомоморфизм d сюръективен.*

Утверждения (1) и (4) будут доказаны в п. 4.3 как следствия теоремы Брауэра об индуцированных характерах. Утверждение (3) следует из утверждения (1) и из того факта, что $c = de$. В случае когда поле K достаточно большое, гомоморфизм e совпадает с транспонированным к d гомоморфизмом (см. п. 2.4), и из того, что d сюръективен, следует, что e является прямым вложением. В общем случае пусть K' — достаточно большое конечное расширение поля K и k' — соответствующее поле вычетов. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} P_k(G) & \xrightarrow{e} & R_K(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{k'}(G) & \xrightarrow{e'} & R_{K'}(G). \end{array}$$

Здесь, как было замечено выше, гомоморфизм e' является прямым вложением. В силу п. 1.7 таким же будет и гомоморфизм $P_k(G) \to P_{k'}(G)$. Следовательно, их композиция является прямым вложением. Отсюда следует, что таким же будет и гомоморфизм e.

Аналогично доказывается

Следствие 1. *Для каждого конечного расширения K' поля K гомоморфизм*

$$P_k(G) \to R_K(G) \to R_{K'}(G)$$

является прямым вложением.

Инъективность гомоморфизма c эквивалентна следующему утверждению.

Следствие 2. *Если для проективных модулей над $k[G]$ совпадают фактормодули их рядов Жордана—Гёльдера, то эти модули изоморфны.*

Аналогично инъективность гомоморфизма e эквивалентна следующему утверждению.

Следствие 3. *Если два проективных $A[G]$-модуля становятся изоморфными как $K[G]$-модули после тензорного умножения на поле K, то они изоморфны.*

Замечание. Инъективность гомоморфизма c следует из инъективности гомоморфизма e (а, значит, также и из утверждения (4)). Действительно, для каждого $x \in P_k(G)$ имеет место соотношение

$$\langle x, c(x) \rangle = \langle x, d(e(x)) \rangle = \langle e(x), e(x) \rangle.$$

Значит, если $c(x) = 0$, то $\langle e(x), e(x) \rangle = 0$, так как форма $\langle a, b \rangle_K$ положительно определенная. Отсюда $e(x) = 0$, следовательно, $x = 0$.

Положительность квадратичной формы $\langle x, c(x) \rangle$ позволяет доказать также следующие результаты:

а) Определитель матрицы Картана C равен некоторой степени p.

б) Если поле K достаточно большое, то C — положительно определенная матрица.

3.2. Характеризация образа гомоморфизма e

Напомним прежде всего, что элемент $s \in G$ называется p-регулярным, если его порядок взаимно прост с p, в противном случае он называется p-сингулярным. Если порядок элемента s является некоторой степенью p, то он называется p-унипотентным. Каждый элемент $x \in G$ однозначно записывается в виде

$$x = su,$$

где s — p-регулярный, а u — p-унипотентный элементы и $su = us$. Элементы s и u называются в таком случае соответственно p-регулярной и p-унипотентной компонентами элемента x. Они являются степенями элемента x.

Сопоставив каждому $K[G]$-модулю его характер, получим некоторую *аддитивную функцию* от модулей. По линейности она определяет отображение

$$K \otimes R_K(G) \to C(G, K),$$

где $C(G, K)$ — алгебра центральных функций на G со значениями в поле K. Хорошо известно, что это отображение *инъективно*, а если K достаточно большое, то оно является *изоморфизмом*.

Теорема 2. *Образ гомоморфизма e: $P_k(G) \to R_K(G)$ порождается теми элементами группы $R_K(G)$, характеры которых обращаются в нуль на всех p-сингулярных элементах группы G.*

Имеет место даже более точный результат.

Теорема 2′. *Пусть K' — некоторое конечное расширение поля K. Тогда, для того чтобы элемент группы $R_{K'}(G)$ принадлежал образу группы $P_A(G) = P_k(G)$ в $R_K(G)$, необходимо и достаточно, чтобы его характер принимал значения в поле K и обращался в нуль на всех p-сингулярных элементах группы G.*

Доказательство см. в п. 4.4.

3.3. Описание проективных $A[G]$-модулей с помощью их характеров

Имеется в виду характеризация образа множества $P_k^+(G) = P_A^+(G)$ при гомоморфизме e. Известны лишь частные результаты в этом направлении. Прежде всего, имеет место следующий тривиальный, но полезный результат.

Предложение 1. *Пусть $x \in P_A(G)$. Если для некоторого целого $n \geqslant 1$ $nx \in P_A^+(G)$, то $x \in P_A^+(G)$.*

Это очевидно, поскольку $P_A(G) = \mathbf{Z}^r$, а $P_A^+(G) = \mathbf{N}^r$, где $r = \operatorname{Card} S_k$ (см. п. 1.4 и 1.5).

Следствие. *Пусть K' — некоторое конечное расширение поля K и A' — кольцо его целых элементов. Рассмотрим элемент $x \in R_{K'}(G)$ и сделаем относительно него два следующих предположения:*

а) *характер элемента x принимает все значения в поле K;*

б) *существует такое целое число $n \geqslant 1$, что nx получается в результате расширения поля скаляров проективного $A'[G]$-модуля.*

Тогда x также получается из проективного $A[G]$-модуля, определенного с точностью до изоморфизма.

Доказательство. Пусть $N = [K' : K] = [A' : A]$. Обозначим через E' проективный $A'[G]$-модуль, представляющий элемент nx в группе $R_{K'}(G)$, а через E — его ограничение до $A[G]$-модуля. Немедленно проверяется, что характер модуля $E \otimes K$ равен nN раз взятому характеру элемента x. Следовательно, образом класса $y \in P_A(G)$ модуля E в группе $R_{K'}(G)$ является элемент nNx. В силу теоремы 2 характер элемента y обращается в нуль на p-сингулярных элементах группы G, значит, то же самое верно и для характера элемента x. Таким образом, по теореме 2' $x \in P_A(G)$ и так как $nNx \in P_A^+(G)$, то из предложения 1 вытекает, что $x \in P_A^+(G)$. Следствие доказано.

Замечание. Следующие равенства могут быть полезны:

$$P_A^+(G) = P_{A'}^+(G) \cap P_A(G) = P_{A'}^+(G) \cap R_K(G).$$

Отсюда возникает вопрос, верно ли, что $P_A^+(G) = P_A(G) \cap R_K^+(G)$. Ответ, вообще говоря, отрицательный (в качестве контрпримера можно взять за G знакопеременную группу A_5 или группу $SL(2, F_p)$). Имеет место, однако, следующий критерий.

Предложение 2. *Предположим, что группа G удовлетворяет следующему условию.*

(*) *Если K — локальное достаточно большое поле, то $d(R_K^+(G)) = R_k^+(G)$. Тогда $P_A^+(G) = P_A(G) \cap R_K^+(G)$.*

Доказательство. Согласно предыдущему следствию, достаточно доказать эту формулу для достаточно большого поля K. В таком случае пусть $x \in P_A(G) \cap R_K^+(G)$. Тогда, поскольку $x \in P_A(G)$, этот

элемент можно записать в виде

$$x = \sum_{E \in S_k} n_E e([P_E])$$

(см. п. 1.4). Надо доказать теперь, что целые числа n_E не отрицательны. В силу условия (*) для каждого модуля $E \in S_k$ существует такой элемент $z_E \in R_K^+(G)$, что $d(z_E) = [E]$. Так как $x \in R_K^+(G)$, то $\langle x, z_E \rangle \geqslant 0$. Но, с другой стороны, из сопряженности d и e вытекает, что $\langle x, z_E \rangle = n_E$. Поэтому $n_E \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Условие (*) эквивалентно следующему: (**) *Если поле K достаточно большое, то каждый простой $k[G]$-модуль получается редукцией из некоторого $A[G]$-модуля, свободного над A*

(Иначе говоря, каждый простой $k[G]$-модуль *поднимается до* $A[G]$-модуля.)

Теорема 3 (Фонг—Суон). *Предположим, что группа G p-разрешима, т. е. обладает композиционным рядом, все факторы которого являются либо p-группами либо группами порядка, взаимно простого с p. Тогда она удовлетворяет условиям (*) и (**), сформулированным выше.*

Доказательство см. п. 4.5.

Приложения к представлениям Артина

Пусть E — поле, полное относительно дискретного нормирования, F/E — некоторое конечное расширение Галуа с группой Галуа G, и предположим, что поля F и E имеют *одно и то же поле вычетов*. Для каждого элемента $s \in G$, $s \neq 1$, положим

$$i_G(s) = v_F(s(\pi) - \pi),$$

где π — униформизирующий элемент поля F и v_F — дискретная норма этого поля.

Положим далее

$$a_G(s) = -i_G(s), \quad \text{если} \quad s \neq 1,$$

$$a_G(1) = \sum_{s \neq 1} i_G(s).$$

Известно (см., например, Серр [2], гл. VI), что функция a_G является характером некоторого представления группы G (над достаточно большим полем), называемого *представлением Артина*.

Более того, если обозначить

$$\mathrm{sw}_G(s) = 1 - i_G(s) \quad \text{при} \quad s \neq 1,$$

$$\mathrm{sw}_G(1) = \sum_{s \neq 1} (i_G(s) - 1),$$

то мы получим некоторый характер на группе G, равный $a_G - u_G$, где u_G — характер *присоединенного* представления (регулярного минус единичного). Соответствующее представление Гротендик называет *представлением Суона*. Оно тривиально тогда и только тогда, когда расширение F/E *слабо разветвлено* или, что то же самое, когда *порядок группы G взаимно прост с характеристикой поля вычетов*.

Теорема 4. *Пусть l — простое число, отличное от характеристики поля вычетов поля E.*
Тогда

(1) *существует $\mathbf{Q}_l[G]$-модуль с характером a_G;*

(2) *существует такой проективный $\mathbf{Z}_l[G]$-модуль Sw_G, что $\mathrm{sw}_G = a_G - u_G$ является характером модуля $\mathrm{Sw}_G \otimes \mathbf{Q}_l$.*

Эти модули определены однозначно, с точностью до изоморфизма.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение (2), так как (1) получается тогда прибавлением к представлению $\mathrm{Sw}_G \otimes \mathbf{Q}_l$ присоединенного представления. Для этого мы воспользуемся следствием предложения 1, взяв в качестве K поле $\mathbf{Q}_l$, в качестве K' — достаточно большое конечное расширение поля $\mathbf{Q}_l$ и в качестве n — порядок g группы G. Известно, что существует элемент $x \in R_{K'}(G)$, имеющий sw_G своим характером. При этом условие (а) следствия выполняется очевидным образом. Для проверки условия (б) рассмотрим *группы ветвления* $G_i \subset G$. Обозначим через g_i их порядки. Тогда, как показано

в книге Серра [2], стр. 108, имеет место равенство

$$g a_G = \sum_{i \geqslant 0} g_i u_i^*,$$

где u_i — характеры присоединенных представлений групп G_i, а u_i^* — соответствующие *индуцированные* характеры на G. Поэтому

$$g\,\mathrm{sw}_G = \sum_{i \geqslant 1} g_i u_i^*.$$

Но из теории ветвления следует, что *порядки групп G_i, $i \geqslant 1$, взаимно просты с l*. Отсюда вытекает, что каждый $A'[G_i]$-модуль, свободный над A', является *проективным* (см. п. 2.5), следовательно, u_i могут быть реализованы как характеры проективных $A'[G_i]$-модулей (и даже, если угодно, проективных $\mathbf{Z}_l[G_i]$-модулей). Соответствующие индуцированные $A'[G]$-модули также будут проективными. Составляя прямую сумму этих модулей (каждый с кратностью g_i), мы получаем проективный $A'[G]$-модуль с характером $g\mathrm{sw}_G$. Следовательно, все условия следствия проверены и мы получаем из него требуемый результат.

Замечания. Утверждение (1) теоремы 4 доказано в работе Серра [1] более сложным методом, но дающим следующий более сильный результат: алгебра $\mathbf{Q}_l[G]$ является произведением матричных алгебр над некоторыми *полями*.

Утверждение (2) можно вывести из (1), комбинируя последнее с теоремой Фонга — Суона, но такое доказательство будет несколько сложнее.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

4.1. Связь с подгруппами

Пусть H — подгруппа группы G. Операция ограничения кольца скаляров сопоставляет каждому $A[G]$-модулю (соответственно $K[G]$-, $k[G]$-модулю) некоторый $A[H]$-модуль (соответственно, $K[H]$-, $k[H]$-модуль).

При этом проективным модулям соответствуют снова проективные модули. Это определяет следующие гомоморфизмы ограничения групп Гротендика:

$$\mathrm{Res}\colon\ R_K(G)\to R_K(H),$$
$$\mathrm{Res}\colon\ R_k(G)\to R_k(H),$$
$$\mathrm{Res}\colon\ P_k(G)\to P_k(H).$$

Операция тензорного умножения на $k[G]$ (над $k[H]$) сопоставляет каждому $k[H]$-модулю E *индуцированный* $k[G]$-модуль $\mathrm{Ind}\,E=k[G]\otimes E$. Это дает гомоморфизм

$$\mathrm{Ind}\colon\ R_k(H)\to R_k(G)$$

и аналогично для групп R_K и P_k.

Гомоморфизмы Res и Ind *коммутируют* с гомоморфизмами c, d и e, определенными в § 2.

4.2. Теорема Брауэра

Напомним, что группа H называется *p-элементарной*, если она является произведением некоторой p-группы и циклической группы порядка, взаимно простого с p. Группа H называется *элементарной*, если она p-элементарна по крайней мере для одного простого числа p.

Теорема 5 (Брауэр). *Если поле K достаточно большое, то каждый элемент x группы $R_K(G)$ является суммой элементов вида $\mathrm{Ind}(x_H)$, где H пробегает элементарные подгруппы группы G и $x_H\in R_K(H)$.*

Доказательство см. в статье Брауэра и Тейта [1] (это же доказательство воспроизведено в книге Кэртиса и Райнера [1], часть II, § 10, а также в «Алгебре» Ленга, гл. XVII, стр. 535, и в других книгах).

Следствие 1. *Если поле K достаточно большое, то всякий простой $K[G]$-модуль абсолютно прост.*

Доказательство. Это утверждение равносильно, очевидно, тому, что для любого расширения K' поля K каноническое вложение $R_K(G)\to R_{K'}(G)$ сюръективно. В силу теоремы 5 достаточно доказать это в случае, когда группа G элементарна. Но в этом случае легко показать, что каждый простой $K'[G]$-модуль *индуцирован* модулем размерности 1 над некоторой подгруппой группы G и, очевидно, что каждый такой модуль можно считать определенным над K.

Следствие 2. *Пусть k — достаточно большое поле характеристики p. Тогда каждый элемент $y\in R_k(G)$ (соответственно $y\in P_k(G)$) является суммой элементов вида $\mathrm{Ind}(y_H)$, где H пробегает элементарные подгруппы группы G и $y_H\in R_k(H)$ (соответственно $y_H\in P_k(H)$).*

[Другими словами, теорема Брауэра верна в характеристике p.]

Доказательство. Применим теорему 5 к полю K_m, порожденному над $\mathbf{Q}_p$ корнями m-й степени из единицы, и к единичному элементу группы $R_{K_m}(G)$. Получим

$$1=\sum \mathrm{Ind}(x_H),\quad x_H\in R_{K_m}(H).$$

Пусть k_m — поле вычетов поля K_m. Известно, что k_m получается присоединением к полю $\mathbf{F}_p$ корней m-й степени из единицы. Применяя к предыдущему равенству гомоморфизм ограничения d, получаем

$$1=\sum \mathrm{Ind}(x'_H),\quad x'_H=d(x_H)\in R_{k_m}(H).$$

По предположению $k_m\subset k$; мы можем, следовательно, рассматривать x'_H как элементы группы $R_k(H)$, и полученное равенство сохраняется над k. Умножая его на y, получаем

$$y=\sum \mathrm{Ind}(x'_H)\,y.$$

Но имеет место следующий общий факт, вытекающий из ассоциативности тензорного произведения:

$$\mathrm{Ind}(x)\,y=\mathrm{Ind}(x\,\mathrm{Res}(y)).$$

Следовательно, $y=\sum \mathrm{Ind}(x'_H\,\mathrm{Res}(y))$, что и требовалось доказать.

Замечание. Приведенные выше рассуждения приложимы в гораздо более общей ситуации, см. Суон [1], § 3,4.

4.3. Доказательство теоремы 1

а) Доказательство утверждения (4) в случае достаточно большого поля K.

Требуется доказать, что гомоморфизм $d\colon R_K(G)\to R_k(G)$ сюръективен. Согласно следствию 2 теоремы 5, группа $R_k(G)$ порождена подгруппами вида $\operatorname{Ind}(R_k(H))$, где H пробегает элементарные подгруппы группы G. Так как гомоморфизмы d и Ind коммутируют, то достаточно доказать, следовательно, что $R_k(H)=d(R_K(H))$, иначе говоря, *все сводится к случаю, когда группа G элементарна.* Ее можно разложить тогда в произведение

$$G=S\times P,$$

где S — группа порядка, взаимно простого с p, а P — некоторая p-группа (более того, одна из этих двух групп циклична). Так как

$$R_k(G)=R_k(S)\otimes R_k(P),$$

то, как легко видеть, достаточно доказать сюръективность гомоморфизма d для группы S и группы P отдельно. Но каждый из этих случаев тривиален, так как известно (см. п. 25), что для S d является *изоморфизмом*, а для P имеем $R_k(P)=\mathbf{Z}$ и гомоморфизм $d\colon R_K(P)\to\mathbf{Z}$, очевидно, сюръективен, см. п. 2.6.

б) Доказательство утверждения (1) в случае достаточно большого поля K.

Требуется доказать, что гомоморфизм Картана

$$c\colon P_k(G)\to R_k(G)$$

инъективен и что его коядро является p-группой. В действительности, если обозначить через p^n наибольшую степень p, которая делит порядок группы G, то имеет место включение

$$p^nR_k(G)\subset \operatorname{Im} c.$$

В самом деле, можно предполагать, что группа G *элементарна* (в силу следствия 2 теоремы 5). Тогда она разлагается, как и раньше, в произведение вида $S\times P$. И поскольку

$$R_k(G)=R_k(S)\otimes R_k(P)\quad\text{и}\quad P_k(G)=P_k(S)\otimes P_k(P),$$

то достаточно доказать это утверждение отдельно для группы S и для группы P. В первом случае, как известно (п. 2.5), c является изоморфизмом, во втором — его образ равен $p^nR_k(p)=p^n\mathbf{Z}$, см. п. 2.6.

Пусть k' — достаточно большое конечное расширение поля k. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму, соответствующую этому расширению поля скаляров:

$$\begin{array}{ccc} P_k(G) & \xrightarrow{c} & R_k(G)\\ \downarrow & & \downarrow\\ P_{k'}(G) & \xrightarrow{c'} & R_{k'}(G)\end{array}$$

Согласно п. 1.7, вертикальные стрелки в этой диаграмме являются прямыми вложениями. Но поскольку, как мы установили, c' является вложением, то из этого следует прежде всего, что гомоморфизм c инъективен и затем что $\operatorname{Coker} c$ вкладывается в $\operatorname{Coker} c'$ (здесь используется то, что группы $P_k(G)$ и $R_k(G)$ имеют одинаковый ранг). Так как $\operatorname{Coker} c'$ аннулируется умножением на p^n, то тем более это верно для $\operatorname{Coker} c$, что и требовалось доказать.

4.4. Доказательство теорем 2 и 2′

Достаточно доказать теорему 2′. Можно предполагать дополнительно, что поле K' достаточно большое.

1) Необходимость. Пусть E — проективный $A'[G]$-модуль и χ — характер модуля $E\otimes K'$. *Надо доказать, что* $\chi(s)=0$ для каждого p-сингулярного элемента $s\in G$. Можно считать группу G *циклической*, заменяя ее, если нужно, циклической подгруппой, порожденной элементом s. Тогда G можно представить в виде $S\times P$, где S — группа порядка, взаимно простого с p, а P — некоторая циклическая p-группа.

Ясно, что $s \notin S$. Из этого следует, как уже отмечалось выше, что модуль E имеет вид $E_1 \otimes A'[P]$, где E_1 — некоторый проективный $A'[S]$-модуль. Характер модуля $E \otimes K'$ равен тогда произведению $\psi \otimes r_P$, где ψ — характер на группе S, а r_P — характер регулярного представления группы P. Очевидно, что характер $\chi = \psi \otimes r_P$ равен нулю вне S, откуда $\chi(s) = 0$.

2) Достаточность (первая часть). Пусть $y \in R_{K'}(G)$ — некоторый элемент и χ — соответствующий характер. Предположим, что $\chi(s) = 0$ для каждого p-сингулярного элемента $s \in G$. Покажем тогда, что $y \in P_{A'}(G)$ (эта группа отождествляется с подгруппой группы $R_{K'}(G)$ посредством гомоморфизма e).

По теореме 5

$$1 = \sum \operatorname{Ind}(x_H), \quad x_H \in R_{K'}(H),$$

где H пробегает множество элементарных подгрупп группы G. Умножая это равенство на y, получаем, что

$$y = \sum \operatorname{Ind}(y_H), \quad x_H = x_H \operatorname{Res}_H(y) \in R_{K'}(H).$$

Характер каждого элемента y_H обращается в нуль на p-сингулярных элементах группы H. Таким образом, если y_H принадлежит группе $P_{A'}(H)$, то отсюда следует, что y принадлежит группе $P_{A'}(G)$, иными словами, доказательство сводится к случаю, когда группа G *элементарна*.

Тогда, как и раньше, G представляется в виде $S \times P$ и $R_{K'}(G) = R_{K'}(S) \otimes R_{K'}(P)$. Поскольку характер χ равен нулю вне S, можно предполагать, что он имеет вид $f \otimes r_P$, где f — некоторая центральная функция на S, а r_P — характер регулярного представления группы P. Обозначим через ρ некоторый характер группы S, тогда

$$\langle f \otimes r_P, \rho \otimes 1 \rangle = \langle f, \rho \rangle \langle r_P, 1 \rangle = \langle f, \rho \rangle.$$

Так как правая часть равна $\langle \chi, \rho \otimes 1 \rangle$, то она является целым числом, поэтому $\langle f, \rho \rangle \in \mathbf{Z}$ для каждого ρ. Отсюда следует, что f является характером на S и y можно записать в виде

$$y = y_S \otimes y_P,$$

где $y_S \in R_{K'}(S)$, а y_P — класс регулярного представления группы P. Так как $y_S \in P_{A'}(S)$ и $y_P \in P_{A'}(P)$, то, разумеется, $y \in P_{A'}(G)$.

3) Достаточность (вторая часть). Сохраним обозначения раздела 2) и предположим, кроме того, что *все* значения характера χ элемента y *принадлежат полю* K.

Нужно доказать тогда, что y *принадлежит группе* $P_A(G)$. Согласно разделу 2), мы знаем, что во всяком случае $y \in P_{A'}(G)$.

Пусть r — степень расширения K'/K. Посредством ограничения поля скаляров каждый $A'[G]$-модуль определяет некоторый $A[G]$-модуль, при этом проективные модули остаются проективными. Мы получаем, таким образом, следующий гомоморфизм ограничения

$$\pi\colon P_{A'}(G) \to P_A(G).$$

Положим $z = \pi(y)$. *Тогда* $z = ry$. Действительно, это соотношение достаточно проверить в группе $R_{K'}(G)$, для чего в свою очередь достаточно показать, что характер χ_z элемента z равен $r\chi$. Но, очевидно,

$$\chi_z = \operatorname{Tr}_{K'/K}(\chi),$$

и поскольку значения χ принадлежат полю K, то, разумеется, $\chi_z = r\chi$. Следовательно, $y \in P_{A'}(G)$ и $ry \in P_A(G)$. Вспомним, что гомоморфизм

$$P_A(G) \to P_{A'}(G)$$

является *прямым* вложением, см. п. 1.7, и так как ry делится на r в группе $P_{A'}(G)$, то он делится на r также и в группе $P_A(G)$. Это означает, что $y \in P_A(G)$ и доказательство теоремы закончено.

4.5. Доказательство теоремы Фонга — Суона

Назовем группу G *p-разрешимой высоты* h, если она является последовательным расширением h групп, каждая из которых имеет порядок либо взаимно простой с p, либо равный некоторой степени p. Мы хотим показать, что если поле K достаточно большое, то каждый простой $k[G]$-модуль является редукцией некоторого $A[G]$-модуля, свободного над A. Воспользуемся для этого индукцией по h (случай $h=0$ тривиален), а для групп высоты h — индукцией по *порядку* группы.

Пусть I — *нормальный делитель* группы G, порядок которого либо взаимно прост с p, либо является некоторой степенью p, и такой, что факторгруппа G/I имеет высоту 1. Пусть E — некоторый простой $k[G]$-модуль (следовательно, и абсолютно простой). Если I является p-группой, то подпространство $E^I \subset E$ инвариантных относительно I элементов отлично от нуля, значит, оно совпадает со всем пространством E. Таким образом, E является простым $k[G/I]$-модулем. По предположению индукции его можно поднять до некоторого $A[G/I]$-модуля, свободного над A, и в этом случае утверждение доказано.

Предположим теперь, что *порядок группы I взаимно прост с p*. Разложим E в прямую сумму *изотипических* $k[I]$-модулей (т. е. модулей, представимых в виде сумм изоморфных простых модулей):

$$E = \sum E_\alpha,$$

где E_α — изотипические $k[I]$-модули типа $\bar{S}_\alpha$.

Группа G переставляет E_α, и так как $k[G]$-модуль E прост, то она переставляет их транзитивно (отличные от нуля, разумеется). Зафиксируем один из E_α, и пусть G_α — подгруппа группы G, оставляющая E_α (как целое) на месте. Тогда E_α является $k[G_\alpha]$-модулем и очевидно, что модуль E им *индуцирован*. Если $E_\alpha \neq E$, то $G_\alpha \neq G$, и в силу предположения индукции $k[G_\alpha]$-модуль E_α можно поднять до $A[G_\alpha]$-модуля, свободного над A. Тогда, очевидно, это можно сделать и с модулем E.

Мы можем предполагать, следовательно, что *E является изотипическим $k[I]$-модулем типа $\bar{S}$, где $\bar{S}$* — простой $k[I]$-модуль. Так как порядок группы I взаимно прост с p, то $\bar{S}$ можно поднять и единственным образом до некоторого $A[I]$-модуля, свободного над A. Обозначим его через S; тогда очевидно, что модуль $S \otimes K$ абсолютно прост. В силу классических результатов (см., например, [5]) отсюда следует, что $\dim S$ делит порядок группы I, в частности, $\dim S$ *взаимно прост с p*.

Пусть i_s, $s \in G$ — внутренний автоморфизм $x \mapsto sxs^{-1}$ группы I. Тот факт, что модуль E изотипический типа $\bar{S}$, означает, что $\bar{S}$ (а следовательно, также и S) изоморфен модулю, полученному из него с помощью преобразования i_s. Точнее это означает следующее: пусть ρ: $I \to \operatorname{Aut}(S)$ — гомоморфизм, определяющий структуру I-модуля S и U_s — множество таких элементов $t \in \operatorname{Aut}(S)$, что

$$t\rho(x)t^{-1} = \rho(sxs^{-1})$$

для всех $x \in I$, тогда $U_s \neq \varnothing$.

Рассмотрим группу G_1, состоящую из пар (s, t), где $s \in G$, $t \in U_s$. Сопоставляя паре (s, t) элемент s, мы получаем сюръективный гомоморфизм $G_1 \to G$. Его ядром служит группа U_1, которая есть не что иное, как *мультипликативная группа A^** кольца A. Следовательно, G_1 является *центральным расширением* группы G при помощи группы A^*. Она действует на S посредством гомоморфизма $(s, t) \mapsto t$.

Заменим теперь группу G_1 на некоторую *конечную* группу. Пусть $d = \dim S$. Для каждого $s \in G$ элементы $\det(t)$, $t \in U_s$, составляют некоторый смежный класс группы A^* по модулю A^{*d}. Расширив поле K (что допустимо, поскольку это не меняет группу $R_K(G)$), можно предполагать, что этот смежный класс содержит единицу, иначе говоря, что каждое из множеств U_s содержит элемент *с определителем* 1. Если это выполнено, то пусть C обозначает подгруппу группы A^*, порожденную элементами вида $\det(\rho(x))$, $x \in I$, и G_2 — подгруппу группы G_1, порожденную парами (s, t), такими, что $t \in U_s$ и $\det(t) \in C$. Группа G_2 отображается *на* группу G и ядро N этого гомоморфизма изоморфно подгруппе группы A^*, порожденной элементами a, для которых $a^d \in C$. Так как d и $\operatorname{Card} C$ взаимно просты с p, то мы заключаем отсюда, что *N является циклической группой порядка, взаимно простого с p*.

Обозначим через ρ_2: $G_2 \to \mathrm{Aut}(S)$ представление $(s, t) \mapsto t$ группы G_2. Если отождествить группу I с подгруппой группы G_2 посредством вложения $x \mapsto (x, \rho(x))$, то легко видеть, что ограничение ρ_2 на I совпадает с ρ. Мы получили, следовательно, некоторое *продолжение* представления ρ, правда не на саму группу G, но по крайней мере на некоторое ее *центральное расширение* (это — «проективное» представление группы G в смысле Шура). Отметим, что I является нормальным делителем в группе G_2 и что $I \cap N = \{1\}$.

Возвратимся теперь к первоначально заданному $k[G]$-модулю E. Пусть $F = \mathrm{Hom}^I(\bar{S}, E)$ и u: $\bar{S} \otimes F \to E$ — гомоморфизм, сопоставляющий элементу $a \otimes b$ элемент $b(a) \in E$. Из того что модуль E изотипичен типа $\bar{S}$, легко следует, что u осуществляет *изоморфизм* модуля $\bar{S} \otimes F$ на модуль E.

Группа G_2 действует на $\bar{S}$ через ограничение гомоморфизма ρ_2, она действует также и на E с помощью гомоморфизма $G_2 \to G$. Следовательно, G_2 действует на F. Изоморфизм

$$u\colon\ \bar{S} \otimes F \to E$$

совместим с действием группы G_2. Следовательно, E можно отождествить как $k[G_2]$-модуль с тензорным произведением $k[G_2]$-модулей $\bar{S}$ и F. Таким образом, для поднятия E достаточно отдельно поднять $\bar{S}$ и F и результаты тензорно перемножить. В итоге получится некоторый $A[G_2]$-модуль $\tilde{E}$, свободный над A, и поскольку порядок группы N взаимно прост с p, то отсюда будет следовать, что N действует тривиально на $\tilde{E}$ (см. п. 2.5) и $\tilde{E}$ можно будет рассматривать как $A[G]$-модуль, который и будет, разумеется, искомым поднятием модуля E.

Осталось доказать, следовательно, что можно поднять F (возможность поднять $\bar{S}$ уже была установлена). Но F является *простым* $k[G_2]$-модулем (поскольку E прост), на который I действует *тривиально* по построению. Следовательно, его можно рассматривать *как простой* $k[H]$-*модуль*, где $H = G_2/I$.

Группа H является центральным расширением группы G/I (которая p-разрешима высоты $\leqslant h-1$) при помощи циклической группы N, порядка, взаимно простого с p. Если $h=1$, то $H=N$ и поднятие модуля F, очевидно, существует (п. 2.5). Если $h \geqslant 2$, то группа H/N содержит нормальный делитель M/N, удовлетворяющий следующим двум условиям:

а) группа $H/M = (H/N)/(M/N)$ имеет высоту $\leqslant h-2$.

б) группа M/N является либо p-группой, либо порядок ее взаимно прост с p.

Если M/N — p-группа, то, так как порядок группы N взаимно прост с p, группу M можно представить в виде произведения $N \times P$, где P — некоторая p-группа. Те же рассуждения, что и в начале доказательства, показывают, что группа P действует тривиально на F и мы можем рассматривать F как $k[H/P]$-модуль. Но очевидно, что высота группы H/P не превосходит $h-1$ и, следовательно, F можно поднять по предположению индукции. Осталось разобрать случай, когда порядок группы M/N взаимно прост с p. В этом случае порядок группы M также взаимно прост с p; поскольку высота группы H/M не превосходит $h-2$, то высота группы H не превосходит $h-1$. Следовательно, опять можно воспользоваться предположением индукции, что завершает доказательство теоремы.

ДОБАВЛЕНИЕ

Модулярные характеры

Большинство предыдущих результатов принадлежит Брауэру, который излагал их в несколько иной форме — на языке так называемых *модулярных характеров*. Опишем кратко, что это такое.

Предположим для простоты, что поле K достаточно большое. Пусть E — некоторый $k[G]$-модуль и G_{reg} — множество p-регулярных элементов группы G. Тогда для каждого $s \in G_{\mathrm{reg}}$ эндоморфизм s_E модуля E, определяемый элементом s, *диагонализируем*. Его этого надо взять циклическую подгруппу S, порожденную элементом s и выбрать элемент $F \in K \otimes \otimes R_k(S) = K \otimes R_K(S)$, характер которого равен 1 в s и 0 вне s. Тогда искомый элемент E будет иметь вид $E = \mathrm{Ind}(F)$. Очевидно, что он отвечает всем требованиям. Теорема доказана.

Матрицы C, D и E из § 2 следующим образом интерпретируются в терминах модулярных характеров.

Пусть χ_i — все различные неприводимые характеры группы G, φ_α — все неприводимые модулярные характеры и Φ_α — обычные характеры проективных накрытий над $A[G]$ модулей E_α. Характеры χ_i и Φ_α определены на всей группе G (причем Φ_α обращаются в нуль вне G_{reg}, см. теорему 2), а характеры φ_α определены только на G_{reg}. Мы имеем тогда следующие соотношения:

$$\Phi_\beta(s) = \sum c_{\alpha\beta}\varphi_\alpha(s) \quad \text{для всех} \quad s \in G_{\mathrm{reg}},$$

$$\chi_i(s) = \sum d_{\alpha i}\varphi_\alpha(s) \quad \text{для всех} \quad s \in G_{\mathrm{reg}},$$

$$\Phi_\beta(s) = \sum d_{\beta i}\chi_i(s) \quad \text{для всех} \quad s \in G.$$

[Используемые здесь матричные обозначения отличаются от обозначений Брауэра транспонированием.]

Треугольник cde, тензорно умноженный на K, принимает вид

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{array}{c}\text{Центральные функции}\\ \text{на } G, \text{ обращ. в 0 вне } G_{\mathrm{reg}}\end{array}\right\} \arrow[rr, "c\otimes K"] \arrow[dr, "e\otimes K"'] & & \left\{\begin{array}{c}\text{Центральные}\\ \text{функции на } G_{\mathrm{reg}}\end{array}\right\} \\
& \left\{\begin{array}{c}\text{Центральные функции}\\ \text{на } G\end{array}\right\} \arrow[ur, "d\otimes K"'] &
\end{tikzcd}$$

где отображения $c\otimes K$, $d\otimes K$ и $e\otimes K$ определены очевидным образом (соответственно продолжение нулем, ограничение и вложение). Заметим, что отображение $c\otimes K$ является *изоморфизмом* в согласии с теоремой 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сводка определений

Артиновы кольца. Кольцо A называется артиновым, если оно удовлетворяет следующим эквивалентным условиям (см. Бурбаки, Алгебра, гл. VIII, § 2):

а) всякая убывающая цепочка левых идеалов кольца A стабилизируется;

б) левый A-модуль A имеет конечную длину;

в) всякий левый A-модуль конечного типа имеет конечную длину.

Радикал $\mathfrak{r}$ артинового кольца A нильпотентен и факторкольцо $S = A/\mathfrak{r}$ полупросто. Следовательно, его можно разложить в прямое произведение $S = \prod S_i$ простых колец S_i. Каждое из S_i изоморфно матричной алгебре $M_{n_i}(D_i)$ над некоторым телом D_i и обладает единственным (с точностью до изоморфизма) простым модулем E_i. Далее, каждый полупростой A-модуль аннулируется радикалом $\mathfrak{r}$ и, следовательно, соответствует некоторому S-модулю, причем, если он прост, то соответствующий ему S-модуль изоморфен одному из E_i.

Пример. Всякая конечномерная алгебра над полем k является артиновым кольцом; в частности, всякая групповая k-алгебра конечной группы G артинова.

Группы Гротендика. Пусть A — произвольное кольцо и $\mathfrak{F}$ — некоторое семейство левых A-модулей. Группой Гротендика $K(\mathfrak{F})$ семейства $\mathfrak{F}$ называется абелева группа, определенная следующими образующими и соотношениями:

Образующие — каждому модулю $E \in \mathfrak{F}$ сопоставляется образующая $[E]$.

Соотношения — каждой точной последовательности вида

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0, \quad E,\ E',\ E'' \in \mathfrak{F},$$

соответствует одно соотношение $[E] = [E'] + [E'']$.

Пусть H — произвольная абелева группа. Тогда все гомоморфизмы $f\colon K(\mathfrak{F}) \to H$ находятся в биективном соответствии с «аддитивными» отображениями φ: $\mathfrak{F} \to H$, т. е. отображениями, удовлетворяющими условию $\varphi(E) = \varphi(E') + \varphi(E'')$ для каждой указанной выше точной последовательности.

В качестве примеров можно указать наиболее распространенные группы Гротендика семейства всех A-модулей конечного типа и семейства всех проективных A-модулей конечного типа.

Проективные модули. Пусть A — произвольное кольцо и P — некоторый левый A-модуль. Модуль P называется проективным, если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям (см. Бурбаки, Алгебра, гл. II, § 2):

а) существует свободный A-модуль, содержащий модуль P в качестве прямого слагаемого;

б) для каждого сюръективного гомоморфизма f: $E \to E'$ левых A-модулей и для каждого гомоморфизма $g' : P \to E'$ существует такой гомоморфизм g: $P \to E$, что $g' = fg$;

в) функтор $E \mapsto \mathrm{Hom}_A(P, E)$ точен.

Как известно, для того чтобы левый идеал $\mathfrak{a}$ кольца A как модуль был прямым слагаемым в A, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой элемент $e \in A$, что $e^2 = e$ и $\mathfrak{a} = Ae$; каждый такой идеал является, очевидно, проективным A-модулем.

Дискретные нормирования. Пусть K — некоторое поле и K^* — мультипликативная группа его ненулевых элементов. Дискретным нормированием поля K называется (см., например, Серр [2]) такой сюръективный гомоморфизм v: $K^* \to \mathbf{Z}$, что $v(x+y) \geqslant \geqslant \mathrm{Inf}(v(x), v(y))$. Продолжим v на все K, полагая $v(0) = \infty$.

Множество A тех элементов $x \in K$, для которых $v(x) \geqslant 0$, является подкольцом поля K и называется кольцом нормирования v. Оно обладает единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, состоящим из тех элементов $x \in K$, для которых $v(x) > 0$. Поле $k = A/\mathfrak{m}$ называется полем вычетов кольца A (или нормирования v).

БИБЛИОГРАФИЯ

ЧАСТЬ III

Брауэр (Brauer R.)

[1] Über die Darstellung von Gruppen in Galoisshen Feldern, Act. Sci. Ind., 195 (1935), Hermann, Paris.

[2] A characterization of the characters of groups of finite order, *Ann. of Math.*, 57 (1953), 357—377.

[3] Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung, *Math. Zeit.*, 63 (1956), 406—444.

Брауэр, Тейт (Brauer R., Tate J.)

[1] On the characters of finite groups, *Ann. of Math.*, 62 (1955), 1—7.

Габриэль (Gabriel P.)

[1] Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math., France*, 90 (1962), 323—448.

Джоржутти (Giorgiutti I.)

[1] Groupes de Grothendieck, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse*, 26 (1962), 151—207.

Кэртис, Райнер (Curtis C., Reiner J.)

[1] Representation theory of finite groups and associative algebras, Intersc. Publ. (1962), New York. (Русский перевод: Кэртис К. и Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, М., 1969.)

Серр (Serre J.-P.)

[1] Sur la rationalité des représentations d'Artin, *Ann. of Math.*, 72 (1960), 406—420.

[2] Corps locaux, Act. Sci. Ind., 1296, Hermann, Paris, 1962.

Струккер (Strooker J.)

[1] Faithfully projective modules and clean algebras, Groen et Zoon (1965), Leyde.

Суон (Swan R.)

[1] Induced representations and projective modules, *Ann. of Math.*, 71 (1960), 552—578.

[2] The Grothendieck group of a finite group, *Topology*, 2 (1963), 85—110.

Шур (Schur I.)

[1] Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linear Substitutionen, *Sitz. Pr. Akad. Wiss.* (1906), 164—184.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ